ČESKÉ
VYSOKÉ
UČENÍ
TECHNICKÉ
V PRAZE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Numerická aproximace problémů nestlačitelného proudění užitím projekční metody

Numerical approximation of incompressible flow problems using projection method

Karel Vacek **2020/2021**

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval(a) samostatně s použitím literárních pramenů a informací, které cituji a uvádím v seznamu použité literatury a zdrojů informací.

Datum: . . . .

podpis

Rád bych věnoval poděkování doc. RNDr. Petru Sváčkovi Ph.D. za podporu při psaní této diplomové práce a za jeho cenné rady.

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Vacek** Jméno: **Karel** Osobní číslo: **464536**

Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**

Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**

Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**

Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Numerická aproximace problémů nestlačitelného proudění užitím projekční metody

Název diplomové práce anglicky:

Numerical approximation of incompressible flow problems using projection method

Pokyny pro vypracování:

Matematické modelování problémů proudění nestlačitelné tekutiny, formulace problému.
Popis principu aproximace pomocí metody konečných prvků.
Užití konečných prvků a souvislost s Babuška-Brezziho podmínkou stability.
Stabilizace metody pro případ dominující konvekce.
Diskrétní problém a způsoby jeho řešení. Užití rovnice pro tlak.
Řešení vybraných případů.

Seznam doporučené literatury:

1. P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, Vydavatelství ČVUT, 2007
2. Claes Johnson, Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, 1987
3. Alfio Quarteroni, Alberto Valli: Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer 2008.
4. Alexandre J. Chorin, Jerrold E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, 1993
5. H. C. Elman, D. J. Silvester, and A. J. Wathen, FEs and Fast Iterative Solvers: With Applications in Incompressible Fluid Dynamics 2005
6. Stefan Turek, Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems: An Algorithmic and Computational Approach, 1999

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **31.03.2021** Termín odevzdání diplomové práce: **15.08.2021**

Platnost zadání diplomové práce: ____________

doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.	doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.	prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis vedoucí(ho) práce	podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

.

Datum převzetí zadání Podpis studenta

Abstrakt

Diplomová práce se zabýva diskretizací Navierových-Stokesových rovnic pomocí metody konečných prvků. Diskretizované rovnice jsme následně řešili projekčními metodami a užitím Taylorova-Hoodova elementu. V kanále se zpětným schodem jsme pro různá Reynoldsova čísla porovnávali rychlost zmenšování rezidua. Navíc jsme porovnávali délku odtržení u spodní hrany s referenčními hodnotami z experimentálních měření.

Abstract

The thesis deals with discretization the Navier-Stokes equations using the finite element method. Discrete equations are solved by projection methods and using the Taylor-Hood element. We compared the rate of residue reduction for different Reynolds numbers in backward-facing step flow. In addition, we compared the length of reattachment position on the bottom edge with experimental data.

Klíčová slova

Navierovy-Stokesovy rovnice, metoda konečných prvků, projekční metody, Taylorův-Hoodův element, proudění v oblasti zpětného schodu

Key Words

Navier-Stokes equations, finite element method, projection method, Taylor-Hood element, backward-facing step flow

Obsah

1 Úvod

Tato diplomová práce se zabývá numerickým řešením Navierových-Stokesových rovnic, které popisují proudění nestlačitelné Newtonovské tekutiny. Tento systém rovnic je charakterizován jako systém nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Předpoklad nestlačitelné tekutiny navíc znamená, že systém rovnic obsahuje rovnici kontinuity (rovnice 1. řádu) a gradient tlaku (tedy v rovnicích se vyskytují pouze jeho 1. derivace). Při jejich řešení v omezené oblasti Ω hledáme vektorovou funkci rychlosti $\mathbf{u}$ a skalární funkci tlaku p, které splňují dané rovnice a příslušné okrajové podmínky. Využití rovnic nalezneme v mnoha oborech zabývajících se prouděním, například v aerodynamice. Jelikož analytické řešení Navierových-Stokesových rovnic je známo jen v několika jednoduchých případech, jsou tyto rovnice často aproximovány užitím numerických metod.

V této práci provedeme diskretizaci pomocí metody konečných prvků (MKP). Využijeme tzv. decoupled přístup řešení založených na projekčních metodách, viz [14]. Řešení systému Navierových-Stokesových rovnic budeme provádět užitím Helmholtzovy dekompozice. Díky tomuto přístupu jsme schopni řešit v každém iteračním kroku zvlášť rychlost $\mathbf{u}$ a tlak p. Takovýto způsob řešení nepožaduje splnění Babuška-Brezziho (BB) podmínky u kompatibility konečných prvků pro rychlost a tlak, viz [14]. Druhý tzv. coupled způsob řešení její splnění vyžaduje. V této práci zaručíme splnění BB podmínky volbou Taylorova-Hoodova elementu, viz [8]. Oproti decoupled přístupu zde v každém kroku je třeba řešit jednu soustavu (nelineárních) rovnic pro rychlost $\mathbf{u}$, tlak p.

Cílem práce byla realizace a srovnání vybraných projekčních metod včetně srovnání s výsledky užitím řešení pomocí "coupled"přístupu. Tyto metody jsou srovnávány s referenčními hodnotami z numerických výpočtů i experimentálních měření.

Práce je rozdělena do sedmi kapitol. První kapitola je úvod. Ve druhé jsou uvedeny prostory funkcí, na kterých se hledá řešení Navierových-Stokesových rovnic. Ve třetí kapitole nalezneme předpoklad kontinua, dva popisy proudění a následné odvození základních rovnic. Na konci kapitoly je formulace Navierových-Stokesových rovnic. Ve čtvrté kapitole najdeme základní principy metody konečných prvků ukázané na řešení Poissonova problému, poté užití metody konečných prvků na Stokesův problém a v poslední části na Navierovy-Stokesovy rovnice. V páté kapitole jsou popsány projekční metody, kterými lze dané rovnice řešit. Šestá kapitola je věnována realizaci schémat v jazyce C. V sedmé kapitole jsou numerické výsledky získané různými metodami a navíc je porovnáme s experimentem. V poslední kapitole nalezneme závěr a zhodnocení výsledků.

2 Použité značení a prostory funkcí

V práci budeme pracovat s diferenciálními operátory a s různými prostory funkcí. Nejprve pro zápis operátoru gradient a divergence použijeme diferenciální operátor nabla značený ∇. V prostoru $\mathbb{R}^n$ tento operátor označuje vektor

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

kde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ označují parciální derivace (jako operátor) dle jednotlivých proměnných x_i $(i = 1, ..., n)$. Pro vektorovou funkci $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dostáváme operátor divergence div(u), tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathrm{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

Užitím operátoru nabla na skalární funkci $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dostáváme operátor gradient, tedy

$$\nabla u = \mathrm{grad}(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Aplikací divergence na gradient dostáváme Laplaceův operátor, tedy

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

V klasických metodách jsou tyto operátory aplikovány na funkce, které mají spojité příslušné derivace, tedy např. prostory $C^k(\overline{\Omega})$. Nicméně řešení parciálních diferenciálních rovnic budeme hledat nebo aproximovat v jiných prostorech, viz [2]. Oproti klasickým prostorům $C(\overline{\Omega})$ případně $C^k(\overline{\Omega})$ zde budeme pracovat s Lebesgueovy a Soboleovy prostory. Tyto prostory užívají značení derivace dle multiindexu. Multiindex označuje vektor $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T$, kde $\alpha_i \geq 0$ jsou celá nezáporná čísla a $|\alpha|$ označuje číslo $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Uvažujme prostory definované na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Symbolem $D^\alpha u$ rozumíme derivaci dle multiindexu α funkce $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tedy

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}. \tag{1}$$

Řešení Navierových-Stokesových rovnic hledáme v Soboleových prostorech, pro jejich definici užijeme prostory Lebesqueovy. Lebesqueovy prostory budeme pro $p \in < 1, +\infty)$ značit $L^p(\Omega)$. Jsou to prostory

$$L^p(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega |\varphi|^p dx < +\infty \right\},$$

tedy prostory funkcí integrovatelných s p-tou mocninou. Lebesqueovy prostory $L^p(\Omega)$ jsou Banachovy prostory s normou, viz [2]

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\varphi|^p dx\right)^{1/p}.$$

Dále pro $p = 2$ jde o Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Soboleovy prostory jsou označovány $W^{k,p}(\Omega)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $p \in< 1, +\infty)$. Jsou to prostory funkcí jejichž všechny zobecněné derivace až do k-tého řádu včetně patří do prostoru $L^p(\Omega)$, tedy

$$W^{k,p}(\Omega) = \{\varphi \in L^p(\Omega), \quad D^\alpha\varphi \in L^p(\Omega) \qquad \forall\alpha \leq k\},$$

kde $D^\alpha\varphi$ jsou zobecněné derivace, viz vztah (1). Prostory $W^{k,p}(\Omega)$ jsou Banachovy prostory s normou

$$\|\varphi\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha\varphi\|^p_{L^p(\Omega)} dx\right)^{1/p}.$$

Speciální případ Soboleova prostoru nastává pro $p = 2$, kdy tento prostor je opět Hilbertovým prostorem se skalárním součinem

$$(\varphi, \psi)_{W^{k,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} (D^\alpha\varphi, D^\alpha\psi)_{L^2(\Omega)}.$$

Tento prostor se také označuje symbolem $H^k(\Omega)$, tedy

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

Zatím jsme uvažovali prostory, kam patří pouze skalární funkce. Budeme pracovat i s prostory vektorových funkcí na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, kde $n = 2$ nebo $n = 3$. Proto zavedeme značení prostorů

$$[C^k(\overline{\Omega})]^n = \mathbf{C}^k(\overline{\Omega}),$$

$$[L^p(\Omega)]^n = \mathbf{L}^p(\Omega),$$

$$[H^k(\Omega)]^n = \mathbf{H}^k(\Omega).$$

Vektorové funkce budeme označovat také tučně např. $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dále budeme pracovat s prostory funkcí s nulovou divergencí, použijeme ho pro Stokesův a Navierův-Stokesův problém. Tento prostor budeme značit jako $\mathbf{H}^k_\sigma(\Omega)$, tedy

$$\mathbf{H}^k_\sigma(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^k(\Omega), \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \quad \text{v}\, \Omega \right\}.$$

2.1 Použité věty

Pro úpravu rovnic, ve kterých se vyskytuje integrál po hranici a objemový integrál lze použít Gaussovu-Ostrogradského větu, viz [3]. Zde je ovšem potřeba doplnit předpoklad Lipschitzovsky spojité hranice, viz např. [1].

Věta 2.1 (Gaussova-Ostrogradského)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí a* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$. *Pak platí*

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) dS = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) dx,$$

kde $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, ..., n_n)$ *je jednotkový vektor vnějších normál k oblasti* Ω.

Dále budeme potřebovat Greenovu větu, kterou použijeme například pro úpravu Laplaceova operátoru, najdeme ji v [3].

Věta 2.2 (Greenova)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí a funkce* $u, v \in H^1(\Omega)$. *Pak platí následující vztah*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

kde $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, ..., n_n)$ *je jednotkový vektor vnějších normál k oblasti* Ω.

Pro určení řešitelnosti úloh, kdy má daná úloha řešení a jestli je jednoznačné, budeme používat Laxovu-Milgramovu větu, uvedenou s důkazem viz [6].

Věta 2.3 (Laxova-Milgramova)**.** *Nechť V je Banachův prostor, L lineární forma na V a* ***a*** *je symetrická bilineární forma na V. Nechť dále existují kladné konstanty M, m, C takové, že pro libovolná* $u, v \in V$ *platí*

$$|\boldsymbol{a}(u,v)| \leq M\|u\|_V \|v\|_V,$$

$$\boldsymbol{a}(u,u) \geq m\|u\|^2,$$

$$|L(v)| \leq C\|v\|_V.$$

Pak existuje právě jedno $u^* \in V$ *takové, že*

$$a(u^*, v) = L(v), \qquad \forall v \in V,$$

a navíc

$$\|u^*\|_V \leq \frac{C}{m}.$$

Jelikož budeme užívat Dirichletovy okrajové podmínky pro parciální diferenciální rovnice, musíme definovat hodnoty funkcí ze Soboleových prostorů na hranici oblasti. K tomu nám pomůže věta o stopách uvedená v [6].

Věta 2.4 (Věta o stopách)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s Lipschitzovsky spojitou hranicí. Pak existuje právě jeden lineární operátor stopy $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ takový, že*

$$\gamma\varphi = \varphi|_{\partial\Omega},$$

pro libovolnou funkci $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

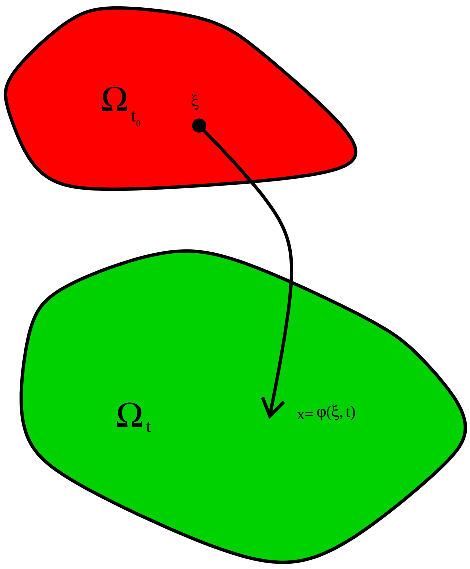
3 Matematické modely proudění

Pro odvození základních rovnic proudění si nejprve uvedeme dva odlišné náhledy, jak ho lze popsat. Dále si postupně odvodíme Navierovy-Stokesovy rovnice jako matematické formulace zákonů zachování.

V této části použijeme předpoklad kontinua. Zatímco reálná tekutina se skládá z diskrétních částic, v modelu kontinua předpokládáme její spojitý popis. Předpokládáme tedy, že částice kontinua jsou nekonečně malé a že spojitě vyplňují uvažovaný prostor, přesněji viz [3]. Pohyb každé částice takto uvažované tekutiny můžeme navíc popsat pomocí Lagrangeova popisu, viz [3]. O Lagrangeově zobrazení předpokládáme, že je dostatečně hladké, opět přesněji viz [3]. Místo Lagrangeova popisu se ale používá raději popis Eulerův. Vztah obou těchto přístupů zde stručně popíšeme.

3.1 Lagrangeův a Eulerův popis proudění

Nejprve si uvedeme Lagrangeův popis, který sleduje pohyb každé částice s referencí $\xi \in \Omega_{t_0}$ v čase $t \in (T_1, T_2)$. Označíme v čase $t \in (T_1, T_2)$ symbolem Ω_t objem tvořený stejnými částicemi jako objem Ω_{t_0} v čase t_0. Trajektorie částic $\xi \in \Omega_{t_0}$ v čase t popíšeme pomocí



Obr. 1: Deformace kontrolní oblasti Ω v čase.

Lagrangeova zobrazení φ, tedy

$$x = \varphi(\xi, t),$$

kde ξ udává referenci určující danou částici, zde jako polohu v čase $t_0 \in (T_1, T_2)$, tedy platí $\xi = \varphi(\xi, t_0)$.

Na Obrázku 1 vidíme příklad deformace kontrolního objemu Ω_{t_0} na objem Ω_t. Materiálová charakteristika $\hat{f}(\xi, t)$ částice s referencí ξ v čase t pak může být definována jako funkce

$f(x,t)$ polohy $x \in \Omega_t$ a času t dle

$$f(x,t) = \hat{f}(\xi,t), \quad x = \varphi(\xi,t). \tag{2}$$

Rychlost částice s referencí $\xi \in \Omega_{t_0}$ je dána jako

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\xi,t), \tag{3}$$

a užitím (2) definujeme (Eulerovskou) rychlost v bodě $x \in \Omega_t$ v čase t jako

$$\mathbf{u}(x,t) = \hat{\mathbf{u}}(\xi,t), \tag{4}$$

kde $x = \varphi(\xi,t)$. Zrychlení částice $\xi \in \Omega_{t_0}$ je pak dáno

$$\hat{\mathbf{a}}(\xi,t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(\xi,t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{u}}(\xi,t),$$

kde rovnice platí, pokud derivace existují, viz [3]. Nebo-li zrychlení částice, která se v čase t vyskytuje v bodě x, je dána jako $\mathbf{a}(x,t) = \hat{\mathbf{a}}(\xi,t)$, kde $x = \varphi(\xi,t)$. Zrychlení $\mathbf{a}(x,t)$ je pak dáno (pro částici s referencí)

$$\mathbf{a}(x,t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(\xi,t) = \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(\varphi(\xi,t),t)] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\varphi(\xi,t),t) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(\varphi(\xi,t),t)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\xi,t),$$

kde $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\xi,t) = \mathbf{u}(x,t)$. Zrychlení $\mathbf{a}$ lze tedy sepsat v Eulerovském popisu

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u},$$

nebo také užitím materiálové derivace

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla),$$

jako

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

3.2 Věta o transportu a odvození základních rovnic

Pro odvození diferenciálních forem zákonů zachování mechaniky kontinua si nejprve symbolem $\sigma(t) \subset \Omega_t$ označme kontrolní objem tvořený v každém okamžiku stejnými částicemi. Nechť nějaká fyzikální veličina je reprezentovaná funkcí f, $f = f(x,t)$ je definovaná pro $x \in \Omega_t$ v libovolném čase $t \in (T_1, T_2)$. Celkové množství této veličiny obsažené v objemu $\sigma(t)$ je pak dáno

$$\Phi(t) = \int_{\sigma(t)} f(x,t)dx, \tag{5}$$

jejíž změnu v čase budeme sledovat. Změna veličiny Φ v čase bude tedy dána

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{\sigma(t)} f(x,t)dx\right). \tag{6}$$

Pro pozdější vyjádření pravé strany rovnice (6) užijeme Reynoldsův transportní teorém, uvedený s důkazem v [3]. Jestliže má funkce $f = f(x,t)$ spojité a omezené první derivace na oblasti $\{(x,t) : t \in (T_1, T_2), x \in \sigma(t)\}$. Pak pro každé $t \in (T_1, T_2)$ pro derivaci (6) platí

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\sigma(t)} f(x,t)dx\right) = \int_{\sigma(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \mathrm{div}(f(x,t)\mathbf{u}(x,t))\right) dx,$$

kde **u** je rychlost (4).

Proudění tekutiny jako kontinua popisujeme pomocí rovnic odvozených ze zákonů zachování, viz [3]. Jde o zákon zachování hmoty, jemuž odpovídá rovnice kontinuity. Zákon zachování hybnosti vyjádřený Navierovými-Stokesovými rovnicemi a dále zákon zachování energie. Pro popis stlačitelného proudění je kromě rovnice kontinuity, momentové rovnice a rovnice energie ještě třeba celý systém doplnit o stavovou rovnici. Pro popis nestlačitelného proudění uvažujeme pouze rovnice kontinuity a momentové rovnice. Energetická rovnice slouží pro dodatečný popis teplotního pole.

3.2.1 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity je vyjádřením zákona zachování hmoty. Hmotnost m kontrolního objemu $\sigma(t)$ je dána

$$m = \int_{\sigma(t)} \rho(x,t)dx, \tag{7}$$

kde $\rho = \rho(x,t)$ je funkce popisující hustotu v místě x v čase t. Dle zákona zachování hmoty tedy platí $\frac{dm}{dt} = 0$. Užitím Reynoldsova transportního teorému dostáváme

$$\frac{dm}{dt} = \int_{\sigma(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})\right) dx = 0.$$

Vzhledem k tomu, že kontrolní objem $\sigma(t) \subset \Omega_t$ lze volit libovolně, dostáváme platnost rovnice

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{8}$$

v celé oblasti Ω_t, viz [3].

3.2.2 Momentová rovnice

Zákon zachování hybnosti říká, že změna hybnosti kontrolního objemu $\sigma(t)$ je rovná účinku objemových a povrchových sil působících na tento objem. Změna hybnosti kontinua v kontrolním objemu $\sigma(t)$ je dána výrazem

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\sigma(t)}(\rho u_i)dx\right). \tag{9}$$

Účinek objemových sil je pak dán dle

$$\int_{\sigma(t)}(\rho f_i)dx, \tag{10}$$

kde ρf_i označují složky hustoty objemové síly. Povrchových sil pak uvažujeme ve tvaru

$$\int_{\partial\sigma(t)}(\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij}n_j)dS, \tag{11}$$

kde $\tau = (\tau_{i,j})_{ij}$ je Cauchyho tenzor napětí, viz [3]. Zákon zachování hybnosti pak sepíšeme

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\sigma(t)}(\rho u_i)dx\right) = \int_{\sigma(t)}(\rho f_i)dx + \int_{\partial\sigma(t)}\left(\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij}n_j\right)dS. \tag{12}$$

Užitím Reynoldsova transportního teorému a pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty dostáváme

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i \mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i\right)dx = 0. \tag{13}$$

Vzhledem k tomu, že kontrolní objem $\sigma(t)$ lze volit libovolně a za předpokladu hladkosti uvažovaných funkcí získáme diferenciální tvar momentových rovnic známý jako Navierovy-Stokesovy rovnice, viz [3]. Dostáváme tedy

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i \mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho f_i \quad \text{v } \Omega_t. \tag{14}$$

Pokud uvažujeme model nestlačitelného proudění, tedy proudění charakterizovaného $\rho = konst$, pak rovnice kontinuity (8) dostává tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{15}$$

Dále uvažujeme Newtonskou nestlačitelnou tekutinu, viz [3], kde složky tenzoru napětí jsou dány dle

$$\tau_{ij} = -p\delta_{i,j} + 2\mu d_{ij}, \tag{16}$$

kde p je tlak, μ je dynamická viskozita, d_{ij} jsou složky tenzoru rychlosti deformace dány dle

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{17}$$

Rovnici (17) dosadíme do rovnice (16), výsledný vztah do rovnice (14) a navíc celou rovnici vydělíme konstantní hustotou ρ. Získáme rovnici

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \text{div}(u_i\mathbf{u}) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - \nu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = f_i, \tag{18}$$

kde $\tilde{p}$ je kinematický tlak (tedy tlak p dělený hustotou) a $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ je kinematická viskozita (zde předpokládáme konstantní viskozitu). V dalším budeme značit kinematický tlak stejně jako dynamický a dle užitého zápisu bude zřejmé, zda jde o tlak nebo kinematický tlak. Užitím rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu (8) v rovnici (18) dostaneme vektorový zápis rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}. \tag{19}$$

Rovnice (19) je pak doplněna o rovnici (8), a dále také o okrajové a počáteční podmínky.

3.3 Formulace okrajové úlohy pro Navierovy-Stokesovy rovnice

Řešení nestacionárních Navierových-Stokesových rovnic znamená najít funkce $\mathbf{u} : \Omega_t \to \mathbb{R}^2$ a $p : \Omega_t \to \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{v } \Omega, \tag{20}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega_t,$$

kde $\mathbf{u}$ je vektor rychlosti, p označujeme tzv. kinematický tlak. V tzv. klasické formulaci hledáme funkci rychlosti $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega}_t)$ a tlaku $p \in C^1(\overline{\Omega}_t)$. Systém rovnic (20) je doplněn okrajovou podmínkou

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{na } \partial\Omega_t,$$

a počáteční podmínku

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_{poc} \quad \text{v } \Omega.$$

Počáteční podmínka $\mathbf{u}_{poc} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ by měla splňovat $\nabla \cdot \mathbf{u}_{poc} = 0$ v Ω. Okrajová podmínka $\mathbf{g}$ pak

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

kde o funkci $\mathbf{g}$ předpokládáme, že je spojitá na $\partial\Omega$.

Pokud užijeme stacionární model proudění, tedy proudění nezávislé na čase, je časová změna $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ nulová. Řešení stacionárních Navierových-Stokesových rovnic znamená najít funkce $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$ a $p \in C^1(\overline{\Omega})$ takové, že platí v Ω rovnice

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \tag{21}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

a je splněna okrajová podmínka

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{na } \partial\Omega,$$

o funkci $\mathbf{g}$ předpokládáme, že je spojitá a splňuje $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = 0$.

Pokud v rovnici (40) provedeme náhradu veličin x, u, t, a p za bezrozměrné veličiny

$$x' = \frac{x}{L_{char}}$$

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U_{char}},$$

$$t' = \frac{t}{\frac{L_{\infty}}{U_{char}}},$$

$$p' = \frac{p}{\rho U_{char}^2},$$

$$\mathbf{f'} = \mathbf{f} \frac{L_{char}}{\rho U_{char}^2},$$

kde U_{char}je charakteristická rychlost a L_{char} je charakteristická délka. Vynecháme-li v zápisu $'$, pak dostaneme rovnice v bezrozměrném tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f},$$

kde $Re = \frac{L_{char} U_{char}}{\nu}$ je Reynoldsovo podobnostní číslo.

4 Užití metody konečných prvků

Nejprve se budeme zabývat jednoduchým skalárním problémem ve 2D, na kterém si demonstrujeme základní postup diskretizace v metodě konečných prvků, viz [6]. Budeme řešit Poissonův problém, pro jednoduchost budeme uvažovat pouze nulové Dirichletovy okrajové podmínky omezené oblasti Ω. Formulace klasického problému je následující. Najít $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tak, aby platilo

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega, \tag{22}$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde funkce $f \in C(\overline{\Omega})$. Pro použití MKP nejprve zformulujeme problém ve slabém smyslu.

4.1 Slabá formulace problému

Slabou formulaci problému získáme tak, že vezmeme testovací funkci $v \in \mathcal{V}$ z prostoru testovacích funkcí

$$\mathcal{V} = \left\{\varphi \in H^1(\Omega), \quad \varphi = 0 \quad \text{na } \partial\Omega\right\}.$$

Touto funkcí vynásobíme rovnici (22), zintegrujeme přes celou oblast Ω a užijeme Greenovu větu na levé straně rovnice, tedy dostaneme

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = \int_\Omega (vf) dx,$$

kde integrál přes hranici $\partial\Omega$ je nulový neboť $v \in \mathcal{V}$. Dostáváme tedy, že řešení (22) splňuje

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_\Omega (vf) dx, \tag{23}$$

pro všechna $v \in \mathcal{V}$. Nyní definujeme bilineární formu **a** pro libovolné $u, v \in \mathcal{V}$ předpisem

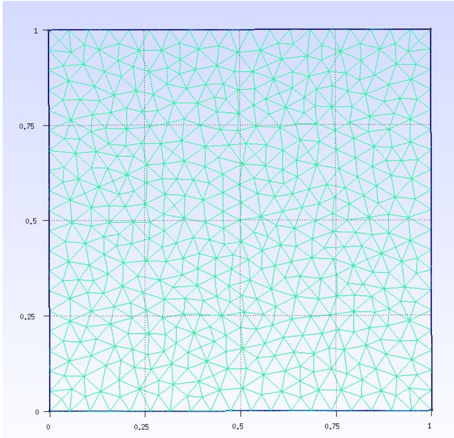
$$\mathbf{a}(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) dx,$$

a lineární formu L pro libovolné $v \in \mathcal{V}$ jako

$$L(v) = \int_\Omega (vf) dx.$$

Slabá formulace problému (22) tedy je: hledáme $u \in \mathcal{V}$ takové, že platí

$$\mathbf{a}(u, v) = L(v), \tag{24}$$



Obr. 2: Triangulace oblasti Ω.

pro všechna $v \in \mathcal{V}$. Existenci a jednoznačnost řešení zaručuje Laxova-Milgramova věta, viz [6]. Předpoklady jsou splněny i pro funkci $f \in L^2(\Omega)$. Splnění V-eliptičnosti vyplývá z Poincaré-Friedrichs nerovnosti.

4.2 Triangulace oblasti

Pro užití MKP budeme aproximovat prostor $\mathcal{V}$ prostorem konečných prvků $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$. Prostor $\mathcal{V}_h$ budeme konstruovat užitím tzv. přípustné triangulace τ_h oblasti Ω, viz [6]. Přípustná triangulace τ_h má následující vlastnosti:

- triangulace je tvořena konečným počtem uzavřených trojúhelníků,
- $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{K \in \tau_h} K$,
- pro $K_i, K_j \in \tau_h$ a $K_i \neq K_j$ platí buď $K_i \cap K_j = \emptyset$ nebo $K_i \cap K_j$ je tvořen společným vrcholem, nebo $K_i \cap K_j$ je tvořen společnou stranou trojúhelníků.

Při realizaci MKP pracujeme s jednotlivými trojúhelníky a vrcholy triangulace. Počet vrcholů uvnitř oblasti Ω značíme N_p, počet trojúhelníků N_{ELE}. Na Obrázku 2 vidíme příklad triangulace.

4.3 Volba konečných prvků a jeho báze

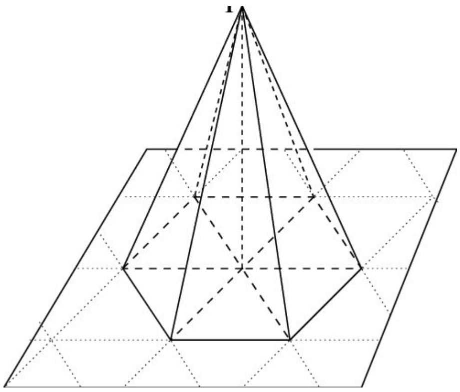
Na triangulaci τ_h zvolíme konečný prostor $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ jako prostor spojitých po částech lineárních funkcí, tedy

$$\mathcal{V}_h = \left\{ \varphi \in C(\Omega) : (\varphi\big|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h) \; a \; (\varphi = 0 \quad \text{na } \partial\Omega) \right\}.$$

Funkce z tohoto prostoru jsou jednoznačně určeny hodnotami ve vrcholech uvnitř oblasti (ve vrcholech ležících na $\partial\Omega$ jsou nulové) dané triangulace. Dimenze $\dim(\mathcal{V}_h) = N_p$. Bázi potom volíme jako funkce $\varphi_1, ..., \varphi_{N_p} \in \mathcal{V}_h$ splňující

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j},\ \forall j \in 1, ..., N_p.$$

Příklad takové funkce vidíme na Obrázku 3.



Obr. 3: Příklad grafu bázové funkce uvedený v [4].

4.4 Diskretizace

Pro zvolenou přípustnou triangulaci τ_h omezené oblasti Ω byl zvolen diskrétní prostor $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ s dimenzí $\dim(\mathcal{V}_h) = N_p$, popsanou v kapitole 4.3. Diskrétní úloha je dána takto: hledáme $u_h \in \mathcal{V}_h$ tak, aby platilo

$$\int_\Omega (\nabla u_h \cdot \nabla v_h) dx = \int_\Omega (f v_h) dx, \tag{25}$$

pro všechna $v_h \in \mathcal{V}_h$. Užitím báze prostoru $\mathcal{V}_h$ hledáme řešení u_h ve tvaru

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_p} \alpha_j \varphi_j,$$

kde $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{N_p})^T \in \mathbb{R}^n$ jsou neznámé koeficienty. Řešení diskrétní úlohy u_h má rovnost (25) splňovat pro libovolnou funkci v_h, speciálně například pro

$$v_h = \varphi_i,\ pro\ i = 1, ..., N_p.$$

Dosazením do diskretizované rovnice (25) dostáváme

$$\sum_{j=1}^{N_p} \alpha_j \int_\Omega (\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i) dx = \int_\Omega (f \varphi_i) dx,\ pro\ i = 1, .., N_p$$

neboli jde o soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde jednotlivé prvky matice **A** jsou vyjádřeny jako

$$a_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j) dx,$$

a vektor pravé strany

$$b_i = \int_{\Omega} (f\varphi_i) dx.$$

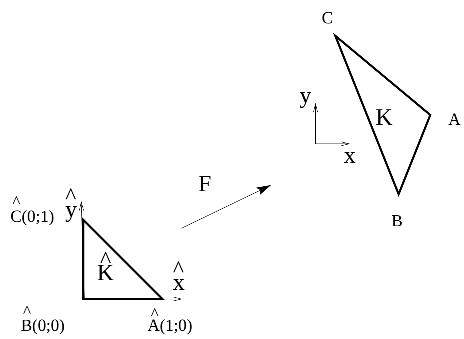
Matice **A** je symetrická, pozitivně definitní a navíc řídká matice, viz [6]. Tato soustava rovnic lze řešit např. metodou sdružených gradientů, viz [7]

4.4.1 Referenční trojúhelník/prvek a afinní transformace na prvek/trojúhelník

V případě použití MKP potřebujeme vyjádřit derivaci bázových funkcí na jednotlivých trojúhelnících K triangulace τ_h, viz [6]. Pro nestrukturovanou síť, kterou vidíme na Obrázku 2, používáme transformaci prvku K na referenční trojúhelník. Referenční trojúhelník $\hat{K}$ volíme jako trojúhelník s vrcholy $\hat{A} = [0,0]$, $\hat{B} = [1,0]$ a $\hat{C} = [0,1]$, na Obrázku 4. Lineární bázové funkce na $\hat{K}$ jsou dány předpisem

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1(\hat{x},\hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y},\\ \hat{\varphi}_2(\hat{x},\hat{y}) &= \hat{x},\\ \hat{\varphi}_3(\hat{x},\hat{y}) &= \hat{y}.\end{aligned}$$

Kde dolní index označuje vrchol trojúhelníku, k němuž se daná bázová funkce váže. Bázi



Obr. 4: Transformace $\hat{K} \to K$.

z referenčního trojúhelníku $\hat{K}$ převedeme pomocí zobrazení $F : \hat{K} \to K$, viz Obrázek 4. Vrcholy trojúhelníku K nechť jsou A,B,C o souřadnicích $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$ a $C = [x_3, y_3]$. Zobrazení F bude dáno předpisem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Bázové funkce na trojúhelníku K jsou pak dány předpisem

$$\varphi_i(x,y) = \hat{\varphi}_i\left(F^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right),$$

nebo

$$\varphi_i(x,y) = \hat{\varphi}_i(\hat{x},\hat{y}),$$

kde $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = F_k(x,y)$. Derivace bázových funkcí pak dostaneme pomocí řetízkového pravidla. Ukážeme si zde derivaci bázové funkce $\hat{\varphi}_1$ vzhledem k proměnné x je tedy

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \hat{y}}{\partial x} = -1\frac{\partial \hat{x}}{\partial x} - 1\frac{\partial \hat{y}}{\partial x},$$

a k proměnné y

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{y}}\frac{\partial \hat{y}}{\partial y} = -1\frac{\partial \hat{x}}{\partial y} - 1\frac{\partial \hat{y}}{\partial y}.$$

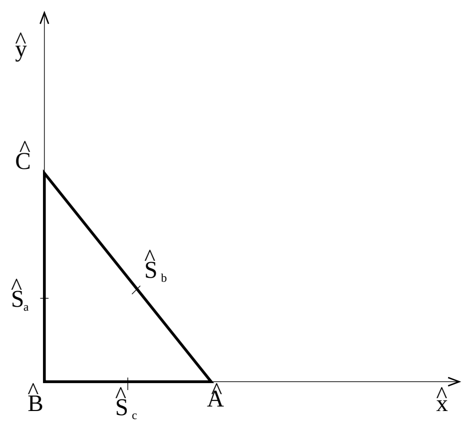
Vyjádření derivace ostatních bázových funkcí je analogické.

4.4.2 Kvadratická báze

Pro zlepšení aproximace můžeme použít prostor

$$\mathcal{V}_h = \left\{\varphi \in C(\Omega) : \varphi\big|_K \in P_2(K), \forall K \in \tau_h\right\},$$

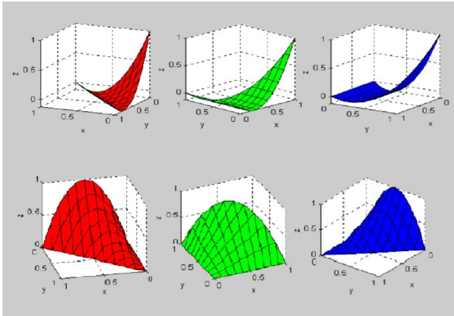
po částech kvadratických funkcí, při užití referenčního prvku definujeme pouze kvadratické bázové funkce. Na dané triangulaci budeme navíc potřebovat označit středy stran. Příklad referenčního trojúhelníku s vyznačenými stupni volnosti pro kvadratické bázové funkce vidíme na Obrázku 5.



Obr. 5: Referenční trojúhelník pro kvadratickou bázovou funkci, viz [5].

Příklad kvadratických bázových funkcí na referenčním trojúhelníku vidíme na Obrázku 6.

Bázové funkce na obecném trojúhelníku triangulace můžeme definovat obdobně jako v předchozí části.



Obr. 6: Graf kvadratické bázová funkce uvedený v [5].

Kvadratické bázové funkce mají na referenčním trojúhelníku tvar, viz [5]

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}_1(\hat{x},\hat{y}) &= (1-\hat{x}-\hat{y})(1-2\hat{x}-2\hat{y}),\\
\hat{\varphi}_2(\hat{x},\hat{y}) &= \hat{y}(2\hat{x}-1),\\
\hat{\varphi}_3(\hat{x},\hat{y}) &= \hat{x}(2\hat{y}-1),\\
\hat{\varphi}_4(\hat{x},\hat{y}) &= 4\hat{x}(1-\hat{x}-\hat{y}),\\
\hat{\varphi}_5(\hat{x},\hat{y}) &= 4\hat{x}\hat{y},\\
\hat{\varphi}_6(\hat{x},\hat{y}) &= 4\hat{y}(1-\hat{x}-\hat{y}).
\end{aligned}
$$

Bázové funkce s indexy $1, ..3$ odpovídají vrcholům A, B, C a indexy $4, ..., 6$ středům stran S_a, S_b a S_c. Derivace bázových funkcí provedeme stejným způsobem jako v kapitole 4.4.1.

4.5 Užití MKP pro Stokesův problém

Použijeme MKP pro diskretizaci Stokesova problému. Obecná formulace problému je najít vektorovou funkci $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ a skalární funkci $p \in C^1(\Omega) \cap \overline{\Omega}$ tak, aby platilo

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{v}\ \Omega, \tag{26}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{v}\ \Omega,$$

kde $\nu > 0$ je vazkost a $\mathbf{f} = (f^1, f^2)^T$ nějaká vektorová funkce $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$. Problém (26) je doplněn o okrajovou podmínku

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{na}\ \partial\Omega. \tag{27}$$

Pro jednoduchost budeme předpokládat Dirichletovu okrajovou podmínku $\mathbf{g} = 0$ všude po hranici oblasti. Obecně pro existenci řešení $\mathbf{g}$ nutně musí splňovat podmínku

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) dS = 0.$$

4.5.1 Slabá formulace

Problém (26) s okrajovou podmínkou (27) nyní formulujeme ve slabém smyslu. Vezmeme funkce $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $q \in \mathcal{Q} = L^2(\Omega)$, vynásobíme rovnice (26) a zintegrujeme

$$\int_\Omega (-\nu\Delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v}) dx = \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dx, \tag{28}$$

$$\int_\Omega ((\nabla \cdot \mathbf{u}) q) dx = 0.$$

Použijeme Greenovu větu a dostáváme formulaci najít $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ a $p \in \mathcal{Q}$, takové, že

$$\int_\Omega (\nu\nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} - p(\nabla \cdot \mathbf{v})) dx = \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dx, \tag{29}$$

$$\int_\Omega ((\nabla \cdot \mathbf{u}) q) dx = 0,$$

pro všechna $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ a pro všechna $q \in \mathcal{Q}$. Existence a jednoznačnost řešení lze ukázat užitím prostoru

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_\sigma(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0 \right\} \subset \boldsymbol{\mathcal{V}},$$

tedy prostory funkcí s nulovou divergenci, více v [6]. Pokud vezmeme testovací funkci $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_\sigma$ je druhá podmínka splněna automaticky a navíc gradient tlaku $p(\nabla \cdot \mathbf{v})$ bude nulový.

Rovnice (29) bude záviset pouze na rychlosti. Nejprve si zadefinujeme lineární a bilineární formu

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega (\nu \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) dx,$$

$$L(\mathbf{v}) = \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dx,$$

následně dostáváme slabou formulaci ve tvaru najít $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_\sigma$ tak, aby platilo

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \tag{30}$$

pro všechna $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\sigma$.

Pro tento problém lze použít Laxovu-Milgramovu větu. Pro $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ jsou předpoklady splněny, forma je lineární, spojitá a $\mathcal{V}_\sigma$ eliptická, více v [6]. Máme tedy existenci a jednoznačnost řešení pro rychlost. Pro tlak užijeme následujícího lemmatu. Slabou formulaci jsme udělali v prostoru $\mathcal{V}_\sigma$. Lemma nám dokáže existenci tlaku a jeho jednoznačnost až na konstantu.

Lemma 4.1. *Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $\mathcal{V} = \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ a nechť $\mathcal{L}$ je prvek duálního prostoru $\mathcal{V}'$. Pak platí*

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = 0,$$

pro všechna $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_\sigma$ tehdy a jen tehdy, pokud existuje $p \in L^2(\Omega)$ takové, že

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{v}) = (p, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_\Omega,$$

pro všechna $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$. Taková funkce p je určená jednoznačně až na aditivní konstantu.

V lemmatu je užito pojmu duálního prostoru $\mathcal{V}'$, který označuje prostor všech lineárních omezených operátorů $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, viz [2]. Lemma i jeho důkaz je uvedeno v [10]. Ověřili jsme tedy existenci a jednoznačnost řešení Stokesova problému. Rychlost $\mathbf{u}$ je jednoznačně určena a tlak p je určen jednoznačně, až na aditivní konstantu. Pro jednoznačnost řešení (29) budeme prostor $\mathcal{Q}$ volit jako

$$\mathcal{Q} = L_0^2(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : \int_\Omega \varphi dx = 0\}.$$

Přejdeme k diskretizaci pomocí metody konečných prvků.

4.5.2 Diskretizace

Diskretizaci provedeme obdobně jako jsme popisovali u skalárního problému. Vyjdeme z formulace (29), protože slabá formulace na prostoru $_\sigma$ je nevhodná, bázové funkce by museli splňovat podmínku nulové divergence. Vezměme tedy prostor funkcí popsaný v kapitole 4.3. Rychlost **u** bude z prostoru po částech kvadratických funkcí a tlak p bude po částech lineárních funkcí. Máme $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}$ a $\mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q}$, kde

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_h = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \varphi\big|_K \in P_2(K), \forall K \in \tau_h \right\},$$

$$\mathcal{Q}_h = \left\{ \varphi \in L_0^2(\Omega) : \varphi\big|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h \right\}.$$

Prostor $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ bude na hranici také nulový. Diskretizovaná slabá formulace Stokesova problému je tedy: hledáme $\mathbf{u}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ a $p_h \in \mathcal{Q}_h$ tak aby platilo

$$\int_\Omega (\nu \nabla \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h - p_h(\nabla \cdot \mathbf{v}_h))dx = \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h)dx, \tag{31}$$

$$-\int_\Omega ((\nabla \cdot \mathbf{u}_h)q_h)d\mathbf{x} = 0,$$

pro všechna $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ a pro všechna $q_h \in \mathcal{Q}_h$. Označme bázi prostoru $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ jako $\boldsymbol{\Phi}_j$, pro $j = 1, ..., \dim(\boldsymbol{\mathcal{V}}_h) = N_u$ a bázi prostoru $\mathcal{Q}_h$ jako θ_j, pro $j = 1, ..., \dim(\mathcal{Q}_h) = N_p$. Aproximaci rychlosti $\mathbf{u}_h$ pak lze vyjádřit jako

$$\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^{N_u} \vec{\alpha}_j \boldsymbol{\Phi}_j,$$

a aproximaci tlaku p_h obdobně

$$p_h = \sum_{j=1}^{N_p} \beta_j \theta_j.$$

Za testovací funkce $\mathbf{v}_h$ a q_h volíme v rovnici (31) nejprve v 1. rovnici

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\Phi}_i, \quad \text{pro} \quad i = 1, ..., N_u,$$

a následně ve 2. rovnici

$$q_i = \theta_i, \quad \text{pro} \quad i = 1, ..., N_p.$$

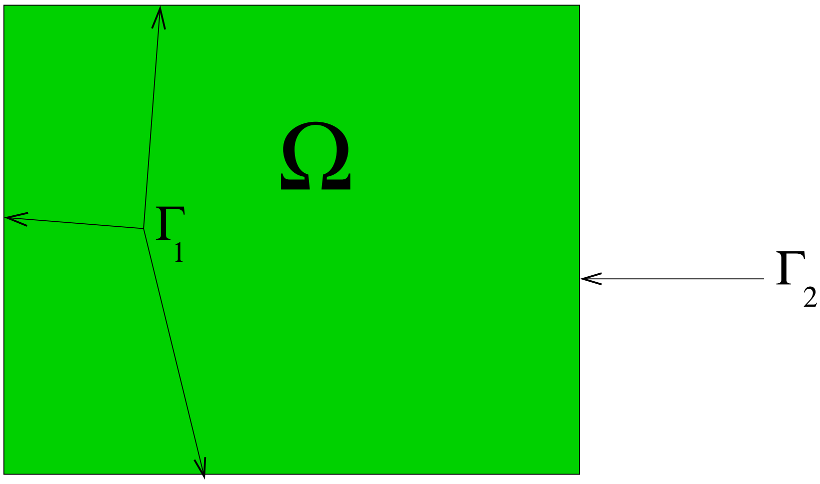
Dosadíme vyjádření rychlosti $\mathbf{u}_h$ a tlaku p_h do rovnice (31), čímž dostaneme maticový zápis

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B_x \\ 0 & A & B_y \\ B_x^T & B_y^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f^1} \\ \vec{f^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde matice $A = (a_{ij})$ má prvky $a_{ij} = \int_\Omega (\nu(\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j)dx$, matice $B_x = (b_{ij}^x)$ pak prvky $b_{ij}^x = \int_\Omega((-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x})\theta_j)dx$ a matice $B_y = b_{ij}^y$ prvky $b_{ij}^y = \int_\Omega((-\frac{\partial\varphi_i}{\partial y})\theta_j)dx$. Řešitelnost této soustavy je zajištěna volbou prostorů $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h$, $\mathcal{Q}_h$ splňující Babuška-Brezziho podmínku, viz [9].

4.6 Užití MKP pro Navierovy-Stokesovy rovnice

Oproti předchozí části budeme při řešení problémů nestlačitelného proudění předepisovat různé okrajové podmínky na různých částech hranice. To odpovídá tomu, že v technických úlohách neznáme rychlost, např. na výstupní části hranice, a je zde tedy nutné předepsat jinou podmínku. Pro tyto účely uvažujme omezenou oblast $\partial\Omega$, která se skládá ze dvou disjunktních částí Γ_1 a Γ_2, viz Obrázek 7.



Obr. 7: Oblast Ω.

Klasická formulace okrajového problému pro stacionární Navierovy-Stokesovy rovnice je pak dán: hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ a skalární funkci $p \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tak, aby platilo

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{v } \Omega, \tag{32}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega,$$

kde $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ a na hranici jsou předepsány okrajové podmínky

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{na } \Gamma_1, \tag{33}$$

$$-\nu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} + p\mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2, \tag{34}$$

kde $\mathbf{g} \in \mathbf{C}(\Gamma_1)$. Pro jednoduchost navíc předpokládejme, že $\mathbf{g}$ je stopa nějaké funkce (také značené jako) $\mathbf{g}$ z prostoru

$$\mathcal{V}_{\Gamma_1,\sigma} = \left\{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \text{div}(\boldsymbol{\varphi}) = 0 \text{ v } \Omega,\ \boldsymbol{\varphi} = 0 \text{ na } \Gamma_1\right\}.$$

4.6.1 Slabá formulace

Nejprve zvolíme prostory testovacích funkcí

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \boldsymbol{\varphi}(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_1\},$$

$$\mathcal{Q} = L^2(\Omega).$$

Volba $\mathcal{Q}$ odpovídá tomu, že vzhledem k okrajové podmínce (34) je řešení slabé formulace dáno jednoznačně, nikoliv s dovětkem až na konstantu. Slabou formulaci získáme vynásobením první rovnice (32) testovací funkcí $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ a druhou rovnici (32) funkcí $q \in \mathcal{Q}$ a navíc zintegrujeme přes celou oblast Ω

$$\int_\Omega ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla p \cdot \mathbf{v}) dx = \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) dx, \tag{35}$$

$$\int_\Omega ((\nabla \cdot \mathbf{u}) q) dx = 0.$$

Použijeme Greenovu větu na vazký člen a na člen s gradientem tlaku, tím dostáváme

$$\int_\Omega (-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p) \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} (-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dx + \int_\Omega (\nu (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v}) dx.$$

Vzhledem k volbě $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ je testovací funkce rovna nule na Γ_1 a na Γ_2 je nulový člen $-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\mathbf{u}} + p\mathbf{n}$, tedy integrál přes $\partial\Omega$ bude nulový. Zavedeme trilineární formu

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_\Omega ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \, dx,$$

definovanou pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$. Formulace problému (32) s okrajovými podmínkami (33) a (34) pak je: hledáme $\mathbf{u} \in \mathbf{g} + \boldsymbol{\mathcal{V}}, p \in \mathcal{Q}$ taková, že

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p)_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega, \tag{36}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_\Omega = 0,$$

pro všechna $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ a pro všechna $q \in \mathcal{Q}$. Pro důkaz existence a jednoznačnosti řešení lze užít prostor $\boldsymbol{\mathcal{V}}_\sigma$ z kapitoly 4.5.1. Úloha (36) je pak v prostoru $\boldsymbol{\mathcal{V}}_\sigma$ formulována takto: hledáme $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_\sigma + \mathbf{g}$ tak, aby platilo

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega,$$

pro všechna $\mathbf{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_\sigma$. Jelikož se v rovnici vyskytuje nelineární člen $c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, nelze pro důkaz existence a jednoznačnosti použít Laxovu-Milgramovu větu. Důkaz za dodatečných předpokladů podrobněji v [6]. Pro aproximaci problému ale vyjdeme z formulace (36).

4.6.2 Diskretizace

Diskretizaci provedeme obdobně jako u Stokesova problému volbou prostoru $\boldsymbol{\mathcal{V}}_h \subset \boldsymbol{\mathcal{V}}$ a $\mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q}$ uvedených v kapitole 4.5.2. Pro stabilitu schématu tato volba musí splňovat diskrétní Babuška-Brezzi podmínku, viz [8], tedy že existuje $\beta > 0$ tak, že

$$\inf_{p_h \in \mathcal{Q}_h} \sup_{\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)}{\|p_h\|_{L^2(\Omega)} \|v_h\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta.$$

Splnění nerovnosti zaručíme vhodnou volbou prostorů, viz [9]. Na přípustné triangulaci tuto podmínku splňuje například Taylorův-Hoodův element, nebo mini element, viz [9]. Diskrétní formulace (36) pak bude: hledáme $\mathbf{u}_h \in \mathbf{g}_h + \boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ a $p_h \in \mathcal{Q}_h$ tak aby platilo

$$c(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega - (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, p_h)_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega, \tag{37}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_\Omega = 0,$$

pro všechna $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ a pro všechna $q_h \in \mathcal{Q}_h$. Zde $\mathbf{g}_h$ označuje nějakou aproximaci okrajové podmínky $\mathbf{g}$.

Problém (37) je nelineární, jeho řešení získáme linearizací nelineárního členu $c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega$. Volíme $\mathbf{u}_h^0 \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h + \mathbf{g}_h$ libovolně a postupně pro $n = 0, 1.., N$ hledáme $\mathbf{u}^{n+1}$, p^{n+1} tak aby platilo

$$c(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega - (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, p_h^{n+1})_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega, \tag{38}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}, q_h) = 0,$$

pro všechna $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{\mathcal{V}}_h$ a pro všechna $q_h \in \mathcal{Q}_h$. Řešení budeme hledat ve stejném tvaru jako v kapitole 4.5.2. Diskretizované rovnice (38) v maticovém zápise pak vypadají

$$\begin{pmatrix} A(\mathbf{u}^n) & 0 & B_x \\ 0 & A(\mathbf{u}^n) & B_y \\ -B_x^T & -B_y^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}^1 \\ \vec{f}^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Na rozdíl od Stokesova problému není tato bloková matice symetrická díky trilineárnímu členu. Matice $A(\mathbf{u}^n) = (a(\mathbf{u}^n)_{ij})$ má prvky $a(\mathbf{u}^n)_{ij} = c(\mathbf{u}^n, \varphi_i, \varphi_j) + \nu(\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j)_\Omega$.

V případě nestacionárního problému se v rovnicích objeví člen časové derivace $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ a je třeba uvažovat ještě počáteční podmínku. Problém se změní na : hledáme vektorovou funkci $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, kde $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ a skalární funkci $p = p(x, t)$, kde $p(x) \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tak, aby platilo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{v } \Omega, \tag{40}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega,$$

kde $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$. Rovnici (40) doplníme o podmínky

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + p\mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2,$$

a počáteční podmínku

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{poc}(x), \quad \text{pro } x \in \Omega_0.$$

Počáteční podmínka $\mathbf{u}_{poc}$ musí splňovat div$(\mathbf{u}_{poc}) = 0$. Nejprve tento problém diskretizujeme v čase. Uvažujeme časový krok $\Delta t > 0$ a označme $t_n = n\Delta t$ a aproximace rychlosti pro všechna $x \in \Omega$

$$\mathbf{u}^n(x) \approx \mathbf{u}(x, t_n),$$

a tlaku

$$p^n(x) \approx p(x, t_n).$$

Časovou diskretizaci provedeme pomocí Eulerovy zpětné metody

$$\left.\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right|_{t=t_{n+1}} \approx \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t}. \tag{41}$$

Rovnice (40), po dosazení vztahu (41) a užitím linearizace jako v rovnici (38) bude

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1} - \nu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}, \tag{42}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0.$$

Rovnici (42) formulujeme slabě a diskretizujeme obdobně jako v předchozím případě. To vede na soustavu lineárních rovnic ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(\mathbf{u}^n) & 0 & B_x \\ 0 & \tilde{A}(\mathbf{u}^n) & B_y \\ -B_x^T & -B_y^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vec{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1 + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}u^n \\ f^2 + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}v^n \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $\tilde{A}(\mathbf{u}^n) = (\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M} + A(\mathbf{u}^n))$ a u^n a v^n jsou složky vektorové rychlosti $\mathbf{u}^n = (u^n, v^n)^T$. Matice $\mathbf{M} = (m_{ij})$ má prvky $m_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_\Omega$. Regularitu matice soustavy nám zajišťuje volba například Taylorova-Hoodova elementu. Její řešení je možné užitím rychlého přímého řešiče řídkých soustav lineárních rovnic, viz např. UMFPACK, MUMPS, MKL nebo užitím vhodně před podmíněné iterační metody např. GMRES. V kapitole 5 ukážeme přístup, kdy řešíme zvlášť rovnici pro rychlosti a tlak určujeme až z dodatečné rovnice.

4.6.3 Stabilizace

Pro velká Reynoldsova čísla může docházet k nestabilitě numerického řešení. Diskrétní problém (37) je nutné stabilizovat. V této práci použijeme pro jednoduchost metodu streamline diffusion, viz [8].

Stabilizaci diskrétního problému daného rovnicí (37) provedeme přidáním členu

$$\sum_{K\in\tau_h} \delta_K \left((\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h, (\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{v}_h\right)_K,$$

na levou stranu rovnice (37), kde $\delta_k = \frac{h_K}{\|\mathbf{u}\|}$ a h_K je velikost největší strany trojúhelníku. Hodnota δ_K se pro každý element počítá zvlášť. Výsledné nelineární rovnice, které budeme řešit jsou

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \nu(\nabla\mathbf{u}_h, \nabla\mathbf{v}_h)_\Omega - (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, p_h)_\Omega + \\ + \sum_{K\in\tau_h} \delta_K \left((\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h, (\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{v}_h\right)_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega. \end{aligned} \tag{43}$$

Nelineární problém je třeba linearizovat, zde uvedeme pouze linearizaci stabilizačního členu. Linearizovaný stabilizační člen bude tedy

$$\sum_{K\in\tau_h} \delta_K \left((\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)\mathbf{u}_h^{n+1}, (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla)\mathbf{v}_h\right)_\Omega,$$

kde jsme užili linearizace jako v (38).

5 Numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic pomocí projekčních metod

V předchozí kapitole byly Navierovy-Stokesovy rovnice diskretizovány pomocí Taylorových-Hoodových konečných prvků, což vedlo na soustavu lineárních rovnic (typu sedlového bodu) pro složky rychlosti i tlaku. V praxi se ale často používají tzv. segregované metody, viz [14]. V těchto metodách se řeší momentové rovnice odděleně od rovnice kontinuity. Splnění rovnice kontinuity je pak zajištěno pomocí řešení dodatečné rovnice pro tlak, viz [15]. Výhodou těchto metod je, že prostory konečných prvků pro tlak a pro rychlost nemusí splňovat Babuška-Brezziho podmínku, pro jejich realizaci není potřeba užití elementů s vyšším stupněm polynomů. Nevýhodou je potřeba více výpočtů během jednoho iteračního kroku.

V této části uvažujeme nestacionární Navierovy-Stokesovy rovnice (40) v oblasti Ω a dva druhy předepsaných okrajových podmínek (33-34), viz Obrázek 7. Použijeme časovou diskretizaci implicitní Eulerovou metodou (41) a linearizaci rovnic jako v kapitole 4.6.2.

5.1 Chorinova metoda

Princip projekčních metod je založen na odděleném řešení momentových rovnic pro určení rychlostního pole, které nesplňuje rovnici kontinuity. Získané rychlostní pole je užitím projekce zobrazeno na prostor $\boldsymbol{\mathcal{V}}_\sigma$ (rychlosti splňující rovnici kontinuity). Užití projekce odpovídá řešení rovnice pro tlak. Použijeme Helmholtzovu dekompozici, viz [15], dle které lze každé vektorové pole $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ jednoznačně rozložit na součet své solenoidální a potenciální části, tedy

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla p,$$

kde $p \in H^1(\Omega)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ a pole splňuje $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ v Ω a na $\partial\Omega$ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Základní projekční metoda je Chorinovo schéma. Mějme nějaký stav $\mathbf{u}^n$, p^n v čase t^n a hledáme nový $\mathbf{u}^{n+1}$ a p^{n+1} v čase t^{n+1}. Jednotlivé časové kroky jsou $\Delta t > 0$. Na začátku algoritmu volíme $\mathbf{u}^0$ a p^0. Nejprve řešíme momentovou rovnici bez gradientu tlaku. Tím získáme $\tilde{\mathbf{u}}$. V druhém kroku použijeme tlak, abychom udělali projekci $\tilde{\mathbf{u}}$ do prostoru s nulovou divergencí. V prvním kroku řešíme rovnici

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f}, \quad \text{v } \Omega, \tag{44}$$

s okrajovými podmínkami

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2,$$

tím získáme $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ tedy rychlost, která nesplňuje rovnici kontinuity. V druhém kroku hledáme rychlost $\mathbf{u}^{n+1}$ a tlak p^{n+1} tak, aby

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0. \tag{45}$$

Aplikací divergence na první rovnici (45) dostaneme

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \tag{46}$$

kterou doplníme o okrajové podmínky

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$p^{n+1} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2.$$

Ve třetím kroku vyjádříme z rovnice (45) hledané $\mathbf{u}^{n+1}$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla p^{n+1}.$$

5.2 Algoritmus založený na metodě SIMPLE

Algoritmus SIMPLE je podobný předchozímu Chorinovu schématu a je popsaný v [16]. Budeme řešit problém popsaný rovnicí (40).

Na začátku algoritmu zvolíme $\mathbf{u}^0$ a p^0. Mějme nějaký stav $\mathbf{u}^n$, p^n v čase t^n a hledáme nový $\mathbf{u}^{n+1}$ a p^{n+1} v čase t^{n+1}. Jednotlivé časové kroky jsou $\Delta t > 0$.

V prvním kroku řešíme rovnici

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f} - \nabla p^n,$$

s okrajovými podmínkami

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2.$$

Získáme $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ a pokračujeme obdobně jako v předchozím případě

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\Delta t} = -\nabla \tilde{p},$$

předpokladem $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ dostaneme aplikací divergence rovnici

$$\Delta \tilde{p} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}, \quad \text{v } \Omega,$$

kde volíme okrajové podmínky

$$\tilde{p} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2,$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1.$$

Ve třetím kroku spočítáme rychlost a tlak v nové časové vrstvě

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla \tilde{p},$$

$$p^{n+1} = p^n + \tilde{p}.$$

5.3 Algoritmus založený na metodě SIMPLER

Výpočet podle schématu SIMPLER se skládá z víc kroků, je ale daleko efektivnější. Schéma je uvedeno v [16]. Schéma si popíšeme jako u předchozích příkladů, tedy na problému (40). Na začátku algoritmu zvolíme $\mathbf{u}^0$ a p^0. Mějme nějaký stav $\mathbf{u}^n$, p^n v čase t^n a hledáme nový $\mathbf{u}^{n+1}$ a p^{n+1} v čase t^{n+1}. Jednotlivé časové kroky jsou $\Delta t > 0$.

1. $\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}$,
2. $\Delta \tilde{p} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}}$,
3. $\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{f} - \nabla \tilde{p}$,
4. $\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$,
5. $\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \Delta t \nabla p^{n+1}$.

První krok je doplněný o okrajové podmínky

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{n+\frac{1}{2}}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na} \quad \Gamma_2.$$

V druhém kroku volíme okrajové podmínky

$$\tilde{p} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2,$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1.$$

Ve třetím kroku jsou okrajové podmínky

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2.$$

Čtvrtý krok doplníme o okrajové podmínky

$$p^{n+1} = 0, \quad \text{na } \Gamma_2$$

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1.$$

V pátém kroku dostaneme $\mathbf{u}^{n+1}$.

6 Realizace schémat v jazyce C

V této části stručně popíšeme praktickou realizaci numerického řešení Navierových-Stokesových rovnic. Tato realizace se skládá z diskretizace pomocí metody konečných prvků, tím dostáváme soustavu rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Matice soustavy je řídká a pro jejich uložení používáme dva formáty, COO formát(triplet) a CSR formát (CRF). První formát uložení je vhodnější v případě plnění matice a druhý pro iterační metody. Uložení sítě v programu realizujeme ve struktuře mesh.

6.1 Diskretizace

V projekčních schématech užíváme diskretizaci momentových rovnic a Poissonova problému pro tlak.

V programu se diskretizace momentové rovnice (40) realizuje funkce $Mesh\_DiscretizeMomentum$ s hlavičkou,

```
void Mesh_DiscretizeMomentum( mesh *M, double *u, double *v, double *p,
double dt,double ny, triplet *this, double *bbu, double *bbv)

```

kde funkci předáme síť M (typu mesh), vektor u reprezentující rychlost ve směru x, vektor v reprezentující rychlost ve směru y a vektor p reprezentující tlak, velikost časového kroku Δt jako dt a kinematickou viskozitu ν jako ny. Tělo funkce je v příloze 1. Funkce naplní triplet a pravých stran bbu a bbv, získáme tím dvě soustavy lineárních rovnic se stejnou maticí uloženou do proměnné this.

Diskretizace Poissonova problému, viz rovnice (46) je realizována ve funkci s hlavičkou

```
Mesh_DiscretizePressurePoisson( int iter, double dt, mesh *M,
  double *u, double *v, triplet *this, double *bbb)
```

kde funkci předáme síť M (typu mesh), vektor u reprezentující rychlost ve směru x, vektor v reprezentující rychlost ve směru y a vektor p reprezentující tlak, velikost časového kroku Δt jako dt. Tělo funkce je v příloze 1. Funkce naplní triplet this a pravou stranu bbb. Získáme tím soustavu lineárních rovnic.

6.2 Realizace Chorinova schématu

Schéma Chorinovy metody je popsáno v kapitole 5.1. V kódu níže je tato metoda realizována následovně: nejprve provedeme diskretizaci momentových rovnic (řádek 2) a matici z formátu triplet převedeme do CSR formátu (řádky 3-4).

```
1  mesh     M;
2  triplet  T, Tuv;
3  CRF      C, Cuv;
```

```
4 for(iter=0; iter<niter; iter++){
5    /*velocity (u_,v_) */
6    Mesh_DiscretizeMomentum( &M, u, v, zerop, dt, 2./Re , &Tuv, bbu, bbv);
7    Triplet_Finalize( &Tuv);
8    triplet_crf( &Cuv, &Tuv);
9    eps = crf_bicgstab(&Cuv, bbu, unew_, 5000, 1.e-30);
10   eps = crf_bicgstab(&Cuv, bbv, vnew_, 5000, 1.e-30);
11   /* p_ + grad(p_)*/
12   Mesh_DiscretizePressurePoisson( iter, dt, &M, unew_, vnew_, &T, bbb);
13   Triplet_Finalize( &T);
14   triplet_crf( &C, &T);
15   eps = crf_gradient2(&C, p_, bbb, 5000, 1.e-30);
16   Pressure_Reconstruction( &M, p_, px_, py_);
17   /*(unew,vnew) + pnew */
18   for (i = 0 ; i < M.NPoints ; i++){
19      u[i] = unew_[i] - dt * px_[i];
20      v[i] = vnew_[i] - dt * py_[i];
21      p[i] =  p_[i];
22      }
23   }
```

Následně řešíme získané soustavy rovnic s maticí $\mathbf{A} = \mathrm{Cuv}$ a pravou stranou bbu resp. bbv. Vzhledem k ne symetrii matice užijeme metodu BiCGSTAB. Získáme unew, vnew (řádky 5-6). Dále provedeme projekci na prostor $\mathcal{V}_\sigma$, tedy sestavíme rovnici pro tlak, kterou diskretizujeme (na řádku 8). Matici z formátu triplet převedeme do CSR formátu (řádky 9-10). Vzniklou soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A} = \mathrm{C}$ a pravou stranou bbb řešíme metodou sdružených gradientů (řádek 11). Pokračujeme výpočtem gradientu tlaku (řádek 12) a následně získáme složky rychlosti (řádky 14-16).

6.3 Realizace algoritmu založeném na metodě SIMPLE

Numerické řešení pomocí schématu SIMPLE, které je popsáno v kapitole 6.3, je velmi podobné jako u Chorinova schématu, s tím rozdílem, že v diskretizaci momentové rovnice používáme tlak z předchozí časové vrstvy. Níže v kódu vidíme jeho realizaci.

```
   mesh     M;
   triplet  T, Tuv;
   CRF      C, Cuv;
for(iter=0; iter<niter; iter++){
      /*velocity (u_,v_) */
      Mesh_DiscretizeMomentum( &M, u, v, p, dt, 2./Re , &Tuv, bbu, bbv);
      Triplet_Finalize( &Tuv);
      triplet_crf( &Cuv, &Tuv);
      eps = crf_bicgstab(&Cuv, bbu, unew_, 5000, 1.e-30);
      eps = crf_bicgstab(&Cuv, bbv, vnew_, 5000, 1.e-30);
      /* p_ + grad(p_)*/
```

```
12      Mesh_DiscretizePressurePoisson( 2, dt, &M, unew_, vnew_, &T, bbb);
13      Triplet_Finalize( &T);
14      triplet_crf( &C, &T);
15      eps = crf_gradient2(&C, p_, bbb, 5000, 1.e-30);
16      Pressure_Reconstruction( &M, p_, px_, py_);
17      /*(unew,vnew) + pnew */
18      for (i = 0 ; i < M.NPoints ; i++){
19        u[i] = unew_[i] - dt * px_[i];
20        v[i] = vnew_[i] - dt * py_[i];
21        p[i] += p_[i];
22        }
23      }
```

Nejprve diskretizujeme momentové rovnice (na řádku 2). Oproti Chorinovu schématu uvažujeme v rovnicích tlak z předchozí časové vrstvy. Další postup je stejný jako v kapitole 6.2.

6.4 Realizace algoritmu založeném na metodě SIMPLER

Schéma je uvedeno v kapitole 5.3. Výpočet je o něco složitější, jelikož kombinuje schémata SIMPLE a Chorin. Realizaci vidíme pomocí kódu níže.

```
   mesh     M;
   triplet  T, Tuv;
   CRF      C, Cuv;
for(iter=0; iter<niter; iter++){
    /*velocity (u_,v_) without p*/
    Mesh_DiscretizeMomentum( &M, u, v, zerrop, dt, 1./Re , &Tuv, bbu, bbv);
    Triplet_Finalize( &Tuv);
    triplet_crf( &Cuv, &Tuv);
    eps = crf_bicgstab(&Cuv, bbu, unew_, 5000, 1.e-30);
    eps = crf_bicgstab(&Cuv, bbv, vnew_, 5000, 1.e-30);
    /* p_ + grad(p_)*/
    Mesh_DiscretizePressurePoisson( 2, dt, &M, unew_, vnew_, &T, bbb);
    Triplet_Finalize( &T);
    triplet_crf( &C, &T);
    eps = crf_gradient2(&C, p_, bbb, 5000, 1.e-30);
    /*---------------------------------------------------*/
    /*reseting variables*/
    for (i = 0 ; i < M.NPoints ; i++)
        unew_[i] = vnew_[i] =  0 ;
    /*---------------------------------------------------*/
    /*velocity (u_,v_) with p*/
    Mesh_DiscretizeMomentum( &M, u, v, p_, dt, 1./Re, &Tuv, bbu, bbv);
    Triplet_Finalize( &Tuv);
    triplet_crf( &Cuv, &Tuv);
    eps = crf_bicgstab(&Cuv, bbu, unew_, 5000, 1.e-30);
```

```
26    eps = crf_bicgstab(&Cuv, bbv, vnew_, 5000, 1.e-30);
27    /* pnew + grad(p_)*/
28    Mesh_DiscretizePressurePoisson( 2, dt, &M, unew_, vnew_, &T, bbb);
29    Triplet_Finalize( &T);
30    triplet_crf( &C, &T);
31    eps = crf_gradient2(&C, pnew, bbb, 5000, 1.e-30);
32    Pressure_Reconstruction( &M, pnew, px_, py_);
33    /*(unew,vnew) + pnew */
34    for (i = 0 ; i < M.NPoints ; i++){
35        unew[i] = unew_[i] - dt * px_[i];
36        vnew[i] = vnew_[i] - dt * py_[i];
37        p[i]    = p_[i];
38        }
39    }
```

Na začátku postupujeme obdobně jako v kapitole 6.2 (řádky 2-11). Získáme tím tlak p, který užijeme v diskretizaci momentové rovnice (řádek 18). Zbylý výpočet je stejný jako v kapitole 6.3.

6.5 Realizace Taylorova-Hoodova elementu

Nyní se budeme zabývat realizací řešení Navierových-Stokesových rovnic přímou metodou, za užití Taylorova-Hoodova elementu. V každém kroku řešíme jednu soustavu rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$. Řešení provedeme pomocí knihovny UMFPACK. Realizaci řešení vidíme v kódu níže.

```
 mesh     M;
 triplet  Tuvp;
 CRF      Cuvp;
for(iter=0; iter<niter; iter++){
  NavierStokes_Discretize( &M, u, v, p, 2./Re, dt, &Tuvp, b);
  Triplet_Finalize( &Tuvp);
  triplet_crf( &Cuvp, &Tuvp);
  eps =  RCF_SolveUMFPACK( &Cuvp, b, x);
  /*update u,v,p */
  for ( i = 0 ; i < M.NPoints; i++){
      u[i] = x[i];
      v[i] = x[ M.NPoints + M.NEdges + i];
      p[i] = x[ (M.NPoints + M.NEdges)*2 + i ];
      }
  for ( i = 0 ; i < M.NEdges; i++){
       u[M.NPoints + i] = x[ M.NPoints + i];
       v[M.NPoints + i] = x[ 2* M.NPoints + M.NEdges + i];
      }
  }
```

Diskretizujeme zároveň momentové rovnice a rovnici kontinuity, získáme tím matici ve formátu triplet a pravou stranu b (řádek 1). Triplet převedeme na CSR formátu (řádky 2-3). Následně vyřešíme soustavu rovnic pomocí funkce $RCF\_SolveUMFPACK$, která užívá knihoven UMFPACK (řádek 4). V posledním kroku získáme složky rychlosti a tlak v nové časové vrstvě (řádky 6-14).

6.6 Výpočty na serveru

Ve všech projekčních metodách v každém iteračním kroku provádíme několik operací. Každá operace je časově náročná v závislosti na volbě jemnosti sítě. Se zvyšující se jemností přibývá počet uzlů a elementů. Při diskretizaci provádíme naplnění matice přes všechny elementy, a proto se zvyšuje čas potřebný k jejímu provedení. Dále výsledná soustava bude pro jemnější síť větší a její vyřešení bude časově náročnější. Rychlost konvergence také ovlivňuje Reynoldsovo číslo. V případě, že jsme zjemňovali síť a zvyšovali Reynoldsovo číslo, doba výpočtu se zvyšovala a bylo potřeba výpočty nechat běžet na serveru. Program na serveru jsme kompilovali stejným způsobem jako v PC. Pro spuštění programu jsme použili skript uvedený níže

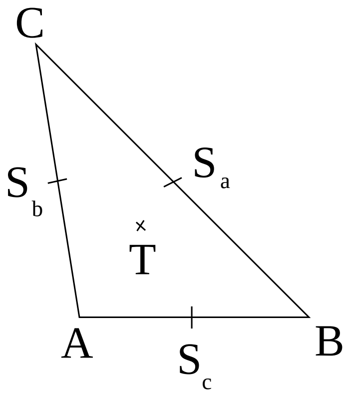
```
1 #!/bin/bash
2 #PBS -N NS_Re600
3 #PBS -o Re600.out
4 #PBS -l select=1:ncpus=1
5 #PBS -l walltime=03:30:00
6
7 cd $PBS_O_WORKDIR
8
9 ./a.out mycfg.ini
```

Na druhém řádku je pojmenování běžícího programu. Na třetím řádku vidíme jméno souboru, do kterého se zapisuje výstup, na čtvrtém počet použitých procesorů a na pátém maximální čas spuštění programu.

6.7 Numerická kvadratura

V metodě konečných prvků počítáme příspěvky do matice tuhosti a vektoru pravé strany. Pro vyčíslení jednotlivých prvků používáme transformaci na referenční trojúhelník, podrobněji popsaný v kapitole 4.4.1. Pro výpočet integrálu na referenčním trojúhelníku nám poslouží numerické kvadratury, které volíme na začátku programu. Uvedeme si některé příklady kvadratur a pro jaké případy se dají použít. Ukážeme si ji na obecném trojúhelníku K, který vidíme na Obrázku 8.

Má vrcholy A,B,C středy stran S_a, S_b, S_c a těžiště T. Pro funkci $\varphi : K \to \mathbb{R}$ lze integrál



Obr. 8: Obecný trojúhelník.

vypočítat

$$\int_K \varphi(x)dx \approx \sum_{i=1}^{M} \omega_i \varphi(\xi_i),$$

kde ω_i jsou váhy pro uzly kvadratury ξ_i a M jejich počet.

Pro po částech lineární funkce můžeme integrál vypočítat jako

$$\int_K \varphi(x)dx \approx \varphi(T)|K|,$$

kde $|K|$ je obsah trojúhelníku K. Druhý způsob integrace pro po částech lineární funkce je

$$\int_K \varphi(x)dx \approx \frac{|K|}{3}(\varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C)).$$

Pro po částech kvadratické funkce lze použít pro integraci

$$\int_K \varphi(x)dx \approx \frac{|K|}{3}(\varphi(S_a) + \varphi(S_b) + \varphi(S_c)).$$

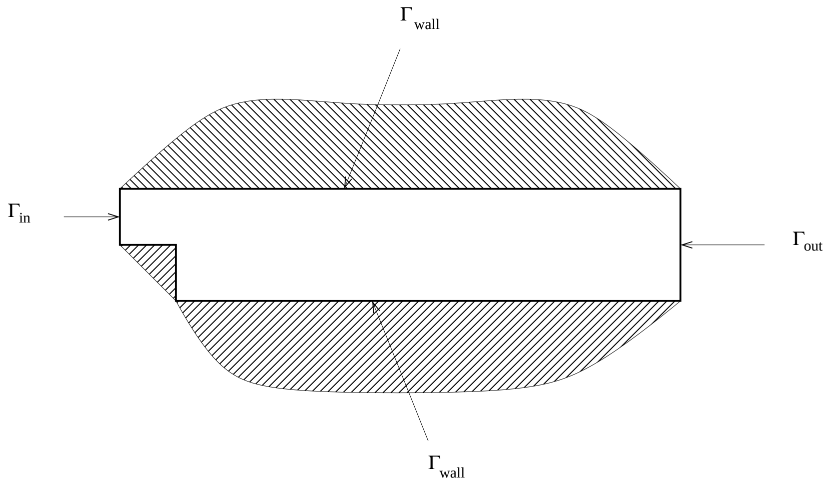
Podrobněji v [11].

7 Numerické výsledky

Řešili jsme Navierovy-Stokesovy rovnice v bezrozměrném tvaru popsané (40). Výpočet jsme realizovali pomocí několika projekčních metod a to Chorinova schéma, algoritmu založeném na SIMPLE a SIMPLER. Potom jsme realizovali výpočet pomocí Taylorova-Hoodova elementu. Zde si ukážeme numerické výsledky pro vybrané případy. Budeme porovnávat rychlost snižování reziduí i odchylku numerických výsledků od experimentu. Nejprve budeme řešit problém proudění v oblasti zpětného schodu, kde budeme zejména sledovat délku odtržení pro různá Reynoldsova čísla, jelikož je možné výsledky porovnat s experimentem. Druhý případ bude proudění v kanále s válcem.

7.1 Proudění v oblasti zpětného schodu

Oblast proudění v oblasti zpětného schodu vidíme na Obrázku 9. Délka kanálu je 20 a jeho výška 2. Jsou zde tři typy tři typy hranice Γ_{in}, Γ_{wall} a Γ_{out}.



Obr. 9: Oblast Ω se zpětným schodem.

První vstup Γ_{in}, druhý výstup Γ_{out} a třetí stěna Γ_{wall}. Okrajové podmínky budou pro rychlost

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{na } \Gamma_1,$$

kde **g** odpovídá parabolické vstupní rychlosti o maximu $1,5$.

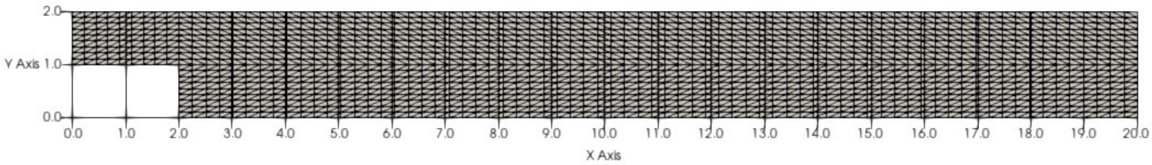
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2.$$

V případě užití Taylorova-Hoodova elementu bude na Γ_{out} tzv. do-nothing podmínka

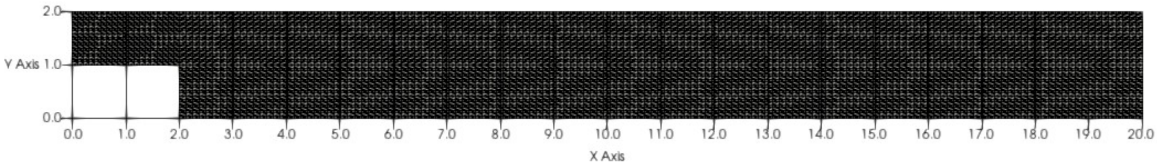
$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{out},$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{out}.$$

Výpočty byly provedeny pro různá Reynoldsova čísla v rozsahu $Re = 50 - 750$, byla sledována přesnost detekce odtržení na spodní a pro vyšší Reynoldsova čísla i na horní stěně při užití různě jemných triangulací. Ve všech výpočtech jsme užili $\Delta t = 1$. Nejprve si ukážeme výsledky pro jednotlivá Reynoldsova čísla. Výsledky jsme zpracovali v programu Paraview, kde pro určení délky zpětného proudu jsme užili funkci PlotOverLine. Na Obrázku 10 je zobrazena triangulace, která byla použita. Síť měla 2826 vrcholů a 5810 trojúhelníkových prvků/elementů. Na Obrázku 11 je zobrazena jemnější triangulace. Síť měla 5996 vrcholů a 11590 trojúhelníkových prvků/elementů. Na konci kapitoly budou uvedeny další případy výpočtu, například ovlivnění výpočtu prodloužením kanálu. Dále budou porovnány výsledky schémat s použitou stabilizací a bez stabilizace. Výpočty byly



Obr. 10: Síť v oblasti zpětného schodu.

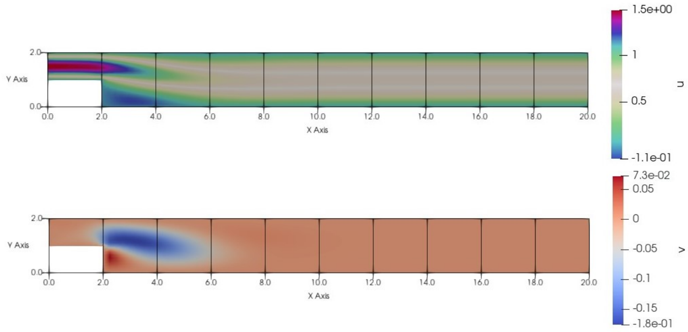


Obr. 11: Jemnější síť v oblasti zpětného schodu.

provedeny v bezrozměrném tvaru (uvedené v kapitole 3.3 s modelovým Reynoldsovým číslem Re_{comp}. Při uváděných srovnání bylo uváděné Reynoldsovo číslo Re přepočteno - stejně jako v [13] - z charakteristické délky L dané jako výška kanálu v rozšířené části, z charakteristické rychlosti U_{char} zvolené jako průměrná rychlost na vstupní části hranice a ze zadané viskozity, tedy $L = 2$ viz 10, $U_{char} = 1$ a $\nu = 1/Re_{comp}$.

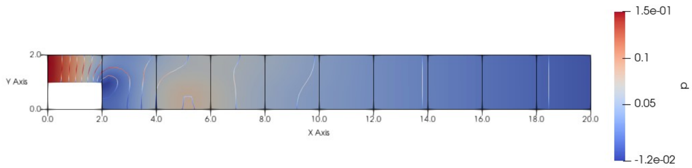
7.1.1 SIMPLER

Schéma bylo podrobněji rozebráno v kapitole 5.3. Na Obrázku 12 vidíme složky rychlosti pro Reynoldsovo číslo $Re = 100$. Na pravé straně Obrázku jsou škály příslušné jednotlivým složkám, které budou stejné pro všechny složky rychlostí pro metodu SIMPLER, kde nebude uvedena. Je vidět, že je zde pouze oblast odtržení u spodní hrany oblasti.



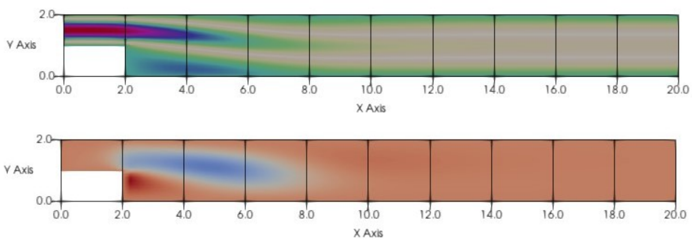
Obr. 12: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 100 v oblasti zpětného schodu.

Tlak pro Reynoldsovo číslo $Re = 100$ je na Obrázku 13. Za schodem vzniká oblast podtlaku. Na Obrázku 14 jsou výsledky pro Reynoldsovo číslo $Re = 200$. Odtržení je pouze u spodní



Obr. 13: Tlak p pro Re = 100 v oblasti zpětného schodu.

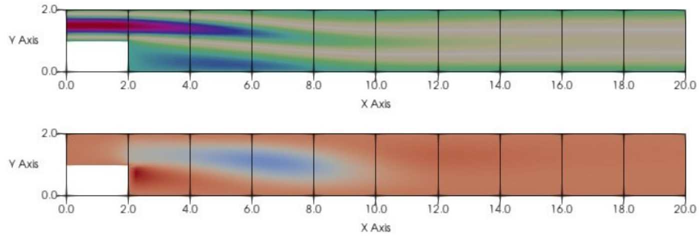
hrany oblasti ale je delší než u předchozího případu. Na Obrázku 15 najdeme výsledky pro



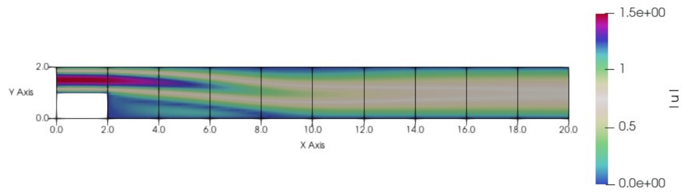
Obr. 14: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 200 v oblasti zpětného schodu.

Reynoldsovo číslo $Re = 300$. Odtržení je stále jenom u spodní hrany oblasti, ale jeho délka se postupně prodlužuje. Pro případ Reynoldsova čísla $Re = 400$ je v Obrázku 16 zobrazena velikost rychlosti $|\mathbf{u}|$ počítaný v každém bodě jako $|\mathbf{u}| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

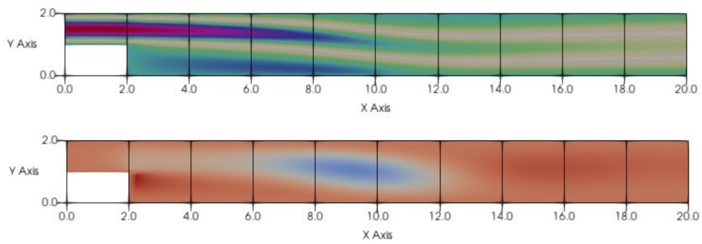
Dále na Obrázku 17 jsou výsledky pro Reynoldsovo číslo $Re = 500$. Odtržení u spodní hrany se prodloužilo a navíc se začíná tvořit i u horní hrany.



Obr. 15: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 300 v oblasti zpětného schodu.

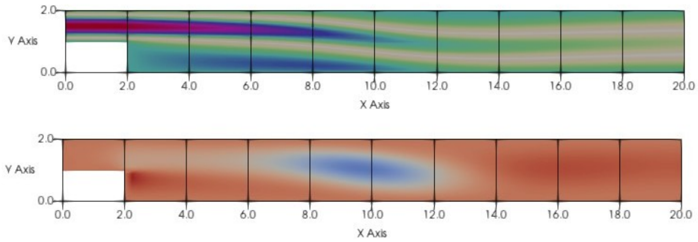


Obr. 16: Velikost rychlosti **u** pro Re = 400 v oblasti zpětného schodu.



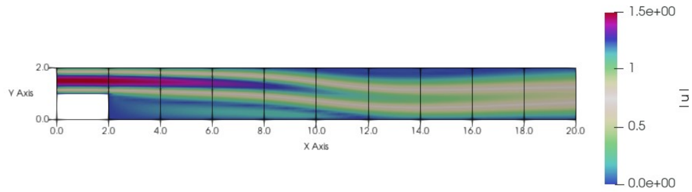
Obr. 17: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 500 v oblasti zpětného schodu.

Pro Reynoldsovo číslo $Re = 550$ jsou složky rychlosti na Obrázku 18. Odtržení u spodní hrany se dále prodlužuje a odtržení u horní hrany se vzdaluje od vstupu a také prodlužuje. Na Obrázku 19 je velikost rychlosti **u** pro Reynoldsovo číslo $Re = 600$. Na pravé straně



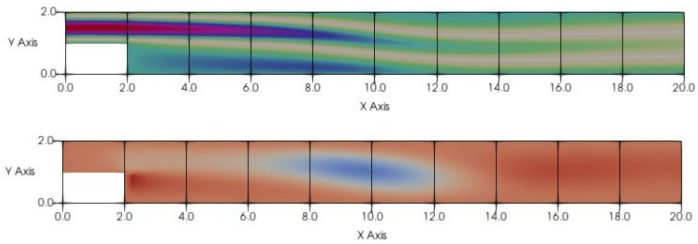
Obr. 18: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 550 v oblasti zpětného schodu.

Obrázku je škála pro daný případ. Je vidět, že složka rychlosti ve směru y je řádově menší než ve směru x a celkovou velikost téměř neovlivní. Na Obrázku 20 jsou složky rychlosti



Obr. 19: Velikost rychlosti **u** pro Re = 600 v oblasti zpětného schodu.

pro Reynoldsovo číslo $Re = 650$. Odtržení u spodní hrany se dále zvětšuje a odtržení u horní hrany se dále vzdaluje od vstupu a navíc se prodlužuje. Na Obrázku 21 případ

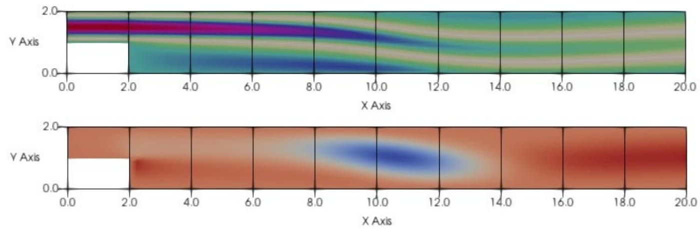


Obr. 20: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 650 v oblasti zpětného schodu.

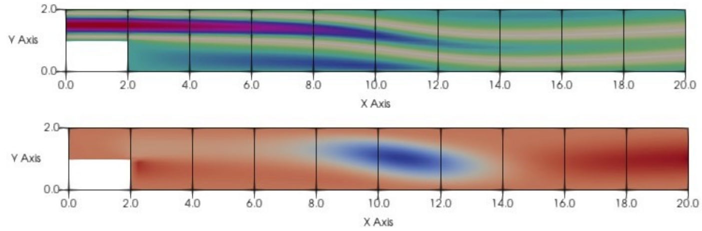
pro Reynoldsovo číslo $Re = 700$ a na Obrázku 22 pro Reynoldsovo číslo $Re = 750$. Je zřejmé, že se zvyšujícím se Reynoldsovým číslem se délka spodního odtržení zvyšuje a navíc pro vyšší Reynoldsova čísla vzniká odtržení i u horní hrany. Horní odtržení se navíc se zvyšujícím se Reynoldsovým číslem vzdaluje od vstupu do kanálu a také se prodlužuje.

Reziduum jsme pro n-tý krok výpočtu počítali pro složku rychlosti u ve směru x pomocí hodnot složek rychlosti u_i ve vrcholech sítě a středech hran

$$e_u = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u_i^{n-1} - u_i^n|,$$



Obr. 21: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 700 v oblasti zpětného schodu.



Obr. 22: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 750 v oblasti zpětného schodu.

kde N_u je počet bodů v kterých počítáme rychlost u. Pro složku rychlosti v ve směru y pomocí hodnot složek rychlosti v_i ve vrcholech sítě a středech hran

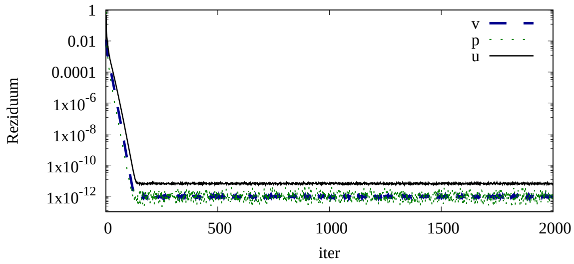
$$e_v = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |v_i^{n-1} - v_i^n|,$$

kde N_u je počet bodů v kterých počítáme rychlost v a pro tlak p pomocí hodnot tlaku p_i ve vrcholech sítě

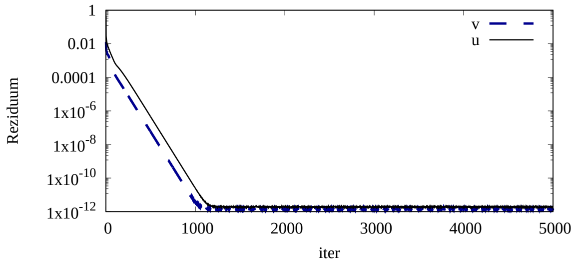
$$e_p = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} |p_i^{n-1} - p_i^n|.$$

Průběh reziduí rychlostí a tlaku v průběhu iteračního procesu pro Reynoldsova čísla 100, 400, 600 a 750 jsou zobrazena v Obrázcích 23-25. Na Obrázku 23 je ukázána velikost rezidua v závislosti na počtu iterací pro Reynoldsovo číslo $Re = 100$ v logaritmickém měřítku. Snížení rezidua na 10^{-10} proběhlo v méně než 100 iteracích. V dalších iteracích již nedochází ke snižování rezidua (z důvodu konečné aritmetiky a zaokrouhlovacích chyb) a řešení zůstává neměnné (stacionární). Obrázek 24 ukazuje závislost velikosti rezidua na počtu iterací pro Reynoldsovo číslo $Re = 400$. Je vidět, že se zvyšujícím se Reynoldsovým číslem se konvergence ke stacionárnímu řešení snižuje, pro dosažení stejné velikosti rezidua jako pro $Re = 100$ bylo zde potřeba téměř 800 iterací.

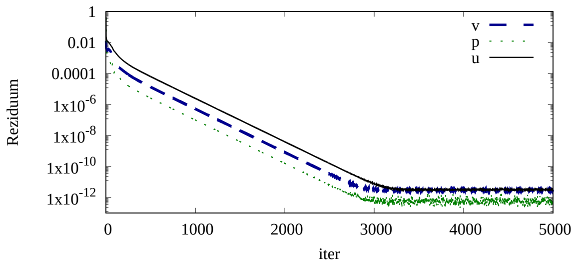
Stejný trend je i na Obrázku 25 kde je zobrazena závislost velikosti rezidua na počtu iterací pro Reynoldsovo číslo $Re = 750$. V tomto případě bylo nutné provést téměř 3000 iterací ke zkonvergování ke stejně malému reziduu.



Obr. 23: Řešení v oblasti zpětného schodu algoritmem založeným na metodě SIMPLE. Graf závislosti velikosti rezidua na iteraci pro Re = 100.



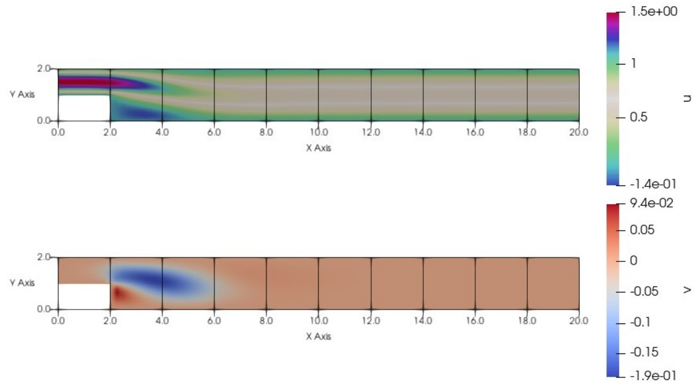
Obr. 24: Řešení v oblasti zpětného schodu algoritmem založeným na metodě SIMPLE. Graf závislosti velikosti rezidua na iteraci pro Re = 400.



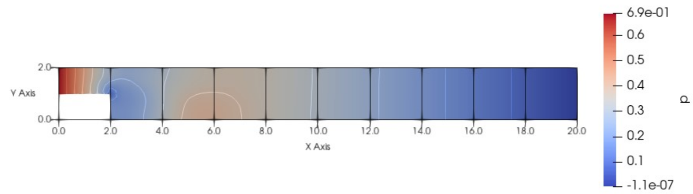
Obr. 25: Řešení v oblasti zpětného schodu algoritmem založeným na metodě SIMPLE. Graf závislosti velikosti rezidua na iteraci pro Re = 750.

7.1.2 Taylorův-Hoodův element

Numerické řešení pomocí Taylorova-Hoodova elementu jsme popsali na konci kapitoly 4.6.2. Nyní si uvedeme výsledky pro proudění v oblasti se zpětným schodem. Výsledky jsme ukládali pouze ve vrcholech jak pro rychlosti tak pro tlak, tedy v programu Paraview je zobrazen jen po částech lineární průběh rychlosti oproti použitému po částech kvadratickému. Na Obrázku 26 vidíme pro Reynoldsovo číslo $Re = 100$ složky rychlosti. Na pravé straně Obrázku je navíc škála, která bude stejná pro zbylé případy, pokud nebude uvedena dále na Obrázku 27 je pro tento případ uveden tlak p, je zde vidět, že za schodem vzniká oblast podtlaku.

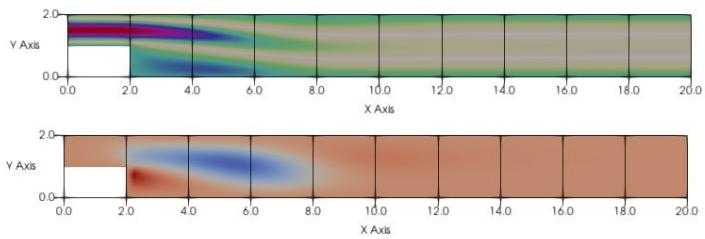


Obr. 26: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 100 v oblasti zpětného schodu.



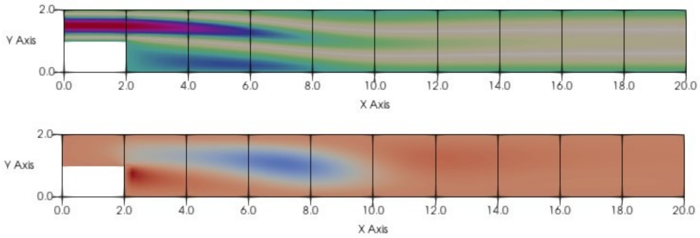
Obr. 27: Tlak p pro Re = 100 v oblasti zpětného schodu.

Na Obrázcích 28-30 vidíme složky rychlosti pro Reynoldsova čísla $Re = 200 - 400$. Je zde pouze oblast odtržení u spodní hrany. Jeho délka se prodlužuje se zvyšujícím se Reynoldsovým číslem. Na Obrázku 31 vidíme velikost rychlosti **u** pro Reynoldsovo číslo

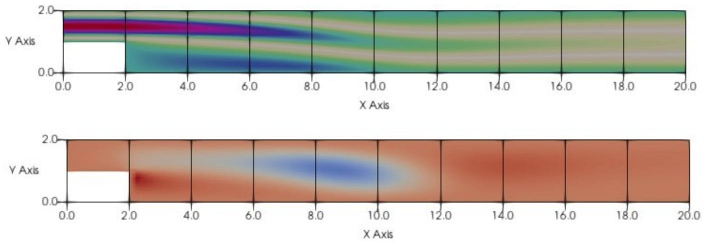


Obr. 28: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 200 v oblasti zpětného schodu.

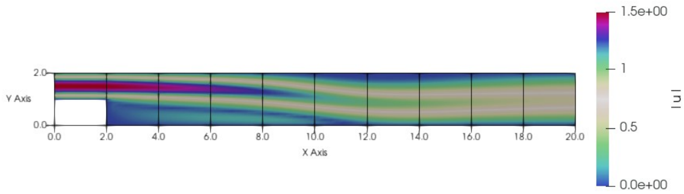
$Re = 500$. Rychlost ve směru y je řádově menší než ve směru x.



Obr. 29: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 300 v oblasti zpětného schodu.

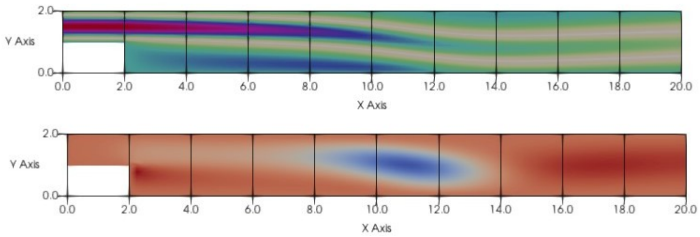


Obr. 30: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 400 v oblasti zpětného schodu.

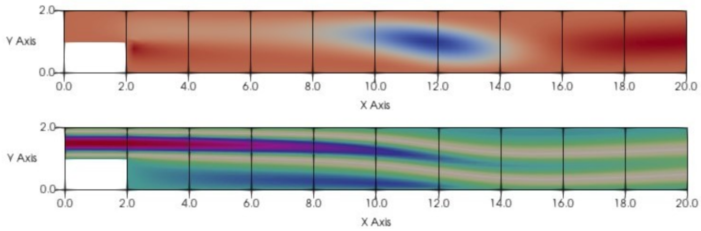


Obr. 31: Velikost rychlosti **u** pro Re = 500 v oblasti zpětného schodu.

Na Obrázcích 32-33 vidíme složky rychlosti pro Reynoldsova čísla $Re = 600 - 750$. Kromě odtržení u spodní hrany zde vzniká zpětné odtržení i na horní hraně kanálu. Se zvyšujícím se Reynoldsovým číslem se jeho vznik vzdaluje od vstupu do kanálu a samotné odtržení se prodlužuje



Obr. 32: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 600 v oblasti zpětného schodu.



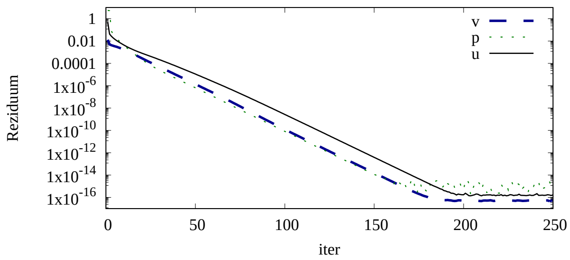
Obr. 33: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 750 v oblasti zpětného schodu.

Jelikož pro ověření jednotlivých metod je důležité, aby metody zkonvergovali - tj. aby bylo zobrazováno skutečně řešení nelineárního problému a nikoliv nějaká jeho nepřesná aproximace. Uvedeme si zde také příklady konvergence pro některá Reynoldsova čísla. Reziduum je počítáno stejně jako v předchozí kapitole. Na Obrázku 34 vidíme průběh rezidua rychlosti u, v a tlaku p pro Reynoldsovo číslo $Re = 100$. Reziduum se zmenší na 10^{-16} za 182 iterací. Pak ke zmenšení již nedochází a pouze k oscilacím (stacionární řešení). Na Obrázku 35 vidíme průběh rezidua rychlosti u, v a tlaku p pro Reynoldsovo číslo $Re = 400$. Počet iterací potřebných ke zmenšení rezidua na hodnotu 10^{-16} se zvětšila na 1200 iterací. Na Obrázku 36 vidíme průběh rezidua rychlosti u, v a tlaku p pro Reynoldsovo číslo $Re = 700$. Pro snížení rezidua bylo potřeba 2800 iterací.

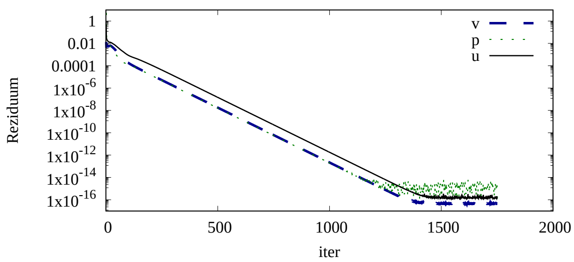
7.1.3 Porovnání metod

Numerické výsledky jsme si uvedli pro jednu projekční metodu založenou na algoritmu SIMPLER a pro řešení pomocí Taylorova-Hoodova elementu. V této části budeme porovnávat jak rychle se snižuje reziduum tlaku p u jednotlivých metod.

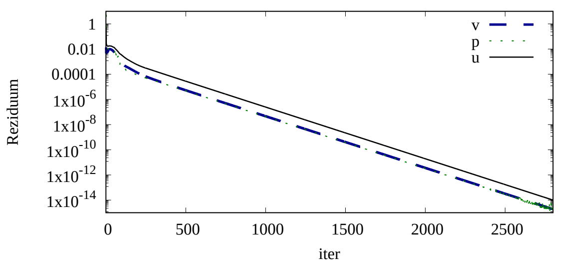
Na Obrázku 37 vidíme porovnání snižování reziduí tlaku p pro schémata SIMPLER a Taylorova-Hoodova elementu pro Reynoldsovo číslo $Re = 100$. Průběhy mají stejný sklon, ale užitím Taylorova-Hoodova elementu jsme schopni snížit reziduum až na velikost 10^{-16}.



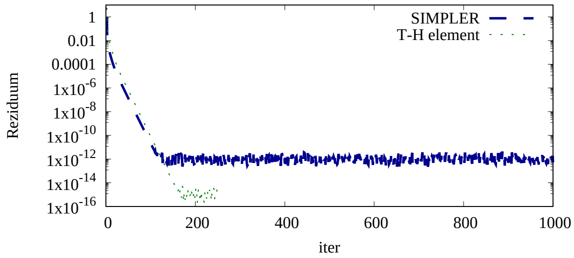
Obr. 34: Průběh rezidua pro Re=100.



Obr. 35: Průběh rezidua pro Re=400.

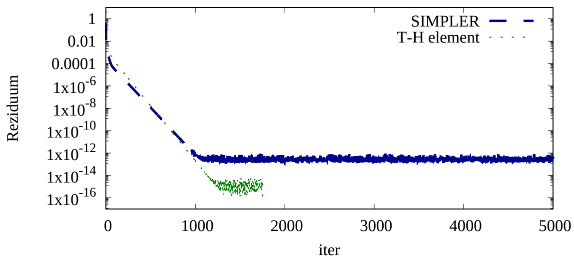


Obr. 36: Průběh rezidua pro Re=700.



Obr. 37: Porovnání rychlosti zmenšování reziduí při výpočtu v kanále se zpětným schodem u metod SIMPLER a Taylorovým-Hoodovým elementem pro Re = 100.

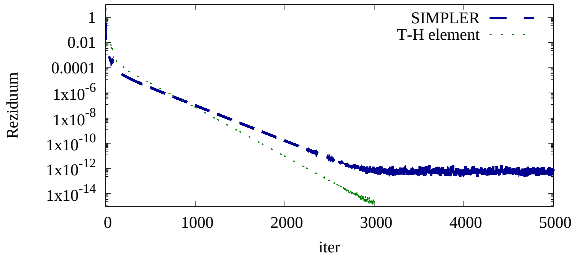
Na Obrázku 38 vidíme porovnání snižování reziduí tlaku p pro schémata SIMPLER a Taylorův-Hoodův element pro Reynoldsovo číslo $Re = 400$. Je zde vidět, že užitím Taylorova-Hoodova elementu klesá reziduum o trochu rychleji než pomocí metody SIMPLER a na nižší hodnotu, stejnou jako u předchozího případu.



Obr. 38: Porovnání rychlosti zmenšování reziduí při výpočtu v kanále se zpětným schodem u metod SIMPLER a Taylorovým-Hoodovým elementem pro Re = 400.

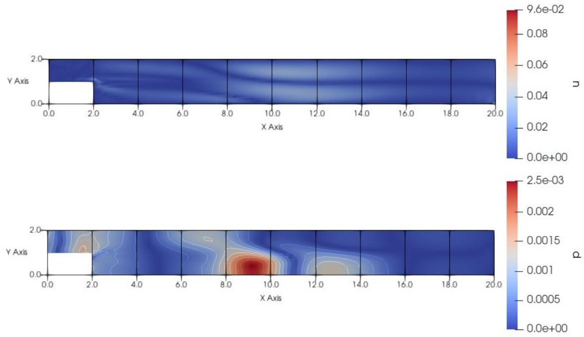
Na Obrázku 39 vidíme porovnání zmenšování rezidua tlaku p metody SIMPLER a Taylorova-Hoodova elementu pro Reynoldsovo číslo $Re = 750$. Zde je nejpatrnější rozdíl ve sklonu průběhů. Průběh u SIMPLER dosahuje až do přibližně 90 iterací menší velikosti rezidua, ale poté je menší reziduum u Taylorova-Hoodova elementu, který se sníží až na 10^{-16}.

Pro porovnání výsledků získaných metodou SIMPLER a pomocí Taylorova-Hoodova elementu si zde uvedeme rozdíl výsledků rychlosti u ve směru x jako $\Delta u = |u_{SIMPLER} - u_{T-H}|$ a rozdíl tlaků jako $\Delta p = |p_{SIMPLER} - p_{T-H}|$. Na Obrázku 40 vidíme rozdíl pro Reynoldsovo číslo $Re = 400$. Nejvýraznější rozdíl je kolem oblasti zpětného proudu. Na Obrázku 41 vidíme rozdíl pro Reynoldsovo číslo $Re = 750$. Rozdíl je větší než v předchozím případě. Oproti původním očekávání není v tomto případě znatelný vliv použití dodatečné



Obr. 39: Porovnání rychlosti zmenšování reziduí při výpočtu v kanále se zpětným schodem u metod SIMPLER a Taylorovým-Hoodovým elementem pro Re = 750.

okrajové podmínky pro tlak v projekční metodě.

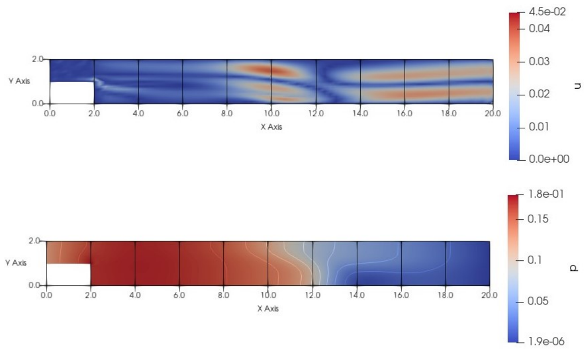


Obr. 40: Rozdíl výsledků rychlosti ve směru x u (nahoře) a tlaku p (dole) získaných metodou SIMPLER a Taylorovým-Hoodovým elementem pro Re=400.

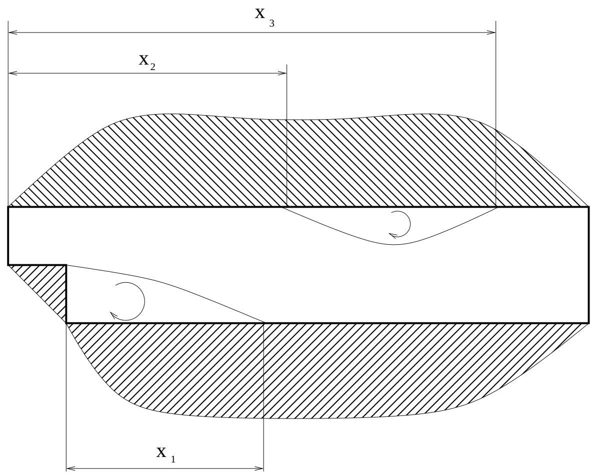
7.1.4 Délka odtržení

V této kapitole si ukážeme grafy na kterých bude průběh odtržení u spodní hrany. Na Obrázku 42 vidíme jakým způsobem se definuje spodní a horní délka odtržení. Značíme x_1 jako délku odtržení u spodní hrany, x_2 délku mezi vstupem a začátkem odtržení na horní hraně a x_3 délku od vstupu ke konci odtržení na horní hraně. Jak už jsme viděli v předchozích výsledcích, se zvyšujícím se Reynoldsovým číslem se délka odtržení u spodní hrany prodlužuje a navíc pro vyšší Reynoldsova čísla vzniká oblast odtržení i na horní hraně. Tento problém byl zkoumán v [12]. Na Obrázku 43 vidíme průběh délky spodního odtržení zaznamenaný pomocí experimentu. Pro porovnání si zde uvedeme průběh spodního odtržení pomocí numerických výpočtů uvedených v [13], vidíme ho na Obrázku 44.

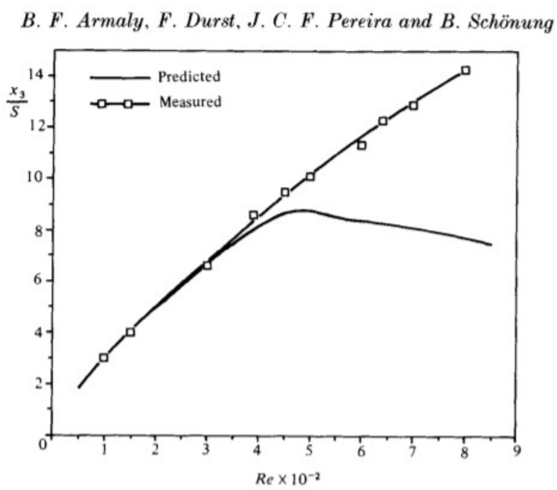
Průběh délky odtržení u spodní hrany získaný metodou SIMPLER vidíme na Obrázku 45, kde jsou navíc vynášeny výsledky získané z experimentu, viz [12]. Je zde vidět, že pro vyšší Reynoldsova čísla se zvyšuje odchylka numerického řešení od experimentálního. Příčinou může být numerická realizace na 2D oblasti, zatímco experimentální data jsou z 3D oblasti.



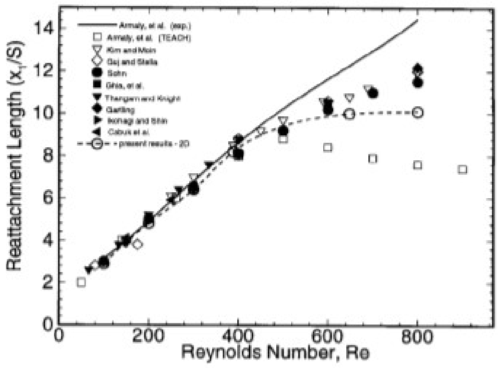
Obr. 41: Rozdíl výsledků rychlosti ve směru x u (nahoře) a tlaku p (dole) získaných metodou SIMPLER a Taylorovým-Hoodovým elementem pro Re=750.



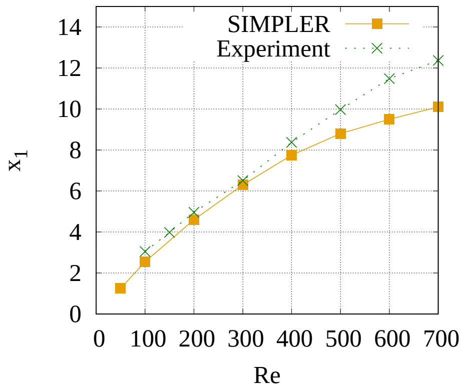
Obr. 42: Kanál se zpětným schodem.



Obr. 43: Výsledky experimentu odtržení u spodní hrany v kanále se zpětným schodem.

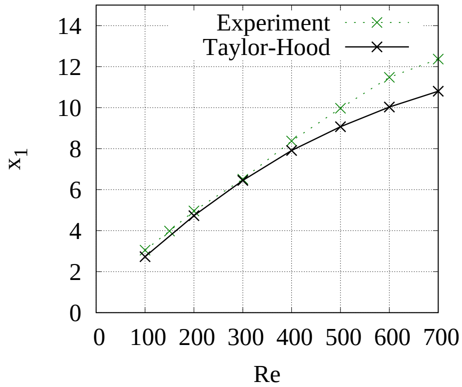


Obr. 44: Výsledky numerického řešení odtržení u spodní hrany v kanále se zpětným schodem uvedený v [13].



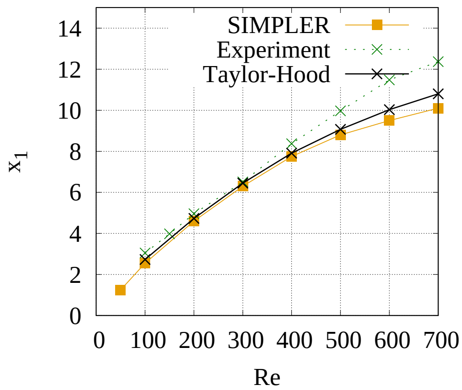
Obr. 45: Algoritmus založený na metodě SIMPLER- průběh závislosti spodního odtržení v kanále se zpětným schodem na Re.

Na Obrázku 46 vidíme průběh délky odtržení u spodní hrany pro Taylorův-Hoodův element a výsledky experimentu, viz [12]. Je zde patrné, že se zvyšujícím se Reynoldsovým číslem se i odchylka od experimentu zvyšuje.



Obr. 46: Porovnání Taylorova-Hoodova elementu a SIMPLER- průběh závislosti spodního odtržení v kanále se zpětným schodem na Re.

Na Obrázku 47 vidíme porovnání délky odtržení u spodní hrany získané pomocí Taylorova-Hoodova elementu a SIMPLER, navíc jsou zde výsledky experimentu, viz [12]. Taylorův-Hoodův element má odchylku od experimentu menší, než SIMPLER.

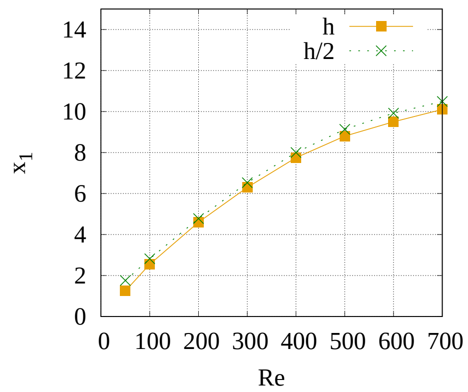


Obr. 47: Porovnání Taylorova-Hoodova elementu a SIMPLER- průběh závislosti spodního odtržení v kanále se zpětným schodem na Re.

Na Obrázku 48 vidíme porovnání délky spodního odtržení získané algoritmem založeným na SIMPLER pro jemnost sítě h a $h/2$. Je zde vidět, že se zvyšující se jemností sítě se blížíme výsledky experimentu.

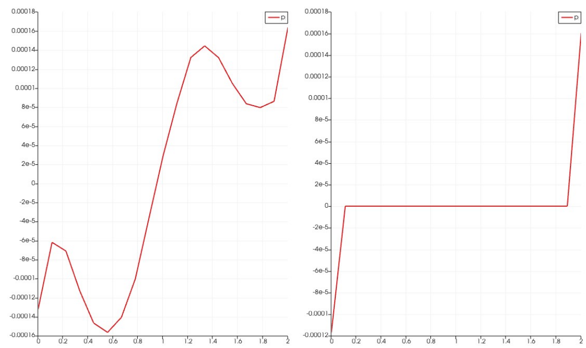
7.1.5 Výpočty užitím větší délky kanálu

Při řešení problému proudění v oblasti zpětného schodu pomocí projekčních metod musíme řešit Poissonův problém pro tlak p. Jelikož je tlak p určen jednoznačně až na konstantu musíme ho nějakým způsobem uchytit. Ve výpočtech jsme volili na Γ_{out} Dirichletovu



Obr. 48: SIMPLER- porovnání průběh závislosti spodního odtržení v kanále se zpětným schodem pro diskretizaci h a $\frac{h}{2}$.

okrajovou podmínku $p = 0$. Proto je možné, že příliš krátká délka kanálu ovlivní délku odtržení u spodní hrany. Při užití Taylorova-Hoodova elementu jsme na výstupu předepsali do-nothing podmínku. Na Obrázku 49 vidíme průběh tlaku na Γ_{out}.



Obr. 49: Průběh tlaku p (vlevo Taylorův-Hoodův element a vpravo SIMPLER) na Γ_{out}.

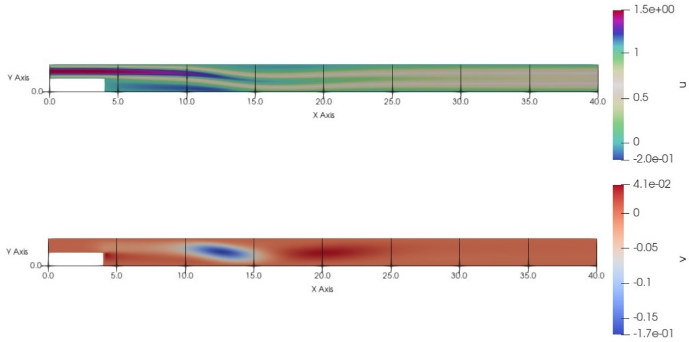
Abychom zjistili jestli podmínky na výstupu neovlivní délku odtržení, porovnáme výsledky získané s výpočtem na delším kanálu. Nejdelší odtržení jsme naměřili pro $Re = 750$, proto porovnání provedeme pro tento případ.

Pro SIMPLER vidíme složky rychlosti na Obrázku 50. Je zde patrné, že délka odtržení je takřka totožná s délkou kterou jsme naměřili u kanálu s délkou 20, tedy jsme neovlivnili řešení příliš krátkým kanálem.

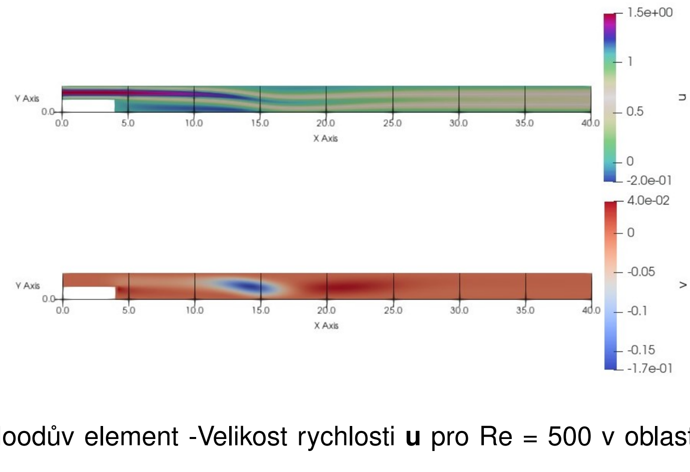
Na Obrázku 51 vidíme výsledky složek rychlosti u, v získané Taylorovým-Hoodovým elementem. Je zřejmé, že délka kanálu neovlivnila délku zpětného proudu.

7.1.6 Ovlivnění výsledků užitím stabilizace

Stabilizaci jsme si uvedli podrobněji v kapitole 4.6.3. Jestliže užijeme stabilizaci, přidáváme do výpočtu chybu, proto si zde ukážeme rozdíl výsledků rychlosti u získaných výpočtem



Obr. 50: SIMPLER -Velikost rychlosti **u** pro Re = 500 v oblasti zpětného schodu v kanále délky 40.



Obr. 51: Taylorův-Hoodův element -Velikost rychlosti **u** pro Re = 500 v oblasti zpětného schodu v kanále délky 40.

pomocí Taylorova-Hoodova elementu. Rozdíl rychlostí ve směru x dostaneme

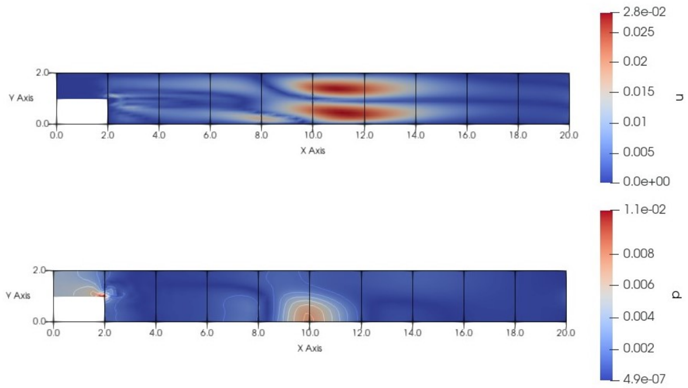
$$\Delta u = |u_1 - u_2|,$$

a rozdíl tlaků dostaneme obdobně

$$\Delta p = |p_1 - p_2|,$$

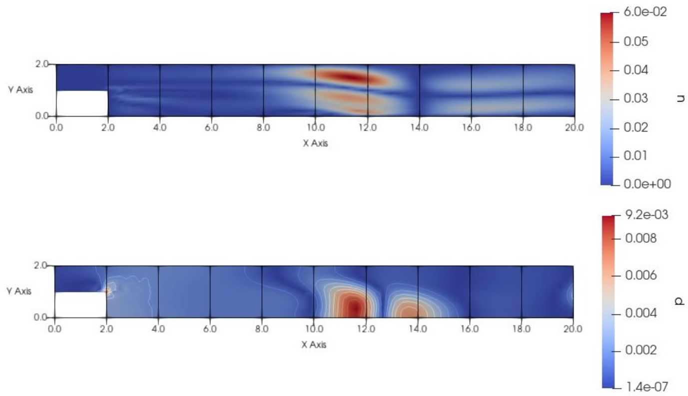
kde jsme výsledek s indexem $_1$ získali výpočtem se stabilizací a výsledek s indexem $_2$ výpočtem bez stabilizace.

Na Obrázku 52 vidíme rozdíl rychlosti Δu a tlaku Δp pro Reynoldsovo číslo $Re = 400$. Užitím stabilizace jsme se od původního výsledku odchýlili velikostí $\Delta u \leq 2,8 \cdot 10^{-2}$ a $\Delta p \leq 1,1 \cdot 10^{-2}$.



Obr. 52: Rozdíl rychlostí u (nahoře) a tlaku p (dole) mezi řešením s použitím stabilizace a bez použití stabilizace užitím Taylorova-Hoodova elementu pro Re=400.

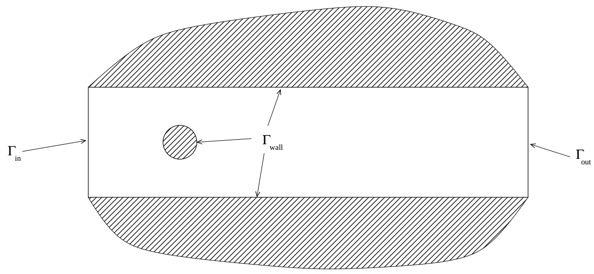
Na Obrázku 53 vidíme rozdíl rychlosti Δu a tlaku Δp pro Reynoldsovo číslo $Re = 750$. Použitím stabilizace jsme zde do výpočtu zanesli chybu která se od původního výsledku liší maximální velikostí $\Delta u \leq 6,0 \cdot 10^{-2}$ a $\Delta p \leq 9,2 \cdot 10^{-3}$..



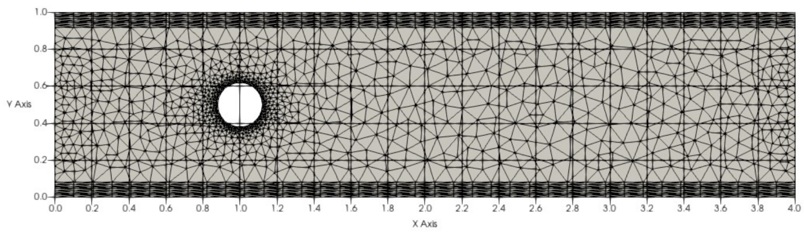
Obr. 53: Rozdíl rychlostí u (nahoře) a tlaku p (dole) mezi řešením s použitím stabilizace a bez použití stabilizace užitím Taylorova-Hoodova elementu pro Re=750.

7.2 Proudění kolem válce v kanále

Dále budeme řešit proudění v kanále o průřezu 2.5d a délce 25d uprostřed (v ose), kterého je umístěn válec o průměru d, viz Obrázek 54, 54. Pro všechny případy budeme používat časový krok $\Delta t = 0,1$. Výpočty byly opět provedeny v bezrozměrném tvaru s modelovým Reynoldsovým číslem Re_{comp}. Uváděné Reynoldsovo číslo Re bylo vztaženo na charakteristickou délku L_{char} volenou jako průměr válce, z charakteristické rychlosti U_{char} zvolené jako průměr z parabolického profilu rychlosti na vstupní části hranice a ze zadané viskozity, tedy $L = d$, $U_{char} = 1$ a $\nu = 1/Re_{comp}$. Na třech typech hranic Γ_{in}, Γ_{wall} a Γ_{out} jsou předepsány stejné okrajové podmínky jako v kapitole 7.1. Triangulaci oblasti vidíme na Obrázku 55. Síť měla 1611 vrcholů a 3000 trojúhelníkových prvků/elementů.



Obr. 54: Oblast kanálu s válcem.



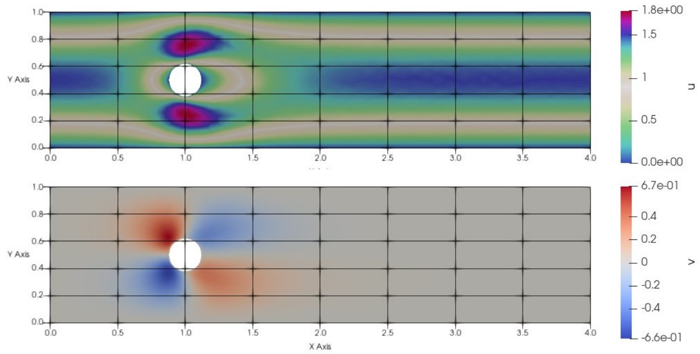
Obr. 55: Síť v oblasti kanálu s válcem.

7.2.1 SIMPLER

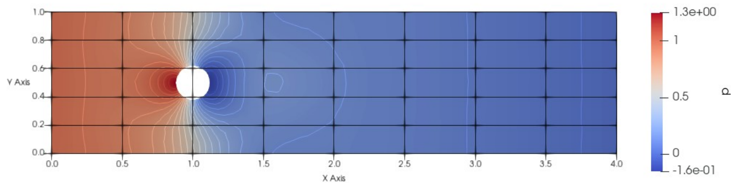
Schéma SIMPLER bylo podrobněji uvedeno v kapitole 5.3, zde si ukážeme numerické výsledky proudění v kanále s válcem. Na Obrázku 56 se nachází složky rychlosti pro Reynoldsovo číslo $Re = 8$. Navíc na pravé straně Obrázku vidíme škálu pro jednotlivé složky, které jsou stejné pro zbylé případy. V užší části kanálu se rychlost zvyšuje, úplav pro tento případ je ještě malý. Na Obrázku 57 najdeme průběh tlaku.

Na Obrázku 58 vidíme výsledky pro Reynoldsovo číslo $Re = 20$. Úplav za válcem se prodloužil oproti Reynoldsovu číslu $Re = 8$.

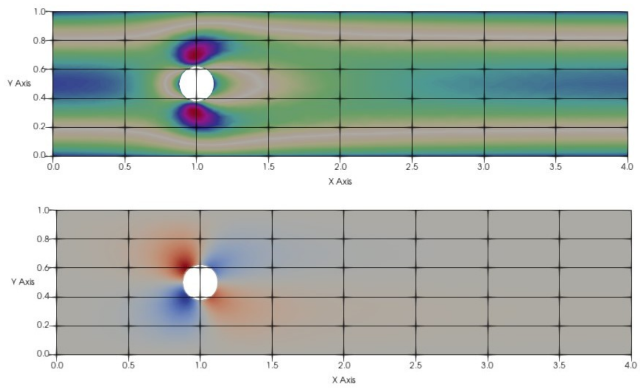
Na Obrázku 59 najdeme výsledky pro Reynoldsovo číslo $Re = 40$. Úplav je zde nejdelší.



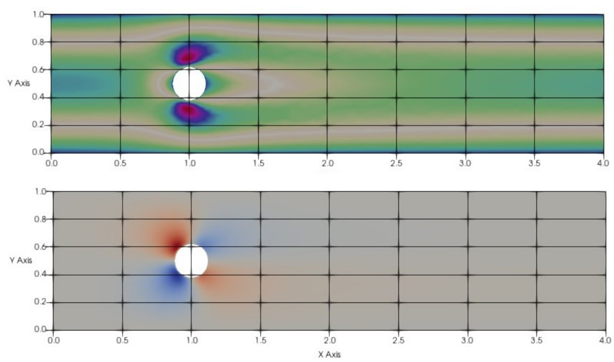
Obr. 56: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 8 v oblasti kanálu s válcem.



Obr. 57: Tlak p pro Re = 8 v oblasti kanálu s válcem.

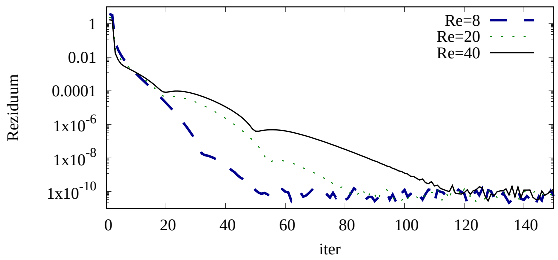


Obr. 58: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 20 v oblasti kanálu s válcem.



Obr. 59: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 40 v oblasti kanálu s válcem.

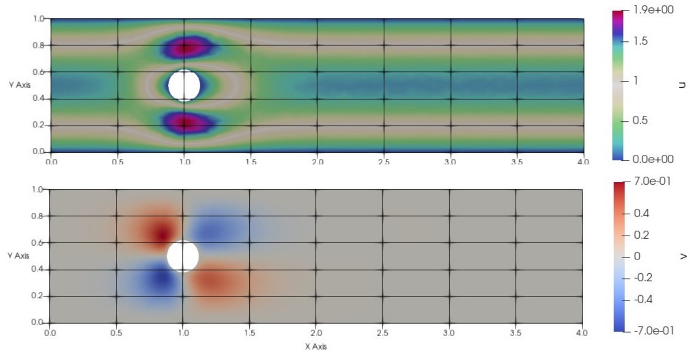
Rychlost snižování rezidua tlaku p v závislosti na iteraci pro různé případy nalezneme na Obrázku 60. Je zřejmé, že pro zvyšující se Reynoldsovo číslo se rychlost snižování zmenšuje. SIMPLER dosáhne velikost 10^{-12} při stacionárním řešení.



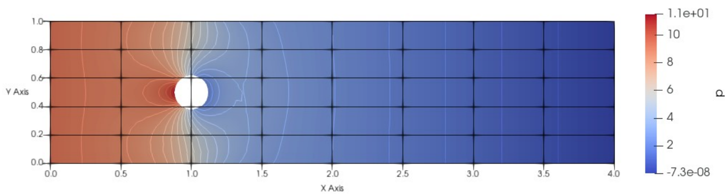
Obr. 60: Snižování rezidua v závislosti na iteraci

7.2.2 Taylorův-Hoodův element

Výsledky rychlosti **u** získané pomocí Taylorova-Hoodova elementu jsme ukládali pouze ve vrcholech. Ve výsledcích nejsou zahrnuty středy stran. Na Obrázku 61 vidíme složky rychlostí se škálou pro Reynoldsovo číslo $Re = 100$. V užší části kanálu se rychlost zvyšuje. Tlak p je na Obrázku 62.

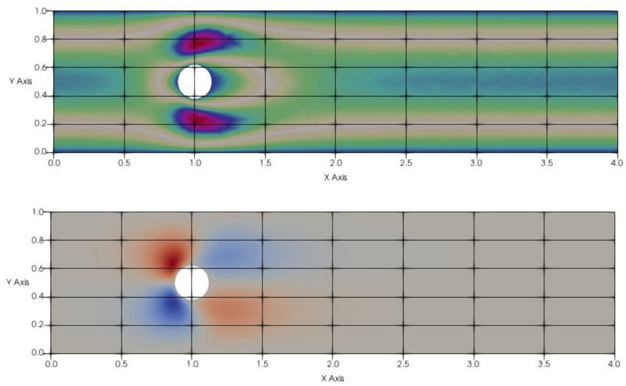


Obr. 61: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 8 v oblasti kanálu s válcem.



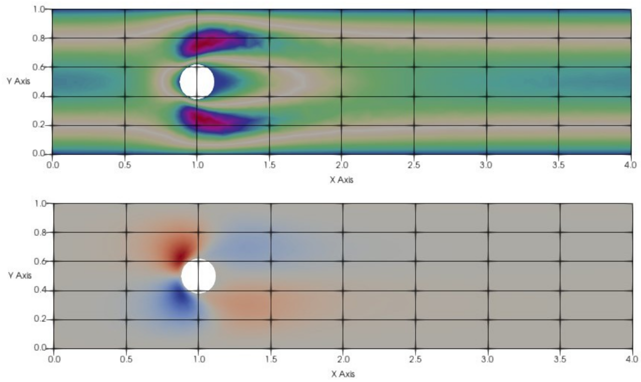
Obr. 62: Tlak p pro Re = 8 v oblasti kanálu s válcem.

Na Obrázku 63 jsou výsledky pro Reynoldsovo číslo $Re = 20$. Úplav za válcem se prodloužil oproti výsledkům s $Re = 8$.



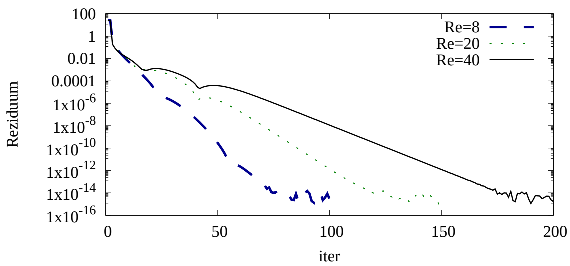
Obr. 63: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 20 v oblasti kanálu s válcem.

Výsledky pro Reynoldsovo číslo $Re = 40$ nalezneme na Obrázku 64. Úplav za válcem je z uvedených případů nejdelší.



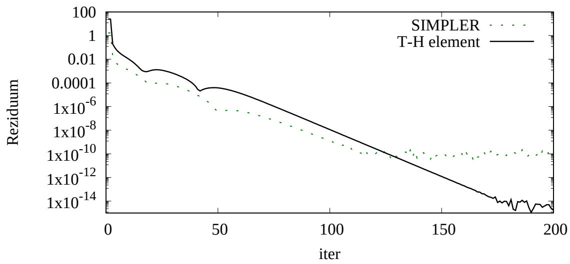
Obr. 64: Složky rychlosti u (nahoře), v (dole) pro Re = 40 v oblasti kanálu s válcem.

Se zvyšujícím se číslem se prodlužuje úplav za válcem. Na Obrázku 65 je průběh snižování rezidua v závislosti na iteraci.



Obr. 65: Snižování rezidua v závislosti na iteraci.

Pro zvyšující se Reynoldsova čísla rychlost snižování rezidua klesá. Na Obrázku 66 je porovnání SIMPLER a Taylorova-Hoodova elementu pro Reynoldsovo číslo $Re = 40$. Rychlost snižování rezidua je rychlejší u SIMPLER, ale Taylorův-Hoodův element dosahuje menší velikosti rezidua a to řádu 10^{-16}.



Obr. 66: Snižování rezidua v závislosti na iteraci.

8 Závěr

Cílem práce byla realizace projekčních metod a řešení pomocí Taylorova-Hoodova elementu. Nejprve jsme si Navierovy-Stokesovy rovnice odvodili. Dále jsme si ukázali jak rovnice diskretizovat pomocí metody konečných prvků a poté je řešili metodou založenou na algoritmu SIMPLER. Dále jsme je řešili Taylorovým-Hoodovým elementem.

Zabýcvali jsme se proudění v kanále se zpětným schodem. Zde jsme pozorovali délku spodního odtržení. Uvedli jsme závislost délky spodního odtržení na Reynoldsově čísle a tu porovnávali s experimentem. Pro vyšší Reynoldsova čísla byla odchylka větší, to bylo způsobeno tím, že výpočet probíhal pouze ve 2D. Po zjemnění sítě jsme se experimentu více přiblížili. Výpočet pomocí Taylorova-Hoodova elementu dosahoval menší odchylky od experimentu než výsledky pomocí SIMPLER. Dále jsme porovnávali rychlost snižování rezidua. Rychlost snižování se se zvyšujícím Reynoldsovým číslem zpomalovala. Taylorův-Hoodův element dosáhl menšího rezidua 10^{-16}, než dosáhl SIMPLER 10^{-14} . Demonstrovali jsme rozdíl ve výpočtu za užití a bez použití stabilizace. Navíc jsme ukázali, že délka kanálu neovlivnila délku odtržení u spodní hrany.

Metody jsme porovnávali i na proudění kanálu s válcem. Rychlost snižování rezidua měl větší SIMPLER. Taylorův-Hoodův element dosahoval menší velikosti řádově 10^{-16}, zatímco SIMPLER pouze 10^{-14}.

Seznam použité literatury a zdrojů

[1] ERN, Alexandre a Jean-Luc GUERMOND. Theory and practice of finite elements. New York: Springer, c2004. ISBN 9780387205748.

[2] Kufner, Fucik a John. Function Spaces. Springer Science and Business Media, 1977. ISBN 978-90-286-0015-7.

[3] FEISTAUER, Miloslav. Mathematical methods in fluid dynamics. New York: Longman Scientific Technical, 1993.

[4] Hamid, Sam and Kolev, Tzanio and Thong, Quoc and Le Gia, Quoc and Wu, Wuxiang. (2000). Numerical Solution of Partial Differential Equations Using Wavelet Approximation Space.

[5] Geophysik.uni-muenchen [online]. [cit. 2021-6-30]. Dostupné z: `https://www.geophysik.uni-muenchen.de/~igel/Lectures/NMG/08_finite_elements_basisfunctions.pdf`

[6] SVÁČEK, Petr a Miloslav FEISTAUER. Metoda konečných prvků. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 8001035220.

[7] QUARTERONI, Alfio a Alberto VALLI. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 1997. ISBN 3-540-57111-6.

[8] TOBISKA, Lutz a Gert LUBE. A modified streamline diffusion method for solving the stationary Navier-Stokes equation [online]. [cit. 2021-7-2]. Dostupné z: `https://www.researchgate.net/publication/226250113_A_modified_streamline_diffusion_method_for_solving_the_stationary_Navier-Stokes_equation`

[9] CHEN, Long. FINITE ELEMENT METHODS FOR STOKES EQUATIONS [online]. [cit. 2021-7-2]. Dostupné z: `https://www.math.uci.edu/~chenlong/226/FEMStokes.pdf`

[10] GIRAULT, Vivette a Pierre-Arnaud RAVIART. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. 5. Berlin: Springer, 1986. ISBN 978-3-642-61623-5.

[11] SLIN, Pavel, Karel SEGETH a Ivo DOLEZEL. Higher-order finite element methods. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, c2004. ISBN 978-1584884385.

[12] Armaly, B., Durst, F., Pereira, J. Schönung, B. (1983). Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. Journal of Fluid Mechanics, 127, 473-496. doi:10.1017/S0022112083002839

[13] Williams, Paul a Baker, A.. (1997). Numerical simulations of laminar flow over a 3D backward-facing step. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 24. 1159

- 1183. 10.1002/(SICI)1097-0363(19970615)24:11<1159::AID-FLD534>3.0.CO;2-R.

[14] CHORIN, Alexandre J. a Jerrold E. MARSDEN. A mathematical introduction to fluid mechanics. 3rd ed. Ney York: Springer-Verlag, c1993. Texts in applied mathematics. ISBN 0-387-97918-2.

[15] Alfio Quarteroni, Fausto Saleri, Alessandro Veneziani. Factorization methods for the numerical approximation of Navier–Stokes equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 188, Issues 1–3, 2000, Pages 505-526, ISSN 0045-7825, https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00192-9. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782599001929

[16] Numerical Methods for the Navier-Stokes Equations [online]. University of Michigan, 2001 [cit. 2021-7-1]. Dostupné z:http://www.fem.unicamp.br/~phoenics/SITE_PHOENICS/Apostilas/CFD-1_U20Michigan_Hong/Lecture13.pdf

Seznam obrázků, grafů a tabulek

Seznam obrázků

Seznam použitého SW

- Texstudion
- Gmsh
- Paraview

Seznam příloh

Příloha 1: Soubor s programy k řešení Navierových-Stokesových rovnic