



**FAKULTA  
STROJNÍ  
ČVUT V PRAZE**

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. David Kučera

**Vliv geometrie CAD modelu na kvalitu  
a efektivitu obrábění na CNC strojích**

Ústav technické matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.

Studijní program: Aplikované vědy ve strojním  
inženýrství

Studijní obor: Matematické modelování v technice

Praha 2021

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kučera** Jméno: **David** Osobní číslo: **466588**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**  
Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**  
Specializace: **Matematické modelování v technice**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Vliv geometrie CAD modelu na kvalitu a efektivitu obrábění na CNC strojích**

Název diplomové práce anglicky:

**Influence of CAD model geometry on quality and efficiency of machining on CNC machine tools**

Pokyny pro vypracování:

- Seznámení se s teoretickým základem počítačem podporovaného modelování ploch obecného tvaru vhodných k tvorbě CAD modelů strojírenských součástí
- Analýza matematicko-geometrických vlastností CAD modelů strojírenských součástí a jejich vliv na kvalitu a efektivitu CNC obráběcího procesu
- Na vhodně zvoleném příkladu konkrétní plochy provést analýzu CAD modelu, navrhnout úpravu geometrie vedoucí ke zvýšení kvality a efektivity obrábění a toto zvýšení ověřit

Seznam doporučené literatury:

Piegl, L., Tiller, W.: The NURBS Book, Springer-Verlag, Berlin, 1997  
Linkeová, I.: Základy počítačového modelování křivek a ploch. Ediční středisko ČVUT, Praha 2008  
Stejskal, M.: Zvýšení efektivity obrábění na CNC strojích. Diplomová práce ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2017

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D., ústav technické matematiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **16.04.2021**

Termín odevzdání diplomové práce: **15.08.2021**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

Na tomto místě mnohokrát děkuji paní doc. Ing. Ivaně Linkeové, Ph.D., vedoucí této diplomové práce, za velmi zkušené a trpělivé vedení, rady a připomínky, které měly obrovský přínos a také za její čas.

Dále bych chtěl poděkovat pracovníkům Ústavu výrobních strojů a zařízení Fakulty strojní ČVUT v Praze (RCMT) za uskutečnění potřebných testů a simulací výroby.

V neposlední řadě také děkuji své rodině a blízkým přátelům za jejich lásku a podporu po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne .....

.....

Podpis autora



Název práce: Vliv geometrie CAD modelu na kvalitu a efektivitu obrábění na CNC strojích

Autor: Bc. David Kučera

Ústav: Ústav technické matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D., Ústav technické matematiky

Abstrakt: Kvalitu a efektivitu obrábění na CNC strojích určuje již samotná kvalita CAD modelu obrobku, který slouží jako základ pro generování dráhy nástroje v CAM systému. Tato práce se proto zabývá vlivem kvality napojení a spojitosti ploch CAD modelu daného dílu na průběh obrábění a výslednou kvalitu povrchu obráběné součásti. Tento vliv je zkoumán na modelu Blisk lopatky z lopatkového kola. Nejprve je optimalizace ploch provedena na jednodušším segmentu a to na výřezu z lopatky, ten je testován a výsledky jsou porovnávány s neopraveným segmentem. Dále je v práci uveden postup opravy CAD modelu lopatky a porovnány výsledky opraveného a původního dílu.

Klíčová slova: CAD model; CL data; CNC obrábění; geometrická spojitost; křivost; NURBS

Title: Influence of CAD model geometry on quality and efficiency of machining on CNC machine tools

Author: Bc. David Kučera

Institute: Department of Technical Mathematics

Supervisor: doc. Ing. Ivana Linkeová, Ph.D., Department of Technical Mathematics

Abstract: Quality and efficiency of machining on CNC machines is determined by the quality of workpiece CAD model, which serves as the basis for generating the toolpath in the CAM system. This work therefore deals with an influence of connection and continuity quality of the workpiece CAD model surfaces on the whole machining process and resulting quality of the machined surface. This influence is investigated on the model of the Blisk blade, from the impeller. At first, there is optimization of its surfaces, done at the simpler segment which is cut-out of the blade, then it is tested and results are compared with original segment. Furthermore the work presents the procedure of repairing the CAD model of the blade and compares the results of the repaired and original part.

Keywords: CAD model; CL data; CNC machining; geometrical continuity; curvature; NURBS

# Obsah

<b>Přehled použité symboliky</b>	<b>8</b>
<b>Úvod</b>	<b>11</b>
<b>1 NURBS křivky</b>	<b>12</b>
1.1 Definice aproximační NURBS křivky . . . . .	12
1.1.1 B-spline křivka . . . . .	12
1.1.2 NURBS křivka . . . . .	16
1.2 Druhy B-spline a NURBS křivek . . . . .	17
1.2.1 Otevřená a ukotvená křivka . . . . .	17
1.2.2 Uzavřená křivka . . . . .	19
1.3 Definice interpolační NURBS křivky . . . . .	20
1.4 Napojování křivek . . . . .	22
1.4.1 Spojitost 0. řádu . . . . .	22
1.4.2 Spojitost 1. řádu . . . . .	23
1.4.3 Spojitost 2. řádu . . . . .	25
1.4.4 Spojitost 3. řádu . . . . .	27
<b>2 Plochy</b>	<b>29</b>
2.1 Parametrické křivky plochy . . . . .	29
2.2 Ekvidistantní plochy . . . . .	29
2.3 Obalové plochy . . . . .	31
2.4 Křivosti ploch . . . . .	33
2.4.1 Normálová křivost . . . . .	33
2.4.2 Hlavní křivost . . . . .	34
2.4.3 Gaussova a střední křivost . . . . .	34
2.5 Definice aproximační NURBS plochy . . . . .	35
2.5.1 Změna počtu uzlů . . . . .	36
2.5.2 Změna stupně . . . . .	37
2.6 Napojování ploch . . . . .	38
2.6.1 Spojitost 0. řádu . . . . .	38
2.6.2 Spojitost 1. řádu . . . . .	39
2.6.3 Spojitost 2. řádu . . . . .	39
2.6.4 Spojitost 3. řádu . . . . .	40
<b>3 Předvýrobní etapa procesu CNC obrábění</b>	<b>44</b>
3.1 STEP formát . . . . .	45
3.2 Výpočet CL dat . . . . .	46
3.3 Kvalita CL dat . . . . .	48
3.4 CNC řídicí systém . . . . .	54
3.5 Virtuální dvojče stroje . . . . .	55
3.6 Pětiosé obrábění . . . . .	55

<b>4 Experiment</b>	<b>57</b>
4.1 Použité zařízení a software . . . . .	57
4.2 Blisk lopatka . . . . .	58
4.3 Segment lopatky . . . . .	60
4.3.1 Původní segment . . . . .	60
4.3.2 Postup úpravy segmentu . . . . .	62
4.3.3 Porovnání původního a upraveného segmentu . . . . .	64
4.4 Celá lopatka . . . . .	66
4.4.1 Postup úpravy lopatky . . . . .	66
4.4.2 Porovnání původního a upraveného modelu lopatky . . . . .	70
<b>Závěr</b>	<b>77</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>78</b>

# Přehled použité symboliky

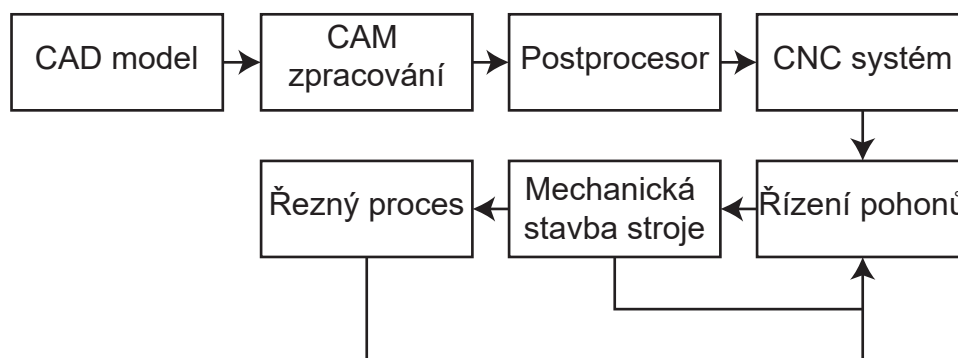
$\mathbf{A}$ .....	vektor osy nástroje
$b$ .....	binormála
$b_{i,j}$ .....	skalární součin vektoru $\mathbf{S}^{ij}$ a jednotkového vektoru normály
$\mathbf{m}$ .....	jednotkový vektor normály
$\mathbf{B}(u,v,t)$ .....	těleso
$B_{i,p}(u)$ .....	Bernsteinovy polynomy $p$ -tého stupně pro $i$ -tý řídicí bod
$c$ .....	charakteristika obalové plochy
$\mathbf{C}(u)$ .....	polohový vektor bodu křivky
$\mathbf{C}(s)$ .....	charakteristika obalové plochy
$\mathbf{C}'(u)$ .....	první derivace polohového vektoru bodu křivky
$\mathbf{C}''(u)$ .....	druhá derivace polohového vektoru bodu křivky
$C^n$ .....	parametrická spojitost $n$ -tého řádu
$CL(u,v)$ .....	CL bod
$d$ .....	celková délka definičního polygonu, vzdálenost ve směru normály, délka kroku
$D$ .....	délka kroku
$\mathbf{E}(s,t)$ .....	obalová plocha
$\mathbb{E}_2$ .....	dvourozměrný Euklidovský prostor
$g_{i,j}$ .....	skalární součin vektoru $\mathbf{S}^1$ a $\mathbf{S}^2$
$G^n$ .....	geometrická spojitost $n$ -tého řádu
$h$ .....	výška zbytkové nerovnosti
$H$ .....	střední křivost
$i$ .....	index
$I$ .....	interval v prostoru $\mathbb{R}^n$ , první kvadratická forma
$II$ .....	druhá kvadratická forma
$j$ .....	index
$k$ .....	index, křivost křivky
$k_n$ .....	normálová křivost
${}^1k(u)$ .....	první křivost
$K$ .....	Gaussova křivost

$l_i$ .....	vzdálenost dvou po sobě jdoucích těžišť dílčího řídicího polygonu
$L$ .....	součet vzdáleností těžišť dílčích řídicích polygonů
$\mathbf{m}$ .....	jednotkový vektor normály
$m$ .....	počet uzlových roztečí, hlavní normála
$m_1, m_2$ .....	meridiány obalové plochy
$\mathbf{n}(u,v)$ .....	jednotkový vektor normály
$\mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v$ .....	jednotkové normálové vektory parametrických křivek plochy
$n, \tilde{n}$ .....	rozměr útvaru
$N_{i,p}(u)$ .....	B-spline bázová funkce $p$ -tého stupně pro $i$ -tý řídicí bod
$o_1, o_2$ .....	osy
$p$ .....	stupeň křivky, stupeň plochy ve směru $u$
$\mathbf{P}_i$ .....	polohový vektor řídicího bodu křivky
$\mathbf{P}_{i,j}$ .....	polohový vektor řídicího bodu plochy
$P_i$ .....	řídicí bod křivky
$P_{i,j}$ .....	řídicí bod plochy
$q$ .....	stupeň plochy ve směru $v$
$\mathbf{Q}_i$ .....	polohový vektor definičního bodu křivky
$Q_i$ .....	definiční bod křivky
$r$ .....	poloměr nástroje
$r(u)$ .....	poloměr oskulační kružnice
$\mathbf{r}, \mathbf{s}$ .....	vektory z tečné roviny
$R_{i,p}(u)$ .....	racionální bázová funkce $p$ -tého stupně pro $i$ -tý řídicí bod
$R_{i,p}(u,v)$ .....	racionální bázová funkce $p$ -tého stupně pro $i,j$ -tý řídicí bod plochy
$\mathbb{R}$ .....	prostor reálných čísel
$\mathbb{R}^n$ .....	$n$ -rozměrný reálný prostor
$s$ .....	násobnost uzlu, parametr
$\mathbf{S}(u,v)$ .....	plocha, generující plocha
$\mathbf{S}^+(u,v)$ .....	ekvidistantní plocha
$\mathbf{S}(u,\alpha) = \mathbf{S}_u, \mathbf{S}(\beta,v) = \mathbf{S}_v$ .....	parametrické křivky plochy
$\mathbf{S}_u^+, \mathbf{S}_v^+$ .....	parametrické křivky ekvidistantní plochy

$\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2$ .....	tečné vektory parametrických křivek plochy
$\mathbf{S}^{ij}$ .....	druhá parciální derivace plochy
$t$ .....	parametr, tečna
$\mathbf{T}_i$ .....	těžiště dílčího řídicího polygonu
$\mathbf{T}(t)$ .....	trajektorie
$u$ .....	parametr
$u_i$ .....	uzel
$\tilde{u}_i$ .....	hodnota parametru vektoru parametrizace
$u^1, u^2$ .....	nahrazení parametrů $u$ a $v$
$\mathbf{U}$ .....	uzlový vektor
$\tilde{\mathbf{U}}$ .....	vektor parametrizace
$\mathbb{U}$ .....	konvexní oblast v $\mathbb{E}_2$
$v$ .....	parametr
$\mathbf{V}$ .....	uzlový vektor
$w_i$ .....	váha $i$ -tého řídicího bodu
$W$ .....	posloupnost vah řídicích bodů
$X$ .....	bod
$\mathbf{y}(t)$ .....	křivka na ploše $\mathbf{S}(u^1, u^2)$
$\mathbf{y}''$ .....	druhá derivace křivky $\mathbf{y}(t)$
$\alpha$ .....	konstantní hodnota uzlového vektoru $\mathbf{U}$
$\beta$ .....	konstantní hodnota uzlového vektoru $\mathbf{V}$
$\delta$ .....	tolerance
$\eta$ .....	normálová rovina
$\kappa_1, \kappa_2$ .....	směry hlavní plochy
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .....	konstanty
$\rho$ .....	rektifikační rovina
$\phi$ .....	odchylka obecného směru a hlavního směru plochy
$\omega$ .....	oskulační rovina

# Úvod

V posledních letech se věnuje velké množství energie optimalizaci obráběcích procesů, např. zaváděním virtuálních strojů do přípravné fáze výroby, které mimo jiné pomáhají optimalizovat řezné podmínky. Oblastmi CAM (Computer Aided Manufacturing) softwaru, postprocessingu a řídicího systému se zabývá práce (Stejskal, 2017). Zde je však věnována pozornost úplnému počátku, který každému CNC (Computerized Numerical Control) obrábění předchází, a to samotnému CAD (Computer Aided Design) modelu, viz obr. 1. Většina CAD systémů je v dnešní době zjednodušena do podoby, kdy běžný uživatel nemá potřebu znát matematické pozadí geometrických tvarů a spojení, které v těchto programech sám tvoří. V případě CNC obrábění však tato skutečnost může vést ke zhoršení efektivity obrábění, v horším případě k chybám v přípravných fázích výroby, které ji následně znemožní.



Obrázek 1: Posloupnost činností výrobního procesu

Tato práce se proto zabývá vlivem geometrie CAD modelu obráběné součásti na kvalitu a efektivitu obrábění na CNC strojích. Cílem je poukázat na vlastnosti a nedostatky v CAD modelech obrobků, které mají významný vliv na další přípravné fáze výroby. Vliv těchto nedostatků je následně porovnáván s generovanou trajektorií nástroje prostřednictvím CAM softwaru.

Úvodní kapitoly se věnují definici a vlastnostem NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) křivek a ploch, převážně pak jejich napojování. Další kapitoly se věnují analýze těchto ploch, výpočtu a významu křivosti. Popsány jsou také ekvidistantní a obalové plochy, které mají s CNC obráběním přímou spojitost. Následuje popis přípravných fází výroby, způsob generování trajektorie nástroje a zobrazení vlivu geometrie CAD modelu na vygenerovanou trajektorii.

Na vybraném dílu je provedena analýza geometrie, generování drah a simulace výroby ve virtuálním stroji. Z dílu je nejprve vyjmut segment, na kterém je provedena úprava geometrie s cílem ukázat vliv této změny na kvalitu a efektivitu obrábění. V práci je dále uveden postup úpravy geometrie celého dílu. V závěru práce je výroba upraveného a původního modelu simulována na virtuálním stroji a jsou porovnány výsledky obou dílů.

# 1. NURBS křivky

NURBS křivkou se rozumí neuniformní racionální B-spline křivka. NURBS reprezentuje širokou škálu tvarů, a přitom zachovává matematickou přesnost (Jankauskas, 2010).

B-spline křivka je segmentovaná křivka tvořená lineární kombinací bázevých funkcí, kde každý segment je napojen s  $C^{p-1}$  spojitostí, přičemž  $p$  je stupeň křivky.

Neuniformní reprezentace B-spline křivky znamená, že rozdíly hodnot parametru, ve kterých dochází k napojení jednotlivých segmentů, jsou rozdílné. Racionální reprezentace přiřazuje různou váhu řídicím bodům. Velikost váhy určuje vliv daného řídicího bodu na výsledný tvar křivky vůči ostatním bodům.

V závislosti na vstupních datech existují dvě možnosti konstrukce matematického modelu křivky zadané posloupností bodů. První možností je aproximace polohových vektorů řídicích bodů označovaných  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ , které jsou uspořádány do řídicího polygonu

$$(\mathbf{P}_i)_{i=0}^n = (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n). \quad (1.1)$$

Tvar aproximační křivky je dán polohou jednotlivých vrcholů řídicího polygonu a lze jej dále modifikovat pomocí stupně křivky, vah řídicích bodů a hodnot parametru v místě napojení jednotlivých segmentů uspořádaných do uzlového vektoru. Druhou možností je interpolace polohových vektorů definičních bodů označovaných  $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{\tilde{n}}$ , které jsou uspořádány do definičního polygonu

$$(\mathbf{Q}_i)_{i=0}^{\tilde{n}} = (\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{\tilde{n}}). \quad (1.2)$$

Tvar interpolační křivky je určen definičním polygonem, ve kterém musí křivka procházet každým bodem a tvar mezi těmito body musí vyhovovat dané aplikaci (Linkeová, 2007).

## 1.1 Definice aproximační NURBS křivky

V této části jsou definovány určité pojmy a uvedeny některé vlastnosti potřebné k pochopení definice NURBS křivky.

### 1.1.1 B-spline křivka

**Definice 1** (uzlový vektor). *Nechť množina  $\mathbf{U} = (u_i)_{i=0}^m = (u_0, u_1, \dots, u_m)$  je neklesající posloupnost reálných čísel nazývaná uzlový vektor, kde  $u_0, u_1, \dots, u_m$  jsou uzlové body a  $i = 0, \dots, m$ . Potom polootevřený interval  $\langle u_i, u_{i+1} \rangle$  je uzlovým intervalem.*

*Při daném stupni křivky  $p$  a počtu  $n + 1$  řídicích bodů je  $m = p + n + 1$  počet uzlových roztečí (intervalů).*

*Má-li každý uzlový interval stejnou délku, tzn.  $u_{i+1} - u_i = \Delta u = \text{konst}$ , jedná se o uniformní uzlový vektor, viz obr. 1.1. V opačném případě se jedná o neuniformní uzlový vektor, viz obr. 1.2.*

*Pokud se uzel  $u_i$  v uzlovém vektoru  $\mathbf{U}$   $k$ -krát opakuje, tzn.  $u_i = u_{i+1} = u_{i+k-1}$  pro  $k > 1$ , potom se jedná o  $k$ -násobný uzel. V opačném případě se jedná o jednoduchý uzel (Linkeová, 2007).*



Volbou uzlového vektoru ovlivňujeme tvar výsledné křivky. Neuniformní uzlový vektor lze např. určit pomocí těžiškové metody. Uzlový vektor pro ukotvenou aproximační NURBS křivku je dán následujícím způsobem:

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{T}_{n-p+1} = \mathbf{P}_n,$$

$$\mathbf{T}_i = \frac{1}{p+2} \sum_{j=i-1}^{i+p} \mathbf{P}_j, \quad (1.3)$$

kde  $i = 1, \dots, n-p$  a  $\mathbf{T}_i$  je těžiště dílčího řídicího polygonu. Vzdálenost dvou po sobě jdoucích těžišť (1.3) je potom dána vztahem

$$l_i = |\mathbf{T}_{i-1}\mathbf{T}_i|, \quad (1.4)$$

kde  $i = 1, \dots, n-p+1$ . Součet všech těchto vzdáleností

$$L = \sum_{i=1}^{n-p+1} l_i. \quad (1.5)$$

Poté je uzlový vektor aproximační NURBS křivky ve tvaru

$$u_0 = \dots = u_p = 0, \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1,$$

$$u_i = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{i-p} l_j, \quad (1.6)$$

kde  $i = p+1, \dots, m-p-1$  (Linkeová, 2007).

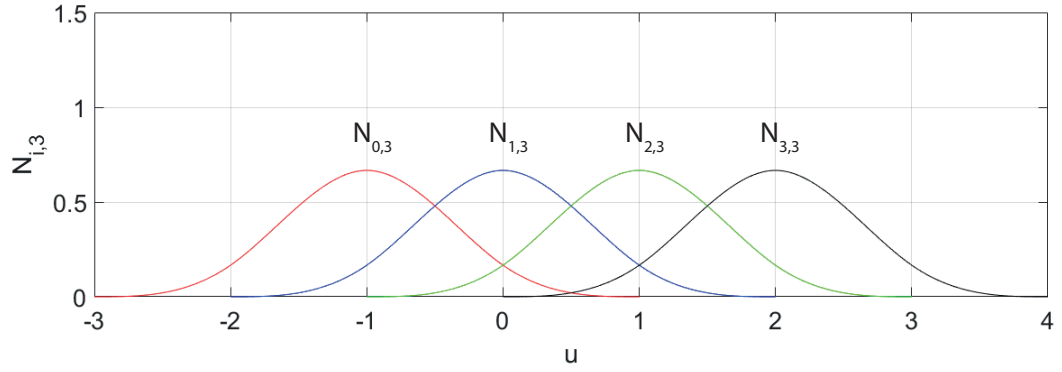
**Definice 2** (B-spline bázové funkce). *Hodnoty B-spline bázové funkce  $N_{i,p}(u)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , stupně  $p$  jsou na uzlovém vektoru  $\mathbf{U} = (u_i)_{i=0}^m$  dány vzorcem:*

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \langle u_i, u_{i+1} \rangle, \\ 0, & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

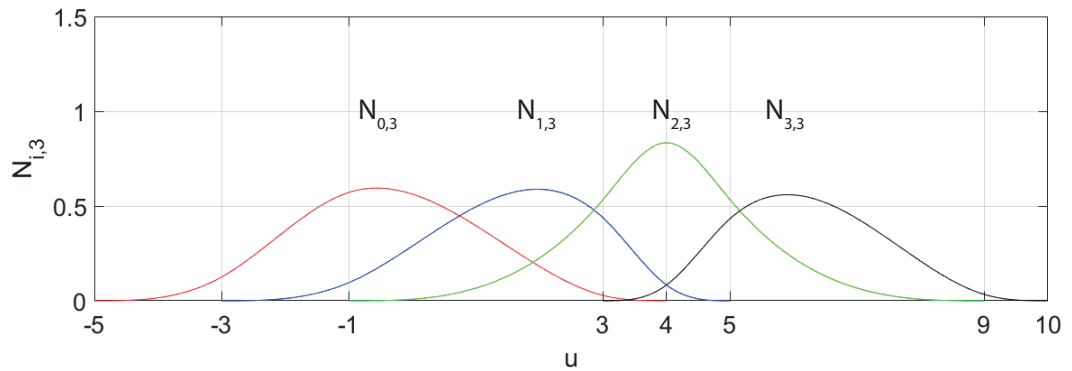
$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u), \quad k = 1, \dots, p. \quad (1.7)$$

**Definice 3** (B-spline křivka). *Nechť je dán řídicí polygon (1.1), uzlový vektor dle def. 1 a B-spline bázová funkce dle def. 2, potom je vektorová rovnice B-spline křivky stupně  $p$  dána vztahem:*

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,p}(u). \quad (1.8)$$



Obrázek 1.1: Průběh B-spline bazových funkcí 3. stupně pro uniformní uzlový vektor  $\mathbf{U} = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$ . U popisu bazových funkcí je v obrázcích vynechána závislost na parametru  $u$ .



Obrázek 1.2: Průběh B-spline bazových funkcí 3. stupně pro neuniformní uzlový vektor  $\mathbf{U} = (-5, -3, -1, 3, 4, 5, 9, 10)$

Pokud je součet B-spline bazových funkcí na intervalu  $\langle u_p, u_{m-p} \rangle$  roven jedné a na každém intervalu je  $p + 1$  B-spline bazových funkcí nenulových, potom části křivky v tomto intervalu nazýváme aktivními segmenty. Ve zbylých částech uzlového vektoru  $\langle u_0, u_p \rangle$  a  $\langle u_{m-p}, u_m \rangle$  jsou B-spline bazové funkce různé od jedné. Tyto části nazýváme pasivními segmenty. V praxi se pasivní segmenty na křivce ignorují.

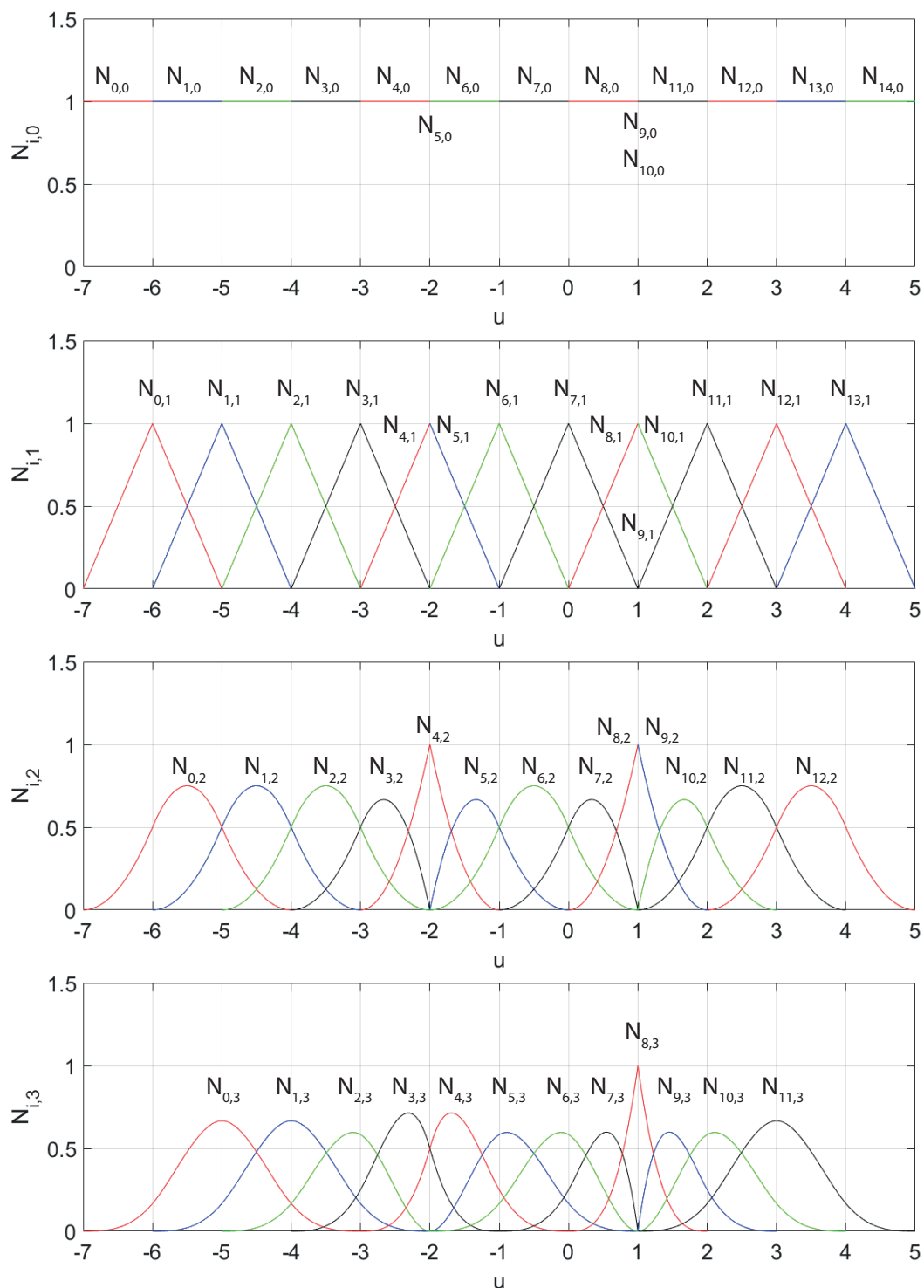
Na intervalech, kde jsou dané B-spline bazové funkce nulové, nemají řídicí body vliv na část křivky uvnitř  $u_k \leq u < u_{k+1}$ . To je dáno tím, že z vektorové rovnice B-spline křivky (1.8) vypadnou násobky  $N_{i,p}(u)\mathbf{P}_i$ .

Na tvar křivky  $\mathbf{C}(u)$  mají tedy vliv pouze řídicí body s příslušnou nenulovou bazovou funkcí  $N_{i,p}(u)$  a čím vyšší je hodnota této funkce, tím je menší vzdálenost mezi řídicím bodem  $\mathbf{P}_i$  a křivkou  $\mathbf{C}(u)$ .

Křivka  $\mathbf{C}(u)$  je v daném bodě ovlivňována  $p - s + 1$  řídicími body, kde  $s$  je násobnost uzlového bodu v  $\mathbf{U}$ . V tomto bodě nabývá křivka  $C^{p-s}$  spojitosti. To je patrné z obr. 1.3, kde je zobrazen průběh B-spline bazových funkcí 0. až 3. stupně pro neuniformní uzlový vektor

$$\mathbf{U} = (-7, -6, -5, -4, -3, -2, -2, -1, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5). \quad (1.9)$$

Sledujme spojitost v dvojnásobném uzlu  $u = -2$  a v trojnásobném uzlu  $u = 1$ . V uzlu  $u = -2$  je křivka 3. stupně  $C^1$  spojitá a v uzlu  $u = 1$  má spojitost  $C^0$  (Jankauskas, 2010).



Obrázek 1.3: Průběh B-spline bázových funkcí 0. až 3. stupně pro neuniformní uzlový vektor s násobnými uzly  $U = (-7, -6, -5, -4, -3, -2, -2, -1, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5)$

### 1.1.2 NURBS křivka

Pomocí obyčejných B-spline křivek nelze reprezentovat tvary vytvořené pomocí kuželoseček mimo paraboly, proto se zavádí racionální forma.

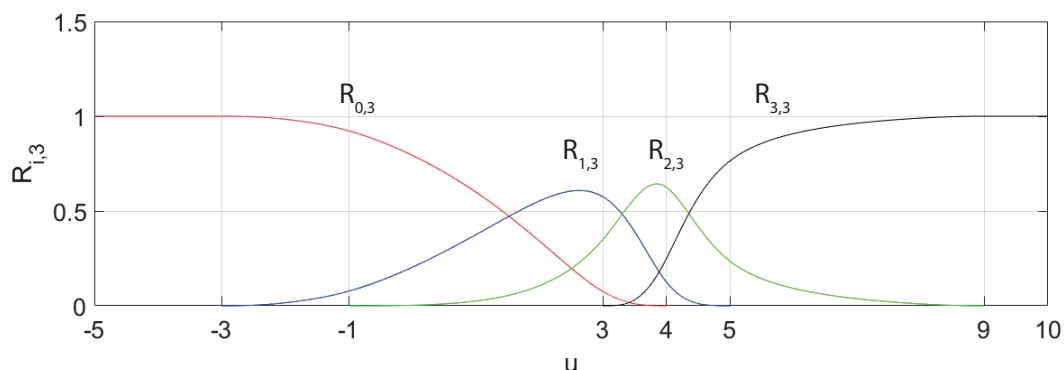
**Definice 4** (váhy řídicích bodů). *Nechť je dán řídicí polygon (1.1), kde každému řídicímu bodu  $\mathbf{P}_i$  je přiřazeno odpovídající kladné reálné číslo  $w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , označované jako váha řídicího bodu. Váhy jsou uspořádány do posloupnosti*

$$W = (w_0, w_1, \dots, w_n) = (w_i)_{i=0}^n. \quad (1.10)$$

**Definice 5** (racionální bázové funkce). *Nechť je dán uzlový vektor dle def. 1, B-spline bázová funkce dle def. 2 a váhy řídicích bodů dle def. 4, potom racionální bázová funkce  $R_{i,p}(u)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , stupně  $p$  má tvar:*

$$R_{i,p} = \frac{N_{i,p}w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}w_j}. \quad (1.11)$$

Průběh racionálních bázových funkcí je vykreslen na obrázku 1.4.



Obrázek 1.4: Průběh racionálních B-spline bázových funkcí 3. stupně pro neuniformní uzlový vektor  $\mathbf{U} = (-5, -3, -1, 3, 4, 5, 9, 10)$ ,  $n = 3$  a váhy  $W = (\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5})$

**Definice 6** (NURBS křivka). *Nechť je dán řídicí polygon (1.1), neuniformní uzlový vektor dle def. 1, váhy řídicích bodů dle def. 4 a racionální bázové funkce dle def. 5, potom je vektorová rovnice NURBS křivky stupně  $p$  dána vztahem:*

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i R_{i,p}(u) \quad (1.12)$$

Součet racionálních bázových funkcí na každém uzlovém intervalu je roven jedné.

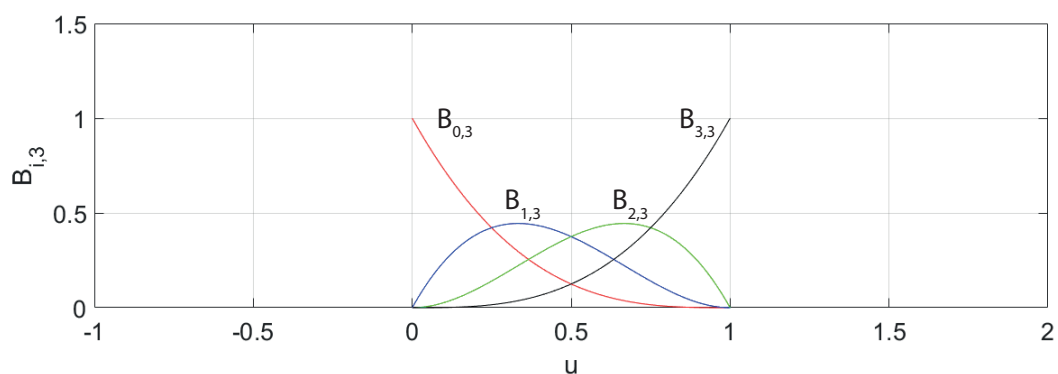
## 1.2 Druhy B-spline a NURBS křivek

Možnost násobnosti uzlu, jak je uvedeno výše, má vliv na tvar bázových funkcí a tím pádem i na tvar samotné křivky. V závislosti na tvaru uzlového vektoru a rozmístění řídicích bodů můžeme mít křivku otevřenou, ukotvenou a uzavřenou. (Linkeová, 2007).

### 1.2.1 Otevřená a ukotvená křivka

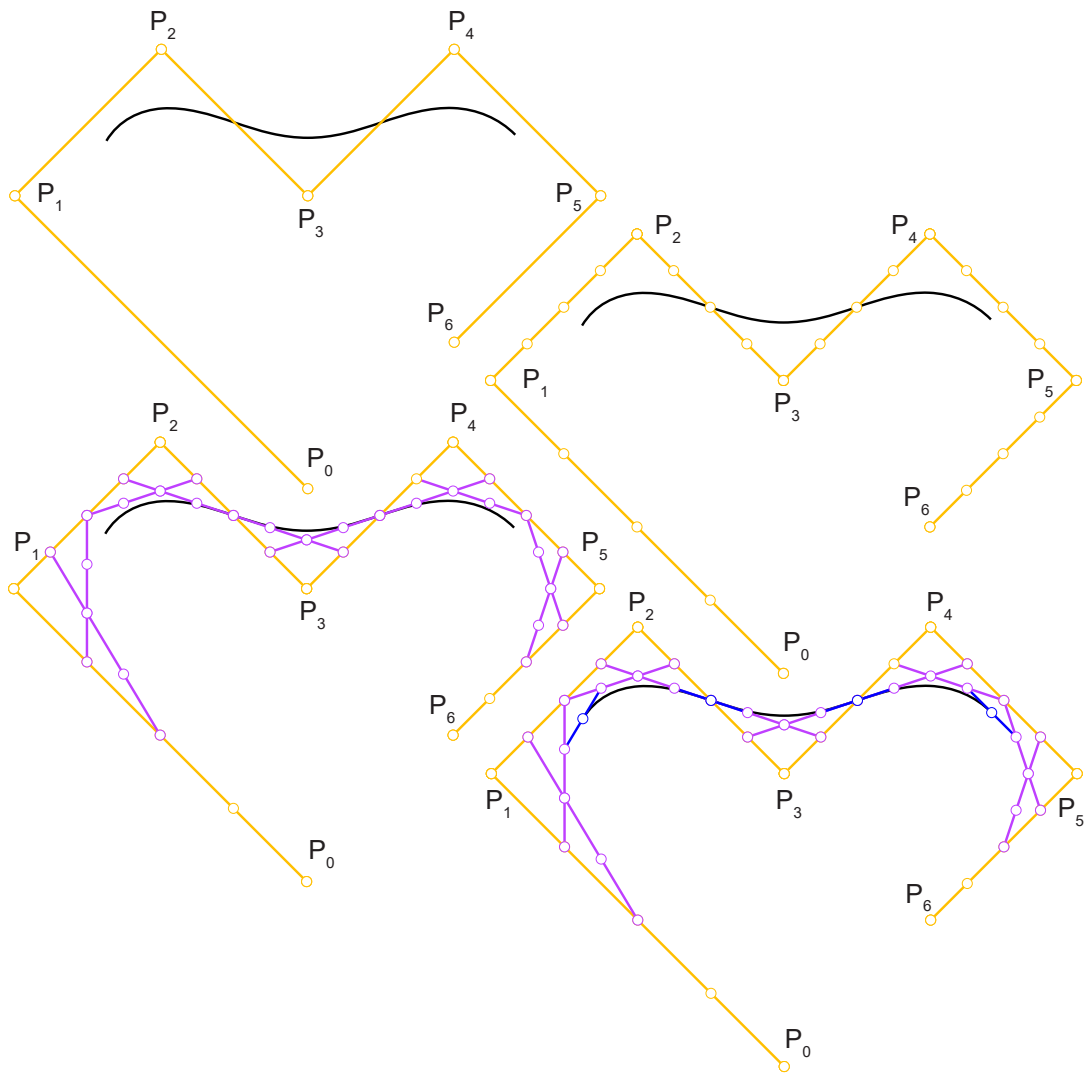
Uzlový vektor u otevřené křivky je dán neklesající posloupností reálných čísel, kde prvních a posledních  $p + 1$  uzlů tohoto vektoru tvoří pasivní segmenty křivky. U uzlového vektoru ukotvené křivky se prvních a posledních  $p + 1$  uzlů opakuje. Tato násobnost uzlů způsobuje redukci prvních a posledních  $p$  pasivních segmentů na bod. Ukotvenou křivku tak tvoří pouze aktivní segmenty, které interpolují krajní body, viz obr. 1.7.

Speciálním příkladem ukotvené B-spline křivky 3. stupně je Bézierova kubika, která má uzlový vektor ve tvaru  $\mathbf{U} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ . Průběh Bernsteinových polynomů je znázorněn na obrázku 1.5 (Linkeová, 2007).

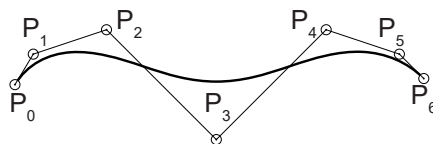


Obrázek 1.5: Průběh Bernsteinových polynomů 3. stupně

Úprava řídicího polygonu otevřené křivky na řídicí polygon ukotvené křivky, viz obr. 1.7 je zřejmá, pokud provedeme dekompozici B-spline křivky na Bézierovy segmenty, kde řídicí polygon křivky 4. stupně nejprve rozdělíme všechna ramena řídicího polygonu na  $p$  segmentů, kde  $p = 4$ . Dále zkosíme hrany. Tato zkosení rozdělíme na  $p - 1$  segmentů, viz obr. 1.6. Opět zkosíme hrany a rozdělíme tentokrát na  $p - 2$  segmenty. Vzniklé body jsou uzly B-spline křivky 4. stupně.



Obrázek 1.6: Dekompozice otevřené B-spline křivky 4. stupně



Obrázek 1.7: Ukotvená B-spline křivka 4. stupně

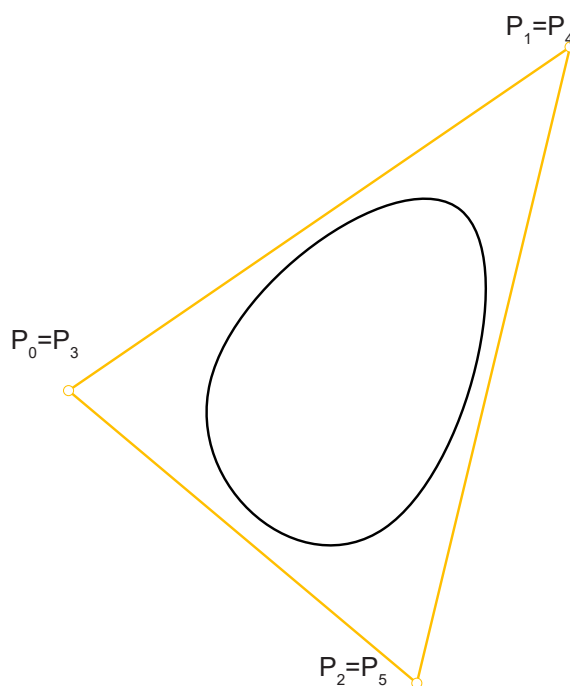
## 1.2.2 Uzavřená křivka

Uzavřená křivka má uzlový vektor ve stejném tvaru jako křivka otevřená. Aby u uzavřené křivky byl splněn požadavek na spojitost, musí se na konci řídicího polygonu cyklicky zopakovat  $p$  počátečních řídicích bodů včetně vah v případě racionální B-spline.

$$\mathbf{P}_{n-p+1} = \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_{n-p+2} = \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{p-1}$$
$$w_{n-p+1} = w_0, w_{n-p+2} = w_1, \dots, w_n = w_{p-1}$$

Abychom mohli vytvořit uzavřenou křivku minimálně stupně  $p \geq 2$ , je zapotřebí minimálně tří ramen řídicího polygonu, které tvoří trojúhelník  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ , viz obr. 1.8. V závislosti na stupni křivky  $p$  je potřeba  $n = p + 2$  ramen řídicího polygonu, kde pro jednotlivé řídicí body platí  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{i-3}$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Z vlastností uzavřené křivky je tedy zřejmé, že je zapotřebí větší počet řídicích bodů a uzlových roztečí pro daný stupeň křivky  $p$  oproti křivce otevřené (Linkeová, 2007).



Obrázek 1.8: Uzavřená B-spline křivka 3. stupně

### 1.3 Definice interpolační NURBS křivky

Vektorovou rovnici interpolační NURBS křivky není možné zapsat přímo jako rovnici aproximační NURBS křivky (1.12). Vyjdeme tedy z faktu, že známe definiční polygon interpolační křivky (1.2), kde definiční body jsou body ležící na křivce. Sestavíme soustavu rovnic, jejímž řešením jsou body řídicího polygonu aproximační NURBS křivky, viz obr. 1.9.

Dále v textu je popsána definice prosté interpolační NURBS křivky. Počet výsledných řídicích bodů prosté interpolační křivky  $n + 1$  je roven počtu definičních bodů  $\tilde{n} + 1$  Linkeová (2007).

**Definice 7** (vektor parametrizace). *Nechť  $\tilde{\mathbf{U}}$  je množina reálných čísel dána neklesající posloupností  $\tilde{n} + 1$  reálných čísel  $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{u}_i)_{i=0}^{\tilde{n}} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{\tilde{n}})$ . Hodnoty  $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{\tilde{n}}$  jsou hodnotami parametru. Potom polootevřený interval  $\langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_{i+1} \rangle$  je roztečí vektoru parametrizace.*

*Má-li každá rozteč vektoru  $\tilde{\mathbf{U}}$  stejnou délku, tzn.  $\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i = \Delta\tilde{u} = \text{konst}$ , jedná se o uniformní rozteč vektoru parametrizace. V opačném případě se jedná o neuniformní vektor parametrizace (Linkeová, 2007).*

Oproti aproximační NURBS křivce, u interpolační přibývá vektor parametrizace, který tak jako uzlový vektor ovlivňuje tvar výsledné křivky. Je tak třeba věnovat pozornost jejich volbě. Dále je uvažován parametr  $\tilde{u} \in \langle 0, 1 \rangle$ . Neuniformní vektor parametrizace lze vytvořit následujícími způsoby:

- Rovnoměrné dělení:

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{u}_k = \frac{k}{\tilde{n}}, \quad \tilde{u}_{\tilde{n}} = 1, \quad (1.13)$$

kde  $k = 1, \dots, \tilde{n} - 1$ .

Pokud jsou definiční body nepravidelně rozmístěny, mohou při použití této metody vznikat různé nežádoucí tvary, např. smyčky.

- Tětivová metoda:

$$d = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} |Q_k - Q_{k-1}|,$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{u}_k = \tilde{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d}, \quad \tilde{u}_{\tilde{n}} = 1, \quad (1.14)$$

kde  $d$  je celková délka definičního polygonu.

Tento způsob parametrizace je nejpoužívanější, a pokud jsou odchylky délek ramen definičního polygonu minimální, blíží se k uniformní parametrizaci.

- Dostředivá metoda:

$$d = \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|},$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{u}_k = \tilde{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}}{d}, \quad \tilde{u}_{\tilde{n}} = 1, \quad (1.15)$$

Tento způsob přináší lepší výsledky než předešlá metoda, obzvláště v místech, kde křivka prudce mění svou křivost.



Pro metody popsané rovnicemi (1.14) nebo (1.15) je doporučeno použít následující dělení uzlového vektoru, kde  $u \in \langle 0, 1 \rangle$ .

$$u_0 = \dots = u_p = 0, \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1,$$

$$u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \tilde{u}_i, \quad (1.16)$$

kde  $j = 1, \dots, \tilde{n} - p$  (Piegl a Tiller, 1997).

**Definice 8** (prostá interpolační NURBS křivka). *Nechť je dán definiční polygon (1.2), uzlový vektor dle def. 1, vektor parametrizace dle def. 8, váhy řídicích bodů dle def. 4 a racionální bázové funkce dle def. 5, potom je vektorová rovnice prosté interpolační NURBS křivky stupně  $p$  dána vztahem*

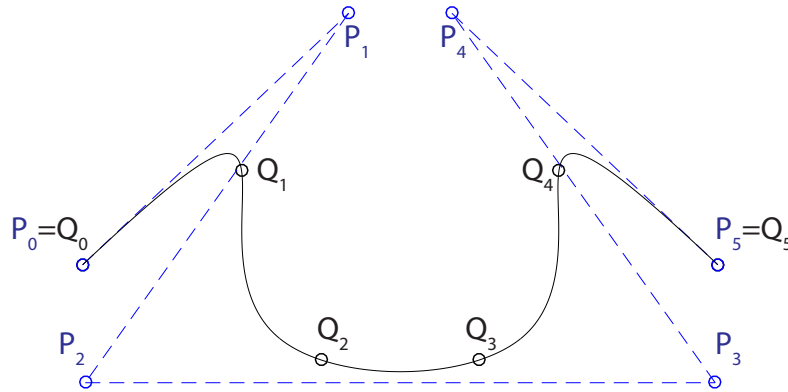
$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} \mathbf{P}_i R_{i,p}(u), \quad (1.17)$$

kde  $\mathbf{P}_i$  jsou řídicí body, které získáme řešením soustavy rovnic:

$$\mathbf{C}(\tilde{u}_i) = \sum_{j=0}^{\tilde{n}} \mathbf{P}_j R_{j,p}(\tilde{u}_i) = \mathbf{Q}_i, \quad (1.18)$$

kde  $i = 0, \dots, \tilde{n}$  (Linkeová, 2007).

Je-li počet definičních bodů větší než stupeň křivky  $p$ , potom je prostá interpolační NURBS křivka tvořena  $m - 2p$  aktivními segmenty.



Obrázek 1.9: Interpolační NURBS křivka

## 1.4 Napojování křivek

Při modelování křivek obvykle nevystačíme s jednou křivkou, proto se výsledná křivka skládá z několika dílčích křivek.

Aby byla křivka spojitá, musí být spojitá ve všech svých bodech. Říkáme, že křivka je  $C^n$  parametricky spojitá, pokud má ve všech bodech totožné vektory prvních  $n$  derivací vektorových funkcí. Menší nároky na napojení křivky má geometrická spojitost  $G^n$ , viz část 1.4.1. Parametrická spojitost automaticky zahrnuje geometrickou spojitost. Aby při porušení parametrické spojitosti byla zachována geometrická spojitost, musí být splněny níže uvedené podmínky. Křivka dosahuje minimálně  $C^n$  nebo  $G^n$  spojitosti tehdy, je-li stupně  $p \geq n$ .

Analýza spojitosti křivek se provádí pomocí tzv. grafu křivosti. Graf křivosti je množina úseček vykreslená podél křivky v normálovém směru, kde v jednotlivých bodech je délka úsečky úměrná velikosti první křivosti. První křivost vypočteme pomocí rovnice (1.19), kde se v čitateli nachází vektor binormály. První křivost určuje míru vychýlení tečny od křivky. Převrácená hodnota velikosti první křivosti potom udává poloměr oskulační kružnice (1.20).

$${}^1k(u) = \frac{|\mathbf{C}'(u) \times \mathbf{C}''(u)|}{\|\mathbf{C}'(u)\|^3}, \quad (1.19)$$

$$r(u) = \frac{1}{{}^1k(u)}. \quad (1.20)$$

V místě, kde je velikost první křivosti rovna nule, se nachází inflexní bod křivky. Ve vrcholu křivky má potom funkce první křivosti extrém.

Dále jsou popsána pravidla napojování Bézierových křivek 4. stupně se spojitostí 0. až 3. řádu.

### 1.4.1 Spojitost 0. řádu

Parametrická spojitost nultého řádu  $C^0$  není rozdílná od geometrické spojitosti nultého řádu  $G^0$ . Jedná se o tzv. poziční napojení křivek. Jedinou podmínkou této spojitosti je, aby koncový bod první křivky  $C_1(1)$  byl totožný s počátečním bodem druhé křivky  $C_2(0)$ . V případě Bézierových křivek to znamená, že koncový bod řídicího polygonu první křivky musí být totožný s počátečním bodem řídicího polygonu druhé křivky.

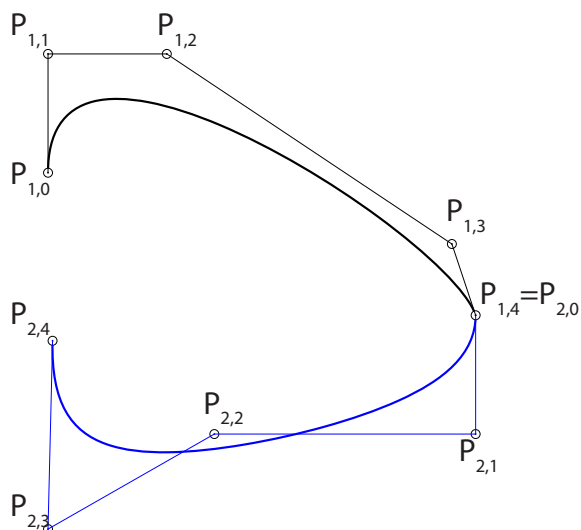
$$C_1(1) = C_2(0) \quad (1.21)$$

Při napojování dvou Bézierových křivek 4. stupně je zapotřebí 5 řídicích bodů  $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$  pro každou křivku. Nejprve spočteme hodnoty Bernsteinových polynomů 4. stupně pro hodnoty parametru  $u = 0$  a  $u = 1$  v místě napojení. Dosazením Bernsteinových polynomů do vektorové rovnice Bézierovy křivky a použitím podmínky (1.21) dostáváme požadovanou polohu řídicích bodů:

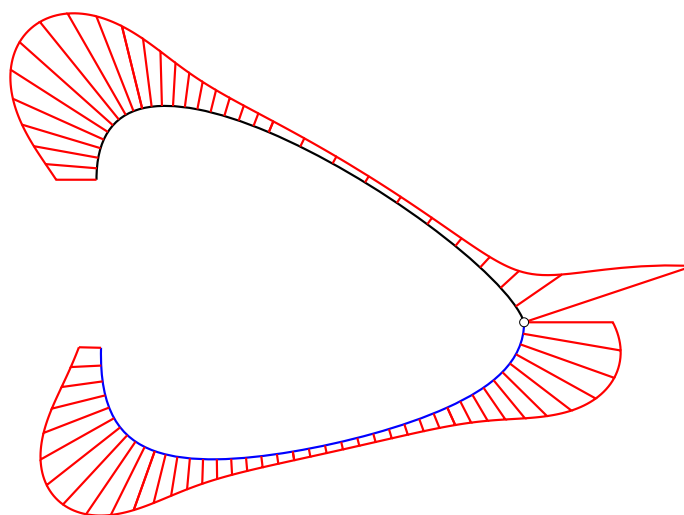
$$P_{1,4} = P_{2,0}, \quad (1.22)$$

kde první index označuje křivku a druhý index označuje řídicí bod určující tuto křivku.

Toto napojení je zobrazeno na obrázku 1.10. Z grafu křivosti na obrázku 1.11 je zřejmé, že v místě napojení mají normálové vektory obou křivek různý směr i velikost první křivosti.



Obrázek 1.10: Napojení dvou Béziových křivek 4. stupně s  $C^0$  spojitostí



Obrázek 1.11: Graf křivosti napojených křivek s  $C^0$  spojitostí

### 1.4.2 Spojitost 1. řádu

Jedná se o tečné napojení dvou křivek. Parametrická spojitost 1. řádu  $C^1$  je podmíněna totožným koncovým bodem první křivky s počátečním bodem druhé křivky, viz (1.21). Navíc musí existovat v těchto bodech tečné vektory, které mají stejný směr, orientaci i velikost.

$$\mathbf{C}'_1(1) = \mathbf{C}'_2(0) \quad (1.23)$$

Geometrická spojitost 1. řádu  $G^1$  má na rozdíl od parametrické stejný směr tečných vektorů a orientaci, velikost však může být různá.

$$\mathbf{C}'_1(1) = \lambda_1 \mathbf{C}'_2(0), \lambda_1 > 0 \quad (1.24)$$

Při napojování nejprve vypočteme první derivace Bernsteinových polynomů pro hodnoty parametru  $u = 0$  a  $u = 1$ . Dosazením hodnot derivovaných polynomů

a vztahu (1.22) do (1.23) a následnou úpravou dostáváme polohu řídicích bodů, potřebnou k dosažení  $C^1$  spojitosti:

$$P_{2,1} = 2P_{1,4} - P_{1,3}. \quad (1.25)$$

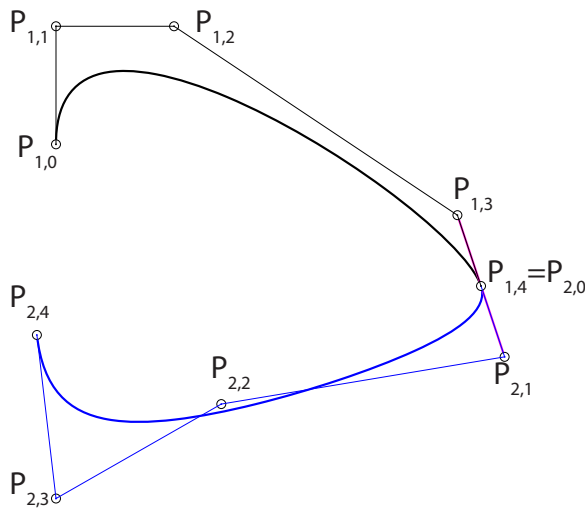
Nyní máme pevně danou polohu dvou řídicích bodů jedné křivky, viz (1.22, 1.25).

V případě  $G^1$  spojitosti musí řídicí bod  $P_{2,1}$  ležet v libovolné poloze na přímce dané vektorem  $\overrightarrow{P_{1,3}P_{1,4}}$  a procházející bodem  $P_{1,4}$

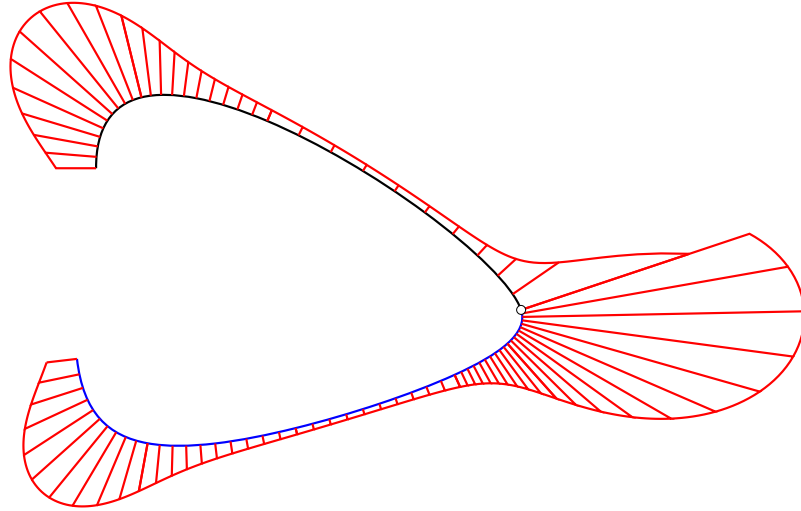
$$P_{2,1} = \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1} P_{1,4} - \frac{1}{\lambda_1} P_{1,3}, \quad (1.26)$$

kde  $\lambda_1 > 0$ . Pokud se  $\lambda_1 = 1$ , potom se jedná o  $C^1$  spojitost.

Toto napojení je zobrazeno na obrázku 1.12, kde je zobrazena geometrická interpretace rovnice (1.25). Bod  $P_{2,1}$  získáme tak, že vektor  $\overrightarrow{P_{1,3}P_{1,4}}$  dvakrát přičteme k bodu  $P_{1,3}$ . Z obrázku 1.13, kde je vykreslen graf křivosti, je zřejmé, že v místě napojení mají normálové vektory obou křivek stejný směr, ale různou velikost první křivosti.



Obrázek 1.12: Napojení dvou Béziových křivek 4. stupně s  $C^1$  spojitostí



Obrázek 1.13: Graf křivosti napojených křivek s  $C^1$  spojitostí

### 1.4.3 Spojitost 2. řádu

Napojení dvou křivek se spojitostí 2. řádu se nazývá křivostní napojení. Parametrická spojitost 2. řádu  $C^2$  obsahuje podmínky předešlých spojitostí (1.21, 1.23) a navíc v bodech napojení musí existovat vektory druhých derivací, které mají stejný směr, orientaci i velikost.

$$\mathbf{C}'_1(1) = \mathbf{C}'_2(0) \quad (1.27)$$

Geometrická spojitost 2. řádu  $G^2$  zahrnuje podmínky spojitostí nultého a prvního řádu. V případě geometrických spojitostí však nezáleží na tom, zda jsou spojitosti nižších řádů parametrické, či geometrické. Navíc v bodech napojení musí být totožné první křivosti.

$$k_1(1) = k_2(0) \quad (1.28)$$

Po dosazení (1.23) a upravení, má rovnice řešení

$$\mathbf{C}'_1(1) = \lambda_1^2 \mathbf{C}'_2(0) + \lambda_2 \mathbf{C}'_2(0), \quad (1.29)$$

kde  $\lambda_1 > 0$  a  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Při napojování nejprve vypočteme druhé derivace Bernsteinových polynomů pro hodnoty parametru  $u = 0$  a  $u = 1$ . Dosazením derivovaných hodnot polynomů a vztahů (1.22, 1.25) do (1.27) a následnou úpravou, dostáváme polohu řídicích bodů, potřebnou k dosažení  $C^2$  spojitosti:

$$P_{2,2} = P_{1,2} + 4(P_{1,4} - P_{1,3}). \quad (1.30)$$

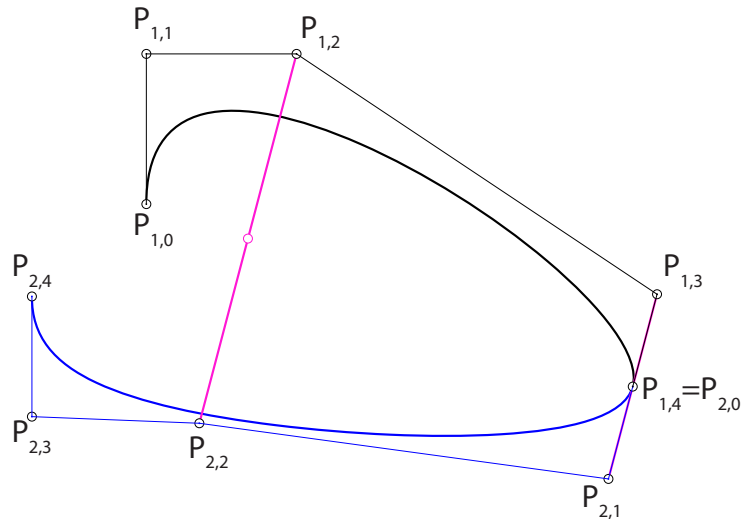
Nyní máme pevně danou polohu tří řídicích bodů jedné křivky, viz (1.22, 1.25, 1.30).

Pokud je napojení prvního řádu dvou křivek parametrické, potom v případě geometrické spojitosti  $G^2$  musí řídicí bod  $P_{2,2}$  ležet v libovolné poloze na přímce dané vektorem  $\overrightarrow{P_{1,3}P_{1,4}}$  a procházející bodem  $P_{1,2}$

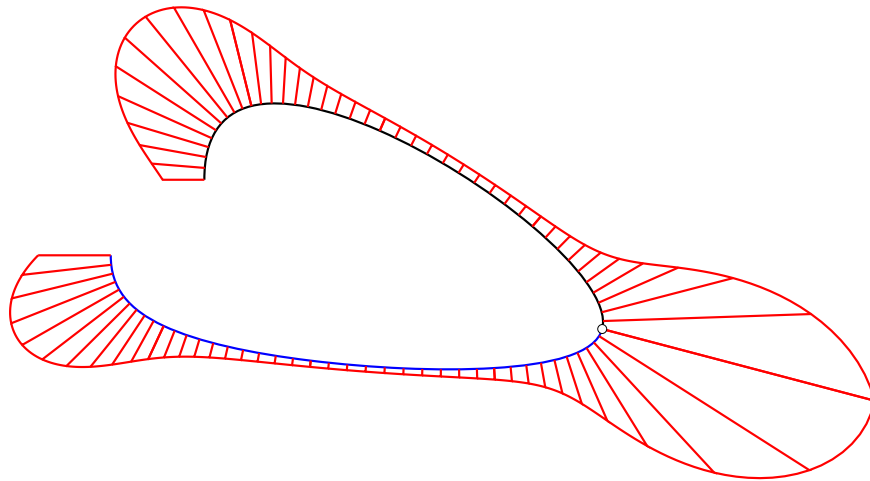
$$P_{2,2} = P_{1,2} + \lambda(P_{1,4} - P_{1,3}), \quad (1.31)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Pokud se  $\lambda = 4$ , potom se jedná o  $C^2$  spojitost.

Toto napojení je zobrazeno na obrázku 1.14, kde je zobrazena geometrická interpretace rovnice (1.30). Bod  $P_{2,2}$  získáme tak, že vektor  $\overrightarrow{P_{1,3}P_{1,4}}$  čtyřikrát přičteme k bodu  $P_{1,2}$ . Z obrázku 1.15, kde je vykreslen graf křivosti je zřejmé, že v místě napojení mají normálové vektory obou křivek stejný směr i velikost první křivosti. Graf křivosti je tak spojitý, ale není hladký.



Obrázek 1.14: Napojení dvou Béziových křivek 4. stupně s  $C^2$  spojitostí



Obrázek 1.15: Graf křivosti napojených křivek s  $C^2$  spojitostí

### 1.4.4 Spojitost 3. řádu

Napojení s parametrickou spojitostí 3. řádu  $C^3$ , neboli torzní napojení dvou křivek, je opět podmíněno předchozími podmínkami (1.21, 1.23, 1.27). Navíc v bodech napojení musí existovat vektory třetích derivací, které mají stejný směr, orientaci i velikost.

$$\mathbf{C}_1'''(1) = \mathbf{C}_2'''(0) \quad (1.32)$$

Pro geometrickou spojitost 3. řádu  $G^3$  pak platí

$$\mathbf{C}_1'''(1) = \lambda_1^3 \mathbf{C}_2'''(0) + 3\lambda_1 \lambda_2 \mathbf{C}_2''(0) + \lambda_3 \mathbf{C}_2'(0), \quad (1.33)$$

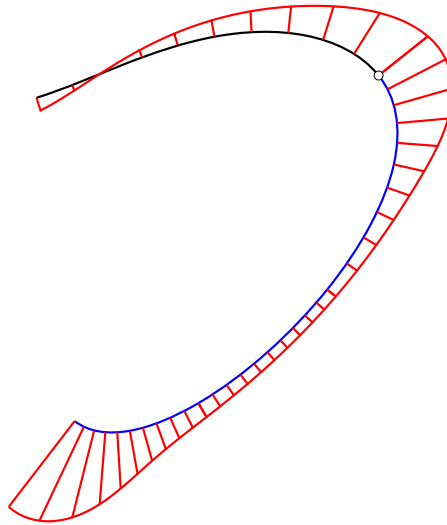
kde  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  a  $\lambda_1 > 0$  (Barsky a DeRose, 1989).

Při napojování nejprve vypočteme třetí derivace Bernsteinových polynomů pro hodnoty parametru  $u = 0$  a  $u = 1$ . Dosazením hodnot polynomů a vztahů (1.22, 1.25, 1.30) do (1.32) a následnou úpravou, dostáváme polohu řídicích bodů, potřebnou k dosažení  $C^3$  spojitosti:

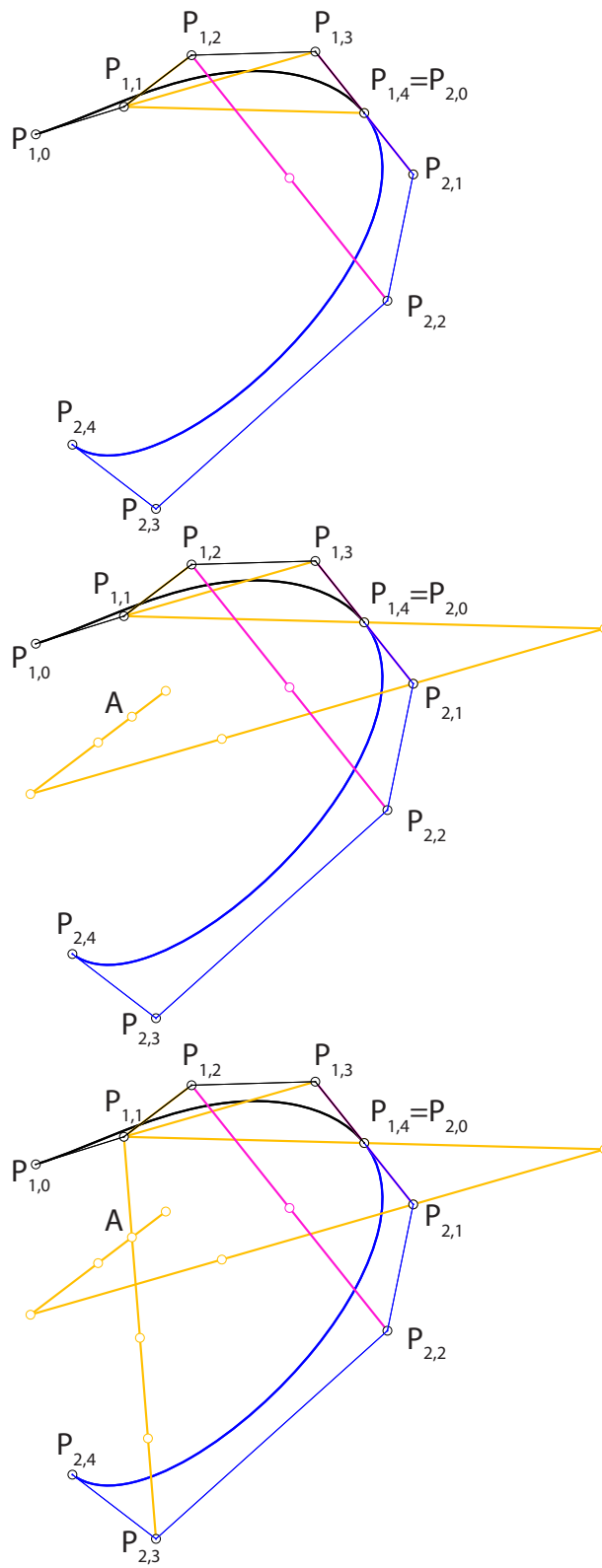
$$P_{2,3} = 4(2P_{1,4} - 3P_{1,3} + 1,5P_{1,2}) - P_{1,1}. \quad (1.34)$$

Nyní máme pevně danou polohu čtyř řídicích bodů jedné křivky, viz (1.22, 1.25, 1.30, 1.34).

Toto napojení je zobrazeno na obrázku 1.17, kde je zobrazena geometrická interpretace rovnice (1.34). Vektor  $\overrightarrow{P_{1,1}P_{1,4}}$  přičteme dvakrát k bodu  $P_{1,1}$ , odečteme třikrát vektor  $\overrightarrow{P_{1,3}P_{1,1}}$  a přičteme jedenapůlkrát vektor  $\overrightarrow{P_{1,1}P_{1,2}}$ . Vznikne tak bod  $A$ . Bod  $P_{2,3}$  získáme tak, že čtyřikrát přičteme vektor  $\overrightarrow{P_{1,1}A}$  k bodu  $P_{1,1}$ . Z obrázku 1.16, kde je vykreslen graf křivosti je zřejmé, že v místě napojení mají normálové vektory obou křivek stejný směr i velikost první křivosti. Graf křivosti je v místě napojení spojitý a hladký.



Obrázek 1.16: Graf křivosti napojených křivek s  $C^3$  spojitostí



Obrázek 1.17: Napojení dvou Béziových křivek 4. stupně s  $C^3$  spojitostí



## 2. Plochy

Plochou se rozumí dvouparametrická množina bodů v  $\mathbb{R}^3$ . Nahradíme-li tyto body koncovými body jejich polohových vektorů, dostáváme vektorovou rovnici plochy

$$\mathbf{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (2.1)$$

kde  $x(u,v)$ ,  $y(u,v)$ ,  $z(u,v)$  jsou souřadnicové funkce s parametry  $(u,v) \in I$ .

Omezíme-li parametry  $u \in \langle u_1, u_2 \rangle$  a  $v \in \langle v_1, v_2 \rangle$ , dostáváme tzv. plát.

### 2.1 Parametrické křivky plochy

Parametrickou křivku plochy získáme zvolením konstantního parametru  $u$ , nebo  $v$ . Dostáváme tak parametrickou  $u$ -křivku plochy

$$\mathbf{S}(u,\alpha) = (x(u,\alpha), y(u,\alpha), z(u,\alpha)), \quad (2.2)$$

kde  $\alpha \in \mathbf{V}$ , resp. parametrickou  $v$ -křivku plochy

$$\mathbf{S}(\beta,v) = (x(\beta,v), y(\beta,v), z(\beta,v)), \quad (2.3)$$

kde  $\beta \in \mathbf{U}$ .

Tyto křivky tvoří dvě soustavy křivek na ploše, kde křivka z jedné soustavy protíná všechny křivky z druhé soustavy. Křivky  $\mathbf{S}(0,v)$ ,  $\mathbf{S}(1,v)$ ,  $\mathbf{S}(u,0)$  a  $\mathbf{S}(u,1)$ , kde  $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle$  se nazývají hraničními křivkami plátu. Hraniční křivky se protínají v rozích plátu (Linkeová, 2020).

### 2.2 Ekvidistantní plochy

Motivaci zavedení ekvidistantních ploch je možné najít v 5-osém obrábění frézou, která koná translační pohyb ve směru všech os souřadnicového systému a rotační pohyb. Díky tomu je možné polohovat osu frézy vzhledem k normále obráběné plochy.

Nechť je dána plocha  $\mathbf{S}(u,v)$  a množina bodů, ve které má každý bod konstantní vzdálenost  $d$  ve směru normály plochy  $\mathbf{S}(u,v)$ , viz obr. 2.1. Tato množina bodů tvoří plochu  $\mathbf{S}^+(u,v)$  nazývanou ekvidistantní plocha k ploše  $\mathbf{S}(u,v)$ . Dostáváme tak vyjádření ekvidistantní plochy

$$\mathbf{S}^+(u,v) = \mathbf{S}(u,v) + \mathbf{n}(u,v)d, \quad (2.4)$$

kde  $\mathbf{n}(u,v)$  je jednotkový normálový vektor.

Vezmeme-li  $u$ -křivky a  $v$ -křivky ve směru hlavních křivostí  $\kappa_1$  a  $\kappa_2$ , dostáváme vyjádření jednotlivých ekvidistantních křivek ve směru  $u$  a  $v$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_u^+ &= \mathbf{S}_u + \mathbf{n}_u d = \mathbf{S}_u - \mathbf{S}_u \kappa_1 d, \\ \mathbf{S}_v^+ &= \mathbf{S}_v + \mathbf{n}_v d = \mathbf{S}_v - \mathbf{S}_v \kappa_2 d. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Díky tomu, že každý bod těchto křivek leží na ekvidistantní ploše, lze parametry  $u$  a  $v$  považovat za parametry ekvidistantní plochy  $\mathbf{S}^+(u,v)$  (Hosaka, 1992).

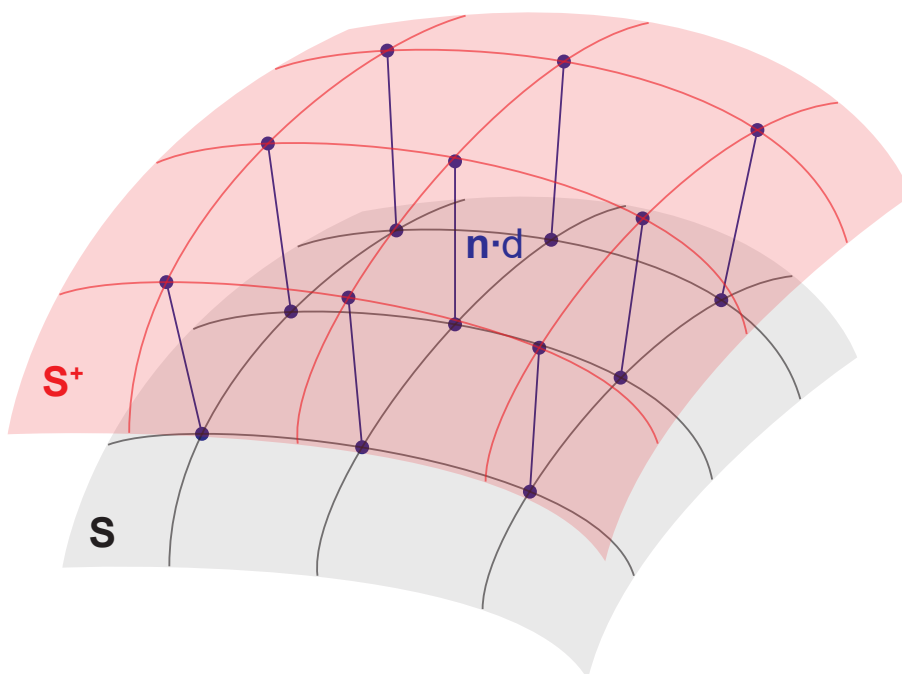
Racionální plocha  $\mathbf{S}(u,v)$  nemusí mít racionální ekvidistantní plochu  $\mathbf{S}^+(u,v)$ . Pokud je však plocha  $\mathbf{S}(u,v)$  PN plochou (Pythagorean Normal vector), potom má racionální ekvidistantní plochu  $\mathbf{S}^+(u,v)$ .

**Definice 9** (PN plocha). *Nechť  $\mathbf{S}(u,v)$  je racionální parametrizace plochy v  $\mathbb{R}^3$ . Parametrizace  $\mathbf{S}(u,v)$  plochy se nazývá PN parametrizací, pokud její přidružené jednotkové normálové vektory  $\mathbf{n}(u,v)$  jsou racionální.*

Pro danou PN parametrizaci je racionalita normálových vektorů  $\mathbf{n}(u,v) = \mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v$  splněna, právě když je splněna podmínka

$$\mathbf{n}(u,v) \cdot \mathbf{n}(u,v) = \rho^2(u,v), \quad (2.6)$$

pro libovolné  $\rho(u,v) \in \mathbb{R}$  (Lávička a Bastl, 2008).



Obrázek 2.1: Ekvidistantní plocha

## 2.3 Obalové plochy

Motivaci obalových ploch lze opět nalézt v 5–osém obrábění, kde je tvar výsledného dílu vytvořen pomocí pohybu nástroje o určitém tvaru.

Nechť těleso

$$\begin{aligned} \kappa : \mathbf{B}(u,v,t) &= (x(u,v,t), y(u,v,t), z(u,v,t)), \\ u &\in \langle u_1, u_2 \rangle, v \in \langle v_1, v_2 \rangle, t \in \langle t_1, t_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

reprezentuje výsledný díl, který je vytvořen pomocí nástroje s generující plochou

$$\sigma : \mathbf{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), u \in \langle u_1, u_2 \rangle, v \in \langle v_1, v_2 \rangle, \quad (2.8)$$

pohybující se po trajektorii

$$\tau : \mathbf{T}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in \langle t_1, t_2 \rangle. \quad (2.9)$$

Část povrchu tělesa (2.7) se nazývá obalovou plochou

$$(\sigma) : \mathbf{E}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), s \in \langle s_1, s_2 \rangle, t \in \langle t_1, t_2 \rangle, \quad (2.10)$$

pokud jsou splněny následující podmínky:

- Obalová plocha (2.10) a libovolné  $uv$ –parametrické plochy tělesa (2.7) jsou tečné podél  $s$ –křivky obalové plochy. Tato křivka se nazývá charakteristikou obalové plochy

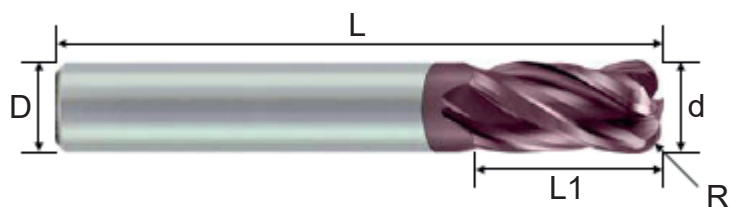
$$c : \mathbf{C}(s) = (x(s), y(s), z(s)), s \in \langle s_1, s_2 \rangle. \quad (2.11)$$

- V libovolném bodě obalové plochy (2.10) existuje společná tečná rovina a normála obalové plochy a  $uv$ –parametrické plochy tělesa (2.7).
- Neexistuje žádná plocha, která by byla zároveň  $uv$ –parametrickou plochou tělesa (2.7) a obalovou plochou (2.10).

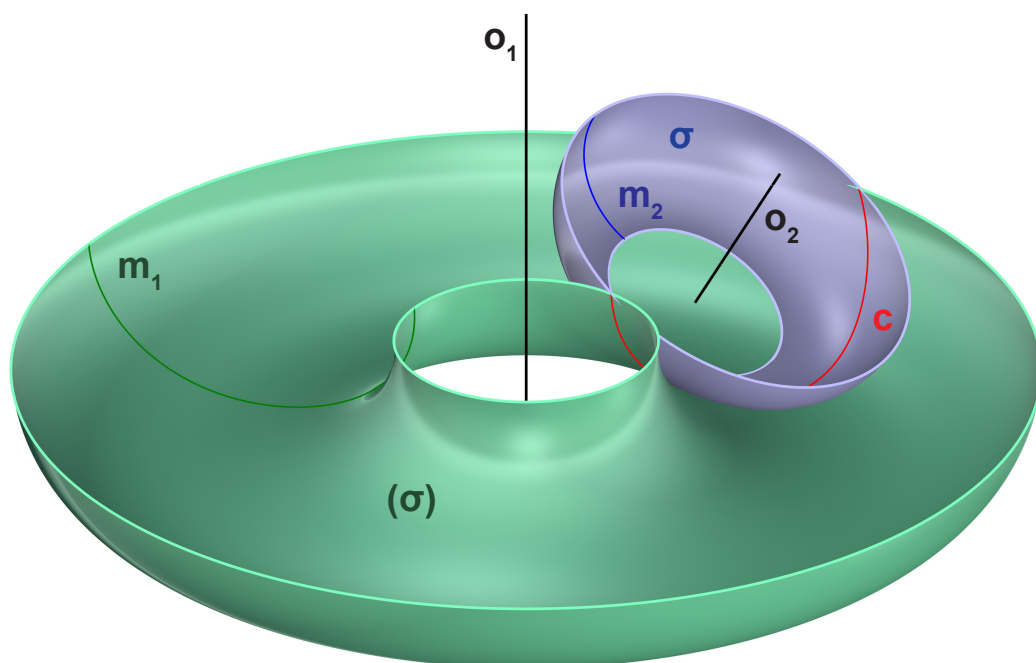
Vzhledem k tomu, že charakteristika je v libovolné poloze v kontaktu s generující plochou (2.8), je možné obálku (2.10) považovat za množinu charakteristik. To znamená, že obalovou plochu lze vytvořit pohybem charakteristiky. Díky tomu je řešení obalových ploch zjednodušeno na hledání charakteristické křivky (Linkeová, 2019).

Příklad obalové plochy je na obr. 2.3, kde je zobrazena obalová plocha ( $\sigma$ ), generovaná rotačním pohybem tvořící plochy  $\sigma$  anuloidu kolem mimoběžné osy. Tvořící plocha představuje funkční část toroidní frézy, viz obr. 2.2. Křivky  $m_1, m_2$  na obr. 2.3 jsou meridiány obalové a tvořící plochy,  $o_1, o_2$  osy těchto ploch a křivka  $c$  je charakteristikou obalové plochy.

Order No.	Dia. (d)	Corner Radius (R)	CL (L1)	OAL (L)	Shank (D)	Flutes (F)
EPCSC412030U	12.0	3.0R	24	75	12	4



Obrázek 2.2: Toroidní fréza (NAREPS CZ, 2021)



Obrázek 2.3: Obalová plocha

## 2.4 Křivosti ploch

V této části jsou definovány jednotlivé druhy křivosti a jejich vlastnosti. Nejprve zde však jsou uvedeny jednotlivé pojmy, na základě kterých jsou definovány jednotlivé křivosti. Pro zjednodušení zápisu určitých vztahů jsou v celé této kapitole parametry  $u, v$  nahrazeny  $u^1, u^2$ .

Předpokládejme plochu  $\mathbf{S}(u^1, u^2)$ , kde parametry  $(u^1, u^2)$  jsou z konvexní oblasti  $U$  v  $\mathbb{E}_2$ . Tečná rovina k této ploše v daném bodě je dána tečnými vektory parametrických křivek  $\mathbf{S}^1$  a  $\mathbf{S}^2$ . Tečné vektory jsou

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^1 &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^1}, \\ \mathbf{S}^2 &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^2}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Jednotkový vektor normály získáme pomocí vztahu

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2}{|\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2|}.\tag{2.13}$$

Každý vektor ležící v tečné rovině lze vyjádřit lineární kombinací tečných vektorů  $\mathbf{S}^1$  a  $\mathbf{S}^2$ . Uvažujme dva vektory  $\mathbf{r}, \mathbf{s}$  z tečné roviny, pro které platí vztah  $\mathbf{r}\mathbf{s} = g_{i,j}u^i u^j$ . První kvadratická forma plochy je tak vyjádřena

$$I = g_{i,j} du^i du^j,\tag{2.14}$$

kde  $g_{i,j}$  je skalární součin vektorů  $\mathbf{S}^1$  a  $\mathbf{S}^2$ .

Druhá kvadratická forma plochy je dána vztahem

$$II = b_{i,j} du^i du^j,\tag{2.15}$$

kde  $b_{i,j} = \mathbf{S}^{i,j} \cdot \mathbf{m}$  a vektor  $\mathbf{S}^{i,j}$  je definován vztahem

$$\mathbf{S}^{i,j} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u^i \partial u^j}.\tag{2.16}$$

### 2.4.1 Normálová křivost

Uvažujme-li křivku  $\mathbf{y}(t)$  ležící na ploše  $\mathbf{S}(u^1, u^2)$ , procházející bodem na této ploše a popsanou rovnicí  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(u^1(t), u^2(t))$ , potom

$$k_n = \mathbf{y}'' \cdot \mathbf{m}\tag{2.17}$$

označujeme jako normálovou křivost křivky  $\mathbf{y}(t)$ . Ta zobrazuje délku  $\mathbf{y}''$  do normály  $\mathbf{m}$ .

Využitím první a druhé kvadratické formy plochy můžeme vyjádřit normálovou křivost vztahem

$$k_n = \frac{II}{I},\tag{2.18}$$

který je důsledkem Meusnierova vzorce (2.19). Označíme-li  $k$ , jako křivost křivky  $\mathbf{y}$ ,  $\phi$  odchylku mezi vektorem hlavní normály křivky a vektorem plochy, potom pro tečný vektor křivky platí

$$k \cos \phi = \frac{II}{I}. \quad (2.19)$$

Absolutní hodnota normálové křivosti křivky  $\mathbf{y}$  na ploše  $\mathbf{S}$  je první křivostí (flexí). Odvození vyplývá z toho, že normála křivky  $\mathbf{n}$  musí ležet v rovině řezu určené normálou plochy  $\mathbf{m}$  a tečnou křivky  $\mathbf{t}$  a zároveň musí být kolmá na tečný vektor  $\mathbf{t}$ . Platí, že  $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ , nebo  $\mathbf{n} = -\mathbf{m}$ , tedy  $\phi = \pi$ , nebo  $\phi = 0$  (Sochor a Mikeš, 2013).

## 2.4.2 Hlavní křivost

Hlavním směrem je nazýván tečný směr na ploše  $\mathbf{S}$  v daném bodě, pokud je normálová křivost  $k_n$  v tomto bodě extrémní. Normálová křivost v hlavním směru se pak nazývá hlavní křivostí plochy  $\mathbf{S}$ .

Kromě kruhových a planárních bodů (viz dál) jsou na ploše pouze dva hlavní směry, které jsou vzájemně kolmé. V těchto směrech jsou tedy i dvě hlavní křivosti, označované  $k_1$  a  $k_2$ .

Tečný vektor leží v hlavním směru, pokud platí (Ježek, 2005)

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1 du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.20)$$

Pokud  $g_{12} = b_{12} = 0$ , potom parametrické křivky ležící v tomto směru se nazývají hlavní křivky. Takové křivky tvoří ortogonální síť na ploše  $\mathbf{S}$ .

Platí také

$$k_n = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi, \quad (2.21)$$

což je Eulerova formule, kde  $k_n$  je normálová křivost plochy ve směru, jehož odchylka od hlavního směru v němž má plocha křivost  $k_1$ , je  $\phi$  (Sochor a Mikeš, 2013).

Na obrázku 2.4 je zobrazen bod  $X$  ležící na ploše  $\mathbf{S}$ . Tímto bodem prochází křivka  $\mathbf{y}$  v hlavním směru. Bodem  $X$  prochází tečna  $\mathbf{t}$  ke křivce  $\mathbf{y}$ , její hlavní normála  $\mathbf{m}$  a binormála  $\mathbf{b}$ . Hlavní normála a binormála určují normálovou rovinu  $\eta$ , hlavní normála a tečna určují oskulační rovinu  $\omega$  a binormála s tečnou definují rektifikační rovinu  $\rho$ .

## 2.4.3 Gaussova a střední křivost

Upravíme-li rovnici (2.20) dostaneme

$$k^2 + 2Hk + K = 0, \quad (2.22)$$

kde

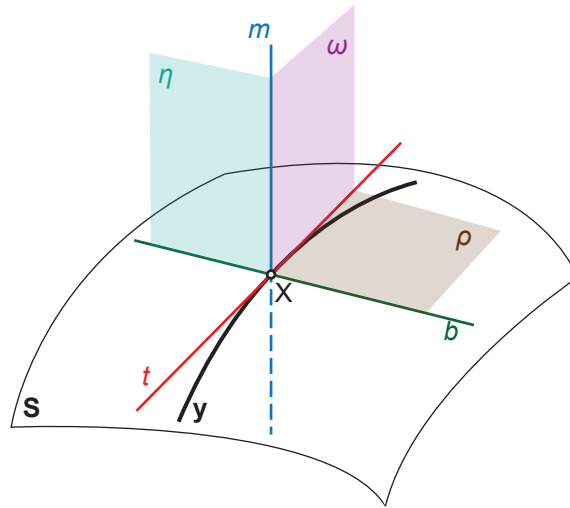
$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{11}^2} = k_1k_2, \quad (2.23)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{11}^2} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad (2.24)$$

kde hodnota  $K$  je Gaussovou křivostí a hodnota  $H$  střední křivostí plochy  $\mathbf{S}$  v daném bodě.

Je-li plocha  $\mathbf{S}$  rozvinutelná, potom Gaussova křivost je v každém bodě této plochy rovna nule. Pokud je Gaussova křivost v daném bodě  $K > 0$ , je tento bod eliptický (kruhový, pokud  $k_n \neq 0 \wedge k_n = konst$ ), je-li  $K < 0$ , bod je hyperbolický a rovná-li se  $K$  nule, je bod parabolický (planární, pokud  $k_n = 0$  v každém směru).

Má-li plocha  $\mathbf{S}$  v každém bodě nulovou střední křivost  $H$ , potom se plocha nazývá minimální (Sochor a Mikeš, 2013).



Obrázek 2.4: Tečna ( $t$ ), hlavní normála ( $m$ ), binormála ( $b$ ), oskulační rovina ( $\omega$ ), normálová rovina ( $\eta$ ) a rektifikační rovina ( $\rho$ )

## 2.5 Definice aproximační NURBS plochy

NURBS plocha stupně  $p$  ve směru  $u$  a stupně  $q$  ve směru  $v$  je určena sítí řídicích bodů

$$\mathbf{P}_{i,j} = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \dots & P_{0,m} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \dots & P_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,0} & P_{n,1} & \dots & P_{n,m} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

kde  $i = 0, \dots, n$  a  $j = 0, \dots, m$ .

**Definice 10** (aproximační NURBS plocha). *Nechť jsou dány  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  uzlové vektory, síť řídicích bodů (2.25) a racionální bázové funkce  $R_{i,j}(u,v)$ , potom vektorová rovnice NURBS plochy má tvar (Piegl a Tiller, 1997)*

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v) \mathbf{P}_{i,j}. \quad (2.26)$$

### 2.5.1 Změna počtu uzlů

Při změně počtu uzlů na ploše je měněn počet uzlů jednotlivých křivek ve směru  $u$  a  $v$ , kde křivky ve směru  $u$  mají uzlový vektor  $\mathbf{U}$  a křivky ve směru  $v$  uzlový vektor  $\mathbf{V}$  následujícím způsobem.

#### Přidání uzlu

Nechť  $\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \mathbf{P}_i$  je B-spline křivka definovaná na uzlovém vektoru  $\mathbf{U}$  a necht  $\tilde{u} \in \langle u_k, u_{k+1} \rangle$ . Vložení  $\tilde{u}$  do  $\mathbf{U}$  vznikne nový uzlový vektor  $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{u}_0 = u_0, \dots, \tilde{u}_k = u_k, \tilde{u}_{k+1} = \tilde{u}, \tilde{u}_{k+2} = u_{k+1}, \dots, \tilde{u}_{m+1} = u_m)$ . Jestliže  $\Psi_U$  a  $\Psi_{\tilde{U}}$  jsou vektorové prostory definované na  $\mathbf{U}$  a  $\tilde{\mathbf{U}}$ , potom  $\Psi_U \subset \Psi_{\tilde{U}}$  a  $\dim(\Psi_{\tilde{U}}) = \dim(\Psi_U) + 1$ . Křivka  $\mathbf{C}(u)$  je tak na uzlovém vektoru  $\tilde{\mathbf{U}}$  vyjádřena

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{N}_{i,p}(u) \mathbf{Q}_i. \quad (2.27)$$

Při procesu přidání uzlu se tak musí dopočítat nové řídicí body  $\mathbf{Q}_i$ . Změní se tedy vektorový prostor, ale jednotlivé křivky se nemění parametricky, ani geometricky.

Řídicí body  $\mathbf{Q}_i$  vypočteme ze soustavy rovnic Piegl a Tiller (1997)

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{n+1} \tilde{N}_{i,p}(u) \mathbf{Q}_i. \quad (2.28)$$

#### Odebrání uzlu

Nechť  $\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \mathbf{P}_i$  je B-spline křivka definovaná na uzlovém vektoru  $\mathbf{U}$  a necht  $u_r$  je násobný uzel s násobností  $s$ . Uzlový vektor  $\tilde{\mathbf{U}}$  získáme  $t$ -násobným odebráním uzlu  $u_r$ , kde  $t \in \langle 1, s \rangle$ . Říkáme, že  $u_r$  je  $t$ -krát odstranitelný, pokud má křivka  $\mathbf{C}(u)$  reprezentaci

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n-t} \tilde{N}_{i,p}(u) \mathbf{Q}_i. \quad (2.29)$$

Obě křivky s uzlovými vektory  $\mathbf{U}$  a  $\tilde{\mathbf{U}}$  jsou parametricky i geometricky stejné.

Bázové funkce  $N_{i,p}(u)$ , které jsou v uzlovém bodě  $u_r$  nenulové jsou  $C^{p-s}$  spojitě. Řídicí body se však mohou nacházet v takové poloze, že bázové funkce mají  $C^{p-s+1}$  i vyšší spojitost. Uzel  $u_r$  je tedy  $t$ -krát odstranitelný, pokud je křivka  $\mathbf{C}(u)$  v tomto uzlovém bodě  $C^{p-s+t}$  spojitá. Tuto spojitost musí splňovat původní křivka  $\mathbf{C}(u)$ , ne její projekce, která může být spojitá, i když původní křivka není.

Je tak potřeba určit, zda je daný uzel odstranitelný, případně kolikrát, a poté určit řídicí body  $\mathbf{Q}_i$ .



Odstranění některých uzlů nelze provést beze změny geometrie křivky. Do výpočetního algoritmu se tak zavádí maximální povolená odchylka vzdálenosti bodů na původní a vypočtené křivce, se kterou je poté možné vypočítat řídicí body (Piegl a Tiller, 1997).

## 2.5.2 Změna stupně

Při změně stupně plochy jsou měněny stupně jednotlivých křivek tak, jako v předchozích případech ve směru  $u$  a  $v$ , kde křivky ve směru  $u$  mají uzlový vektor  $\mathbf{U}$  a křivky ve směru  $v$  uzlový vektor  $\mathbf{V}$  následujícím způsobem.

### Zvýšení stupně

Z pohledu vektorového prostoru dosáhneme zvýšení stupně  $p$  křivky  $\mathbf{C}^p(u)$  na křivku  $p + 1$  stupně  $\mathbf{C}^{p+1}(u)$  vnořením křivky do prostoru vyšší dimenze.

Nechť  $\mathbf{C}^p(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p} \mathbf{P}_i$  je B-spline křivka  $p$ -tého stupně s uzlovým vektorem  $\mathbf{U}$ . Je-li křivka  $\mathbf{C}^p(u)$  po částech polynomiální, potom je možné zvýšit její stupeň. To znamená, že existují řídicí body  $\mathbf{Q}_i$  a uzlový vektor  $\tilde{\mathbf{U}}$  takové, že

$$\mathbf{C}^p(u) = \mathbf{C}^{p+1}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p+1}(u) \mathbf{Q}_i, \quad (2.30)$$

kde obě křivky jsou geometricky i parametricky stejné.

Zvýšení stupně křivky je proces, při kterém hledáme uzlový vektor  $\tilde{\mathbf{U}}$  a řídicí body  $\mathbf{Q}_i$ , které odpovídají křivce  $p + 1$  stupně a definují křivku  $p$ -tého stupně.

Uzlový vektor křivky  $\mathbf{C}^p(u)$  má tvar

$$\mathbf{U} = \left( \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right), \quad (2.31)$$

kde  $m_1, \dots, m_s$  jsou násobnosti vnitřních uzlů. Má-li mít křivka  $\mathbf{C}^{p+1}(u)$  stejnou spojitost, musí být násobnost jednotlivých uzlů  $m_i + 1$ . Z toho plyne, že počet řídicích bodů musí být  $\tilde{n} = n + s + 1$  a uzlový vektor

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left( \underbrace{a, \dots, a}_{p+2}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+2} \right), \quad (2.32)$$

kde počet uzlových roztečí je  $\tilde{m} = m + s + 2$ .

Nyní řídicí body  $\mathbf{Q}_i$  křivky  $\mathbf{C}^{p+1}(u)$  získáme řešením soustavy rovnic (Piegl a Tiller, 1997)

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} N_{i,p+1}(u) \mathbf{Q}_i. \quad (2.33)$$

### Snížení stupně

Nechť B-spline křivka  $\mathbf{C}^p(u)$  má uzlový vektor (2.30), potom křivka  $p - 1$  stupně  $\mathbf{C}^{p-1}(u)$  má uzlový vektor

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left( \underbrace{a, \dots, a}_p, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1-1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s-1}, \underbrace{b, \dots, b}_p \right). \quad (2.34)$$

Počet řídicích bodů tak musí být  $\tilde{n} = n - s - 1$  a řešením soustavy rovnic získáme řídicí body  $\mathbf{Q}_i$  křivky  $\mathbf{C}^{p-1}(u)$

$$\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)\mathbf{P}_i = \sum_{i=0}^{\tilde{n}} N_{i,p-1}(u)\mathbf{Q}_i. \quad (2.35)$$

Díky tomu, že násobnost uzlu může být rovna jedné, nespadá takový uzel do uzlového vektoru  $\tilde{\mathbf{U}}$ . Ačkoli je možné vždy zvýšit stupeň křivky, snížit stupeň nemusí být v určitých případech možné. Dochází tak ke stejnému případu jako při odebrání uzlů, viz kap. 2.5.1 (Piegl a Tiller, 1997).

## 2.6 Napojování ploch

Napojování dvou plátů je obdobné k napojování dvou křivek. Dále jsou popsány spojitosti 0. až 3. řádu pro pláty  $\mathbf{S}_1(u,v)$  a  $\mathbf{S}_2(u,v)$  určené sítí řídicích bodů  $P_{i,j}^1$  a  $P_{i,j}^2$ , kde pro  $P_{i,j}^1$  je  $i = 0, \dots, s$  a  $j = 0, \dots, n$  a pro  $P_{i,j}^2$  je  $i = 0, \dots, t$  a  $j = 0, \dots, n$ . Pro požadované spojitosti ve směru  $u$  musí těchto spojitostí nabývat i společná hrana ve směru  $v$ .

### 2.6.1 Spojitost 0. řádu

Při spojitosti  $C^0$  resp.  $G^0$  mají pláty  $\mathbf{S}_1(u,v)$  a  $\mathbf{S}_2(u,v)$  pouze společnou hranu ve směru  $v$ . Platí tedy

$$\mathbf{S}_1(1,v) = \mathbf{S}_2(0,v). \quad (2.36)$$

Podmínka pro jednotlivé křivky v příčném směru je totožná s podmínkou napojení křivek s  $C^0$  spojitostí tzn., že poloha řídicích bodů je

$$P_{s,j}^1 = P_{0,j}^2. \quad (2.37)$$

Analýzu napojení dvou plátů můžeme provést pomocí zebry, viz obr. 2.5 vlevo nahoře. Tento nástroj pomocí pruhů vytvořených na jednotlivých plochách odhaluje, s jakou spojitostí jsou napojeny. Zobrazuje však pouze geometrickou spojitost. V případě  $G^0$  spojitosti na sebe pruhy nijak nenavazují.

Gaussova a střední křivost dává v případě  $G^0$  spojitosti stejně přesné informace o napojení jako analýza pomocí zebry. V obou případech lze na obr. 2.6 a 2.7 (první shora) pozorovat hranici, která rozděluje barevně vykreslené křivosti v místě napojení.

Tyto tři způsoby analýzy však nejsou dostatečně přesné a v určitých případech mohou být dosti nejasné, což je zřejmé u napojení vyšších řádů.

Přesně nám v případě  $G^0$  spojitosti funguje i graf křivosti, který také odhaluje pouze geometrickou spojitost. Ten je vykreslen podél parametrických křivek jednotlivých plátů a v místě napojení je jasně viditelná nespojitost typická pro  $G^0$  napojení, viz obr. 2.8 vlevo nahoře (Surynková, 2011).

## 2.6.2 Spojitost 1. řádu

Při spojitosti  $C^1$  mají pláty  $\mathbf{S}_1(u,v)$  a  $\mathbf{S}_2(u,v)$  společnou hranu ve směru  $v$  (2.36) a totožné příčné tečné vektory ve směru  $u$ . Pro jednotlivé body řídicí sítě platí podmínka

$$P_{s,j}^1 - P_{s-1,j}^1 = P_{1,j}^2 - P_{0,j}^2. \quad (2.38)$$

V případě  $G^1$  spojitosti je nutné splnění lineární závislosti vektorů  $\overrightarrow{P_{s-1,j}^1 P_{s,j}^1}$  a  $\overrightarrow{P_{0,j}^2 P_{1,j}^2}$

$$P_{s,j}^1 - P_{s-1,j}^1 = \lambda_1 (P_{1,j}^2 - P_{0,j}^2), \quad \lambda_1 > 0. \quad (2.39)$$

Při konstrukci tohoto napojení bychom postupovali obdobně jako v případě napojení dvou křivek s  $C^1$  spojitostí, viz obr. 1.12. To znamená, že bychom upravovali polohu řídicích bodů pro křivky ve směru  $u$ .

U analýzy pomocí zebry v případě  $G^1$  spojitosti na sebe pruhy navazují, ale je vidět, že nenavazují hladce a v místě napojení je patrný zlom, viz obr. 2.5 vpravo nahoře, nebo je patrná prudká změna směru pruhu před místem napojení.

Gaussova a střední křivost dává v případě  $G^1$  spojitosti podobně přesné informace o napojení jako analýza pomocí zebry. V obou případech lze na obr. 2.6 a 2.7 (druhý shora) pozorovat hranici, která rozděluje barevně vykreslené křivosti v místě napojení. Oproti  $G^0$  spojitosti zde však mírně barevné rozložení křivosti navazuje.

Graf křivosti poskytuje při  $G^1$  napojení jasnější informaci o daném napojení, viz obr. 2.8 vpravo nahoře. Je zde patrná rozdílná velikost normálových vektorů v místě napojení (Surynková, 2011).

## 2.6.3 Spojitost 2. řádu

Při spojitosti  $C^2$  mají pláty  $\mathbf{S}_1(u,v)$  a  $\mathbf{S}_2(u,v)$  společnou hranu ve směru  $v$  (2.36), totožné příčné tečné vektory ve směru  $u$  a totožné vektory druhých derivací ve směru  $u$ . Pro jednotlivé body řídicí sítě platí podmínka

$$P_{2,j}^2 = P_{s-2,j}^1 + 4(P_{s,j}^1 - P_{s-1,j}^1). \quad (2.40)$$

Pokud je napojení prvního řádu dvou plátů parametrické, potom v případě  $G^2$  spojitosti je nutné splnění podmínky

$$P_{2,j}^2 = P_{s-2,j}^1 + \lambda (P_{s,j}^1 - P_{s-1,j}^1), \quad (2.41)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Při konstrukci tohoto napojení bychom postupovali obdobně jako v případě napojení dvou křivek s  $C^2$  spojitostí, viz obr. 1.14. To znamená, že bychom upravovali polohu řídicích bodů pro křivky ve směru  $u$ .

U analýzy pomocí zebry v případě  $G^2$  spojitosti na sebe pruhy hladce navazují, viz obr. 2.5 vlevo dole.

Barevné rozložení Gaussovy a střední křivosti je v případě  $G^2$  spojitosti plynule navazující, viz obr. 2.6 a 2.7 (třetí shora). Hranice napojení již není pozorovatelná.

Graf křivosti při  $G^2$  napojení má spojitost nultého řádu, viz obr. 2.8 vlevo dole. Je zde viditelný zlom, což znamená, že není hladký.

### 2.6.4 Spojitost 3. řádu

Při spojitosti  $C^3$  mají pláty  $\mathbf{S}_1(u,v)$  a  $\mathbf{S}_2(u,v)$  společnou hranu ve směru  $v$  (2.36), totožné příčné tečné vektory ve směru  $u$ , totožné vektory druhých derivací ve směru  $u$  a totožné vektory třetích derivací ve směru  $u$ . Pro jednotlivé body řídicí sítě platí podmínka

$$P_{3,j}^2 = 4(2P_{s,j}^1 - 3P_{s-1,j}^1 + 1,5P_{s-2,j}^1) - P_{s-3,j}^1. \quad (2.42)$$

Aby byli plochy napojeny se spojitostí  $G^3$ , musí splňovat podmínku

$$\mathbf{S}_1'''(1,v) = \lambda_1^3 \mathbf{S}_2'''(0,v) + 3\lambda_1 \lambda_2 \mathbf{S}_2''(0,v) + \lambda_3 \mathbf{S}_2'(0,v), \quad (2.43)$$

kde  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  a  $\lambda_1 > 0$ .

Při konstrukci tohoto napojení bychom postupovali obdobně, jako v případě napojení dvou křivek s  $C^3$  spojitostí, viz obr. 1.17. To znamená, že bychom upravovali polohu řídicích bodů pro křivky ve směru  $u$ .

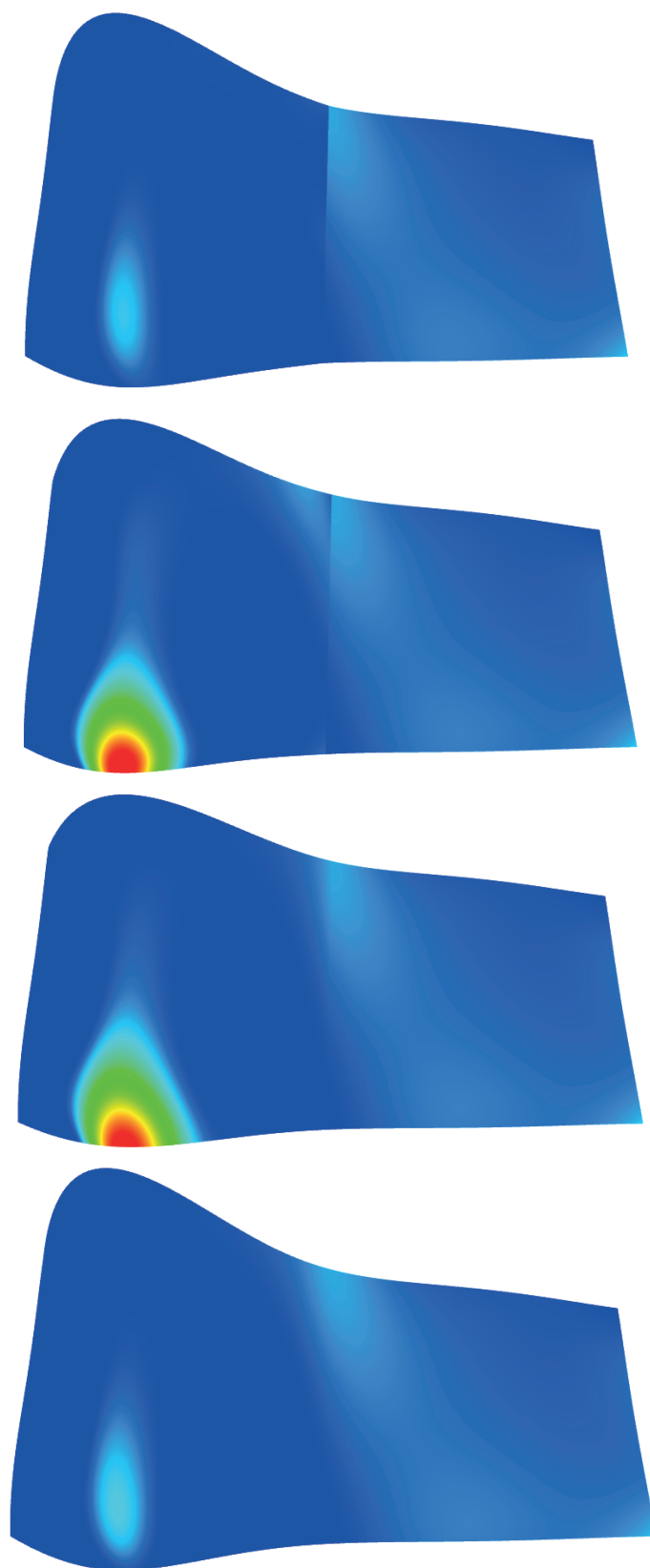
U analýzy pomocí zebry v případě  $G^3$  spojitosti na sebe pruhy hladce navazují stejně, jako u  $G^2$  spojitosti. Pomocí zebry tedy nelze určit, zda-li se jedná o  $G^2$  spojitost nebo vyšší, viz obr. 2.5 vpravo dole.

Barevné rozložení Gaussovy a střední křivosti v případě  $G^3$  spojitosti navazuje plynuleji než v případě  $G^2$  spojitosti, viz obr. 2.6 a 2.7 (čtvrtý shora). Avšak bez možnosti porovnání těchto napojení mezi sebou jsou k nerozeznání.

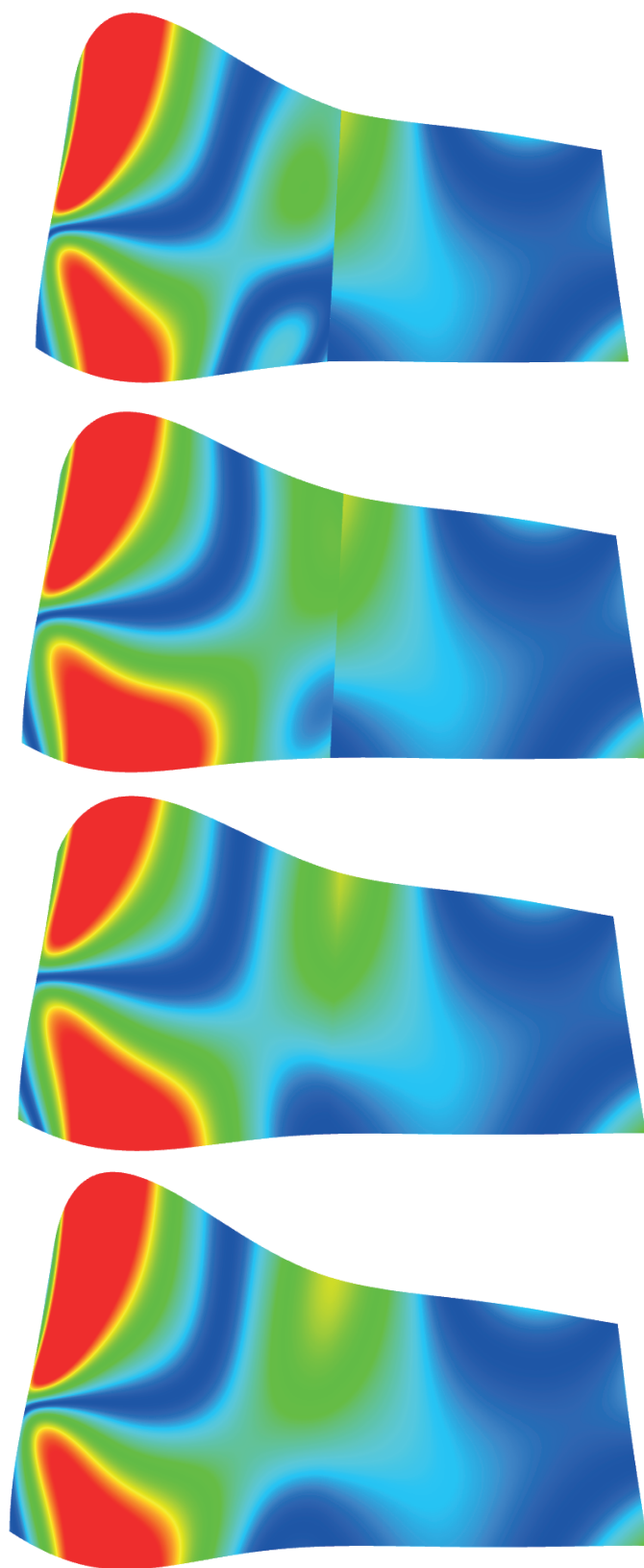
Graf křivosti při  $G^3$  napojení má spojitost prvního řádu, viz obr. 2.8 vpravo dole. Graf křivosti tak představuje jediný nástroj, pomocí kterého lze rozeznat napojení se spojitostí druhého a třetího řádu.



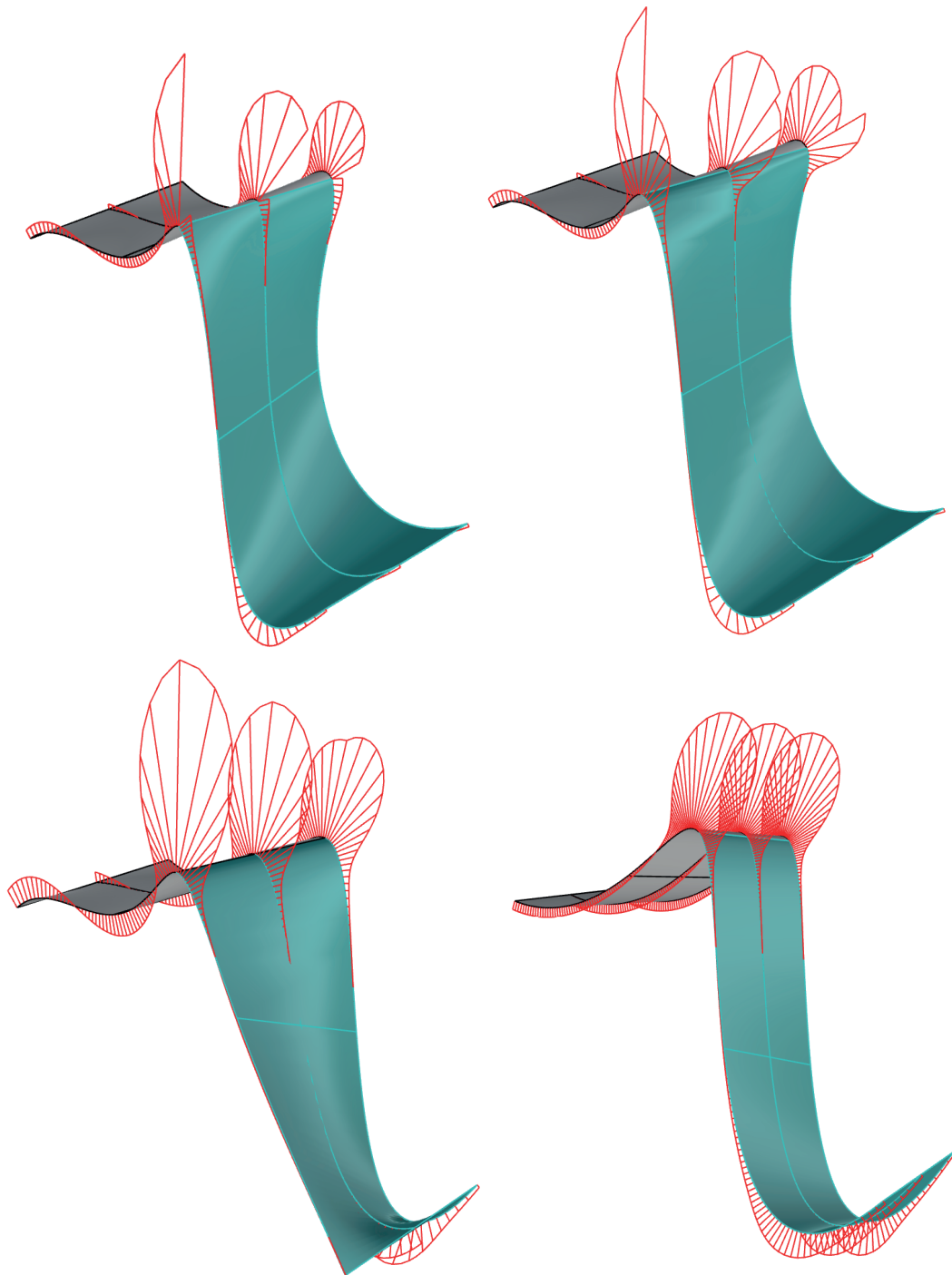
Obrázek 2.5: Detaily analýzy napojení dvou plátů pomocí zebry. Zleva nahoře napojení s  $G^0$ ,  $G^1$ ,  $G^2$  a  $G^3$  spojitostí.



Obrázek 2.6: Analýza napojení dvou plátů pomocí Gaussovy křivosti. Shora napojení s  $G^0$ ,  $G^1$ ,  $G^2$  a  $G^3$  spojitostí.



Obrázek 2.7: Analýza napojení dvou plátů pomocí střední křivosti. Shora napojení s  $G^0$ ,  $G^1$ ,  $G^2$  a  $G^3$  spojitostí.



Obrázek 2.8: Analýza napojení dvou plátů pomocí grafu křivosti. Zleva nahoře napojení s  $G^0$ ,  $G^1$ ,  $G^2$  a  $G^3$  spojitostí.

### 3. Předvýrobní etapa procesu CNC obrábění

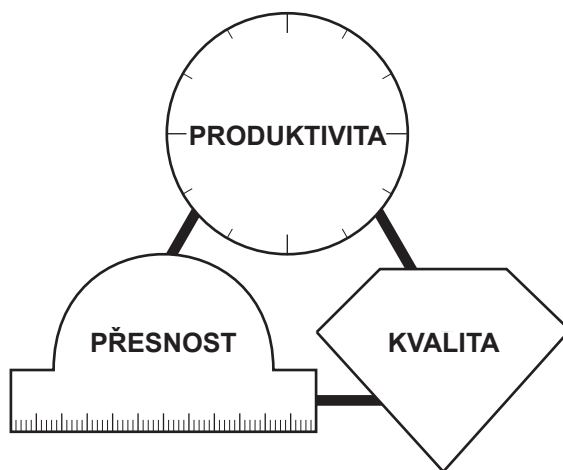
Zkratka CAD pochází z anglického Computer Aided Design, což v překladu znamená počítačem podporované modelování. Z názvu je patrné, že v takovém softwaru dochází k definování geometrie finálního výrobku.

Zpracování geometrie z CADu se provádí pomocí CAM systému, počítačem podporované výroby.

CAM systém může být integrovaný do CAD softwaru, to ale není pravidlem. Často se tak setkáme s nutností převodu CAD modelu do jiného CAM softwaru. Je tak nutné převést CAD model do univerzálního formátu, např. STEP (Standard for the Exchange of Product model data) nebo IGES (Initial Graphics Exchange Specification). Dále v této práci je převeden CAD model pomocí STEP formátu, proto je stručně popsán v kap. 3.1.

V CAM systému se na základě CAD modelu vytvoří data dráhového řízení, dále jen CL (Cutter Location) data. Ta sestávají z informace o použitém nástroji, strategii obrábění, posuvových a rezných rychlostech a toleranci dráhy nástroje. CL data jsou tak přímo závislá na kvalitě CAD modelu, viz kap. 3.3. Veškeré informace obsažené v CL datech jsou závislé na volbě a zkušenostech samotného programátora. Ten má v CAM systému možnost verifikace navržené strategie, predikci kolizí a času obrábění. V této simulaci však není zahrnuta dynamika samotného stroje, nástroje a obrobku, což může vést ke značným odchylkám. Vizualizace tak představuje jen hrubý náhled (Sulitka, 2013).

CL data se následně zpracovávají v postprocesoru pro daný stroj a řídicí systém a výsledkem je NC (Numerical Control) kód. Takto vytvořený NC kód je dále importován do CNC řídicího systému stroje, viz kap. 3.4 (Smolík a Sulitka, 2011).



Obrázek 3.1: Provázání požadavků na výrobu

Produktivita, kvalita a přesnost výroby jsou velice provázané požadavky na výrobu, viz obr. 3.1. Každý z těchto požadavků lze upravit na mnoha úrovních procesu přípravy. Například použitím strategie dráhy nástroje s nízkými časy



obrábění obvykle vede k většímu zatížení nástroje a snížení jeho životnosti. Potom je rozhodující poměr mezi cenou strojního času a cenou nástroje (Sulitka, 2018).

Tato práce se však zabývá první úrovní přípravy výroby, tzn. kvalitou samotného CAD modelu. Z tohoto důvodu zde nejsou zohledňovány vlivy volby nástrojů, strategie jejich drah a aspekty dalších přípravných úrovní.

## 3.1 STEP formát

STEP formát je dán normou ISO10303. Soubor, který je uložen ve formátu STEP, má příponu .stp nebo .step, takový soubor přenáší informace o geometrii modelu, kóty, tolerance, ale také informace o použitých materiálech a povrchových úpravách.

V prvním řádku STEP souboru se objevuje odkaz na ISO normu. Následuje hlavička souboru. Ta obsahuje popis souboru, jeho název a další zřejmé informace.

```
ISO-10303-21;
HEADER;
/* Generated by software containing ST-Developer
 * from STEP Tools, Inc. (www.steptools.com)
 */
/* OPTION: using custom schema-name function */

FILE_DESCRIPTION(
/* description */ (''),
/* implementation_level */ '2;1');

FILE_NAME(
/* name */ 'VEZ~1',
/* time_stamp */ '2021-03-15T12:57:41+01:00',
/* author */ (''),
/* organization */ (''),
/* preprocessor_version */ 'ST-DEVELOPER v16.5',
/* originating_system */ '',
/* authorisation */ '');

FILE_SCHEMA (('AUTOMOTIVE_DESIGN'));
ENDSEC;
```

Dále následuje sekce data, kde identifikátor 14 obsahuje entitu s názvem SPLINE CURVE WITH KNOTS. Reprezentuje tak B-spline křivku i s jejím uzlovým vektorem. Argumenty uvedené v závorce mají následující význam. První argument představuje jméno křivky, to však v tomto případě není žádné, proto jsou uvozovky prázdné. Dále následuje stupeň křivky (3) a identifikátory řídicích bodů (41 až 189; počet je zde upraven kvůli množství řídicích bodů). Poté tvar křivky, který zde není specifikován, informace o uzavření křivky, samoprůsečíku křivky, násobnost jednotlivých uzlů, vypsané samotné uzly (počet opět upraven kvůli množství uzlů) a informaci o uzlovém vektoru (v tomto případě nespecifikovaný). Podrobný popis STEP formátu je k nalezení v (Cížek, 2019).

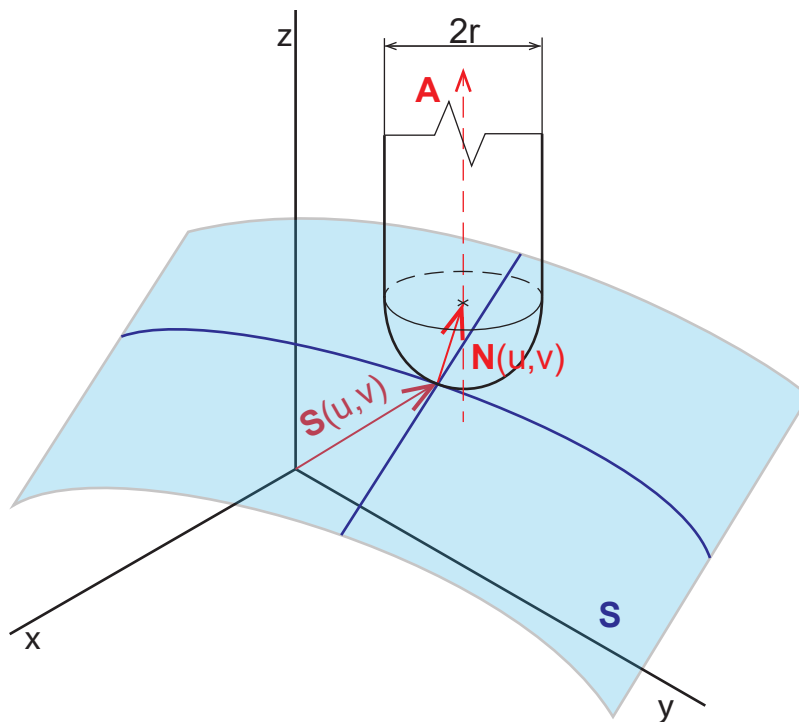
```

DATA;
#10=SHAPE_REPRESENTATION_RELATIONSHIP('',' ',#33,#12);
#11=GEOMETRIC_CURVE_SET('curve_set_0',(#14));
#12=GEOMETRICALLY_BOUNDED_WIREFRAME_SHAPE_REPRESENTATION(
'wireframe_rep_0',(#11,#35),#32);
#13=PRESENTATION_LAYER_ASSIGNMENT('V\X\FDchoz\X\ED',' ',(#14));
#14=B_SPLINE_CURVE_WITH_KNOTS(' ',3,(#41,#42,#43,...,#189),
.UNSPECIFIED.,.T.,.F.,(4,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2,
3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2,4),(-37.67024,
-37.58247,-37.50629,...,37.46370),.UNSPECIFIED.);

```

## 3.2 Výpočet CL dat

Pro danou rovnici plochy CAM systém počítá a zobrazuje dráhu nástroje na základě zvolené strategie obrábění. Dále je uveden CC (Cutter Contact) parametrický algoritmus výpočtu CL dat.



Obrázek 3.2: Kontakt nástroje s obráběnou plochou

Na obr. 3.2 je zobrazen nástroj v kontaktu s obráběnou plochou. Nechť je dána plocha  $\mathbf{S}(u,v)$ , kde  $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle$ . Potom CL data pro daný bod dotyku nástroje s plochou jsou dána

$$CL(u,v) = \mathbf{S}(u,v) + r(\mathbf{N}(u,v) - \mathbf{A}), \quad (3.1)$$

kde  $\mathbf{N}(u,v)$  je jednotkový normálový vektor plochy  $\mathbf{S}(u,v)$ ,  $r$  je poloměr nástroje a  $\mathbf{A} = (0, 0, 1)^T$  je vektor osy nástroje, viz obr. 3.2.

Předpokládejme, že obrábění plochy  $\mathbf{S}(u,v)$  probíhá pouze ve směru  $u$ . Potom pro  $v = v_j$  máme  $u$ -křivku  $\mathbf{S}(u,v_j)$  a CL data jsou počítána podél této křivky.

Nechť  $S(u_i, v)$  je aktuální bod  $u$ -křivky, potom následující bod  $S(u_{i+1}, v)$  je dán vztahem

$$\max_u |S(u, v) - (S(u_{i+1}, v) - S(u_i, v))| \leq \delta, \quad (3.2)$$

kde  $\delta$  je daná tolerance, viz obr. 3.3.

Aproximací  $u$ -křivky v bodě  $S(u_i, v)$  oskulační kružnicí (1.20), dostáváme za pomoci geometrických vztahů bod  $S(u_{i+1}, v)$ , viz obr. 3.3

$$r(u_i)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r(u_i) - \delta)^2, \quad (3.3)$$

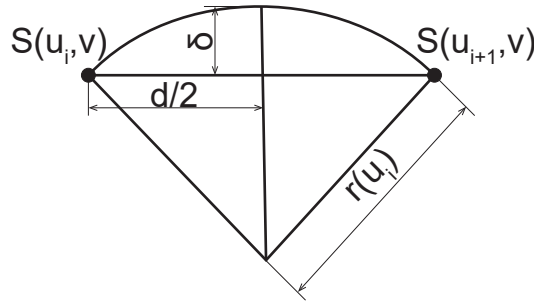
kde  $r(u_i)$  je poloměr oskulační kružnice v bodě  $S(u_i, v)$  a délka kroku  $d$  je

$$d = \sqrt{4\delta(2r(u_i) - \delta)}. \quad (3.4)$$

Bod  $S(u_{i+1}, v)$  je tak dán vztahem

$$|S(u_{i+1}, v) - S(u_i, v)| \leq d. \quad (3.5)$$

Tímto způsobem jsou určeny body na parametrické  $u$ -křivce  $\mathbf{S}(u, v_j)$ .



Obrázek 3.3: Délka kroku mezi  $S(u_i, v)$  a  $S(u_{i+1}, v)$

Poté se  $i$  a  $v$  zvýší o délku kroku. Tento krok je určen pomocí poloměru nástroje  $r$  a výšky zbytkové nerovnosti po projetí nástroje  $h$ , viz obr. 3.4 vztahem

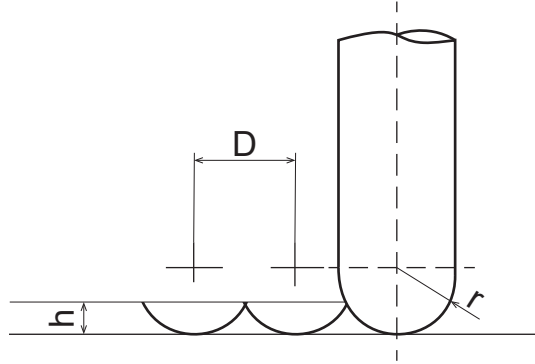
$$\begin{aligned} r^2 &= (r - h)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2, \\ D &= \sqrt{4h(2r - h)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Velikost  $v_{j+1}$  je určena jako

$$v_{j+1} = \min_u \{v(u), u \in \langle 0, u^{max} \rangle\}, \quad (3.7)$$

kde

$$v(u) = \max_v |S(u, v) - S(u, v_j)| \leq D. \quad (3.8)$$



Obrázek 3.4: Délka kroku mezi  $S(u, v_j)$  a  $S(u, v_{j+1})$

Tímto způsobem je možné vypočítat body pro zbylé křivky a díky nim určit CL data. Z výpočtu CL dat je zřejmé, že velikost křivosti plochy má vliv na rozmístění CL bodů podél obráběného profilu. V následující kapitole jsou znázorněny dráhy nástroje a blíže popsán vliv křivosti na rozmístění CL dat (Suh a kol., 1995).

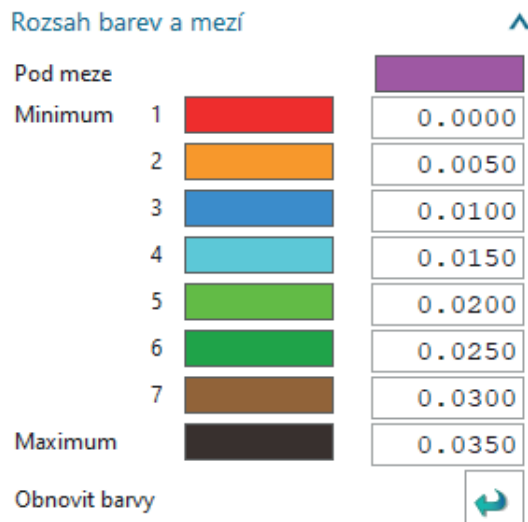
### 3.3 Kvalita CL dat

Pomineme-li možnost nastavení parametrů, jako jsou strategie dráhy nástroje a tolerance jeho polohy, potom je rozložení CL dat závislé pouze na kvalitě CAD modelu.

Na následujících obrázcích je zobrazeno rozložení CL bodů a porovnání s grafem křivosti jednotlivých ploch. Délka vzdáleností mezi jednotlivými body byla vytvořena v programu NX 12 od společnosti Siemens a je barevně zobrazena podle obr. 3.5. Hustota a plynulost rozložení ovlivňuje rychlost nástroje, který místý, kde je hustota vyšší, musí projíždět pomaleji. Naopak místý, kde jsou body dál od sebe, si může dovolit větší rychlost. Z toho plyne, že rychlost změny hustoty CL bodů má vliv na plynulost pohybu nástroje a tím pádem i na kvalitu obrobeného povrchu.

Ideální průběh podél plochy znázorňuje plynulý přechod mezi jednotlivými barvami. Je tak sledována změna hustoty CL bodů podél plochy v závislosti na změně křivosti.

Obr. 3.7 zobrazuje původní testovací segment tvořený válcovou plochou, dále jen Fobos kus, na kterém jsou díky grafu křivosti odhaleny geometrické nedostatky. Těmito nedostatky se rozumí, že plocha není vytvořena jednou spojitou plochou, ale hned ze dvou stříhaných rotačních válcových ploch o poloměru 39,683 mm a 387,732 mm, jedné stříhané válcové plochy určené křivkou desátého stupně a dvou rovinných plátů, viz 3.6, což je zřejmé z grafu křivosti, který je tvořen několika grafy označenými  $g_1$ ,  $g_2$  a  $g_3$ , právě pro každou stříhanou plochu. Další chybné použití válcových ploch, nebo zaoblení je popsáno v (Huang a kol., 2015). Tyto barevně označené plochy z obr. 3.6 jsou dále upravovány. Rozložení CL bodů v místě označeném číslem 2 není ideální, protože je zde prudká změna křivosti, před kterou dochází ke zvýšení hustoty CL bodů. V místě označeném číslem 1, kde se napojují dvě válcové plochy, je dokonce dráha nástroje ostře zlomena. Problém u tohoto segmentu nastává ještě v dvojitém nájezdu nástroje, díky



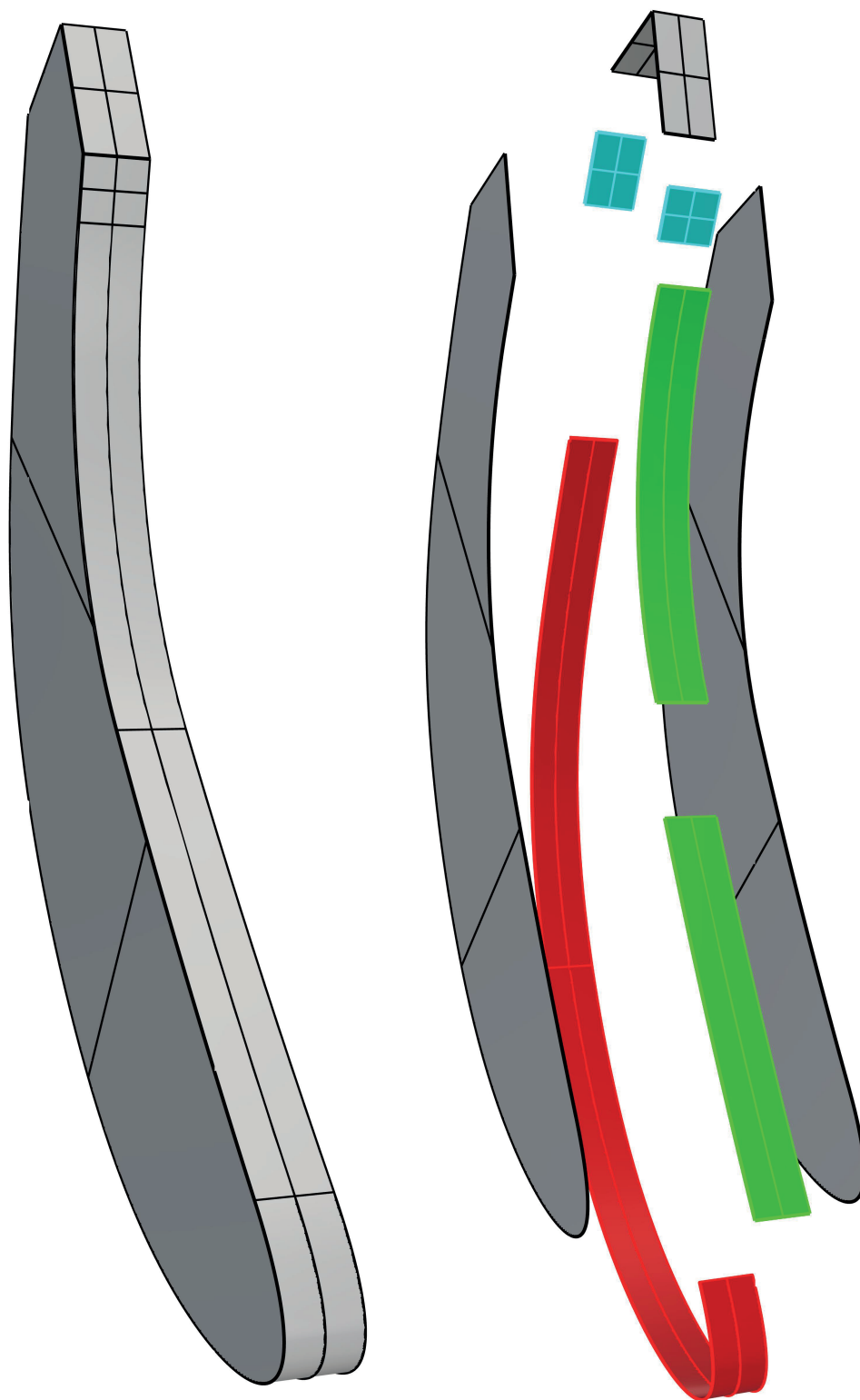
Obrázek 3.5: Nastavení zobrazení délky segmentů

čemuž je dle požadavků operace neproveditelná. Dvojitě nájezdy jsou zapříčiněny chybami a kolizemi v trajektorii nástroje, které odhaluje funkce v CAMu a tímto způsobem se s nimi vypořádává. Důvod neproveditelnosti operace při vícečetném vyjetí nástroje z řezu je ten, že nástroj v průběhu obrábění setrvává v určitém předpětí. Při opětovném záběru nástroje je tak na obrobku pozorovatelná určitá nerovnost a odchylka. U dalších zmíněných segmentů tento problém zmizel, tzn. mají jeden nájezd a jeden výjezd z řezu.

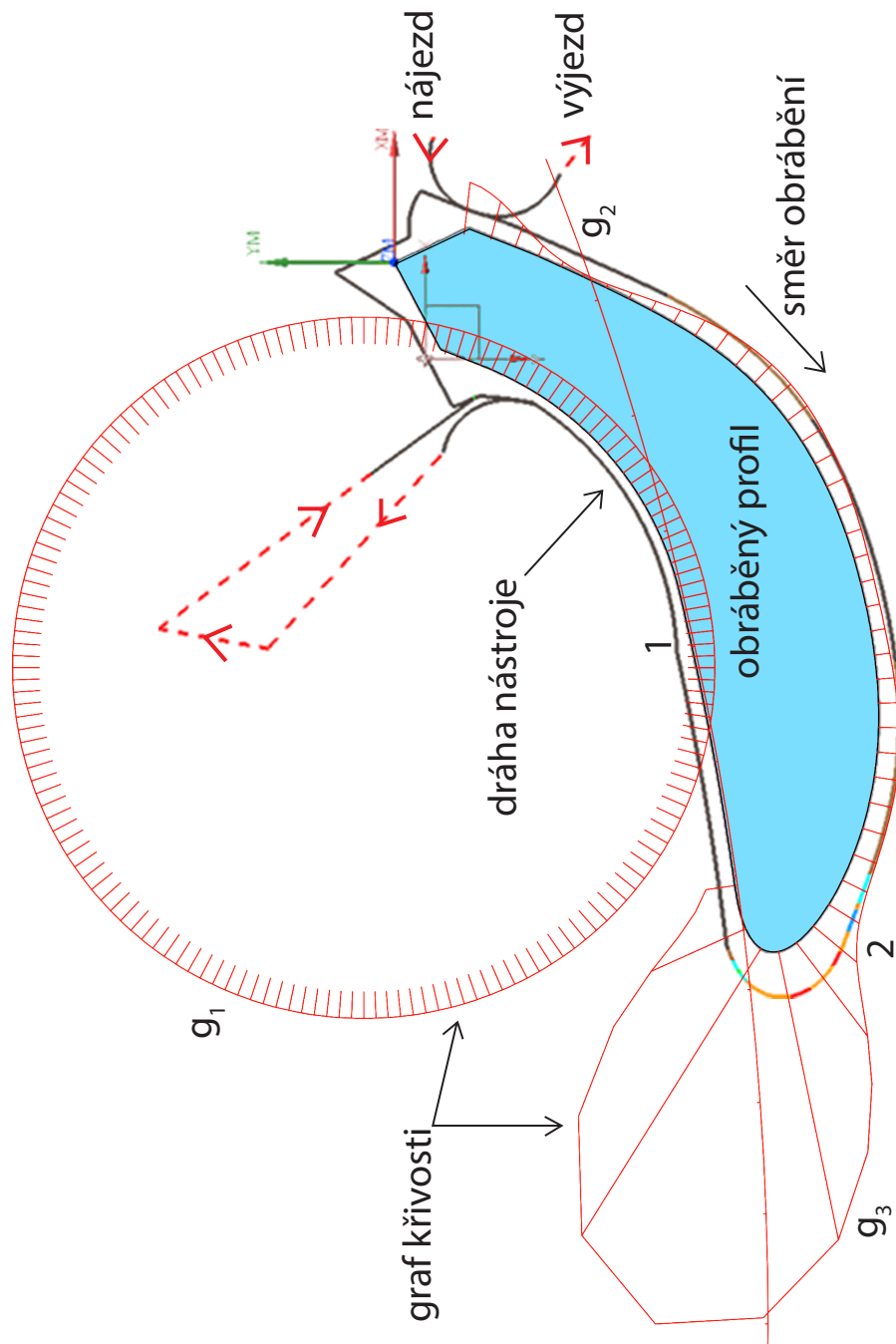
Na obr. 3.8 je tentýž Fobos kus, jako na obrázku 3.7, plocha je zde však nahrazena jednou spojitou plochou 3. stupně. Z grafu křivosti je zřejmé, že se jedná o jednu celistvou plochu. Dále lze na grafu křivosti pozorovat ostré zlomy, díky kterým není tento graf hladký. Tyto zlomy se nacházejí v místech, kde jsou uzly a dochází zde tak k  $G^2$  spojitosti, viz kap. 1.1.1. V místě označeném číslem 1 dochází k prudké změně hustoty CL bodů, což je způsobeno prudkou změnou křivosti označenou 1\*. Červená oblast označená číslem 2, je zapříčiněna velkou křivostí 2\*. V místě 3 lze opět pozorovat změnu hustoty CL bodů, zapříčiněnou prudkou změnou křivosti plochy 3\*. Při výpočtu CL bodů program totiž reaguje na křivost plochy, která následuje, proto je v obrázku vidět nejprve prudká změna hustoty a až poté prudká změna křivosti.

Na obr. 3.9 je opět Fobos kus, tentokrát je však původní plocha nahrazena plochou 4. stupně. Plocha stupně 4 zajišťuje v místě uzlů  $G^3$  spojitost plochy, což je zřejmé z hladkého průběhu grafu křivosti. Pověsimněme si míst 1 a 3, kde v předchozím obrázku docházelo k velmi prudké změně hustoty CL bodů, zapříčiněné prudkou změnou křivosti 1\* a 3\*. V tomto případě je změna křivosti pozvolnější a hustota CL bodů plynulejší. Opět je zde červená oblast 2 způsobená vysokou křivostí 2\*.

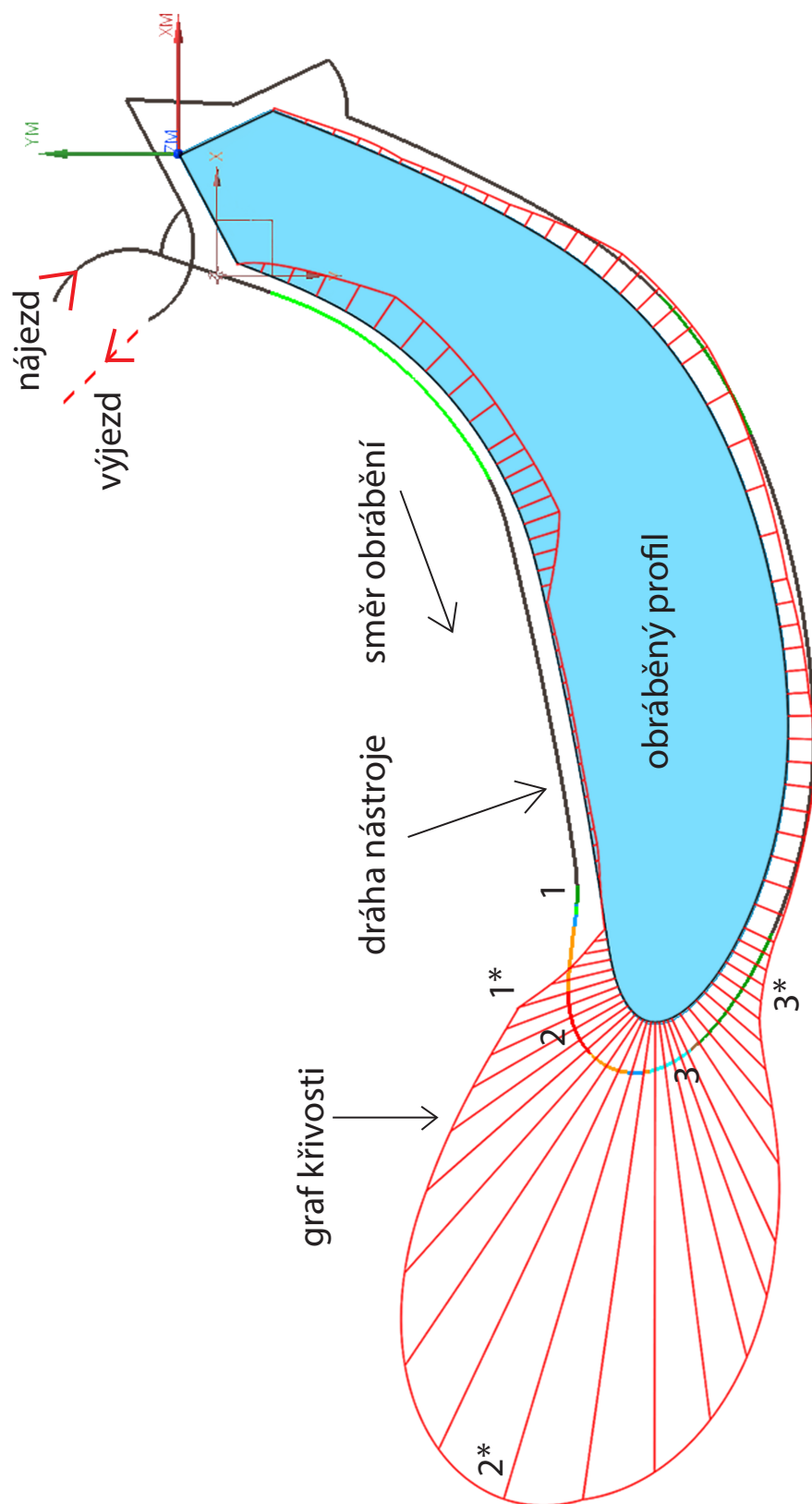
Jak by se mohlo zdát, vysoké hodnoty první křivosti nejsou z pohledu CL bodů nijak závažný problém. Problémem jsou prudké změny, případně překmitý graf křivosti. Vysoká hustota CL bodů způsobuje nižší rychlost nástroje. Při prudké změně hustoty CL bodů tak dochází k prudké změně rychlosti nástroje, což způsobuje horší kvalitu obráběného povrchu. Ideální plocha z pohledu výpočtu CL dat sestává z jediné plochy alespoň 4. stupně s pozvolnou změnou první křivosti.



Obrázek 3.6: Rozložení původního Fobos kusu na jednotlivé plochy. Rotační válcové plochy jsou označeny zeleně, válcová plochá tvořená křivkou desátého stupně červeně a rovinné pláty modře.

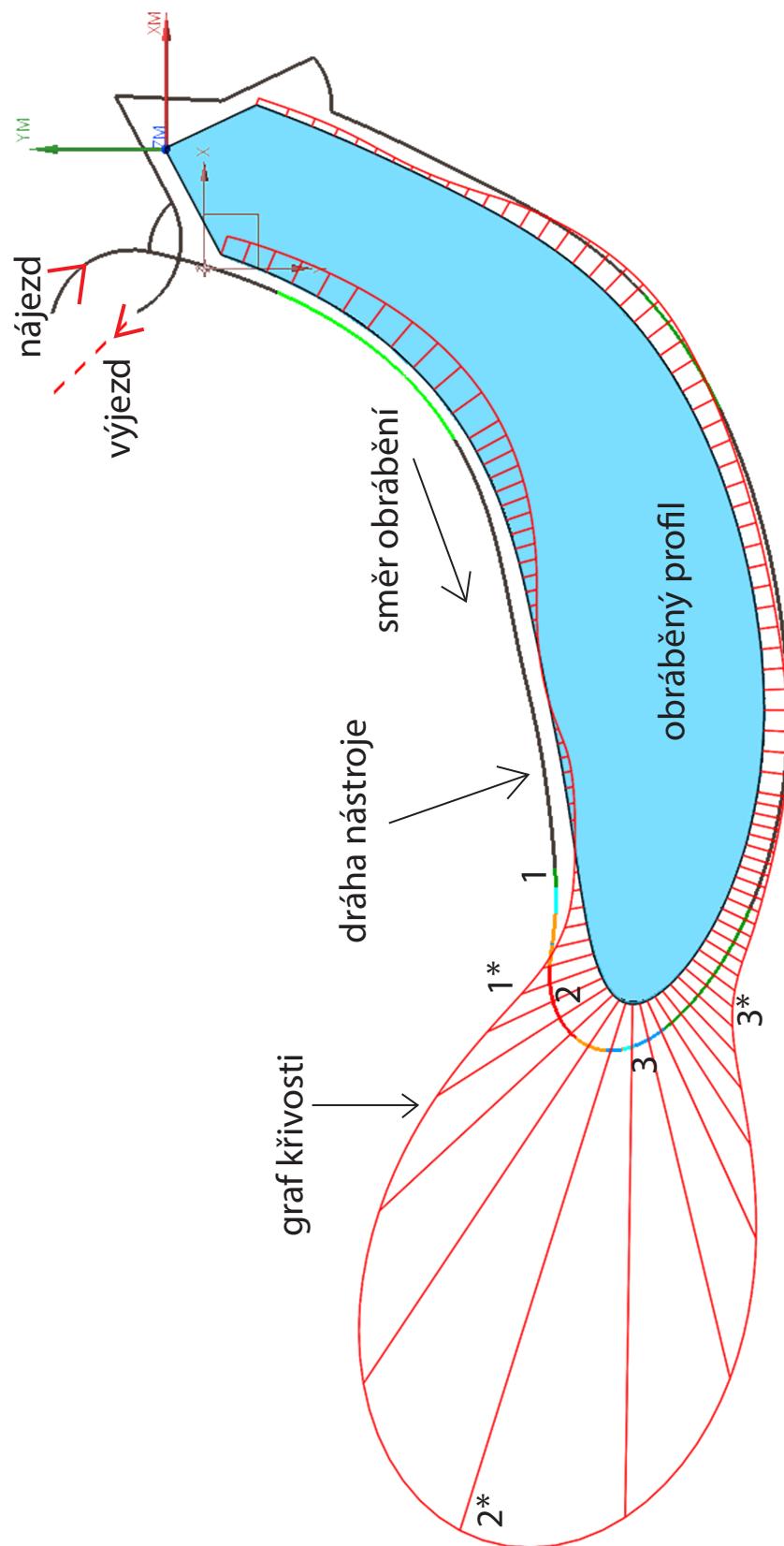


Obrázek 3.7: Hustota CL bodů a graf křivosti na původním Fobos kusu



Obrázek 3.8: Hustota CL bodů a graf křivosti na ploše 3. stupně Fobos kusu





Obrázek 3.9: Hustota CL bodů a graf křivosti na ploše 4. stupně Fobos kusu

### 3.4 CNC řídicí systém

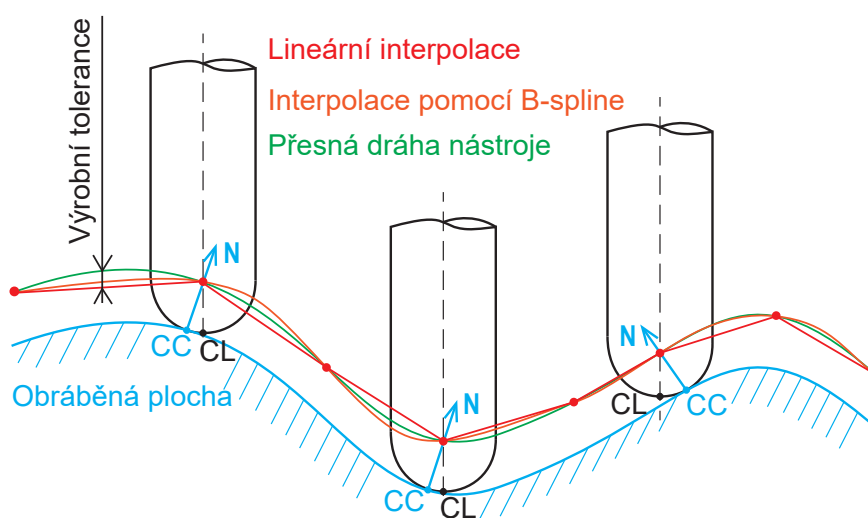
Řídicí systém je mozkiem celého CNC stroje. Na jeho přesnosti a spolehlivosti závisí kvalita celého obráběcího procesu.

Jak již bylo řečeno, v CNC řídicím systému se zpracovávají NC data. Nastavují se zde např. limity zrychlení, osové dráhové derivace zrychlení a pomocí dalších přídatných funkcí se upravují dráhy nástroje v závislosti na kvalitě a efektivitě obrábění. Přídatné funkce jsou nezbytné, neboť bez nich by se trajektorie dráhy nástroje skládala z úseček, viz obr. 3.10, v jejichž vrcholech by musel nástroj zastavit. Na obr. 3.10 jsou dále zobrazeny body dotyku (CC) nástroje s plochou, CL body, normálové vektory plochy ( $\mathbf{N}$ ) a výrobní tolerance, což je maximální odchylka interpolace NC kódu od přesné dráhy nástroje. Vliv funkcí interpolátoru je také patrný u změny posuvové rychlosti oproti programované. Tato změna je např. u pětiosého obrábění, kde dochází k součinnosti rotačních a translačních os. Změna je způsobena limitující dynamikou rotačních os, které zamezují dosažení požadovaných posuvů. Posuvové rychlosti tak tímto vlivem klesají (Sulitka, 2017).

Při vytváření NC kódu je třeba dbát na vlastnosti daného řídicího systému stroje. Důležitou vlastností je např. rychlost a přesnost polohování os. Pro zvýšení efektivity obráběcího procesu moderní řídicí systémy obsahují funkce, jako jsou: inteligentní ovladač pojezdu s dopředným výpočtem optimálního rozložení rychlosti, ovladač s omezením rázů, ovladač s řízením rychlosti a zrychlení nebo možnost využívání NURBS interpolací (Kaufman, 2014).

Příkladem nevhodného nastavení NC dat pro určitý řídicí systém pomocí CAMu může být situace, kdy pro velké posuvové rychlosti na složitých trajektoriích programátor zadá příliš přesnou aproximaci křivek drah. To má za následek, že řídicí systém nemusí být schopen udržet po celou dobu řezání nastavenou hodnotu posuvu. Tím se zhorší kvalita obrobeneho povrchu a sníží se životnost nástroje (Lukeš a Vrabec, 2015).

Při samotném návrhu NC dat je tedy nutné znát vlastnosti používaného řídicího systému a vlastnosti samotného stroje (viz dále).



Obrázek 3.10: Interpolace NC kódu CNC řídicím systémem

### 3.5 Virtuální dvojče stroje

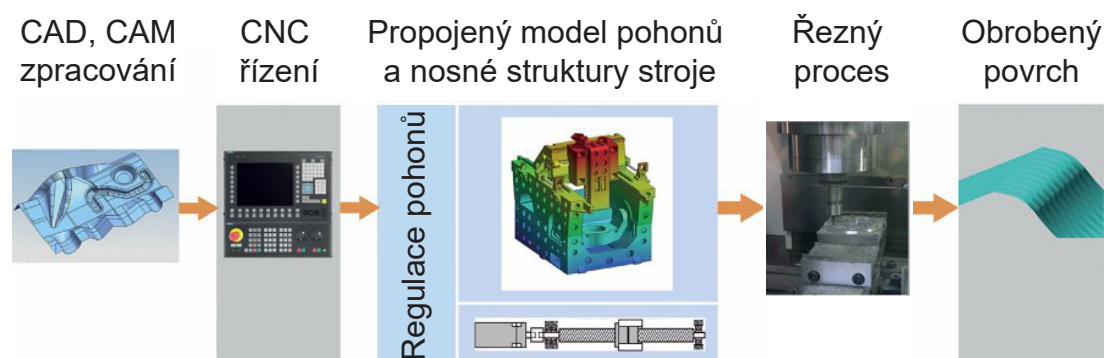
Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole, v CAM softwarech jsme schopni definovat nástroj, jeho dráhu a řezné podmínky, ale není zde např. brána v potaz dynamika a tuhost stroje.

Virtuální dvojče daného stroje se skládá z propojeného modelu pohonů a nosné struktury reálného stroje, vázaného na model řízení pohonů a interakci s virtuálním jádrem CNC řídicího systému, nebo na interpolovaná NC data, viz obr. 3.11.

Simulace pomocí virtuálního stroje tak zahrnuje i dynamiku celé soustavy (stroj, nástroj, obrobek). Je možné simulovat např. kmitání v místě nástroje jako odezvu na buzení pohony v řádu zlomků vteřiny. Cílem je simulovat co nejpřesněji interakci nástroje s obrobkem pro zjištění a odstranění chyb v průběhu obrábění. To umožňuje daleko lepší a přesnější optimalizaci procesu obrábění ještě před spuštěním reálného stroje.

Model virtuálního stroje umožňuje vizualizovat úběr materiálu a kvalitu obrobce s detailním záznamem otisků nástroje. Umožněna je také vizualizace posuvové rychlosti nástroje, díky které je možné účinně optimalizovat zatížení nástroje a řezné podmínky (Sulitka, 2013).

Mimo výhody v optimalizaci řezných podmínek lze pomocí virtuálního dvojčete včas odhalit případné kolize a chyby, které by mohly nastat při spuštění výroby na reálném stroji (Sulitka, 2018).



Obrázek 3.11: Virtuální model stroje (Sulitka, 2018)

### 3.6 Pětiosé obrábění

Souvislým obráběním v pěti pohybových osách se rozumí, že obrábění probíhá ve třech lineárních a dvou rotačních osách, které jsou polohovány současně za účelem interpolace obráběných ploch.

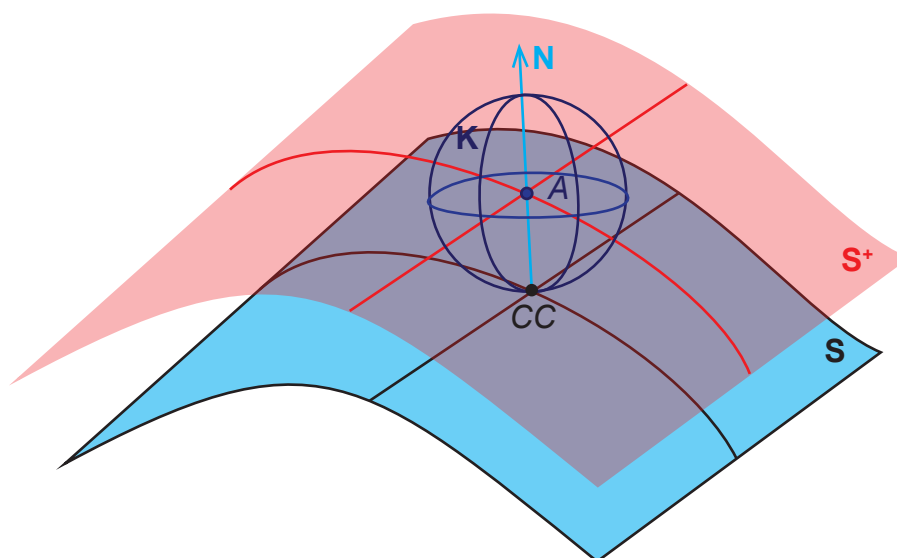
Souvislá interpolace není vyžadována u všech typů pětiosých obrábění. Některé stroje tak nabízejí např. 3 + 2 indexované obrábění, které probíhá ve více osách, ne však souvisle. Dochází tak ke kombinaci pohybů, kde dvě rotační osy slouží k naklápění obrobku do různých poloh a zároveň je prováděno tříosé frézování.

Pětiosé obrábění umožňuje výrobu velmi komplexních dílů. Proto se používá obzvláště, např. v leteckém a energetickém průmyslu nebo i k výrobě forem.

Výhodou pětiosého souvislého obrábění je např. možnost obrábění velmi složitých tvarových dílců a omezení nutnosti znovu upínání obrobků, což může vést k vyšší produktivitě a přesnosti výroby.

Obrábět lze bodově, nebo bokem nástroje. Bodové obrábění např. kulovou frézou umožňuje obrábění téměř libovolně složitých dílců. Z geometrického hlediska se jedná o generování obalové plochy, kde tvořící plocha je nástroj, který je v každém okamžiku v kontaktu s obalovou plochou právě v jediném bodě. V tomto kontaktním bodě  $CC$  existuje společná tečná rovina a normálový vektor  $\mathbf{N}$  obalové plochy  $\mathbf{S}$ , procházející středem  $A$  kulové plochy (reprezentující nástroj)  $\mathbf{K}$ . Pro každý kontaktní bod tak dostáváme polohu středu kulové plochy. Tyto středy tvoří ekvidistantní plochu  $\mathbf{S}^+$  k ploše  $\mathbf{S}$ , viz obr. 3.12 (Linkeová, 2009).

Při obrábění bokem nástroje dochází k dotyku mezi nástrojem a obrobkem podél charakteristiky  $c$ , viz obr. 2.3. Osa nástroje obvykle není polohována vůči trajektorii. Nástrojem mohou být různé tvarové frézy obecného rotačního tvaru, nebo např. toroidní fréza, viz obr. 2.2.



Obrázek 3.12: Bodové obrábění

# 4. Experiment

V této části práce je popsán experiment, jehož cílem je dokázat vliv matematické interpretace CAD modelu na výpočet CL dat a na průběh výroby.

Nejprve jsou v kap. 4.1 uvedena použitá zařízení a software, následuje představení vybraného dílu, jehož segment je v kap. 4.3 upravován. Dále v kap. 4.4.1, je popsána úprava celého dílu. Výsledky úprav jsou uvedeny v závěrech těchto kapitol.

## 4.1 Použité zařízení a software

Pro opravu CAD modelu je dále použit software Rhinoceros, který umožňuje analýzu pomocí grafu křivosti a zebry. Důležitou vlastností tohoto programu je také to, že umožňuje zobrazení řídicích bodů a disponuje dále popsanými funkcemi.

Pro vytvoření NC dat je použit CAM software Siemens NX 12. Dále je popsáno nastavení jednotlivých parametrů v tomto programu. NC data jsou generována pro řídicí systém HEIDENHAIN TNC640, kterým disponuje multifunkční centrum MCU 700 VT-5X od společnosti KOVOSVIT MAS Machine Tools, a.s., viz obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Frézka MCU700VT-5AX (KOVOSVIT MAS, 2021)

Toto multifunkční centrum je ve spolupráci s Ústavem výrobních strojů a řízení Fakulty strojní ČVUT v Praze (RCMT) v experimentu použito pro výrobu zkušebních segmentů. Disponuje pracovním prostorem o rozměrech X/Y/Z - 700/820/550 mm a je vybaveno vřetenem o rychlosti 24 tis. ot/min. Testovací

segmenty jsou vyrobeny z hliníkové slitiny EN AW 7075 a obráběny nástrojem značky ISCAR.

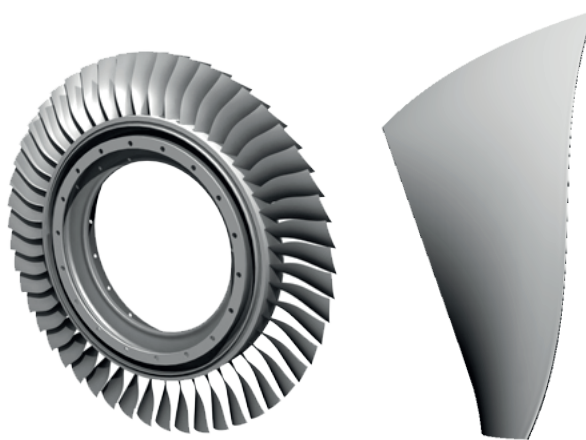
Generování drah nástroje v CAM softwaru NX 12 je provedeno na počítači s parametry, viz tab. 4.1 a simulace obrábění v softwarovém nástroji MillVis, ve kterém je reprezentace virtuálního dvojčete výše uvedeného stroje.

<b>Název operačního systému</b>	Microsoft Windows 10 Home
<b>Typ systému</b>	x64-based PC
<b>Procesor</b>	AMD Ryzen 5 3500U, 2100 Mhz
<b>Grafická karta</b>	Radeon Vega Mobile Gfx
<b>Počet jader</b>	4
<b>Počet logických procesorů</b>	8
<b>RAM</b>	8 GB

Tabulka 4.1: Parametry PC

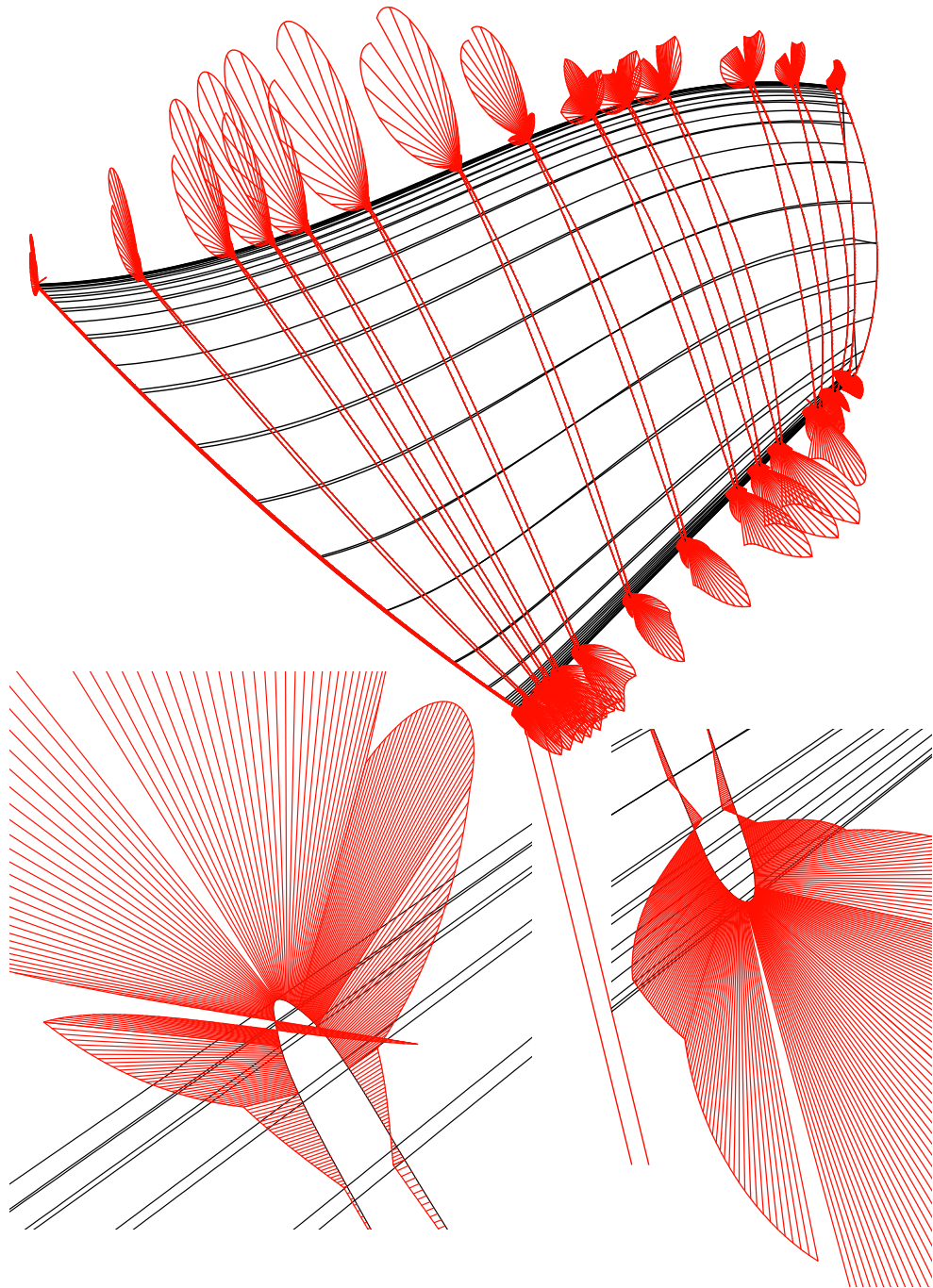
## 4.2 Blisk lopatka

Optimalizovanou součástí tohoto experimentu je Blisk lopatka, viz obr. 4.2, jejíž použití nalezneme u lopátkových kol v letectví.



Obrázek 4.2: Model lopátkového kola a jedné lopatky (Technicut, 2021)

Následující obr. 4.3 zobrazuje graf křivosti Blisk lopatky. Na grafu jsou patrná místa s nedostatečnou spojitostí ploch. Jsou to místa, kde dochází k napojení dvou plátů. Je zde zřejmá spojitost  $G^0$ , což je značně nedostačující a je potřeba dosáhnout alespoň  $G^3$  spojitosti. V následujících kapitolách je uveden postup úpravy těchto ploch.

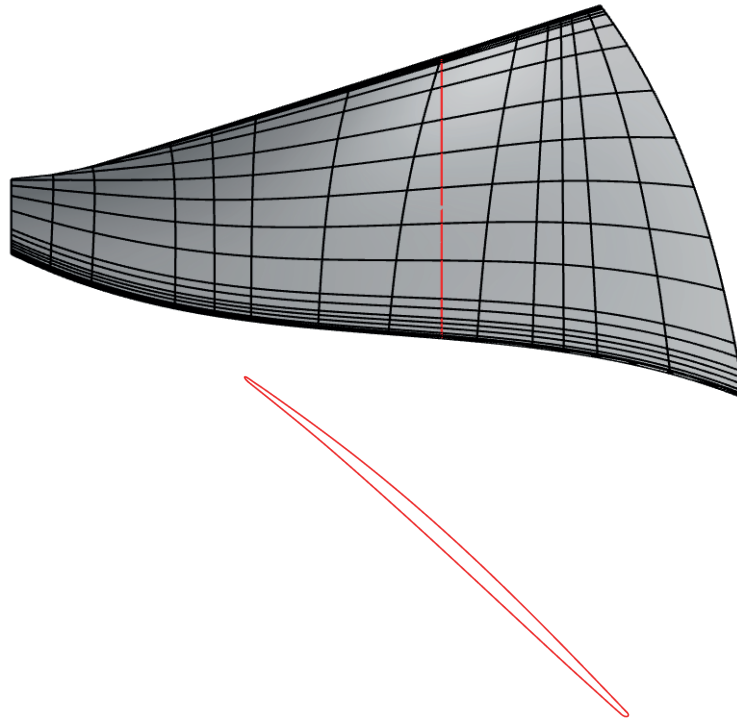


Obrázek 4.3: Graf křivosti Blisk lopatky



## 4.3 Segment lopatky

Nejprve je testován a upravován výřez z nejproblematictějšího místa Blisk lopatky, viz obr. 4.4. V kap. 4.3.1 je uveden původní model vytvořený z výřezu lopatky, v následující kap. 4.3.2 popisuje postup úpravy původního segmentu.



Obrázek 4.4: Výřez z Blisk lopatky

Tyto segmenty jsou následně exportovány do STEP formátu a prostřednictvím CAM softwaru NX 12 jsou vygenerována CL data pro následující nastavení:

- bodové obrábění po šroubovici
- dokončování
- nástroj - kulová fréza s průměrem 5 mm
- úhel naklonění nástroje 15°

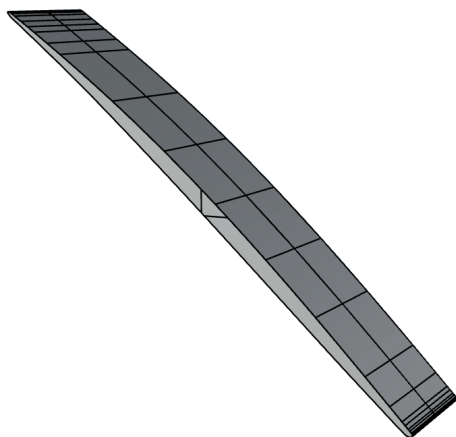
V kap. 4.3.3 je provedeno porovnání vlivu úpravy matematického popisu výřezu z lopatky na trajektorii dráhy nástroje a hustotu rozložení CL bodů.

### 4.3.1 Původní segment

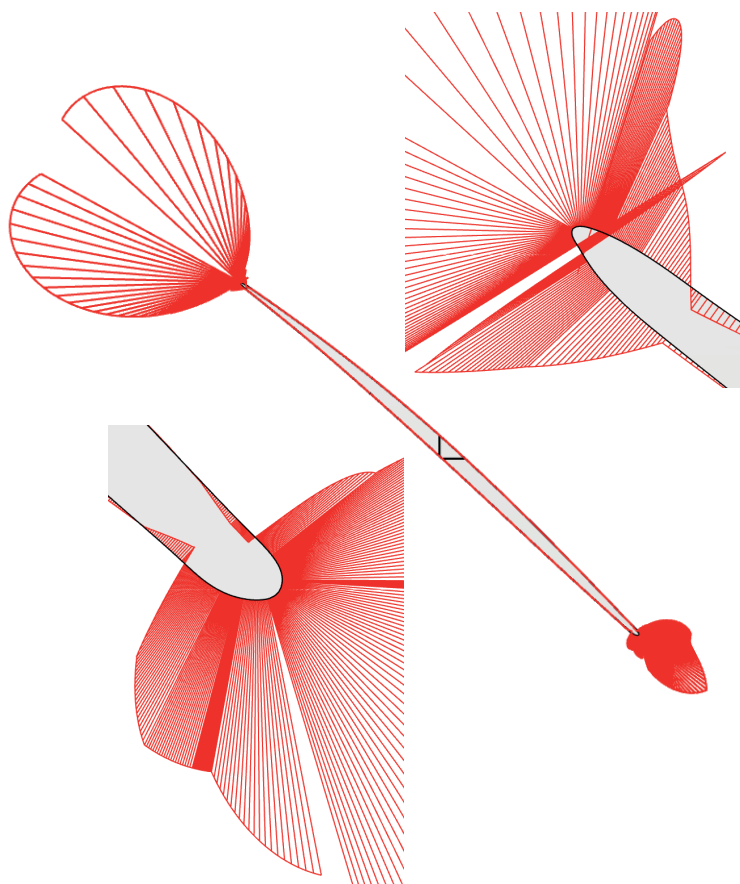
Testovaná plocha je přímkovou plochou vytvořenou pomocí tažení profilu lopatky po přímce, viz obr. 4.5.

Graf křivosti na obr. 4.6 odhaluje místa s výskytem spojitostních chyb. Jsou zde viditelná místa s  $G^0$ ,  $G^1$  a  $G^2$  spojitostí. Jak již bylo zmíněno v kap. 3.3, největší problém nastává při skokové změně křivosti. Úkolem je tedy vytvořit plochu s  $G^3$  spojitostí, s minimálními překmity křivosti a s pozvolnou změnou křivosti.





Obrázek 4.5: Neopravený segment lopatky



Obrázek 4.6: Graf křivosti neopraveného segmentu lopatky

### 4.3.2 Postup úpravy segmentu

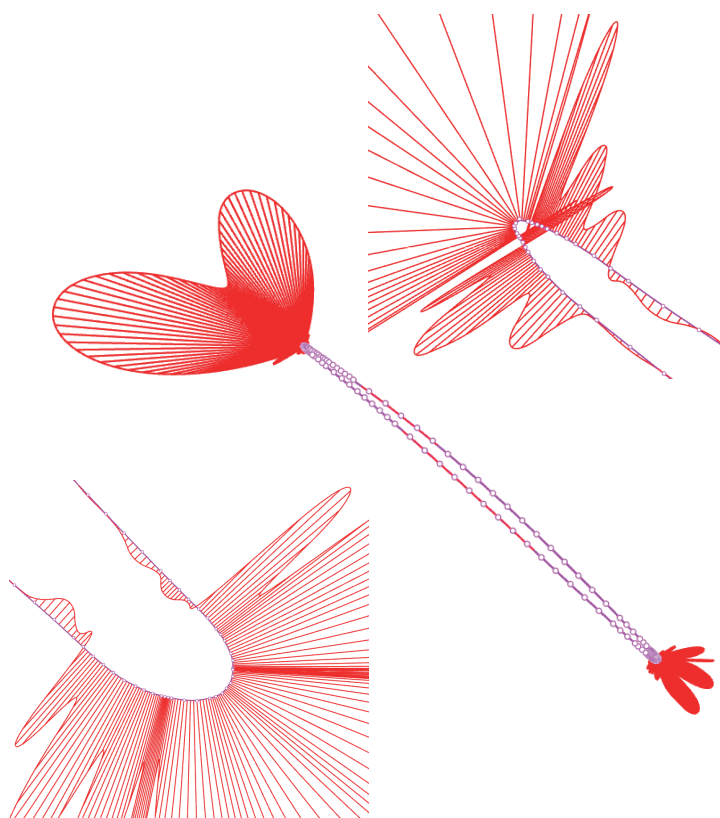
Oprava segmentu probíhá na rovinné křivce, ze které je následně vytvořena přímková plocha, jako v předchozím případě.

Cílem opravy je dosáhnout v každém místě křivky minimálně  $G^3$  spojitosti. Z tohoto důvodu je použita křivka 4. stupně, která i v místech, kde se nacházejí uzly, má spojitost  $G^3$ , pokud je násobnost uzlu rovna jedné.

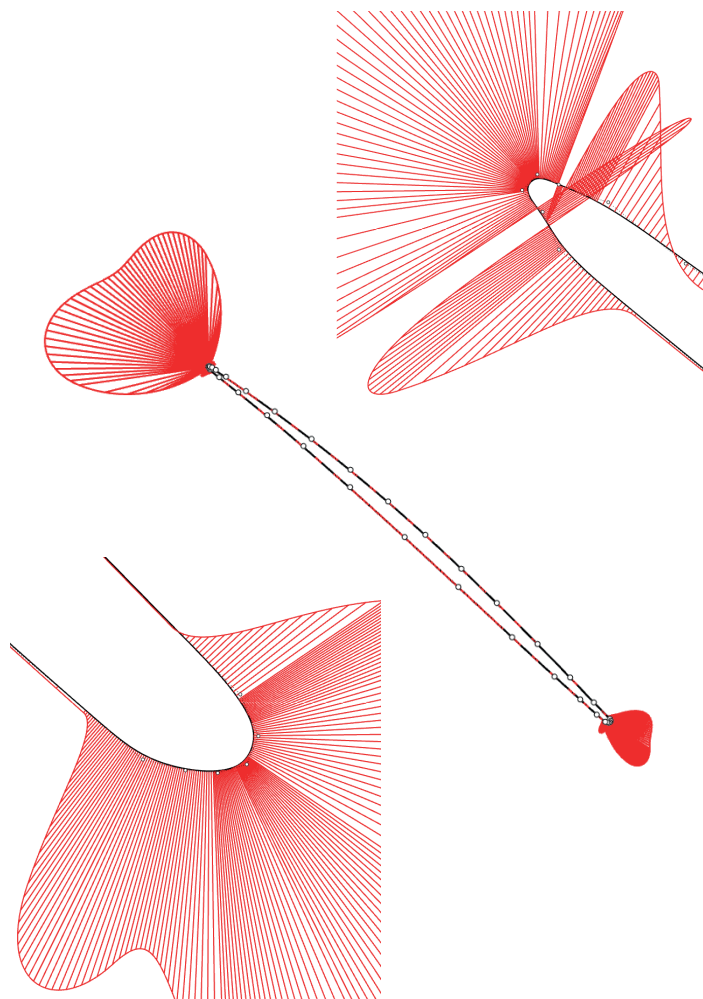
Nejprve je potřeba odstranit místo s  $G^0$  spojitostí, viz obr. 4.6. To je provedeno změnou stupně křivky, která je realizována zvolením příkazu *Křivka zadávaná řídicími body*, zvolením křivky 4. stupně a navolením původních řídicích bodů, které jsou zobrazeny pomocí příkazu *Zobrazit řídicí body objektu*.

Příkaz *Křivka zadávaná řídicími body* po zvolení požadovaného stupně křivky a vybrání poloh řídicích bodů vypočítá a vykreslí B-spline křivku požadovaného stupně. Pokud je požadována křivka uzavřená, stačí vybrat totožný počáteční a koncový bod, zbylé řídicí body, které se musí zopakovat, příkaz sám doplní.

Takto proložený segment, viz obr. 4.7 má ovšem velkou tvarovou odchylku. Ta je později odstraněna upravením poloh jednotlivých řídicích bodů, případně přidáním dalších. Nejprve je však potřeba zredukovat stávající počet řídicích bodů. To je provedeno příkazem *Proložit křivky*. Tento příkaz po vybrání objektu a zadání maximální odchylky od původního tvaru proloží křivku tak, aby obsahovala co nejmenší množství řídicích bodů a splňovala zadanou podmínku. Po zadání maximální odchylky 0,01 mm je křivka zredukována z původních 152 na 40 řídicích bodů, viz obr. 4.8.

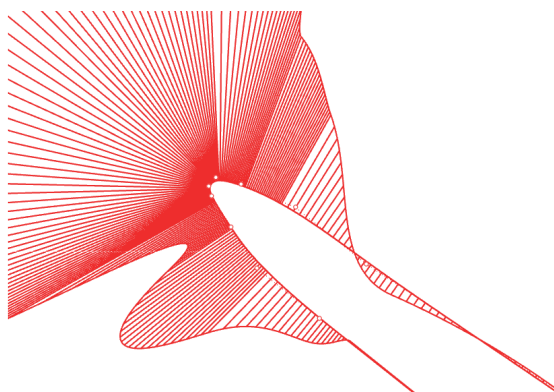


Obrázek 4.7: Graf křivosti ručně proloženého výřezu z lopatky

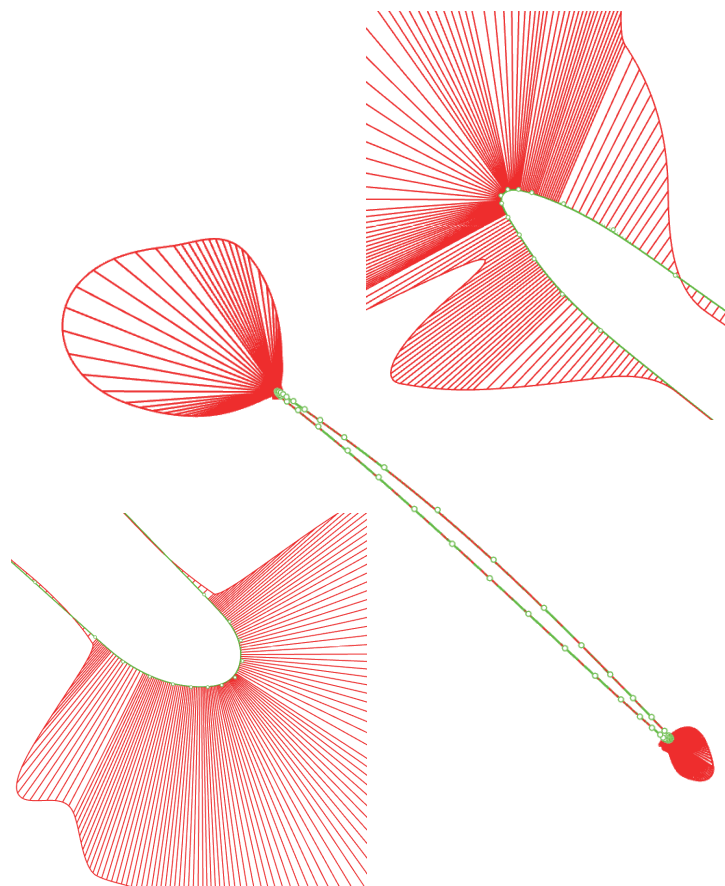


Obrázek 4.8: Graf křivosti proloženého segmentu s nastavením odchylky 0,01 mm

Dále je tvar křivky ručně upraven přemístěním a přidáním řídicích bodů, viz obr. 4.9 kvůli zlepšení průběhu grafu křivosti, viz detail na obr. 4.8 vpravo nahoře. Následně je křivka ještě jednou proložena s tolerancí 0,001 mm, pro zredukování řídicích bodů a zlepšení průběhu grafu křivosti, viz obr. 4.10 opravené křivky s grafem křivosti. Reálná maximální odchylka od původního segmentu je nyní 0,005 mm a počet řídicích bodů je 58.



Obrázek 4.9: Graf křivosti detailu ručně opravené části lopatky



Obrázek 4.10: Graf křivosti opraveného segmentu lopatky

### 4.3.3 Porovnání původního a upraveného segmentu

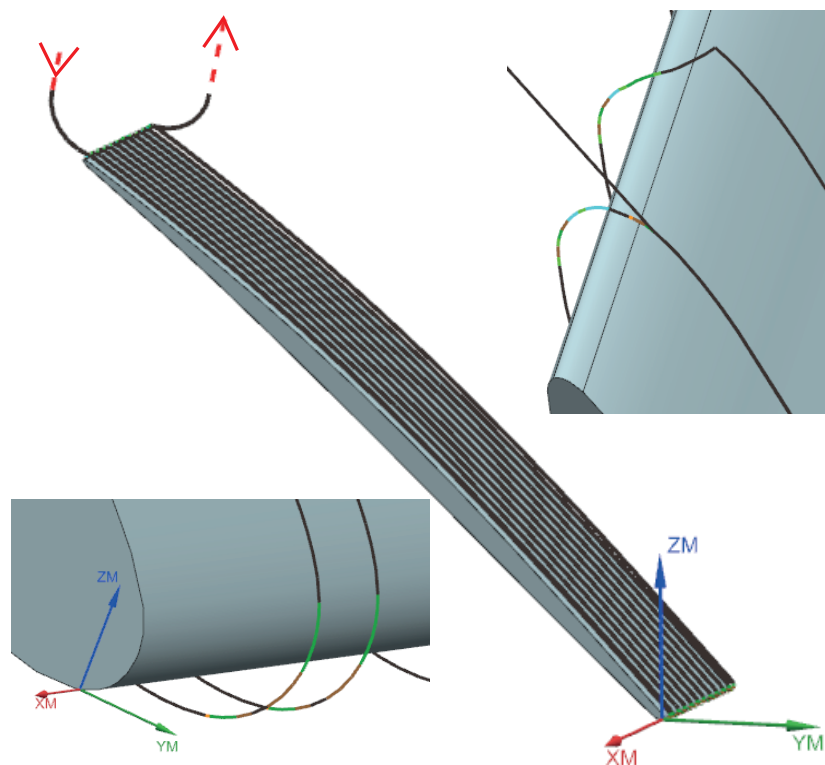
Z obr. 4.6 a 4.10 je viditelné značné zlepšení průběhu křivosti podél profilu lopatky. U upraveného segmentu jsou odstraněna místa s nízkou spojitostí. Podél celého profilu je nyní plocha  $G^3$  spojitá.

Na původním testovacím segmentu jsou vytvořena CL data, viz obr. 4.11. Povšimněme si detailů, kde je spojitost ploch  $G^0$ . V okolí tohoto napojení ploch jsou CL body nerovnoměrně rozmístěny a trajektorie nástroje dokonce v jednom místě prudce mění směr. Hustota rozložení CL bodů je barevně odlišena podle obr. 3.5, kde jednotlivé barvy znázorňují vzdálenost od dalšího bodu.

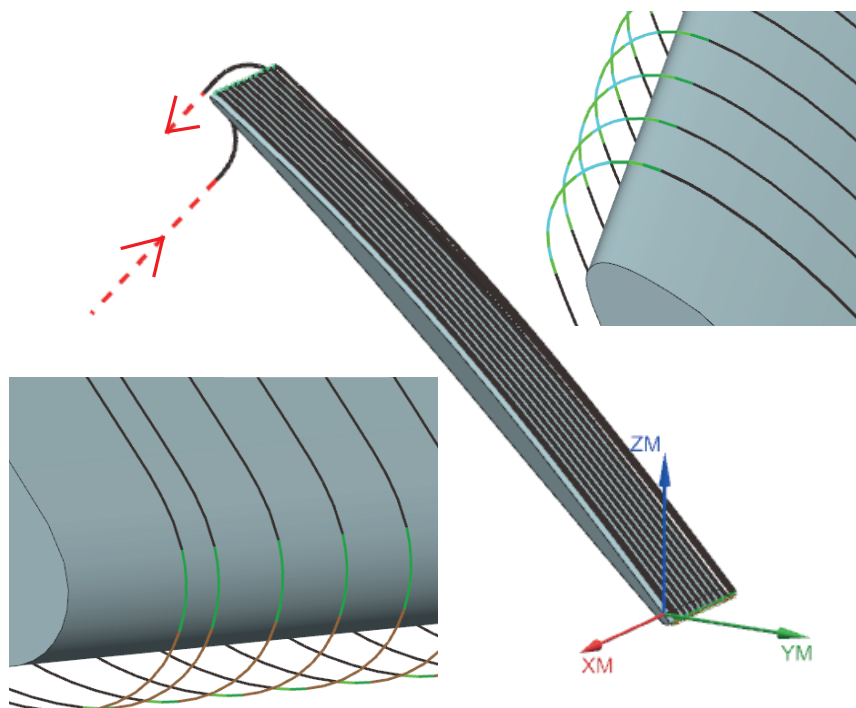
Tyto chyby jsou přenášeny do dalších přípravných fází výroby a ovlivňují tak samotný průběh výroby. Doba obrábění tohoto dílu při nastavení offsetu od plochy 0,5 mm je 5 min 7 s, při nastavení offsetu 0 mm potom 5 min 16 s.

Na obr. 4.12 jsou znázorněna CL data pro upravený segment. Změna hustoty rozložení CL bodů je plynulejší a trajektorie dráhy nástroje není zalomená jako u původního segmentu.

Díky tomuto zlepšení CL dat je pohyb nástroje plynulejší, kvalita obrobenej plochy vyšší a doba obrábění kratší. Upravený segment se při nastavení offsetu od plochy 0,5 mm obráběl 4 min 46 s, stejně tak při nastavení offsetu 0 mm.



Obrázek 4.11: CL data neopraveného segmentu

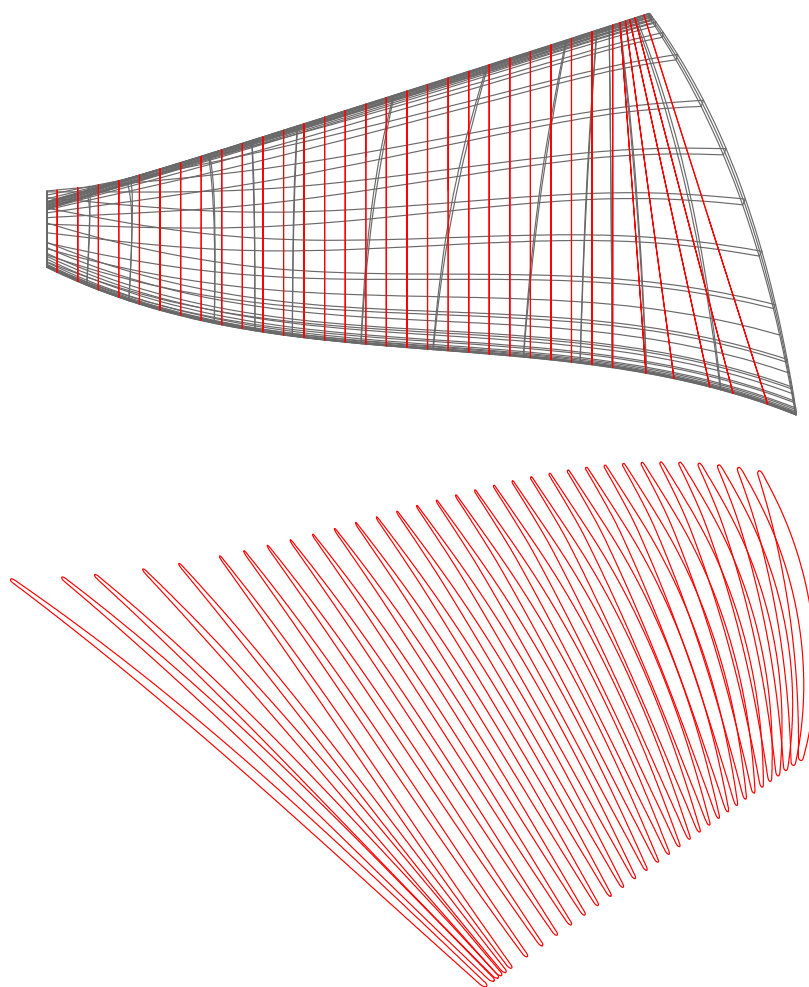


Obrázek 4.12: CL data upraveného segmentu

## 4.4 Celá lopatka

### 4.4.1 Postup úpravy lopatky

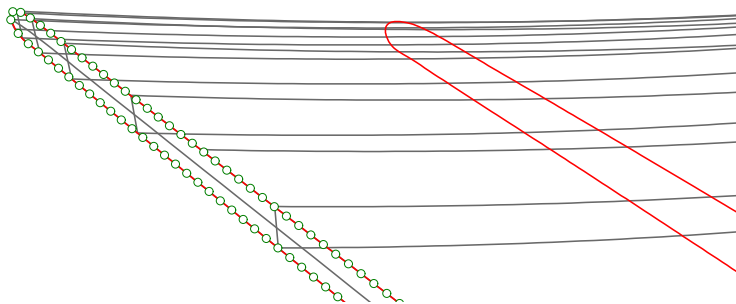
Pro zlepšení původního modelu lopatky je potřeba tento model přemodelovat. Nejprve je definována síť křivek, pomocí které je vytvořena plocha lopatky. Při tvorbě jednotlivých křivek je postupováno obdobným způsobem, jako v případě segmentu lopatky. Jsou tedy opraveny jednotlivé křivky tvořené průnikem roviny a lopatky. Tyto křivky jsou vytvořeny příkazem *Řez* v programu Rhinoceros. Křivky jsou následně rekonstruovány s cílem eliminovat místa s  $G^2$  spojitostí a nižší příkazem *Rekonstruovat* s nastavením 500 řídicích bodů a 4. stupeň křivky. Toto množství řídicích bodů je voleno z důvodu co nejpřesnějšího zachování tvaru křivky v místech s nejvyšší křivostí. Tyto křivky jsou zobrazeny na obr. 4.13.



Obrázek 4.13: Vytvořené a zrekonstruované řezy

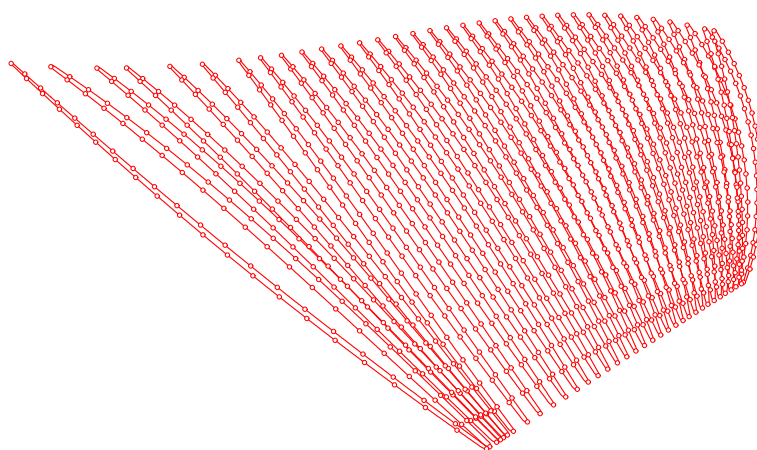
Síť křivek je tvořena křivkami ve směru  $u$  a  $v$ . Předpokládejme, že předchozí křivky jsou ve směru  $u$ . V tomto směru ještě chybí hraniční křivky, které jsou však prostorové. Hraniční křivky jsou vytvořeny pomocí interpolace bodů rozmístěných podél hran okrajů lopatky, viz obr. 4.14.



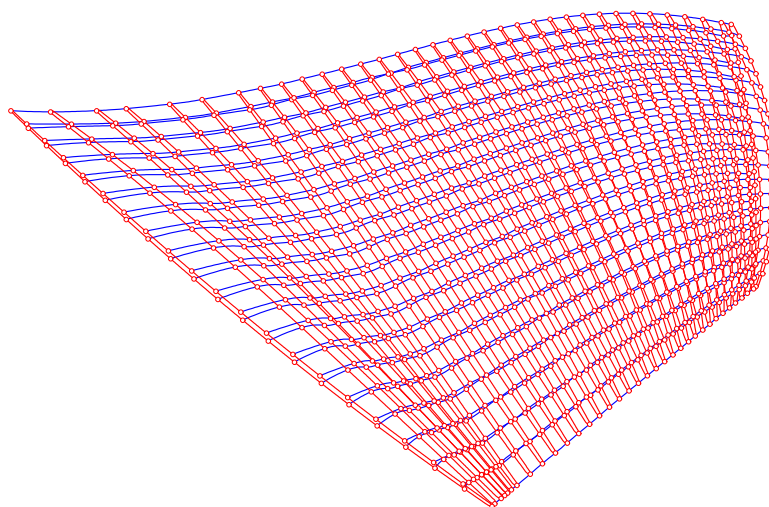


Obrázek 4.14: Interpolovaný okraj lopatky

Každá křivka ve směru  $u$  je následně rozdělena na stejný počet segmentů pomocí bodů, viz obr. 4.15. Body jsou dále interpolovány křivkami 4. stupně ve směru  $v$ , viz obr. 4.16.

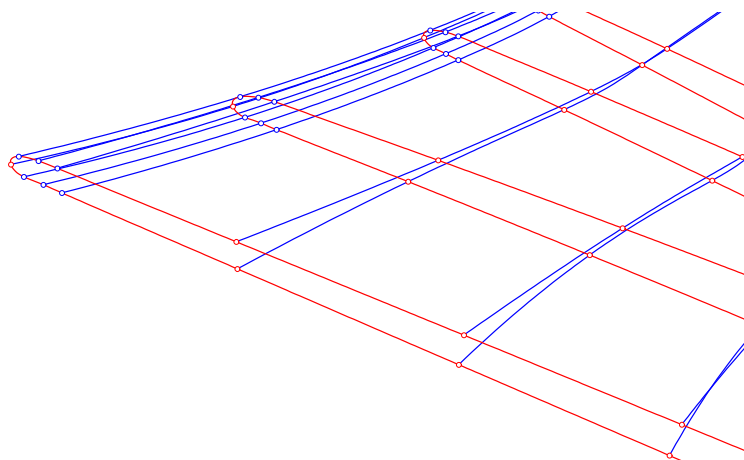


Obrázek 4.15: Křivky ve směru  $u$  rozdělené na segmenty



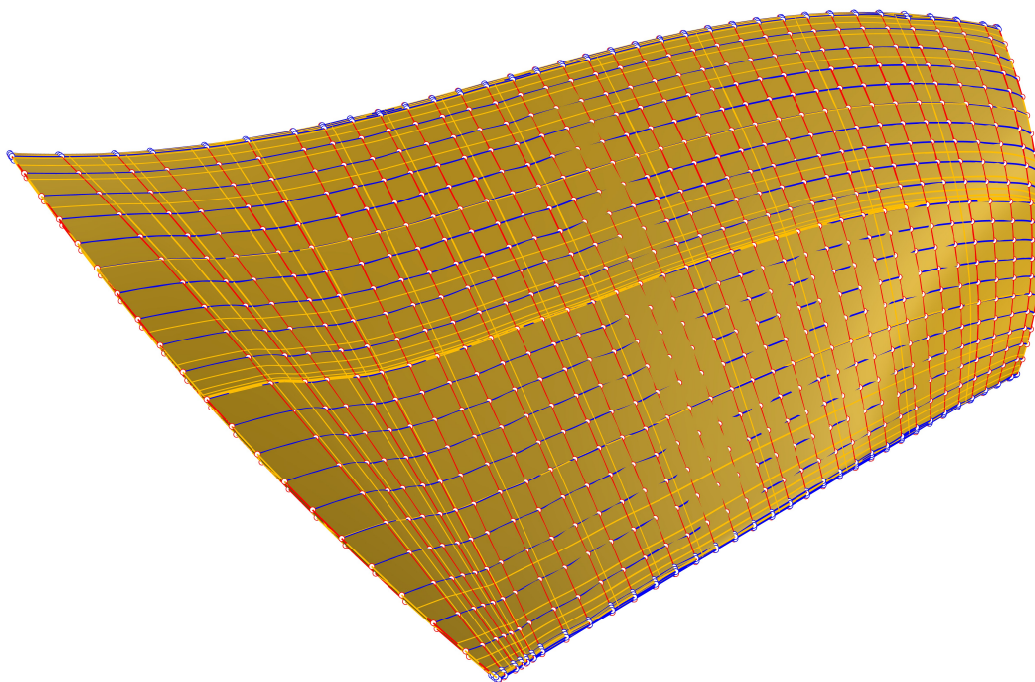
Obrázek 4.16: Vytvořená síť pomocí interpolačních křivek

Takto vytvořená síť však není dostačující. V místech s vysokým zakřivením je taková síť příliš hrubá a výsledná plocha nemá požadovaný tvar. Je tak potřeba síť v problematických místech zjemnit přidáním bodů, které jsou následně interpolovány křivkami 4. stupně, viz obr. 4.17.



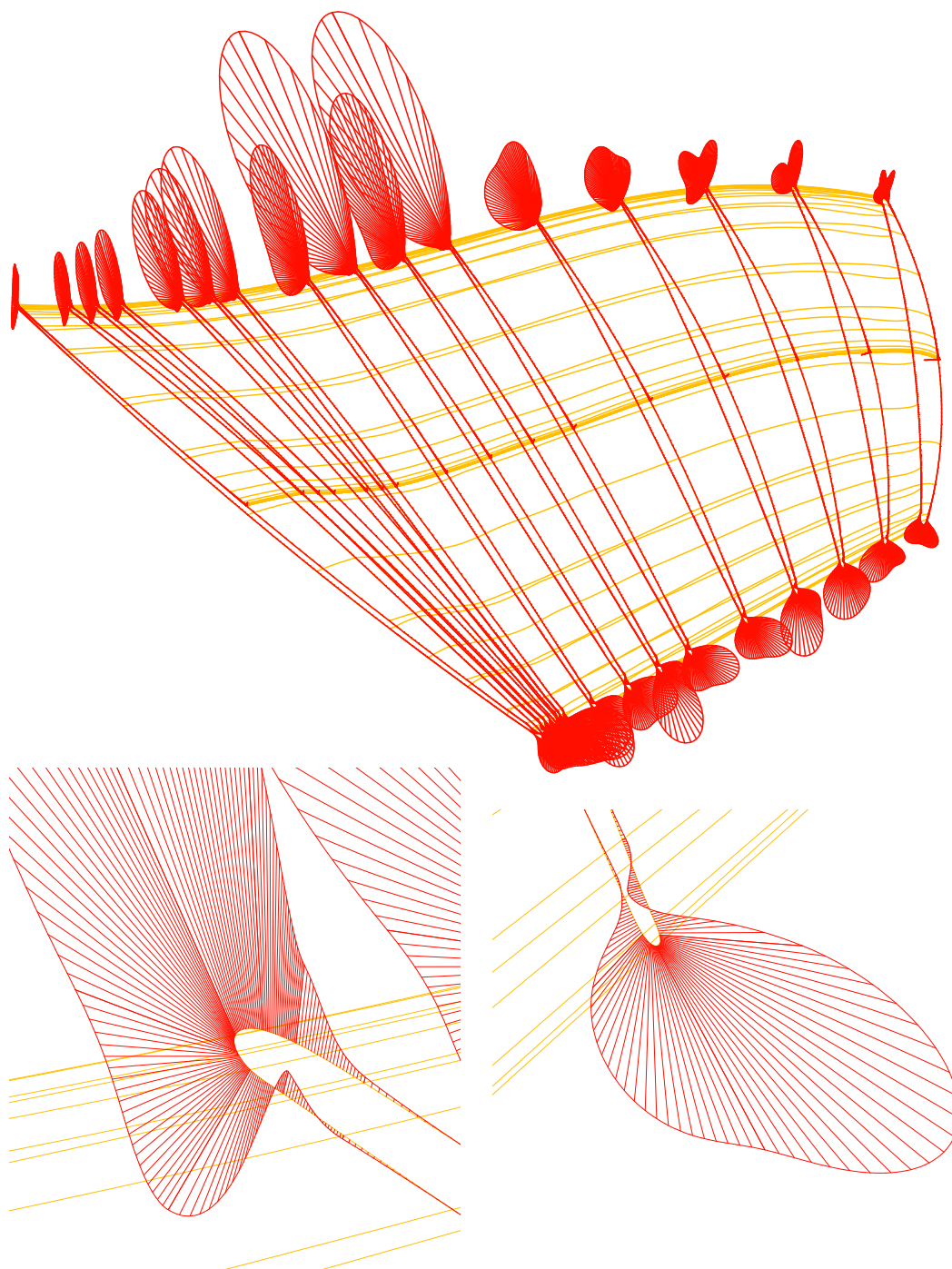
Obrázek 4.17: Doplněné interpolační křivky v místech s vysokou křivostí

Pomocí příkazu *Plocha ze sítě křivek* je vytvořena plocha. Tento příkaz vytvoří plochu ze sítě křivek ve směru  $u$  a  $v$ , přičemž každá křivka ve směru  $u$  musí jedenkrát protínat křivku ve směru  $v$  a naopak. Takto vytvořená plocha je dále zjednodušena kombinací příkazů *Rekonstruovat* a *Proložit plochu*, viz obr. 4.18. Nyní plocha obsahuje 53 řídicích bodů ve směru  $u$  a 19 řídicích bodů ve směru  $v$ . Na obr. 4.19 je zobrazen graf křivosti upraveného modelu lopatky.



Obrázek 4.18: Vytvořená a proložená plocha lopatky





Obrázek 4.19: Graf křivosti upraveného modelu lopatky

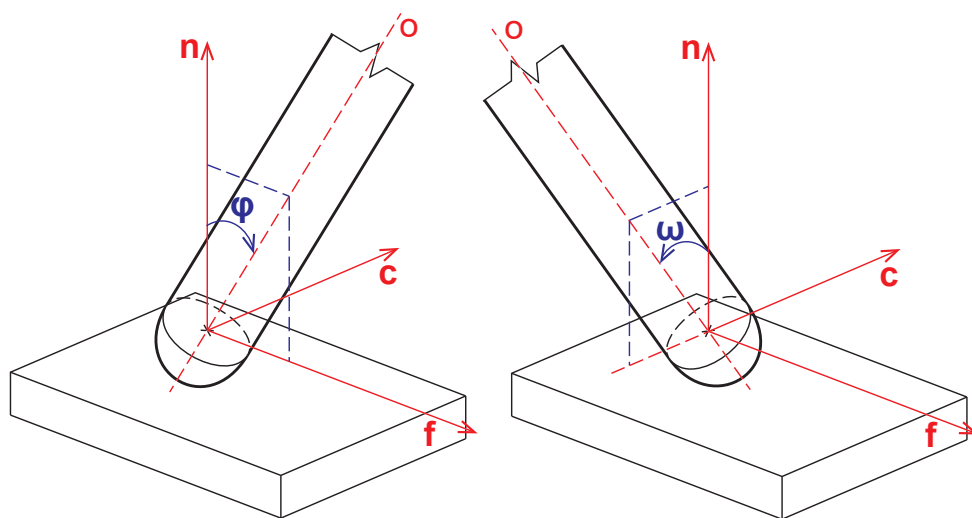
## 4.4.2 Porovnání původního a upraveného modelu lopatky

Z obr. 4.19 je patrné, že se podařilo odstranit místa s  $G^2$  spojitostí a nižší, viz obr. 4.3. Nově vytvořená plocha je stupně  $4 \times 4$  se spojitostí  $G^3$  a vyšší v libovolném bodě ležícím na ploše.

Na detailu obr. 4.19 jsou stále viditelné překmity, ne však extrémní jako na obr. 4.3. Překmitů se však není možné zbavit úplně, aniž by byla změněna geometrie dílu nad rámeček povolené odchylky.

Čas generování drah nástroje v CAM softwaru, simulace obrábění v CAM a maximální odchylky jsou uvedeny pro různá nastavení vstupních parametrů v NX 12. Jako první je určeno, zda program provádí kontrolu kolizí. Dalším parametrem je počet přejezdů, kterým se rozumí, kolik závitů nástroj kolem obrobku opíše. Tolerance dráhy nástroje potom určuje maximální povolenou odchylku pro generovanou dráhu nástroje. Osa nástroje je polohována dle nastavení úhlů naklonění a vlečení, viz obr. 4.20, kde  $\varphi$  je úhel vlečení,  $\omega$  úhel naklonění,  $o$  osa nástroje,  $c$  směr příčného posuvu nástroje,  $f$  směr obrábění a  $n$  normálový vektor plochy. A posledním nastavovaným parametrem je maximální povolená vzdálenost mezi jednotlivými CL body.

Úhly naklonění a vlečení mají nezanedbatelný vliv na kvalitu obrobeného povrchu. Jejich optimalizace v průběhu obrábění s cílem zvýšení plynulosti pohybu nástroje a tím i jeho životnosti je popsána v (Stejskal a kol., 2021).



Obrázek 4.20: Úhel naklonění a vlečení nástroje

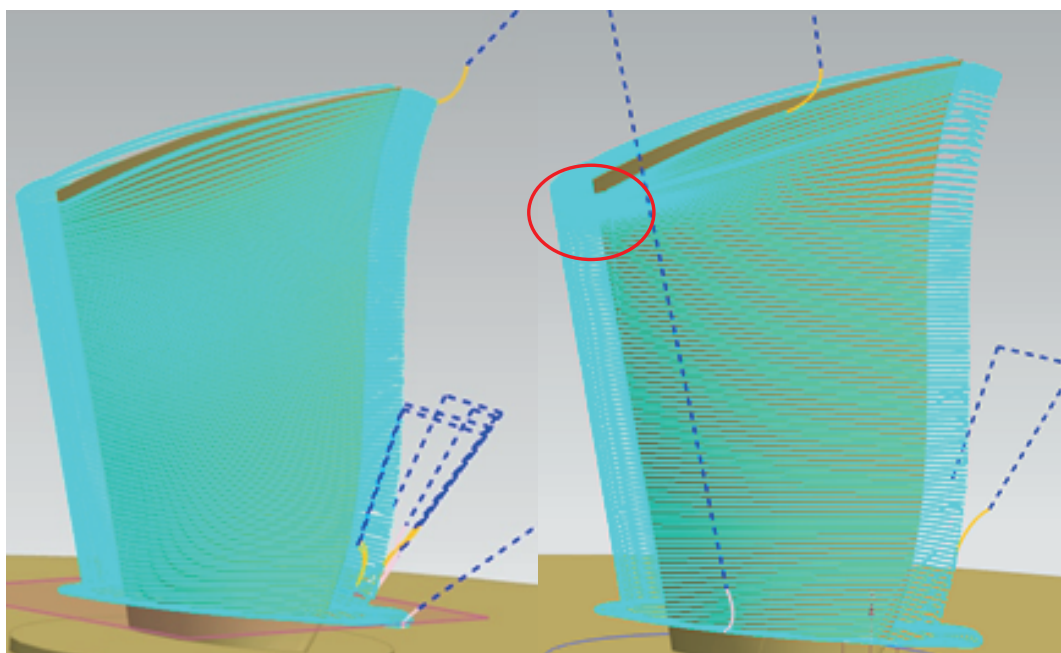
Tab. 4.2 zobrazuje výsledky pro nastavení parametrů:

- Kontrola kolizí: ANO
- Počet přejezdů: 110
- Tolerance dráhy nástroje:  $\pm 0,001$  mm
- Úhel vlečení =  $0^\circ$   
Úhel naklonění =  $65^\circ$
- Max. vzdálenost mezi CL body: 30% nástroje

	Generování drah [min/s]	Simulace obrábění [min/s]	Odchyly [mm]
<b>Původní</b>	16:09	44:04	min: -0,1 max: 0,072
<b>Upravený</b>	10:07	41:26	min: -0,067 max: 0,037

Tabulka 4.2: Výsledky pro nastavení č. 1

Pro toto nastavení jsou vygenerované dráhy nástroje zobrazeny na obr.4.21. Model vlevo je původní a model vpravo upravený. Tmavě modrá čárkovaná čára představuje nájezdy a výjezdy nástroje. Červeně zakroužkované místo na upraveném modelu ukazuje místo, kde dochází pro všechna nastavení ke zhuštění drah nástroje. Toto zhuštění je způsobeno parametrizací obráběné plochy. Nejedná se o nijak závažný problém, avšak vyřešením tohoto nedostatku by bylo možné dosáhnout ještě kratších časů, což však není primárním cílem této práce.



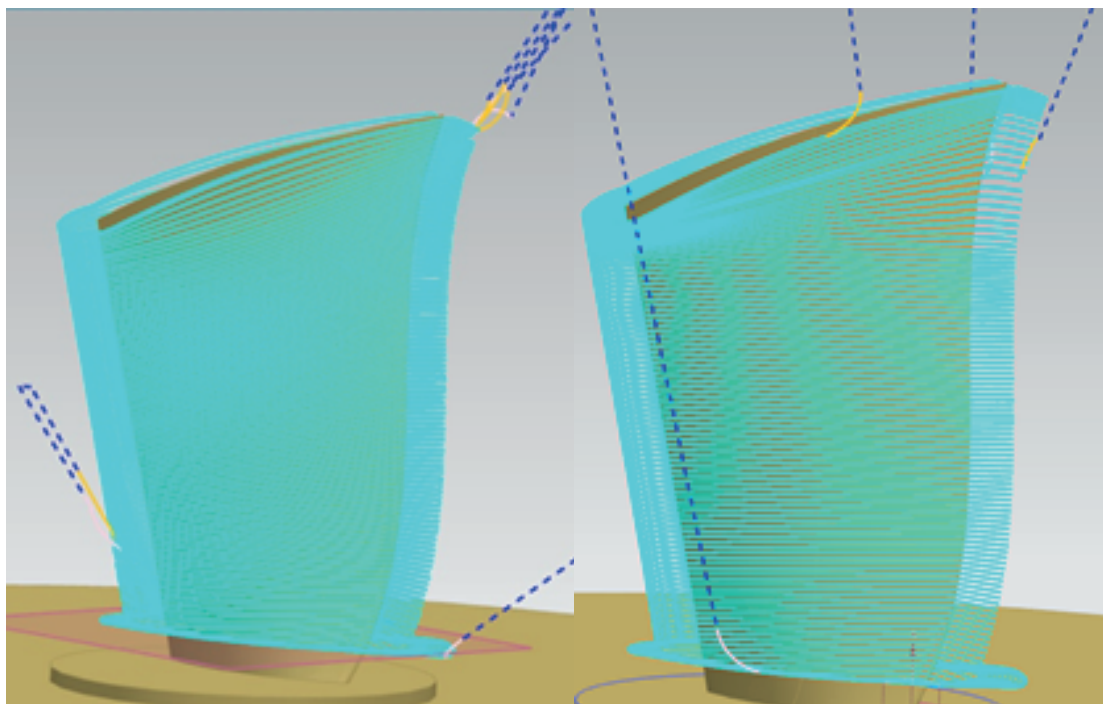
Obrázek 4.21: Dráhy nástroje pro nastavení č. 1

Tab. 4.3 zobrazuje výsledky pro nastavení parametrů:

- Kontrola kolizí: ANO
- Počet přejezdů: 110
- Tolerance dráhy nástroje:  $\pm 0,01$  mm
- Úhel vlečení =  $0^\circ$   
Úhel naklopení =  $65^\circ$
- Max. vzdálenost mezi CL body: 30% nástroje

	Generování drah [min/s]	Simulace obrábění [min/s]	Odchyšky [mm]
<b>Původní</b>	01:46	43:56	min: -0,094 max: 0,065
<b>Upravený</b>	01:10	41:26	min: -0,059 max: 0,037

Tabulka 4.3: Výsledky pro nastavení č. 2



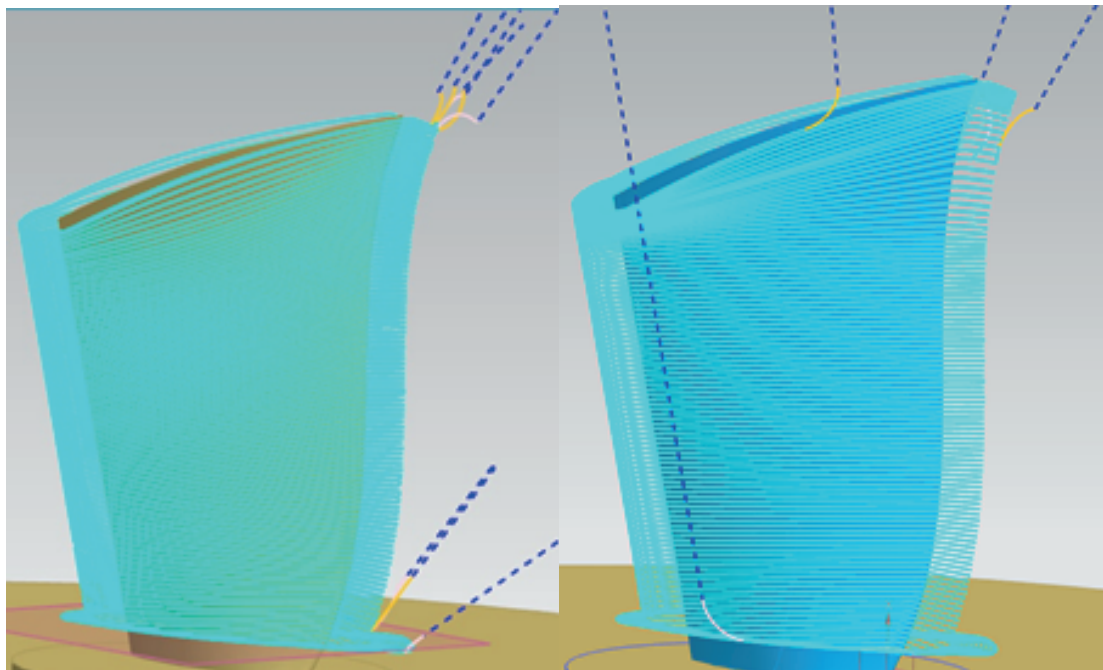
Obrázek 4.22: Dráhy nástroje pro nastavení č. 2

Tab. 4.4 zobrazuje výsledky pro nastavení parametrů:

- Kontrola kolizí: ANO
- Počet přejezdů: 110
- Tolerance dráhy nástroje:  $\pm 0,01$  mm
- Úhel vlečení =  $-2,3^\circ$   
Úhel naklopení =  $65^\circ$
- Max. vzdálenost mezi CL body: 30% nástroje

	Generování drah [min/s]	Simulace obrábění [min/s]	Odchyšky [mm]
<b>Původní</b>	01:36	43:52	min: -0,126 max: 0,07
<b>Upravený</b>	01:01	41:16	min: -0,06 max: 0,039

Tabulka 4.4: Výsledky pro nastavení č. 3



Obrázek 4.23: Dráhy nástroje pro nastavení č. 3

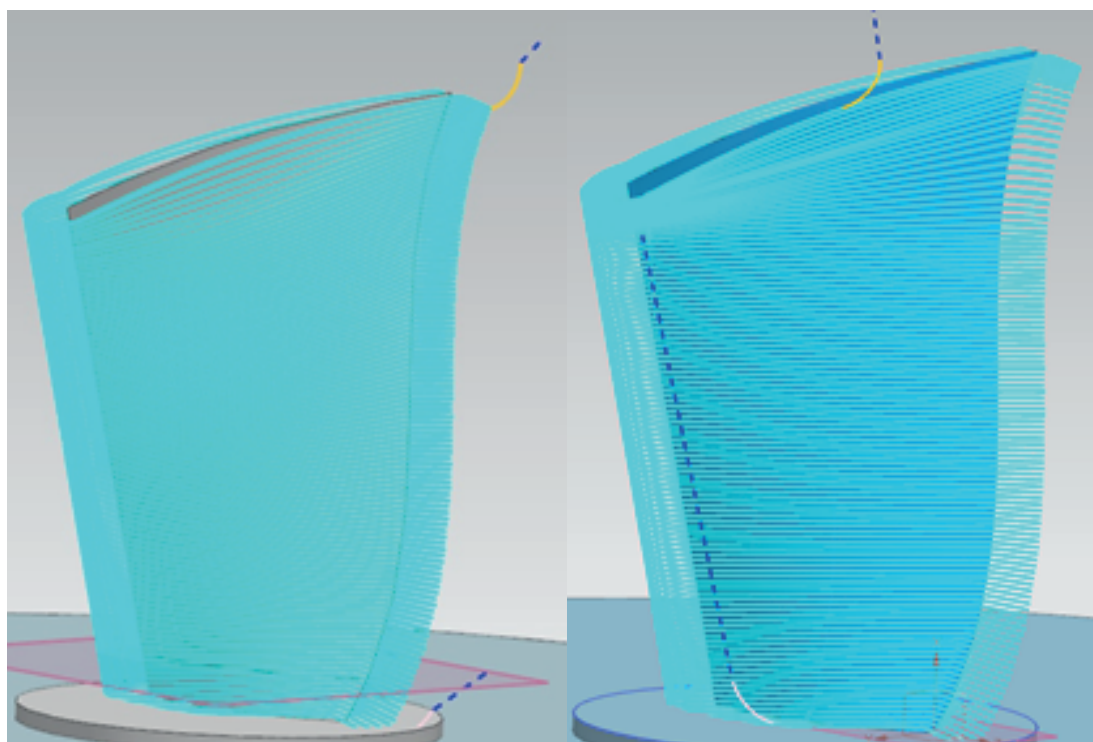
Tab. 4.5 zobrazuje výsledky pro nastavení parametrů:

- Kontrola kolizí: NE
- Počet přejezdů: 110
- Tolerance dráhy nástroje:  $\pm 0,01$  mm
- Úhel vlečení =  $0^\circ$   
Úhel naklopení =  $65^\circ$
- Max. vzdálenost mezi CL body: 30% nástroje

V tomto případě je doba generování drah nejkratší a zároveň lze na obr. 4.24 vidět jeden nájezd a výjezd nástroje pro původní i upravený segment. To je způsobeno tím, že kontrola kolizí a různých chyb je vypnuta. Díky tomu nemá nástroj důvod opouštět a znovu najíždět do řezu a celý proces výpočtu je tak dosti zjednodušen.

	Generování drah [min/s]	Simulace obrábění [min/s]	Odchytky [mm]
<b>Původní</b>	00:03	43:26	min: -0,073 max: 0,056
<b>Upravený</b>	00:02	40:44	min: -0,073 max: 0,041

Tabulka 4.5: Výsledky pro nastavení č. 4



Obrázek 4.24: Dráhy nástroje pro nastavení č. 4

Tab. 4.6 zobrazuje výsledky pro nastavení parametrů:

- Kontrola kolizí: ANO
- Počet přejezdů: 110
- Tolerance dráhy nástroje:  $\pm 0,01$  mm
- Úhel vlečení =  $-2,3^\circ$   
Úhel naklopení =  $65^\circ$
- Max. vzdálenost mezi CL body: 0,001 mm

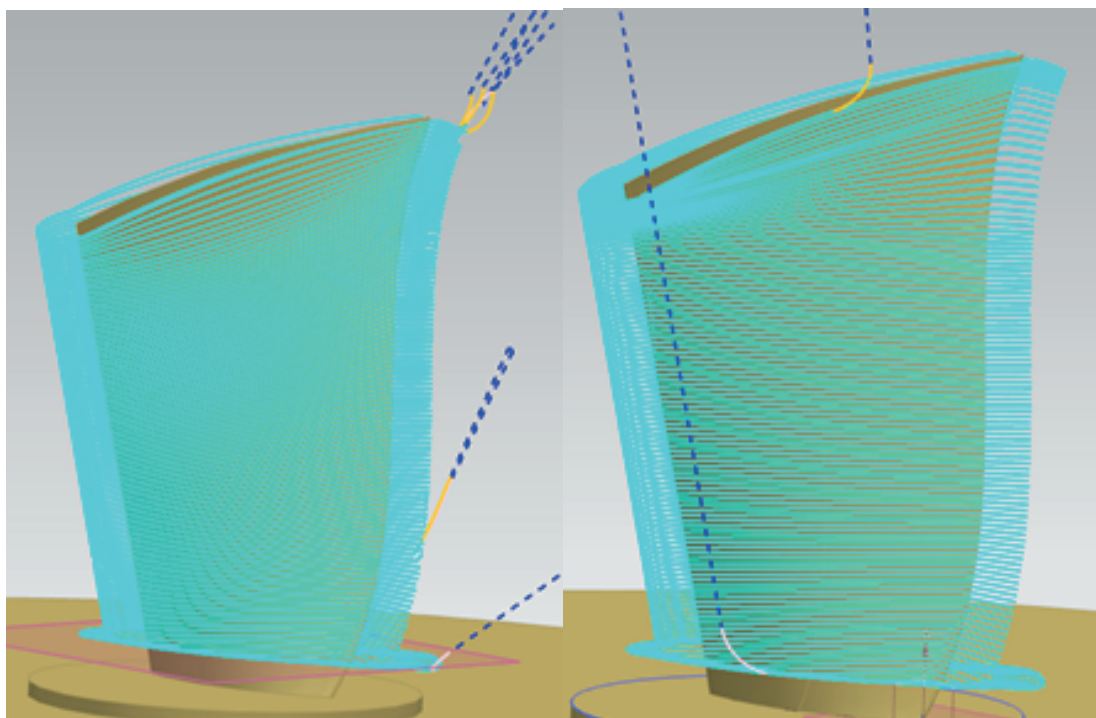
	<b>Generování drah</b> [min/s]	<b>Simulace obrábění</b> [min/s]	<b>Odchytky</b> [mm]
<b>Původní</b>	04:14	43:49	min: -0,074 max: 0,053
<b>Upravený</b>	03:10	41:12	min: -0,058 max: 0,043

Tabulka 4.6: Výsledky pro nastavení č. 5

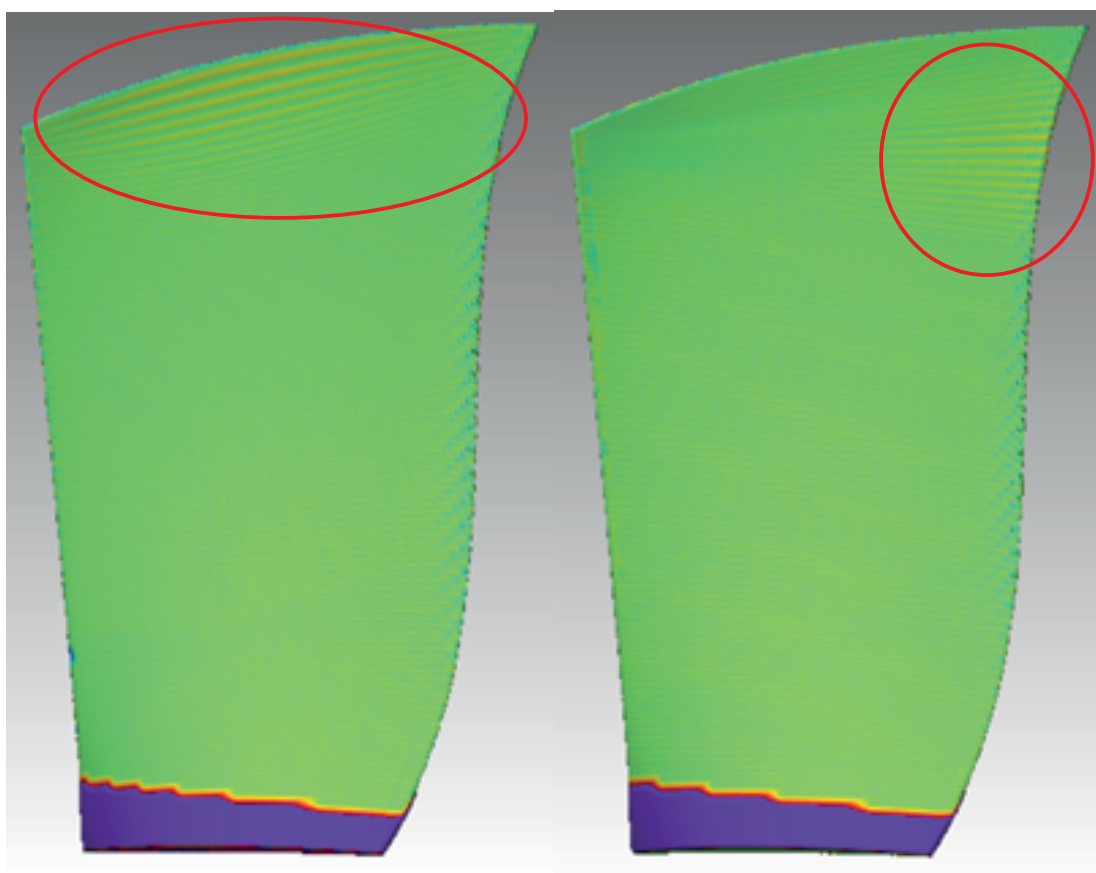
Nejlepších výsledků je dosaženo s nastavením č. 5. Z modelu na obr. 4.25 vpravo je vidět jeden výjezd a jeden nájezd nástroje. Tyto simulacemi zároveň ukazují, že nemalý vliv na vygenerovanou dráhu nástroje mají spolu s geometrií obráběné plochy i úhly naklopení a vlečení nástroje.

Obr. 4.26 zobrazuje rozložení odchylek vlevo původního a vpravo upraveného dílu z tab. 4.6. Červeně označená místa, jsou místa s nejvyššími odchylkami. Jedná se však o zanedbatelné odchylky, které jsou v povolené toleranci. Totožné rozložení maximálních odchylek mají i virtuálně obrobene díly pro předchozí nastavení dle tab. 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, proto zde tyto obr. nejsou uvedeny.





Obrázek 4.25: Dráhy nástroje pro nastavení č. 5



Obrázek 4.26: Odchylky dílů po virtuálním obrobění pro nastavení č. 5



# Závěr

Cílem práce bylo poukázat na velikost vlivu kvality geometrie CAD modelu na přípravné fáze a na samotné CNC obrábění. Bylo provedeno zkoumání vlivu geometrie na výpočet drah nástroje (CL dat), při kterém byly zjištěny vlastnosti ploch, které mohou významně ovlivnit tato CL data.

Úvodní kapitoly se věnovaly matematickému popisu křivek a ploch, jejich napojování a nástrojům pro analýzu těchto napojení. Dále byla věnována pozornost předvýrobní etapě CNC obrábění, obzvláště pak generování CL dat. Byl představen možný způsob jejich výpočtu a testována kvalita na Fobos kusu s různým matematickým popisem obráběné plochy. Výsledky testů potvrdily, že matematický popis obráběné plochy hraje významnou roli v generování dráhy nástroje.

## Vlivy geometrie

Problémy geometrie ploch spojené s CNC obráběním se týkají spíše tvarově složitějších dílů. U takových modelů mohou mít tyto vlastnosti přesah i mimo oblast CNC obrábění. Pokud je plocha tvořena z několika spojených ploch, může v okolí jejich spojení docházet ke zlomům v trajektorii nástroje. Prudká změna křivosti způsobuje nerovnoměrné rozložení CL dat a neplynulý pohyb nástroje.

Ideální geometrie obráběného dílu je taková, která je spojitá a má hladký průběh grafu křivosti s minimálními překmitými. Je to tedy plocha minimálně 4. stupně, alespoň s  $G^3$  spojitostí v libovolném bodě této plochy.

Odstranění nežádoucích vlastností většinou znamená kompletní časově náročné přemodelování celého dílu. Proto je důležité, aby konstruktéři a modeláři měli povědomí o důsledcích těchto vlastností CAD modelů.

## Segment Blisk lopatky

Na základě znalostí o křivkách a plochách z úvodních kapitol následovala úprava reálného modelu Blisk lopatky. Z té byl nejprve vybrán segment tvořený válcovou plochou s nejhorším průběhem grafu křivosti. Úprava tohoto segmentu vedla ke zlepšení generovaných drah nástroje i zkrácení doby obrábění z 5 min 16 s na 4 min 46 s (při nastavení offsetu 0 mm), tedy o 30 s.

## Celá Blisk lopatka

Dále byla provedena úprava celé Blisk lopatky. Výsledky ukazují, že oproti původnímu modelu bylo dosaženo zvýšení přesnosti a efektivity obrábění. Simulovaná doba obrábění celé lopatky byla zlepšena z původních 43 min 49 s na 41 min 12 s, tedy o 2 min 37 s. To by při počtu padesáti lopatek z lopatkové kola na obr. 4.2 znamenalo zkrácení doby obrábění o 2 h 10 min 50 s. Zároveň byla také zvýšena životnost nástroje vlivem jeho plynulejšího pohybu.

Další optimalizace geometrie testovaného dílu by mohla představovat úpravu parametrizace modelu ve směru  $u$  a  $v$ . To by způsobilo odstranění zhuštění drah nástroje a zkrácení obráběcích časů.

# Seznam použité literatury

- BARSKY, B. a DEROSE, T. (1989). Geometric continuity of parametric curves: three equivalent characterizations. *IEEE Computer Graphics and Applications*, **9**(6), 60–69. doi: 10.1109/38.41470.
- ČÍŽEK, P. (2019). Generování strukturovaných sítí v radiální turbíně. Diplomová práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní.
- HOSAKA, M. (1992). *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-642-76600-8. doi: 10.1007/978-3-642-76598-8.
- HUANG, B., XU, C., HUANG, R. a ZHANG, S. (2015). An automatic 3D CAD model errors detection method of aircraft structural part for NC machining. *Journal of Computational Design and Engineering*, **2**(4), 253–260. ISSN 2288-5048. doi: 10.1016/j.jcde.2015.06.008.
- JANKAUSKAS, K. (2010). *Time-Efficient NURBS Curve Evaluation Algorithms*. Kaunas University of Technology, Kaunas.
- JEŽEK, F. (2005). *Diferenciální geometrie - Pomocný učební text*. Západočeská univerzita, Plzeň. [online; 14.5.2021]. Dostupné z: [https://www.fd.cvut.cz/personal/voracsar/GeometriePG/PGR020/DG\\_Jezek01.pdf](https://www.fd.cvut.cz/personal/voracsar/GeometriePG/PGR020/DG_Jezek01.pdf).
- KAUFMAN, P. (2014). CNC řídicí systém. [online; 17.3.2021]. Dostupné z: <https://www.profika.cz/cnc-ridici-system>.
- KOVOSVIT MAS (2021). MCU 700V[T]-5X NEXT GENERATION. [online; 15.4.2021]. Dostupné z: <https://www.kovosvit.com/mcu-700vt-5x-next-generation-p39.html#technicaldata>.
- LINKEOVÁ, I. (2007). *NURBS křivky*. České vysoké učení technické, Praha. ISBN 978-80-01-03893-2.
- LINKEOVÁ, I. (2009). *Tvarově složité obalové plochy generované v CAD/CAM systému obráběcím nástrojem*. Habilitační práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní.
- LINKEOVÁ, I. (2019). *Constructive geometry*. České vysoké učení technické. ISBN 978-80-01-05879-4.
- LINKEOVÁ, I. (2020). *Základy počítačového modelování křivek a ploch*. České vysoké učení technické, Praha. [online; 2.3.2021]. Dostupné z: [http://www.linkeova.cz/vyuka/pg\\_pgs/public/pgr\\_skripta.pdf](http://www.linkeova.cz/vyuka/pg_pgs/public/pgr_skripta.pdf).
- LUKEŠ, J. a VRABEC, M. (2015). CNC řídicí systémy ovlivňují kvalitu obrábění. *MM Průmyslové spektrum*, **Září 2015**(9). ISSN 1212-2572. [online; 14.5.2021]. Dostupné z: <https://www.mmspektrum.com/clanek/cnc-ridici-systemy-ovlivnuji-kvalitu-obrabeni>.

- LÁVIČKA, M. a BASTL, B. (2008). PN surfaces and their convolutions with rational surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, **25**(9), 763–774. ISSN 0167-8396. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2008.06.011>.
- NAREPS CZ (2021). Tvrdokovová toroidní 4zubá fréza řady G550 průměr 12 R2, šroubovice 30°. [online; 23.4.2021]. Dostupné z: <https://nastroje.nareps.cz/4zube-toroidni-g550/>.
- PIEGL, L. a TILLER, W. (1997). *The NURBS book*. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 3-540-61545-8.
- SMOLÍK, J. a SULITKA, M. (2011). Simulace CNC obrábění. *MM Průmyslové spektrum*, **Červenec 2011**(7, 8). ISSN 1212-2572. [online; 14.5.2021]. Dostupné z: <https://www.mmspektrum.com/clanek/simulace-cnc-obrabeni>.
- SOCHOR, M. a MIKEŠ, J. (2013). *Diferenciální geometrie ploch v úlohách*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc. ISBN 978-80-244-3999-0.
- STEJSKAL, M. (2017). Zvýšení efektivity obrábění na CNC strojích. Diplomová práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní.
- STEJSKAL, M., VAVRUSKA, P., ZEMAN, P. a LOMICKA, J. (2021). Optimization of tool axis orientations in multi-axis toolpaths to increase surface quality and productivity. *Procedia CIRP* [článek v tisku]. 9th CIRP Conference on High Performance Cutting.
- SUH, S.-H., NOH, S.-K. a CHOI, Y.-J. (1995). A PC-based retrofitting toward CAD/CAM/CNC integration. *Computers & Industrial Engineering*, **28**(1), 133–146. ISSN 0360-8352. doi: [https://doi.org/10.1016/0360-8352\(94\)00033-J](https://doi.org/10.1016/0360-8352(94)00033-J).
- SULITKA, M. (2013). Virtuální kontrola obrábění. *MM Průmyslové spektrum*, **Září 2013**(9). ISSN 1212-2572. [online; 14.5.2021]. Dostupné z: <https://www.mmspektrum.com/clanek/virtualni-kontrola-obrabeni>.
- SULITKA, M. (2017). Simulace chyb multifunkčních strojů způsobených dynamikou a interpolátorem. *Technický týdeník*, **2017**. [online; 14.5.2021]. Dostupné z: <https://www.technickytydenik.cz>.
- SULITKA, M. (2018). Pokročilé simulace CNC virtuálního obrábění pro zvyšování produktivity. *Technický týdeník*, **2018**(7). [online; 14.5.2021]. Dostupné z: <https://www.technickytydenik.cz>.
- SURYNKOVÁ, P. (2011). *Rekonstrukce ploch*. Univerzita Karlova. [online; 19.2.2021]. Dostupné z: [http://www.surynkova.info/dokumenty/ja/Prezentace/doktor\\_unor\\_2011.pdf](http://www.surynkova.info/dokumenty/ja/Prezentace/doktor_unor_2011.pdf).
- TECHNICUT (2021). Blisk. [online; 15.4.2021]. Dostupné z: <https://www.technicut.co.uk/blisk>.