

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra Fyziky

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

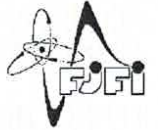


Aplikace relativistické dynamiky tekutin pro popis srážek těžkých iontů

Application of relativistic fluid dynamics for the description of heavy ion collisions

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Tomáš Poledníček
Vedoucí práce: prof. Dr. Boris Tomášik
Rok: 2021



Katedra: fyziky

Akademický rok: 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Tomáš Poledníček

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Název práce: Aplikace relativistické dynamiky tekutin pro popis srážek těžkých iontů
(česky)

Název práce: Application of relativistic fluid dynamics for the description of heavy
(anglicky) ion collisions

Pokyny pro vypracování:

- 1) Obeznamte se s motivací pro studium srážek těžkých iontů
- 2) Nastudujte typické scénáře expanze horké hmoty a jejich projevy v rozděleních produkovaných hadronů podle hybnosti
- 3) Nastudujte, jak jsou formulovány rovnice relativistické hydrodynamiky a jak jsou implementovány pro numerické řešení.
- 4) Obeznamte se s existujícím hydrodynamickým modelem vHLLE
- 5) Nasimulujte soubory srážek těžkých iontů s pomocí modelu vHLLE

Doporučená literatura:

- [1] J.D. Bjorken: Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region, Physical Review D 27 (1983) 140-151
- [2] P. Romatschke and U. Romatschke: Relativistic fluid dynamics in and out of equilibrium, Cambridge UP, 2018
- [3] P.F. Kolb, J. Sollfrank and U. Heinz: Anisotropic transverse flow and the quark hadron phase transition, Physical Review C62 (2000) 054909
- [4] Iu. Karpenko, P. Huovinen and M. Bleicher: A 3+1 dimensional viscous hydrodynamic code for relativistic heavy ion collisions, Comput. Phys. Commun 185 (2014) 3016-3027
- [5] Iu. Karpenko, P. Huovinen, H. Petersen and M. Bleicher: Estimation of the shear viscosity at finite net-baryon density from A+A collision data at $\sqrt{s_{NN}} = 7.7 - 200$ GeV, Physical Review 91 (2015) 064901

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

prof. Dr. Boris Tomášik, Ph.D., Katedra fyziky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Datum zadání bakalářské práce: 23.10.2020

Termín odevzdání bakalářské práce: 07.07.2021

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.



.....
garant oboru



.....
vedoucí katedry



.....
děkan

V Praze dne 23.10.2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, software atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne

.....

Tomáš Poledníček

Poděkování

Je mou čestnou povinností na úvod této práce poděkovat prof. Dr. Borisi Tomášikovi, Ph.D. za pomoc při vedení, sestavování a za trpělivost, formulování úlohy, poskytnutí odborných podkladů a vědeckého vedení při řešení úloh mé bakalářské práce. Nemalé díky patří Iurii Karpenkovi, Ph.D. a Ing. Jakubu Cimermanovi za neocenitelnou technickou pomoc a profesionální rady.

Tomáš Poledníček

Název práce:

Aplikace relativistické dynamiky tekutin pro popis srážek těžkých iontů

Autor: Tomáš Poledníček

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Boris Tomášik

Katedra Fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: –

Abstrakt: Srážky těžkých iontů nám umožňují vytvořit a zkoumat hmotu, která existovala několik mikrosekund po velkém třesku. Tato exotická tekutina se nazývá kvark-gluonové plazma (QGP) a patří k hlavním směrům výzkumu v částicové fyzice.

Vývoj hydrodynamického popisu srážek těžkých iontů v posledních letech ukázal svojí významnost a jednoduchost. Hydrodynamický přístup umožňuje simulovat a porozumět dynamice jaderné reakce, pokud jde o makroskopické veličiny, jako je hustota energie, teplota a tlak. Rovněž vytváří přímou vazbu na stavovou rovnici a umožňuje tak přímo studovat, jak konkrétní stavová rovnice ovlivňuje pozorovatelné veličiny. V této práci se zaměříme na popis srážek těžkých iontů a na aplikaci relativistické dynamiky tekutin v částicové fyzice.

Klíčová slova: srážky těžkých iontů, kvark-gluonové plazma, relativistická hydrodynamika, hydrodynamické modelování

Title:

Application of relativistic fluid dynamics for the description of heavy ion collisions

Author: Tomáš Poledníček

Abstract: Heavy ion collisions allow us to create and study matter, which existed several microseconds after the Big Bang. This exotic fluid is called quark-gluon plasma (QGP) and is one of the main areas of research in particle physics.

The development of hydrodynamic descriptions of heavy ion collisions in recent years has shown its relevancy and simplicity. The hydrodynamic approach makes it possible to simulate and understand the dynamics of a nuclear reaction in terms of macroscopic quantities such as energy density, temperature and pressure. It also creates a direct link to the equation of state and thus allows us to directly study how a particular equation of state affects observable quantities. In this work we focus on the description of heavy ion collisions and on the application of relativistic fluid dynamics in particle physics.

Key words: heavy ion collisions, quark-gluon plasma, relativistic hydrodynamics, hydrodynamic modelling

Obsah

Úvod	11
1 Srážky těžkých iontů	13
1.1 Kvark-gluonové plazma	13
2 Prostorovo-časový vývoj srážek těžkých iontů	15
2.1 Tok	18
2.2 Statický fireball	18
2.2.1 Podélná expanze	19
2.2.2 Příčná expanze	20
2.3 Izotropní a anizotropní tok	22
3 Relativistická hydrodynamika	25
3.1 Tenzor energie a hybnosti	25
3.2 Transformace souřadnic	26
3.3 Kovariantní derivace	26
3.4 Relativistická kinetická teorie	28
3.5 Minkowského prostor a Milneho souřadnice	29
3.6 Relativistické Eulerovy rovnice	30
3.6.1 Aplikace: Limitní přechod k nerelativistické Eulerově rovnici	32
3.6.2 Bjorkenův tok	33
3.7 Relativistické Navier-Stokes rovnice	35
3.7.1 Aplikace: Limitní přechod k nerelativistickým Navier-Stokes rovnícím	37
4 Hydrodynamické modelování	39
4.1 Počáteční stav	39
4.2 Hydrodynamická a posthydrodynamická fáze	39
5 Výsledky hydrodynamických simulací	41
5.1 Rozdělení nabitých hadronů v rapiditě	41
5.2 Příčné hybnostní spektrum	43
5.3 Směrový tok v_1 hadronů	44
Závěr	55
Bibliografie	57

Úvod

Mezi klíčové oblasti současné částicové fyziky neodmyslitelně patří studium rané fáze vývoje Vesmíru. Výzkum silně interagující hmoty pomáhá fyzikům odpovědět na otázky, které se týkají vzniku a vývoje Velkého třesku. Studium horké a husté hmoty nazývané kvark-gluonové plazma (QGP), ve které hadrony neexistují pravděpodobně a kvarky společně s gluony jsou nevázané v hadronech, nám umožňuje studium chování Velkého třesku. Tuto exotickou tekutinu lze pozorovat při kolizích neutronových hvězd a při zrodu Vesmíru. Na zemském povrchu její výzkum probíhá při srážkách těžkých iontů (Au, Pb,...). Mezi experimenty zabývající se fyzikou srážek těžkých iontů patří urychlovače LHC v CERNu nebo RHIC v BNL.

Relativistická dynamika tekutin (relativistická hydrodynamika) byla aplikována na různé jevy v astrofyzice anebo jaderné fyzice. Relativistická hydrodynamika velice dobře popisuje nejen vývoj srážek galaxií, ale také vývoj QGP při ultrarelativistických srážkách těžkých iontů. V astrofyzice jsou typickými aplikacemi relativistické dynamiky tekutin kolaps masivních hvězd, tvorba a proudění kolem černých děr, srážky neutronových hvězd a mnoho dalšího. Na Zemi se relativistické toky objevují v ultrarelativistických srážkách těžkých iontů, kde formovaná hmota vykazuje kolektivní chování. Zejména anizotropie konečné distribuce částic byly tak dobře popsány pomocí ideální dynamiky tekutin, že hmota byla nazývána téměř dokonalou tekutinou s nejnižší možnou viskozitou.

Tato práce zahrnuje základní poznatky o fyzice srážek těžkých iontů a aplikovatelnosti hydrodynamického přístupu pro popis vývoje QGP. V první kapitole prezentujeme základní myšlenku srážek těžkých iontů a popis kvark-gluonového plazmatu.

Ve druhé kapitole se zaměříme na vývoj a popis srážek těžkých iontů. V této kapitole je popsán časový vývoj srážek - proces produkce částic, popis expandujícího fireballu, příčná a podélná expanze. Dále je v této kapitole zmíněno kolektivní chování částic - izotropní a anizotropní tok.

Ve třetí kapitole budujeme samotnou teorii relativistické hydrodynamiky vhodnou pro popis QGP vzniklého ve srážkách těžkých iontů. Sestavíme tenzor energie a hybnosti pro ideální tekutinu, odvodíme a dospějeme k relativistickým Eulerovým, resp. Navierovým-Stokesovým rovnicím. Zaměříme se na Bjorkenův model.

Ve čtvrté kapitole shrneme základní poznatky o hydrodynamickém modelování ve fyzice těžkých iontů. Shrneme základní princip hydrodynamického modelu vHLLÉ.

Pátá kapitola je věnována porovnání výsledků simulací s experimentálními daty.

V této práci budeme používat přirozený systém jednotek, ve kterých Planckova konstanta, rychlost světla a Boltzmannova konstanta budou rovny jedné, $\hbar = c = k_b = 1$. Veškeré teoretické základy týkající se relativistické hydrodynamiky budou vysvětleny ve čtyřech časoprostorových rozměrech (3 prostorové dimenze a 1 časová dimenze). Konvence použita pro metrický tenzor je $(+, -, -, -)$ a pro označení časoprostorových vektorů se použijí indexy $(\mu, \nu, \lambda, \dots)$, $\mu = 0$ označující časově podobné směry a ostatní položky označující prostorové směry.

Kapitola 1

Srážky těžkých iontů

Hlavní myšlenkou pro studium srážek těžkých iontů resp. vysokoenergetických jader je produkce horké a husté hmoty, která má hustotu energie mnohem větší než základní stav, tj. $\epsilon_0 \simeq 0,15 \text{ GeV/fm}^3$. Při vysokých energiích nebo při vysokých teplotách očekáváme, že kvarky (elementární stavební bloky hadronů) jsou téměř nevázané, tudíž se mohou volně pohybovat. Teorie popisující interakci mezi kvarky je kvantová chromodynamika (QCD). Zbytková interakce přesahující hranice protonu a neutronu je pak zodpovědná za vazbu mezi nukleony v jádře.

Mezi důležité centra výzkumu, které se zabývali relativistickými srážkami těžkých iontů (energie větší než 10 GeV na nukleon), patří BNL (Brookhaven National Laboratory) situované ve Spojených státech amerických a CERN (Evropská organizace pro jaderný výzkum). V současné době se srážky těžkých iontů provádí na urychlovačích RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) a LHC (Large Hadron Collider). Za zmínku také stojí experiment HADES v GSI Darmstadt. [10]

V relativistických srážkách těžkých iontů je produkováno velké množství částic. Pozorovaný počet produkováných částic nazýváme multiplicitou. Například, v centrálních srážkách Au+Au na RHIC, při energii $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$, je částicová multiplicita okolo 5000. Hmota, která vznikne při srážce, má velice krátkou dobu života, rychle expanduje a chladne.

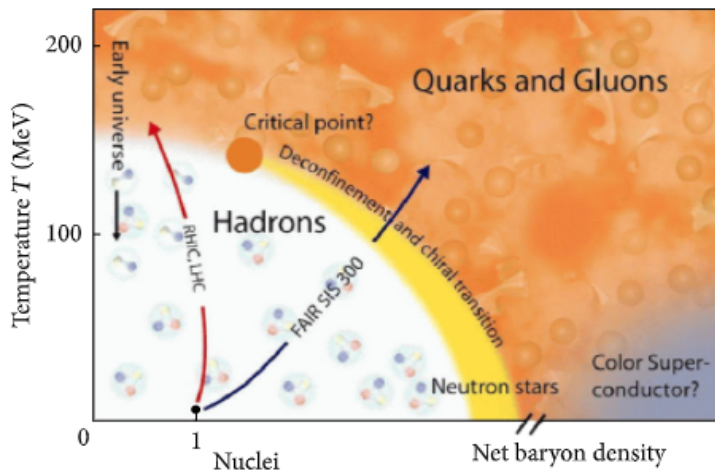
Na urychlovačích částic jako je RHIC nebo LHC můžeme při velkých rychlostech, blížících se rychlosti světla srážet jádra zlata Au nebo jiných těžkých prvků (Pb, U). Při těchto srážkách je produkováno kvark-gluonové plasma (QGP). QGP je stav, ve kterém nejsou kvarky vázané v hadronech, v němž se nacházel vesmír krátce po Velkém třesku. Při srážkách těžkých iontů vytváříme podstatě malé Velké třesky a studováním chování těchto srážek, získáváme informace o raném stádiu Vesmíru.

1.1 Kvark-gluonové plazma

Kvark-gluonové plazma je hustá hmota, která existuje při vysokých energiích a teplotách. Předpokládá se, že existovala až 10 mikrosekund po Velkém třesku. Kvark-gluonové plazma se skládá z kvarků a gluonů. Na rozdíl od běžné hmoty, jsou částice

velice blízko u sebe (méně než $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) a silná interakce slábne. Mezony a baryony se rozpadají a vytvářejí směs kvarků a gluonů. V tomto plazmatu jsou kvarky téměř uvolněné.

Hlavním cílem relativistických srážek těžkých iontů je zkoumání kvark-gluonového plazmatu a studium 2 fázových přechodů, které předpokládá kvantová chromodynamika. Prvním z těchto přechodů je kvarkové osvobození a druhým chirální fázový přechod. Za normálních podmínek jsou kvarky uvězněny v hadronech. Pokud ovšem budeme zvyšovat teplotu (ohřívat) nebo zvyšovat baryonovou hustotu (stlačovat) může dojít k fázovému přechodu, ve kterém se už běžné hadrony nevyskytují a ve kterém se kvarky a gluony stávají relevantními stupni volnosti. V roce 1975, Collins a Perry tvrdili, že super-hustá hmota, která se nachází v neutronových hvězdách, vznikající při explozi supernov nebo v rané fázi Vesmíru, se mnohem pravděpodobněji skládá z kvarků a gluonů než z hadronů. Ve stejném roce, fyzici N. Cabibbo a G. Parisi identifikovali limitní Hagedornovu teplotu s teplotou fázového přechodu z hadronicke k kvarkové hmotě. Také navrhli první fázový diagram. Kolektivní chování bylo zkoumáno P. D. Morleyem a M. B. Kislingerem. V roce 1978 E. V. Shuryak zavedl pojem kvark-gluonové plazma, a společně s J. I. Kapustou provedli výpočty fázových přechodů při konečné teplotě. [9, 10]



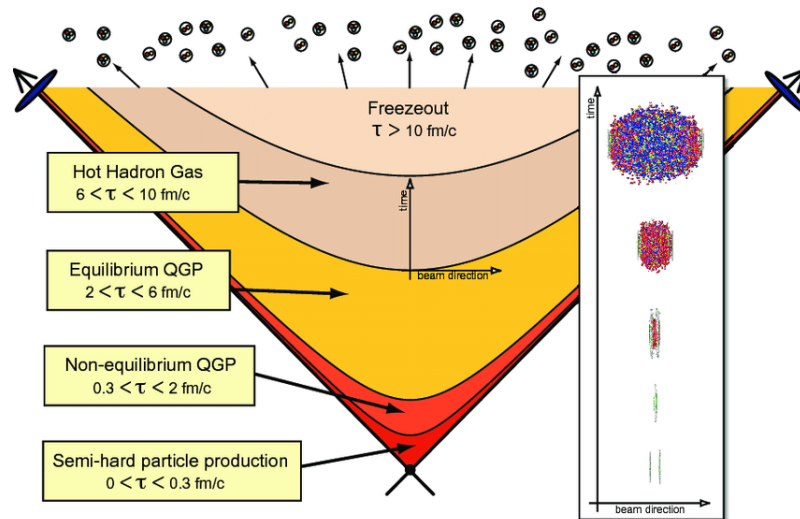
Obrázek 1.1: Schématický fázový diagram silně interagující hmoty. Převzato z [16].

Současné experimenty relativistických srážek těžkých iontů poukazují na vznik velmi husté hmoty, ve které interagují kvarky a gluony. Tento systém vykazuje kolektivní chování a můžeme jej najít v kompaktních hvězdách nebo v rané fázi Vesmíru.

Kapitola 2

Prostoro-časový vývoj srážek těžkých iontů

Srážky těžkých iontů (jader) jsou vysoce energetickými procesy s velmi charakteristickou dynamikou. Časoprostorový vývoj srážek dvou jader je zobrazen na Obrázku 2.1. Tento diagram ukazuje srážku dvou Lorenzovsky kontrahovaných jader ("Lorenzových palačinek"), jejichž rychlost se limitně blíží k rychlosti světla. Na svislé ose je vynesena čas, kde v dolní části diagramu je čas před srážkou a v horní části čas po srážce. Na vodorovné ose je vynesena vzdálenost dvou jader od sebe. Jádra se srazila v čase $t = 0$. Prakticky hned po srážce se vytvořil fireball (ohnivá koule), který expanduje do všech směrů a vyvíjí se v čase. Fireball prochází několika fázemi než dojde k vymrznutí částic a tyto částice dosáhnou detektoru. [23]



Obrázek 2.1: Schématický fázový diagram silně interagující hmoty. Převzato z [19].

Mezi nejdůležitější fyzikální veličiny, které budeme používat pro popis srážek těžkých iontů patří: rapidita, pseudorapidita, časoprostorová rapidita, příčná hybnost a příčná hmotnost.

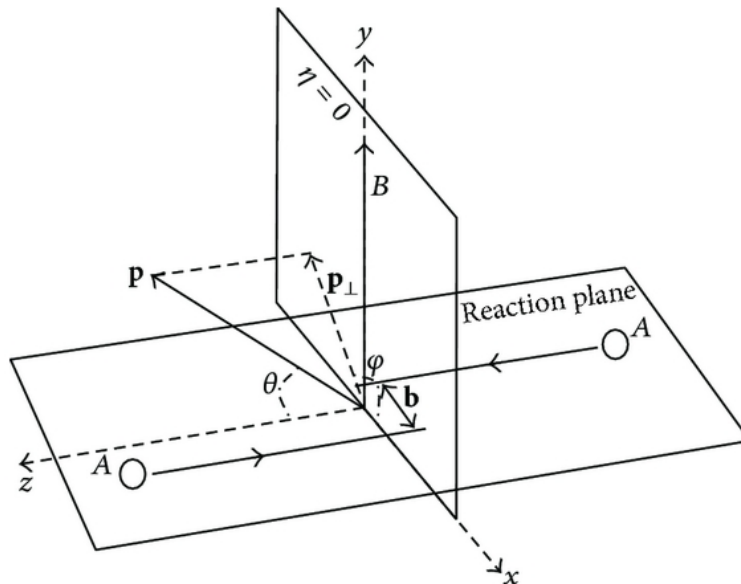
Příčná hybnost a příčná hmotnost

Při srážce dvou jader zavádíme reakční rovinu, která je definována vektorem srážkového parametru \mathbf{b} a směrem svazku. V částicové fyzice je zvykem osu z identifikovat se směrem svazku, tedy se směrem, ve kterém probíhá srážka. Tento směr budeme nazývat *longitudinální* (podélný). *Transverzálním* (příčným) směrem budeme nazývat směr kolmý k podélnému a tedy osy x a y viz Obrázek 2.2. Komponenta hybnosti v příčné rovině se nazývá *příčná hybnost* p_t a je definována jako

$$p_t = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}. \quad (2.1)$$

S příčnou hybností se pojí *příčná hmotnost*, definována jako

$$m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}. \quad (2.2)$$



Obrázek 2.2: Schématický diagram dvou jader se srážkovým parametrem b . Převzato z [24].

Rapidita, časoprostorová rapidita, pseudorapidita

Rapidita y je bezrozměrná fyzikální veličina definovaná vztahem

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right), \quad (2.3)$$

kde E je energie částice a p_z z -tová složka čtyřvektoru hybnosti částice p^μ . Rapidita nezávisí na hmotnosti částice a je relativistickou analogií rychlosti. Pokud budeme

uvažovat částici, která je emitována pod úhlem θ k ose svazku, můžeme vztah (2.3) upravit následujícím způsobem

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{m^2 + p^2} + p \cos \theta}{\sqrt{m^2 + p^2} - p \cos \theta} \right). \quad (2.4)$$

Při vysokých energiích produkovaných částic, které lze snadno získat při ultrarelativistických srážkách, platí $p \gg m$, můžeme psát

$$y \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p + p \cos \theta}{p - p \cos \theta} \right) = -\ln \tan \frac{\theta}{2} \equiv \eta. \quad (2.5)$$

Takto definovaná veličina se nazývá pseudorapidita η . Při vysokých energiích platí $y \simeq \eta$. Pseudorapidita skýtá velkou výhodou a tou je, že k jejímu určení nám stačí pouze úhel θ .

Dále je vhodné zavést prostoročasovou rapiditu η_s , která je obdobou (2.3)

$$\eta_s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t + z}{t - z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v_z}{1 - v_z} \right), \quad (2.6)$$

kde předpokládáme podélnou rychlost ve tvaru $v_z = \frac{z}{t}$. [10]

2.1 Tok

Fyzika relativistických srážek těžkých iontů se především zabývá chováním "zhuštěné" hmoty a silnou interakcí. Chceme především studovat kolektivní jevy hmoty projevující se při těchto srážkách. Mezi takové kolektivní jevy kvark-gluonového plazmatu patří makroskopický tok v určitém směru. Tento efekt by měl odlišovat jaderné srážky od srážek jednodušších systémů, jako jsou např. proton-proton. Fireball produkovaný v jaderných srážkách se může rozpínat ve směrech - v podélném směru (ve směru svazku) a v příčném směru (směr kolmý na směr svazku). Podélná expanze nastává ze dvou důvodů. Za prvé srážející se nukleony vysoce energetických jader nejsou srážkou úplně zastaveny a pokračují v pohybu ve směru svazku. Mezi zasaženými nukleony vzniká hmota, která se rozpíná a následuje jejich podélný pohyb. Druhý důvod jsou počáteční podmínky. Fireball bude mnohem více sevřený v podélném směru než v příčném. V takovémto případě vznikají ve fireballu silné podélné gradienty tlaku, které nutí celý systém se rozpínat.

Expanze ve směru kolmém na paprsek je výsledkem interakce mezi složkami hmoty. V extrémním případě hydrodynamické chování je způsobeno vnitřním tlakem vysoce excitované hmoty. To je zajímavé, protože tlak je spojen s hustotou energie prostřednictvím stavové rovnice. Pokud se bude měnit tlak, bude se měnit i velikost hustoty energie. Z měření rozdělení částic můžeme být schopni udělat nějaké závěry o tlaku a stavové rovnici silně interagující hmoty. To je cíl experimentů s ultrarelativistickými srážkami těžkých iontů. [22]

Typická doba života fireballu je v řádech desítek fm/c, což je 10^{-22} s, a typický rozměr je v řádu 10 fm. Rozdělení částice je dáno Bose-Einsteinovou nebo Fermi-Diracovou kvantovou statistikou.

2.2 Statický fireball

Nejprve se podívejme na spektrum příčné hmotnosti hadronů, které přicházejí ze stálého nerozpínajícího se tepelného zdroje. Spektra jsou, v obecnosti, rozdělení podle hybnosti. Ve fyzice částic nás bude zajímat především rozdělení částic produkovaných ve srážkách podle hybnosti. Takovéto rozdělení závisí na volbě vztažné soustavy, jelikož hybnost závisí na volbě soustavy. To není příliš praktické. Proto nás tedy bude zajímat *invariantní rozdělení podle hybnosti* resp. Lorentzovsky invariantní spektrum hybnosti částice. [23]

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\phi dy}, \quad (2.7)$$

kde m_t je příčná hmotnost a ϕ azimutální úhel. Čtyrhybnost částice může být napsána jako

$$p^\mu = (E, \vec{p}) = (m_t \cosh y, p_t \cos \phi, p_t \sin \phi, m_t \sinh y). \quad (2.8)$$

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že pro rozdělení částic lze použít Boltzmannovu statistiku místo Bose-Einsteinovy nebo Fermi-Diracovy statistiky. V případě

fireballu nás zajímá spektrum hybnosti částic vyzářených tepelným zdrojem o teplotě T

$$\frac{d^3 N}{dp^3} \propto \exp\left(-\frac{E}{T}\right) = \exp\left(-\frac{m_t \cosh y}{T}\right). \quad (2.9)$$

Pokud zafixujeme oblast rapidity $y = 0$, tedy $\cosh y = 1$, můžeme integrovat přes celý objem zdroje

$$\frac{d^3 N}{dp^3} = \int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} G(\vec{x}) \exp\left(-\frac{m_t}{T}\right), \quad (2.10)$$

kde $G(\vec{x})$ je hustota rozdělení zdroje a faktor $1/(2\pi)^3$ elementární buňka fázového prostoru. Abychom získali Lorenzovsky invariantní spektrum, musíme rovnici (2.10) vynásobit energií E

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} \Big|_{y=0} = \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\phi dy} \Big|_{y=0} = \frac{V}{(2\pi)^3} m_t \exp\left(-\frac{m_t}{T}\right), \quad (2.11)$$

kde $V = \int d^3 x G(\mathbf{x})$. Je vidět, že spektrum ze statického tepelného zdroje závisí pouze na příčné hmotnosti m_t , takže různé částice různých hmotností budou mít stejné m_t spektrum. Sklon spektra je dán teplotou T .

2.2.1 Podélná expanze

Žádný reálný fireball není statický. Ve skutečnosti podléhá silnému podélnému rozpínání. Model, který velmi efektivně popisuje podélnou expanzi, je Bjorkenův boost-invariantní model. Tento model podrobněji probereme v kapitole zabývající se relativistickou hydrodynamikou.

Podélná boost-invariantní expanze vypadá ve všech vztažných soustavách s jakoukoli podélnou rychlostí stejně. Toto chování je podobné jako chování Vesmíru. Pokud si představíme, že sedíme na jakémkoliv místě ve vesmíru a budeme pozorovat prostor kolem sebe, uvidíme pokaždé stejnou expanzi. Pokud bychom si přisedli na jakékoli místo v rozpínajícím se podélném boost-invariantním fireballu a pozorovali bychom vše okolo nás, nedokázali bychom určit rychlost, jakou se pohybujeme. Z tohoto jednoduchého pozorování vyplývá, že fireball musí být nekonečný v podélném směru. Pokud by to neplatilo rozpoznali bychom rozdíl v rychlosti uprostřed a na okraji. V praxi je nemožné tohoto chování dosáhnout, ale při experimentech s vysokou energií vypadá fireball boost-invariantní v centrální oblasti. Okraje se od sebe oddalují. Podélná expanze je dána vztahem

$$v_z = \frac{z}{t}. \quad (2.12)$$

Pro popis dynamiky fireballu je vhodnější zavést podélný vlastní čas τ , jelikož se jeho části pohybují v oblastech, ve kterých dochází k dilataci času

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}. \quad (2.13)$$

V podélné boost-invariantní expanzi každá část fireballu má konstantní η_s a všechny části se vyvíjí s vlastním časem τ . K parametrizaci nadplochy vymrznutí použijeme

polární souřadnice r , θ a prostoročasovou rapiditu. Kartézské souřadnice mají potom tvar

$$x^\mu = (\tau \cosh \eta_s, r \cos \theta, r \sin \theta, \tau \sinh \eta_s) \quad (2.14)$$

Zajímá nás tedy, jak bude vypadat spektrum v příčné hmotnosti v oblasti střední rapidity, $y = 0$. Tudíž musíme integrovat produkci částic $y = 0$ ze všech částí fireballu. Ale části fireballu se pohybují s různými podélnými rychlostmi. Chceme předpokládat tepelnou distribuci hybnosti částic v ohnivé kouli, ale v tomto případě to může být jen lokálně termální rozdělení. To znamená, že v každé části ohnivé koule je distribuce hybnosti dána Boltzmannovým rozdělením v lokální klidové soustavě [23]. Taková distribuce je úměrná $\exp(-\frac{E^*}{T})$, kde E^* je energie částice v klidové soustavě, která je daná vztahem

$$E^* = p_\mu u^\mu, \quad (2.15)$$

kde u^μ je čtyřrychlost dané části fireballu. Pro Lorentzovsky invariantní případ podélné expanze je čtyřrychlost dána vztahem

$$u^\mu = (\cosh \eta_s, 0, 0, \sinh \eta_s). \quad (2.16)$$

Z rovnic (2.16) a (2.8) můžeme vyjádřit energii E^*

$$E^* = m_t \cosh(y - \eta_s) \quad (2.17)$$

Vzhledem ke všem výše uvedeným rovnicím můžeme napsat vzorec pro Lorentzovo invariantní spektrum podélně boost-invariantního fireballu, který je azimutálně symetrický

$$\frac{d^3 N}{m_t dm_t d\phi dy} \Big|_{y=0} = \int_V \frac{\tau_{fo} r dr d\theta d\eta_s}{(2\pi)^3} m_t \cosh(\eta_s - y) G(r) \exp\left(-\frac{m_t \cosh(y - \eta_s)}{T}\right), \quad (2.18)$$

kde $\tau_{fo} r dr d\theta d\eta$ reprezentuje element objemu d^3x , funkce $G(r)$ prostorové rozložení fireballu v příčných souřadnicích (jelikož uvažujeme azimutální symetrii funkce $G(r)$ nezávisí na úhlu θ), V objem podél nadplochy. Předpokládáme, že tepelný zdroj se nachází v oblasti prostoročasové rapidity $\eta_s \in (-\infty, \infty)$ respektive $z \in (-\infty, \infty)$. Pokud se zaměříme na oblast se střední rapiditou $y = 0$, vztah (2.18) se zjednoduší

$$\frac{d^3 N}{m_t dm_t d\phi dy} \Big|_{y=0} = \frac{\tau_{fo} \int r G(r) dr}{(2\pi)^3} m_t K_1\left(\frac{m_t}{T}\right), \quad (2.19)$$

kde K_1 je modifikovaná Besselova funkce a faktor $\tau_{fo} \int r G(r) dr$ je objem, z něhož částice pocházejí. Příčné hmotnostní spektrum m_t v případě podélné expanze je stále univerzální veličinou v m_t , tj. obecně vzato nezávisí na hmotnosti a bude stejná pro všechny druhy částic (piony, protony, kaony, ...). Tvar je trochu upraven z exponenciálu a je dany Besselovou funkcí. [23]

2.2.2 Příčná expanze

U reálného fireballu dochází také k příčné expanzi. Pokud se omezíme jen na azimutálně symetrický fireball (nedochází k deformacím), který vzniká pouze v centrálních

srážkách, musíme zahrnout příčnou rychlost

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_t(r) \cos(\theta) \\ v_t(r) \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Příčná rychlost závisí na vzdálenosti od podélné osy fireballu r . Pokud parametrujeme fireball pomocí příčné rapidity $\eta_t(r)$, čtyřrychlost popisující systém v příčné rovině je dán následujícím vztahem

$$u^\mu = (\cosh \eta_s \cosh \eta_t, \sinh \eta_t \cos \theta, \sinh \eta_t \sin \theta, \cosh \eta_t \sinh \eta_s) \quad (2.21)$$

Pro příčnou rychlost platí

$$v_t = \frac{\tanh \eta_t(r)}{\cosh \eta_s}, \quad (2.22)$$

kde $\eta_t(r)$ je příčná rapidita, která je neklesající funkce proměnné r a musí vymizet pro $r \rightarrow 0$, jelikož nedochází k žádnému příčnému pohybu ve středu fireballu. Energii E^* v lokální klidové soustavě obdržíme stejným postupem jako v případě podélné expanze. [23]

$$E^* = p_\mu u^\mu = m_t \cosh(\eta_s - y) \cosh \eta_t - p_t \sinh \eta_t \cos(\phi - \theta). \quad (2.23)$$

K výpočtu spektra v příčné hmotnosti použijeme vztah uvedený výše.

$$\left. \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\phi dy} \right|_{y=0} = \frac{\tau_{fo}}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} m_t \cosh(\eta_s - y) G(r) \exp\left(-\frac{E^*}{T}\right). \quad (2.24)$$

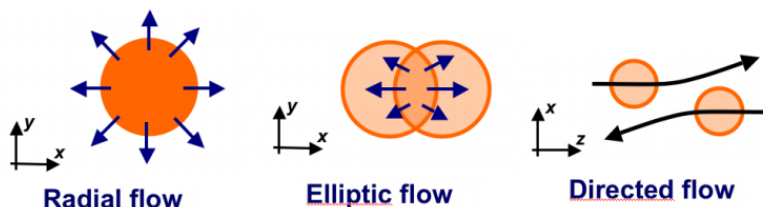
Pro $\tau = konst.$ můžeme zavést modifikované Besselovy funkce I_0 a K_1 , vyintegrovat přes η_s a ϕ , dostaneme tak jednodušší vztah pro hledané spektrum

$$\left. \frac{d^3 N}{m_t dm_t d\phi dy} \right|_{y=0} = \frac{\tau_{fo} m_t}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} r dr G(r) I_0\left(\frac{p_t \sinh \eta_t(r)}{T}\right) K_1\left(\frac{m_t \cosh \eta_t(r)}{T}\right). \quad (2.25)$$

Je vidět, že bude existovat závislost spektra na hmotnosti částice. Příčný tok způsobuje, že spektra v příčné hmotnosti různých částic druhy mají různé sklony.

2.3 Izotropní a anizotropní tok

Ve srážkách těžkých iontů vznikají nové částice, u kterých lze pozorovat kolektivní chování. Taková produkce se nazývá tok, který je důsledkem hydrodynamické expanze, která začíná těsně po srážce dvou jader. V této práci budeme mluvit o 3 typech toku: radiální, eliptický a směrový viz Obrázek 2.3 Dále můžeme rozlišit toky v závislosti na centralitě srážky - izotropní a anizotropní. [14]



Obrázek 2.3: Schéma jednotlivých toků pro různé srážkové parametry. Převzato z [18].

1. Izotropní tok

O izotropním toku můžeme mluvit, pokud se jedná o centrální srážku, tedy při nulovém srážkovém parametru. Expanze po srážce bude probíhat do všech příčných směrů stejnoměrně (izotropně), jelikož ze symetrie není žádný směr ničím specifický.

2. Anizotropní tok

Anizotropní tok nastává v případě, když je srážkový parametr nenulový. Můžeme tedy definovat reakční rovinu a v příčné rovině dochází k nerovnoměrné (anizotropní) produkci částice. Tuto distribuci částic můžeme popsat pomocí Fourierovy řady. Připomeňme definici Fourierovy řady funkce $f(x)$.

Definice 2.3.1 *Nechť funkce f má absolutně konvergentní zobecněný integrál (v Riemannově smyslu) na intervalu (a, b) , kde $b - a = 2\pi$. Položme*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \cos nx dx, \quad a \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \sin nx dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.26)$$

Potom trigonometrickou řadu $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ nazýváme **Fourierovou řadou funkce f na intervalu (a, b)** a čísla a_n, b_n nazýváme **Fourierovými koeficienty**.

Pokud budeme uvažovat sudou funkci f normovanou k 1 na intervalu $(-\pi, \pi)$, potom se Fourierův rozvoj této funkce zjednoduší

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \right), \quad (2.27)$$

kde pro koeficienty a_n můžeme psát

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) = \langle \cos(nx) \rangle_{f(x)} \quad (2.28)$$

Pro hybnostní spektrum částic můžeme zapsat následovným způsobem

$$E \frac{d^3 N}{dp^3} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 N}{p_t dp_T dy} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n(p_t, y) \cos(n(\phi - \Psi_n)) \right), \quad (2.29)$$

kde Ψ_n je úhel reakční roviny a ϕ úhel, pod kterým vylétávají částice. Toto je ekvivalentní k (2.26), jelikož členy obsahující funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ můžeme nahradit jenom $\cos(x)$, ve kterém je ukryta nějaká fáze Ψ_n . Pro koeficienty v_n platí

$$v_n(p_t, y) = \langle \cos(n(\phi - \Psi_n)) \rangle. \quad (2.30)$$

Pro izotropní tok platí, že všechny koeficienty v_n jsou rovny nule. Pokud některý z koeficientů bude různý od nuly, parametrizuje tím anizotropní chování.

Směrový tok

Směrovaný tok je jednou z klíčových pozorovatelných veličin ve srážkách těžkých iontů. V dnešní době je definován jako první koeficient v_1 ve Fourierově rozvoji distribuce částic. Směrovaný tok se tvoří hlavně v počáteční fázi (kompresi) kolizí, a proto je citlivý na časné gradienty tlaku ve vyvíjející se jaderné hmotě. Směrový tok tedy na počátku zkoumá tuhost jaderné stavové rovnice, o kterou má hlavní zájem výzkum těžkých iontů a astrofyzika. Kvůli symetrii nemáme žádný směrový tok při $y = 0$. [9]

Kapitola 3

Relativistická hydrodynamika

Relativistická hydrodynamika je velice zajímavá, protože je jednoduchá a obecná. Jednoduchost spočítá v tom, že informace o systému jsou zakódovány v jeho termodynamických vlastnostech stavové rovnice, ale i v počátečních podmínkách. Hydrodynamika je také obecná v tom smyslu, že je založena pouze na jednom předpokladu, že můžeme zanedbat mikroskopické délkové škály vůči délkové škále celého systému, na které se vlastnosti systému mění. Další předpoklad týkající se povahy částic a jejich interakcí, klasických/kvantových jevů není učiněn. V této jednoduchosti tkví aplikovatelnost hydrodynamického popisu ve srážkách těžkých iontů.

V následující kapitole shrneme základní matematický aparát, který bude použit pro odvození relativistických hydrodynamických rovnic.

3.1 Tenzor energie a hybnosti

Pro systém popsany Lagrangeovou hustotou funkce \mathcal{L} mají pohybové rovnice tvar

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = 0, \quad (3.1)$$

kde a , q_a značí obecnou souřadnici, $q_{a,\mu} \equiv \frac{\partial q_a}{\partial x^\mu}$. Z teoremu Noetherové víme, že každé spojitě jednoparametrické grupě transformací, která ponechává akci $S = \frac{1}{c} \int_{V^*} \mathcal{L} dV^*$ invariantní, přísluší čtyřvektor k^μ splňující $\frac{\partial k^\mu}{\partial x^\mu} = 0$, tzv. zachovávající čtyřproud. [20, 21] Uvažujme transformaci jako translaci $\tilde{x}^\mu = x^\mu + b^\mu$, při které se polní proměnné transformují podle $\tilde{q}_a(\tilde{x}) = q_a(x)$. Hustota Lagrangeovy funkce \mathcal{L} bude invariantní vůči translaci právě tehdy, když nebude explicitně záviset na souřadnicích x^μ , neboli $\mathcal{L}(\tilde{q}_a, \tilde{q}_{a,\mu}) = \mathcal{L}(q_a, q_{a,\mu})$. To lze vyjádřit nulovostí derivací \mathcal{L} podle x^μ

$$0 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right)_{expl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} q_{a,\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} q_{a,\nu\mu}. \quad (3.2)$$

Odtud s použitím pohybových rovnic plyne (3.1)

$$0 = \delta_\nu^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} q_{a,\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} q_{a,\mu} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right). \quad (3.3)$$

Pro $\mu = 0, 1, 2, 3$ jsem dostali rovnice, které představují zákony zachování energie (pro $\nu = 0$) a hybnosti (pro $\nu = 1, 2, 3$) v polní teorii. Definujme nyní tenzor energie a hybnosti vztahem

$$T_\mu^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{a,\nu}} q_{a,\mu} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}, \quad (3.4)$$

navíc je takto definovaný tenzor symetrický $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, a musí splňovat pohybové rovnice (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T_\mu^\nu = 0, \text{ resp. } \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.5)$$

Pokud označíme $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$, pak výše uvedený vztah má tvar: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Toto odvození tenzoru energie a hybnosti skrývá jednu nevýhodu. Odvození (3.5) jsme provedli pro přímočaré souřadnice v Minkowském prostoročasu, které však nezahrnuje případ obecných křivočarých souřadnic. Naším cílem bude převést rovnice (3.5) do kovariantního tvaru, ve kterém se všechny členy budou transformovat stejným způsobem. Pro tento účel v následujícím kapitole zavedeme *kovariantní derivaci*.

3.2 Transformace souřadnic

Základním postulátem teorie relativity jsou princip kovariance, který nám říká, že ve všech soustavách mají fyzikální zákony stejný tvar a rychlost světla je konstantní [20]. Všechny události odehrávající se v prostoročasu jsou reprezentovány body. Z matematického hlediska se jedná o čtyřdimenzionální varietu s metrickým tenzorem $g_{\mu\nu}$ a to tak, že délkový element mezi dvěma body je roven

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.6)$$

Velikost délkového elementu je pro všechny pozorovatele stejná neboli při změně souřadnic $\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\alpha)$

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.7)$$

Porovnáním členů rovnici (3.7), dostaneme transformační vztah pro metrický tenzor

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}. \quad (3.8)$$

Současně platí, že inverzní tenzor k $g_{\mu\nu}$ je $g^{\mu\nu}$, který splňuje: $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$. Označme nyní výraz v (3.8) jako matici $R_\mu^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}$, potom (3.8) v maticovém tvaru

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = (R^T)_\mu^\alpha g_{\alpha\beta} R_\nu^\beta. \quad (3.9)$$

3.3 Kovariantní derivace

Uvažujme vektorový prostor V vybaven bazickými vektory $e_\mu = e_\mu(\mathbf{x})$, kde \mathbf{x} jsou obecné souřadnice, bazické vektory jsou závislé na obecných souřadnicích a derivace vektoru \mathbf{v}

$$\partial_\mu \mathbf{v} = \partial_\mu (v^\nu e_\nu) = (\partial_\mu v^\nu) e_\nu + v^\nu (\partial_\mu e_\nu). \quad (3.10)$$

Člen $\partial_\mu v^\nu$ vyjadřuje změnu vektoru v komponentu v^ν , druhý člen $\partial_\mu e_\nu$ vyjadřuje změnu báze vektoru, který je způsoben například volbou křivočarých souřadnic. Pro přímočaré souřadnice je druhý člen roven nule, $\partial_\mu e_\nu = 0$. Definujme nyní Christoffelovy symboly jako

$$\partial_\mu e_\nu \equiv \Gamma_{\nu\mu}^\lambda e_\lambda. \quad (3.11)$$

Christoffelovy symboly nesou informaci o změně metrického tenzoru od místa k místu [17]. Záměnou $\nu \leftrightarrow \lambda$ můžeme přepsat (3.10)

$$\partial_\mu \mathbf{v} = (\partial_\mu v^\nu + v^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\nu) e_\nu. \quad (3.12)$$

Výraz v závorce (3.12) se nazývá *kovariantní derivace*, první část derivace je obyčejná parciální derivace a druhá část je způsobena křivočarými souřadnicemi. [21]. Kovariantní derivaci budeme značit ∇_μ . Z rovnice (3.12) vidíme, že kovariantní derivace působí na vektor po složkách

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + v^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\nu. \quad (3.13)$$

Rovnice (3.11) není moc použitelná pro výpočet Christoffelových symbolů, protože zatím nevíme, jak napočítat $v^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\nu e_\nu$ v každém bodě prostoru. Ve skutečnosti Christoffelovy symboly souvisí s metrickým tenzorem $g_{\mu\nu}$. Uvažujme metrický tenzor $g_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu$, kde e_μ a e_ν jsou báze vektory. Derivujme nyní $g_{\mu\nu}$ podle x^λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial (e_\mu e_\nu)}{\partial x^\lambda} = \left(\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\lambda} \right) e_\nu + e_\mu \left(\frac{\partial e_\nu}{\partial x^\lambda} \right), \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho e_\rho e_\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho e_\rho e_\mu, \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nyní permutujme indexy μ, ν a λ a vytvořme kombinace

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= g_{\rho\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\rho + g_{\rho\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \\ \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} &= g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho \\ -\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= -g_{\rho\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\rho - g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tyto rovnice jsme uspořádali do výše uvedené formy, abychom mohli provést zjednodušení sečtením. Jelikož Christoffelovy symboly jsou symetrické vzhledem k dolním indexům $\Gamma_{\nu\mu}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho$ a po sečtení výše uvedených rovnic dostaneme

$$2g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho = \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right], \quad (3.16)$$

tuto rovnici vynásobíme $g^{\sigma\nu}$ a použijeme znalost, že $g^{\sigma\nu} g_{\rho\nu} = \delta_\rho^\sigma$ [17]. Dostaneme výpočet Christoffelových symbolů z metriky

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (3.17)$$

Kovariantní derivaci lze zobecnit na obecný tenzor $T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ typu $\binom{p}{q}$ (kontravariantní řádu p a kovariantní řádu q)

$$\nabla_\lambda T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \partial_\lambda T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu_1} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\alpha\mu_2 \dots \mu_p} + \dots + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu_p} T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \mu_2 \dots \alpha} - \Gamma_{\lambda\nu_1}^{\alpha} T_{\alpha\nu_2 \dots \nu_q}^{\nu_1 \mu_2 \dots \mu_p} - \dots - \Gamma_{\lambda\nu_q}^{\alpha} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \alpha}^{\nu_1 \mu_2 \dots \mu_p}. \quad (3.18)$$

Vraťme se zpět k našemu tenzoru hybnosti a energie $T^{\mu\nu}$. Jak už jsme zmínili, relativistická formulace hydrodynamiky musí splňovat základní princip kovariance. Potom vztah (3.5) přepíšme do kovariantního tvaru

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.19)$$

3.4 Relativistická kinetická teorie

Stejně jako v nerelativistickém případě bude základní veličinou lokální hustota částic $n(\mathbf{x}, t)$ konstruována jako $n(\mathbf{x}, t)d^3x$, která udává počet částic v prostorovém objemu d^3x v okolí bodu \mathbf{x} v čase t [22]. Obdobným způsobem můžeme definovat tok částic $\mathbf{j}(x, t)$. V teorii relativity tyto veličiny tvoří komponenty čtyřvektoru

$$N^\mu(x) = (n(x^\mu, t), \mathbf{j}(x^\mu, t)), \quad (3.20)$$

kde $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ je prostoročasový bod. Nyní popíšeme částici na její *hmotné nadploše*. To jednoduše znamená, že norma jejich čtyřhybnosti se bude vždy rovnat druhé mocnině hmotnosti

$$p^\mu g_{\mu\nu} p^\nu = (p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (3.21)$$

U velkého počtu částic má smysl zavést *rozdělení částic ve fázovém prostoru* $f(x, p)$ tak, že $f(x, p)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$ udává počet částic v objemovém prvku fázového prostoru $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{p}$ kolem bodu (\mathbf{x}, \mathbf{p}) v čase t . Poté jsme schopni definovat lokální hustotu a proud jako

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{p} f(x, p), \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{p} \mathbf{v} f(x, p), \end{aligned} \quad (3.22)$$

kde $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{p^0}$ je rychlost částice. Zatím jsme mluvili jen o hustotě a toku částic, ale je důležité si uvědomit, že v relativistické kinetické teorii mohou být tyto veličiny nesmyslné, jelikož částice a antičástice mohou být nepřetržitě produkovány a ničeny. Místo částic budeme tedy hovořit o zachovávajících se kvantových číslech jako je baryonové číslo, elektrický náboj, podivnost atd. Poté můžeme mluvit o hustotě baryonového čísla, která je dána hustotou baryonů a odečtením hustoty antibaryonů. Tímto způsobem můžeme zavést tok baryonů. Totéž platí pro ostatní zachováující se kvantová čísla. Obecně platí, že můžeme zavést čtyřproud N^μ pro jakékoli zachováující se kvantové číslo [22].

Vraťme se nyní k našemu tenzoru hustoty energie a hybnosti. S výše definovanou kinetickou teorií, můžeme komponenty tenzoru $T^{\mu\nu}$ rozepsat následovně. Složka 00 tenzoru energie-hybnosti bude makroskopická hustota energie, integrujeme tedy energii na daném místě x

$$T^{00}(x) = \int d^3\mathbf{p} p^0 f(x, p) = \int \frac{d^3p}{E} p^0 p^0 f(x, p). \quad (3.23)$$

Tok energie bude určen energií, která proudí s částicemi

$$T^{0i}(x) = \int d^3\mathbf{p} p^0 v^i f(x, p) = \int \frac{d^3p}{E} p^0 p^i f(x, p). \quad (3.24)$$

Hustota hybnosti T^{i0} je dáno celkovou integrovanou hybností přes všechny částice

$$T^{i0}(x) = \int d^3\mathbf{p} p^i f(x, p) = \int \frac{d^3p}{E} p^i p^0 f(x, p), \quad (3.25)$$

a hybnostní tok je dán

$$T^{ij}(x) = \int d^3\mathbf{p} p^i v^j f(x, p). \quad (3.26)$$

Tyto čtyři vztahy lze zkombinovat do jednoho Lorentzova kovariantního vztahu pro energetický moment čtyři tenzory.

$$T^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{E} p^\mu p^\nu f(x, p). \quad (3.27)$$

Tenzor energetické hybnosti byl zde definován s příspěvkem od hmotnosti a kinetické energie částic.

3.5 Minkowského prostor a Milneho souřadnice

Pro zjednodušení hydrodynamických výpočtů využijeme aparátu Minkowského prostoročasu. Minkowského prostoročas je 4 dimenzionální lineární vektorový prostor s definovaným pseudoskalárním součinem, ve kterém jsou souřadnice dány $x^\mu = (t, x, y, z)$ a vybavený metrickým tenzorem $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Milneho souřadnice τ, η (od této chvíle budeme η značit prostoročasovou rapiditu, která byla v předešlých kapitolách značená η_s) jsou definovány jako

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad \eta = \text{arctanh}\left(\frac{z}{t}\right), \quad (3.28)$$

a inverzní transformace je daná

$$t = \tau \cosh \eta, \quad z = \tau \sinh \eta. \quad (3.29)$$

Milneho souřadnice jsou tedy $\tilde{x}^\mu = (\tau, x, y, \eta)$ a transformační matice může být spočtena dle $R^\alpha_\mu \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}$

$$R^\alpha_\mu = \begin{pmatrix} \cosh \eta & 0 & 0 & \tau \sinh \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \eta & 0 & 0 & \tau \cosh \eta \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

potom Milneho metrika je podle (3.9)

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -\tau^2). \quad (3.31)$$

Pro tuto speciální metrikou máme nenulové Christoffelovy symboly dle (3.17)

$$\Gamma^\eta_{\tau\eta} = \Gamma^\tau_{\eta\eta} = \frac{1}{\tau}, \quad \Gamma^\tau_{\eta\eta} = \tau. \quad (3.32)$$

3.6 Relativistické Eulerovy rovnice

Ideální tekutina je definována jako taková tekutina, v níž jsou všechny smykové napětí nulová. Naším cílem bude sestavit použitelný rozvoj tenzoru energie hybnosti, kde postupným přidáváním tenzorů vyšších řádů, získáme přesnější výsledky

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu} + T_{(2)}^{\mu\nu} + \dots \quad (3.33)$$

Nejprve budeme uvažovat tekutinu, která je v lokální rovnováze a nepůsobí na ní vnější síly. Tenzor $T_{(0)}^{\mu\nu}$ přísluší ideální tekutině. Explicitní tvar tenzoru $T_{(0)}^{\mu\nu}$ odvodíme následujícím způsobem. Tenzor energie a hybnosti musí být efektivní funkcí hydrodynamických stupňů volnosti, hustoty energie a tlaku - ϵ , p a čtyřrychlosti definované vztahem

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3.34)$$

kde τ vlastní čas, který je dán časovým přírůstkem (3.6) $d\tau = ds$. Abychom viděli jak vypadá čtyřrychlost uvažíme případ Minkowského prostoročasu, ve kterém je metrický tenzor v (pseudo)kartézských souřadnicích dán vztahem $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. V tomto případě je interval ds pro posunutí bodu s rychlostí \mathbf{v} dán

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 = (dt)^2 \left(1 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right) = (dt)^2 (1 - \mathbf{v}^2) \quad (3.35)$$

a tedy

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \gamma(\mathbf{v}) \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

kde $\gamma(\mathbf{v})$ je Lorentzův faktor. Pro nerelativistický případ (pro malé rychlosti) dostaneme $\gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \approx 1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \mathcal{O}(\mathbf{v}^4)$ a tedy $u^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\mathbf{v}^2)$. V nejnižším řádu uvažujeme tenzor energie a hybnosti ve tvaru

$$T_0^{\mu\nu} = f_1(c_1 u^\mu u^\nu + c_2 g^{\mu\nu}) + f_2(c_3 u^\mu u^\nu + c_4 g^{\mu\nu}), \quad (3.37)$$

kde c_1, c_2, c_3, c_4 jsou konstanty, $f_1 = f_1(x^\mu)$ a $f_2 = f_2(x^\mu)$ skalární funkce, $u^\mu(x^\mu)$ čtyřrychlost a $g^{\mu\nu}$ metrický tenzor [17]. V lokální klidové soustavě v blízkosti rovnovážné polohy, má tenzor energie a hybnosti tvar

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{(0)LKS} = \text{diag}(\epsilon, p, p, p), \quad (3.38)$$

kde p je tlak a ϵ hustota energie. Toto je jediná možná kombinace vektorů a tenzorů, kterou máme k dispozici a která navíc splňuje podmínky kladené na tenzor energie a hybnosti. V lokální klidové soustavě má vektor čtyřrychlosti tvar $u^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ a s použitím Minkowskeho metriky $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ dostaneme pro (3.37)

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{(0)LKS} = \text{diag}(f_1(c_1 + c_2) + f_2(c_3 + c_4), -f_1 c_2 - f_2 c_4, -f_1 c_2 - f_2 c_4, -f_1 c_2 - f_2 c_4). \quad (3.39)$$

Porovnáním (3.38) a (3.39) dostaneme

$$\begin{aligned}\langle T^{00} \rangle_{(0)LKS} &= \epsilon = f_1(c_1 + c_2) + f_2(c_3 + c_4), \\ \langle T^{ii} \rangle_{(0)LKS} &= p = -f_1c_2 - f_2c_4, \text{ pro } i, j = 1, 2, 3\end{aligned}\quad (3.40)$$

Řešení je volené, tak aby funkce f_1 mohla být identifikovaná s hustotou energie, a funkce f_2 s tlakem. Tyto rovnice mají řešení

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = -1. \quad (3.41)$$

Dosazením (3.41) do (3.40) dostáváme explicitní tvar tenzor energie a hybnosti

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (3.42)$$

Je příhodné pro výpočet pohybových rovnic zavést *prostoropodobný projektor* $\Delta^{\mu\nu}$. Definujme projektory následujícím způsobem

$$\Delta^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}. \quad (3.43)$$

Pro libovolný metrický tenzor $g^{\mu\nu}$, jsou takto definované projektory $\Delta^{\mu\nu}$ kolmé na rychlost, která je vždycky časupodobná, tj. $\Delta^{\mu\nu}u_\mu = u^\mu u^\nu u_\mu - g^{\mu\nu}u_\mu = u^\mu - u^\mu = 0$, resp. $\Delta^{\mu\nu}u_\nu = 0$, a dále splňují vztah

$$\Delta_{\mu\nu}\Delta_\rho^\nu = (u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu})(u^\nu u_\rho - g_\rho^\nu) = g_{\mu\nu}g_\rho^\nu - g_{\mu\nu}u^\nu u_\rho - g_\rho^\nu u_\mu u_\nu + u_\mu u_\rho = \Delta_{\mu\rho}. \quad (3.44)$$

Nejsnadněji lze zobrazit $\Delta^{\mu\nu}$ v Minkowského souřadnicích. Pokud budeme uvažovat lokální klidovou soustavu (LKS), bude mít čtyřrychlost pouze první složkou nenulovou, tj. $u_{LKS}^\mu = (1, \mathbf{0})$, projektor tvar $\Delta^{\mu\nu} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$ a $u_{LKS}^\mu u_{LKS}^\nu = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$. Druhý vztah definuje projektor do směru čtyřrychlosti. [17]

Pomocí takto definovaných projektorů (3.42) popíšeme tenzor energie a hybnosti (3.43) jako

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu + p\Delta^{\mu\nu}. \quad (3.45)$$

Potom zákon zachování energie a hybnosti v LKS má tvar

$$\nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.46)$$

Podívejme se dále samostatně na časupodobnou a prostoropodobnou část (3.46), promítnutím u^ν a $\Delta^{\nu\alpha}$ na (3.46)

$$u_\nu \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.47)$$

$$\Delta_\nu^\alpha \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.48)$$

Pro první rovnici dostaneme

$$\begin{aligned}u_\nu \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} &= u_\nu \nabla_\mu (\epsilon u^\mu u^\nu + p\Delta^{\mu\nu}) = u_\nu \nabla_\mu (\epsilon u^\mu u^\nu) + u_\nu \nabla_\mu (p\Delta^{\mu\nu}) = \\ &= u_\nu u^\nu u^\mu \nabla_\mu \epsilon + \epsilon u_\nu u^\mu \nabla_\mu u^\nu + \epsilon u_\nu u^\nu \nabla_\mu u^\mu + p u_\nu \nabla_\mu \Delta^{\mu\nu} + u_\nu \Delta^{\mu\nu} \nabla_\mu p = \\ &= u^\mu \nabla_\mu \epsilon + \epsilon \nabla_\mu u^\mu + p \nabla_\mu u^\mu \\ &= (p + \epsilon) \nabla_\mu u^\mu + u^\mu \nabla_\mu \epsilon = 0,\end{aligned}\quad (3.49)$$

kde jsme využili $u_\nu \nabla_\mu u^\nu = \frac{1}{2} \nabla_\mu (u_\nu u^\nu) = \frac{1}{2} \nabla_\mu 1 = 0$. Pro druhou rovnici obdobným způsobem získáme

$$\begin{aligned} \Delta_\nu^\alpha \nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} &= \Delta_\nu^\alpha \nabla_\mu (\epsilon u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu}) = \Delta_\nu^\alpha \nabla_\mu (\epsilon u^\mu u^\nu) + \Delta_\nu^\alpha \nabla_\mu (p \Delta^{\mu\nu}) = \\ &= \Delta_\nu^\alpha u^\mu u^\nu \nabla_\mu \epsilon + \epsilon \Delta_\nu^\alpha u^\mu \nabla_\mu u^\nu + \epsilon \Delta_\nu^\alpha u^\nu \nabla_\mu u^\mu + p \Delta_\nu^\alpha \nabla_\mu \Delta^{\mu\nu} + \Delta_\nu^\alpha \Delta^{\mu\nu} \nabla_\mu p = \\ &= \epsilon u^\mu \nabla_\mu u^\alpha + p u^\mu \nabla_\mu u^\alpha - \Delta^{\mu\alpha} \nabla_\mu p = \\ &= (\epsilon + p) u^\mu \nabla_\mu u^\alpha - \Delta^{\mu\alpha} \nabla_\mu p = 0, \end{aligned} \tag{3.50}$$

kde jsme využili $\Delta_\nu^\alpha \nabla_\mu u^\nu = (u^\alpha u_\nu - g_\nu^\alpha) \nabla_\mu u^\nu = -g_\nu^\alpha \nabla_\mu u^\nu = -\nabla_\mu (g_\nu^\alpha u^\nu) = -\nabla_\mu u^\alpha$. V dalším kroku je užitečné zavést **projekce derivace**

$$D \equiv u^\mu \nabla_\mu \tag{3.51}$$

$$\nabla_\perp^\alpha \equiv \Delta^{\mu\alpha} \nabla_\mu, \tag{3.52}$$

kde $\nabla_\mu = u_\mu D + \nabla_\perp^\alpha$ a platí $\nabla_\mu u^\mu = (u_\mu D + \nabla_\perp^\alpha) u^\mu = \nabla_\perp^\alpha u^\mu$. S využitím (3.51) a (3.52) převedeme (3.49) a (3.50) do finálního tvaru

$$D\epsilon + (\epsilon + p) \nabla_\perp^\alpha u^\alpha = 0, \tag{3.53}$$

$$(\epsilon + p) D u^\alpha + \nabla_\perp^\alpha p = 0. \tag{3.54}$$

S využitím stavové rovnice $p = p(\epsilon)$, je možné pomocí $\nabla_\perp^\alpha p = \frac{\partial p(\epsilon)}{\partial \epsilon} \nabla_\perp^\alpha \epsilon$, přepsat (3.53) a (3.54) do tvaru

$$\begin{aligned} D\epsilon + (\epsilon + p) \nabla_\perp^\alpha u^\alpha &= 0, \\ (\epsilon + p) D u^\alpha - c_s^2 \nabla_\perp^\alpha \epsilon &= 0, \end{aligned} \tag{3.55}$$

kde c_s můžeme být rozpoznáno jako rychlost zvuku v tekutině

$$c_s^2(\epsilon) = \frac{\partial p(\epsilon)}{\partial \epsilon}. \tag{3.56}$$

3.6.1 Aplikace: Limitní přechod k nerelativistické Eulerově rovnici

Naší snahou je formulovat relativistickou hydrodynamiku tak, aby korespondovala s klasickou hydrodynamikou. Pokud přejdeme k nerelativistické limitě $|\mathbf{v}| \ll 1$, dostaneme klasickou Eulerovu rovnici a rovnici kontinuity. Pro rychlost u^μ máme $u^0 \sim 1, u^i \sim v^i$

$$\begin{aligned} D &= u^\mu \nabla_\mu = u^0 \partial_0 + u^i \partial_i \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \partial_t + v^i \partial_i + \mathcal{O}(|\mathbf{v}^2|), \\ \nabla_\perp^i &= \Delta^{i\mu} \nabla_\mu \xrightarrow{|\mathbf{v}| \rightarrow 0} \partial_i + \mathcal{O}(|\mathbf{v}^2|), \end{aligned} \tag{3.57}$$

Jelikož uvažujeme nerelativistickou limitu, pak hustota energie ϵ je mnohem větší než tlak $\epsilon \gg p$ a hustota energie odpovídá prostorové hustotě $\epsilon \sim \rho$. Pak pomocí vztahů (3.57) prepíšeme Eulerovy relativistické rovnice (3.54) do nerelativistických jako

$$(\partial_t + v^i \partial_i) \rho + \rho \partial_i v^i = \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{3.58}$$

$$\rho (\partial_t v^i + v^i \partial_i v^i) + \partial_i p = \partial_t \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \tag{3.59}$$

Rovnice (3.58) odpovídá rovnici kontinuity a rovnice (3.59) odpovídá klasické pohybové rovnici pro ideální tekutinu (Eulerova rovnice pro pohyb ideální tekutiny). [17]

3.6.2 Bjorkenův tok

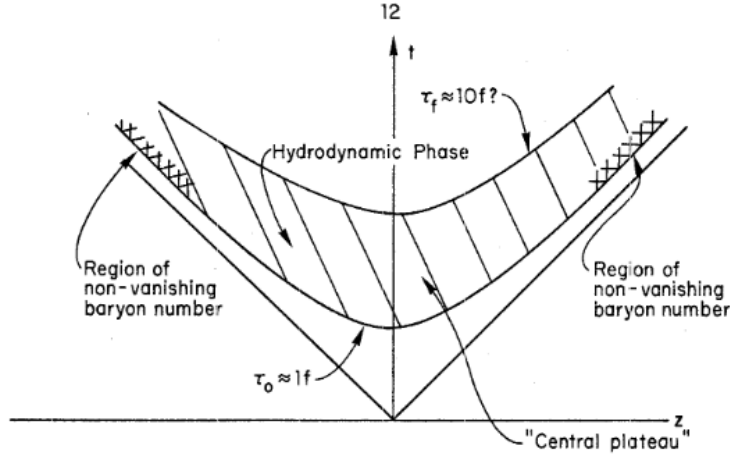
Nyní se zabývejme hydrodynamickým popisem kvark-gluonového plazmatu (QGP) vznikajícího v ultrarelativistických jaderných srážkách na urychlovači RHIC nebo LHC. Vývoj QGP můžeme rozdělit do 4 fází:

- **FÁZE I** - následuje těsně po srážce jader. Tato fáze je charakterizována silnými gradienty a kalibračními poli s velkou amplitudou. Doba trvání této fáze se z hydrodynamických simulací jeví kratší než 1 fm/c
- **FÁZE II** - fáze blízká stavu lokální rovnováhy a hydrodynamický popis je možný. Tato fáze trvá, dokud systém nebude dostatečně zředěný a vstoupí do další fáze.
- **FÁZE III** - dochází k hadronizaci, vzniká hadronový plyn, který je charakteristický vysokou viskozitou a je popsán jinou stavovou rovnicí než kvark-gluonové plazma.
- **FÁZE IV** - hadrony se pohybují od místa srážky, dokud nejsou zaznamenány detektory.

Uvažujeme jen velmi energetické jádra, které se pohybují vysokou rychlostí. V čase $t = 0$ a $z = 0$ se tyto jádra srazí. Nejjednodušší model pro popis hydrodynamické expanze je založen na Bjorkenově předpokladu [4], že ve vzdálenosti z v čase t se hmota pohybuje rychlostí $v_z = \frac{z}{t}$. Pohyb jader je podél osy z . Příčnou expanzi a dynamiku v této rovině zanedbáme $v_x = v_y = 0$. Dalším krokem je zavedení Milneho souřadnic (3.28). Fázové veličiny budou ϵ a p budou jenom funkcemi τ z (3.28), protože v ose z má kontinuum konstantní rychlost $v_z \sim v_z^0$. Čtyřvektor rychlosti u^μ má v Milneho souřadnicích tvar

$$u^\mu = (u^\tau, u^x, u^y, u^\eta) = (\partial_\tau \tau, \partial_\tau x, \partial_\tau y, \partial_\tau \eta) = (1, 0, 0, 0). \quad (3.60)$$

Pro Milneho souřadnice máme metrický tenzor daný (3.31) a jediné nenulové Christoffelovy symboly jsou (3.32). V dalším kroku se podíváme na kovariantní derivaci po složkách tenzoru momentu energie a hybnosti. Společně s nenulovými Christofe-



Obrázek 3.1: Prostorčasový diagram vývoje QGP v centrální rapiditě. Převzato z [4].

lovými symboly (3.32) dostáváme tedy

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\mu\tau} &= \partial_\mu T^{\mu\tau} + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu T^{\lambda\tau} + \Gamma_{\lambda\mu}^\tau T^{\mu\lambda} = 0 \\
&= \partial_\mu T^{\mu\tau} + \frac{1}{\tau} T^{\tau\tau} + \tau T^\eta = 0 \\
\nabla_\mu T^{\mu x} &= \partial_\mu T^{\mu x} + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu T^{\lambda x} + \Gamma_{\lambda\mu}^x T^{\mu\lambda} = 0 \\
&= \partial_\mu T^{\mu x} + \frac{1}{\tau} T^{\tau x} = 0 \\
\nabla_\mu T^{\mu y} &= \partial_\mu T^{\mu y} + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu T^{\lambda y} + \Gamma_{\lambda\mu}^y T^{\mu\lambda} = 0 \\
&= \partial_\mu T^{\mu y} + \frac{1}{\tau} T^{\tau y} = 0 \\
\nabla_\mu T^{\mu\eta} &= \partial_\mu T^{\mu\eta} + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu T^{\lambda\eta} + \Gamma_{\lambda\mu}^\eta T^{\mu\lambda} = 0 \\
&= \partial_\mu T^{\mu\eta} + \frac{3}{\tau} T^{\tau\eta} = 0
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Tyto rovnice je možné v principu řešit numericky. Pokud se omezíme na jednodimenzionální Bjorkenův tok, kde čtyřrychlost má tvar (3.60) a jednotlivé nenulové komponenty tenzoru hybnosti a energie mají tvar

$$T^{\tau\tau} = \epsilon, \quad T^{xx} = p, \quad T^{yy} = p, \quad T^{\eta\eta} = \frac{p}{\tau^2}, \tag{3.62}$$

kde jsme využili (3.5). Rovnice (3.61) mají jednodušší tvar a dostáváme

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T^{\mu\tau} + \frac{1}{\tau} T^{\tau\tau} + \tau T^{\eta\eta} &= \partial_\tau T^{\tau\tau} + \frac{1}{\tau} \epsilon + \tau \frac{1}{\tau^2} p \\
&= \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{\epsilon + p}{\tau} = 0
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Jestliže budeme uvažovat konstantní rychlost zvuku ve tvaru $p = c_s^2 \epsilon$ a stavovou rovnici jako funkci $p = p(\epsilon)$, dostáváme analytické řešení diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{(1 + c_s^2) \epsilon}{\tau} = 0 \Rightarrow \epsilon(\tau) = \epsilon(\tau_0) \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{(1+c_s^2)}, \quad (3.64)$$

kde $\tau_0 = 1 \text{ fm}/c$ je počáteční podmínka. Vidíme, že hustota energie klesá od své počáteční hodnoty s exponentem, který závisí na rychlosti zvuku. Pro ideální relativistický plyn $c_s^2 = \frac{1}{3}$ máme

$$\epsilon \sim \tau^{-\frac{4}{3}}. \quad (3.65)$$

Je zřejmé, že další zpřesnění a přiblížení se k reálnému světu, může být dosaženo zahrnutím efektů příčné expanze.

3.7 Relativistické Navier-Stokes rovnice

Nyní vytvoříme další rozvoj tenzoru energie a hybnosti. V případě, kdy nebudeme zanedbávat efekt viskozity, musíme uvažovat obecnější tvar tenzoru $T^{\mu\nu}$. Uvažujme tenzor ve tvaru

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu}, \quad (3.66)$$

kde $T_{(0)}^{\mu\nu}$ je tvar tenzoru energie a hybnosti ideální tekutiny a $T_{(1)}^{\mu\nu}$ zahrnuje viskózní část, která způsobuje disipaci v systému. Tento tenzor můžeme sestavit z gradientů ∇_{μ}^{\perp} stavových veličin ϵ a u^{μ} ve tvaru:

$$\nabla_{\mu}^{\perp} u^{\mu}, \quad \nabla_{\mu}^{\perp} \ln \epsilon, \quad \nabla_{\mu}^{\perp} u_{\nu}, \quad (3.67)$$

kde stavební bloky (3.67) kombinujeme z nultého řádu ϵ , u^{μ} a $g^{\mu\nu}$. Nyní je důležité diskutovat význam čtyřrychlosti u^{μ} . V relativistické mechanice tok energie zahrnuje nutně tok hmoty. Ale na druhou stranu v případě, že existuje tok tepla, pak definice rychlosti pomocí hustoty toku hmoty není úplně tak správná. Definice pro rychlostní podmínku podle Landaua, kterou v této práci budeme používat, bude - v lokální klidové soustavě (LKS) je hybnost elementu nulová a energie, vyjádřena pomocí ostatních termodynamických veličin, je vyjádřena stejným způsobem, jako když disipativní procesy nejsou přítomny. Jinými slovy v LKS komponenty $T_{(1)}^{00} = T_{(1)}^{0i} = 0$. V LKS platí, že $u^i = 0$, v libovolné soustavě dostaneme

$$u_{\mu} T_{(1)}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.68)$$

Vidíme tedy z (3.66) a (3.68), že očekávaná hodnota tenzoru energie splňuje *Landouvu definici rychlosti*

$$u_{\mu} T^{\mu\nu} = \epsilon u^{\nu}. \quad (3.69)$$

Vzhledem k tomu, že $T_{(1)}^{\mu\nu}$ je symetrický tenzor druhého řádu, jediné možné kombinace stavebních bloků jsou $\Delta_{\mu\nu} \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda}$ a symetrická kombinace $\nabla_{(\mu}^{\perp} u_{\nu)} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mu}^{\perp} u_{\nu} + \nabla_{\nu}^{\perp} u_{\mu})$. Pro pozdější účely je příhodné uvažovat dvě lineární kombinace těchto dvou členů, a to

$$\Delta^{\mu\nu} \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda}, \quad \sigma^{\mu\nu} = 2 \nabla_{\perp}^{(\mu} u^{\nu)} - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} \nabla_{\lambda}^{\perp} u^{\lambda}, \quad (3.70)$$

kde tenzor $\sigma^{\mu\nu}$ má nulovou stopu, $g_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 0$. Nyní lze rozepsat příspěvek prvního řádu rozvoje tenzoru energie a hybnosti $T_{(1)}^{\mu\nu}$ jako

$$T_{(1)}^{\mu\nu} = -\eta\sigma^{\mu\nu} - \zeta\Delta_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}^{\perp}u^{\lambda}, \quad (3.71)$$

kde $\eta(\epsilon)$ a $\zeta(\epsilon)$ jsou hydrodynamické koeficienty závislé na hustotě ϵ , které mohou být rozpoznány jako koeficient smykové a objemové viskozity. Pohybové rovnice dostaneme obdobným způsobem jako u relativistických Eulerových rovnic

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = \nabla_{\mu}(T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.72)$$

tento vztah se dá ekvivalentně přepsat $\nabla_{\mu}(T_{(0)}^{\mu\nu} = -\nabla_{\mu}T_{(1)}^{\mu\nu})$. Použitím časopodobných a prostoropodobných operátorů projekce dostaneme

$$\begin{aligned} D\epsilon + (\epsilon + P)(\nabla_{\lambda}^{\perp}u^{\lambda}) &= \frac{\eta}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \zeta(\nabla_{\lambda}^{\perp}u^{\lambda})^2, \\ (\epsilon + P)Du^{\alpha} + c_s^2\nabla_{\perp}^{\alpha}\epsilon &= \Delta_{\nu}^{\alpha}\nabla_{\mu}(\eta\sigma^{\mu\nu} + \zeta\delta^{\mu\nu}(\nabla_{\lambda}^{\perp}u^{\lambda})). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Tyto rovnice jsou známe jako relativistické rovnice viskózní tekutiny nebo také Navier-Stokesovy rovnice. Na rozdíl od jejich nerelativistické verze jsou užitečné pouze pro malou třídu problémů, které lze řešit analyticky. Jejich praktické numerické použití je omezeno skutečností, že porušují kauzalitu, což zase způsobuje nestability.

Tímto způsobem můžeme přidávat další vyšší členy do rozvoje (3.66) a dostávat se dále a dále od statické rovnováhy. Je příhodné zavést zápis, kde rozdělíme korekce k nultému řádu tenzoru energie a hybnosti $T_{(0)}^{\mu\nu}$ na část s nulovou stopou $\pi^{\mu\nu}$ a nenulovou stopou $\Delta^{\mu\nu}\Pi$. Hodnota tenzoru energie a hybnosti v libovolném řádu je

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle &= T_{(0)}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}\Pi \\ \pi^{\mu\nu} &= T_{(1)}^{<\mu\nu>} + T_{(2)}^{<\mu\nu>} + \dots, \quad \Pi = \frac{1}{3}(T_{(1)\mu}^{\mu} + T_{(2)\mu}^{\mu}) + \dots, \end{aligned} \quad (3.74)$$

kde $\pi^{\mu\nu}$ nazýváme smykovým tenzorem a Π objemovým tenzorem. Horním označením indexů $A^{<\mu\nu>}$ rozumíme

$$A^{<\mu\nu>} \equiv \frac{1}{2}\Delta^{\mu\lambda}\Delta^{\nu\rho}(A_{\lambda\rho} + A_{\rho\lambda}) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta^{\lambda\rho}A_{\lambda\rho} \quad (3.75)$$

Pokud se vrátíme k (3.71), implikuje to

$$\pi^{\mu\nu} = -\eta\sigma^{\mu\nu}, \quad \Pi = -\zeta\nabla_{\lambda}^{\perp}u^{\lambda} \quad (3.76)$$

kteřé se někdy označují jako konstitutivní rovnice (prvního řádu). Na rozdíl od ideálních tekutin jsou konstitutivní rovnice (3.76) obecně naznačují, že tenzor energie a hybnosti již není izotropní v lokálně klidové soustavě. Zejména diagonální prvky prostorové části tenzoru $T^{\mu\nu}$, které pro ideální tekutiny měly interpretaci lokálního tlaku P , mají nerovnovážné korekce. Musíme tedy zahrnout korekce účinného tlakového tenzoru $P\delta_j^i + \pi_{j,LRF}^i + \delta_j^i\Pi$ takový, aby efektivní tlak ve směru i byl [17]

$$P_{eff}^{(i)} = P + \pi_{i,LRF}^i + \Pi, \quad (3.77)$$

kde $\pi_{LRF}^{\mu\nu}$ je smykový tenzor transformovaný do lokální klidové soustavy.

3.7.1 Aplikace: Limitní přechod k nerelativistickým Navier-Stokes rovnicím

V případě malých rychlostí $|\mathbf{v}| \ll 1$ a pro Minkowského souřadnice, aproximace (3.57) aplikované na relativistické Navier-Stokesovy rovnice spolu s předpokladem, že η, ζ jsou konstantní, vede na

$$\begin{aligned} \partial_t \epsilon + \vec{v} \cdot \vec{\partial} \epsilon + \epsilon \vec{\partial} \cdot \vec{v} &= \partial_t \epsilon + \vec{\partial}(\epsilon \vec{v}) = 0 \\ \epsilon \partial_t \vec{v} + \epsilon (\vec{v} \cdot \vec{\partial}) \vec{v} + \vec{\partial} P &= \eta \partial^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\partial} (\partial \cdot \vec{v}), \end{aligned} \quad (3.78)$$

Vidíme, že první rovnice koresponduje s klasickou rovnicí kontinuity. Druhá z výše uvedených rovnic představuje klasické Navier-Stokesovy rovnice. [17]

Kapitola 4

Hydrodynamické modelování

V této kapitole shrneme postup hydrodynamického modelování, které jsme prováděli pro necentrální srážky Au+Au při energii $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV. Hydrodynamické modelování srážek těžkých iontů se dnes provádí obvykle ve třech fázích. Pro počáteční stav (initial state=IS) se používají různé modely například: UrQMD [5], GLISSANDO 2 (dále jen GLISSANDO) [6] nebo TRENTTo [15]. Přechod od počátečního stavu k dynamickému popisu evoluce tekutiny probíhá často při fixním $\tau = \tau_0$. Následný hydrodynamický vývoj horké a husté hmoty se provádí například pomocí 3 rozměrného viskózního modelu vHLLÉ [12], který jsme použili v této práci. Přechod od hydrodynamické expanze na částice probíhá na nadploše při fixní energii hustoty $s_w = 0.5$ GeV/fm³. Při propagaci na částice jsou částice vzorkovány pomocí distribucí ve fázovém prostoru podle Cooper-Fryovy formule, která je rozšířená o opravy kvůli smykové viskozitě.

4.1 Počáteční stav

V této práci se především zaměříme na simulace srážek těžkých iontů s počátečním modelem GLISSANDO (GLauber Initial-State Simulation AND mOre). V následující kapitole shrneme základní principy tohoto modelu. GLISSANDO (podrobnosti v [6]) je implementace Glauberova modelu ve verzi Monte Carlo. Simulace Glauber Monte-Carlo se staly základním nástrojem analýzy relativistických srážek těžkých iontů. Tento přístup poskytuje počáteční stav vznikající těsně po srážce dvou relativistických jader. V rámci semi-klasického Glauberova modelu během první fáze kolize jednotlivé interakce mezi nukleony ukládají příčnou energii. Tyto základní procesy jsou klasifikovány jako zraněné nukleony nebo binární srážky.

4.2 Hydrodynamická a posthydrodynamická fáze

Hydrodynamická fáze je modelována s 3-dimenzionálním relativistickým hydrodynamickým viskózním modelem vHLLÉ (viscous Harten-Lax-van Leer-Einfeldt), podrobnosti viz [7, 12, 13]. Model vHLLÉ řeší Israel-Stewartovy rovnice relativistické

viskózní hydrodynamiky v $3 + 1$ rozměrech, jmenovitě při zavedení podmínky pro zachování energie-hybnosti a baryonového čísla jako proudového čtyřvektoru

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_\mu N^\mu = 0, \quad (4.1)$$

pak je evoluce pro tenzor smykového napětí dána

$$\langle u^\lambda \nabla_\lambda \pi^{\mu\nu} \rangle = -\frac{\pi^{\mu\nu} - \pi_{NS}^{\mu\nu}}{\tau_\pi} - \frac{4}{3} \pi^{\mu\nu} \nabla_\lambda u^\lambda, \quad (4.2)$$

kde $\pi_{NS}^{\mu\nu}$ je smykový tenzor v Navier-Stokesově limitě. Stavová rovnice použita v hydrodynamice fázi je chirální model stavové rovnice [12]. Obsahuje správné stupně volnosti, tj. hadrony při nízké teplotě, kvarky a gluony při vysokých teplotách. Stavová rovnice má přechod typu crossover mezi hadronickou a partonickou fází pro všechny hodnoty byronového-chemického potenciálu μ_B . Objemová viskozita je nastavena na nulu i přesto, že hydrodynamický kód je schopen vyvíjet i část s objemovou viskozitou.

Kromě energie a hybnosti i nábojové hustoty jsou explicitně propagovány a zahrnuty do stavové rovnice, takže je kód vhodný pro simulace expanze hmoty s konečnou baryonovou hustotou. Tento kód si ponechává schopnost řešit rovnice ideální hydrodynamiky v limitě nulových viskozit pomocí Godunovova algoritmu. Milneho souřadnice se používají k popisu převládající expanze v podélném směru.

Přechod od hydrodynamické evoluce k částicím probíhá na nadploše s pevně definovanou hustotou energie $s_w = 0.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$, když se vyvíjející systém nalézá v hydrodynamické fázi. Nadplocha vymrznutí je konstruována v průběhu hydrodynamického vývoje pomocí programu Cornelius [11]. Monte Carlo produkce hadronů do prostoru je prováděna podle Cooper-Fryovy formule [8]

$$p^0 \frac{d^3 N_i}{d^3 p} = \int d\sigma_\mu p^\mu f(p \cdot u(x), T(x), \mu_i(x)), \quad (4.3)$$

kde T je teplota, μ_i je chemický potenciál a f je obecná distribuční funkce. Jelikož částicová nadplocha je rozložena do velmi malých prvků, generace hadronů se provádí pro každý prvek samostatně. Aby se zohlednily disipativní procesy a opravy distribuční funkce f , je použit Gradův 14-momentový ansatz pro jednodimenzionální systém. Předpokládá se, že korekce jsou pro všechny hadrony stejné. Rozdělení částic je simulováno v klidové soustavě tekutiny na každém povrchovém elementu pomocí (4.3)

$$\frac{d^3 \Delta N_i}{dp^* d(\cos \theta) d\phi} = \frac{\Delta \sigma_\mu^* p^{*\mu}}{p^{*0}} p^{*2} f_{eq}(p^{*0}; T; \mu_i) [1 + (1 \mp f_{eq} \frac{p_\mu^* p_\nu^* \pi^{*\mu\nu}}{2T^2(\epsilon + p)})], \quad (4.4)$$

kde distribuční funkce f v (4.4) je funkcí teploty a chemického potenciálu, horní index $*$ označuje veličiny v lokální klidové soustavě. Toto rozdělení umožňuje produkci částic nezávisle na povrchovém elementu. Hadrony vzaté z částicové nadplochy jsou předány do modelu UrQMD (Ultra relativistic Quantum Molecular Dynamics viz [5]) pro simulaci hadronových rozptylů v posthydrodynamické fázi, stejně tak jako rozpady rezonancí.

Kapitola 5

Výsledky hydrodynamických simulací

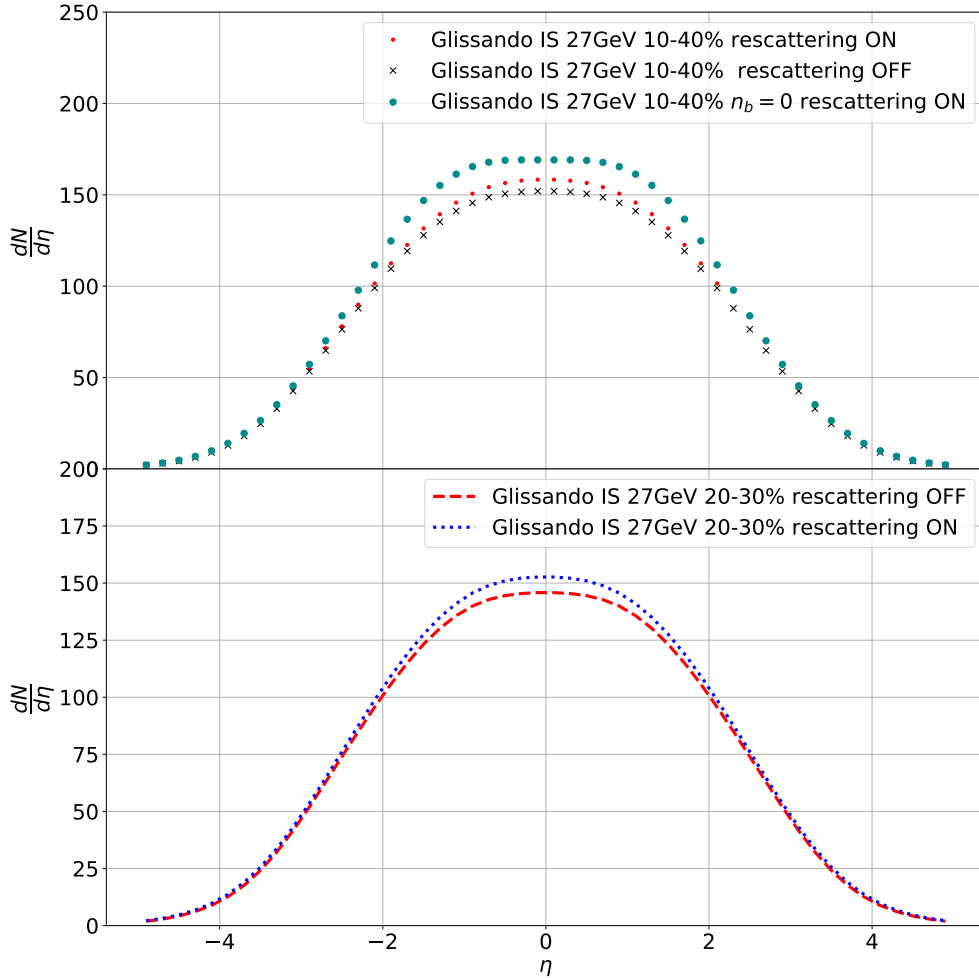
V této kapitole shrneme výsledky námi provedených simulací. Shrňeme naše výsledky ze simulací srážek těžkých iontů Au+Au při energii $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV. Při této energii směrový tok vykazuje velice zajímavé chování. Ukázalo se, že směrový tok pro piony a protony má odlišné chování. Pro piony je směrový tok v záporné rapiditě záporný, pro protony kladný. Na toto chování již poukazovali autoři v [9], ale nevysvětlili, proč tomu tak je. Naší snahou bude tedy najít důvod a původce, který způsobuje tento jev. Hydrodynamické simulace nám umožní tohoto původce odhalit, jelikož budeme moci měnit parametry srážek z množiny volitelných parametrů: centralita, rozptyl hadronů a nastavení nulové baryonové hustoty. Je samozřejmé, že naše simulace srážek musí odpovídat realitě tedy experimentálním datům. V prvních dvou podkapitolách se zaměříme na klasické pozorovatelné veličiny - rozdělení nabitých hadronů v rapiditě a spektrum v příčné hybnosti. Následně zaměříme naši pozornost na zmiňovaný směrový tok hadronů.

Nejprve se podíváme na centralitní třídu 20-30% a následně pak na třídu 10-40%. Výsledky porovnáme s experimentem STAR. Objemová viskozita a poměr smykové viskozity k entropii η/s jsou nastaveny na nulu. Hydrodynamický vývoj začíná při $\tau_0 = 1$ fm a přechod od hydrodynamické evoluce k částicím probíhá při $s_w = 0.5$ GeV/fm³. Provedeme 3 rozdílné simulace pro centralitní třídu 10-40%. Nejprve se zapnutým rozptylem hadronů a následně bez něj, abychom zjistili vliv rozptylů na tvary spekter v příčné hybnosti, rozdělení nabitých hadronů v rapiditě a směrový tok. Poté pro tuto centralitní třídu provedeme speciální simulaci s $n_b = 0$, abychom zjistili chování hadronů při této fixní baryonové hustotě. Pro centralitní třídu 20-30% provedeme simulace se zapnutým a vypnutým rozptylem.

5.1 Rozdělení nabitých hadronů v rapiditě

Nejprve jsme začali s nezákladnější pozorovatelnou veličinou: pseudorapiditním rozdělením nabitých hadronů. Rozdělení pseudorapiditů jsou zobrazeny na Obrázku 5.1 simulace pro srážky Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 20-30% a 10-40% ze simulace vHLLÉ + UrQMD s počátečními podmínkami z modelu GLISSANDO.

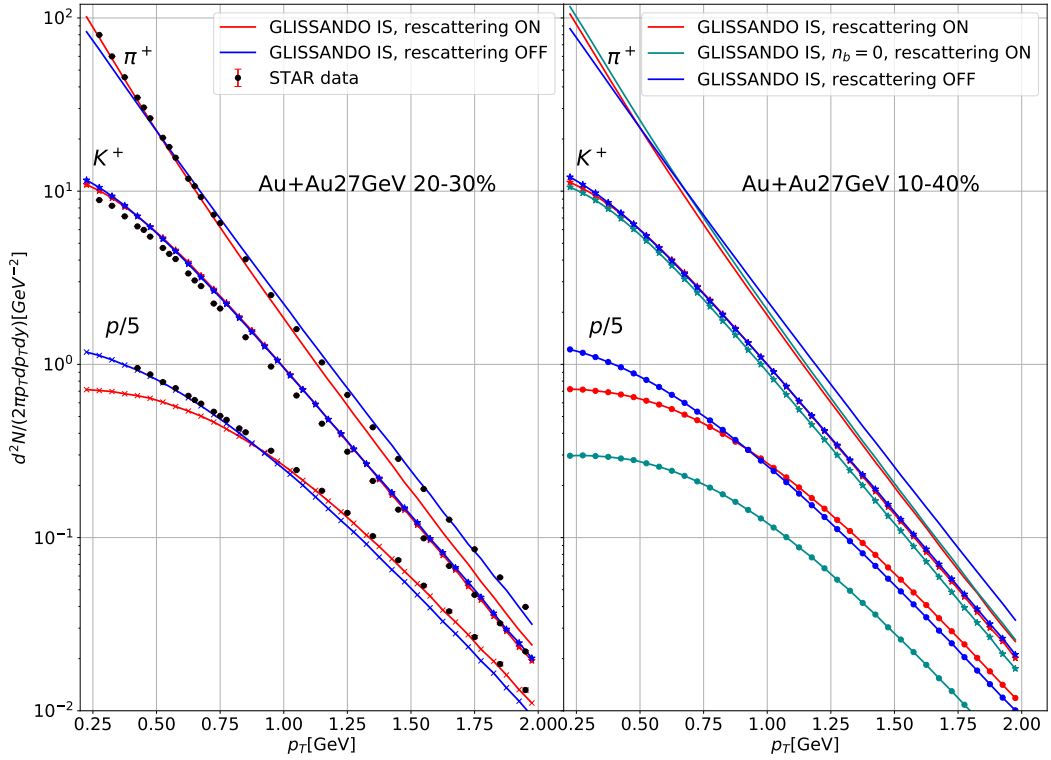
Obrázek 5.1 znázorňuje porovnání simulací se zapnutým rozptylem hadronů v UrQMD (rescattering ON) a vypnutým rozptylem (rescattering OFF). V obou případech jsou zahrnuty i rezonanční rozpady (částic, které mají velice krátkou dobu života). Pro centralitu 10-40% je znázorněna i simulace s nulovou baryonovou hustotou, tj. $n_B = 0$. Zatímco pozorovatelné jako p_T spektra, směrový v_1 nebo eliptický v_2 byly naměřeny pro mnoho energií na urychlovači STAR, distribuce pseudorapiditity nebyly měřeny pro námi zvolenou energii.



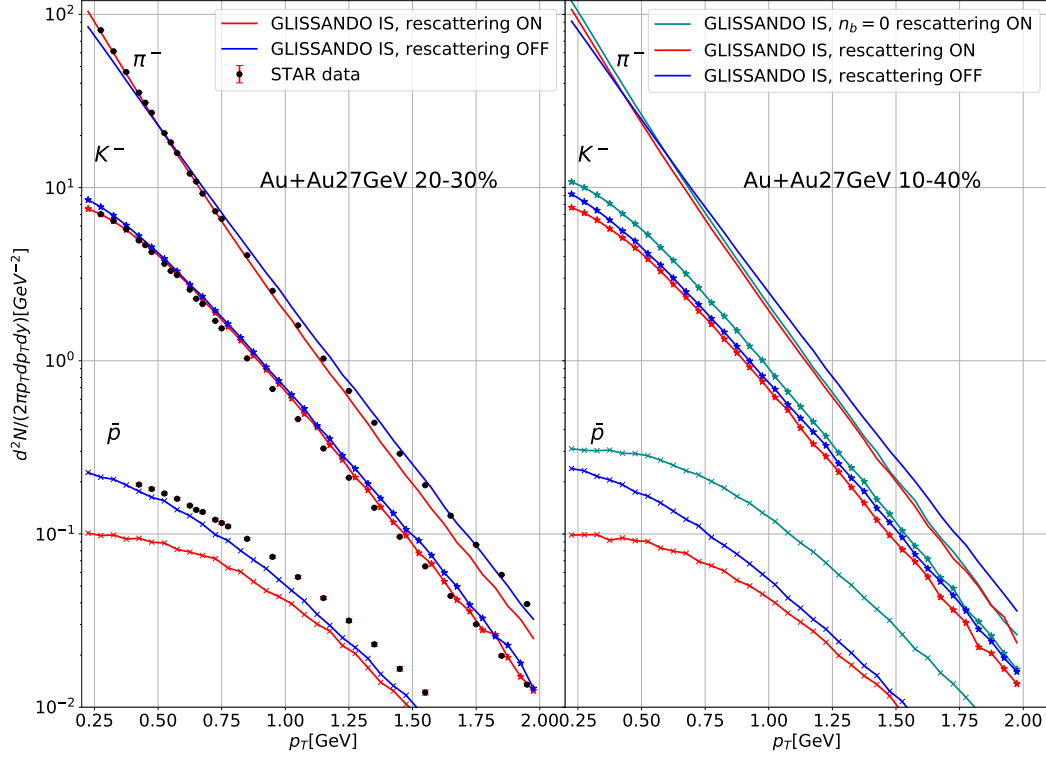
Obrázek 5.1: $dN/d\eta$ pro nabitě hadrony ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 20-30% (dolní) a 10-40% (horní) ze simulací vHLLÉ+UrQMD s GLISSANDO.

5.2 Příčné hybnostní spektrum

Dále jsme se zaměřili na p_t spektrum identifikovaných hadronů ve střední rapiditě - piony π^+ , kaony K^+ , protony p , piony π^- , antiprotony \bar{p} a kaony K^- . Na Obrázku 5.2 a Obrázku 5.3 jsou vidět jednotlivá p_t spektra nabitých hadronů pro 5 různých simulací. Nejprve jsme provedli simulace s centralitou 20-30% s rozptylem hadronů a následně bez rozptylu. Naše výsledky pro srážky Au+Au s centralitou 20-30% jsme porovnali s naměřenými daty [3]. Z grafů závislosti p_t spektra na p_t je vidět, že simulace provedené s rescattering ON odpovídají lépe experimentálním datům. Závislosti p_t spektra kladně nabitých hadronů jsou vyneseny na Obrázku 5.2 a pro záporně nabitě hadrony na Obrázku 5.3. Stejně jako u centrality 20-30% tak i pro centralitu 10-40% jsme nejprve provedli simulace s rozptylem a následně bez něj. Jelikož p_t spektrum pro centralitu 10-40% nebylo měřeno, nemohli jsme naše výsledky simulací porovnat s experimentálně naměřenými hodnotami. Nakonec jsme provedli i simulace s nulovou baryonovou hustotou.



Obrázek 5.2: Příčné hybnostní spektrum pozitivně nabitých pionů π^+ , kaonů K^+ a protonů p ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% z vHLE+UrQMD simulace s GLISSANDO. Experimentální data pro srážky $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV Au+Au 20-30% jsou převzaty z [3].



Obrázek 5.3: Příčné hybnostní spektrum negativně nabitých pionů π^- , kaonů K^- a antiprotonů \bar{p} ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% z vHLLÉ+UrQMD simulace s GLISSANDO. Experimentální data pro srážky Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV 20-30% jsou převzaty z [3].

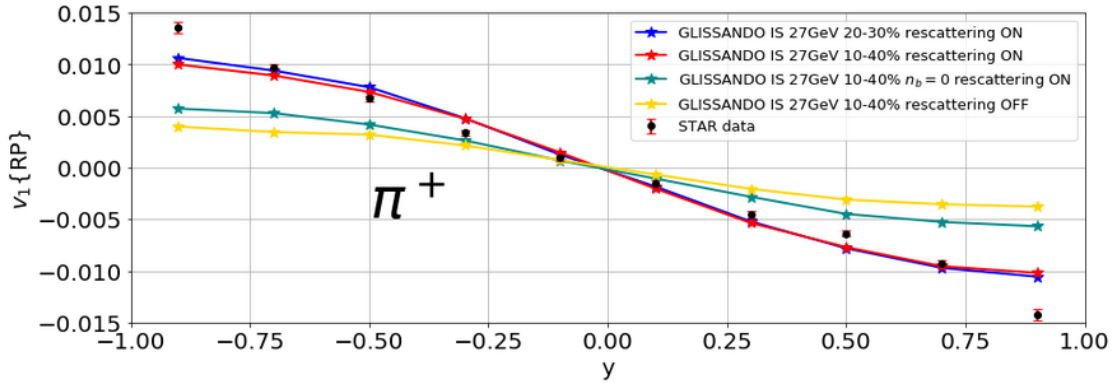
5.3 Směrový tok v_1 hadronů

Posledním krokem našich simulací bylo měření směrového toku. Směrový tok v_1 je definován jako první koeficient ve Fourierově rozvoji distribuce částic viz (2.29). Na Obrázku 5.4 až 5.6 jsou znázorněny závislosti $v_1(y)$ pro π^+ , p a K^+ pro srážky Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% z vHLLÉ+UrQMD simulace s GLISSANDO. Na Obrázku 5.7 až 5.9 jsou znázorněny závislosti $v_1(y)$ pro π^- , \bar{p} a K^- pro srážky Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% z vHLLÉ+UrQMD simulace s GLISSANDO. Stejně jako u předešlých, zmíněných pozorovatelných veličin, grafy zahrnují jednak simulace s rozptylem i bez rozptylu, tak i speciální případ simulace s nulovou baryonovou hustotou. Experimentální data pro srážky Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV 10-40% jsou převzaty z [1] a [2].

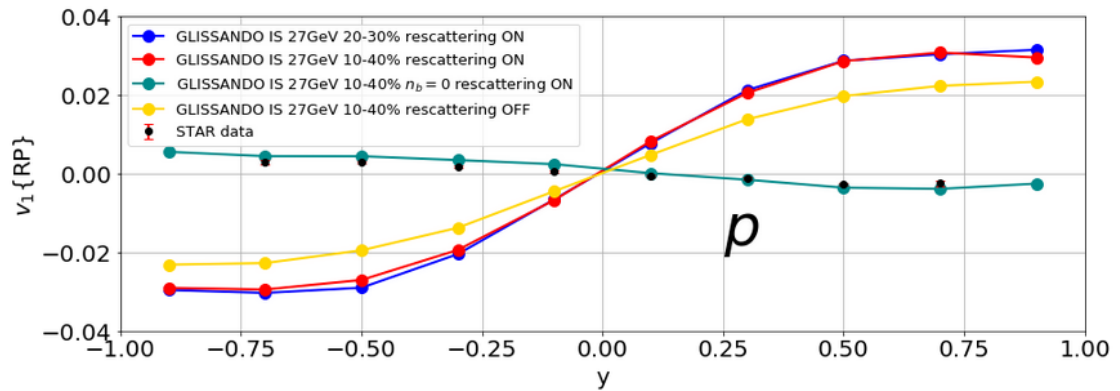
Z grafů je vidět, že protonová závislost $v_1(y)$ vychází opačně než pro ostatní typy částic a taky opačně, než ukazují naměřená data. Protože chceme pochopit, zda tento jev nějakým souvisí s baryonovou hustotou, udělali jsme simulace při $n_B = 0$.

Naše výsledky pro $n_b = 0$ kvalitativně souhlasí s experimentálními daty. A opravdu pozorujeme, že se průběh závislosti $v_1(y)$ pro protony kvalitativně změní. Porovnáním Obrázku 5.4 a Obrázku 5.5, zjistíme, že chování protonů a pionů je doopravdy opačné. Chování $v_1(y)$ pro π^+ , π^- , \bar{p} , K^+ a K^- má obdobný průběh: v záporné rapiditě $v_1(y)$ nabývá kladných hodnot, poté monotonně klesá a v kladné rapiditě nabývá záporných hodnot.

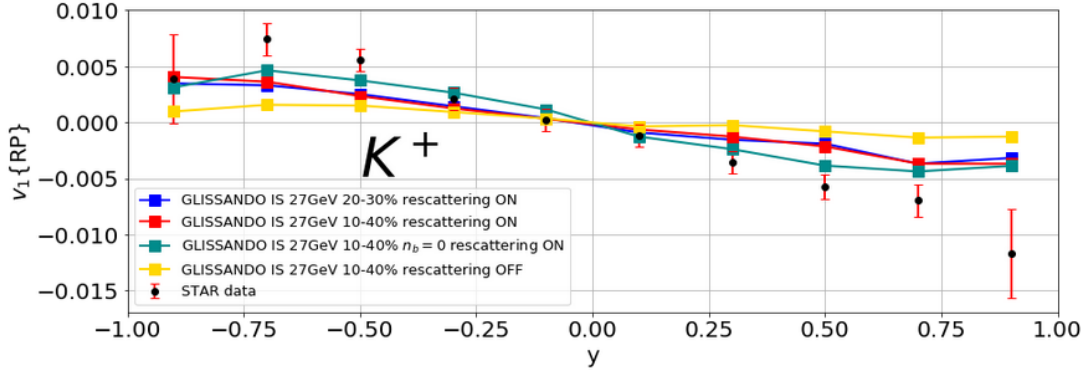
Pokud se podíváme na Obrázek 5.4 až 5.9, zjistíme, že $v_1(y)$ dosahuje vyšších hodnot pro simulace se zapnutým rozptylem pro obě centralitní třídy. Simulace s vypnutým rozptylem nabývají nižších hodnot.



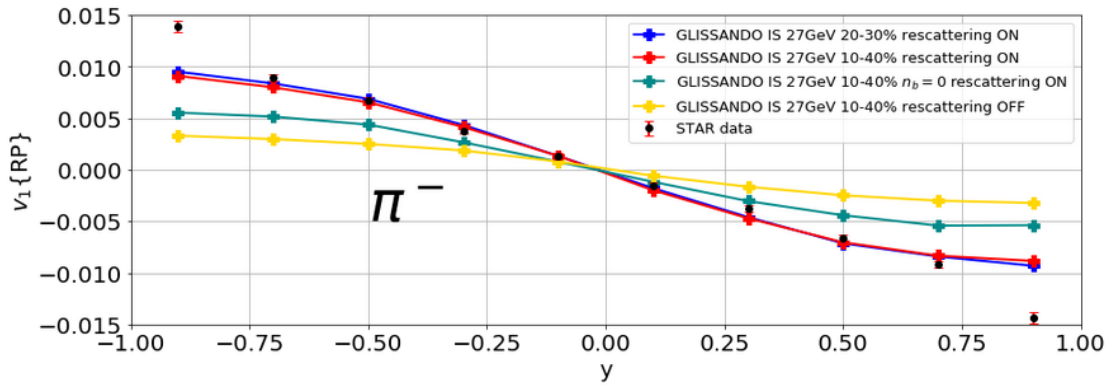
Obrázek 5.4: Směrový tok $v_1(y)$ pro π^+ a srážky ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% ze simulací vHLL+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro 10-40% převzata z [2].



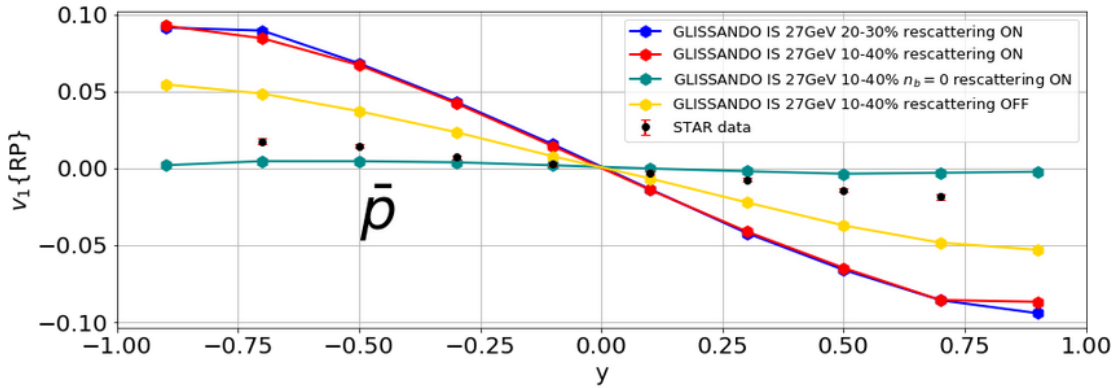
Obrázek 5.5: Směrový tok $v_1(y)$ pro p ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% ze simulací vHLL+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro 10-40% převzata z [2].



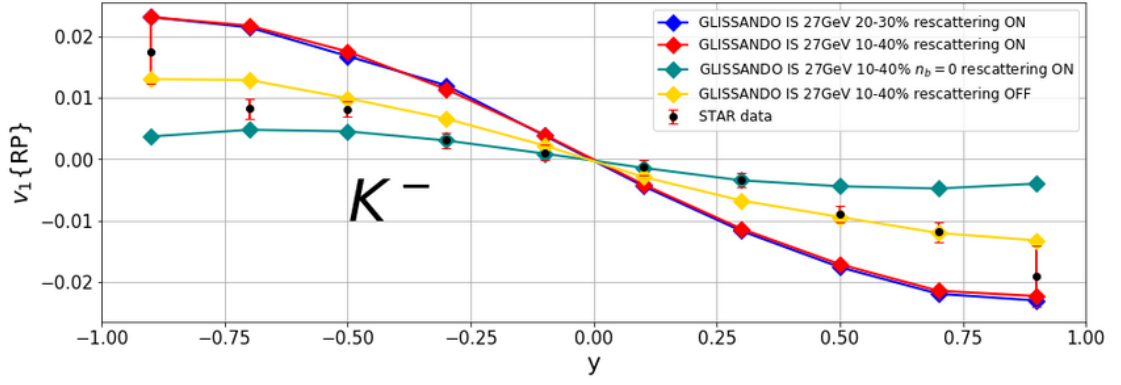
Obrázek 5.6: Směrový tok $v_1(y)$ pro K^+ ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% ze simulací vHLE+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% jsou převzata z [1].



Obrázek 5.7: Směrový tok $v_1(y)$ pro π^- ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% ze simulací vHLE+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [2].

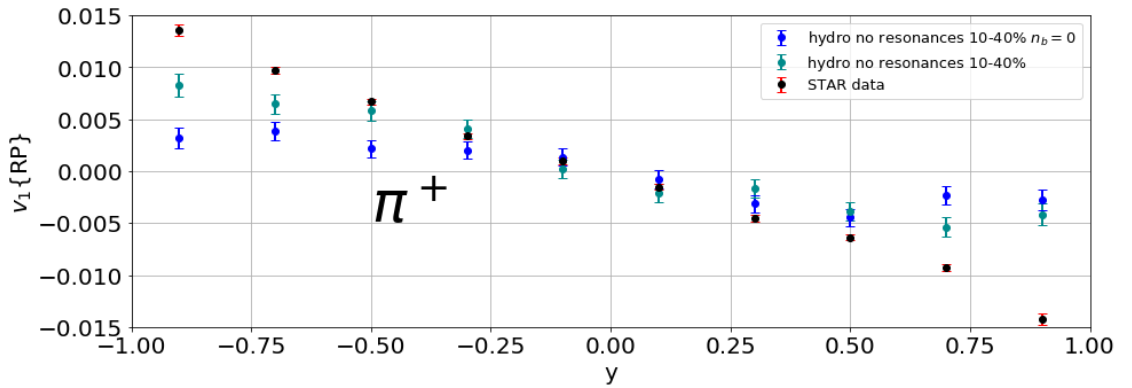


Obrázek 5.8: Směrový tok $v_1(y)$ pro \bar{p} ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% ze simulací vHLE+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [2].

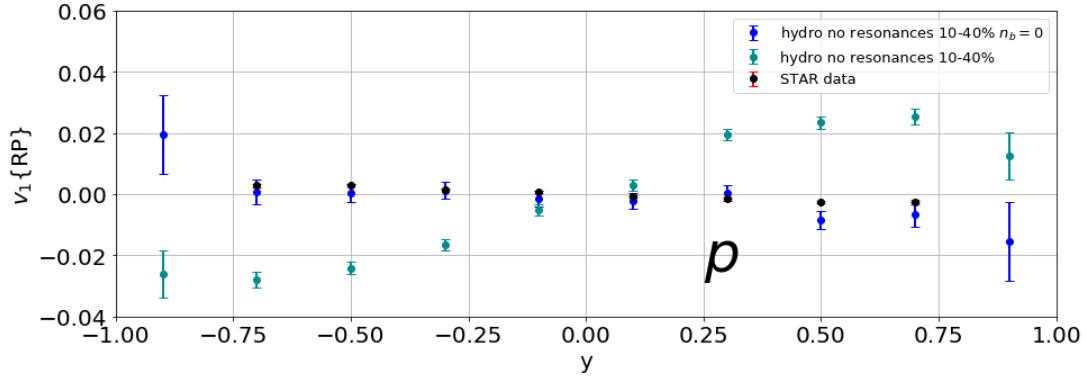


Obrázek 5.9: Směrový tok $v_1(y)$ pro K^- ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30% ze simulací vHLE+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [1].

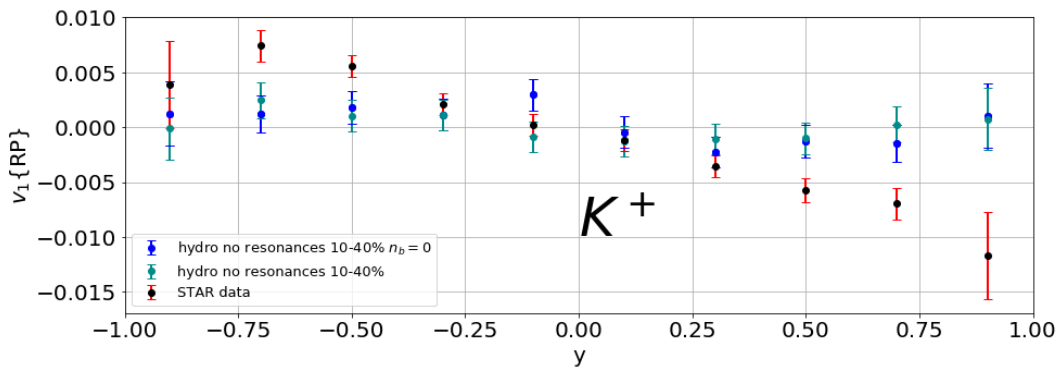
Hydrodynamické simulace nám umožňují se omezit na hadrony, které pocházejí přímo z hydrodynamické expanze. Tyto hadrony vylétávají přímo z rozpínajícího se fireballu. Předtím, než jsou implementovány do hadronové fáze a rozptylují se. Na Obrázku 5.10 až 5.15 jsou znázorněny závislosti $v_1(y)$ pro π^+ , p a K^+ pocházející z hydrodynamické evoluce a na Obrázku 5.7 až Obrázek 5.9 jsou znázorněny závislosti $v_1(y)$ pro π^- , \bar{p} a K^- . Tyto grafy jsou vyneseny pro simulaci s centralitou 10-40% a simulaci s nulovou baryonovou hustotou. Rezonanční rozpady nejsou zahrnuty. Z těchto grafů je vidět, že chyba měření je relativně velká, jelikož jsou zahrnuty jen hadrony, které přímo pocházejí z termální produkce. Těchto hadronů je daleko méně, proto dosahujeme takovýchto statistických chyb. Z Obrázků 5.10 až 5.15 můžeme usoudit, že původce odpovědný za rozdíl mezi protony a piony bude ukryt ve fireballu. Naše výsledky pro hadrony pocházející z hydrodynamické evoluce kvalitativně odpovídají experimentálně naměřeným datům.



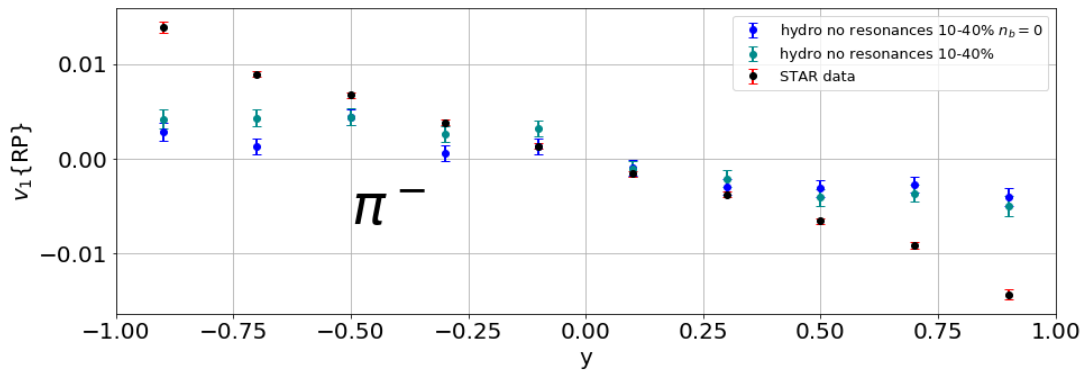
Obrázek 5.10: Směrový tok $v_1(y)$ pro π^+ po hydrodynamické evoluci ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% ze simulací vHLE+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [2].



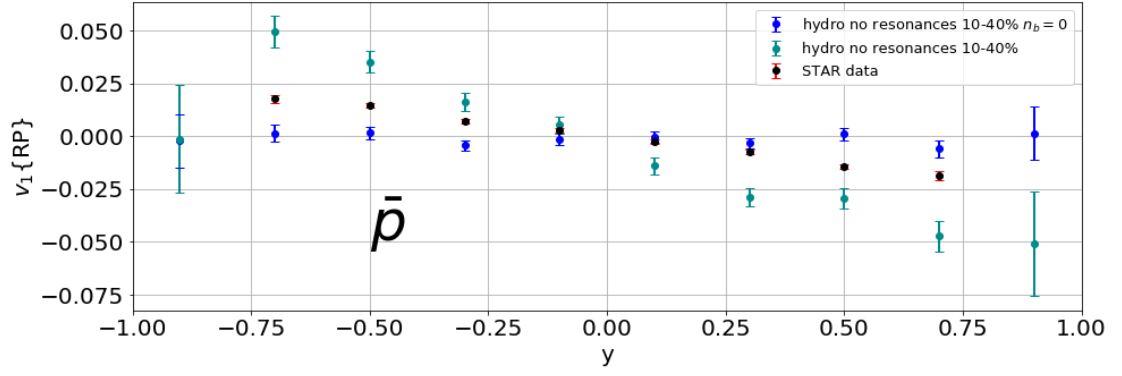
Obrázek 5.11: Směrový tok $v_1(y)$ pro p po hydrodynamické evoluci ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% ze simulací vHLL+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [2].



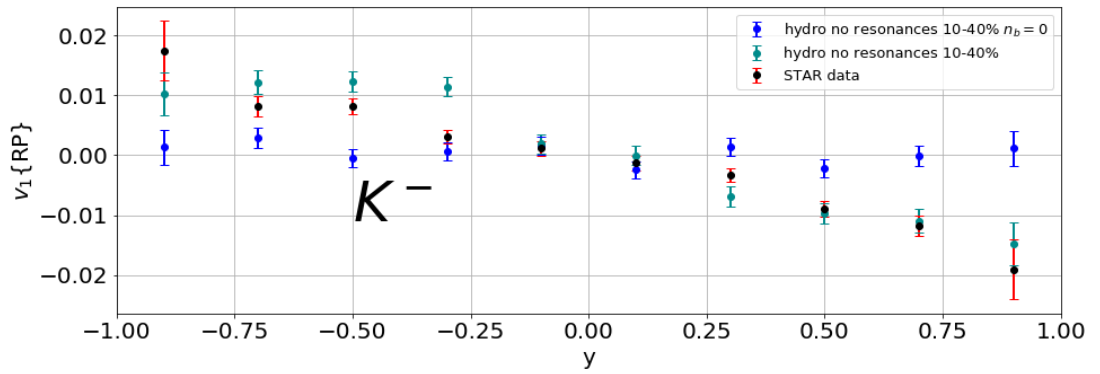
Obrázek 5.12: Směrový tok $v_1(y)$ pro K^+ po hydrodynamické evoluci ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% ze simulací vHLL+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [1].



Obrázek 5.13: Směrový tok $v_1(y)$ pro π^- po hydrodynamické evoluci ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% ze simulací vHLL+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [2].



Obrázek 5.14: Směrový tok $v_1(y)$ pro \bar{p} po hydrodynamické evoluci ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% ze simulací vHLLE+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [2].



Obrázek 5.15: Směrový tok $v_1(y)$ pro K^- po hydrodynamické evoluci ve srážkách Au+Au při $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% ze simulací vHLLE+UrQMD s GLISSANDO. Experimentální data pro centralitu 10-40% převzata z [1].

Dalším krokem v odhalování příčiny $v_1(y)$ bylo zkoumání teploty T a chemického potenciálu μ . Nejprve jsme hadrony vytřídili podle příčné hybnosti p_t , rapidity a azimutálního úhlu ϕ . Podmínky pro příčnou hybnost, rapiditu a azimutální úhel byly nastaveny následovně: $p_t \in (400; 600)$ MeV, $y \in (0.5; 0.8)$ a azimutální úhel byl rozdělen do 8 binů po 45° : $(-22, 5^\circ; 22, 5^\circ)$, $(22, 5^\circ; 67, 5^\circ)$,... Nakonec jsme vynesli vrstevnicové grafy pro teplotu, chemický potenciál a počet produkováných hadronů v příčné rovině po hydrodynamické evoluci. V této práci uvedeme pouze vrstevnicové grafy pro chemický potenciál. Chemický potenciál byl napočítán podle

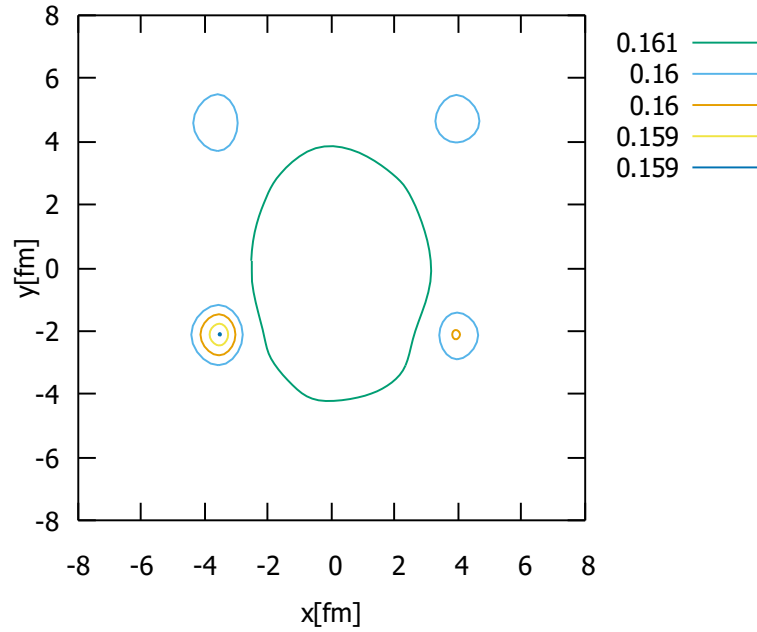
$$\mu = Q\mu_q + S\mu_s + B\mu_b, \quad (5.1)$$

kde μ_b je baryon-chemický potenciál, μ_q je chemický potenciál elektrického náboje, μ_s je podivný chemický potenciál ¹, B baryonové číslo, Q náboj a S podivnost hadronu.

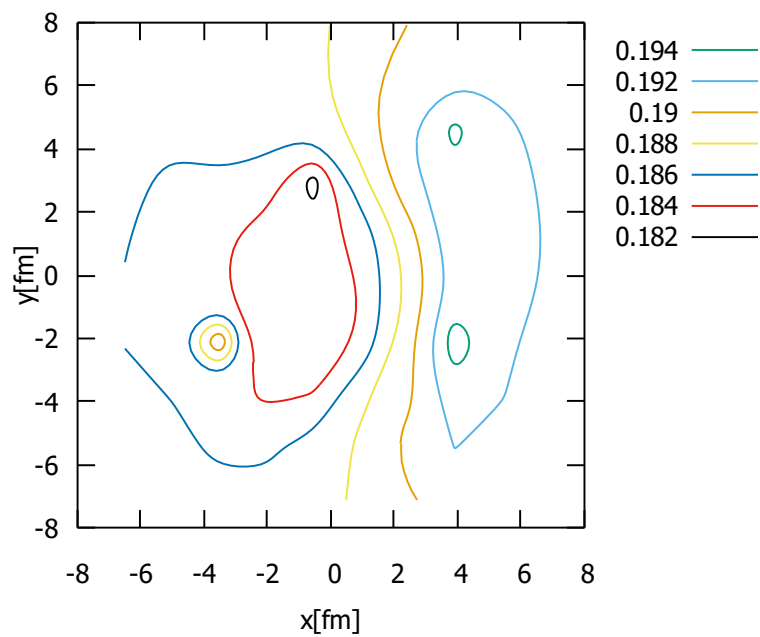
Obrázek 5.16 ukazuje tvar teplotního profilu pro protony ze simulace s centralitou 10-40% v binu $(-22, 5^\circ; 22, 5^\circ)$ v příčné rovině. Je vidět, že teplota se nijak výrazně

¹anglický překlad: strangeness chemical potential

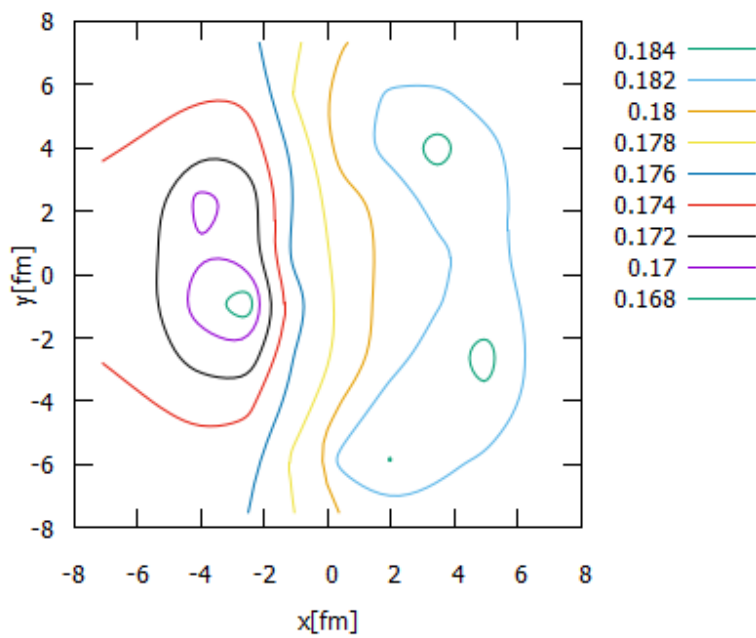
nemění a je konstantní. Na Obrázku 5.17 a Obrázku 5.18 jsou vyneseny vrstevnicové grafy chemického potenciálu v příčné rovině pro p ze simulace s centralitou 10-40% pro azimutální úhlové biny $(-22, 5^\circ; 22, 5^\circ)$ a $(157, 5^\circ; 202, 5^\circ)$. Na Obrázcích 5.19 a 5.20 jsou znázorněny grafy pro \bar{p} pro biny $(-22, 5^\circ; 22, 5^\circ)$ a $(157, 5^\circ; 202, 5^\circ)$.



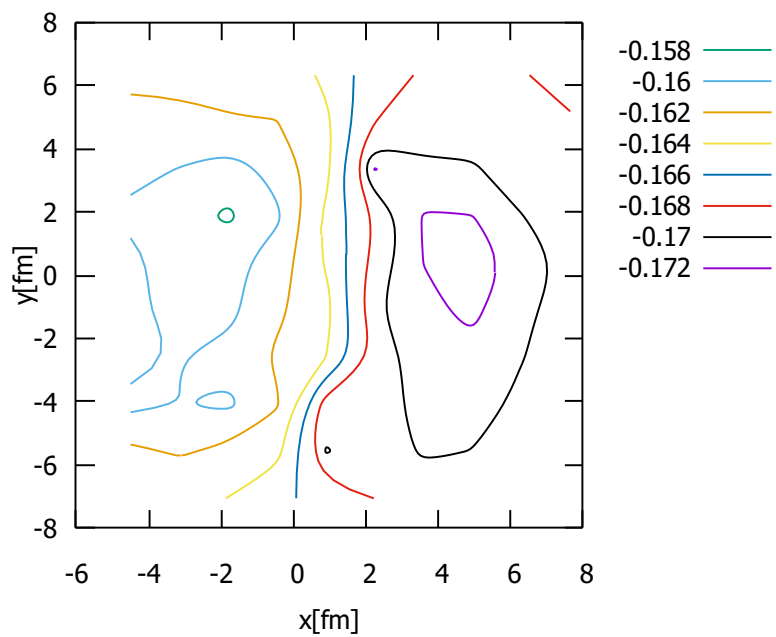
Obrázek 5.16: Teplotní profil pro p v binu $(-22, 5^\circ; 22, 5^\circ)$.



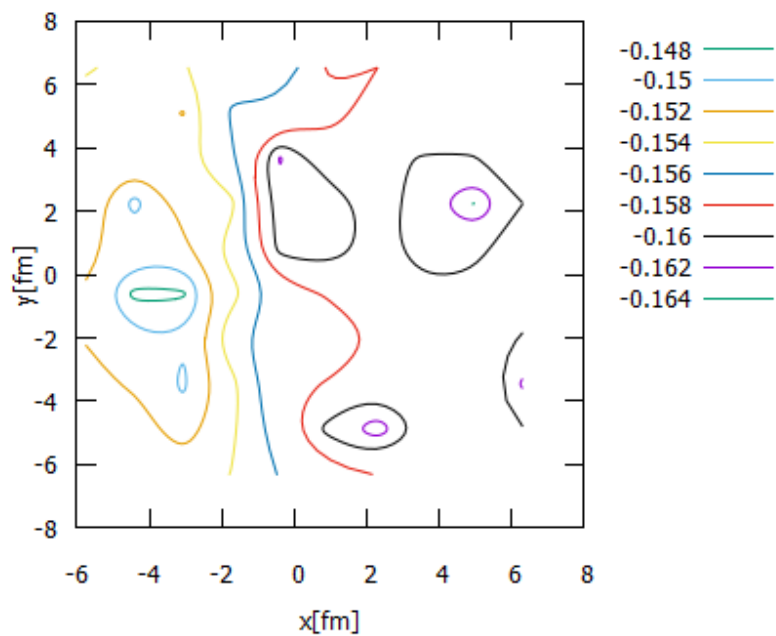
Obrázek 5.17: Chemický potenciál pro p v binu $(-22, 5^\circ; 22, 5^\circ)$.



Obrázek 5.18: Chemický potenciál pro p v binu $(157, 5^\circ; 202, 5^\circ)$.



Obrázek 5.19: Chemický potenciál pro \bar{p} v binu $(-22, 5^\circ; 22, 5^\circ)$.



Obrázek 5.20: Chemický potenciál pro \bar{p} v binu $(157, 5^\circ; 202, 5^\circ)$.

Důvodem pro pozitivní $v_1(y)$ protonů se zdá být profil hustoty baryonů, který je vyjádřen chemickým potenciálem baryonů. Teplota fireballu se pohybuje kolem 160 MeV viz Obrázek 5.16, ale chemický potenciál se od místa s $\phi = 0^\circ$ do $\phi = 180^\circ$ snižuje v průměru o 5 – 10 MeV viz Obrázek 5.17 až 5.20. Při daném p_t chemický potenciál zvyšuje produkci baryonů o faktor $\sim \exp\left(\frac{\mu_B}{T}\right)$, takže rozdíl v μ_B v různých směrech zvyšuje produkci baryonů v těchto směrech odlišně. V „průměrném“ μ_B je rozdíl 5 až 10 MeV pro protony směřující doprava a doleva - pak je relativní rozdíl zhruba $\exp\left(\frac{5}{160}\right)$, kde 160 MeV je průměrná teplota. Tedy 7% účinek na pozitivním směru. To může kvalitativně vysvětlit odlišné chování $v_1(y)$ pro protony, jelikož u ostatních částic tak velký efekt nemáme. Antiprotony vidí stejný účinek, ale na opačné straně, protože jejich chemický potenciál je negativní. To tedy přináší několika procentní efekt v opačném směru.

Dále je zde kinematický efekt, který pochází z expanze, která se musí mírně lišit podle azimutálního úhlu. Tento celkový kinematický účinek musí být takový, aby dominantní tok $v_1(y)$ byl záporný.

Další důležitou poznámkou je, že kinematický efekt je opravdu malý - jen asi 1%. Proto může být obtížné to vidět pouhým okem pouze při pohledu na profily produkce částic.

Závěr

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo studium hydrodynamického popisu srážek těžkých iontů. Především jsme se zaměřili na formulování relativistických rovnic a následnou aplikaci hydrodynamického modelování v částicové fyzice.

První kapitola obsahuje základní poznatky o kvark-gluonovém plazmatu a jeho vzniku. Ve druhé kapitole jsme zkoumali prostoro-časový vývoj srážek těžkých iontů. Zaměřili jsme se na popis příčné a podélné expanze firebalu pomocí statistické fyziky. Na závěr této kapitoly jsme prostudovali anizotropní tok, který vzniká ve srážkách těžkých iontů. Tento tok je důsledkem hydrodynamické expanze, která začíná těsně po srážce dvou jader.

V následující kapitole jsme provedli formulaci teorie relativistické hydrodynamiky. Nejprve jsme zavedli důležitý matematický aparát kovariantní derivaci, která nám umožní, aby námi formulované relativistické hydrodynamické rovnice byly v kovariantním tvaru. Dále jsme odvodili relativistické Eulerovy rovnice, které popisují dynamiku ideální tekutiny, a relativistické Navier-Stokesovy rovnice, které popisují dynamiku viskózní tekutiny. Relativistické formulování hydrodynamiky musí korespondovat s nerelativistickými protějšky, proto jsme pro obě rovnice provedli i nerelativistické limity. Nakonec jsme tuto teorii aplikovali na Bjorkenův model v kovariantním tvaru.

Poslední 2 kapitoly pojednávají o hydrodynamickém modelování v částicové fyzice. Hydrodynamické modelování probíhá ve třech fázích: počáteční stav, hydrodynamický vývoj a přechod na částice. Pro získání vlastních výsledků simulací jsme se omezili na simulace srážek těžkých iontů Au+Au při energii $\sqrt{s_{NN}} = 27$ GeV pro centralitu 10-40% a 20-30%. Provedli jsme simulace se zapnutým, vypnutým rozptylem hadronů a rovněž s nulovou baryonovou hustotou.

Výsledky simulací jsem vynesli do grafů. Rozdělení pseudorapidit nabitých hadronů je zobrazeno na Obrázku 5.1. Naše výsledky jsme zatím nemohli porovnat s experimentálními, jelikož pro námi zvolené centralitní třídy tato měření nebyla dosud provedena.

Výsledky našich simulací pro spektrum příčné hybnosti nabitých hadronů ve střední rapiditě - π^+ , K^+ , p , π^- , \bar{p} a K^- jsme zobrazili do grafů Obrázků 5.2 a 5.3. Naše výsledky pro srážky Au+Au s centralitou 20-30% jsme porovnali s daty [3]. Z grafů závislosti p_t spektra na p_t nám vyplývá, že simulace provedené se zapnutým rozptylem (rescattering ON) odpovídají lépe experimentálním datům až na protony, které tvoří tady výjimku.

Jako poslední úlohu jsem řešili směrový tok pro hadrony $v_1(y)$, který je znázorněn jako funkce rapidity y na Obrázku 5.4 až 5.15. Z grafů je vidět, že chování pro piony a protony je odlišné, tak jak bylo diskutováno v [1, 2, 7]. Obrázky 5.10 až 5.15 nasvědčují tomu, že původce toho chování je skryt ve fireballu. Simulace s nulovou baryonovou hustotou odpovídají nejlépe experimentálním datům, ale simulace s nulovou baryonovou hustotou nelze v reálném světě dosáhnout.

Zdá se, že baryonová hustota je odpovědná za chování v_1 pro protony a piony. Pozorovatelná veličina $v_1(y)$ se zdá být citlivá na zastavení baryonového čísla nebo difúzi baryonového čísla. To je nyní spíše na úrovni spekulací. Jde o to, že data představují podobný chování $v_1(y)$ pro protony a piony. Z našich výsledků usuzujeme, že hustota baryonů by neměla mít žádné vrcholy ani poklesy. Buď tedy dochází k difúzi baryonového čísla nebo zastavení baryonového čísla. Výsledkem by mělo být, že profil baryonového chemického potenciálu by měl být plochý.

Za předpokladu, že naše výsledky budou shledány zásadními, navrhujeme výsledky simulací a uvedené korelaci publikovat v některém vědeckém médiu.

Bibliografie

- [1] L. Adamczyk et al. “Beam-Energy Dependence of Directed Flow of Λ , $\bar{\Lambda}$, K^\pm , K_s^0 and ϕ in Au+Au Collisions”. In: *Phys. Rev. Lett.* 120.6 (2018), s. 062301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.062301. arXiv: 1708.07132 [hep-ex].
- [2] L. Adamczyk et al. “Beam-Energy Dependence of the Directed Flow of Protons, Antiprotons, and Pions in Au+Au Collisions”. In: *Phys. Rev. Lett.* 112.16 (2014), s. 162301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.162301. arXiv: 1401.3043 [nucl-ex].
- [3] L. Adamczyk et al. “Bulk Properties of the Medium Produced in Relativistic Heavy-Ion Collisions from the Beam Energy Scan Program”. In: *Phys. Rev. C* 96.4 (2017), s. 044904. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.044904. arXiv: 1701.07065 [nucl-ex].
- [4] J. D. Bjorken. “Highly Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions: The Central Rapidity Region”. In: *Phys. Rev. D* 27 (1983), s. 140–151. DOI: 10.1103/PhysRevD.27.140.
- [5] M. Bleicher et al. “Relativistic hadron hadron collisions in the ultrarelativistic quantum molecular dynamics model”. In: *J. Phys. G* 25 (1999), s. 1859–1896. DOI: 10.1088/0954-3899/25/9/308. arXiv: hep-ph/9909407.
- [6] W. Broniowski, M. Rybczynski a P. Bozek. “GLISSANDO: Glauber initial-state simulation and more..” In: *Comput. Phys. Commun.* 180 (2009), s. 69–83. DOI: 10.1016/j.cpc.2008.07.016. arXiv: 0710.5731 [nucl-th].
- [7] J. Cimerman et al. “A benchmark of initial state models for heavy-ion collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 27$ and 62 GeV”. In: *Phys. Rev. C* 103.3 (2021), s. 034902. DOI: 10.1103/PhysRevC.103.034902. arXiv: 2012.10266 [nucl-th].
- [8] F. Cooper a G. Frye. “Comment on the Single Particle Distribution in the Hydrodynamic and Statistical Thermodynamic Models of Multiparticle Production”. In: *Phys. Rev. D* 10 (1974), s. 186. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.186.
- [9] L. P. Csernai. *Introduction to relativistic heavy ion collisions*. 1994.
- [10] W. Florkowski. *Phenomenology of ultra-relativistic heavy-ion collisions*. London: World Scientific, 2010. ISBN: 98-142-8066-6.
- [11] P. Huovinen a H. Petersen. “Particlization in hybrid models”. In: *Eur. Phys. J. A* 48 (2012), s. 171. DOI: 10.1140/epja/i2012-12171-9. arXiv: 1206.3371 [nucl-th].

- [12] Iu. Karpenko, P. Huovinen a M. Bleicher. “A 3+1 dimensional viscous hydrodynamic code for relativistic heavy ion collisions”. In: *Comput. Phys. Commun.* 185 (2014), s. 3016–3027. DOI: 10.1016/j.cpc.2014.07.010. arXiv: 1312.4160 [nucl-th].
- [13] Iu. A. Karpenko et al. “Estimation of the shear viscosity at finite net-baryon density from $A + A$ collision data at $\sqrt{s_{NN}} = 7.7 - 200$ GeV”. In: *Phys. Rev. C* 91.6 (2015), s. 064901. DOI: 10.1103/PhysRevC.91.064901. arXiv: 1502.01978 [nucl-th].
- [14] P. F. Kolb, J. Sollfrank a U. Heinz. “Anisotropic transverse flow and the quark hadron phase transition”. In: *Phys. Rev. C* 62 (2000), s. 054909. DOI: 10.1103/PhysRevC.62.054909. arXiv: hep-ph/0006129.
- [15] J. S. Moreland, J. E. Bernhard a S. A. Bass. “Alternative ansatz to wounded nucleon and binary collision scaling in high-energy nuclear collisions”. In: *Phys. Rev. C* 92.1 (2015), s. 011901. DOI: 10.1103/PhysRevC.92.011901. arXiv: 1412.4708 [nucl-th].
- [16] B. Pedro, M. Cardoso a N. Cardoso. *QCD confinement and chiral crossovers, two critical points*. 2011. arXiv: 1102.5531 [hep-lat].
- [17] P. Romatschke a U. Romatschke. *Relativistic Fluid Dynamics In and Out of Equilibrium*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, květ. 2019. ISBN: 978-1-108-48368-1, 978-1-108-75002-8. DOI: 10.1017/9781108651998. arXiv: 1712.05815 [nucl-th].
- [18] J. Stachel a K. Reygers. “QGP Physics: from Fixed Target to LHC”. In: *Physikalisches Institut Heidelberg [online]*. Heidelberg, (2015). URL: https://www.physi.uni-heidelberg.de/~reygers/lectures/2015/qgp/qgp2015_06_space_time_evo.pdf.
- [19] M. Strickland. “Anisotropic Hydrodynamics: Three Lectures”. In: *Acta Physica Polonica B* 45 (říj. 2014). DOI: 10.5506/APhysPo1B.45.2355.
- [20] I. Štoll, J. Tolar a I. Jex. *Klasická teoretická fyzika*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2017. ISBN: 978-80-246-3545-3.
- [21] I. Štoll, J. Tolar a I. Jex. *Teoretická fyzika*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2008. ISBN: 978-80-01-04005-8.
- [22] B. Tomášik et al. “Hydrodynamic description of relativistic collisions”. In: *Kobenhavns Universitet, Niels BohrInstitutet* (2004).
- [23] B. Tomášik et al. “Topics in modern nuclear physics: Flow and Sizes”. In: *Kobenhavns Universitet, Niels BohrInstitutet* (2004).
- [24] K. Tuchin. “Particle Production in Strong Electromagnetic Fields in Relativistic Heavy-Ion Collisions”. In: *Advances in High Energy Physics* 2013 (červ. 2013). DOI: 10.1155/2013/490495.