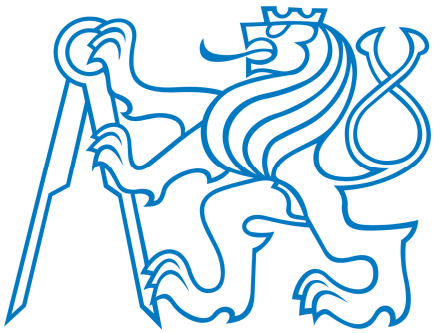
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní – Ústav technické matematiky



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

NUMERICKÉ SIMULACE PROUDĚNÍ ZOBECNĚNÝCH NEWTONOVSKÝCH TEKUTIN

NUMERICAL SIMULATION OF GENERALISED NEWTONIAN FLUIDS FLOWS

Matyáš Kalous

2021

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně s použitím literárních zdrojů a informací, které cituji a uvádím v seznamu použité literatury a zdrojů.

Datum: . . . .

Podpis

Poděkování

Autor by chtěl poděkovat panu doc. Mgr.Ing. Tomáši Bodnárovi, Ph.D. za jeho trpělivost, ochotu, odborné rady, vedení a čas, který mi věnoval při zpracovávání bakalářské práce v této nelehké době.

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kalous** Jméno: **Matyáš** Osobní číslo: **484722**

Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**

Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**

Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**

Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Numerické simulace proudění zobecněných Newtonovských tekutin

Název bakalářské práce anglicky:

Numerical simulation of generalized Newtonian fluids flows

Pokyny pro vypracování:

1) Kompletní formulace rovnic popisujících proudění zobecněné Newtonovské tekutiny
2) Vytvoření programu pro řešení jednoduché 2D úlohy metodou konečných objemů
3) Validace programu srovnáním s analytickým řešením (pro Newtonovskou tekutinu)
4) Vyhodnocení výsledků simulací a zhodnocení použitých numerických metod

Seznam doporučené literatury:

[1] Feistauer, M., Felcman, J., Straškraba, I.: Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow. Clarendon Press, Oxford, 2003, ISBN 0-19-850588-4.
[2] Galdi, G.P., Rannacher, R., Robertson, A.M., Turek, S., Hemodynamical flows: Modeling, Analysis and Simulation. Birkhauser 2008.
[3] Fasano, A., Sequeira, A., Hemomath - The Mathematics of Blood . Springer 2017.
[4] Dvořák, R., Kozel, K.: Matematické modelování v aerodynamice, Vydavatelství ČVUT, 1996.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. Ing. Tomáš Bodnár, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **20.04.2021** Termín odevzdání bakalářské práce: **15.08.2021**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

doc. Ing. Tomáš Bodnár, Ph.D.	doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.	prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis vedoucí(ho) práce	podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

28. 4. 2021 — Datum převzetí zadání

Matyáš Kalous — Podpis studenta

© ČVUT v Praze, Design: ČVUT v Praze, VIC

Anotace

Bakalářská práce se zabývá numerickou simulací dvourozměrného proudění zobecněných Newtonovských tekutin. Součástí práce je odvození základních rovnic popisujících proudění nestlačitelné tekutiny, definice fyzikálních pojmů, které jsou v práci užívány a popis lidského oběhového systému, na který může být použitá geometrie aplikována. K numerickému řešení je užita metoda konečných objemů s aplikováním metody umělé stlačitelnosti. Výsledky numerické simulace jsou srovnány s analytickým řešením pro rovný kanál a je zhodnocena volba koeficientu umělé stlačitelnosti a prostorového kroku, poté je provedena numerická simulace pro proudění kanálem se zúžením a zahnutým kanálem.

Klíčová slova: numerická simulace, nestlačitelné proudění, metoda konečných objemů, diskretizace, metoda umělé stlačitelnosti, MacCormackovo schéma

Abstract

This bachelor thesis deals with numerical simulation of generalised Newtonian fluid flows. Part of the work includes derivation od basic equations describing flow of incompressible fluid, definition od physical concepts used in this work and description of human vasculatory system to which the used geometry can be applied to. Finite volume method with application of artificial comressibility method is used to find numerical solution. Results of numerical simulation are compared to analytical solution for flow between two parallel plates and the choice of coeficient of artificial compressibility and spatial step is evaluated, followed by simulation of flow in narrowed channel and curved channel.

Keywords: numerical simulation, incompressible flow, finite volume method, discretization, artificial compressibility method, MacCormack scheme

Obsah

Seznam použitých značek a symbolů 9
1 Úvod 10
1.1 Cíl práce 10
1.2 Struktura práce 10
2 Fyzikální model 11
2.1 Lidský krevní oběh 11
2.1.1 Oběhová soustava 11
2.1.2 Krev 11
2.1.3 Nemoci a vady 12
2.2 Reologie 12
2.2.1 Definice základních pojmů 12
3 Matematický model 13
3.1 Popis proudění 13
3.1.1 Rovnice kontinuity 13
3.1.2 Bilance hybnosti 13
3.1.3 Navier-Stokesovy rovnice 14
3.2 Analytické řešení 16
4 Numerické metody 18
4.1 Metoda konečných objemů 18
4.2 Diskretizace metody konečných objemů 18
4.3 Metoda umělé stlačitelnosti 18
4.4 MacCormackovo schéma 19
4.5 Diskretizace nevazkých toků 21
4.6 Diskretizace vazkých toků 21
4.7 Okrajové podmínky 22
4.8 Podmínka stability 22
5 Numerická simulace 22
5.1 Validace na rovném kanálu 22
5.1.1 Popis úlohy 22
5.1.2 Vliv parametru umělé stlačitelnosti 24
5.1.3 Vliv prostorového kroku 30
5.1.4 Shrnutí 38
5.2 Kanál se zúžením 38
5.2.1 Popis úlohy 38
5.2.2 Prezentace výsledků 40
5.2.3 Shrnutí 43
5.3 Kanál se zahnutou geometrií 45

5.3.1 Popis úlohy 45
5.3.2 Prezentace výsledků 47
5.3.3 Shrnutí 50
6 Závěr 51
Seznam použité literatury a zdrojů 53

Seznam použitých značek a symbolů

t	čas
x, y, z	prostorové souřadnice
u, v, w	složky rychlosti
f	vnější objemové síly
p	tlak
P	matice pro přidání umělé stlačitelnosti
W	vektor neznámých
F, G	vektor nevazkých toků
R, S	vektor vazkých toků
D	průměr
H	vzdálenost desek
L	délka kanálu
Re	Reynoldsovo číslo
D	plocha buňky
DW	umělá viskozita
l_m	délka m-té hrany
CFL	Courant-Fridrichs-Levyho číslo
nx	počet buněk ve směru osy x
ny	počet buněk ve směru osy y
τ	smykové napětí
$\dot{\gamma}$	smyková rychlost
μ	dynamická viskozita
ν	kinematická viskozita
rho	hustota
β	koeficient umělé stlačitelnosti
v^x	normála ve směru x
a^n	označení n-té časové vrstvy
a_x, a_y, a_z, a_t	parciální derivace podle směru osy a podle času
a_∞	charakteristický rozměr
$a_{i,j}$	souřadnice v síti

1 Úvod

1.1 Cíl práce

Práce se zabývá numerickým řešením dvourozměrného proudění nestlačitelné tekutiny. Cílem práce je formulovat rovnice popisující proudění zobecněné Newtonovské tekutiny a na jejich základě sestavení programu. K vyřazení tlaku z vektoru neznámých je užito metody umělé stlačitelnosti a rovnice jsou diskretizovány metodou konečných objemů. Základní validace je provedena na případě proudění mezi dvěma paralelními deskami, pro který je známé analytické řešení a zároveň je zhodnocen vliv koeficientu umělé stlačitelnosti a vliv prostorového kroku (hustoty sítě). Následně je vytvořena simulace na dvou zdeformovaných sítích, pro které neznáme analytické řešení, ale jejich tvar může mít četné aplikace.

1.2 Struktura práce

Práce je rozdělena do čtyř větších logických částí nazývaných Fyzikální model, Matematický model, Numerické metody a Numerická simulace.

Kapitola **Fyzikální model** se zabývá definicí základních pojmů reologie a stručným popisem oběhové soustavy člověka a jejích nemocí, které ovlivňují geometrii cév tak, aby na ně mohla být aplikována síť numerické simulace.

V druhé kapitole **Matematický model** je formulována rovnice kontinuity, bilance hybnosti a Navier-Stokesovy rovnice, které popisují proudění a je odvozené analytické řešení pro proudění tekutiny mezi dvěma paralelními deskami.

v třetí kapitole s názvem **Numerické metody** je popsán princip metody konečných objemů, MacCormackovo schéma a jsou diskretizovány Navier-Stokesovy rovnice. Dále je uvedena okrajová podmínka, která bude využita pro simulaci proudění a podmínka stability, podle které je volen časový krok.

Poslední kapitola **Numerická simulace** se zabývá prezentací a hodnocením výsledků numerické simulace. Je rozdělena na tři části, v první je program validován na rovném kanále a hodnocen vliv hustoty sítě a volby koeficientu umělé stlačitelnosti, v druhé části jsou hodnoceny výsledky pro kanál se zúžením a v poslední je hodnocena simulace pro zahnutý kanál.

2 Fyzikální model

2.1 Lidský krevní oběh

2.1.1 Oběhová soustava

Kardiovaskulární systém člověka je uzavřený, skládá se z dvou hlavních částí, tělního (velkého) oběhu a plicního (malého) oběhu, spojených srdcem, které těmito oběhy žene krev. Hlavním úkolem oběhové soustavy je transport živin a odpadních látek z tkání nebo do tkání, zajišťuje termoregulaci, distribuuje protilátky po těle a udržuje acidobazickou rovnováhu těla.

Srdce je svalový orgán tvořený dvěma síněmi a dvěma komorami, které svým střídavým smršťováním (systola) a ochabováním (diastola) zajišťují proudění krve. Tlak v aortách srdce dosahuje hodnot $12.5kPa$ a ke stahům dochází za normálních podmínek 60 - 80 krát za minutu.

2.1.2 Krev

Krev je specializovaná tekutá tkáň tvořená suspenzí erytrocytů, leukocytů a trombocytů rozpuštěných v krevní plazmě. Uvádí se, že dospělý člověk má $8 \pm 1\%$ tělesné hmotnosti, v průměru 5200 ml.

Krevní plasma tvoří cca 55 % objemu krve a je tvořena z 90 % vodou a v ní rozpuštěných organických a anorganických látek. Její funkcí je transport těchto látek do buněk, zejména krevních bílkovin a glukózy, jenž je hlavním energetickým substrátem těla.

Erytrocyty jsou bezjaderné buňky obsahující nasycený roztok hemoglobinu Hb, jež dává krvi červenou barvu a který zajišťuje vázání kyslíku pro transport do tkání a oxidu uhličitého pro transport z tkání. Jejich bikonkávní tvar a absence jádra jim umožňuje deformovat se tak, aby byly schopné projít úzkými kapilárami. U dospělých se jejich počet pohybuje kolem 5 milionů na μl a jejich počet výrazně ovlivňuje mechanické vlastnosti.

Leukocyty obstarávají boj proti infekcím v lidském těle. Za normálních okolností tvoří méně než 1% objemu krve, proto nejsou pro reologické vlastnosti krve až tak důležité, s výjimkou infekce nebo proudění v úzkých kapilárách.

Trombocyty jsou nejmenší krevní elementy pravidelného diskovitého tvaru. Jejich úkolem je hemokoalugace a hemostáza (zástava krvácení).

2.1.3 Nemoci a vady

Srážení krve při poranění a zamezení tak úniku krve z cévy je žádoucí děj, jelikož bez něj by došlo k vykrvácení, ale v ojedinělých případech může dojít ke sražení krve uvnitř cévy a vznik tzv. trombu. Tento děj se nazývá trombóza a pokud k němu dojde v tepnách, dochází k nedokrvení (ischemii) tkání. Vznik trombu může ovlivnit více faktorů, mezi nejčastější patří poškození intimy cévy, trombofilní stavy (zvýšení srážlivosti krve) a zpomalený průtok krve nebo turbulentní proudění v cévě. V případě odtržení trombu od stěny může dojít k embolii, která může způsobit smrt.

Dalším nebezpečným onemocněním, které se často vyskytuje s trombózou, je ateroskleróza, což je chronické onemocnění, během kterého se do stěny tepny ukládají lipidy a další komponenty krve a dochází tak ke změně vlastností cévní stěny, zúžení průřezu cévy a omezení průtoku krve (jež může zapříčinit vznik trombózy). Ateroskleróza postihuje nejčastěji velké a středně velké arterie.

Céva může být zdeformována i vlivem okolního prostředí. To může být příčinou nádorového bujení v okolí cévy, u žen těhotenstvím, tlakem mimo tělo, což typicky způsobuje proleženiny u lidí upoutaných na lůžko, nebo vasospasmem některých cév, který nastává reflexivně při poranění, chladem a nebo působením sympatického systému

2.2 Reologie

2.2.1 Definice základních pojmů

Smykové napětí: obecně je definováno jako:

$$\tau = \mu\dot{\gamma}[Pa] \tag{1}$$

kde τ je smykové napětí, μ je dynamická viskozita a $\dot{\gamma}$ je smyková rychlost, která je definována jako:

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}[s^{-1}] \tag{2}$$

Dynamická viskozita není pro nenewtonovské tekutiny konstantní

Viskozita: fyzikální veličina udávající poměr mezi tečným napětím a změnou rychlosti. Používají se dva typy viskozity.

Dynamická viskozita:

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}[Pa \cdot s] \tag{3}$$

Kinematická viskozita:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}[m^2 \cdot s^{-1}] \tag{4}$$

Dynamická viskozita je závislá například na teplotě, smykovém napětí, tlaku, chemických vlastnostech tekutiny, ale vliv těchto parametrů je minimální, proto je často považována za konstantní.

3 Matematický model

3.1 Popis proudění

3.1.1 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity vychází z rovnice bilance zachovávané veličiny, zkráceně bilanční rovnice. Ta říká, že časová změna zachovávané veličiny v kontrolním objemu V je rovna toku této veličiny kontrolní plochou ∂V do nebo z jí vymezeného objemu, a její produkcí uvnitř kontrolního objemu.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V J dV + \int_{\partial V} F_i(J) n_i dS = \int_V P(J) dV \tag{5}$$

kde $F_i J$ je vektor hustoty toku veličiny J plochou ∂V s elementem značeným dS a $P(J)$ je hustota produkce veličiny.

Dosazením hustoty ρ za zachovávanou veličinu J, získáme rovnici kontinuity pro nestacionární proudění stlačitelné tekutiny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{6}$$

kde je vektor rychlosti se třemi složkami $v_i = (u, v, w)$. Pro případ proudění nestlačitelné tekutiny se rovnice (6) zjednoduší na

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{7}$$

3.1.2 Bilance hybnosti

Zachovávanou veličinou v rovnici (5) je vektor hybnosti $J = \rho v_i$, takže bilanci hybnosti musíme provést ve směru každé souřadné osy.

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right) + \rho f_i \tag{8}$$

kde f_i jsou vnější objemové síly a $\zeta = -\frac{2}{3}\eta$. Pro konstantní viskozitu $\eta = \mu$ dostaneme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{3}\nu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \tag{9}$$

Pro nestlačitelnou tekutinu $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ dostaneme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \Delta v_i + f_i \tag{10}$$

3.1.3 Navier-Stokesovy rovnice

Ze zmíněných rovnic získáme systém Navier-Stokesových rovnic pro nestlačitelnou vazkou tekutinu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta\frac{\partial u}{\partial z}) + f_1 \\
\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta\frac{\partial v}{\partial z}) + f_2 \\
\rho(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta\frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta\frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta\frac{\partial w}{\partial z}) + f_3
\end{aligned} \tag{11}$$

Vnější objemové síly f_i uvažujeme v této práci jako rovné 0. Rovnice (11) můžeme přepsat do vektorového tvaru

$$PW_t + F_x + G_y + H_z = R_x + S_y + T_z \tag{12}$$

který můžeme zjednodušit pro dvou dimenzionální případ na

$$PW_t + F_x + G_y = R_x + S_y \tag{13}$$

kde P je diagonální matice, jejíž význam bude zmíněn později, W značí vektor neznámých, F, G jsou vektory nevazkých (konvektivních) toků a R, S jsou vektory vazkých (difůzních) toků.

$$P = diag(0, 1, 1) \tag{14}$$

$$W = (p, u, v)^T \tag{15}$$

$$F = (u, u^2 + p, uv)^T \tag{16}$$

$$G = (v, uv, v^2 + p)^T \tag{17}$$

$$R = (0, \nu u_x, \nu v_x)^T \tag{18}$$

$$S = (0, \nu u_y, \nu v_y)^T \tag{19}$$

kde ν je kinematická viskozita daná jako

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{20}$$

Systém rovnic (13) můžeme zapsat jako:

$$PW_t^* + F_x^* + G_y^* = R_x^* + S_y^* \tag{21}$$

$$P = diag(0, 1, 1) \tag{22}$$

$$W^* = (p^*, u^*, v^*)^T \tag{23}$$

$$F^* = (u^*, u^{*2} + p^*, u^* v^*)^T \tag{24}$$

$$G^* = (v^*, u^* v^*, v^{*2} + p^*)^T \tag{25}$$

$$R^* = (0, \nu u_x^*, \nu v_x^*)^T \tag{26}$$

$$S^* = (0, \nu u_y^*, \nu v_y^*)^T \tag{27}$$

kde (*) značí skutečné fyzikální veličiny, které můžeme transformovat do bezrozměrového tvaru tak, že rozměrové veličiny vztáhneme na referenční veličinu stejného rozměru

$$v = \frac{v^*}{v_\infty} \tag{28}$$

Jako obvyklá referenční rychlost se volí rychlost homogenního nabíhajícího proudu U_∞, pro délku například průměr potrubí D_∞, apod. Zbylé bezrozměrové veličiny se dají odvodit ze základních.

Poté můžeme systém rovnic (21) zapsat jako:

$$PW_t + F_x + G_y = R_x + S_y \tag{29}$$

$$P = diag(0, 1, 1) \tag{30}$$

$$W = (p, u, v)^T \tag{31}$$

$$F = (u, u^2 + p, uv)^T \tag{32}$$

$$G = (v, uv, v^2 + p)^T \tag{33}$$

$$R = \frac{1}{Re}(0, u_x, v_x)^T \tag{34}$$

$$S = \frac{1}{Re}(0, u_y, v_y)^T \tag{35}$$

kde Re je Reynoldsovo číslo, což je bezrozměrná veličina popisující souvislost setrvačné síly a viskozity. Dá se podle něj určit zda-li je tok laminární nebo turbulentní.

$$Re = \frac{U_\infty D_\infty}{\nu} = \frac{\rho U_\infty D_\infty}{\mu} \tag{36}$$

3.2 Analytické řešení

Pro odvození analytického řešení proudění mezi dvěma deskami vycházíme z rovnice (11):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta\frac{\partial u}{\partial z}) + f_1 \\
\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta\frac{\partial v}{\partial z}) + f_2 \\
\rho(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta\frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta\frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\eta\frac{\partial w}{\partial z}) + f_3
\end{aligned} \tag{37}$$

a předpokládáme: - jednorozměrné proudění

$$u \neq 0, v = 0, w = 0 \tag{38}$$

- plně vyvinuté proudění

$$u(x, y) = u(y), \nabla p(x, y) = \nabla p(x) \tag{39}$$

- nulový vliv vnějších objemových sil

$$f_i = 0 \tag{40}$$

- tekutina je nestlačitelná Newtonovská s konstantní hustotou $\rho = konst.$

Soustava rovnic se tak zredukuje na:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\eta\frac{\partial u}{\partial y}) = \frac{p_{out} - p_{in}}{L} \tag{41}$$

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{p_{out} - p_{in}}{L} \tag{42}$$

Zavedeme konstantu K

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{p_{out} - p_{in}}{L} = K \tag{43}$$

a dvakrát zintegrujeme

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Ky + C_1 \tag{44}$$

$$u(y) = K\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \tag{45}$$

Z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} y = 0 \Rightarrow u = 0 \\ y = H \Rightarrow u = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

vypočítáme integrační konstanty

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= -K\frac{H}{2} \end{aligned} \tag{47}$$

Dosazením K získáme profil rychlosti u ve směru osy x

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{p_{out} - p_{in}}{L}(y^2 - yH) \tag{48}$$

Rychlostní profil je parabolický, s maximální rychlostí u_{max} v ose kanálu.

4 Numerické metody

4.1 Metoda konečných objemů

Metoda konečných objemů (finite volume method) spočívá v rozdělení početní domény na konečný počet buněk (kontrolních objemů) $D_{i,j}$, pro který se použije integrační tvar rovnic, což nám umožní převést parciální diferenciální rovnice na soustavu algebraických rovnic s konečným počtem neznámých. Na rozdíl od metody konečných diferencí, kde je pole proměnných nahrazováno hodnoty v bodech sítě, užívá metoda konečných objemů průměrné hodnoty pro dané kontrolní objemy.

Její výhodou je jednoduchá aplikace na obecné (neortogonální) sítě, které umožňují lépe napodobit složitější geometrii, ale hůře se pro ně organizují data.

4.2 Diskretizace metody konečných objemů

Rovnici (29) můžeme upravit na:

$$PW_t + (F - R)_x + (G - S)_y = 0 \tag{49}$$

Plošnou integrací dostaneme:

$$P \int_{D_{i,j}} W_t dS + \int_{D_{i,j}} \left[(F - R)_x + (G - S)_y\right] dS = 0 \tag{50}$$

Což můžeme upravit použitím Greenovy formule na druhý integrál jako:

$$P \int_{D_{i,j}} W_t dS + \oint_{\partial} \left[(F - R)dy + (G - S)dx\right] = 0 \tag{51}$$

A nyní můžeme nahradit vektor neznámých $W_{i,j} = \frac{1}{|D|} \int_D W dS$ průměrnou hodnotou neznámých v buňce $D_{i,j}$.

$$P \frac{\partial W_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{|D|} \oint_{\partial} \left[(F - R)dy + (G - S)dx\right] = 0 \tag{52}$$

4.3 Metoda umělé stlačitelnosti

Metoda umělé stlačitelnosti (artificial comressibility method) umožňuje vyřadit tlak p z vektoru neznámých pro ustálené proudění nestlačitelné tekutiny. Přidáním časové derivace tlaku do rovnice kontinuity (6) získáme rovnici:

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{53}$$

kde β je koeficient umělé stlačitelnosti reprezentující umělou rychlost zvuku. Přidaná časová derivace tlaku se rovná nule pro ustálené řešení. Systém rovnic (13) se změní na:

$$\widetilde{P}W_t + F_x + G_y = R_x + S_y \tag{54}$$

kde

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

Parametr β se doporučuje volit podle

$$\beta = u_{max} \cdot \sqrt{\rho} \tag{56}$$

kde u_{max} je maximální rychlost kapaliny a ρ je hustota kapaliny. Vliv parametru β na výpočet bude hodnocen v kapitole 5.1.2.

4.4 MacCormackovo schéma

MacCormackovo schéma je dvou krokové schéma vycházející z dvoustupňového Lax-Wendroffova schématu a pracuje na principu prediktor-korektor. V prvním kroku je vypočítá prediktor a jím vypočtené hodnoty se dosadí do korektoru a v posledním kroku se dosadí člen představující umělou viskozitu. Poté následuje další iterace.

Prediktor

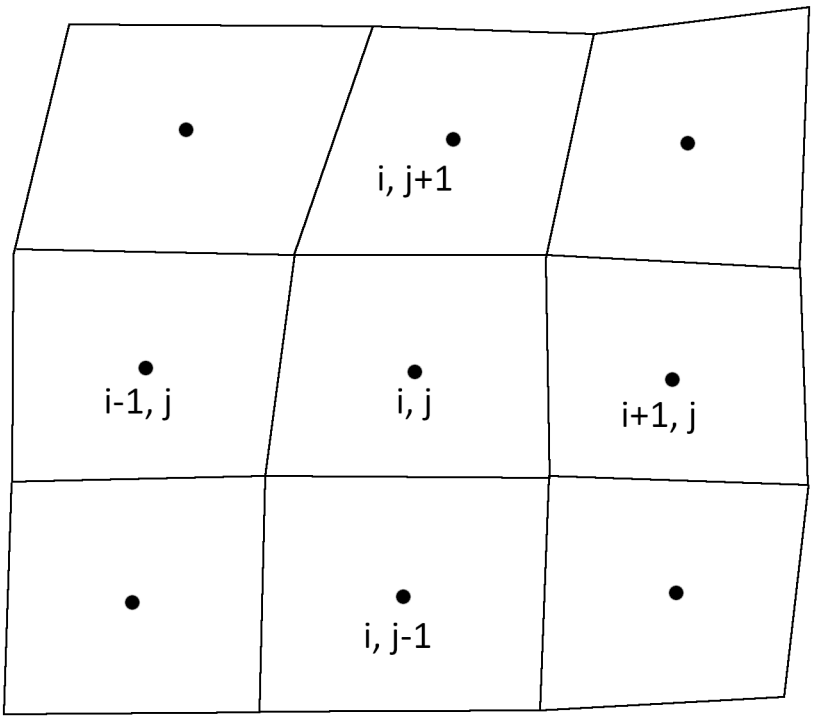
$$W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = W_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{P|D_{i,j}|} \sum_{k=1}^{4} \left[\left(F_k^n - R_k^n\right) \Delta y_k - \left(R_k^n - S_k^n\right) \Delta x_k \right] \tag{57}$$

Korektor + prediktor

$$\left[W_{i,j}^{n+1}\right] = \frac{1}{2} \left(W_{i,j}^{n} + W_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{P|D_{i,j}|} \sum_{k=1}^{4} \left[\left(F_k^{n+\frac{1}{2}} - R_k^{n+\frac{1}{2}}\right) \Delta y_k - \left(R_k^{n+\frac{1}{2}} - S_k^{n+\frac{1}{2}}\right) \Delta x_k \right] \right) \tag{58}$$

Korektor + prediktor + umělá viskozita

$$W_{i,j}^{n+1} = \left[W_{i,j}^{n+1}\right] + DW_{i,j}^{n} \tag{59}$$



Obr. 1: Stencil pro výpočet metodou konečných objemů

4.5 Diskretizace nevazkých toků

Prediktor

$$F_1 = F_2 = F_{i,j}, F_3 = F_{i-1,j}, F_4 = F_{i,j-1} \tag{60}$$

Korektor

$$F_1 = F_{i+1,j}, F_2 = F_{i,j+1}, F_3 = F_4 = F_{i,j} \tag{61}$$

Obdobně pro G

4.6 Diskretizace vazkých toků

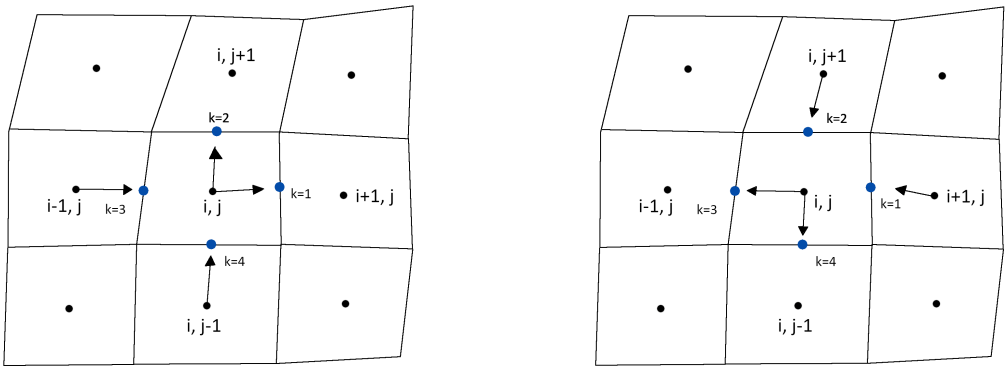
Derivace rychlostí pro vazké toky se získají integrací přes hranici duálních buněk (na obr. 1 naznačené červenou hranicí).

$$u_x \approx \frac{1}{D_m} \oint_{\partial D} u v^x dx dy \tag{62}$$

a tento integrál můžeme nahradit sumou přes hrany duálních buněk

$$u_x \approx \frac{1}{D_m} \sum_{m=1}^{4} u_m v_m^x l_m \tag{63}$$

kde u_m je rychlost ve středu m-té stěny, v_m^x je vnější normála stěny, l_m je délka stěny a D_m je obsah duální buňky. Hodnoty proměnných v centrech duálních buněk jsou aproximovány jako průměr sousedních hodnot.



(a) Prediktor **(b)** Korektor

Obr. 2: Stencil pro výpočet nevazkých toků

4.7 Okrajové podmínky

Uvažujeme no-slip podmínku (no-slip condition), což je Dirichletova okrajová podmínka, předepisující rychlost vazké tekutiny na hranici tekutina-stěna rovnou rychlosti stěny. V případě stacionární stěny je podmínka:

$$\begin{aligned} u(0) = 0, u(H) = 0 \\ v(0) = 0, v(H) = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

Hodnoty tlaku jsou extrapolovány z okolních buněk.

4.8 Podmínka stability

Pro udržení stability schématu je potřeba volit adekvátní Δt. Pro kartézský systém souřadnic je časový krok omezen jako:

$$\Delta t \leq \frac{CFL}{\frac{|u|+\sqrt{u^2+\beta^2}}{\Delta x} + \frac{|v|+\sqrt{v^2+\beta^2}}{\Delta y} + 2\nu(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2})} \tag{65}$$

kde CFL je Courant-Friedrichs-Levyho číslo, pro MacCormackovo schéma je $CFL = 1$, a ν je kinematická viskozita. Časový krok může být z této podmínky nastaven pro každou buňku jiný.

5 Numerická simulace

5.1 Validace na rovném kanálu

5.1.1 Popis úlohy

První úloha má sloužit k porovnání numerických výsledků a exaktního řešení, které jsme schopni určit pro proudění tekutiny mezi dvěma rovnoběžnými deskami, a k zhodnocení vlivu vstupních parametrů na rychlost a přesnost výpočtu programu. Rozměry byly zvoleny tak, aby odpovídaly velké tepně, a vlastnosti proudící tekutiny tak, aby odpovídaly krvi, tedy $\rho = 1060 kg/m^3$ a $\nu = 3 \cdot 10^{-}6$. Vstupní hodnotou je tlakový spád, jenž můžeme vyjádřit z rovnice (48) jako:

$$\Delta p = \frac{-8\mu u_m L}{H^2} \tag{66}$$

Po dosazení rychlosti $u_m = 0.2\,m/s$, průměru tepny odpovídajícímu vzdálenosti desek $H = 0.005\,m$ a délce tepny $L = 0.025\,m$ [1] dopočítáme tlakový spád $\Delta p = 5.1\,Pa$. Pro jednoduchost nastavíme tuto hodnotu jako P_{in} a hodnotu P_{out} necháme rovnou nule. Počet iterací nastavíme na 600000, což by mělo stačit pro vyvinutí ustáleného proudění.

Hranice vlevo (vstup)	$u1(1,:) = u1(2,:);$
	$v1(1,:) = v1(2,:);$
Hranice vpravo(výstup)	$u1(nx+2,:) = u1(nx+1,:);$
	$v1(nx+2,:) = v1(nx+1,:);$
Hranice dole (stěna)	$u1(:,1) = -u1(:,2);$
	$v1(:,1) = -v1(:,2);$
	$p1(:,1) = p1(:,2);$
Hranice nahoře (stěna)	$u1(:,ny+2) = -u1(:,ny+1);$
	$v1(:,ny+2) = -v1(:,ny+1);$
	$p1(:,ny+2) = p1(:,ny+1);$

Obr. 3: Zápis okrajových podmínek v MATLABu

Na pevných částech hranice představujících stěnu kanálu předpokládáme podmínku přilnavosti (no-slip condition), jelikož vazká tekutina ulpívá na stěně a její rychlost tedy musí být rovna nule $u = 0$, je nastavena okrajová podmínka tak, aby se rychlost vynulovala. Zápis okrajových podmínek v MATLABu je rozepsán na obr. 3.

Budeme porovnávat výsledky pro tři různé koeficienty umělé stlačitelnosti β a tři různé hustoty sítě. Koeficient umělé stlačitelnosti je zadán jako:

$$\beta = u_{max} \cdot \sqrt{\rho} \tag{67}$$

ale ve výpočtu se vyskytuje pouze jeho mocnina β^2, takže bude zmiňována pouze tato hodnota. Pro požadovanou rychlost $u_m = 0.2\,m/s$ a hustotu krve $\rho = 1060kg/m^3$ je $\beta^2 = 42$. Zbylé dvě hodnoty jsou zhruba $2,5x$ větší a $10x$ menší, takže 100 a 4. Pro všechny tři výpočty byla použita stejná síť skládající se ze 100 buněk v obou směrech

Pro zhodnocení vlivu počtu buněk byly zvoleny tři sítě s počtem buněk 50, 100 a 200 v obou směrech a shodným parametrem $\beta^2 = 42$.

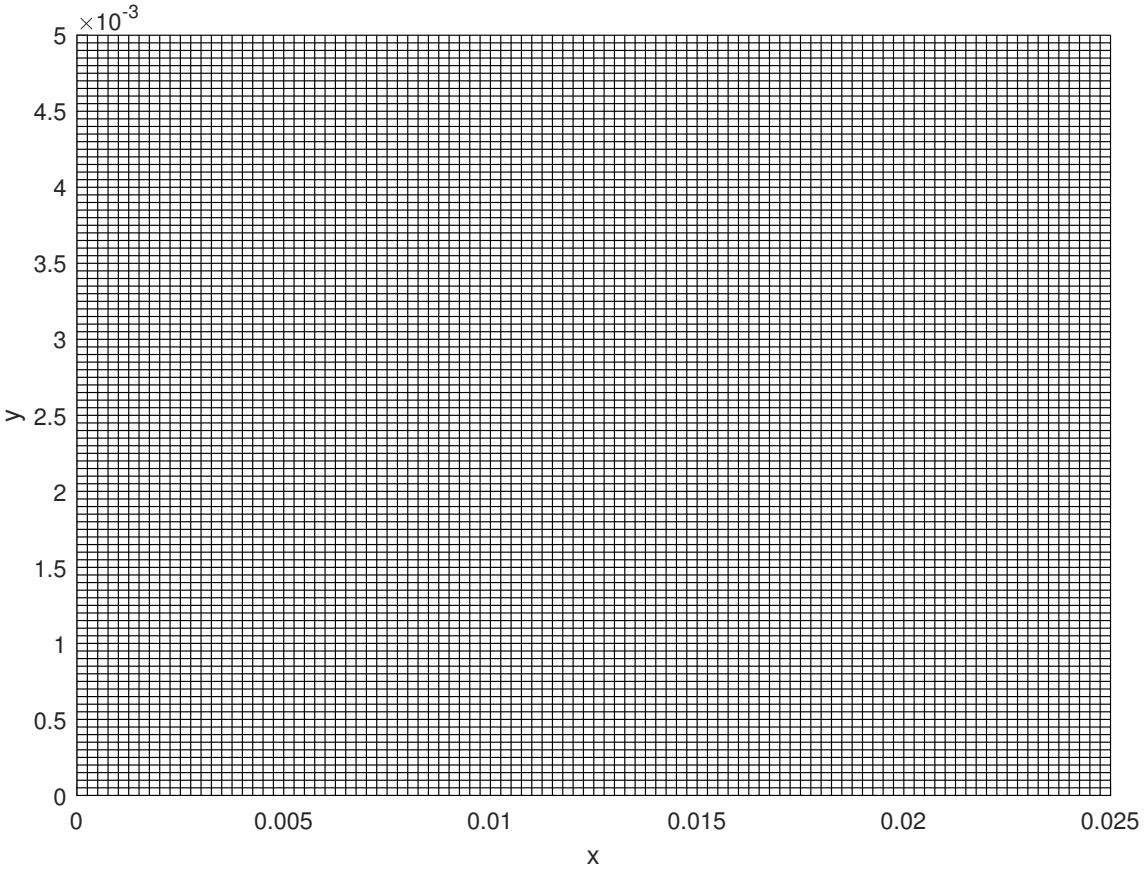
Časový krok dt je pro každý případ vypočten z podmínky:

$$\Delta t \leq \frac{CFL}{\frac{|u|+\sqrt{u^2+\beta^2}}{\Delta x} + \frac{|v|+\sqrt{v^2+\beta^2}}{\Delta y} + 2\nu(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2})} \tag{68}$$

,kde CFL je Courant-Fridrichs-Lewyho číslo, které je pro zvolené MacCormackovo schéma rovné 1. Je zvolena a nastavena odpovídající hodnota pro všchny buňky výpočtové sítě a všechny iterace.

5.1.2 Vliv parametru umělé stlačitelnosti

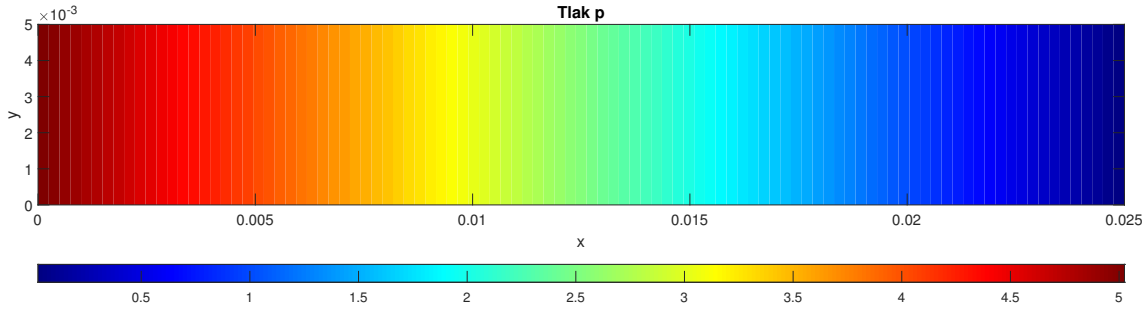
Pro všechny případy byla zvolena stejná síť se 100 buňkami ve směru osy x i y, která je vidět na obrázku **??**. Úlohy se liší v koeficientu umělé stlačitelnosti β a v časovém kroku



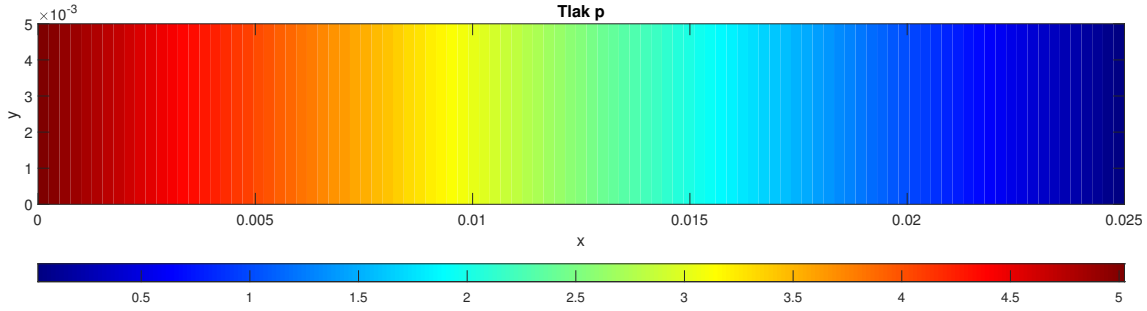
Obr. 4: Zvolená síť pro hodnocení vlivu umělé stlačitelnosti

δt. Jelikož se ve výpočtu vyskytuje pouze β^2, bude pro jednoduchost zmiňována jenom tato hodnota.

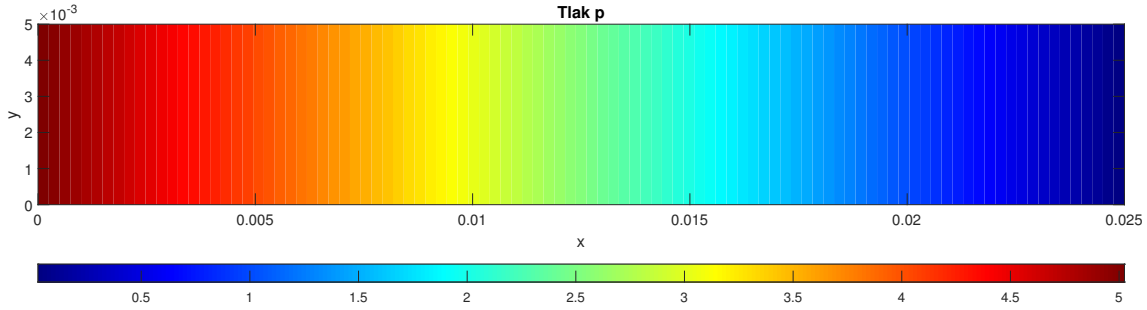
Společné parametry:	$H_y = 5e-3$
	$L_x = 25e-3$
	$\rho = 1060$
	$nx = 100$
	$ny = 100$
	$\nu = 3 \cdot 10^{-6}$
	$\Delta p = 5.1$
	$iterace = 600000$
$\beta^2 = 4$**:**	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^{-4}$
$\beta^2 = 42$**:**	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^{-4}$
$\beta^2 = 100$**:**	$\Delta t = 1.3 \cdot 10^{-4}$



(a) $\beta^2 = 4$



(b) $\beta^2 = 42$



(c) $\beta^2 = 100$

Obr. 5: Rozložení tlaku pro různé koeficienty β^2

Na obrázku 5 zobrazujícím tlaky po skončení numerické simulace jsou vidět ekvidistantní izočáry rovnoběžné se svislou osou pro všechny hodnoty β^2, což dokazuje předpoklad lineárního průběhu tlaku. Takovýto průběh tlaku se v kontrolním kanále po dostatečném počtu iterací vyvine bez ohledu na volbu parametru β.

Předpokládali jsme parabolický průběh rychlosti u ve směru osy x, takže rychlost na stěně kontrolního kanálu je nulová a ve středu dosahuje rychlosti $u_m = 0.2\,m/s$, podle které jsme nastavovali tlakový spád. Rychlost v ve směru osy y má být nulová. Na 6 je vidět porovnání grafických výstupů znázorňující pole rychlostí pro různé koeficienty β^2. Při porovnání je vidět, že rychlost u se neliší, rozložení rychlosti je symetrické podle osy kanálu a na ose dosahuje $u_m = 0.2\,m/s$, což byl počáteční předpoklad. Na první pohled se liší pole rychlosti v, která pro hodnotu $\beta^2 = 4$ a $\beta^2 = 100$ dosahuje hodnot v řádu 10^{-16}, kdežto pro $\beta^2 = 42$ nabývá hodnoty 10^{-17}. V případech pro $\beta^2 = 4$ a $\beta^2 = 100$ je tedy vertikální rychlost ve směru osy y o 15 řádů menší než horizontální rychlost ve směru osy x, pro $\beta^2 = 42$ o 16 řádů, můžeme ji tedy ve srovnání považovat za numerickou nulu na celé ploše zkoumaného kanálu, což odpovídá našemu očekávání laminárního proudění.

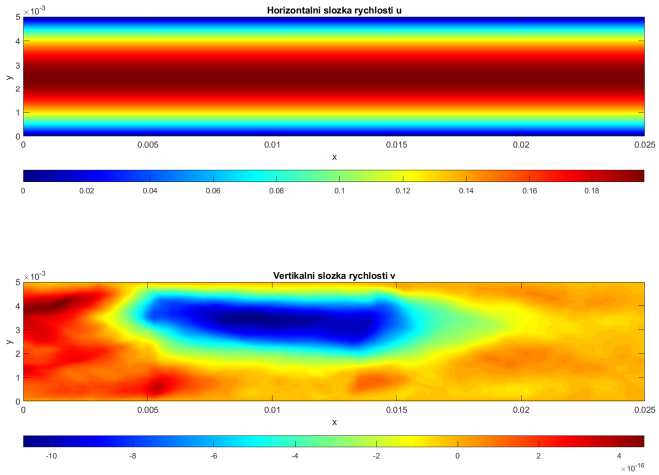
Na 7 je vidět pole ukazující rozdíl numerického a analytického řešení rychlosti u vypočtené jako $u_{i,j}^{num} - u_{i,j}^{exakt}$. Pole je pro všechny parametry β^2 stejné a největší rozdíl je na ose kanálu a dosahuje hodnoty $-2 \cdot 10^{-3}$, nejmenší je na stěnách, kde je rozdíl nulový, a tento rozdíl je stejný na celé délce kanálu, což odpovídá předpokladům.

Vliv parametru β^2 můžeme hodnotit z grafu ukazující rozdíl objemového toku tekutiny vstupující do kontrolního kanálu a vystupující z něj vztažený k počtu iterací. Objemový tok je spočten jako:

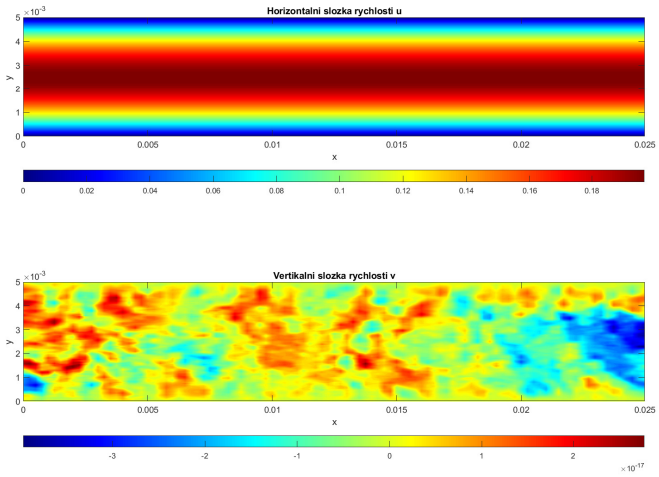
$$\dot{V} = v_s \cdot S \tag{69}$$

,kde v_s je střední rychlost a S je průřez kanálu, my jej tedy můžeme nahradit hodnotou vzdálenosti desek H.

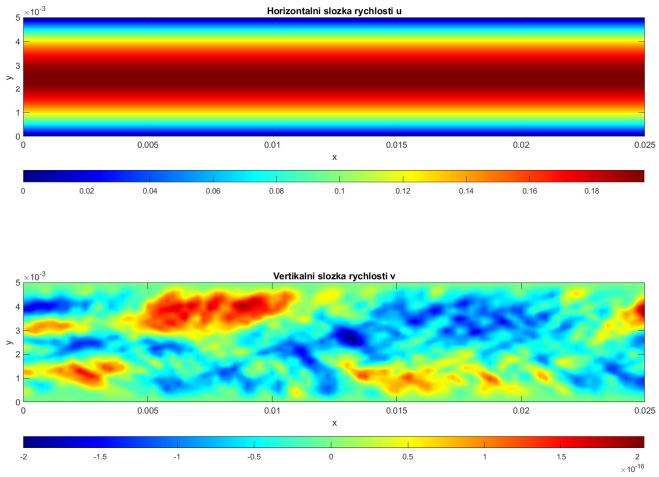
Jelikož by byl výpočet při každé iteraci časově náročný,je tato hodnota počítána a vykreslována každých 5000 iterací. Z grafů 8 lze vyčíst, že dojde k ustálení na 0, což odpovídá očekávání, že se tekutina nekumuluje v kontrolním kanále a hustota tekutiny vstupující do kanálu je stejná jako hustota kapaliny z ní vystupující, a pro hodnoty nad 100000 iterací není potřeba pokračovat ve vykreslování. Ovšem k ustálení na 0 dochází pro každý koeficient β^2 jinou rychlostí. Prvotní výkyv je způsoben rozprostíráním tlaku od vstupu do kontrolního kanálu, takže objem tekutiny vstupující je mnohem větší, než objem tekutiny vystupující. Pro $\beta^2 = 42$ 8b dochází k ustálení nejrychleji a po 20000



(a) $\beta^2 = 4$

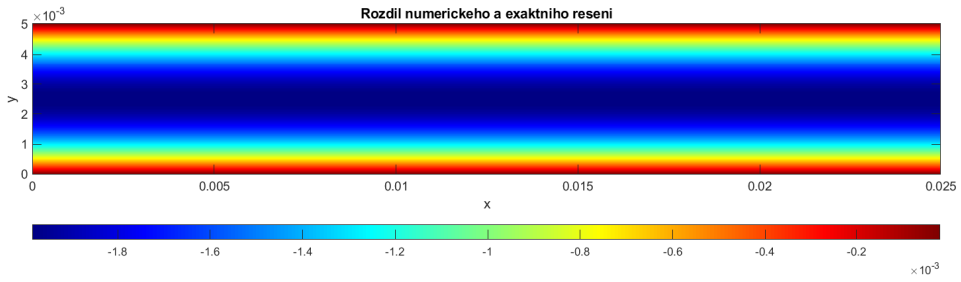


(b) $\beta^2 = 42$

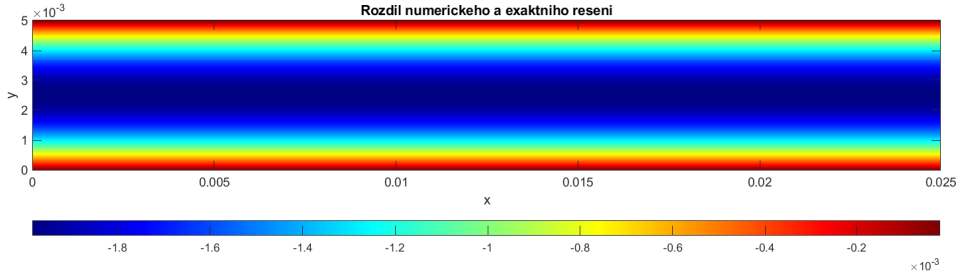


(c) $\beta^2 = 100$

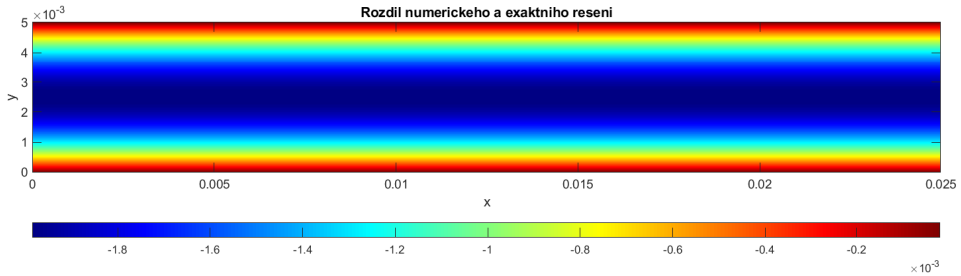
Obr. 6: Pole rychlostí pro různé koeficienty β^2



(a) $\beta^2 = 4$

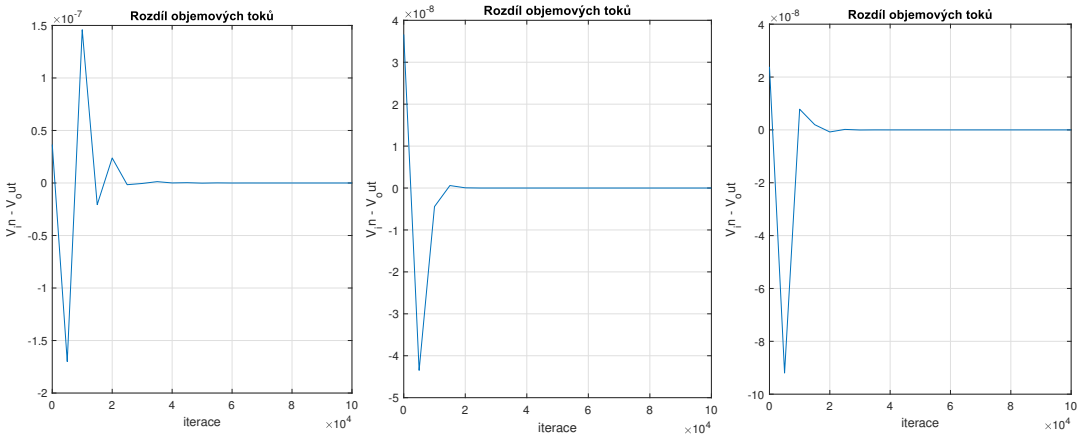


(b) $\beta^2 = 42$



(c) $\beta^2 = 100$

Obr. 7: Rozdíl numerického a analytického řešení rychlosti u pro různé koeficienty β^2



(a) $\beta^2 = 4$ **(b)** $\beta^2 = 42$ **(c)** $\beta^2 = 100$

Obr. 8: Porovnání vývoje rozdílu objemových toků

iteracích nejsou výkyvy pozorovatelné. Pro $\beta^2 = 100$ 8c je počáteční výkyv mnohem větší a k definitivnímu ustálení dochází při hodnotě 25000 iterací. Nejpomalejší ustalování je pro hodnotu $\beta^2 = 4$, která sice zaznamenává nejmenší počáteční rozdíl objemů tekutiny vstupující a vystupující z kanálu, ale na nulovém rozdílu se ustálí až na 40000 iteracích.

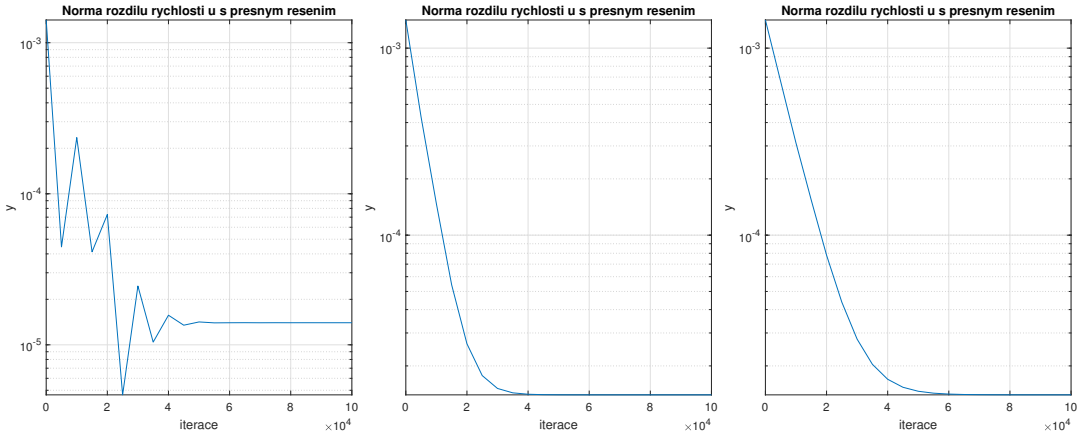
Pro případ se známým analytickým řešením můžeme uvédst graf ukazující Frobeniovu (Euklidovskou) normu rozdílu analytického a numerického řešení pro rychlost u vztaženou na počet buněk sítě v závislosti na počtu iterací

$$\|u_{exakt} - u^{n+1}\| = \frac{\|u_{exakt} - u^{n+1}\|_2}{(nx+2)(ny+2)} \tag{70}$$

, kde u_{exakt} je analytické řešení dané rovnicí 66.

Z grafů 9 je vidět, že grafy pro $\beta^2 = 42$ a $\beta^2 = 100$ jsou téměř totožné, rozdíl je opět v rychlosti konvergence k ustálené hodnotě normy, která se pro všechny hodnoty β^2 blíží řádu 10^{-5}. Grafy jsou uváděny do 100000 iterací, jelikož poté se norma ustálí. Jak je vidět na 9b, nejrychleji se přesnému řešení blíží případ pro $\beta^2 = 42$, které se ustálí během 40000 iterací. Případ s $\beta^2 = 4$ (9a) se ustálí během 50000 iterací a nadále se nemění a pro $\beta^2 = 100$ vyžaduje ustálení 60000 iterací. Nejrychleji tedy konverguje hodnota vypočtená z rovnice 67.

Dalším grafickým výstupem, který slouží k porovnávání konvergence metody jsou stacionární rezidua veličin p, u, v v závislosti na počtu iterací. Pro přehlednost jsou vynášena v semilogaritmickém měřítku a kvůli snížení náročnosti výpočtu jsou počítána každých 5000 iterací jako Frobeniova (Euklidovská) norma rozdílu veličiny a předchozí hodnoty vztažená



(a) $\beta^2 = 4$ **(b)** $\beta^2 = 42$ **(c)** $\beta^2 = 100$

Obr. 9: Porovnání vývoje normy rozdílu analytického a numerického řešení

na počet buněk sítě

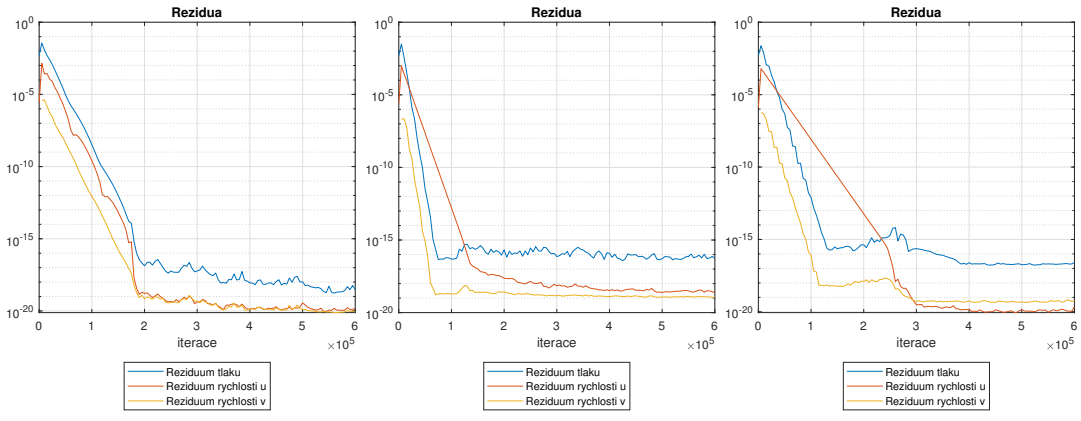
$$\|\text{rez}\, u\| = \frac{\|u^{n+1} - u^n\|_2}{(nx+2)(ny+2)} \tag{71}$$

obdobně pro p a v. Tento grafický výstup můžeme používat i v případě, kdy neznáme analytické řešení a můžeme na něm sledovat průběh ustalování jednotlivých veličin v závislosti na počtu iterací. Za ustálení považujeme stav, kdy stacionární residuum dosáhne numerické nuly.

Na obr. 10 jsou vynesena stacionární rezidua pro různé parametry β^2, která odpovídají předpokládaným průběhům, tedy že za normálních okolností mají klesající tendenci a dosahují hodnot, které můžeme označit za numerickou nulu. V našem případě dosahovala rezidua hodnot v řádech od 10^{-15} do 10^{-20}. K ustálení (reziduum dosáhne numerické nuly) dochází různou rychlostí v závislosti na volbě β^2, nejrychleji se ustaloval případ 10b s $\beta^2 = 42$, kde se reziduum p a reziduum v ustálilo během 70000 iterací a reziduum u zhruba na 130000 iteracích. Pro $\beta^2 = 4$ došlo k ustálení reziduí pro všechny 4 veličiny shodně u 190000 iteracích a pro $\beta^2 = 100$ se rezidua rychlosti u a v ustálila po 130000 iteracích, ale reziduum tlaku až na 260000 iteracích. Ustálení rezidua tlaku na hodnotě rovné numerické ule zároveň odpovídá předpokladu, že uměle přidaný člen umělé stlačitelnosti do rovnice (53) $\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}$ se rovná nule pro ustálené řešení.

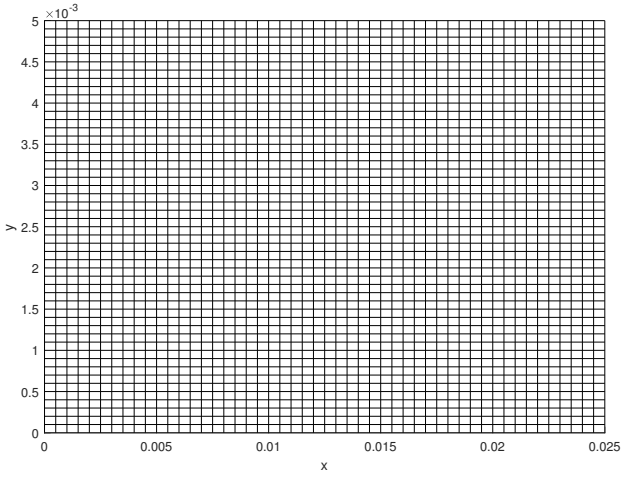
5.1.3 Vliv prostorového kroku

Pro všechny tři úlohy byl zvolen parametr $\beta^2 = 42$ a mění se v nich počet buněk nx v x a ny v y směru. První síť má $nx = 50$ a $ny = 50$, druhá $nx = 100$ a $ny = 100$ a třetí $nx = 200$ a $ny = 200$.

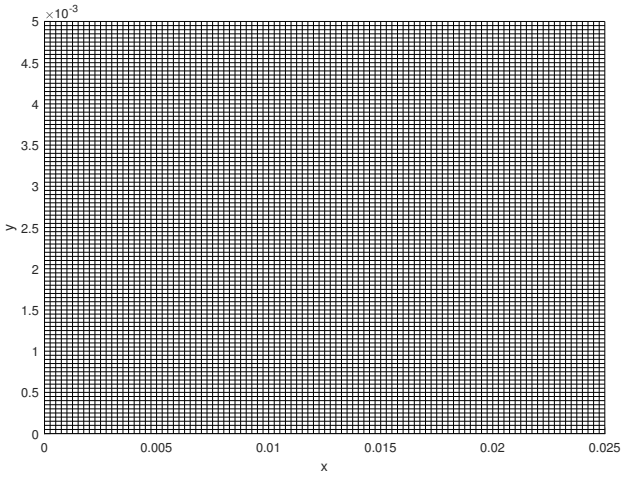


(a) $\beta^2 = 4$ **(b)** $\beta^2 = 42$ **(c)** $\beta^2 = 100$

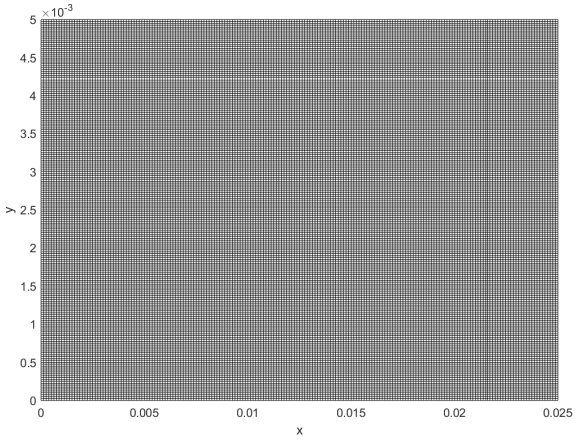
Obr. 10: Průběh stacionárních reziduí v závislosti na počtu iterací pro různé β^2



(a) Síť $nx = 50$ a $ny = 50$



(b) Síť $nx = 100$ a $ny = 100$



(c) Síť $nx = 200$ a $ny = 200$

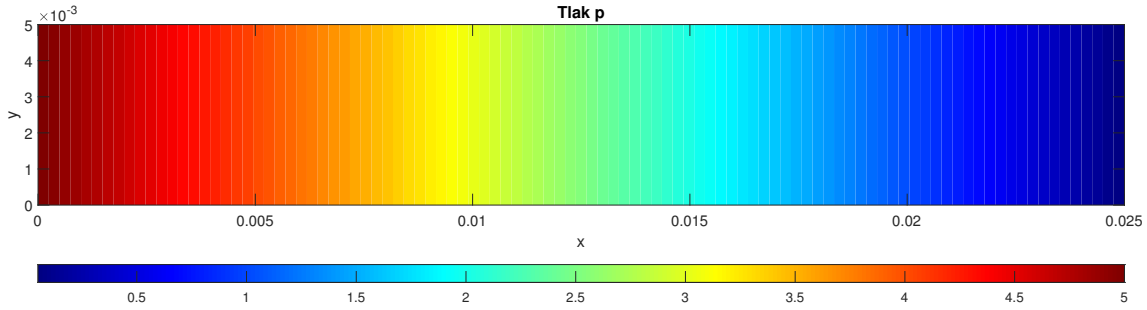
Obr. 11: Porovnání sítí použitých pro hodnocení prostorového kroku

Společné parametry:	$H_y = 5e-3$
	$L_x = 25e-3$
	$\rho = 1060$
	$\beta^2 = 42$
	$\nu = 3 \cdot 10^{-6}$
	$\Delta p = 5.1$
	$iterace = 600000$
Síť 11a:	$nx = 50$
	$ny = 50$
	$\Delta t = 4.1 \cdot 10^{-4}$
Síť 11b:	$nx = 100$
	$ny = 100$
	$\Delta t = 2.0 \cdot 10^{-4}$
Síť 11c:	$nx = 200$
	$ny = 200$
	$\Delta t = 7.5 \cdot 10^{-5}$

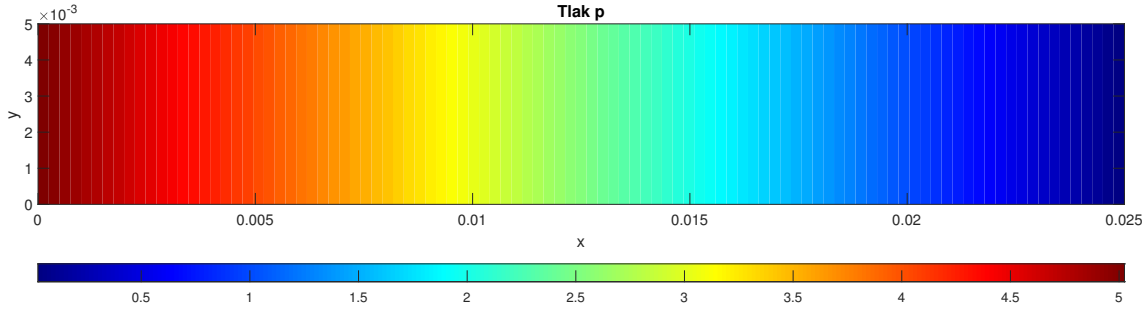
Na obr. 12 je vidět rozložení tlaku, které se vyvine z počáteční podmínky tlaku na vstupu do kanálu $\Delta p = 5.1$ pro všechny sítě stejně. Jsou vidět ekvidistantní izočáry rovnoběžné se svislou osou ukazující na lineární průběh tlaku z hodnoty 5.1 na vstupu k hodnotě 0 na výstupu.

Na obrázku 13 je vidět porovnání polí rychlostí po 600000 iteracích pro různé sítě. Rychlost u má ve všech případech parabolický průběh symetrický podle osy kanálu, na ose se blíží hodnotě $u = 0.2$, což byla předpokládaná hodnota a na stěnách kanálu je nulová, takže splňuje no-slip podmínku zadanou okrajovými podmínkami. Všechny tři případy se liší v poli znázorňujícím rychlost v ve směru osy y, ale ve všech případech tato rychlost dosahuje hodnoty v řádu 10^{-17}, takže je o 16 řádu nižší než rychlost u ve směru osy x a tuto rychlost můžeme považovat za rovnou numerické nule, což odpovídá našemu předpokladu laminárního proudění.

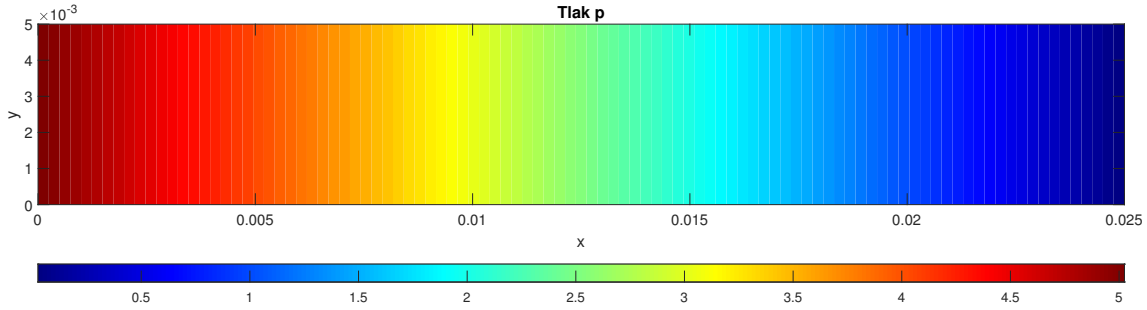
Obrázek 14 nám umožňuje lépe posoudit přesnost numerického řešení oproti analytickému a zároveň i ukazuje hustotu sítě. Je vidět, že po 600000 iteracích všechny tři sítě kopírují parabolický průběh rychlosti u v kanále, ale přesnost s klesajícím počtem buněk také klesá.



(a) Síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$

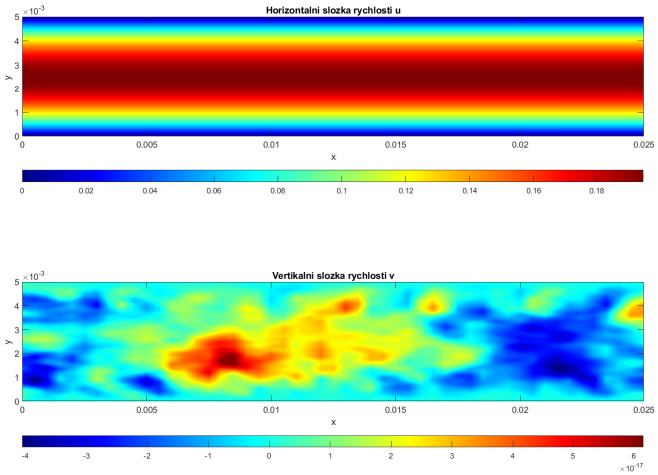


(b) Síť 11b:$nx = 100$ a $ny = 100$

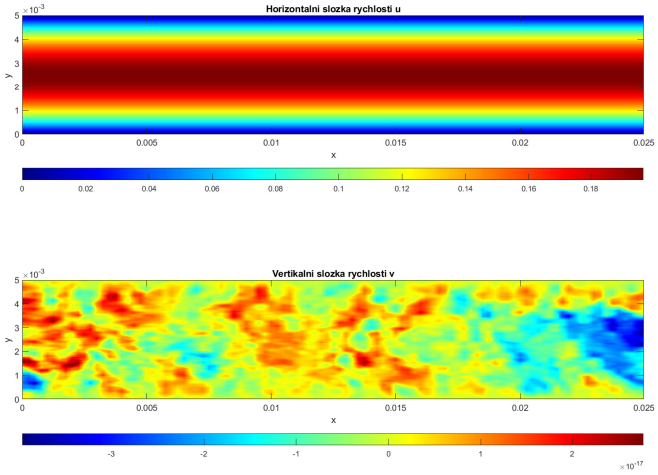


(c) Síť 11c:$nx = 200$ a $ny = 200$

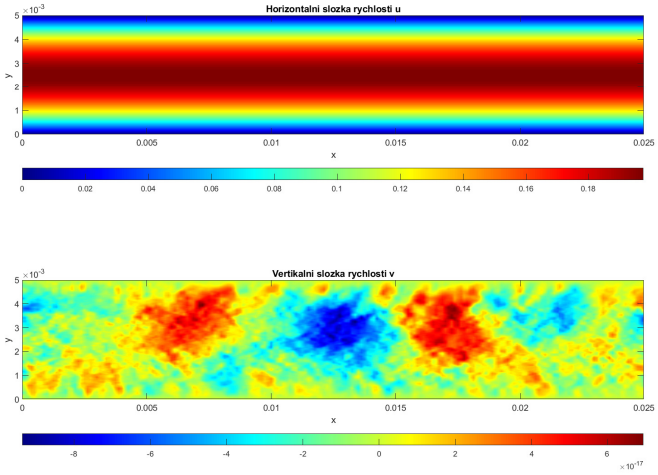
Obr. 12: Rozložení tlaku pro různé sítě



(a) Síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$

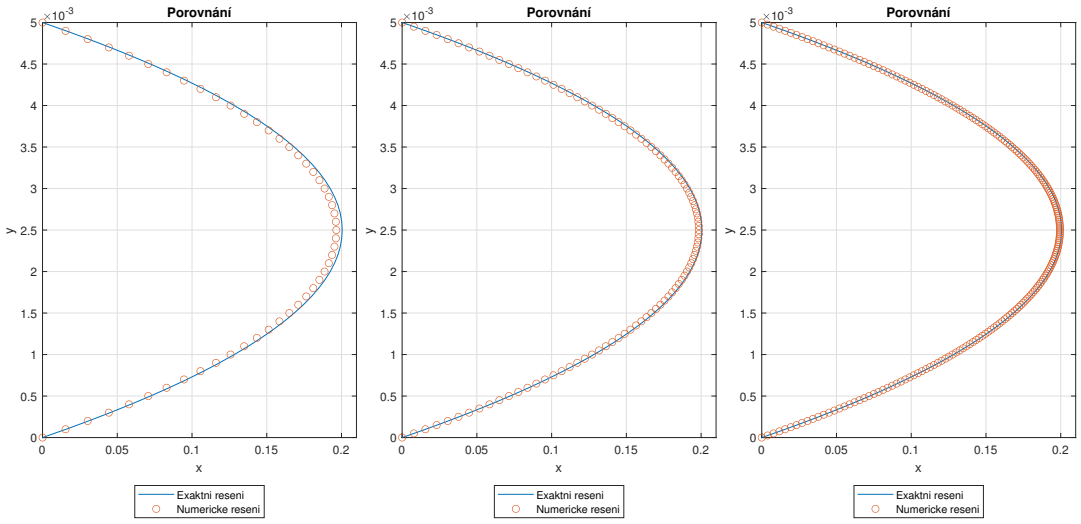


(b) Síť 11b:$nx = 100$ a $ny = 100$



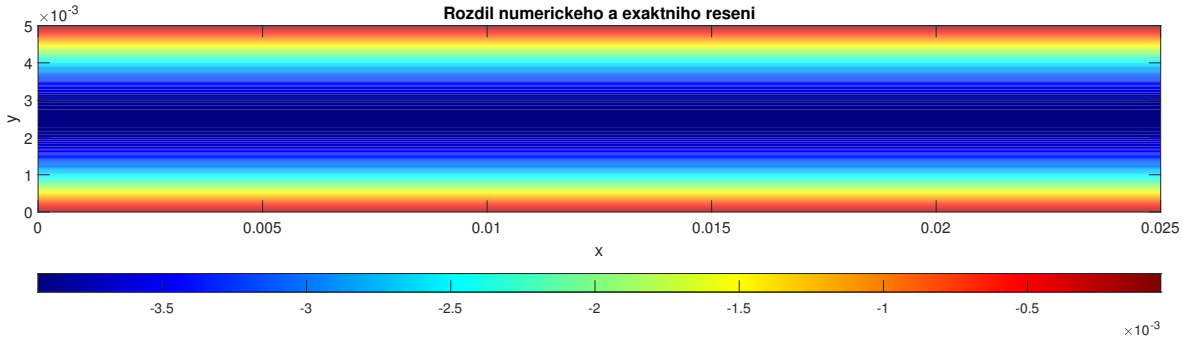
(c) Síť 11c:$nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 13: Pole rychlostí pro různé sítě

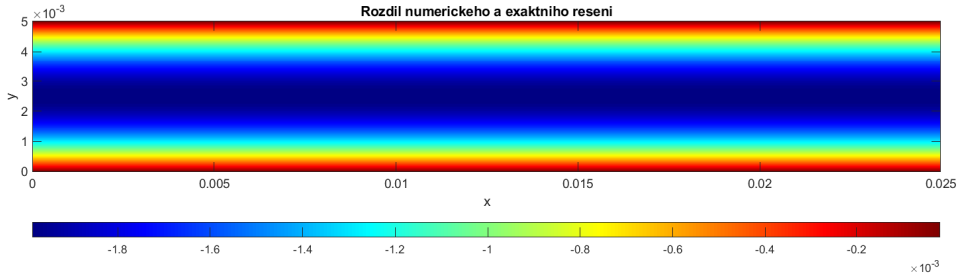


(a) Síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$ **(b)** Síť 11b:$nx = 100$ a $ny = 100$ **(c)** Síť 11c:$nx = 200$ a $ny = 200$

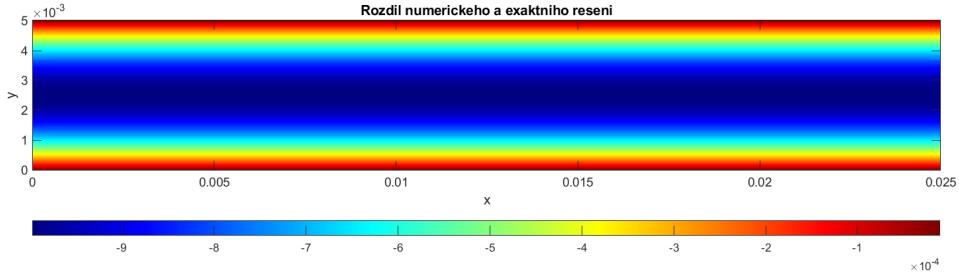
Obr. 14: Porovnání numerického a analytického řešení rychlosti u v kanále



(a) Síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$



(b) Síť 11b:$nx = 100$ a $ny = 100$



(c) Síť 11c:$nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 15: Rozdíl numerického a analytického řešení rychlosti u pro různé sítě

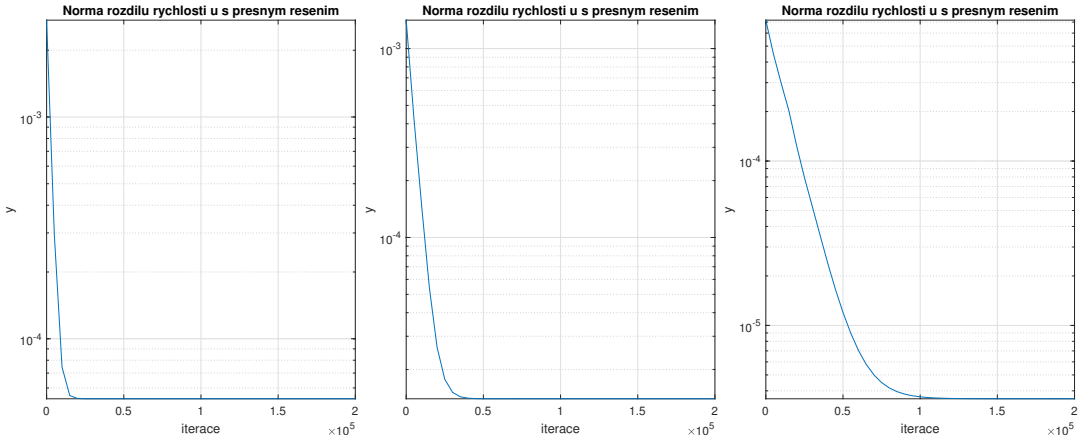
Pro přesné posouzení nepřesnosti je vykreslen obr. 15, který ukazuje pole rozdílu numerického a analytického řešení rychlosti u vypočtené jako $u_{i,j}^{num} - u_{i,j}^{exakt}$ po 600000 iteracích. Ve všech případech je rozdíl rychlostí na stěně nulový a největší je v ose kanálu. Síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$ dosahuje největší nepřesnosti a to $-4 \cdot 10^{-3}$ v ose kanálu, takže výsledná $u_{max} = 0.196$. Síť 11b:$nx = 100$ a $ny = 100$ dosahuje oproti hrubší síti poloviční nepřesnosti $-2 \cdot 10^{-3}$ v ose kanálu a výsledná $u_{max} = 0.198$. Nejjemnější síť 11c:$nx = 200$ a $ny = 200$ je v každém směru čtyřikrát hustší než nejhrubší síť a dosahuje i čtvrtinové nepřesnosti $-1 \cdot 10^{-3}$, proto se $u_{max} = 0.199$ blíží nejvíce hodnotě $u_{exakt} = 0.2\,m/s$, podle které byl nastavován tlakový spád $\Delta p = 5.1$.

Rychlost konvergence k přesnému řešení pro různé sítě můžeme posoudit vynesením grafu pro Frobeniovu (Euklidovskou) normu rozdílu analytického a numerického řešení pro rychlost u vztaženou na počet buněk sítě v závislosti na počtu iterací

$$\|u_{exakt} - u^{n+1}\| = \frac{\|u_{exakt} - u^{n+1}\|_2}{(nx+2)(ny+2)} \tag{72}$$

, kde u_{exakt} je analytické řešení dané rovnicí (66). Tato norma je počítána každých 5000 iterací.

Na obrázku 16 je vidět porovnání vývoje normy rozdílu analytického a numerického řešení pro různé sítě v závislosti na iteracích. Je vidět, že všechny grafy mají klesavou tendenci, což potvrzuje, že numerická simulace konverguje k přesnému řešení. Grafy se liší v rychlosti konvergence a řádu, na kterém se ustálí. Nejrychleji klesá graf 16a pro síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$, ale dosahuje řádu $10^{-4.45}$, oproti tomu graf 16c klesá nejpomaleji, ale dosahuje řádu $10^{-5.65}$, což potvrzuje výsledky z obrázků 14 a 15, kde se ukázalo, že nejblíže k analytickému řešení se blíží nejjemnější síť s $nx = 200$ a $ny = 200$.



(a) Síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$ **(b)** Síť 11b:$nx = 100$ a $ny = 100$ **(c)** Síť 11c:$nx = 200$ a $ny = 200$

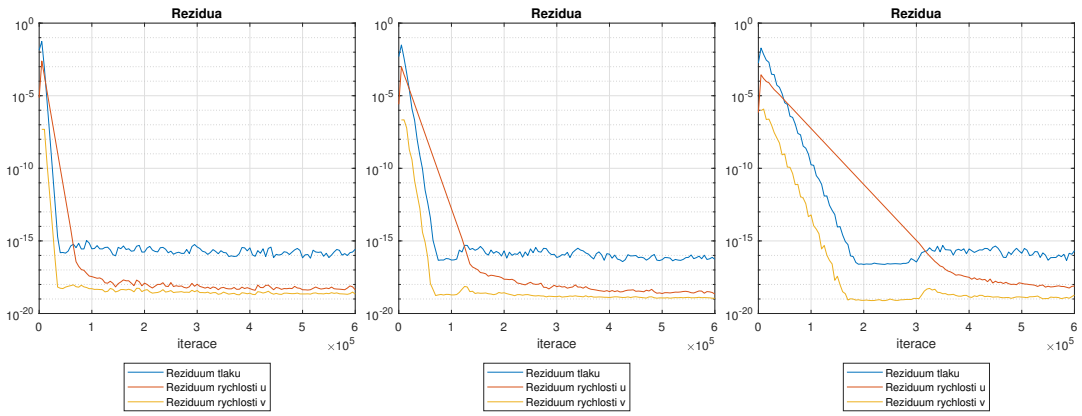
Obr. 16: Porovnání vývoje normy rozdílu analytického a numerického řešení pro různé sítě

Posledním grafickým výstupem, ze kterého můžeme hodnotit konvergenci metody k ustálenému řešení je graf stacionárních reziduí pro veličiny p, u, v v závislosti na počtu iterací. Pro přehlednost jsou vynášena v semilogaritmickém měřítku a kvůli snížení náročnosti výpočtu jsou počítána každých 5000 iterací jako Frobeniova (Euklidovská) norma rozdílu veličiny a předchozí hodnoty vztažená na počet buněk sítě

$$\|\mathrm{rez}\, u\| = \frac{\|u^{n+1} - u^n\|_2}{(nx+2)(ny+2)} \tag{73}$$

obdobně pro p a v. Tento grafický výstup můžeme používat i v případě, kdy neznáme analytické řešení a můžeme na něm sledovat průběh ustalování jednotlivých veličin v závislosti na počtu iterací. Za ustálení považujeme stav, kdy stacionární residuum dosáhne numerické nuly.

Na obr. 17 jsou vynesena stacionární rezidua pro různé sítě. Ve všech třech případech mají rezidua klesající tendenci, takže můžeme říct, že se numerická simulace ustaluje. Pro reziduum tlaku dojde k ustálení na hodnotě 10^{-16}, pro reziduum rychlosti u přibližně na hodnotě 10^{-18} a pro reziduum rychlosti v přibližně na hodnotě 10^{-19}. Můžeme tak říct, že všechny rezidua jsou rovna numerické nule a ve všech případech došlo k ustálení. Rychlost ustalování je pro každou síť jiná. Síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$ se ustaluje nejrychleji, reziduum tlaku a rychlosti v se ustálí během 45000 iterací a reziduum rychlosti u během 100000 iterací a následně okolo této hodnoty oscilují. Síť 11b:$nx = 100$ a $ny = 100$ má podobný průběh, jen k ustálení dojde za 70000 iterací pro reziduum tlaku a rychlosti v a za 140000 pro reziduum rychlosti u. Rezidua pro síť 11c:$nx = 200$ a $ny = 200$ se ustalují nejpomaleji, pro reziduum tlaku a rychlosti v nastane ustálení na 185000 iteracích a pro rychlost u na 370000 iteracích. V prvních 5000 iteracích můžeme pozorovat výrazný nárůst ve všech případech, který je způsoben distribucí tlaku ze vstupu po celém kanále.



(a) Síť 11a:$nx = 50$ a $ny = 50$ **(b)** Síť 11b:$nx = 100$ a $ny = 100$ **(c)** Síť 11c:$nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 17: Průběh stacionárních reziduí v závislosti na počtu iterací pro různé sítě

5.1.4 Shrnutí

Cílem této úlohy bylo dokázat, že vytvořený program dokáže spočítat a vykreslit pole rychlostí a tlaku na základě zadaného tlakového spádu pro kanál simulující velkou rovnou tepnu v lidském těle a zhodnotit volbu parametru umělé stlačitelnosti a hustotu sítě danou počtem buněk ve směru osy x a y. Pro takto zadaný případ jsme byli schopni srovnávat numerické řešení s analytickým. Porovnáním tří hodnot parametru umělé stlačitelnosti můžeme říct, že hodnota získaná vzorcem $\beta^2 = u_{max}^2 \cdot \rho$ zajišťuje optimální poměr mezi rychlostí rozložení tlakového spádu a časovým krokem Δt, ale vyžaduje znát rychlost u_{max}, která se vyvine v kanálu. Zároveň jsme ověřili, že koeficient umělé stlačitelnosti nemá vliv na přesnost řešení, pouze na rychlost konvergence k přesnému řešení, pokud tedy bude nastaven dostatečný počet iterací, dosáhne numerická simulace stejné přesnosti bez ohledu na volbu koeficientu β. Porovnáváním tří sítí jsme zjistili, že přesnost řešení je přímo úměrná počtu buněk v síti. Očekávané rychlosti $u_{max} = 0.2$ se nejblíže přiblížila síť se 200 buňkami v obou směrech, která se ustálila na $u_{max} = 0.199$, ale simulace s touto sítí trvala nejdéle, zhruba 16500 sekund pro 600000 iterací. Simulace se sítí o 100 buňkách v každém směru zabrala 4300 sekund na výpočet a ustálila se na rychlost $u_{max} = 0.198$. Pro 50 buněk v každém směru trvala simulace 1200 sekund a rychlost se ustálila na $u_{max} = 0.196$.

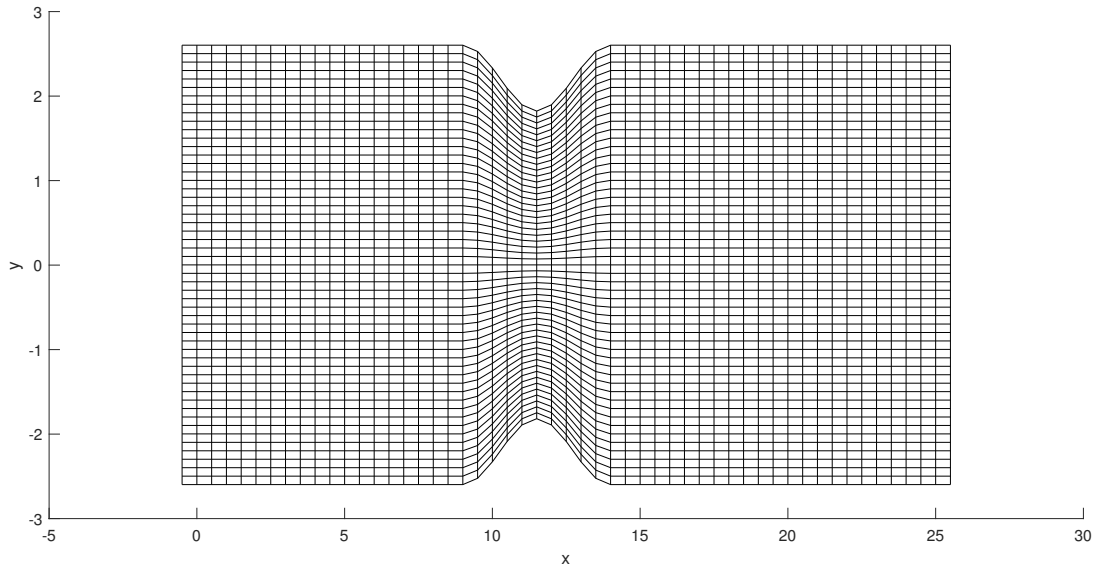
5.2 Kanál se zúžením

5.2.1 Popis úlohy

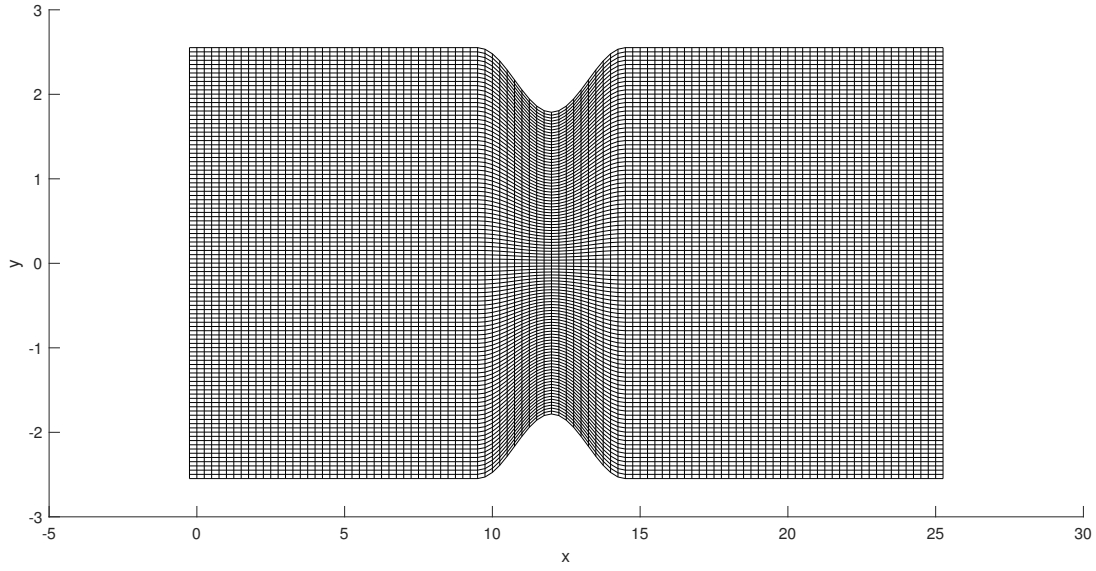
Tato úloha má simulovat případ, kdy je céva symetricky zúžena například vlivem aterosklerózy popsané v kapitole 2.1.3. Počáteční podmínky, okrajové podmínky a rozměry byly zachovány z první úlohy, ale síť byla ve středu kanálu zdeformována funkcí $\cos$ po délce $\frac{1}{5}L$ tak, aby byla zajištěna C^1 spojitost a nejmenší vzdálenost mezi stěnami byla $0.035\,m$ viz obr.18. V této úloze neznáme přesné analytické řešení, ale očekáváme menší rychlost než v úlohách v 5.1, proto je $\beta^2 = 27.1$. Časový krok Δt je určen z rovnice (68) a nastaven pro celou síť. Stejně jako v předchozím případě budeme porovnávat tři různé hustoty sítě (viz obr. 19.

```
for i=80:120
   for j=1:ny+3
      y(i,j) = Y0 + ((j-((ny+4)/2))*(1.7+0.3*cos(((i-80)/20)*pi))*H/(2*ny));
   end
end
```

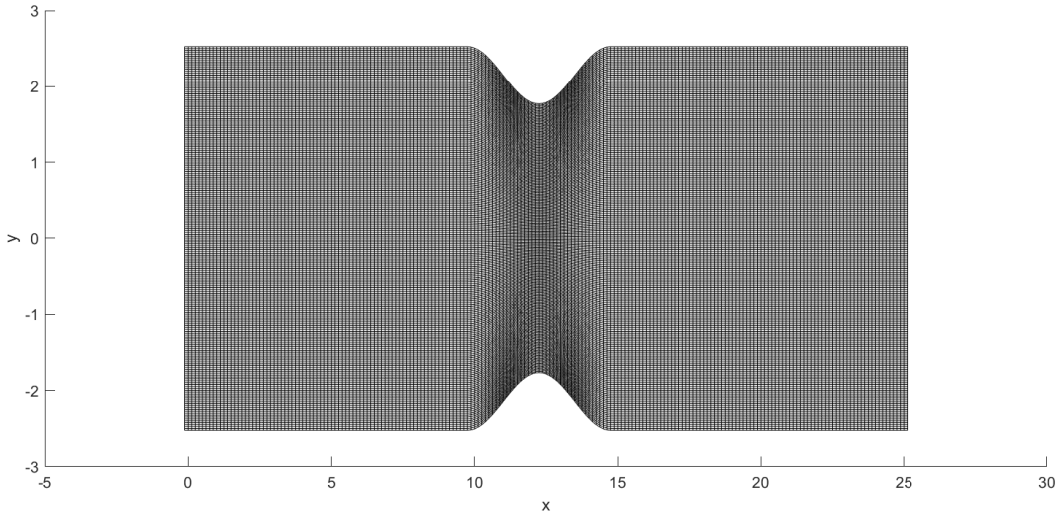
Obr. 18: Skript z MATLABu pro vytvoření deformace na kanále s $nx = 200$ a $ny = 200$



(a) Síť $nx = 50$ a $ny = 50$



(b) Síť $nx = 100$ a $ny = 100$



(c) Síť $nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 19: Porovnání sítí deformovaných zúžením

Hranice vlevo (vstup)	$u1(1,:) = u1(2,:);$
	$v1(1,:) = v1(2,:);$
Hranice vpravo(výstup)	$u1(nx+2,:) = u1(nx+1,:);$
	$v1(nx+2,:) = v1(nx+1,:);$
Hranice dole (stěna)	$u1(:,1) = -u1(:,2);$
	$v1(:,1) = -v1(:,2);$
	$p1(:,1) = p1(:,2);$
Hranice nahoře (stěna)	$u1(:,ny+2) = -u1(:,ny+1);$
	$v1(:,ny+2) = -v1(:,ny+1);$
	$p1(:,ny+2) = p1(:,ny+1);$

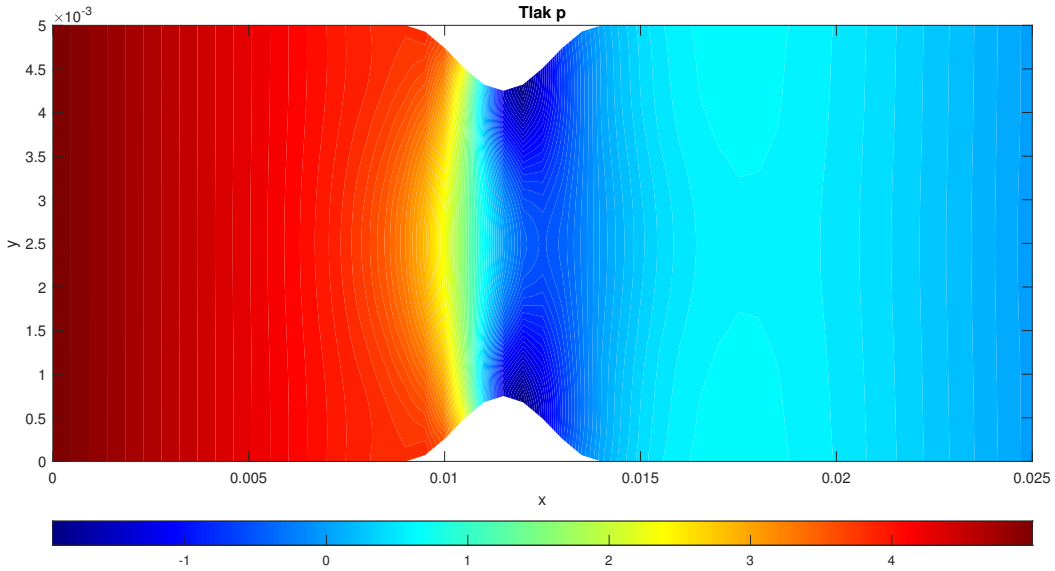
Obr. 20: Zápis okrajových podmínek v MATLABu

Společné parametry:	$H_y = 5e-3$
	$L_x = 25e-3$
	$\rho = 1060$
	$\beta^2 = 27.1$
	$\nu = 3 \cdot 10^{-6}$
	$\Delta p = 5.1$
	$iterace = 800000$
Síť 11a:	$nx = 50$
	$ny = 50$
	$\Delta t = 2.3 \cdot 10^{-4}$
Síť 11b:	$nx = 100$
	$ny = 100$
	$\Delta t = 6.0 \cdot 10^{-5}$
Síť 11c:	$nx = 200$
	$ny = 200$
	$\Delta t = 3.8 \cdot 10^{-5}$

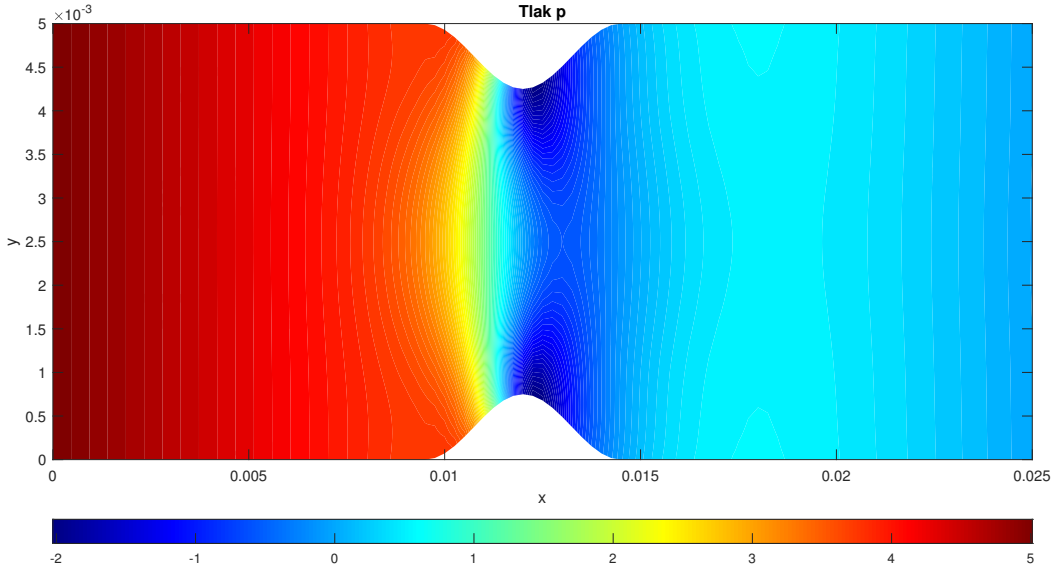
5.2.2 Prezentace výsledků

Na obrázku 21 je vidět rozložení tlaku po 800000 iteracích pro různé sítě. Tlak se rozkládá rovnoměrně v oblasti před a za zúžením a v místě samotného zúžení dochází ke skoku a dokonce se v blízkosti stěny tlak dostává i do záporných hodnot. Rozdíl mezi jednotlivými hustotami sítě je minimální a tlak se ve všech polích pohybuje v rozmezí od -2 v oblasti zúžení do 5 na vstupu.

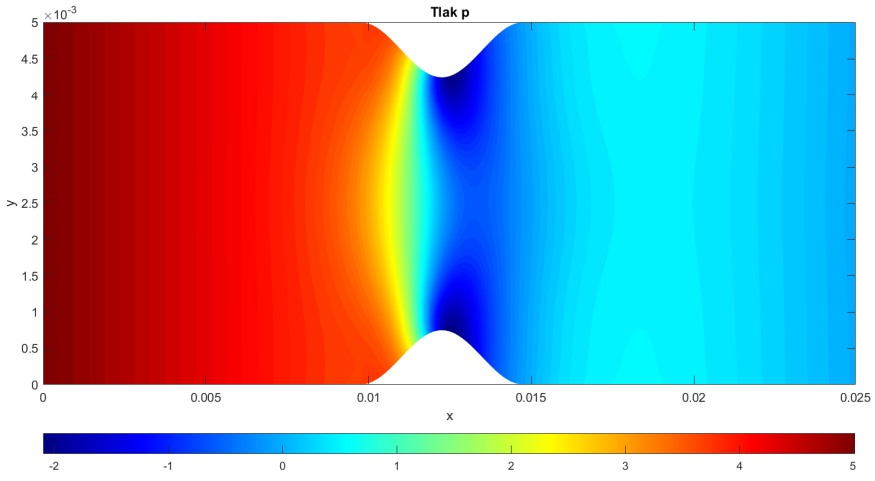
Obrázek 22 ukazuje pole rychlostí u ve směru osy x a v ve směru osy y. Výsledky pro různé sítě jsou shodné. Rychlost u je symetricky rozložena podle horizontální osy kanálu a v místě zúžení dochází k jejímu nárůstu na 0.14, což je méně, než hodnota 0.2, která se vyvine v kanálu bez zúžení. Rychlost v dosahuje řádu o jedna menší, než rychlost u v místě



(a) Síť 19a:$nx = 50$ a $ny = 50$

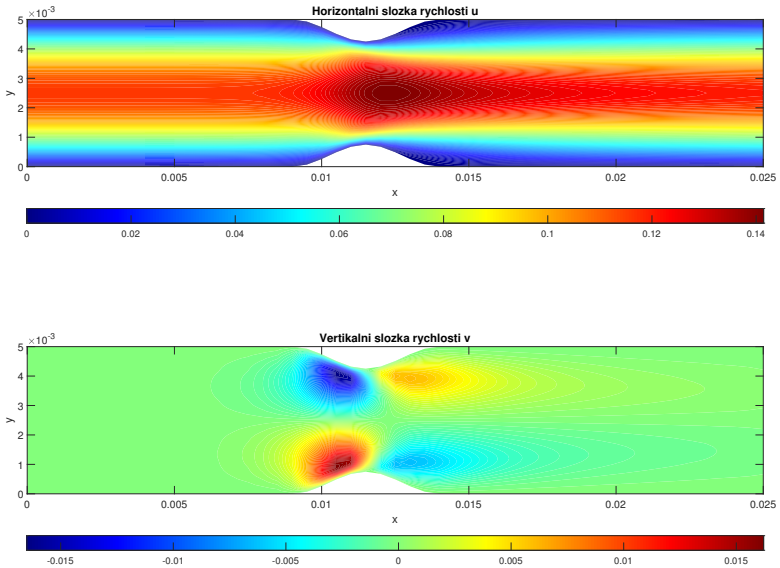


(b) Síť 19b:$nx = 100$ a $ny = 100$

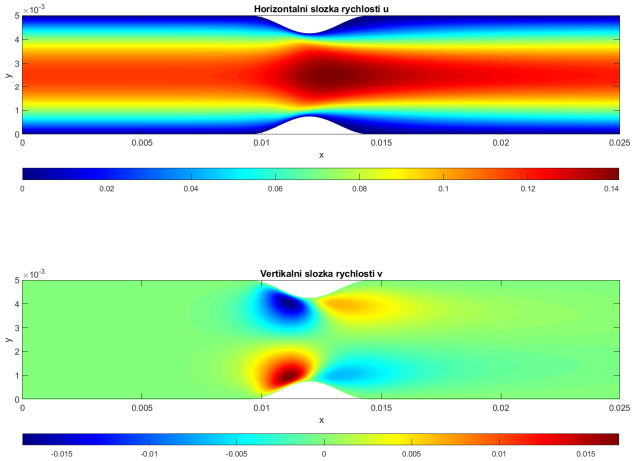


(c) Síť 19c:$nx = 200$ a $ny = 200$

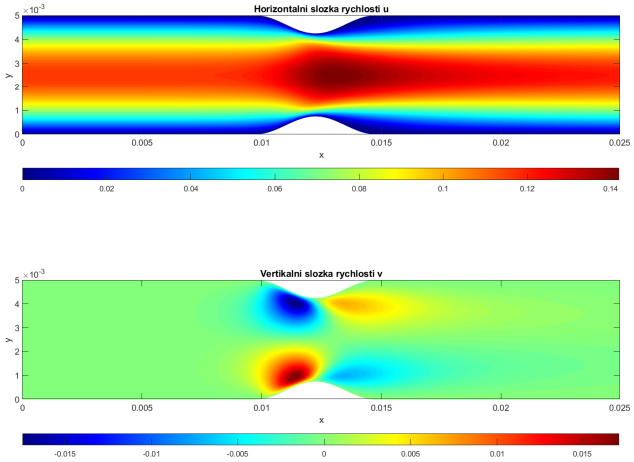
Obr. 21: Rozložení tlaku pro různé zúžené sítě



(a) Síť 19a:$nx = 50$ a $ny = 50$



(b) Síť 19b:$nx = 100$ a $ny = 100$



(c) Síť 19c:$nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 22: Pole rychlostí pro různé zúžené sítě

okolo deformace, ve zbylé části kanálu je tato rychlost nulová, což odpovídá předpokladu laminárního proudění.

Jelikož jsou rychlosti rozděleny do složek ve směrech os, můžeme uvést graf pro celkovou rychlost vypočtenou jako:

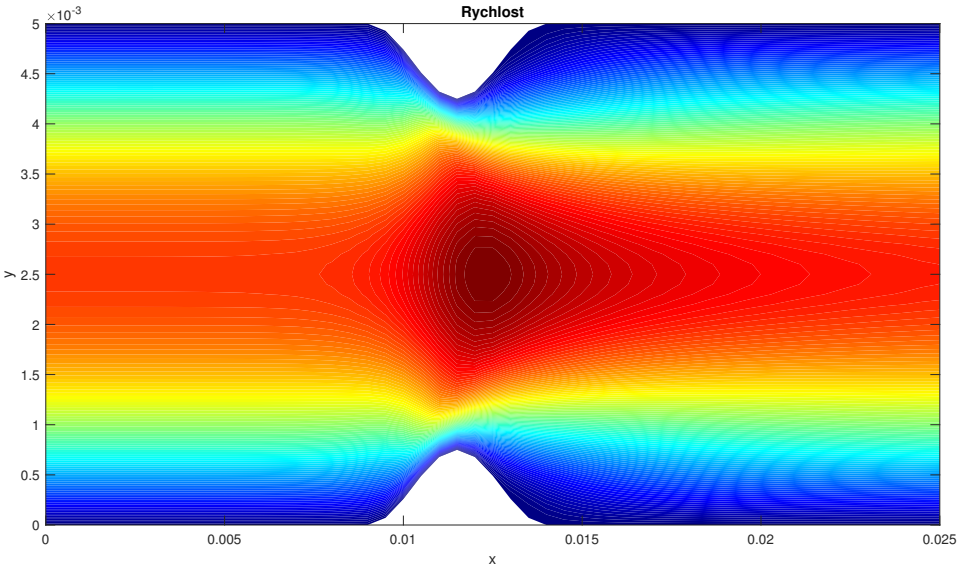
$$celk_{i,j} = \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} \tag{74}$$

Na obrázku 23 je vidět celková rychlost pro všechny tři sítě. Jelikož je tato rychlost složena ze složky u a v, kde v je o řád menší, než u, podobá se výrazně grafům pro rychlost u na obrázku 22. Je rozložena symetricky podle horizontální osy kanálu a v místě zúžení dochází k jejímu nárůstu na hodnotu 0.14.

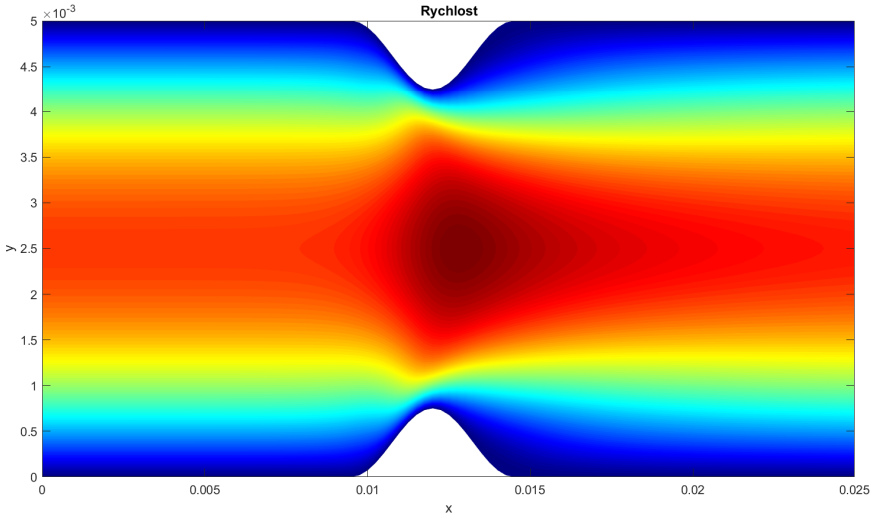
Na obr. 24 jsou vidět stacionární rezidua pro zúžený kanál vykreslovaná každých 5000 iterací. Rezidua mají ve všech případech klesající charakter a jejich hodnota se ustálí v řádu 10^{-2} pro rezidua rychlostí u a v a 10^{-17} pro reziduum tlaku. Podle očekávání nejrychleji konverguje hrubší síť, která se ustálí během 100000 iterací(obr. 24a). Jemnější síť se konverguje k přesnému řešení během 190000 iterací a poté již rezidua dále neklesají (24b). Zvolená metoda konverguje nejpomaleji pro nejjemnější síť a pro zvolené parametry nemají rezidua čistě klesající charakter, ale místy oscilují. I přesto se rezidua ustálí během 500000 iterací na hodnotách v řádu 10^{-17} pro reziduum tlaku a 10^{-20} pro rezidua rychlostí u a v. Hodnoty tohoto řádu můžeme označit za rovné numerické nule, což je předpoklad k tomu, že námi zvolená metoda konverguje k ustálenému řešení. V porovnání s úlohou počítanou v kapitole 5.1.3 konverguje metoda zhruba dvakrát pomaleji a nejpomaleji konverguje reziduum tlaku. Přesto se hodnoty ve všech případech ustálí na stejných hodnotách.

5.2.3 Shrnutí

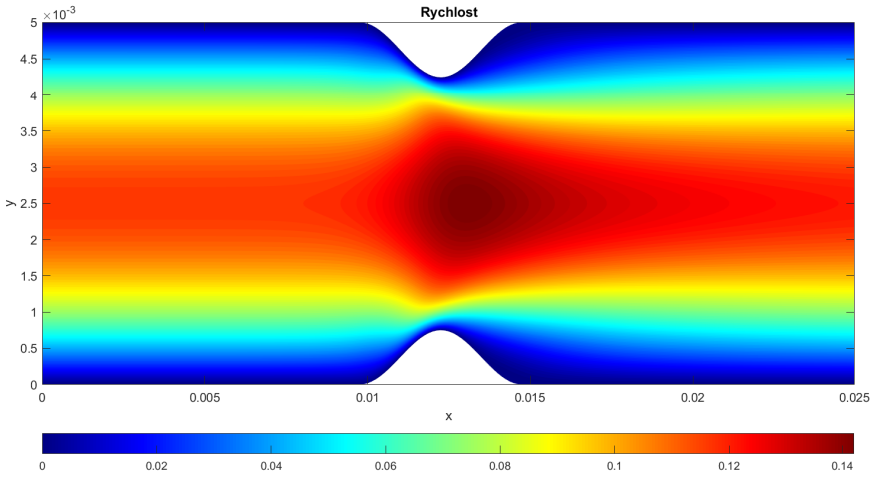
V této úloze bylo cílem ukázat, že program vytvořený na základě metody konečných objemů dokáže simulovat proudění vzniklé tlakovým spádem na deformované síti pouze změnou způsobu generování sítě. Simulace byla provedena pro tři různé hustoty sítě stejně jako v předchozí části, ale nyní jsme nebyli schopni srovnávat výsledky s analytickým řešením. V kanále se vyvinul laminární tok symetrický podle osy kanálu, horizontální rychlost dosahovala hodnoty $u_{max} = 0.14$ oproti $u_{max} = 0.199$ v předchozí úloze, což jsme předpokládali a zohlednili ve volbě koeficientu umělé stlačitelnosti β. Vertikální rychlost je mimo oblast ovlivněnou zúžením rovna numerické nule, v místě zúžení dosahuje hodnot o řád menších, než horizontální rychlost u. Rozprostření tlaku je ovlivněné deformací kanálu, ale i přesto je symetrické podle osy kanálu a v místě za zúžením dosahuje záporných hodnot. Tlak se pohybuje v rozmezí od -2 do 5. Stacionární rezidua mají klesající charakter a



(a) Síť 19a:$nx = 50$ a $ny = 50$



(b) Síť 19b:$nx = 100$ a $ny = 100$



(c) Síť 19c:$nx = 200$ a $ny = 200$

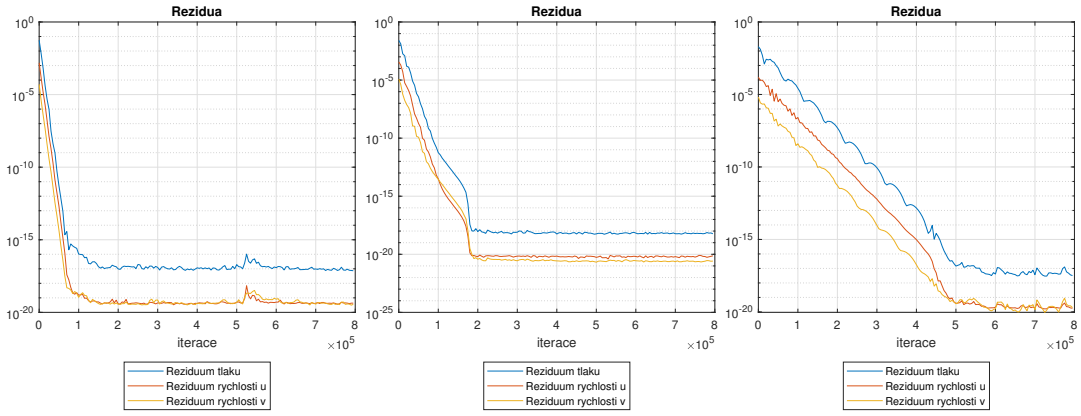
Obr. 23: Celková rychlost $celk$ pro různé sítě

dosahují hodnot, které můžeme považovat za numerickou nulu, což byl předpoklad k tomu, aby simulace konvergovala k ustálenému řešení. Takto zadaná úloha konverguje přibližně dvakrát pomaleji, než úloha bez zúžení, což je s největší pravděpodobností zapříčiněno volbou menšího Δt vyplývajícího z menšího minimálního prostorového kroku v rovnici (68). Toto by se dalo kompenzovat užitím local time steppingu.

5.3 Kanál se zahnutou geometrií

5.3.1 Popis úlohy

V této úloze je řešen kanál, který je zahnutý do oblouku. Geometrie je definována počtem buněk sítě ve dvou směrech, úhlem ϕ, který svírá vstup a výstup, a vzdáleností osy od nulového bodu. Pro tuto úlohu neznáme analytické řešení. Časový krok Δt je určen z rovnice (68) a nastaven pro celou síť. budeme porovnávat tři různé hustoty sítě naznačené v obr. 26. Vlivem zahnuté geometrie kanálu a nastavením menšího tlakového spádu očekáváme menší u_{max}, proto je k tomu adekvátně zvolený koeficient umělé stlačitelnosti.

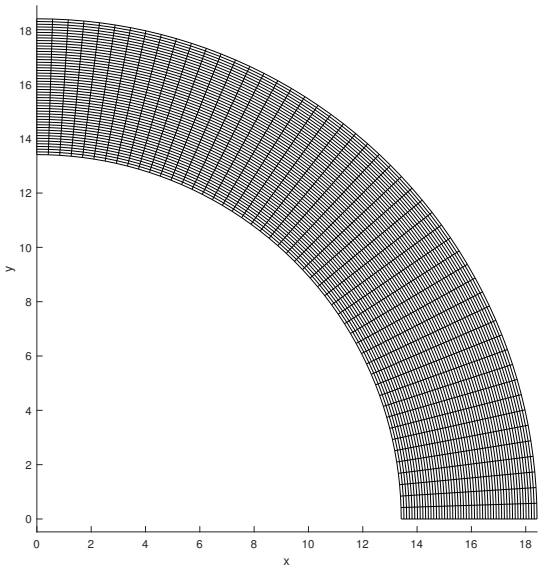


(a) Síť 19a:$nx = 50$ a $ny = 50$ **(b)** Síť 19b:$nx = 100$ a $ny = 100$ **(c)** Síť 19c:$nx = 200$ a $ny = 200$

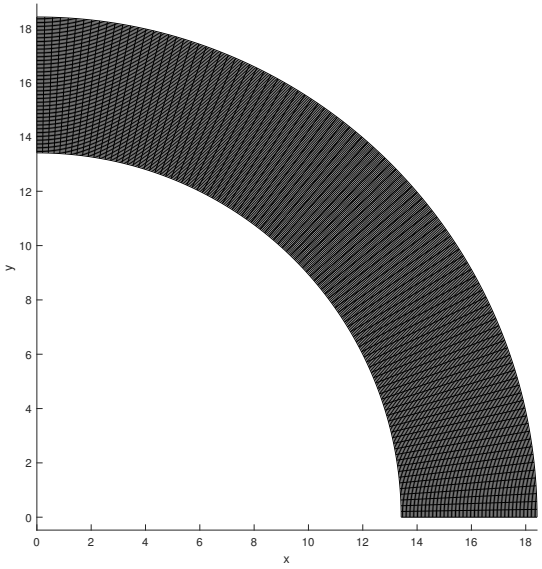
Obr. 24: Průběh stacionárních reziduí v závislosti na počtu iterací pro různé zúžené sítě

```
for j=1:ny+3
   for i=1:nx+3
      x(i,j)=-(r*cos(fi(i))+(j-(ny+4)/2)*(H/ny)*cos(fi(i)));
      y(i,j)=r*sin(fi(i))+(j-(ny+4)/2)*(H/ny)*sin(fi(i));
   end
end
```

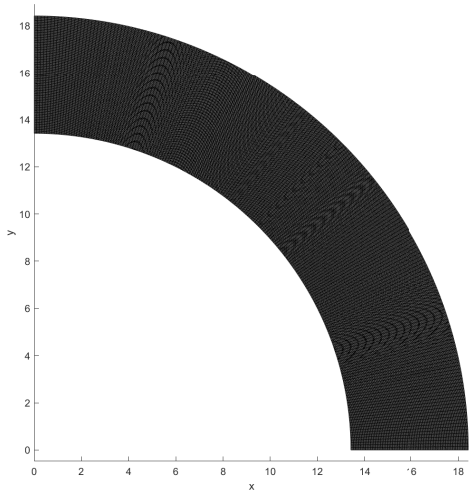
Obr. 25: Skript z MATLABu pro vytvoření sítě



(a) Síť $nx = 50$ a $ny = 50$



(b) Síť $nx = 100$ a $ny = 100$



(c) Síť $nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 26: Porovnání sítí deformovaných zúžením

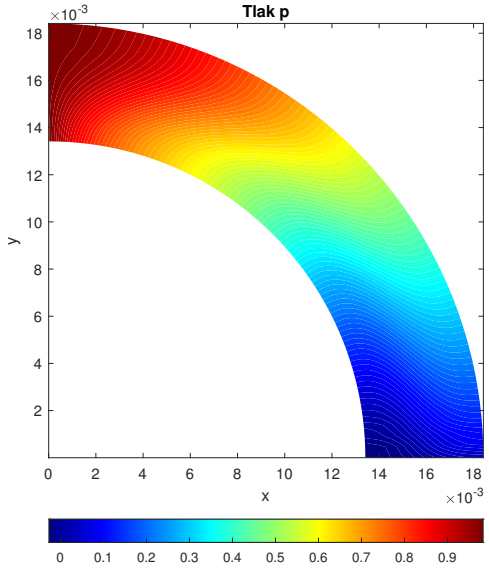
Hranice vlevo (vstup)	$u1(1,:) = u1(2,:);$
	$v1(1,:) = v1(2,:);$
Hranice vpravo(výstup)	$u1(nx+2,:) = u1(nx+1,:);$
	$v1(nx+2,:) = v1(nx+1,:);$
Hranice dole (stěna)	$u1(:,1) = -u1(:,2);$
	$v1(:,1) = -v1(:,2);$
	$p1(:,1) = p1(:,2);$
Hranice nahoře (stěna)	$u1(:,ny+2) = -u1(:,ny+1);$
	$v1(:,ny+2) = -v1(:,ny+1);$
	$p1(:,ny+2) = p1(:,ny+1);$

Obr. 27: Zápis okrajových podmínek v MATLABu

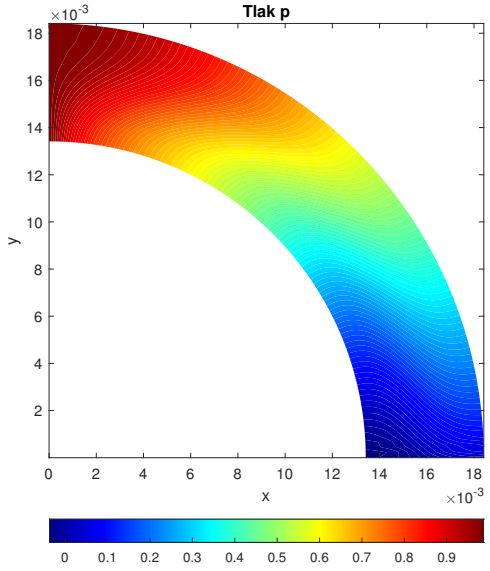
Společné parametry:	$H_y = 5e-3$
	$L_x = 25e-3$
	$r = 2 \cdot \frac{L_x}{\pi}$
	$\rho = 1060$
	$\phi = \frac{\pi}{2}$
	$\beta^2 = 10.0$
	$\nu = 3 \cdot 10^{-6}$
	$\Delta p = 1.0$
	$iterace = 800000$
Síť 11a:	$nx = 50$
	$ny = 50$
	$\Delta t = 4.7 \cdot 10^{-4}$
Síť 11b:	$nx = 100$
	$ny = 100$
	$\Delta t = 2.3 \cdot 10^{-4}$
Síť 11c:	$nx = 200$
	$ny = 200$
	$\Delta t = 6.5 \cdot 10^{-5}$

5.3.2 Prezentace výsledků

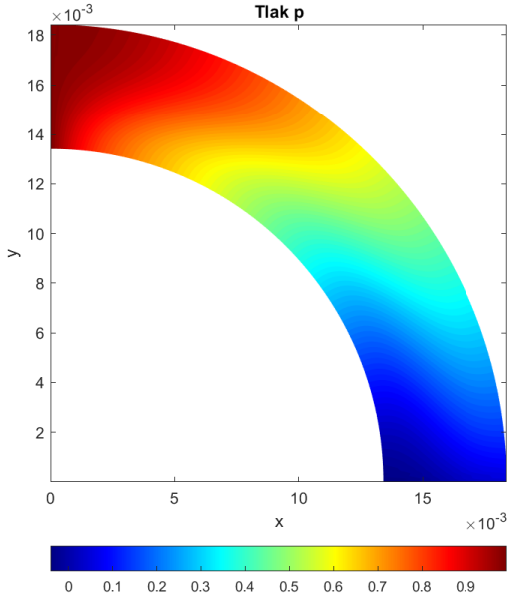
Na obrázku 28 je vidět rozložení tlaku po 800000 iteracích pro různé sítě. Rozložení tlaku je ovlivněno deformovanou geometrií sítí, ale tlak dosahuje hodnot od 1, která byla zadána na vstupu do kanálu, do -0.03 u výstupu. Z grafů není rozdíl mezi sítěmi rozpoznatelný, ale síť 26c se liší od sítě 26av hodnotách v řádu 10^{-2}. Po zkušenostech z předchozích úloh můžeme usoudit, že síť 26c se více přibližuje přesnému řešení, ale bez znalosti analytického řešení nemůžeme určit jak přesně.



(a) Síť 26a:$nx = 50$ a $ny = 50$



(b) Síť 26b:$nx = 100$ a $ny = 100$



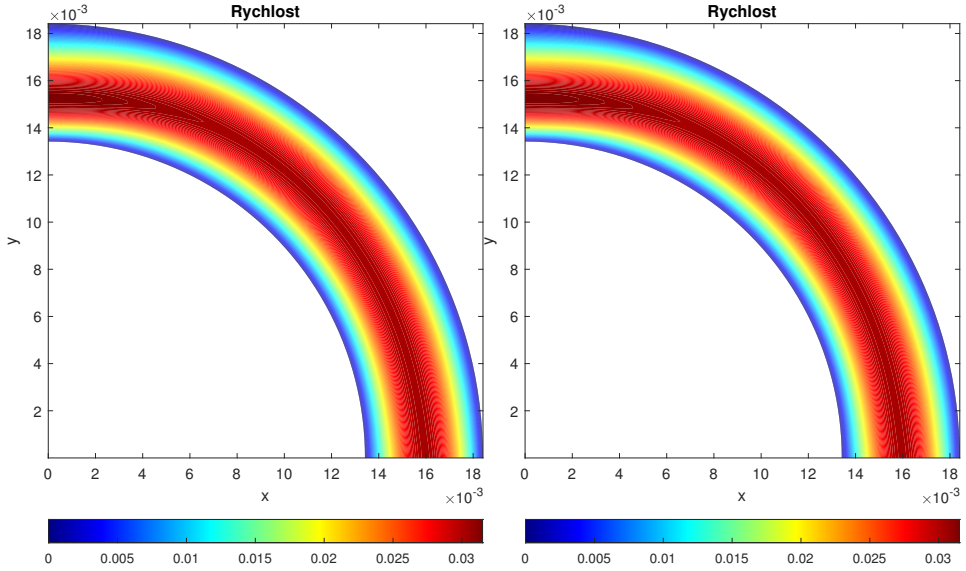
(c) Síť **??**:$nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 28: Rozložení tlaku pro různé zúžené sítě

Numerická simulace počítá rychlosti v jednotlivých složkách, ale tento grafický výstup nemá velkou vypovídající hodnotu. Proto tyto složky převedeme na celkovou rychlost

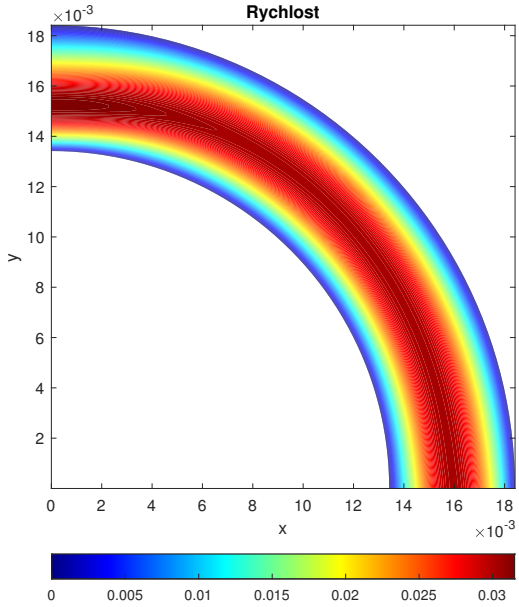
$$celk_{i,j} = \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2} \tag{75}$$

Obrázek 29 ukazuje celkovou rychlost, která se vyvine v kanále po 800000 iteracích. Rychlostní profil není symetrický podle osy kanálu a po celé délce kanálu se vlivem deformace mění. Velikost rychlosti se pohybuje od 0 na stěně, což je zadané okrajovou podmínkou, po hodnotu 0.03. Rozdíl mezi grafy není viditelný, jelikož se hodnoty rychlosti liší až v řádu 10^{-3}.



(a) Síť 26a:$nx = 50$ a $ny = 50$

(b) Síť 26b:$nx = 100$ a $ny = 100$



(c) Síť 26c:$nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 29: Celková rychlost v kanálu pro různé zúžené sítě

Pro sledování konvergence metody k ustálenému řešení používáme stacionární rezidua veličin p, u a v vztažená na počet buněk sítě a vykreslená v závislosti na počtu iterací každých 5000 iterací pro snížení výpočtové náročnosti.

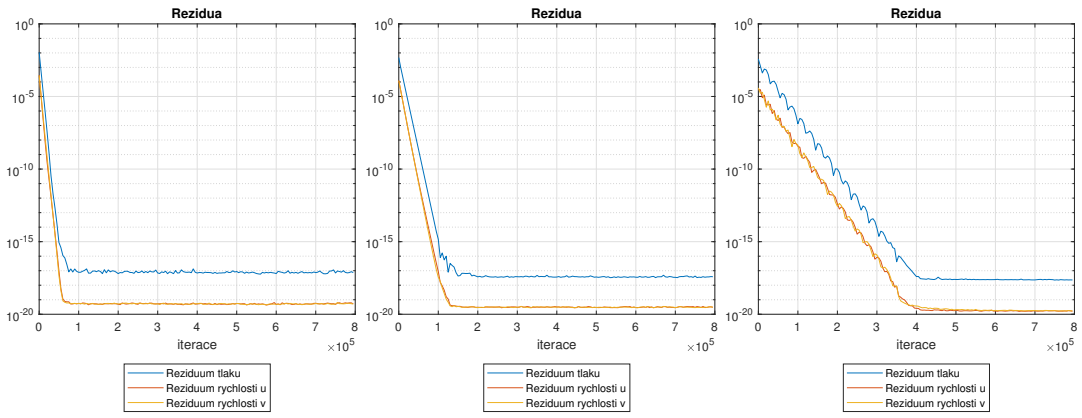
$$\|\text{rez}\, u\| = \frac{\|u^{n+1} - u^n\|_2}{(nx+2)(ny+2)} \tag{76}$$

obdobně pro p a v.

Grafy reziduí jsou vykresleny na obrázku 30. Jelikož jsou spolu rychlosti u a v v tomto případě provázány a jedna přechází v druhou, jejich rezidua splývají téměř v jednu čáru. Stejně jako v předchozích případech mají rezidua klesající charakter a ustálí se na hodnotě v řádu 10^{-19} pro reziduum rychlosti u a v a 10^{-17} pro tlak p, takže tyto hodnoty můžeme považovat za rovné numerické nule, což odpovídá předpokladu k tomu, aby zvolená metoda konvergovala k ustálenému řešení. Nejrychleji se ustaluje nejhrubší síť (graf 30a), která se ustálí během 80000 iterací. Hustější síť s grafem 30b se ustálí během 135000 iterací a u nejjemnější sítě dochází k oscilacím a poté se ustálí na 400000 iteracích. Zároveň hodnota reziuda p rovna nule potvrzuje předpoklad, že uměle přidaný člen $\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial p}{\partial t}$ do rovnice (53) je rovný nule pro ustálené řešení.

5.3.3 Shrnutí

V této úloze bylo cílem ukázat, že program vytvořený na základě metody konečných objemů dokáže simulovat proudění vzniklé tlakovým spádem na deformované síti pouze změnou způsobu generování sítě. Simulace byla provedena pro tři různé hustoty sítě stejně jako v předchozích částech, ale nyní jsme nebyli schopni srovnávat výsledky s analytickým řešením. Z důvodu stability byla zvolena menší hodnota Δp a následně i adekvátně k tomu β. V kanále se vyvinul laminární tok dosahující maximální rychlosti $w_{max} = 0.03$, která vznikla složením obou složek rychlostí. Tlak se pohybuje v rozmezí od -0.03 u výstupu



(a) Síť 19a:$nx = 50$ a $ny = 50$ **(b)** Síť 19b:$nx = 100$ a $ny = 100$ **(c)** Síť 19c:$nx = 200$ a $ny = 200$

Obr. 30: Průběh stacionárních reziduí v závislosti na počtu iterací pro různé zahnuté

do 1 nastavené na vstupu. Stacionární rezidua mají klesající charakter a dosahují hodnot, které můžeme považovat za numerickou nulu, což byl předpoklad k tomu, aby simulace konvergovala k ustálenému řešení. Takto zadaná úloha konverguje přibližně stejně, jako úloha bez zúžení. Ve vypočtených hodnotách se simulace pro různé sítě liší minimálně, v řádu 10^{-3}, přesto s poznatky z předchozích úloh můžeme říct, že simulace na hustější síti reprezentuje přesné řešení přesněji.

6 Závěr

V této práci byla řešena numerická simulace proudění zobecněné Newtonovské tekutiny metodou konečných objemů za použití metody umělé stlačitelnosti pro vyřazení tlaku z vektoru neznámých.

Kapitola 2 a 3

V těchto kapitolách byl popsán kardiovaskulární systém člověka, pro který by mohla být simulace použita, a byly definovány některé základní reologické veličiny. Zároveň byla uvedena rovnice kontinuity a Navier-Stokesovy rovnice, které popisují proudění zobecněné Newtonovské tekutiny a z těchto rovnic odvozené analytické řešení pro proudění mezi dvěma paralelními deskami.

Kapitola 4

V této kapitole byl popsán princip metody konečných objemů a význam a princip metody umělé stlačitelnosti a následně byly zdiskretizovány Navier-Stokesovy rovnice tak, abychom je mohli použít i na nepravoúhlou geometrii. Byla uvedena no-slip okrajová podmínka a podmínka stability zohledňující koeficient umělé stlačitelnosti.

Kapitola 5

Na základě odvozených rovnic byl sestaven kód v MATLABu a následně v této části byly prezentovány výsledky. Jako první byly výsledky simulace srovnány s analytickým řešením a byl zhodnocen vliv parametru umělé stlačitelnosti, následně byly tyto poznatky využity ke zhodnocení vlivu prostorového kroku. Poté byla ortogonální síť nahrazena sítí zdeformovanou zúžením ve středu reprezentující deformovanou cévu a byly porovnány výsledky pro tři různé hustoty sítě. Jako poslední případ byla vybrána zahnutá geometrie sítě. Stejně jako v předchozím případě byly porovnávány výsledky pro tři různé hustoty sítě.

Dál by se tato práce dala rozvinout v rámci těchto bodů:

-rozšíření do 3D

-zefektivnění výpočtu

-přepsání do jiného programovacího jazyka

-zavedení local timesteppingu

-popsáním a zavedením turbulencí

Seznam použité literatury a zdrojů

[1] MAZUMDAR, Jagdan N. *Biofluid Mechanics*. Singapore: World Scientific Publishing, 1998 ISBN 9810238012.

[2] GALD, Giovanni P., RANNACHER, Rolf, ROBERTSON, Anne M., TUREK, Stefan. *Hemodynamical Flows*. Berlin: Birkhauser, ISBN 9783764378059

[3] R.DVOŘÁK, K.KOZEL *Matematické modelování v aeroynamice*. Praha:ČVUT,1996. ISBN 80-01-01541

[4] R.KESLEROVÁ,K.KOZEL *Steady and unsteady 2D numerical solution of generalised Newtonian fluids flow*. Applications of Mathematics, In honor of 60th birthday od Michal Křížek. Proceedings. Prague, May2-5, 2012. Institute of Mathematics AS CR, Prague, 2012.pp. 117-126 dostupné z: https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/702898?show=full

[5] K.KOZEL, P.LOUDA, J.PŘÍHODA *Numerical solution of unsteady flow using artificial sompressibility method*. Proceedings of the Czech-Japaneese Seminar in Applide Matthematics 206, Czech Technical University in Prague, September 14-17, 2006, pp. 148-155. Dostupné z: http://geraldine.fjfi.cvut.cz/cjs2006/proc/louda.pdf

[6] A.FASANO, A.SEQUEIRA *Hemomath*. Springer, ISBN 978-3-319-60512-8

[7] S.TROJAN,et al. *Lékařská fyziologie, 4.přepracované a upravené vydání*. Praha:Grada,2003. ISBN 80-247-0512-5

[8] L.PIRKL *Numerical Simulation of Incompressible Flows with Variable Viscosity*. 2007. Diplomová práce. ČVUT. Vedoucí práce: doc. Mgr. Ing. Tomáš Bodnár, Ph.D.

[9] J.ZELINKA *Numerické metody - Elektronická verze skript*. [online]. Brno: Math MUNI [cit. 2021-13-08] Dostupné z: https://www.math.muni.cz/ zelinka/dokumenty/numerika.pdf

[10] J.ŠESTÁK,F.RIEGER *Přenos hybnosti, tepla a hmoty*. Vydavatelství ČVUT

[11] J.FOŘT,J.FURST,K.KOZEL,P.LOUDA *Numerické metody řešení problému proudění I., II., III.*. Vydavatelství ČVUT, 2001-2004