



**FAKULTA  
STROJNÍ  
ČVUT V PRAZE**

ÚSTAV TECHNICKÉ MATEMATIKY

Numerické řešení problému vedení tepla  
v heterogenních materiálech pomocí metody  
konečných prvků

Numerical solution of heat conduction in heterogeneous  
materials using finite element method

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2021

AUTOR PRÁCE

TOMÁŠ MARHAN

VEDOUCÍ PRÁCE

doc. RNDr. PETR SVÁČEK Ph.D.

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Marhan** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **483992**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Numerické řešení problému vedení tepla v heterogenních materiálech pomocí metody konečných prvků**

Název bakalářské práce anglicky:

**Numerical solution of heat conduction in heterogeneous materials using finite element method**

Pokyny pro vypracování:

Vypracování přehledu o matematické formulaci úlohy vedení tepla.  
Matematická formulace okrajové úlohy.  
Seznámení se se základním principem metody konečných prvků, popis metody.  
Praktická realizace numerického řešení na nestrukturované síti.  
Numerické řešení zadaných testovacích úloh.

Seznam doporučené literatury:

1. P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, Vydavatelství ČVUT, 2007
2. Claes Johnson, Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, 1987
3. George Lindfield and John Penny, Numerical Methods : Using MATLAB, <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=953183>
4. Anthony Mills, Heat and Mass Transfer, <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=5388980>,
5. Michael F. Modest, Radiative Heat Transfer, <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=305646>
6. George Lindfield and John Penny, Numerical Methods : Using MATLAB, <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/detail.action?docID=953183>

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D., ústav technické matematiky FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **31.03.2021**

Termín odevzdání bakalářské práce: **15.08.2021**

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
doc. RNDr. Petr Sváček, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

\_\_\_\_\_  
doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

\_\_\_\_\_  
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.  
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta

## Poděkování

Děkuji svému vedoucímu práce, panu doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D., za odborný dohled, trpělivé vedení a čas, který mi věnoval při tvorbě celé této práce. Také děkuji všem lidem, kteří mě při tvoření této práci podporovali.

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité podklady na konci práce v seznamu použité literatury.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 8. června 2021

.....  
podpis

## Abstrakt

Předmětem této práce je popis problému vedení tepla v heterogenních materiálech, matematická formulace příslušné okrajové úlohy, její slabá formulace a numerické řešení pomocí metody konečných prvků. Součástí práce je vlastní realizace metody konečných prvků prostřednictvím programu Matlab, která je použita na několika různých případech.

## Abstract

The subject of the thesis is description of heat conduction in heterogeneous materials, mathematical formulation of appropriate boundary problem, its weak formulation and numerical solution using the finite element method. The finite element method is implemented in Matlab program and is tested in several cases.

## Klíčová slova

Úloha vedení tepla, heterogenní materiál, metoda konečných prvků, Matlab

## Key words

Heat conduction problem, heterogeneous material, finite element method, Matlab

# Obsah

<b>Úvod .....</b>	<b>8</b>
<b>1 Přenos tepla .....</b>	<b>9</b>
<b>2 Matematický popis .....</b>	<b>11</b>
2.1 Počáteční a okrajová podmínka .....	12
2.2 Stacionární vedení tepla.....	13
2.3 Nestacionární vedení tepla.....	14
2.4 Vedení tepla jako dvourozměrný problém .....	14
<b>3 Diskretizace MKP .....</b>	<b>16</b>
3.1 Slabá formulace .....	16
3.2 Diskrétní problém .....	17
3.3 Volba prostoru .....	18
3.4 Sestavení matice tuhosti a vektoru zatížení .....	19
3.5 Referenční trojúhelník .....	19
3.6 Numerická kvadratura .....	22
3.7 Časová diskretizace .....	25
3.8 Rovinné vedení tepla v heterogenních tělesech.....	27
3.9 Vedení tepla v rotačně symetrických tělesech.....	29
<b>4 Numerické výsledky .....</b>	<b>36</b>
4.1 Ověření správnosti řešení .....	36
4.2 Stacionární vedení tepla v heterogenních materiálech .....	40
4.2.1 Tvorba triangulace.....	41
4.2.2 Algoritmizace problému vedení tepla.....	43
4.2.3 Výsledky.....	48
4.2.4 Další úlohy vedení tepla .....	49
4.2.5 Úloha s okrajovou podmínkou třetího druhu.....	52
4.3 Nestacionární vedení tepla v heterogenních materiálech .....	56
<b>Závěr .....</b>	<b>62</b>

<b>Seznam použitých zdrojů .....</b>	<b>63</b>
<b>Příloha .....</b>	<b>65</b>

# Úvod

V běžném okolí kolem nás neustále dochází k základním přírodním jevům, které ovládají celou živou a neživou přírodu. Tyto jevy se vyznačují přenosem energie, hmoty a hybnosti. Klasickým příkladem v přírodě je přenos sluneční energie ve formě tepla k zemskému povrchu nebo oběh vody mezi zemským povrchem a atmosférou, doprovázený fázovými přeměnami. Pro příklady v technice je typický přestup tepla v tepelném výměníku a v jiných energetických zařízeních nebo spalování paliv v kotlích a spalovacích motorech.

Tyto přenosové jevy tvoří základ znalostí inženýra a hrají klíčovou roli při návrhu, vývoji a provozu tepelných a jaderných strojů, kotlů, spalovacích motorů a chladících zařízení. Zásadní význam má zejména výpočet stacionárních a nestacionárních tepelných polí, podle kterých se zařízení dimenzují a volí vhodné materiály.

Úlohy tohoto typu nelze řešit analyticky, aniž by nebyla přijata řada značně zjednodušujících podmínek, je tak třeba používat řešení přibližná, založená na metodách numerických. V současné době je výpočetní algoritmus efektivně realizován na počítači a zřetel je kladen především na zadání okrajových a počátečních podmínek a definování geometrického tvaru vyšetřované oblasti. Mezi nejvíce používané metody tohoto charakteru patří metoda konečných prvků.

Cílem práce je seznámení s metodou konečných prvků při řešení problémů přenosu tepla v tuhých látkách a získání přehledu používaných matematických modelů. Velký důraz je kladen na správnou implementaci metody v programu Matlab, prostřednictvím které jsou následně řešeny vybrané úlohy vedení tepla.

První část této práce popisuje mechanismy přenosu tepla a současně uvádí jejich matematické formulace. Dále definuje počáteční a okrajové podmínky nutné k adekvátnímu řešení stacionárních a nestacionárních tepelných polí. Součástí první části je také diskretizace problému metodou konečných prvků, slabá formulace a sestavení soustavy lineárních rovnic. Ve druhé části se práce zabývá vlastní realizací metody konečných prvků pomocí programů Gmsh a Matlab. Na několika úlohách je aplikace metody otestována a vykreslené výsledky jsou analyzovány a komentovány.



# 1 Přenos tepla

Přenos neboli sdílení tepla označujeme v technické praxi termodynamický proces směřující k vyrovnání teplot a dosažení teplotní rovnováhy. Podle toho, v jakém prostředí tento pohyb tepelné energie probíhá, rozeznáváme tři způsoby přenosu tepla, sdílení tepla vedením (kondukce), prouděním (konvekce) a sáláním (radiace). V reálných případech se na přenosu podílejí alespoň zčásti všechny tři způsoby současně, viz [1].

Pojmem vedení tepla rozumíme přenos energie způsobený interakcí mezi atomy a molekulami v mikroskopickém měřítku v nepohyblivém spojitém prostředí v důsledku existence teplotního rozdílu. V teplotním poli lze v určitém okamžiku stanovit tepelný tok  $\dot{Q}(x, y, z)$  libovolnou plochou. Vztáhneme-li tento tok na jednotku orientované plochy, získáme vektor hustoty tepelného toku  $\vec{q}$ . Vztah mezi hustotou tepelného toku a rozložením teploty  $T(x, y, z)$  v homogenním prostředí formuloval Fourier rovnicí

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T, \quad (1)$$

kde  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti, který je důležitou látkovou charakteristikou. Pro anizotropní materiály lze rovnici (1) zobecnit náhradou skalárního součinitele tepelné vodivosti  $\lambda$  tenzorovým součinitelem tepelné vodivosti  $\vec{\lambda}$ , viz [2]. Rovnice (1) vyjadřuje přímou úměrnost hustoty tepelného toku k teplotnímu gradientu až na znaménko mínus, které představuje fakt, že transport tepla se děje v opačném směru než vzrůst teploty, viz [2].

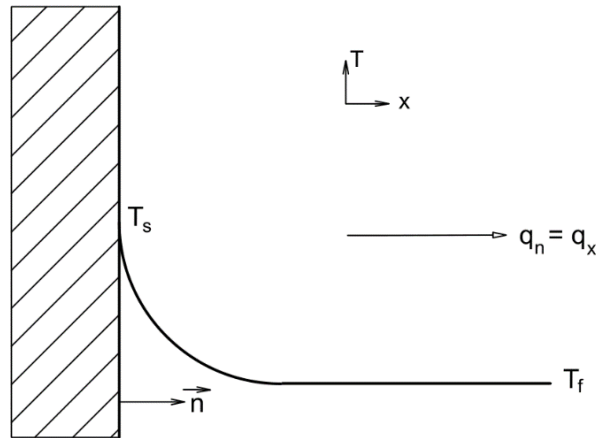
Při přenosu tepla prouděním se mění poloha částic makroskopicky. Částice s sebou ve spojitém prostředí unášejí energii a zároveň se samy přemísťují, tj. při proudění tekutin. Přenos tepla prouděním je obvykle klasifikován podle povahy na přirozený a nucený, viz [2].

Pokud k proudění tekutin kolem teplosměnných povrchů dochází samovolně vlivem teplotního rozdílu mezi tekutinou a povrchem, mluvíme o přirozené konvekci. Při přirozené konvekci hraje důležitou roli zemská tíže a závislost hustoty tekutiny na teplotě. Jestliže teplota povrchu je vyšší než teplota tekutiny, nastane její vzestupné proudění spolu s jejím ohřevem, při nižší teplotě povrchu, než je teplota tekutiny, proudí tekutina sestupně a ochlazuje se. V případě, že je proudění pracovních látek zajišťováno např. pomocí čerpadel nebo ventilátorů, hovoříme o konvenci nucené, viz [3].

Výpočet teplotního profilu při proudění je velmi obtížný, zejména v turbulentním režimu a v komplikované geometrii průmyslových aplikací. V takovýchto případech používáme téměř bez výjimky empirický vztah, který definoval Newton, známý též jako Newtonův ochlazovací zákon

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = q_n = \alpha (T_s - T_f), \quad (2)$$

kde  $T_f$  reprezentuje teplotu tekutiny, která obtéká stěnu o teplotě  $T_s$ . Orientaci obtékané stěny v závislosti na vektoru hustoty tepelného toku  $\vec{q}$  udává její jednotkový vektor vnější normály  $\vec{n}$  viz obr 1. Koeficient  $\alpha$  ve vztahu (2) představuje součinitel přenosu (přestupu) tepla. Nejedná se o žádnou universální konstantu, jelikož závisí na velkém počtu faktorů, především na rychlosti proudění a geometrii, viz [2].



Obrázek 1: Průběh teploty v blízkosti stěny

Přenos tepla sáláním je proces, při kterém je přenos energie realizován prostřednictvím elektromagnetických vln, které se šíří i ve vakuu. Emitované vlnění může mít podobu různých forem, např. Roentgenovo záření, záření radioaktivních materiálů, či ultrafialové záření. Rozdílem těchto druhů záření je jejich vlnová délka. Přeměna elektromagnetického vlnění v teplo nastává teprve při jeho interakci a absorpci v látkovém prostředí. Současná teorie zářivého přenosu tepla je odvozena dvojicí Stefan-Boltzmann na základě teorie elektromagnetických vln a kvantové teorie ve tvaru

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = q_n = \sigma^{(s)} T^4, \quad (3)$$

kde  $\sigma^{(s)}$  je Stefanova-Boltzmannova konstanta,  $\vec{n}$  je vektor vnější normály sálajícího tělesa a  $T$  označuje teplotu jeho povrchu, viz [2]. Vztah (3) lze interpretovat použitím absolutně černého tělesa, které ve směru normály  $\vec{n}$  emituje hustotu zářivého tepelného toku  $q_n$ . Emitovaná energie absolutně černým tělesem je tedy úměrná čtvrté mocnině jeho termodynamické teploty  $T$ .

## 2 Matematický popis

Řešení problému sdílení tepla obvykle nesouvisí jen s výpočtem tepelného toku  $q_n$ , ale je nutné znát celkové tepelné pole daného objektu representovaného oblastí  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . V obecném případě vycházíme, viz [2] z diferenciální entalpické bilance

$$\varrho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \varrho T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} + \vec{\tau} : \vec{\Delta} + \dot{Q}^{(g)}, \quad (4)$$

kde  $T$  označuje teplotu,  $\varrho$  hustotu materiálu,  $c_p$  měrnou tepelnou kapacitu při konstantním tlaku  $p$ ,  $v$  měrný objem,  $\dot{Q}$  tepelný tok a  $\frac{DT}{Dt}$  je tzv. materiálová derivace. O výrazech  $\vec{\tau}$  a  $\vec{\Delta}$  ve vztahu (4) mluvíme jako o tenzorech dynamických napětí a rychlosti deformace, viz [2]. Rovnice (4) platí pro bilancování plynů, kapalin či tuhých látek. Nejčastěji užívané zjednodušení je předpoklad látky se zanedbatelnou teplotní objemovou roztažností, tj.  $\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = 0$ , bilance (4) se potom zjednoduší na tvar

$$\varrho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \vec{q} + \vec{\tau} : \vec{\Delta} + \dot{Q}^{(g)}. \quad (5)$$

Dosadíme-li do rovnice (5) vektor hustoty tepelného toku  $\vec{q}$  z Fourierova zákona (1) a rozepíšeme-li materiálovou derivaci  $\frac{DT}{Dt}$  do tvaru  $\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T$  získáme tzv. Fourier-Kirchhoffovu rovnici

$$\varrho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \lambda \nabla^2 T + \vec{\tau} : \vec{\Delta} + \dot{Q}^{(g)}, \quad (6)$$

ve tvaru platném pro konstantní tepelnou vodivost  $\lambda$ , viz [2].

V rovnici (6) symbolem  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  značíme Laplaceův operátor,  $\frac{\partial T}{\partial t}$  udává rychlost akumulace tepla (entalpie) v kontrolním objemu, člen  $\vec{u} \cdot \nabla T$  symbolizuje rychlost konvektivního přívodu tepla (entalpie), výraz  $\lambda \nabla^2 T$  popisuje rychlost konduktivního přívodu tepla (entalpie),  $\vec{\tau} : \vec{\Delta}$  charakterizuje rychlost disipace mechanické energie a poslední člen  $\dot{Q}^{(g)}$  vyjadřuje objemový zdroj tepelného toku v kontrolním objemu, viz [2].

Pro přenos tepla v tuhých látkách je složka vektoru rychlosti proudění  $\vec{u}$  nulová a zároveň nedochází k disipaci mechanické energie, která je běžná v proudících látkách vlivem vazkého tření. Rovnice (6) se pak zjednoduší na tvar

$$\varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + \dot{Q}^{(g)}. \quad (7)$$

V případě, že dochází pouze ke stacionárnímu přenosu tepla se rovnice (7) zredukuje na Poissonovu rovnici

$$-\lambda \nabla^2 T = \dot{Q}^{(g)}. \quad (8)$$

Pokud v tuhém prostředí nepůsobí ani žádný vnitřní zdroj tepla, tedy  $\dot{Q}^{(g)} \equiv 0$ , je teplotní pole výsledkem řešení Laplaceovy rovnice

$$-\lambda \nabla^2 T = 0. \quad (9)$$

## 2.1 Počáteční a okrajová podmínka

Všechny uvedené zredukované tvary Fourier-Kirchhoffovy rovnice (7) pro tuhé látky je třeba doplnit o okrajové podmínky na hranici  $\partial\Omega$  oblasti  $\Omega$ , popř. je nutné specifikovat podmínky počáteční, aby bylo možné nalézt jejich řešení. Jelikož právě například rovnice (7) obsahuje první derivaci teploty i podle času, je nutné při řešení určit počáteční podmínku. Tu formulujeme tak, že v kontrolním objemu známe rozložení teplotního pole v konkrétním čase, obvykle v čase  $t = 0$ , tj. známe funkci

$$T(x, y, z, 0) = T_0(x, y, z), \quad \text{pro } x, y, z \in \bar{\Omega}. \quad (10)$$

Pokud řešíme stacionární rozložení teplotního pole, počáteční podmínku nepředepisujeme, viz [2] a [3].

Na hranici oblasti  $\partial\Omega$  se nejčastěji používají následující okrajové podmínky. Uvažujeme hranici  $\partial\Omega$  tvořenou třemi navzájem disjunktími částmi  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ . Prvním typem je podmínka, která předepisuje teplotu  $T$  na povrchu  $\Gamma_1$  zkoumaného tělesa. Ve stacionárních úlohách je teplota na povrchu buď konstantní nebo závisí na polohových souřadnicích, v nestacionárních případech může záviset i na čase. Tuto závislost vyjádříme jako

$$T(x, y, z, t) = T_s(x, y, z, t), \quad \text{pro } x, y, z \in \Gamma_1, t \in (0, T). \quad (11)$$

V literatuře se tato podmínka často nazývá okrajová podmínka prvního druhu, též známá jako Dirichletova, viz [2] a [3].

Kromě teploty  $T$  lze na hranici  $\Gamma_2$  předepsat i hustotu tepelného toku  $q_n$ . Stejně jako teplota předepisovaná v předchozím případě, může být hodnota tepelného toku buď konstantní, závislá na poloze, nebo i na čase. Pro případ, kdy těleso začneme v určitém okamžiku ohřívat předepsanou hustotou tepelného toku  $q_n$  platí

$$-\lambda \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = q_n(x, y, z, t), \quad \text{pro } x, y, z \in \Gamma_2. \quad (12)$$

Pro tento typ okrajové podmínky se ustálilo označení okrajová podmínka druhého druhu, nebo Neumannova podmínka. V případě, že je hranice  $\Gamma_2$  zkoumaného tělesa tepelně izolovaná, má podmínka (12), viz [2] a [3] následující tvar

$$-\lambda \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = 0, \quad \text{pro } x, y, z \in \Gamma_2. \quad (13)$$

Podmínka třetího druhu je podmínkou přestupu tepla konvekcí, tedy teplo přivedené tělesem kondukcí musí být z jeho povrchu odvedeno konvekcí. Použijeme-li k vyjádření rovnosti hustoty tepelného toku z Fourierova zákona (1) a z Newtonova ochlazovacího zákona (2) můžeme tuto okrajovou podmínku formulovat, viz [2] a [3] takto

$$-\lambda \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial n} = \alpha (T - T_f), \quad \text{pro } x, y, z \in \Gamma_3, \quad (14)$$

kde  $\alpha$  představuje součinitel přestupu tepla konvekcí,  $T$  označuje teplotu na povrchu  $\Gamma_3 \subset \partial\Omega$  a  $T_f$  označuje teplotu okolního prostředí.

Podmínka čtvrtého druhu řeší spojitost tepelných toků na styku  $\Gamma_{rozh.} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$  dvou těles  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  o tepelných vodivostech  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  a s teplotami  $T_1$  a  $T_2$ . Při dokonalém kontaktu platí

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x, y, z, t)}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x, y, z, t)}{\partial n}, \quad \text{pro } x, y, z \in \Gamma_{rozh.} \quad (15)$$

Jsou-li obě prostředí tuhá, lze v ideálním případě předpokládat kromě spojitosti hustot tepelných toků  $q_n$  i spojitost teplotního rozložení, viz [2] a [3] tedy

$$T_1(x, y, z, t) = T_2(x, y, z, t), \quad \text{pro } x, y, z \in \Gamma_{rozh.} \quad (16)$$

## 2.2 Stacionární vedení tepla

Stacionární vedení tepla v tuhých tělesech bez vnitřního zdroje tepla popisujeme rovnicí (9). Tuto rovnici uvádíme již v zjednodušeném tvaru, tj. při uvažování konstantní tepelné vodivosti  $\lambda$ . V případě, že budeme při řešení stacionární úlohy vycházet ze vztahu (5), podobu rovnice (9) potom získáme jako

$$-\nabla \cdot \vec{q} = 0. \quad (17)$$

Dosažením vektoru hustoty tepelného toku  $\vec{q}$  z Fourierova zákona (1) získáme vztah (17) ve tvaru

$$-\nabla \cdot (-\lambda \nabla T) = 0. \quad (18)$$

Pokud je nyní tepelná vodivost  $\lambda$  závislá např. na jedné z polohových souřadnic obdržíme derivací součinu, viz [4] rozšířenou rovnici (9) takto

$$(\nabla \lambda) \cdot \nabla T + \lambda \nabla^2 T = 0. \quad (19)$$

Ze zápisu rovnice (19) lze pozorovat, že dosažením konstantní tepelné vodivosti  $\lambda$  dostaneme při řešení ustáleného teplotního pole opět Laplaceovu rovnici (9). Pokud uvažujeme tři polohové proměnné, Laplaceova rovnice má, viz [2] a [5] tvar diferenciální rovnici 2. řádu eliptického typu

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

## 2.3 Nestacionární vedení tepla

Na rozdíl od stacionárního vedení tepla se teplota v nestacionárním teplotním poli mění jak s polohou, tak i s časem. Nestacionární vedení tepla v tuhých tělesech popisujeme rovnicí (7) ve tvaru

$$\varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T, \quad (21)$$

kde uvažujeme vnitřní zdroj tepla nulový, tj.  $\dot{Q}^{(g)} \equiv 0$ . V rovnici (21) je možné nahradit tepelnou kapacitou  $c_p$ , hustotu materiálu  $\varrho$  a tepelnou vodivost  $\lambda$  součinitelem teplotní vodivosti  $a$  jako

$$a = \frac{\lambda}{\varrho c_p}. \quad (22)$$

Užitím tohoto zápisu, lze rovnici (21) uvést, viz [2] v podobě

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T. \quad (23)$$

Stejně jako Laplaceovu rovnici (9) pro stacionární vedení tepla, uvedeme vztah (21) uvažováním polohových proměnných jako diferenciální rovnici 2. řádu parabolického typu

$$\varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (24)$$

## 2.4 Vedení tepla jako dvourozměrný problém

V technických úlohách vždy potřebujeme řešit reálný trojrozměrný problém tak, jak bylo uvažováno v předchozích situacích. V některých případech je ale možné redukovat dimenzi problému, užitím dodatečných předpokladů o rozložení tepelného pole.

Prvním takovým případem je problém rovinného vedení tepla. Trojrozměrnému tělesu  $\Omega^{3D} = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3: [x, y] \in \Omega^{2D}, z \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \right\}$  v tomto případě předepisuje na stěnách  $z = \pm \frac{L}{2}$  povrchu  $\partial\Omega^{3D}$  hustotu tepelného toku  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ . Pro rovnice (20) a (24), které popisují stacionární a nestacionární problém v tuhém tělese tak platí  $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$  a tím se zredukuje na rovnice ve dvourozměrné oblasti  $\Omega^{2D}$ . Pro rovinné stacionární vedení tepla tedy používáme rovnici (20) jako

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (25)$$

V případě rovinného nestacionárního vedení tepla má rovnice (24) tvar

$$\varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (26)$$

Předpoklad  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  na stěnách  $z = \pm \frac{L}{2}$  z fyzikálního hlediska znamená nulový tepelný tok danou stěnou. Podmínku nulového toku je možné nahradit také podmínkou přestupu tepla konvekcí, viz rovnice (14) a uvažovat místo teploty  $T$  její střední hodnotu ve směru  $z$ , více viz [2].

Dalším příkladem dimenzionální redukce je úloha vedení tepla v rotačně symetrických tělesech. Úlohu v tomto případě zapisujeme pomocí cylindrických souřadnic, viz [6]. V cylindrické souřadnicové soustavě je stacionární teplotní pole popsáno opět třemi souřadnicemi jako  $T = T(r, \varphi, z)$  a rovnice (20) má potom v této soustavě, viz [5] tvar

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (27)$$

Pro nestacionární teplotní pole v cylindrické souřadnicové soustavě platí  $T = T(r, \varphi, z, t)$  a rovnici (24) potom zapisujeme, viz [5] jako

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right). \quad (28)$$

V cylindrické soustavě provedeme redukci trojrozměrného rotačního tělesa na dvojrozměrné, užitím předpokladu symetrie tepelného pole vzhledem k rotaci, tj.  $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$ . Rovnice (27) popisující stacionární vedení tepla v tuhém tělese se pak v této soustavě zredukuje, viz [1] do tvaru

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0. \quad (29)$$

Rovnici (28) pro nestacionární vedení tepla zapíšeme v cylindrické soustavě užitím zmíněného předpokladu jako

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right). \quad (30)$$

## 3 Diskretizace MKP

Řešení parciálních diferenciálních rovnic vedení tepla analytickým způsobem je vhodné jen pro nejjednodušší úlohy v technické praxi. Proto se v dnešní době přistupuje k řešení problémů vedení tepla vhodnými numerickými metodami, které spočívají např. v nahrazení diferenciální rovnice vedení tepla rovnicí diferenční. V současnosti existuje celá řada numerických metod, z nichž nejznámější a nejpoužívanější jsou metoda konečných diferencí (MKD), metoda konečných objemů (MKO) a metoda konečných prvků (MKP), viz [3].

Princip metody konečných prvků v případě rovinných úloh spočívá v rozdělení zkoumané oblasti na velký počet jednoduchých prvků, např. trojúhelníků. Tyto prvky sdílí ve vrcholech společné uzly, ve kterých jsou hledány neznámé parametry. Hodnota parametru v určitém uzlu ovlivňuje jen parametry v uzlech přilehlých prvků. Mezi neznámými parametry v uzlech tak existuje funkční závislost, která je po částech lineární. Tímto způsobem MKP zjednodušuje matematický popis složitých tvarů a úlohu hledání spojitých funkcí převádí na úlohu hledání konečného počtu neznámých parametrů, pomocí nichž spojitá funkce přibližně aproximuje. Tento proces označujeme jako diskretizaci daného problému, viz [3] a [7]. Aplikaci této metody nejprve ukážeme na Poissonově rovnici (8), která popisuje ustálené vedení tepla s vnitřním objemovým zdrojem.

### 3.1 Slabá formulace

Pro použití metody konečných prvků je nejprve nutné odvodit slabou formulaci daného problému. Uvažujeme tedy Poissonovu rovnici (8) ve tvaru

$$-\nabla^2 u = f, \quad (31)$$

kde teplotu označíme jako funkci  $u$  a podíl  $\frac{\dot{Q}^{(g)}}{\lambda}$  jako funkci  $f$ . Rovnici (31) řešíme v omezené oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , která má po částech hladkou hranici  $\partial\Omega$ . Pro jednoduchost předpokládáme, že na hranici oblasti  $\partial\Omega$  je předepsána homogenní okrajová podmínka 1. druhu (Dirichletova) jako

$$u = 0, \quad \text{na } \Gamma_1 = \partial\Omega \quad (32)$$

Označme dále prostor funkcí  $\mathcal{V}$  jako  $\mathcal{V} = \{v \in C^1(\bar{\Omega}): v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$ . Vezměme nyní libovolnou funkci  $v \in \mathcal{V}$ , násobme s ní rovnicí (31) a provedme integraci přes oblast  $\Omega$ . Tím dostaneme

$$\int_{\Omega} -\nabla^2 u v \, dx dy = \int_{\Omega} f v \, dx dy. \quad (33)$$

Užitím Greenovy věty, viz [6] rozepíšeme levý člen rovnice (33) ve tvaru

$$\int_{\Omega} -\nabla^2 u v \, dx dy = \int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial n} v \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy, \quad (34)$$



kde  $n$  značí jednotkový vektor vnější normály  $\vec{n}$  k hranici oblasti  $\Omega$ . Dosazením výrazu (34) zpět do rovnice (33) získáme

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\Omega} f v \, dx dy, \quad (35)$$

neboť člen  $\int_{\partial\Omega} -\frac{\partial u}{\partial n} v \, dS$  je pro funkce  $v \in \mathcal{V}$  nulový. Slabým řešením rovnice (31) potom nazveme takovou funkci  $u \in \mathcal{V}$ , která splňuje rovnost (35) pro všechny funkce  $v \in \mathcal{V}$ , viz [7].

Všimněme si, že se v rovnici (35) vyskytují pouze první parciální derivace funkcí  $u, v$ , tudíž jsme zeslabili předpoklad, aby funkce  $u$  náležela prostoru  $C^2(\bar{\Omega})$  a zároveň jsme tím zvětšili množinu možných řešení. Z rovnice (35) je navíc zřejmé, že funkce  $u, v \in \mathcal{V}$  nemusí mít první derivace spojité, ale pouze integrovatelné. Prostor  $\mathcal{V}$  tedy můžeme rozšířit jako prostor funkcí, které mají po částech spojité derivace.

## 3.2 Diskrétní problém

Pro aproximaci řešení slabé formulace (35) metodou konečných prvků nejprve uvažujeme prostor  $V_h \subset \mathcal{V}$  s konečnou dimenzí  $\dim V_h = n$ . Řešíme diskrétní úlohu, kde hledáme funkci  $u_h \in V_h$  tak, že platí

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx dy = \int_{\Omega} f v_h \, dx dy, \quad (36)$$

pro všechny funkce  $v_h \in V_h$ . Jelikož lze funkci  $v_h$  volit jako libovolnou funkci z prostoru  $V_h$ , můžeme speciálně volit

$$v_h = \varphi_i, \quad (37)$$

kde funkce  $\varphi_i$  pro  $i = 1, \dots, n$  jsou bázové funkce prostoru  $V_h$ . Libovolnou funkci  $u_h$  potom vyjádříme jako lineární kombinaci těchto bázových funkcí ve tvaru

$$u_h = \sum_{j=1}^n U_j \varphi_j, \quad (38)$$

kde  $U_j \in \mathbb{R}$  představují neznámé koeficienty lineární kombinace, v případě MKP jsou to právě hledané hodnoty v uzlech. Dosazením vztahů (37) a (38) do diskrétní rovnice (36) a užitím linearit integrálu, dostaneme tuto rovnici jako

$$\sum_{j=1}^n U_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx dy, \quad (39)$$

pro libovolné  $i = 1, \dots, n$ . Rovnici (39) lze přepsat jako soustavu lineárních rovnic takto

$$\mathbb{A} \vec{U} = \vec{b}, \quad (40)$$

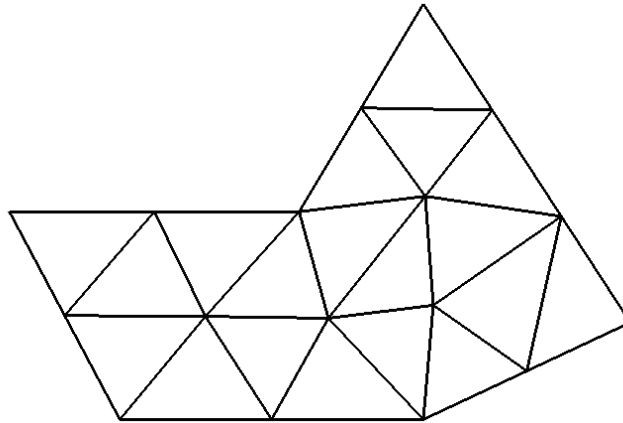
kde  $\mathbb{A}$  nazýváme maticí tuhosti a  $\vec{b}$  vektorem zatížení s prvky

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy, \quad b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx dy. \quad (41)$$

Doteď jsme při řešení slabé formulace Poissonovy úlohy (8) metodou konečných prvků postupovali obecně na prostoru  $V_h$ , viz [7].

### 3.3 Volba prostoru

MKP se vyznačuje speciální volbou prostoru  $V_h$  a jeho báze. Nejprve uvažujme nějakou přípustnou triangulaci  $\tau_h$  oblasti  $\Omega$ , viz [7]. Prostor  $V_h$  volíme jako prostor spojitých po částech lineárních funkcí na každém trojúhelníku  $K$  ze zvolené triangulace  $\tau_h$ , který navíc splňuje okrajovou podmínku (32). Příklad triangulace  $\tau_h$  je zobrazen na obr. 2.

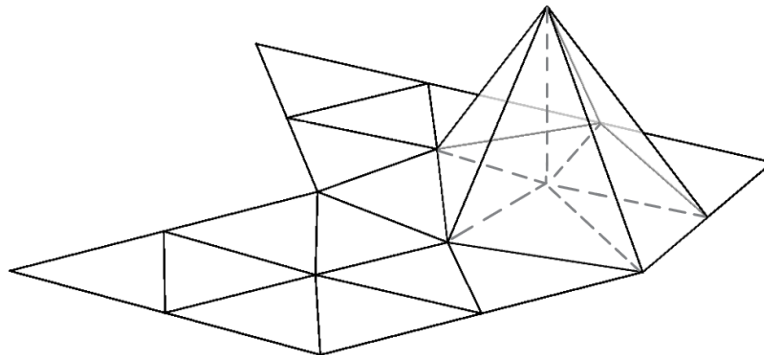


Obrázek 2: Příklad triangulace  $\tau_h$  v oblasti  $\Omega$

Bázové funkce  $\varphi_i$  prostoru  $V_h$  volíme tak, aby platilo

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (42)$$

pro  $i, j = 1, \dots, n$ , kde  $x_j$  označuje uzly triangulace  $\tau_h$  a  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta, viz [7]. Graf bázové funkce  $\varphi_i \in V_h$  dané rovnicí (42) je vykreslen na obr. 3, grafem je tedy jehlan o výšce jedna.



Obrázek 3: Graf bázová funkce  $\varphi_i$

Požadavek spojitosti funkcí z  $V_h$  při zachování volby uzlů volnosti ve vrcholech triangulace lze zajistit volbou zmíněné přípustné triangulace  $\tau_h$ . Triangulace  $\tau_h$  se nazývá přípustná, pokud je tvořena konečným počtem trojúhelníků, tak aby  $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K$ , a pokud pro dva různé trojúhelníky  $K_i, K_j \in \tau_h$  je buď průnik  $K_i \cap K_j = \emptyset$  nebo je  $K_i \cap K_j$  tvořen společným vrcholem nebo je  $K_i \cap K_j$  tvořen společnou stranou  $K_i$  a  $K_j$ , viz [7]. Uplatněním těchto vlastností lze zapsat integrál přes oblast  $\Omega$  jako integrál přes jednotlivé trojúhelníky  $K \in \tau_h$ , tedy

$$\int_{\Omega} \eta(x, y) \, dx dy = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \eta(x, y) \, dx dy, \quad (43)$$

kde funkce  $\eta$  je libovolná funkce integrovatelná na oblasti  $\Omega$ , viz [7] a [8].

### 3.4 Sestavení matice tuhosti a vektoru zatížení

Aplikací vztahu (43) pro výpočet prvků matice tuhosti  $\mathbb{A}$  dostáváme

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy = \sum_{K \in \tau_h} \underbrace{\int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy}_{a_{ij}^K} = \sum_{K \in \tau_h} a_{ij}^K, \quad (44)$$

kde  $a_{ij}^K$  nazýváme lokálními příspěvky do matice tuhosti  $\mathbb{A}$  na elementu  $K \in \tau_h$ . Stejným způsobem zapíšeme prvky vektoru zatížení  $\vec{b}$  ve tvaru

$$b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx dy = \sum_{K \in \tau_h} \underbrace{\int_K f \varphi_i \, dx dy}_{b_i^K} = \sum_{K \in \tau_h} b_i^K, \quad (45)$$

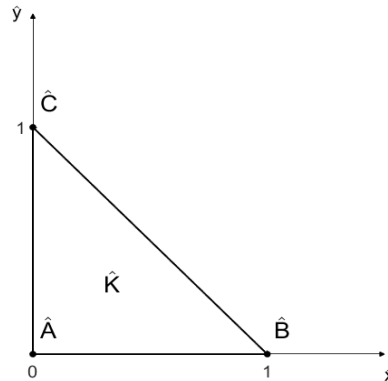
kde  $b_i^K$  nazýváme lokálními příspěvky do vektoru zatížení  $\vec{b}$  na elementu  $K \in \tau_h$ . Ačkoliv lokální příspěvky  $a_{ij}^K$  i  $b_i^K$  jsou definovány pro všechny indexy  $i, j$ , z hlediska výpočtu nás zajímají pouze nenulové příspěvky. Vzhledem k volbě báze jde pouze o 9 (3 x 3) hodnot  $a_{ij}^K$ , a 3 hodnoty  $b_i^K$ . K výpočtu lokálních příspěvků použijeme tzv. transformaci na referenční trojúhelník  $\hat{K}$ , viz [7].

### 3.5 Referenční trojúhelník

Referenční trojúhelník  $\hat{K}$  volíme jako trojúhelník (v souřadnicovém systému  $\hat{x}, \hat{y}$ ) s vrcholy  $\hat{A}$  [0,0],  $\hat{B}$  [1,0] a  $\hat{C}$  [0,1], viz obr. 4. Bázové funkce tohoto trojúhelníka značíme  $\hat{\varphi}_{\hat{W}}(\hat{x}, \hat{y})$  pro  $\hat{W} \in \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ . Vzhledem k vlastnosti (42) dostáváme vyjádření jednotlivých bázových funkcí jako

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}. \end{aligned} \quad (46)$$

Skutečně, dosadíme-li do předpisu bázových funkcí (46) souřadnice vrcholů  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ , pozorujeme, že příslušné bázové funkce jsou rovny v příslušných vrcholech jedné a v ostatních vrcholech jsou rovny nule, viz [7].



Obrázek 4: Referenční trojúhelník  $\hat{K}$

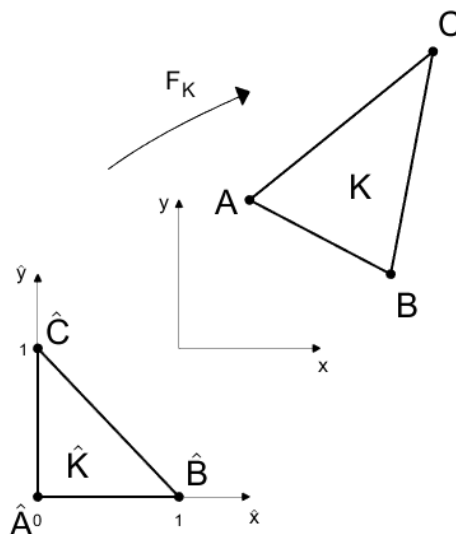
Dále uvažujme tzv. afinní transformaci  $F_K : \hat{K} \rightarrow K$  referenčního trojúhelníka  $\hat{K}$  na obecný trojúhelník  $K \in \tau_h$  s vrcholy  $A [x_A, y_A]$ ,  $B [x_B, y_B]$ ,  $C [x_C, y_C]$ , viz obr. 5. Tato transformace je dána rovnicí

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Rozepsáním rovnice (47) dostaneme vztah

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

kde matici  $\mathbb{B}_K = \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}$  nazýváme transformační matice. Zobrazení  $F_K$  je bijektivní transformací referenčního trojúhelníka  $\hat{K}$  na obecný trojúhelník  $K \in \tau_h$ , viz [7] a [8].



Obrázek 5: Obecný trojúhelník  $K$  s vrcholy  $A, B, C$  v souřadném systému  $x, y$  a referenční trojúhelník  $\hat{K}$  s vrcholy  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  v souřadném systému  $\hat{x}, \hat{y}$

Ze vztahu (48) lze získat inverzní transformaci  $F_K^{-1} : K \rightarrow \hat{K}$ , danou předpisem

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = F_K^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K^{-1} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \right], \quad (49)$$

Zde, matice  $\mathbb{B}_K^{-1}$  je inverzní matice k transformační matici a je dána vztahem

$$\mathbb{B}_K^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{B}_K} \begin{pmatrix} y_C - y_A & -x_C + x_A \\ -y_B + y_A & x_B - x_A \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Pomocí inverzní transformace  $F_K^{-1}$  je možné zapsat bázové funkce  $\varphi_W$  pro  $W \in \{A, B, C\}$  na trojúhelníku  $K \in \tau_h$ , viz [7] jako

$$\varphi_W(x, y) = \hat{\varphi}_W(F_K^{-1}(x, y)) \quad \text{nebo} \quad \varphi_W(x, y) = \hat{\varphi}_W(\hat{x}, \hat{y}), \quad (51)$$

kde  $(\hat{x}, \hat{y}) = F_K^{-1}(x, y)$ . K výpočtu prvků matice tuhosti  $\mathbb{A}$  dle (44) je nutno znát také gradient bázové funkce  $\nabla \varphi_W = \left( \frac{\partial \varphi_W}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_W}{\partial y} \right)$ . Ten nalezneme prostřednictvím parciálních derivací bázové funkce  $\varphi_W$ , viz [6] ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_W}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{\varphi}_W}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_W}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi_W}{\partial y} &= \frac{\partial \hat{\varphi}_W}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_W}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (52)$$

Ve vztazích (52) opět vystupují některé neznámé, konkrétně  $\frac{\partial \hat{x}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{x}}{\partial y}$  a  $\frac{\partial \hat{y}}{\partial y}$ . Tyto členy získáme následujícím postupem, parciálně derivujeme soustavu rovnic (48) podle souřadnic  $x$  a  $y$  jako

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Vztahy (53) napíšeme do jedné maticové rovnice a pozorujeme, že platí rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

která říká, že matice  $\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \end{pmatrix}$  je maticí inverzní k transformační matici  $\mathbb{B}_K$ . Nalezli jsme tak

hledané členy, jako prvky matice  $\mathbb{B}_K^{-1}$  a gradient bázové funkce  $\nabla \varphi_W$  zapíšeme, viz [7] ve tvaru

$$\nabla \varphi_W = \hat{\nabla} \hat{\varphi}_W \mathbb{B}_K^{-1}. \quad (55)$$

Posledním krokem k výpočtu lokálních příspěvků z rovnic (44) a (45) je transformace integrálu z obecného trojúhelníka  $K \in \tau_h$  na trojúhelník referenční  $\hat{K}$ . Transformaci provedeme

aplikací věty o substituci, viz [6] a pro libovolnou funkci  $\eta$  definovanou na trojúhelníku  $K \in \tau_h$ , viz [7] píšeme

$$\int_K \eta(x, y) dx dy = \int_{\hat{K}} \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{y}) |\det \mathbb{B}_K| d\hat{x} d\hat{y} = |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y}. \quad (56)$$

Speciálně dosadíme-li do vztahu (56) funkci  $\eta(x, y) \equiv 1$  dostaneme rovnost

$$\int_K 1 dx dy = |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} 1 d\hat{x} d\hat{y}. \quad (57)$$

Vyřešením plošných integrálů v rovnici (57) obdržíme platný vztah

$$\frac{|K|}{|\hat{K}|} = |\det \mathbb{B}_K|, \quad (58)$$

kde  $|K|$  je obsah plochy trojúhelníka  $K \in \tau_h$  a  $|\hat{K}|$  je obsah plochy referenčního trojúhelníka  $\hat{K}$ , viz [7].

### 3.6 Numerická kvadratura

Výpočet integrálu na referenčním trojúhelníku  $\hat{K}$  z rovnice (56) budeme realizovat přibližně pomocí numerické kvadratury. Z důvodu zjednodušení zápisu budeme v některých částech této kapitoly značit prostorové proměnné na trojúhelníku  $K$  jen jako  $x = (x_1, x_2)$  a na referenčním trojúhelníku  $\hat{K}$  pak jako  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . Obecná numerická kvadratura je potom dána, viz [7] vztahem

$$\int_{\hat{K}} \hat{\eta}(\hat{x}) d\hat{x} \approx |\hat{K}| \sum_{m=1}^M \hat{\omega}_m \hat{\eta}(F_K(\hat{x}_m)), \quad (59)$$

kde  $\hat{\omega}_m$  jsou váhy hodnot a  $\hat{x}_m$  jsou uzly dané numerické kvadratury,  $M$  je počet uzlů kvadratury. Užitím vztahu (59) pro výpočet integrálu (56), získáme tento integrál přibližně jako

$$\int_K \eta(x) dx \approx |\det \mathbb{B}_K| |\hat{K}| \sum_{m=1}^M \hat{\omega}_m \hat{\eta}(F_K(\hat{x}_m)). \quad (60)$$

Rovnici (60) lze vztahem (58) zjednodušit, viz [7] do podoby

$$\int_K \eta(x) dx \approx |K| \sum_{m=1}^M \omega_m \eta(x_m), \quad (61)$$

kde váhy  $\omega_m = \hat{\omega}_m$  a uzly  $x_m = F_K(\hat{x}_m)$ .

Na trojúhelníku  $K \in \tau_h$  se v této práci užívají tři kvadraturní vzorce, viz [7] a [8]. Numerická kvadratura, která jako uzly volí vrcholy trojúhelníka  $K$  aproximuje integrál takto

$$\int_K \eta(x) dx \approx \frac{1}{3} |K| [\eta(A) + \eta(B) + \eta(C)], \quad (62)$$

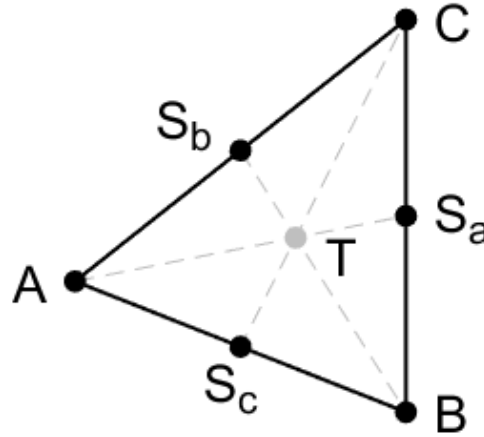
kde uzly  $x_m$  pro  $m = 1, 2, 3$  odpovídají vrcholům  $A, B, C$  se stejnými váhami  $\omega_m = \frac{1}{3}$ . Druhá používaná kvadratura aproximuje integrál pomocí těžišti trojúhelníka  $K$  jako

$$\int_K \eta(x) dx \approx |K| \eta(T), \quad (63)$$

kde uzel  $x_m$  pro  $m = 1$  odpovídá těžišti  $T$  s vahou  $\omega_m = 1$ . Obě předchozí kvadratury jsou přesné pro libovolné funkce  $\eta \in \mathcal{P}_1(K)$ , tedy pro polynomy nejvýše 1. stupně. Přesnější kvadratura aproximuje integrál uzly v podobě středů stran trojúhelníka  $K$ , tedy

$$\int_K \eta(x) dx \approx \frac{1}{3} |K| [\eta(S_a) + \eta(S_b) + \eta(S_c)], \quad (64)$$

kde uzly  $x_m$  pro  $m = 1, 2, 3$  odpovídají středům stran  $S_a, S_b, S_c$  se stejnými váhami  $\omega_m = \frac{1}{3}$ .



Obrázek 6: Uzly numerických kvadratur na trojúhelníku  $K$

Lokální příspěvek  $a_{ij}^K$  v rovnici (44) na elementu  $K \in \tau_h$  potom vypočteme užitím vztahů (51), (55) a (56) jako

$$\begin{aligned} a_{ij}^K &= \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx dy = \\ &= |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} (\nabla \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}) \cdot (\nabla \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}) d\hat{x} d\hat{y} = \\ &= |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} \left( \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}} \right) \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left( \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}} \right) \mathbb{B}_K^{-1} \right) d\hat{x} d\hat{y}. \end{aligned} \quad (65)$$

Vzhledem k volbě prostoru  $V_h$ , viz kap. 3.3 jsou bázové funkce na trojúhelníku  $K$  lineární, jejich gradient je tedy konstantní a integrál v rovnici (65) je možné vypočítat přesně jako

$$\int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx dy = |K| \nabla \varphi_j|_K \cdot \nabla \varphi_i|_K, \quad (66)$$

kde  $|K| = |\det \mathbb{B}_K| |\hat{K}|$  V obecnějším případě je možné užít matice  $\mathbb{B}_K^{-1}$  a výraz (65) vyčíslit dle

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^K &= \int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy = \\
 &= |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \right) \cdot \\
 &\quad \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \right) d\hat{x} d\hat{y}.
 \end{aligned} \tag{67}$$

Výraz (67) je možné řešit přibližně pomocí obecné numerické kvadratury (59), viz [7] ve tvaru

$$\begin{aligned}
 a_{ij}^K &\approx |K| \sum_{m=1}^M \omega_m \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}}(X_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}}(X_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{x}}(X_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \hat{y}}(X_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \right) \cdot \\
 &\quad \left( \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}(X_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}}(X_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}(X_m) \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}}(X_m) \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \right),
 \end{aligned} \tag{68}$$

kde  $|K| = |\det \mathbb{B}_K| |\hat{K}|$ , váhy  $\omega_m = \hat{\omega}_m$  a uzly značíme  $X_m = (\hat{x}_m, \hat{y}_m)$ .

Obdobně vypočteme i lokální příspěvek  $b_i^K$  z rovnice (45) na elementu  $K \in \tau_h$ . Aplikací věty o substituci, viz rovnice (56) obdržíme lokální příspěvek jako

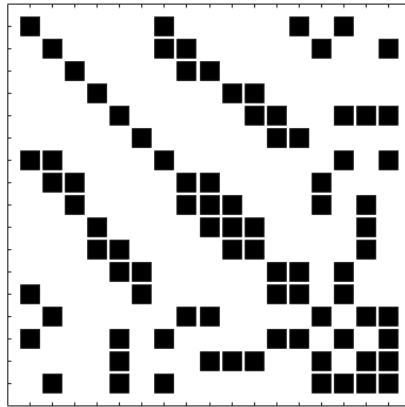
$$b_i^K = \int_K f(x, y) \varphi_i(x, y) \, dx dy = |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{x}, \hat{y})) \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \, d\hat{x} d\hat{y}, \tag{69}$$

kde  $f(x, y) = f(F_K(\hat{x}, \hat{y}))$ , viz transformace (47). K výpočtu integrálu (69) opět použijeme obecnou numerickou kvadraturu (59) a lokální příspěvek  $b_i^K$  získáme, viz [7] v podobě

$$b_i^K \approx |K| \sum_{m=1}^M \omega_m f(F_K(\hat{x}_m, \hat{y}_m)) \hat{\varphi}_i(\hat{x}_m, \hat{y}_m), \tag{70}$$

kde  $|K| = |\det \mathbb{B}_K| |\hat{K}|$  a váhy  $\omega_m = \hat{\omega}_m$ .

Matice tuhosti  $\mathbb{A}$  je zpočátku nulová, postupným přičítáním lokálních příspěvků  $a_{ij}^K$  z rovnice (68) vznikne řídká matice tuhosti  $\mathbb{A}$ . Řídká matice má převážnou část prvků nulových, viz obr. 7 a její výhodou je jednak nižší náročnost paměťového uložení a jednak možnost provádět některé operace efektivněji než pro matice plné, viz [7] a [9].

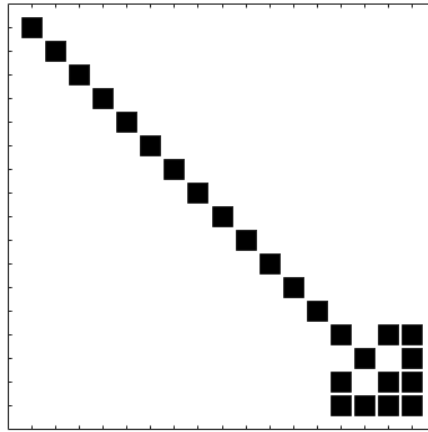


Obrázek 7: Příklad řídké matice tuhosti  $\mathbb{A}$ , kde černé čtverečky značí nenulové prvky



Analogicky je zpočátku nulový i vektor zatížení  $\vec{b}$ . Ten sestavíme postupným přičítáním lokálních příspěvků  $b_i^K$  z rovnice (70). Výslednou maticí tuhosti  $\mathbb{A}$  a vektorem zatížení  $\vec{b}$  řešíme soustavu lineárních rovnic  $\mathbb{A} \vec{U} = \vec{b}$ , viz rovnice (40) a hledáme tak aproximaci slabého řešení úlohy (31), representovanou vektorem  $\vec{U}$ , viz [7].

V uvedeném postupu je na závěr nutné zohlednit okrajovou podmínku prvního druhu (32) předepisovanou na okraji  $\Gamma_1$ . Její zohlednění provedeme tak, že v matici tuhosti  $\mathbb{A}$  vynulujeme hodnoty v řádcích a sloupcích příslušící uzlům triangulace  $\tau_h$  právě na hranici  $\Gamma_1$ . Současně vynulované hodnoty diagonály matice  $\mathbb{A}$  změníme na jedna a hodnoty složek vektoru  $\vec{b}$ , které odpovídají uzlům na hranici  $\Gamma_1$ , nahradíme nulou, viz předpis okrajové podmínky (32). Zahrnutím okrajové podmínky prvního druhu obdržíme regulární matici tuhosti  $\mathbb{A}$ , viz obr. 8 a soustava lineárních rovnic  $\mathbb{A} \vec{U} = \vec{b}$  má pak právě jedno řešení. Matice tuhosti  $\mathbb{A}$  je dokonce symetrická a pozitivně definitní a lze tedy efektivně řešit užitím iteračních metod, viz [7] a [10].



Obrázek 8: Příklad regulární řídké matice tuhosti  $\mathbb{A}$

### 3.7 Časová diskretizace

Do této chvíle jsme se zabývali řešením eliptického problému v podobě Poissonovy rovnice (8), která fyzikálně popisuje stacionární přenos tepla v tuhých látkách. Častějším problémem je ale přenos tepla nestacionární, popsany rovnicí parabolického typu (7) ve tvaru

$$\varrho c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \nabla^2 u = f, \quad (71)$$

kde teplotu značíme jako funkci  $u$  a vnitřní zdroj tepla jako funkci  $f$ , konstanty  $\varrho, c_p$  a  $\lambda$  jsou materiálové vlastnosti. Při odvození slabé formulace postupujeme jako v kapitole 3.1 a opět pro jednoduchost předepíšeme na hranici oblasti  $\partial\Omega$  okrajovou podmínku prvního řádu, tj.  $\Gamma_1 = \partial\Omega$  ve tvaru  $u = 0$ . Slabým řešením rovnice (71) tak nazveme funkci  $u = u(t) \in \mathcal{V}$ , pro kterou platí

$$\int_{\Omega} \varrho c_p \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx dy + \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\Omega} f v \, dx dy, \quad (72)$$

kde funkce  $v \in \mathcal{V}$  a čas  $t \in (0, T)$ . V dalším postupu funkce  $u$  a  $v$  aproximujeme funkcemi  $u_h$  a  $v_h$  z prostoru s konečnou dimenzí  $V_h$ , tedy funkce  $u_h, v_h \in V_h$ . Užitím báze  $V_h$  pak můžeme rovnici (72) psát jako

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial U_j}{\partial t} \int_{\Omega} \varrho c_p \varphi_j \varphi_i dx dy + \sum_{j=1}^n U_j \int_{\Omega} \lambda \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx dy = \int_{\Omega} f \varphi_i dx dy, \quad (73)$$

kde  $u_h = \sum_{j=1}^n U_j(t) \varphi_j(x, y)$  a  $v_h = \varphi_i$  pro libovolné  $i = 1, \dots, n$ . Koeficienty  $U_j(t)$  jsou tedy v rovnici (73) funkcemi času oproti koeficientům ze vztahu (39), pro stacionární úlohu. Rovnici (73) lze zapsat jako soustavu obyčejných diferenciálních rovnic v podobě

$$\mathbb{M} \vec{U} + \mathbb{A} \vec{U} = \vec{b}, \quad (74)$$

kde  $\mathbb{A}$  opět nazýváme maticí tuhosti a  $\vec{b}$  vektorem zatížení,  $\mathbb{M}$  je pak matice hmotnosti s prvky

$$a_{ij} = \int_{\Omega} \lambda \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i dx dy, \quad b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i dx dy, \quad (75)$$

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varrho c_p \varphi_j \varphi_i dx dy.$$

Ze vztahu (73) je zjevné, že při numerickém řešení parabolické rovnice je nutné kromě prostorové diskretizace provést i diskretizaci časovou. Při časové diskretizaci rozdělíme interval  $\langle 0, t \rangle$  na  $m$  ekvidistantních podintervalů dělicími body  $t_k$  pro  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ , kde  $t_k = k \cdot \Delta t + t_0$ . Místo neznámé vektorové funkce  $\vec{U} = \vec{U}(t)$  hledáme dále aproximace  $\vec{U}^{(k)} \approx \vec{U}_{(t_k)}$  v jednotlivých časech  $t$  se složkami  $U_j^{(k)} \approx U_j(t_k)$ , viz [7] a [11].

Přibližné řešení časové úlohy realizujeme implicitní metodou, která neklade žádné omezení na délku kroku  $\Delta t$  z důvodu stability, viz [10]. V tomto případě například nahradíme časovou derivaci pomocí zpětné derivace 1. řádu, tj. BDF1 (backward differentiation formula), viz [11]

$$\vec{U}(t_{k+1}) \approx \frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^k}{\Delta t}, \quad (76)$$

nebo zpětné derivace 2. řádu (BDF2) v podobě

$$\vec{U}(t_{k+1}) \approx \frac{3\vec{U}^{k+1} - 4\vec{U}^k + \vec{U}^{k-1}}{2\Delta t}. \quad (77)$$

Pro náhradu lze také užít centrální diference takto

$$\vec{U}(t_k) \approx \frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^{k-1}}{2\Delta t}, \quad (78)$$

popř., viz [8] ve tvaru

$$\vec{U}\left(t_{k+\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^k}{\Delta t}. \quad (79)$$

Časovou aproximaci soustavy rovnic (74) uvedeme například pro centrální diferenci (79), tuto soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pak zapíšeme jako

$$\mathbb{M} \frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^k}{\Delta t} + \mathbb{A} \vec{U} \left( t_{k+\frac{1}{2}} \right) = \vec{b}, \quad (80)$$

kde vektorovou funkci  $\vec{U} \left( t_{k+\frac{1}{2}} \right)$  aproximujeme takto

$$\vec{U} \left( t_{k+\frac{1}{2}} \right) \approx \frac{\vec{U}^{k+1} + \vec{U}^k}{2}. \quad (81)$$

Dosazením vztahu (81) do soustavy rovnic (80), obdržíme soustavu lineárních rovnic pro neznámou funkci  $\vec{U}^{k+1}$  ve tvaru

$$\mathbb{M} \frac{\vec{U}^{k+1} - \vec{U}^k}{\Delta t} + \mathbb{A} \frac{\vec{U}^{k+1} + \vec{U}^k}{2} = \vec{b}. \quad (82)$$

Rovnici (82) lze opakovaně formálně řešit pro  $k = 0, 1, 2, \dots, m$ , tedy pro známé hodnoty  $\vec{U}^k$  tímto způsobem

$$\vec{U}^{k+1} = \left( \frac{\mathbb{M}}{\Delta t} + \frac{\mathbb{A}}{2} \right)^{-1} \left[ \vec{b} + \left( \frac{\mathbb{M}}{\Delta t} - \frac{\mathbb{A}}{2} \right) \vec{U}^k \right], \quad (83)$$

kde hodnoty  $\vec{U}^{(0)}$  pro  $k = 0$  jsou předepsány počáteční podmínkou, v čase  $t_0$ .

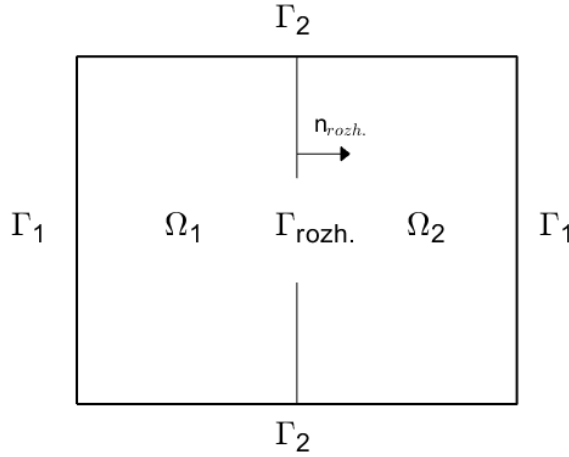
### 3.8 Rovinné vedení tepla v heterogenních tělesech

Jak je z předchozích kapitol zřejmé, odvození odpovídající slabé formulace je důležitým krokem při diskretizaci MKP pro řešení okrajových úloh vedení tepla. V dalším postupu tedy odvodíme slabou formulaci, kterou budeme používat v závěrečné části práce při numerickém řešení úloh vedení tepla v heterogenních tělesech.

Uvažujeme problém rovinného stacionárního vedení tepla v heterogenním materiálu, pro který platí  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ , viz kap. 2.4. Heterogenní těleso  $\Omega$  tvoří dvě oblasti, tj.  $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma_{rozh.} \cup \Omega_2$ , viz obr. 9 a vedení tepla je v něm popsáno rovnicí (8) ve tvaru

$$\nabla \cdot (-\lambda_k \nabla u) = f \quad \text{v } \Omega_k, \quad (84)$$

kde funkce  $u$  značí teplotu,  $\lambda_k$  udává tepelnou vodivost v dílčí oblasti  $\Omega_k$ , pro  $k = 1, 2$  a funkcí  $f$  popisujeme v oblasti  $\Omega$  vnitřní zdroj tepla. Pro hranici oblasti  $\partial\Omega$  platí  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , tedy na části hranice  $\Gamma_1$  předepisujeme okrajovou podmínku prvního druhu, viz rovnice (11) a na části hranice  $\Gamma_2$  použijeme okrajovou podmínku druhého druhu, viz rovnice (12). Na rozhraní oblastí  $\Gamma_{rozh.}$  předpokládáme spojitost teplot a tepelných toků popsanou vztahy (15) a (16).



Obrázek 9: Příklad heterogenního tělesa  $\Omega$

Při odvození slabé formulace opět volíme libovolnou funkci  $v \in \mathcal{V}$ , viz kap. 3.1, kterou rovnici (84) přenásobíme. Integrací rovnice (84) přes oblasti  $\Omega_k$  dostaneme

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_s} \left( -\lambda_k \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) \right) v \, dx dy = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f v \, dx dy. \quad (85)$$

Pro zjednodušení značíme v zápisu rovnice (85) a v dalším postupu v této kapitole parciální derivace  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$  podle prostorových proměnných  $x, y$  pouze jako  $\frac{\partial}{\partial x_s}$ . Tepelné vodivosti  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  jsou při výpočtech zadány v dílčích oblastech vždy konstantní, rovnici (85) lze tak zjednodušit do tvaru

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} -\lambda_k \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \right) v \, dx dy = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f v \, dx dy. \quad (86)$$

Aplikací Greenovy věty rozepíšeme levý člen rovnice (86) jako

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} -\lambda_k \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \right) v \, dx dy &= \int_{\Gamma_{\text{rozh.}}} \sum_{k=1}^2 \left( (-1)^{k+1} \lambda_k \frac{\partial u}{\partial n_{\text{rozh.}}} \right) v \, dS + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \left( \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_k} -\lambda_k \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS + \int_{\Omega_k} \lambda_k \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) dx dy \right), \end{aligned} \quad (87)$$

kde  $n$  reprezentuje jednotkový vektor vnější normály  $\vec{n}$  k hranici  $\partial\Omega$  a obdobně  $n_{\text{rozh.}}$  reprezentuje jednotkový vektor vnější normály  $\vec{n}_{\text{rozh.}}$  orientovaný z oblasti  $\Omega_1$  do oblasti  $\Omega_2$  k rozhraní  $\Gamma_{\text{rozh.}}$ , viz obr. 9. Aplikací okrajové podmínky čtvrtého druhu na rozhraní oblastí  $\Gamma_{\text{rozh.}}$  platí  $\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial n_{\text{rozh.}}} = \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial n_{\text{rozh.}}}$ . Dosazením výrazu (87) zpět do rovnice (86) tak obdržíme

$$\sum_{k=1}^2 \left( \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_k} -\lambda_k \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS + \int_{\Omega_k} \lambda_k \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) dx dy \right) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f v \, dx dy. \quad (88)$$

V dalším kroku užijeme v rovnici (88) v integrálu přes hranici oblasti  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_k$  jednotlivé okrajové podmínky a slabou formulaci rovnice (84) pro funkci  $u \in \mathcal{V}$  získáme ve tvaru

$$\int_{\Gamma_2} -\psi v \, dS + \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \lambda_k \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) dx dy = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f v \, dx dy, \quad (89)$$

kde funkce  $\psi$  udává předepsanou hustotu tepelného toku ve směru vnější normály  $\vec{n}$ , na hranici  $\Gamma_2$ .

Diskretizací slabé formulace (89) platné pro funkce  $v_h, u_h \in V_h$ , viz kap. 3.2 dostaneme soustavu lineárních rovnic  $\mathbb{A} \vec{U} = \vec{b}$  s prvky

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \lambda_k \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy, \\ b_i &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f \varphi_i \, dx dy + \int_{\Gamma_2} \psi \varphi_i \, dS, \end{aligned} \quad (90)$$

kteřou v kap. 4 používáme k numerickému řešení rovinných stacionárních úloh vedení tepla v heterogenních materiálech.

### 3.9 Vedení tepla v rotačně symetrických tělesech

V kap. 2.4 jsme uvedli problém rovinného vedení tepla pro trojrozměrná tělesa. Druhým typem úloh vedení tepla, které jsme v této kapitole zmínili a které lze také řešit jen ve dvourozměrné soustavě, jsou úlohy vedení tepla v tělesech, která jsou rotačně symetrická, speciálně potom s využitím symetrie tepelného pole. Při přenosu tepla v rotačních tělesech je běžné pro popis tepelného pole pracovat v cylindrické soustavě souřadnic. Odvození slabé formulace úlohy vedení tepla je v této soustavě mírně odlišné než v kartézské soustavě souřadnic.

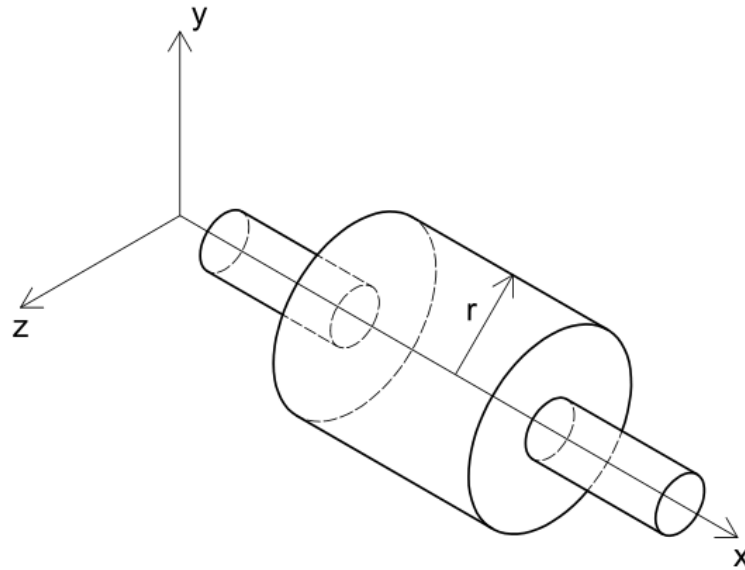
Tentokrát při odvození uvažujeme v tělese nestacionární vedení tepla popsané rovnicí (7) ve tvaru

$$\varrho c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \nabla^2 u = f \quad \text{v } \Omega^{3D}, \quad (91)$$

kde funkce  $u$  značí teplotu a funkce  $f$  vnitřní zdroj tepla, konstanty  $\varrho, c_p$  a  $\lambda$  jsou materiálové vlastnosti. Mezi kartézskými souřadnicemi  $\{x, y, z\}$  a cylindrickými souřadnicemi  $\{r, \varphi, x\}$  platí, viz [6] relace v podobě

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= r \cos \varphi, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (92)$$

Těleso  $\Omega^{3D}$  potom definujeme jako  $\Omega^{3D} = \{[x, r \cos \varphi, r \sin \varphi] \in \mathbb{R}^3 : [x, r] \in \Omega^{2D}, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$ , viz obr. 10.



Obrázek 10: Příklad rotačního tělesa  $\Omega^{3D}$

Slabou formulaci rovnice (91) s okrajovou podmínkou prvního druhu jsme pro funkce  $u, v \in \mathcal{V}$  odvodili v dvourozměrném kartézském souřadnicovém systému již v kap. 3.7 v podobě rovnice (72). Tuto rovnici nyní rozepíšeme v kartézských souřadnicích pro trojrozměrné těleso  $\Omega^{3D}$  ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega^{3D}} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx dy dz + \int_{\Omega^{3D}} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
 = \int_{\Omega^{3D}} f v \, dx dy dz.
 \end{aligned} \tag{93}$$

Pro nalezení rovnice (93) v cylindrické soustavě je nutné nahradit parciální derivace funkce  $u$  podle souřadnic kartézské soustavy, parciálními derivacemi funkce  $u$  podle souřadnic cylindrické soustavy. Jestliže tedy platí  $u(x, y, z) = u(x, r, \varphi)$ , parciálními derivacemi složené funkce  $u$ , viz [6] potom dostaneme výrazy

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x'} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\
 \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{94}$$

Dosazením výrazů (94) zpět do rovnice (93) a provedením transformace integrálů do cylindrických souřadnic, viz [6] bychom získali hledaný tvar slabé formulace pro rovnici (91). Ve vzorcích (94) ale stále vystupují některé členy, které úlohu vedení tepla (91) popisují v kartézských souřadnicích. Tyto členy, tj.  $\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  nalezneme v dalším postupu. Parciálně derivujeme rovnice (92b) a (92c) podle souřadnice  $y$  a obdržíme soustavu dvou rovnic v podobě

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial r}{\partial y} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial r}{\partial y} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (95)$$

Rovnici (95a) násobíme výrazem  $\cos \varphi$ . S rovnicí (95b) provedeme obdobné a násobíme ji výrazem  $\sin \varphi$ . Sečtením a úpravou těchto rovnic získáme první hledaný člen ve tvaru

$$\cos \varphi = \frac{\partial r}{\partial y}. \quad (96)$$

Druhý člen nalezneme podobným způsobem. Tentokrát násobíme rovnici (95a) výrazem  $(-\sin \varphi)$  a rovnicí (95b) výrazem  $\cos \varphi$ . Po úpravě nové soustavy rovnic dostaneme

$$-\sin \varphi \frac{1}{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (97)$$

Stejnými výrazy a ve stejném pořadí násobíme i následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial r}{\partial z} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ 1 &= \frac{\partial r}{\partial z} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (98)$$

kteřou jsme obdrželi parciální derivací vztahů (92b) a (92c) podle souřadnice  $z$ . Úpravou vzniklých soustav nalezneme zbývající dva neznámé členy jako

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{\partial r}{\partial z}, \\ \cos \varphi \frac{1}{r} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (99)$$

Hledané výrazy (94) potom získáme nahrazením členů (96), (97) a (99) ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x'}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (100)$$

Těmito výrazy lze již součin  $\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$  v rovnici (93) přepsat do cylindrických souřadnic, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} &= \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi \sin \varphi \frac{1}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi \sin \varphi \frac{1}{r} + \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin^2 \varphi \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (101)$$

Analogicky v rovnici (93) přepíšeme i součin  $\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$  jako

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} &= \left( \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos \varphi \frac{1}{r} \right) = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \sin^2 \varphi + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \frac{1}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi \cos \varphi \frac{1}{r} + \\
 &\quad + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cos^2 \varphi \frac{1}{r^2}.
 \end{aligned} \tag{102}$$

Současnou transformací integrálů do cylindrických souřadnic obdržíme rovnici (93) po úpravě v podobě

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Omega}^{3D}} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} v r dx dr d\varphi + \int_{\tilde{\Omega}^{3D}} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) r dx dr d\varphi = \\
 = \int_{\tilde{\Omega}^{3D}} f v r dx dr d\varphi,
 \end{aligned} \tag{103}$$

kde  $\tilde{\Omega}^{3D}$  značí popis rotačního tělesa  $\Omega^{3D}$  v cylindrických souřadnicích.

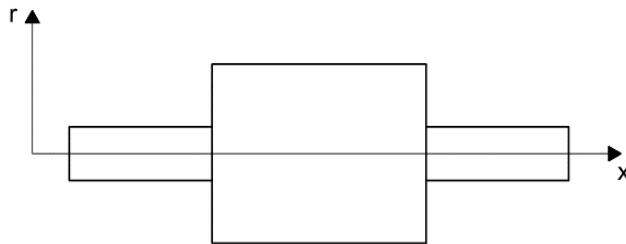
Výhoda zápisu úlohy vedení tepla v cylindrických souřadnicích nastává pro rotační tělesa  $\Omega^{3D}$  tehdy, když je teplota  $u$  v tělese nezávislá na úhlu  $\varphi$ , tedy  $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ . Tepelné pole je tak v tělese  $\Omega^{3D}$  právě symetrické a integraci lze jednotlivé členy rovnice (103) zjednodušit jako

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Omega}^{3D}} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} v r dx dr d\varphi &= 2\pi \int_{\Omega^{2D}} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} v r dx dr, \\
 \int_{\tilde{\Omega}^{3D}} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) r dx dr d\varphi &= \\
 &= 2\pi \int_{\Omega^{2D}} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) r dx dr, \\
 \int_{\tilde{\Omega}^{3D}} f v r dx dr d\varphi &= 2\pi \int_{\Omega^{2D}} f v r dx dr.
 \end{aligned} \tag{104}$$

Rovnici (103) ve tvaru

$$\int_{\Omega^{2D}} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} v r dx dr + \int_{\Omega^{2D}} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) r dx dr = \int_{\Omega^{2D}} f v r dx dr \tag{105}$$

potom nazýváme slabou formulací úlohy vedení tepla (91) v cylindrických souřadnicích pro rotační tělesa  $\Omega^{3D}$  se symetrií tepelného pole. Pro tyto tělesa lze pak rovnici (105) použít při diskretizaci MKP, ve dvourozměrné souřadnicové soustavě, viz obr. 11.



Obrázek 11: Příklad rotačního tělesa  $\Omega^{3D}$  ve dvourozměrné souřadnicové soustavě  $x, r$



Vhodné je pro tento typ v úloh vedení tepla v rotačních tělesech  $\Omega^{3D}$  uvést také případ s okrajovou podmínkou druhé druhu. Uvažujeme tedy úlohu (91) v rotačním tělese  $\Omega^{3D}$  s okrajovou podmínkou prvního druhu ve tvaru

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \quad (106)$$

a okrajovou podmínkou druhého druhu, která předepisuje hustotu tepelného toku takto

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n} = \psi \quad \text{na } \Gamma_2, \quad (107)$$

kde  $n$  reprezentuje jednotkový vektor vnější normály  $\vec{n}$  k povrchu tělesa  $\partial\Omega^{3D}$ . Části povrchu  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$ , vzniklé rotací okolo osy  $x$  jsou navzájem disjunktní části povrchu takové, že

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega^{3D}. \quad (108)$$

Slabá formulace má v kartézských souřadnicích pro úlohu vedení tepla s uvažováním okrajové podmínky druhého druhu tvar

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{3D}} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx dy dz + \int_{\Omega^{3D}} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz + \\ + \int_{\Gamma_2} -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS = \int_{\Omega^{3D}} f v \, dx dy dz, \end{aligned} \quad (109)$$

kde se nyní nachází integrál přes hranici  $\Gamma_2$ . Derivaci funkce  $u$  v tomto integrálu, ve směru normály  $\vec{n}$ , viz [6] potom získáme výraz

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \frac{\partial u}{\partial z} n_z, \quad (110)$$

který je nutné zohlednit při zápisu slabé formulace (109) do souřadnic cylindrických. V kartézské soustavě souřadnic pro vektor vnější normály platí  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ . Užitím vztahů (92) lze tento vektor zapsat jako  $\vec{n} = (n_x, n_r \cos \varphi, n_r \sin \varphi)$ . Touto záměnou a současným dosazením za výrazy  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$  z rovnic (100) vztah (110) zapíšeme v cylindrických souřadnicích jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \sin \varphi \frac{1}{r} \right) n_r \cos \varphi + \\ + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos \varphi \frac{1}{r} \right) n_r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (111)$$

Uplatněním symetrie tepelného pole se potom rovnice (111) zjednoduší do podoby

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial r} n_r, \quad (112)$$

která popisuje úlohu vedení tepla ve dvourozměrné souřadnicové soustavě. Transformací zbylých členů rovnice (109) podle vztahů (104) tak získáme slabou formulaci úlohy (91) s okrajovou podmínkou prvního a druhého druhu ve tvaru

$$\int_{\Omega^{2D}} \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} v r dxdr + \int_{\Omega^{2D}} \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) r dxdr + \int_{\Gamma_2^{2D}} -\lambda \frac{\partial u}{\partial n} v dS = \int_{\Omega^{2D}} f v r dxdr, \quad (113)$$

který je opět použitelný pro rotačně symetrická tělesa  $\Omega^{3D}$  při diskretizaci MKP, ve dvourozměrné souřadnicové soustavě.

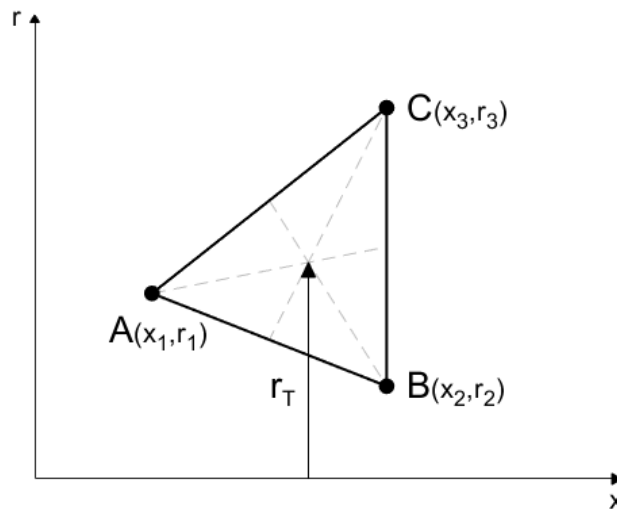
Diskretizaci rovnice (113) a volbu prostoru provedeme podle kap. 3.2 a 3.3. Matici hmotnosti  $\mathbb{M}$  s prvky  $m_{ij}$  a matici tuhosti  $\mathbb{A}$  s prvky  $a_{ij}$  potom dostaneme, viz [12] jako

$$m_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K r_T \rho c_p \varphi_j \varphi_i drdx, \quad (114)$$

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K r_T \lambda \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i drdx,$$

kde  $r_T$  popisuje polohu těžiště trojúhelníka  $K \in \tau_h$ , viz obr. 12. Výpočtem statického momentu plochy trojúhelníka  $K$  k ose  $x$  obdržíme  $r_T$  takto

$$\int_K r drdx = |K| r_T = |K| \frac{1}{3} (r_1 + r_2 + r_3). \quad (115)$$



Obrázek 12: Trojúhelník  $K \in \tau_h$  ve dvourozměrné souřadnicové soustavě  $x, r$

Při diskretizaci zbylých členů rovnice (113) vyjádříme poloměr  $r$  elementu  $K$  pomocí básových funkcí, viz [12] jako

$$r|_K = \varphi_1|_K r_1|_K + \varphi_2|_K r_2|_K + \varphi_3|_K r_3|_K, \quad (116)$$

a získáme potom vektor zatížení  $\vec{b}$  s prvky

$$b_i = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f \varphi_i \varphi_j r_j drdx + \int_{\Gamma_2} \psi \varphi_i dS. \quad (117)$$

Diskretizací MKP a následnou časovou diskretizací, viz kap. 3.7 je tak možné slabou formulaci (113) pro úlohy vedení tepla v rotačně symetrických tělesech, přepsat jako soustavu obyčejných diferenciálních rovnic  $\mathbb{M} \vec{U} + \mathbb{A} \vec{U} = \vec{b}$ , kterou lze v dalším postupu použít k numerickému řešení těchto úloh.

## 4 Numerické výsledky

V této práci se zabýváme numerickou aproximací vybraných problémů vedení tepla zejména s uvážením heterogenních materiálů. Při konkrétních realizacích nejprve vytváříme v programu Gmsh (volně dostupný z [13]) přípustnou triangulaci  $\tau_h$  omezené polygonální oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  s hranicí  $\partial\Omega = \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , na které jsou předepsány různé okrajové podmínky. Triangulaci  $\tau_h$  získáme na základě popisu geometrie uvažované oblasti. Podle získané triangulace diskretizujeme problém vedení tepla v programu Matlab (dostupný z [14]) pomocí MKP a získané numerické výsledky následně zobrazujeme prostřednictvím programu Paraview (volně dostupný z [15]).

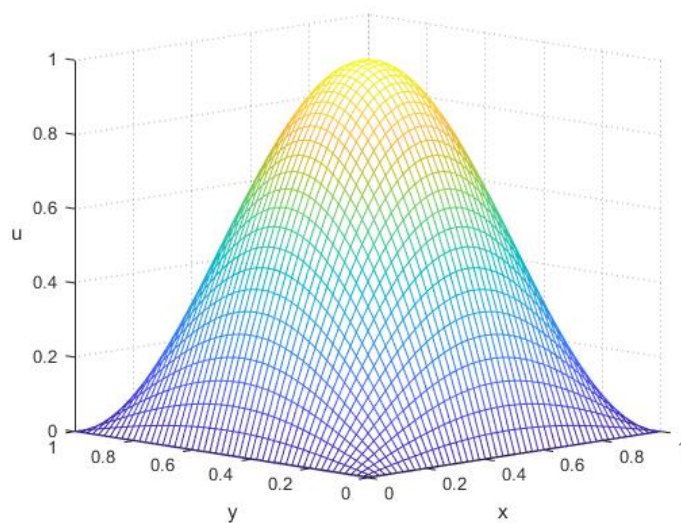
### 4.1 Ověření správnosti řešení

Ještě než začneme řešit vybrané problémy vedení tepla, ověříme na jednoduchém testovacím příkladě správnost řešení implementované MKP. V oblasti  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \in \langle 0; 1 \rangle, y \in \langle 0; 1 \rangle\}$  uvažujeme modelový problém  $-\nabla^2 u = f$ , viz rovnice (31), u něhož známe analytické řešení ve tvaru

$$u = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (118)$$

viz obr. 13. Z řešení (118) plyne, že na hranici oblasti  $\partial\Omega$  je funkce  $u$  nulová, tedy  $u = 0$  a jedná se tak o úlohu s okrajovou podmínkou 1. druhu, tj.  $\partial\Omega = \Gamma_1$ . Zároveň lze úpravou rovnice (118) zjistit, že funkce  $f$  je rovna výrazu

$$f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (119)$$



Obrázek 13: Graf funkce  $u$  v oblasti  $\Omega$

Obvyklou mírou úspěšné implementace numerické metody je tzv. ověření řádu přesnosti (order of accuracy test). Tento test pro diskretizační numerické metody určí, zda se její implementací přibližujeme k řešení spojitého problému očekávanou rychlostí, prostřednictvím systematického zjemňování sítě (triangulace), viz [16].

Ověření správnosti řešení tedy provedeme opakovaným výpočtem problému  $-\nabla^2 u = f$  na triangulaci  $\tau_h$  oblasti  $\Omega$ . Triangulaci  $\tau_h$  postupně zjemňujeme pomocí diskretizačního parametru  $h$ , resp. postupně navyšujeme počet prvků (trojúhelníků), které triangulaci  $\tau_h$  tvoří. Na dané triangulaci  $\tau_h$  porovnáme numerické řešení  $\vec{u}_h$  získané MKP s analytickým řešením  $\vec{u}$ . Jejich rozdíl určíme pomocí řádkové normy  $\|\vec{u}_h - \vec{u}\|_\infty$  a Euklidovské normy  $\|\vec{u}_h - \vec{u}\|_2$ , viz [10] a [16] jako

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_h - \vec{u}\|_\infty &= \max |u_{h_i} - u_i|, \\ \|\vec{u}_h - \vec{u}\|_2 &= \left( \frac{1}{N} \sum_i |u_{h_i} - u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (120)$$

pro  $i = 1, \dots, N$ , kde  $N$  je počet uzlů triangulace  $\tau_h$ . V případě, že známe dvě různá řešení  $\vec{u}_{h_1}, \vec{u}_1$  a  $\vec{u}_{h_2}, \vec{u}_2$  pro dva příslušné diskretizační parametry  $h_1$  a  $h_2$ , řád přesnosti  $p$  potom vypočteme, viz [16] ve tvaru

$$p = \frac{\log \left( \frac{\|\vec{u}_{h_1} - \vec{u}_1\|_{\infty,2}}{\|\vec{u}_{h_2} - \vec{u}_2\|_{\infty,2}} \right)}{\log \left( \frac{h_1}{h_2} \right)}. \quad (121)$$

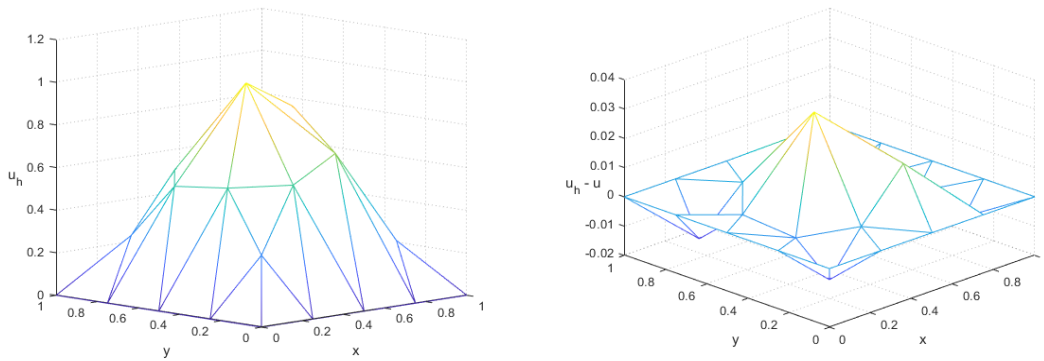
Pro vytvoření triangulace  $\tau_h$  na oblasti  $\Omega$  a její postupné zjemňování používáme program Gmsh, více v kap. 4.2.1. Diskretizační parametr  $h$  volíme od hodnoty  $h_1 = 0,25$ , které odpovídá triangulace  $\tau_{h_1}$  s 42 prvky až do hodnoty  $h_6 = 0,0078125$ , které přísluší triangulace  $\tau_{h_6}$  s řádově 38 000 prvky. Hodnoty parametru  $h$  jsou zvoleny záměrně tak, aby byl parametr vždy o polovinu menší než u předcházejícího numerického výpočtu. Touto volbou se zároveň vzorec (121) pro řád přesnosti zjednoduší do podoby

$$p = \log_2 \left( \frac{\|\vec{u}_{h_1} - \vec{u}_1\|_{\infty,2}}{\|\vec{u}_{h_2} - \vec{u}_2\|_{\infty,2}} \right). \quad (122)$$

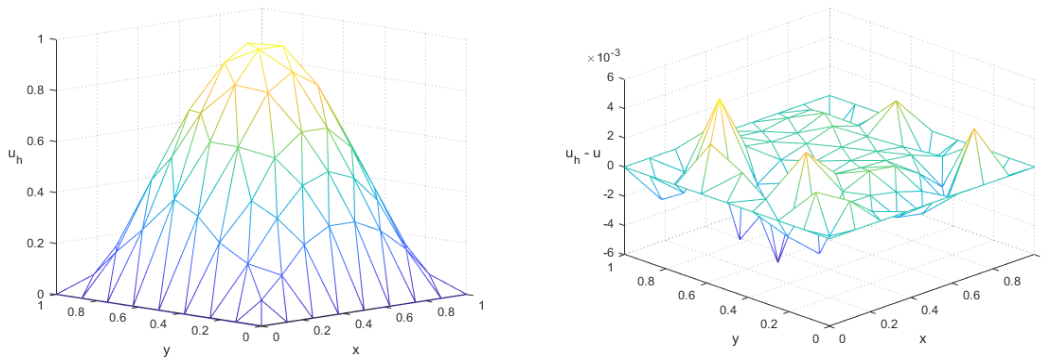
V tab. 1 jsou uvedeny řády přesnosti a k nim jsou na obr. 14 – 19 vykresleny odpovídající grafy numerických řešení  $\vec{u}_h$  a jejich odchylek od analytických řešení  $\vec{u}$  na triangulacích  $\tau_h$ . Výsledky v tab. 1 uvádíme současně pro tři různé numerické kvadratury, které byly uvedeny v kap. 3.6.

Tabulka 1: Řád přesnosti  $p$  pro triangulace  $\tau_{h_1} - \tau_{h_6}$

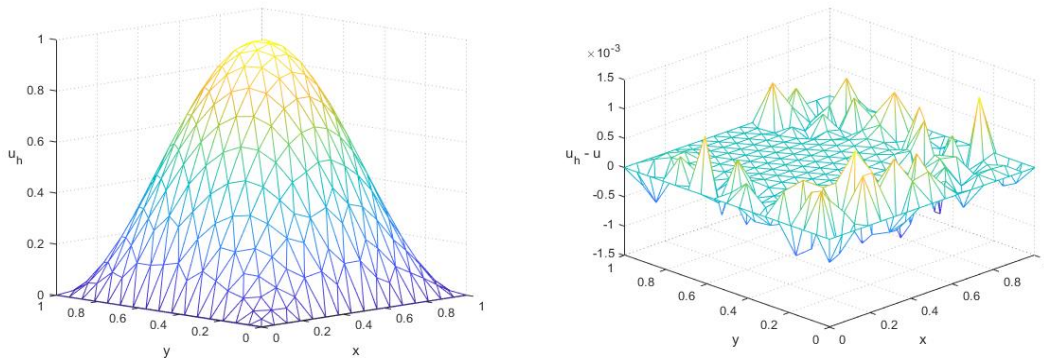
h	kvadratura 1 (uzly – vrcholy)		kvadratura 2 (uzel – těžiště)		kvadratura 3 (uzly – středy stran)	
	pomocí Euklidovské normy	pomocí řádkové normy	pomocí Euklidovské normy	pomocí řádkové normy	pomocí Euklidovské normy	pomocí řádkové normy
0,25	—	—	—	—	—	—
0,125	1,9941	2,6356	1,9741	2,0231	2,7282	2,5955
0,0625	1,9254	1,9722	2,0219	2,5838	2,3566	2,3016
0,03125	1,9304	1,9666	1,9356	1,8984	2,5654	1,2213
0,015625	1,9723	1,9964	2,0121	2,0931	2,8967	2,4646
0,0078125	1,9846	1,9964	1,9926	1,9988	2,3620	2,0276



Obrázek 14: Graf numerického řešení  $\vec{u}_{h_1}$  a jeho odchylky od analytického řešení  $\vec{u}_1$  na triangulaci  $\tau_{h_1}$

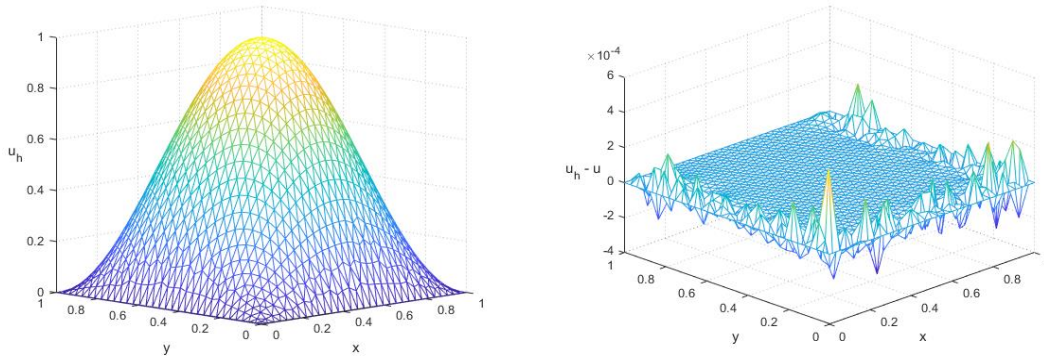


Obrázek 15: Graf numerického řešení  $\vec{u}_{h_2}$  a jeho odchylky od analytického řešení  $\vec{u}_2$  na triangulaci  $\tau_{h_2}$

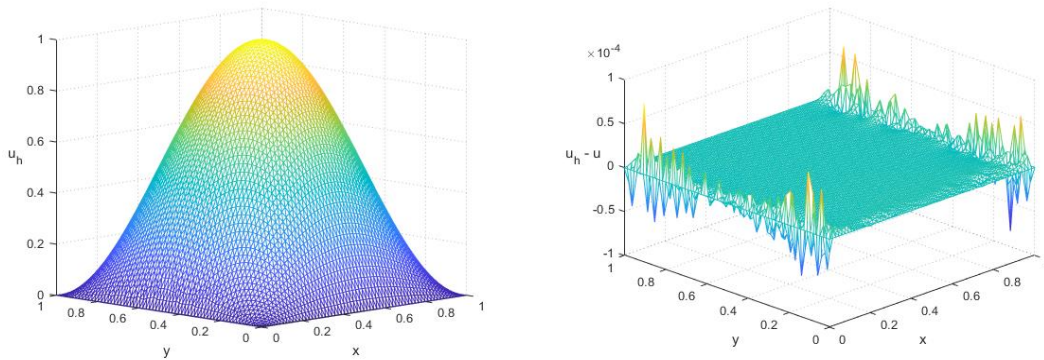


Obrázek 16: Graf numerického řešení  $\vec{u}_{h_3}$  a jeho odchylky od analytického řešení  $\vec{u}_3$  na triangulaci  $\tau_{h_3}$

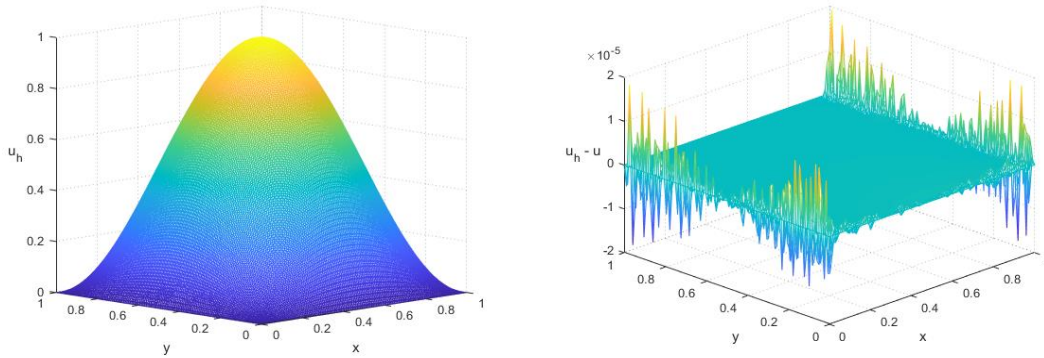




Obrázek 17: Graf numerického řešení  $\vec{u}_{h_4}$  a jeho odchylky od analytického řešení  $\vec{u}_4$  na triangulaci  $\tau_{h_4}$



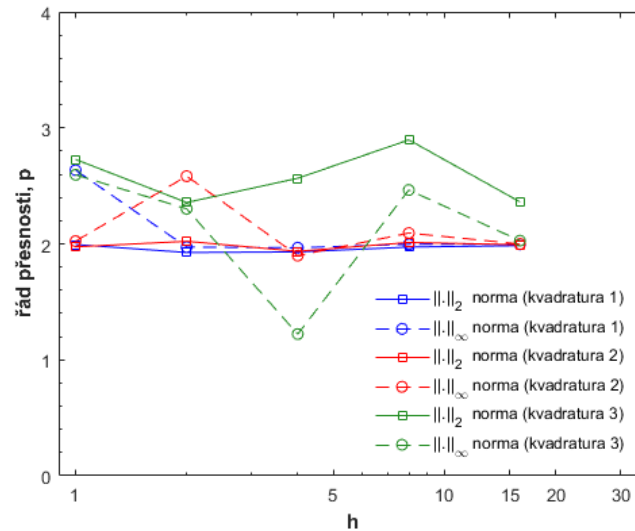
Obrázek 18: Graf numerického řešení  $\vec{u}_{h_5}$  a jeho odchylky od analytického řešení  $\vec{u}_5$  na triangulaci  $\tau_{h_5}$



Obrázek 19: Graf numerického řešení  $\vec{u}_{h_6}$  a jeho odchylky od analytického řešení  $\vec{u}_6$  na triangulaci  $\tau_{h_6}$

Pro snadnější analýzu jsou hodnoty z tab. 1 vyneseny do grafu na obr. 20. Graf zachycuje závislost řádu přesnosti  $p$  na diskretizačním parametru  $h$ . Parametr  $h$  je v tomto grafu v logaritmickém měřítku a chápeme ho jako hustotu triangulace  $\tau_h$ , která se s každým přibývajícím výpočtem dvojnásobí. Z literatury [16] víme, že pro modelovou úlohu  $-\nabla^2 u = f$  se řád přesnosti rovná  $p = 2$ . Na obr. 20 tak pozorujeme, že se užitím kvadratury 1 a kvadratury 2 při implementaci MKP přibližujeme očekávané hodnotě. Výjimkou jsou pro tyto kvadratury ale hodnoty řádu přesnosti na hrubších sítích, zejména při použití řádkové normy, které očekávanou hodnotu převyšují. V případě kvadratury 3 dosahujeme u většiny sítí vyššího řádu přesnosti, než je očekávaná hodnota. Důležité je při tomto ověření správnosti řešení zmínit, že jsou výpočty

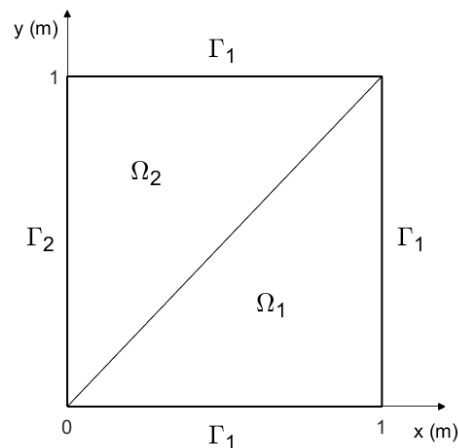
provedeny na nestrukturovaných sítích. S klesajícími diskretizačními parametry  $h$  se tak poměr mírně odlišuje od poměru rostoucího počtu prvků sítě, narozdíl od sítí strukturovaných. K ověření vlivu této vlastnosti by tak pravděpodobně přispěly výpočty na sítích strukturovaných. Definitivní závěry by zároveň mohly také poskytnout další výpočty na jemnějších sítích. Pro účely této práce lze ale z výsledků říct, že byla implementace MKP provedena správně.



Obrázek 20: Graf závislosti řádu přesnosti  $p$  na diskretizačním parametru  $h$

## 4.2 Stacionární vedení tepla v heterogenních materiálech

Jako první provedeme celý postup tvorby triangulace  $\tau_h$  pro úlohu přenosu tepla převzatou ze článku [17]. Jedná se o rovinné stacionární vedení tepla popsané rovnicí (84), ve dvouvrstvěném plátu  $\Omega$ , viz kap. 3.8 s tepelnými vodivostmi  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Zdroj tepla  $f$  je v oblasti  $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma_{rozh} \cup \Omega_2 = (0; 1) \times (0; 1)$  m, zadán nulový, tj.  $f \equiv 0$ . Na hranici oblasti  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  jsou předepsány dvě okrajové podmínky. Hranice  $\Gamma_1$  s okrajovou podmínkou prvního druhu (Dirichletovou) tvoří dolní, pravou a horní hranu oblasti  $\Omega$ , viz obr. 21. Hranice  $\Gamma_2$  s okrajovou podmínkou druhého druhu (Neumannovou) potom tvoří zbylou, levou hranu oblasti  $\Omega$ .

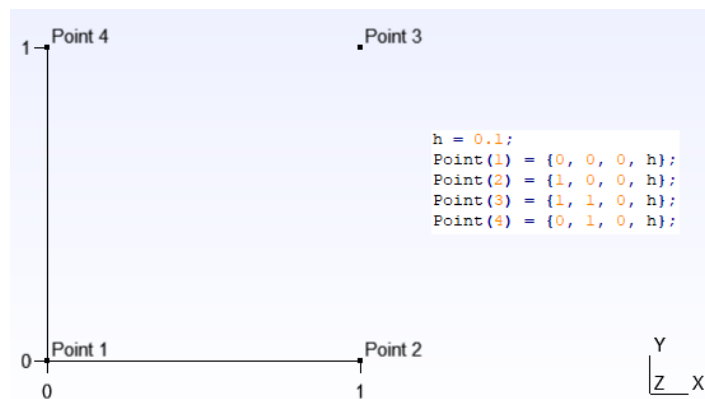


Obrázek 21: Dvouvrstvý plát se šikmou přechodovou vrstvou

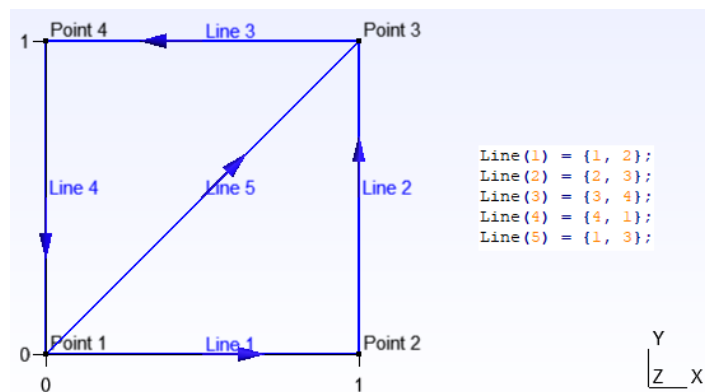


## 4.2.1 Tvorba triangulace

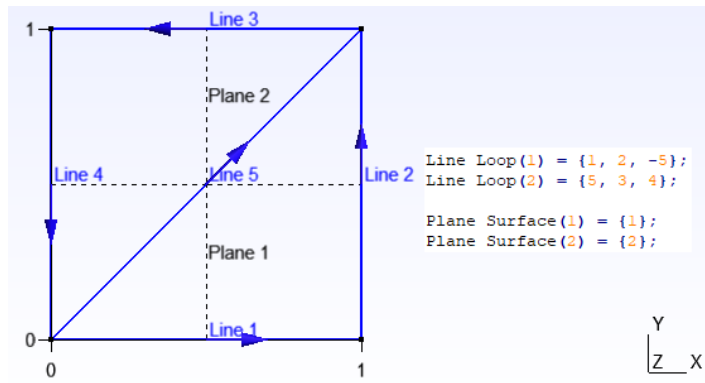
Samotné řešení konkrétní úlohy zahájíme popisem oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  v programu Gmsh. Veškeré utility programu jsou uvedeny v dokumentaci [18]. V programu je možné pracovat přímo pomocí editoru, nebo ve formátu *.geo*, ve kterém jsou např. na obr. 22 vymezeny rohové body oblasti  $\Omega$ . Pro body v této oblasti zároveň stanovujeme jejich diskretizační parametr  $h$ , který může být odlišný. Rohové body následně propojíme úsečkami, prostřednictvím příkazů na obr. 23. Na tomto obrázku je současně pomocí šipek vyobrazen směr úseček, který je důležitý při vymezení dílčích oblastí  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ , viz obr. 24. Triangulaci  $\tau_h$  takto vymezené oblasti  $\Omega$  potom získáme užitím funkce *Mesh 2D*, viz obr. 25. Tato funkce vytvoří přípustnou triangulaci  $\tau_h$  a rozdělí tak oblast na konečný počet uzavřených trojúhelníků  $K \in \tau_h$ . V případě, že jsme nastavili odlišný diskretizační parametr  $h$  pro jeden z bodů, dojde aplikací funkce *Mesh 2D* k tzv. lokálnímu zjemnění triangulace  $\tau_h$ , viz obr. 26. Lokálního zjemnění využíváme při řešení úloh vedení tepla v oblastech, kde očekáváme velkou změnu teploty, abychom ji byli schopni zachytit pomocí po částech lineárních funkcí, viz kap. 3.3. Posledním krokem při tvorbě triangulace  $\tau_h$  označíme části hranice a dílčí oblasti výrazem *physical*. Tímto označením zároveň přiřadíme určité hranici a dílčí oblasti číslo, viz obr. 27 které je pak zachováno i ve výstupním souboru, kde je využito k odlišení hranice  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$  a k odlišení oblasti  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ .



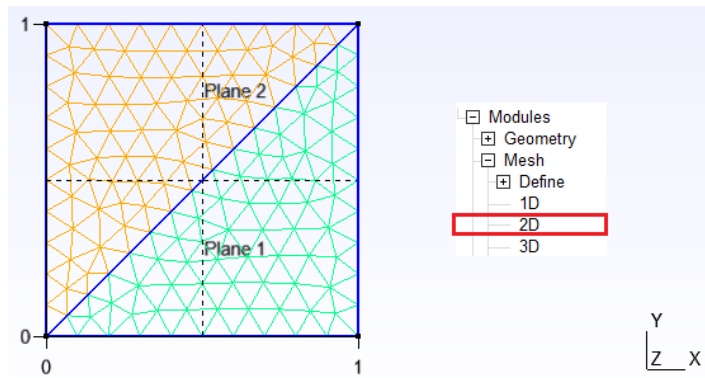
Obrázek 22: Vymezení rohových bodů oblasti  $\Omega$  v programu Gmsh



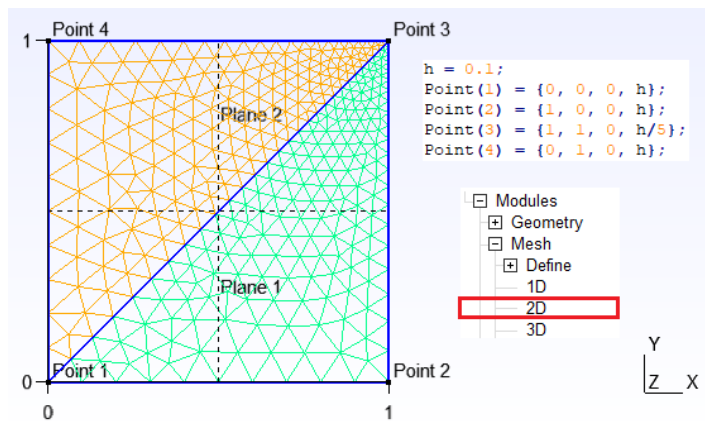
Obrázek 23: Vymezení ohraničení oblasti  $\Omega$  v programu Gmsh



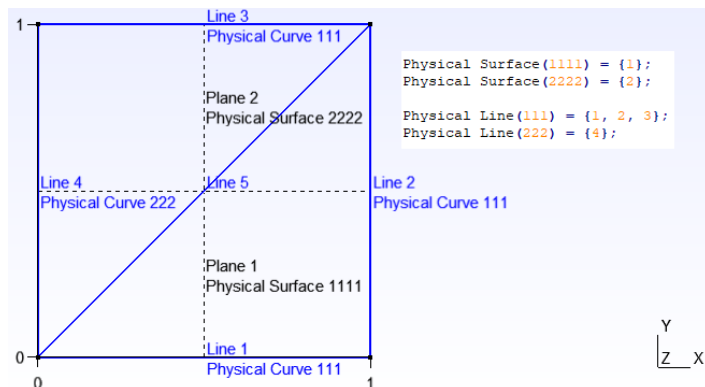
Obrázek 24: Vymezení dílčích oblastí  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  v programu Gsmh



Obrázek 25: Tvorba triangulace  $\tau_h$  oblasti  $\Omega$  v programu Gsmh



Obrázek 26: Ukázka lokálního zjemnění triangulace  $\tau_h$  oblasti  $\Omega$  v programu Gsmh



Obrázek 27: Přřazení fyzikálního charakteru hranicím  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$  a oblastem  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  v programu Gsmh

Vytvořenou triangulaci  $\tau_h$  včetně popisu hranice  $\partial\Omega$  program Gmsh uloží do formátu *.msh*, viz tab. 2. Struktura *\$Nodes* vzestupně indexuje jednotlivé uzly triangulace  $\tau_h$  a udává jejich příslušné souřadnice  $x,y,z$ . Druhou strukturu *\$Elements* tvoří až osm sloupců. V prvním sloupci jsou čísla seřazena vzestupně a opět reprezentují indexy tentokrát jednotlivých elementů, které triangulaci  $\tau_h$  tvoří. Čísla ve druhém sloupci uvádí, zda se jedná o úsečku na hranici  $\partial\Omega$  v případě jedničky, nebo o trojúhelník v případě dvojky. Číslo ve třetím sloupci udává počet označení, které element popisují. V případě uvedeném v tab. 2 jsou to tedy dvě označení pro každý element. Tyto označení se nacházejí ve čtvrtém a pátém sloupci a uvádí, že např. element 3 v tab. 2 tvoří v triangulaci  $\tau_h$  část hranice označenou čísly 111 a 1, které na obr 27 odpovídá spodní hranice  $\partial\Omega$  s popisky *Line 1* a *Physical Curve 111*. V případě elementu 306 z tab. 2, se jedná o trojúhelník, který se nachází v triangulaci  $\tau_h$  na místě označeném čísly 2222 a 2. Toto místo odpovídá na obr. 27 oblasti s popisky *Plane 2* a *Physical Surface 2222*. Zbylé dva, popřípadě tři sloupce ve struktuře *\$Elements* vypisují indexy uzlů ze struktury *\$Nodes*, které danou úsečku či trojúhelník tvoří.

 Tabulka 2: Příklad uložení dat ve formátu *.msh*

```

$MeshFormat
2.2 0 8
$EndMeshFormat
$Nodes
154
1 0 0 0
2 1 0 0
3 1 1 0
.
.
.
154 0.1322842 0.2010491 0
$EndNodes
$Elements
306
1 1 2 111 1 1 5
2 1 2 111 1 5 6
3 1 2 111 1 6 7
.
.
.
306 2 2 2222 2 134 146 153
$EndElements
    
```

## 4.2.2 Algoritmizace problému vedení tepla

Sít' importujeme do programu Matlab prostřednictvím funkce *load\_gmsh.m*, veřejně dostupné z [19], příkazem

```
M=load_gmsh('sit.msh');
```

Funkce načte soubor ve formátu *.msh* a data o triangulaci  $\tau_h$  uloží do připravených struktur, mezi které patří struktury *M.nbNod*, *M.nbElm*, *M.nbLines*, *M.nbTriangles*, *M.POS*, *M.LINES* a *M.TRIANGLES*. Čísla *M.nbNod*, *M.nbElm*, *M.nbLines* a *M.nbTriangles* udávají počet uzlů, počet elementů, počet hraničních úseček a počet trojúhelníků triangulace  $\tau_h$ . Matici *M.POS* tvoří ve třech sloupcích *x,y,z* souřadnice pro *M.nbNod* uzlů. Matici *M.LINES* tvoří v prvních dvou sloupcích indexy uzlů příslušných hraničních úseček a ve třetím sloupci je pro danou úsečku uvedeno její číselné označení z programu Gmsh, viz tab. 3, které určuje, na které části hranice  $\partial\Omega$  se úsečka v triangulaci  $\tau_h$  nachází. Podobně matici *M.TRIANGLES* tvoří ve třech sloupcích indexy uzlů trojúhelníka a v posledním sloupci je uvedeno číselné označení oblasti z programu Gmsh, viz tab. 4 které je daný trojúhelník v triangulaci  $\tau_h$  součástí. Počet řádků matic *M.LINES* a *M.TRIANGLES* je shodné s číslem *M.nbElm*.

 Tabulka 3: Příklad matice uložené ve struktuře *M.LINES*

1	5	111
5	6	111
6	7	111
.	.	.
.	.	.
.	.	.
40	1	222
0	0	0
.	.	.
.	.	.
.	.	.
0	0	0

 Tabulka 4: Příklad matice uložené ve struktuře *M.TRIANGLES*

64	76	88	1111
57	74	76	1111
76	64	95	1111
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
134	146	153	2222
0	0	0	0
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
0	0	0	0

Pro algoritmizaci MKP vytvoříme v Matlabu funkci *mkp.m*. Příkazem

```
[A, b] = mkp(M, @(x,y) 0);
```

potom získáme matici tuhosti  $\mathbf{A}$  a vektor zatížení  $\vec{b}$  pro vyřešení soustavy lineárních rovnic  $\mathbf{A} \vec{U} = \vec{b}$ , viz kap. 3.2. Výrazem  $\text{@}(x,y) 0$  stanovujeme předpis funkce  $f(x,y)$ , která je v této úloze vedení tepla nulová. Ve skriptu pro funkci *mkp.m* nejprve vytvoříme vektor *BMlist*

```
BMlist = unique(M.LINES(1 : M.nbLines, 3));
```

Složky vektoru tvoří unikátní čísla z třetího sloupce matice  $M.LINES$ . Tím tak nalezneme všechny číselné označení z programu Gmsh, které charakterizují různé části hranice  $\partial\Omega$ . Dále inicializujeme nulový vektor  $BM$  o  $M.nbNod$  složkách. Nulové složky vektoru  $BM$  postupně měníme skrze cyklu přes prvky matice  $M.LINES$ . Cyklus přiřadí správné číslo, resp. správnou hodnotu složky z vektoru  $BMlist$  každému uzlu na hranici  $\partial\Omega$  tak, že  $n$ -tou složku vektoru  $BM$ , která odpovídá indexu daného uzlu nahradí jedním z čísel z vektoru  $BMlist$ . Tímto postupem zamezíme možný konflikt v uzlech ležících na styku dvou částí hranice  $\partial\Omega$  s odlišnými okrajovými podmínkami. V tuto chvíli je tedy důležité zmínit, že hraniční úsečky a jejich uzly označené číslem 111 v matici  $M.LINES$  náleží v oblasti  $\Omega$ , viz obr. 27 hranici  $\Gamma_1$ , kde je předepsána Dirichletova okrajová podmínka, v případě označení číslem 222 v této matici, hraniční úsečka a její uzly náleží hranici  $\Gamma_2$ , na které je předepsána okrajová podmínka Neumannova. Cyklem přes prvky matice  $M.LINES$  tak nastavíme prioritu číslu 111, resp. Dirichletově okrajové podmínce, jelikož se jedná o okrajovou podmínka prvního řádu. Pokud tedy uzel náleží hranici  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$  současně, jako např. uzel s indexem 1 v tab. 3, cyklus přiřadí první složce ve vektoru  $BM$  hodnotu 111. Znalostí výsledného vektoru  $BM$  vytvoříme vektor  $hr$

```
hr = find(BM == 111);
```

pro další použití. Složky vektoru  $hr$  tvoří indexy uzlů, které náleží hranici  $\Gamma_1$  s Dirichletovou okrajovou podmínkou.

Matici tuhosti  $\mathbb{A}$  získáme prostřednictvím funkce *femLaplace.m*, příkazem

```
A = femLaplace(M);
```

Ve skriptu funkce *femLaplace.m* matici  $\mathbb{A}$  sestavíme pomocí rovnic (44), (66) a (90) jako

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \lambda_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx dy = \sum_{K \in \tau_h} \lambda_K |K| \nabla \varphi_i|_K \cdot \nabla \varphi_j|_K = \sum_{K \in \tau_h} a_{ij}^K, \quad (123)$$

kde pro trojúhelník  $K \subset \bar{\Omega}_k$  platí  $\lambda_K = \lambda_k$ . Pro matici  $\mathbb{A}$  využijeme uložení *triplet*, které využívá vlastností řídké matice. Pro řídké matice se vzhledem k paměťové úspoře, viz kap. 3.6 vyplatí ukládat indexy řádků  $i$  (indexy uzlů), indexy sloupců  $j$  (indexy uzlů) a příslušné nenulové lokální příspěvky  $a_{ij}^K$  na trojúhelníku  $K \in \tau_h$  do tří polí zvlášť (proto *triplet*). Příkazem *sparse*

```
A = sparse(triplet.I, triplet.J, triplet.VAL);
```

potom vytvoříme ze tří polí řídkou matici tuhosti  $\mathbb{A}$ . Lokální příspěvky  $a_{ij}^K$  vypočítáme z rovnice (123) s pomocí funkce *getMeshTriangle.m*. Příkazem

```
K = getMeshTriangle(M, k);
```

obdržíme data o  $k$ -tém trojúhelníku  $K \in \tau_h$  v několika strukturách, mezi které patří např. číslo  $K.VOL$ , které udává obsah daného trojúhelníka  $K$  anebo číslo  $K.MAT.LAMBDA$ , které pro daný trojúhelník  $K$  uvádí tepelnou vodivost  $\lambda$ . Důsledkem zvoleného postupu nalezneme různé lokální příspěvky  $a_{ij}^K$ , kterým odpovídají stejné indexy řádků  $i$  a sloupců  $j$ , ty jednoduše sečteme.

V sestavené matici tuhosti  $\mathbb{A}$  je důležité na závěr zohlednit Dirichletovu okrajovou podmínku, aby byla matice  $\mathbb{A}$  regulární, viz kap. 3.6. To provedeme příkazy

```
A(hr, :) = 0;
A21 = A(:, hr);
A(:, hr) = 0;
A = A + sparse(hr, hr, 0 * hr + 1, size(A, 1), size(A, 2));
```

které vynulují lokální příspěvky  $a_{ij}^K$  v řádcích a sloupcích s indexy shodnými s indexy uzlů na hranici  $\Gamma_1$ . Zároveň ale zachováme část matice  $\mathbb{A}$  pro výpočet vektoru  $\vec{b}$  a vynulované hodnoty diagonály matice  $\mathbb{A}$  změním na jedna.

Při sestavení vektoru zatížení  $\vec{b}$  nejprve inicializujeme nulový vektor  $b$  o  $M.nbNod$  složkách. Tento vektor vypočítáme podle rovnice (90) ve tvaru

$$b_i = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f \varphi_i dx dy + \int_{\Gamma_2} \psi \varphi_i dS, \quad (124)$$

kde funkce  $\psi$  udává zadanou hustotu tepelného toku na hranici  $\Gamma_2$ , na které je předepsána Neumannova okrajová podmínka. První část vektoru  $\vec{b}$  z rovnice (124) spočítáme pomocí vztahů (45), (69) a (70) jako

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f \varphi_i dx dy &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K f(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy = \\ &= \sum_{K \in \tau_h} |\det \mathbb{B}_K| \int_{\tilde{R}} f(F_K(\hat{x}, \hat{y})) \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \approx \\ &\approx \sum_{K \in \tau_h} |K| \sum_{m=1}^M \omega_m f(F_K(\hat{x}_m, \hat{y}_m)) \hat{\varphi}_i(\hat{x}_m, \hat{y}_m) = \\ &= \sum_{K \in \tau_h} b_i^K. \end{aligned} \quad (125)$$

Prostřednictvím cyklu přes  $M.nbTriangles$  trojúhelníků postupně přičítáme lokální příspěvky  $b_i^K$  z rovnice (125) k  $n$ -tým složkám vektoru  $b$ , které odpovídají indexům uzlů daného trojúhelníka  $K$ . K výpočtu příspěvků  $b_i^K$  je nutné provést transformaci na referenční trojúhelník  $\tilde{R}$ , viz kap. 3.5. To provedeme funkcí `triangleTransform.m`. Příkazem

```
[xm, ym] = triangleTransform(K, xhm, yhm);
```

získáme transformované souřadnice na trojúhelníku  $K$  podle rovnice  $(x_m, y_m) = F_K(\hat{x}_m, \hat{y}_m)$ , které potom dosazujeme do předpisu funkce  $f(x, y)$ . Současně funkcí `prepareQuadrature.m`

```
Q = prepareQuadrature(id);
```

volíme jakou numerickou kvadraturou integrál v rovnici (125) aproximujeme. V případě, že `id = 1` jedná se o kvadraturu s uzly ve vrcholech trojúhelníka  $K$ . V případě, že `id = 2` jedná se o kvadraturu s uzlem v těžišti trojúhelníka  $K$  a pro `id = 3` je zvolena kvadratura s uzly ve středech stran trojúhelníka  $K$ .

Pro druhou část vektoru  $\vec{b}$  z rovnice (124) opět inicializujeme nulový vektor  $bN$  o  $M.nbNod$  složkách. Tuto část tvoří příspěvek od uzlů, které náleží hranici  $\Gamma_2$  s Neumannovou okrajovou podmínkou. Příspěvek spočteme přibližně pomocí numerické kvadratury ve tvaru

$$\int_{\Gamma_2} \psi \varphi_i dS \approx \sum_{S \in \Gamma_2} \frac{1}{2} |S| (\psi(A) \varphi_i(A) + \psi(B) \varphi_i(B)), \quad (126)$$

kde hraniční úsečku značíme  $S$  a její délku jako  $|S|$ . Tentokrát příkazem

```
neu = find(M.LINES(1 : M.nbLines, 3) == 222);
```

vytvoříme vektor  $neu$ , jehož složky jsou čísla řádků z matice  $M.LINES$ , na kterých se nacházejí data o hraničních úsečkách náležících hranici  $\Gamma_2$ . Cyklem přes tyto hraniční úsečky, resp. přes složky vektoru  $neu$  potom postupně přičítáme hodnoty z rovnice (126) k  $n$ -tým složkám vektoru  $bN$ , které odpovídají indexům uzlů dané hraniční úsečky. Analogicky k funkci `getMeshTriangle.m`, kterou získáváme data o trojúhelníku  $K \in \tau_h$ , vytvoříme funkci `getMeshBndrSide.m`, kterou dostaneme data o hraniční úsečce  $S \in \tau_h$ . Příkazem

```
S = getMeshBndrSide(M, k);
```

tak obdržíme pro  $k$ -tou hraniční úsečku  $S \in \tau_h$  několik struktur, mezi které patří např. číslo  $S.dS$ , které udává její délku.

Finální podobu vektoru  $b$  obdržíme příkazy

```
b = b + bN;
b = b - A21 * uD(hr);
b(hr) = uD(hr);
```

kde složky vektoru  $uD$  tvoří hodnoty předepsané Dirichletovou podmínkou, na hranici  $\Gamma_1$ .

Pro zobrazení řešení soustavy  $A \vec{U} = \vec{b}$  reprezentovaného vektorem  $u$

```
u = A\b;
```

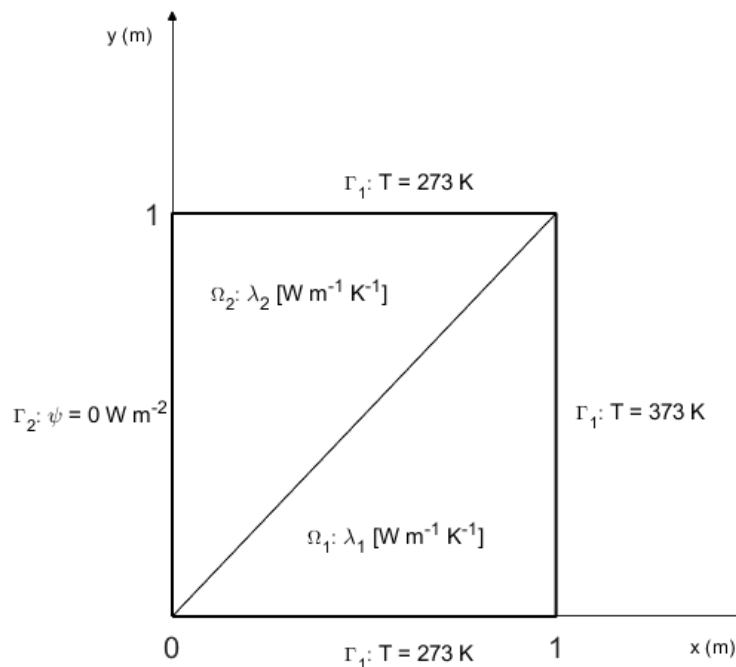
jsme vytvořili funkci `saveVTK.m`, která příkazem

```
saveVTK(M, u, 'reseni.vtk')
```

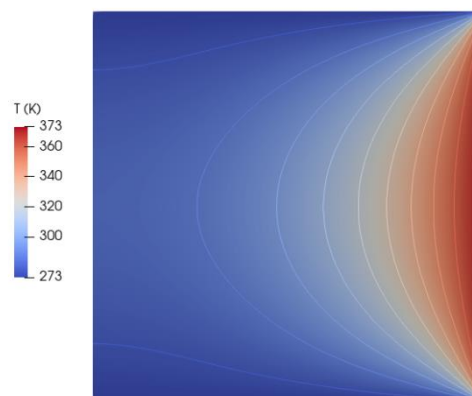
uloží řešení úlohy vedení tepla  $u$  ve formátu *.vtk*. S tímto formátem pracuje program Paraview, ve kterém budeme výsledky zobrazovat.

### 4.2.3 Výsledky

Pro převzatou úlohu rovinného vedení tepla ze článku [17], viz úvod kap. 4.2 uvažujeme na dolní a horní hranici  $\Gamma_1$  oblasti  $\Omega$  teplotu  $T = 273$  K. Na pravé hranici  $\Gamma_1$  předepisujeme teplotu  $T = 373$  K a na levé hranici  $\Gamma_2$  nedochází k přenosu tepla, tedy  $\psi = 0$  W m<sup>-2</sup>, viz obr. 28. Tepelné vodivosti  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  v oblastech  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  volíme pro tuto úlohu v poměru  $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ , který indikuje stupeň heterogenity materiálu. Tuto úlohu tak řešíme pro různé stupně heterogenity. Řešení  $u$  v podobě vektoru, které jsme získali v předcházející kapitole, zobrazujeme v programu Paraview ve formě tepelného pole v oblasti  $\Omega$ , kde je každému uzlu triangulace  $\tau_h$  přiřazena příslušná hodnota z tohoto vektoru. Na obr. 29 – 31 jsou potom zobrazeny tyto tepelné pole.

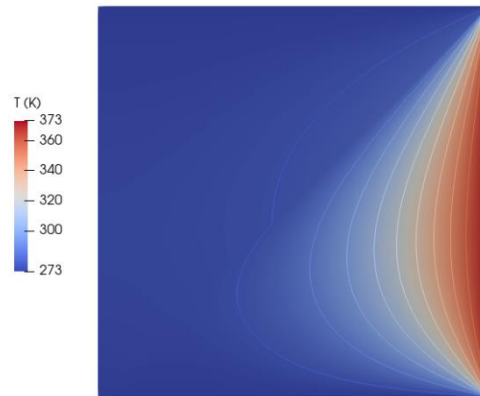
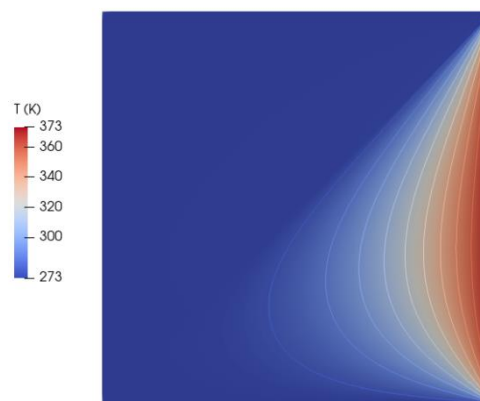


Obrázek 28: Zadání řešené úlohy



Obrázek 29: Tepelné pole pro  $k = 1$

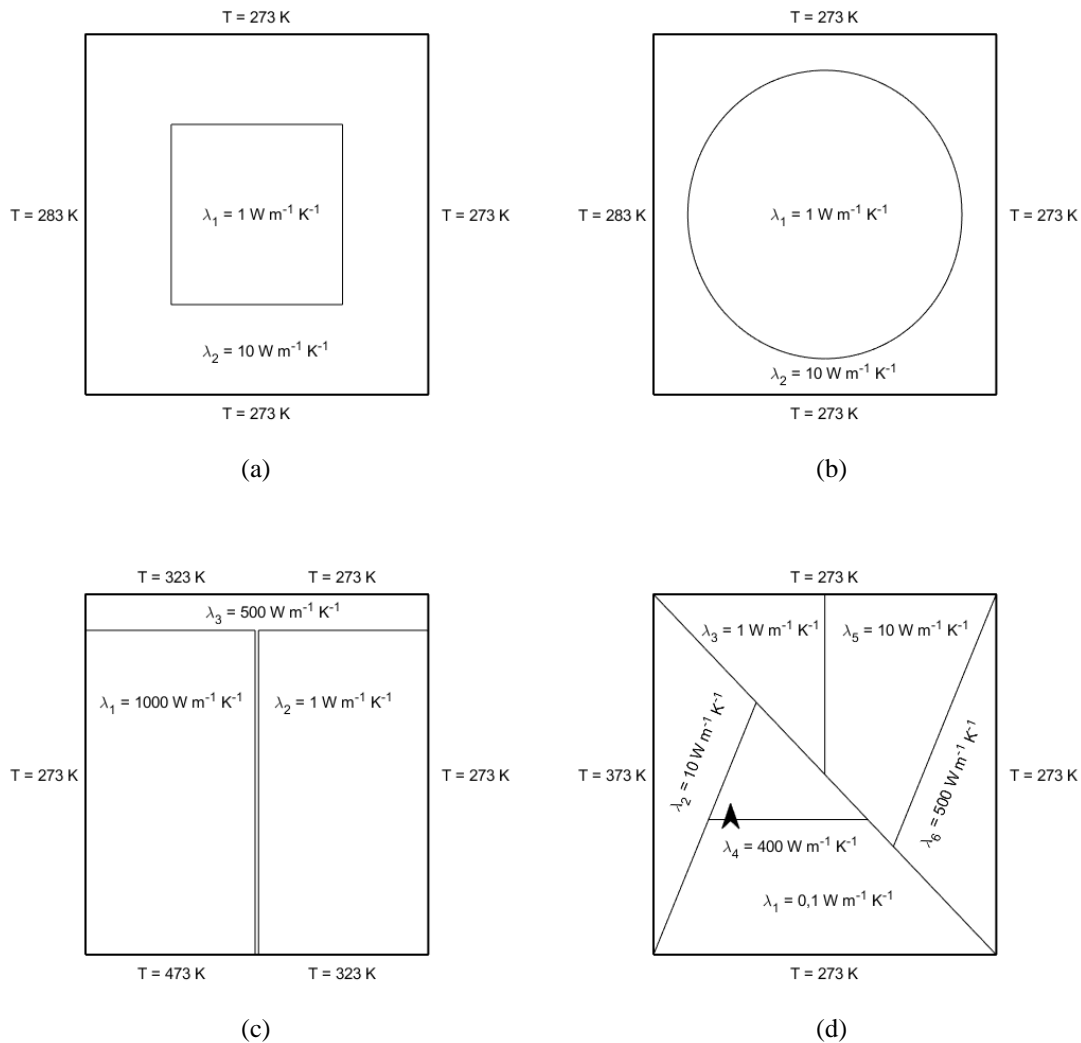



 Obrázek 30: Tepelné pole pro  $k = 10$ 

 Obrázek 31: Tepelné pole pro  $k = 100$ 

Pro větší vypovídající hodnotu jsou v tepelných polích na obr. 29 – 31 vyznačeny izotermy, které spojují místa se stejnou teplotou. Tyto obrázky indikují, že s rostoucím stupněm heterogenity, resp. s rostoucím poměrem tepelných vodivostí  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  nedochází k téměř žádnému přenosu tepla mezi oblastmi  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$ . Tohoto se využívá zejména při tepelných izolacích, kde se používá např. polystyren, který má tepelnou vodivost  $\lambda$  velmi malou, v řádu desetin až setin jednotek a izolovaný materiál, např. zdivo, které má tepelnou vodivost  $\lambda$  v řádu jednotek.

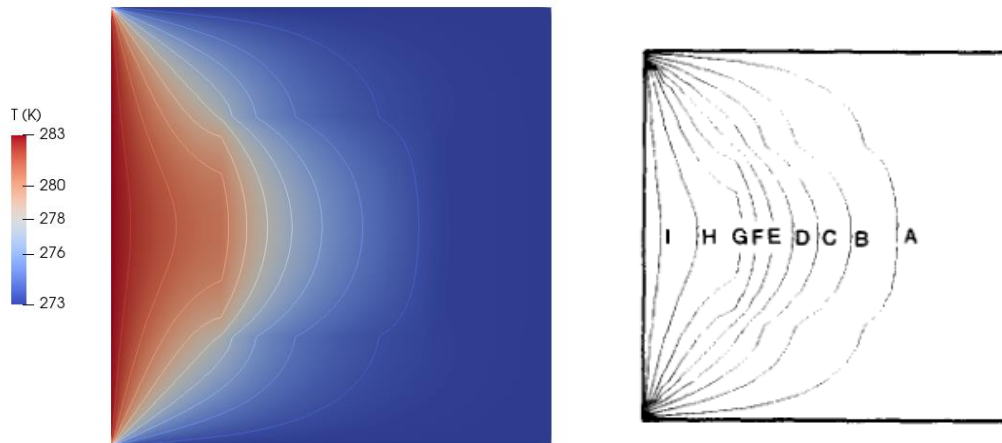
#### 4.2.4 Další úlohy vedení tepla

Stejný postup jako jsme uvedli v kapitolách, 4.2.1 a 4.2.2 otestujeme ještě na několika dalších případech uvedených v článku [20]. Znovu se jedná o rovinné ustálené vedení tepla v oblasti  $\Omega = (0; 1) \times (0; 1)$  m, bez vnitřního zdroje tepla. Heterogenní oblast  $\Omega$  je tentokrát rozdělena různými způsoby na regiony, s odlišnou tepelnou vodivostí  $\lambda$ . Zároveň hranici  $\partial\Omega = \Gamma_1$  tvoří pouze Dirichletova okrajová podmínka, která předepisuje různé teploty  $T$ . Řešené případy stacionárního přenosu tepla v oblasti  $\Omega$  jsou zobrazeny na obr. 32.



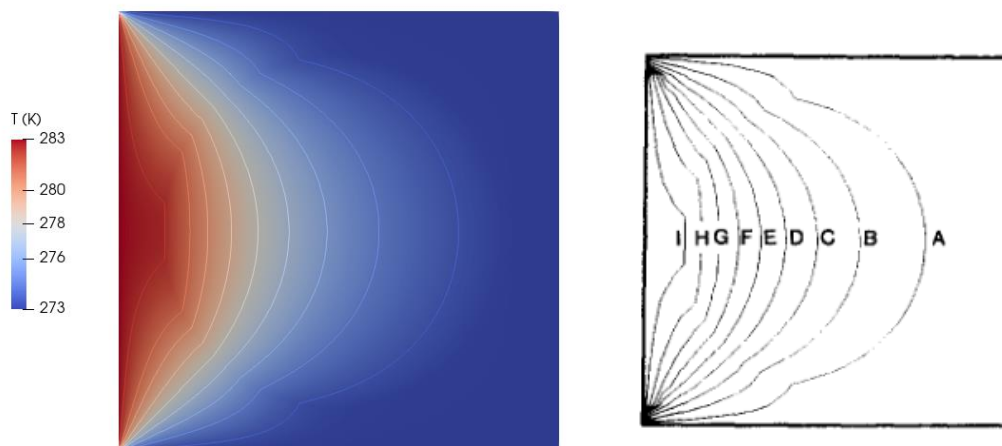
Obrázek 32: Řešené úlohy přenosu tepla v oblasti  $\Omega$

Případ (a) se skládá ze čtvercového plátu s tepelnou vodivostí  $\lambda_2 = 10 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , který má uvnitř další méně vodivou čtvercovou oblast, s tepelnou vodivostí  $\lambda_1 = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Strany tohoto plátu jsou udržovány na teplotě  $T = 273 \text{ K}$ , s jednou stranou na teplotě  $T = 283 \text{ K}$ . Vypočtené tepelné pole je pro tento případ zobrazeno na obr. 33. Na tomto obrázku je zároveň ukázáno řešení stejné úlohy, převzaté z literatury [20] provedené užitím MKP v programu Ansys (software dostupný z [21]). Porovnáním řešení na obr. 33 a dále potom i na obr. 34 a 35 lze říct, že užitím implementace MKP v programu Matlab, dosahujeme téměř shodných výsledků pro vybrané úlohy vedení tepla v heterogenních materiálech s výsledky, které byly vypočteny v programu Ansys. Tento software se v dnešní době používá jako jeden z předních softwarů pro řešení inženýrských simulací.



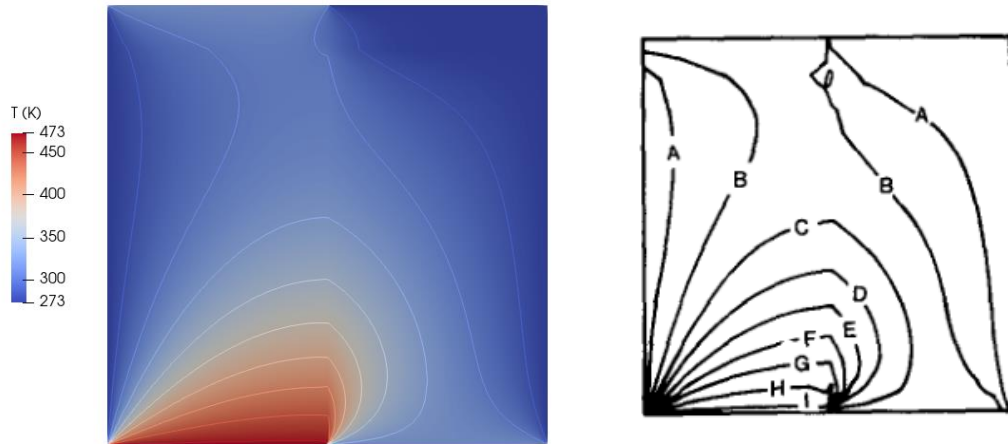
Obrázek 33: Tepelná pole pro případ (a), vypočtená užitím MKP v programu Matlab a v programu Ansys

Případ (b) odpovídá případu (a) s jednou změnou, vnitřní oblast je kruhová, se středem v místě  $[0,5; 0,5]$  m a s poloměrem rovným 0,4 m. Řešení je zobrazeno na obr. 34, který pro tento případ také uvádí tepelné pole, vypočtené užitím MKP v programu Ansys.



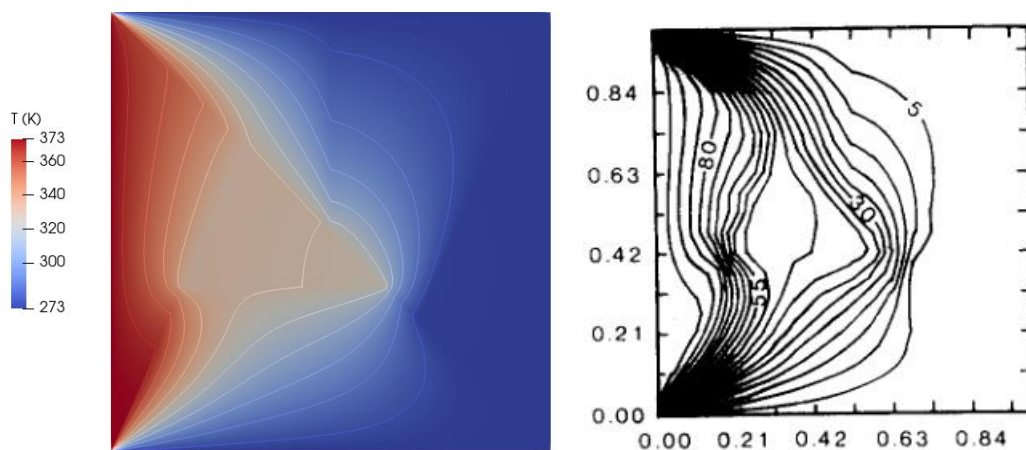
Obrázek 34: Tepelná pole pro případ (b), vypočtená užitím MKP v programu Matlab a v programu Ansys

Případ (c) se skládá ze čtvercového plátu, jehož přibližně půlka má tepelnou vodivost  $\lambda_1 = 1000 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  a druhá půlka tepelnou vodivost  $\lambda_2 = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Plát také obsahuje oblast ve tvaru T s tepelnou vodivostí  $\lambda_3 = 500 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Tloušťka horizontální části této oblasti je rovna 0,1 m, tloušťka vertikální části je rovna 0,01 m. Případ (c) má představovat příklad jednoduché desky plošných spojů (printed circuit board). Teplota na horním okraji plátu je pro jednu polovinu rovna  $T = 323 \text{ K}$  a pro druhou polovinu  $T = 273 \text{ K}$ . Na stranách plátu je teplota udržována na hodnotě  $T = 273 \text{ K}$  a spodní hrana je opět rozdělená na dvě části, jedna s teplotou  $T = 473 \text{ K}$  a druhá s teplotou  $T = 323 \text{ K}$ , viz obr. 32. Vypočtený teplotní profil je pro tento případ zobrazen na obr. 35. Pro porovnání je na tomto obrázku opět uvedeno teplotní pole identického problému, které bylo vypočteno užitím MKP v programu Ansys.



Obrázek 35: Tepelná pole pro případ (c), vypočtená užitím MKP v programu Matlab a v programu Ansys

Poslední případ (d) představuje čtvercový plát s mnoha různými oblastmi, s odlišnými tepelnými vodivostmi  $\lambda$ . Levá strana plátu je udržována při teplotě  $T = 373$  K, zatímco zbývající strany mají teplotu rovnou hodnotě  $T = 273$  K. Výsledný teplotní profil pro tento případ je uveden na obr. 36. Tentokrát je na tomto obrázku k porovnání tepelné pole, ze článku [20] které bylo získáno řešením stejné úlohy vedení tepla metodou konečných diferencí (MKD), k MKD více, viz [10]. Čísla vyznačená u izoterem na obr. 36 jsou hodnoty teploty  $T$  ve stupních Celsia. Z obr. 36 lze pozorovat, že řešení pomocí MKP a MKD jsou téměř stejné.

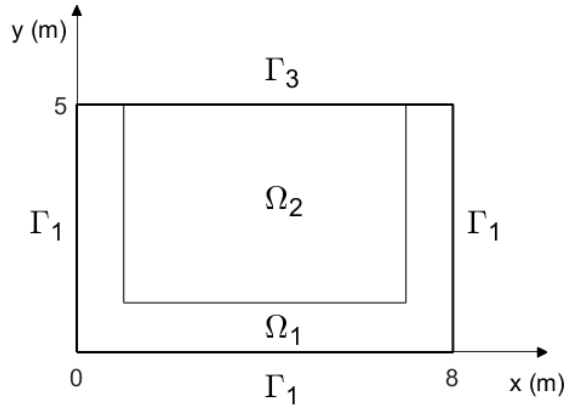


Obrázek 36: Tepelná pole pro případ (d), vypočtená užitím MKP v programu Matlab a užitím MKD

#### 4.2.5 Úloha s okrajovou podmínkou třetího druhu

V této kapitole se budeme zabývat poslední vybranou úlohou stacionární vedení tepla v heterogenním materiálu. Pro tuto úlohu je specifické, že jí řešíme v oblasti s hranicí  $\Gamma_3$ , na které je předepsána okrajová podmínka třetího druhu. Tato podmínka popisuje spojitost tepelných toků při kombinaci vedení a proudění tepla, viz rovnice (14). S výskytem této podmínky je nutné při

odvození slabé formulace provést drobné úpravy, které se také promítnou při algoritmizaci MKP v programu Matlab. Uvažujeme tedy případ uvedený v literatuře [22], jde o rovinné vedení tepla v kompozitním materiálu  $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma_{rozh.} \cup \Omega_2$  o rozměrech  $(0; 8) \times (0; 5)$  m s hranicí  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ , viz obr. 37. Vnitřní oblast  $\Omega_2$  tvoří větší část, a kromě horní strany je od každé strany hranice  $\partial\Omega$  vzdálena 1 m.


 Obrázek 37: Oblast  $\Omega$ 

Při odvození slabé formulace pro tuto úlohu vedení tepla v heterogenním materiálu postupujeme stejným způsobem jako je uveden v kap. 3.8. Změna při odvození nastane ve fázi, kdy pro integrál přes hranici oblasti  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_k$  užitíme v rovnici (88) jednotlivé okrajové podmínky. Zahrnutím okrajové podmínky třetího druhu potom získáme rovnici (88) ve tvaru

$$\int_{\Gamma_3} -\lambda_k \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS + \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \lambda_k \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) \, dx dy = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f v \, dx dy, \quad (127)$$

kde  $n$  reprezentuje jednotkový vektor vnější normály  $\vec{n}$ , na hranici  $\Gamma_3$ . Uplatněním rovnosti (14) pro okrajovou podmínku třetího druhu dostaneme vztah (127) v podobě

$$\int_{\Gamma_3} \alpha (u - u_\infty) v \, dS + \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \lambda_k \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) \, dx dy = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f v \, dx dy, \quad (128)$$

kde  $\alpha$  je součinitel přestupu tepla a  $u_\infty$  je teplota v okolí uvažované oblasti  $\Omega$ . Diskretizací slabé formulace (128) potom obdržíme soustavu  $\mathbb{A} \vec{U} = \vec{b}$  s prvky

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \lambda_k \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy + \int_{\Gamma_3} \alpha \varphi_j \varphi_i \, dS, \\ b_i &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} f \varphi_i \, dx dy + \int_{\Gamma_3} \alpha u_\infty \varphi_i \, dS. \end{aligned} \quad (129)$$

Při algoritizaci MKP přidáme do funkce *femLaplace.m* pro výpočet matice  $\mathbb{A}$  cyklus, který spočítá její nové členy z rovnice (129) podle vztahu

$$\int_{\Gamma_3} \alpha \varphi_j \varphi_i dS = \sum_{S \in \Gamma_3} \int_S \alpha \varphi_j \varphi_i dS = \sum_{S \in \Gamma_3} a_{ij}^S, \quad (130)$$

kde hraniční úsečku značíme  $S$ . Lokální příspěvky  $a_{ij}^S$  vypočítáme přibližně, pomocí numerické kvadratury ve tvaru

$$a_{ij}^S \approx \frac{1}{2} |S| \alpha \left( \varphi_i(A) \varphi_j(A) + \varphi_i(B) \varphi_j(B) \right), \quad (131)$$

kde  $|S|$  označuje délku hraniční úsečky. Opět použijeme uložení *triplet*, při kterém budeme ukládat příspěvky  $a_{ij}^S$  do jednoho pole a indexy uzlů dané hraniční úsečky do zbylých dvou polí zvlášť. Výslednou matici tuhosti  $\mathbb{A}$  potom získáme příkazem

```
A = A + sparse(triplet.I, triplet.J, triplet.VAL, M.nbNod, M.nbNod);
```

Ke složkám vektoru  $\vec{b}$  přičteme nové hodnoty podle numerické kvadratury jako

$$\int_{\Gamma_3} \alpha u_\infty \varphi_i dS \approx \sum_{S \in \Gamma_3} \frac{1}{2} |S| \alpha u_\infty \left( \varphi_i(A) + \varphi_i(B) \right). \quad (132)$$

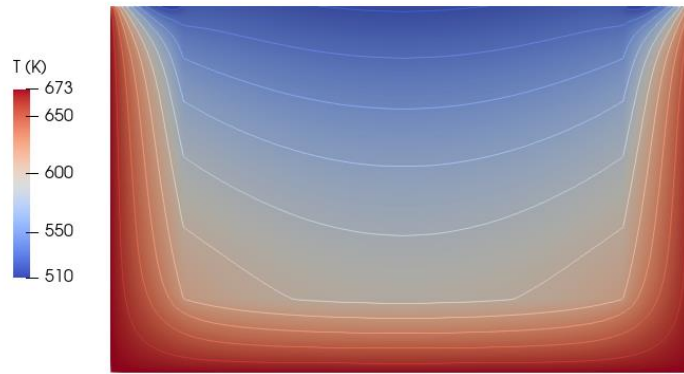
Nejdříve inicializujeme nulový vektor  $bK$  o  $M.nbNod$  složkách. Příkazem

```
kon = find(M.LINES(1 : M.nbLines, 3) == 333);
```

potom vytvoříme vektor *kon*, jehož složky jsou čísla řádků z matice *M.LINES*, na kterých se nacházejí data o hraničních úsečkách náležící hranici  $\Gamma_3$ . Cyklem přes tyto hraniční úsečky, resp. přes složky vektoru *kon* pak postupně přičítáme hodnoty z rovnice (132) k  $n$ -tým složkám vektoru  $bK$ , které odpovídají indexům uzlů dané hraniční úsečky. V případě, že by hranici  $\partial\Omega$  tvořila i hranice  $\Gamma_2$  s Neumannovou okrajovou podmínkou, obdrželi bychom vektor  $b$  součtem

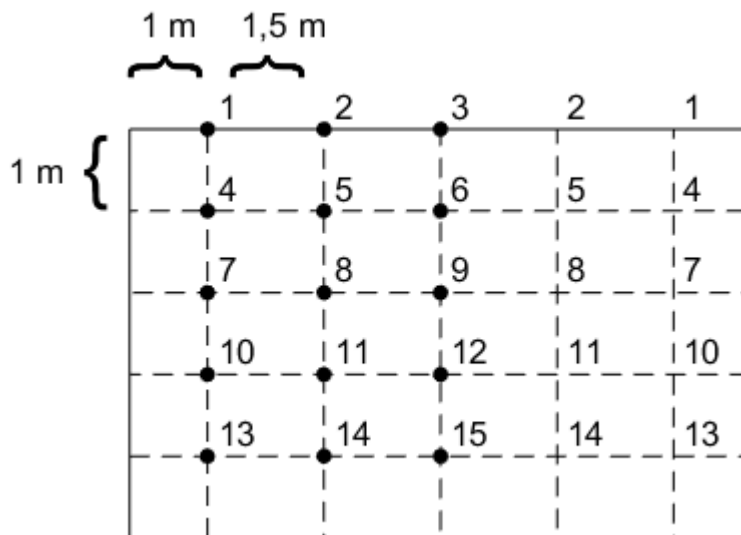
```
b = b + bN + bK;
```

Kompozitní materiál  $\Omega$  je na hranici  $\Gamma_1$  s Dirichletovou okrajovou podmínkou udržován při teplotě  $T = 673$  K. Horní hranice  $\Gamma_3$ , na které je předepsána okrajová podmínka třetího druhu je vystavena konvektivnímu prostředí s teplotou  $T_\infty = 303$  K a součinitelem přestupu tepla  $\alpha$  rovnému hodnotě  $\alpha = 25$  W m<sup>-2</sup> K<sup>-1</sup>. Materiály v oblastech  $\Omega_1$  a  $\Omega_2$  mají tepelné vodivosti  $\lambda_1 = 30$  W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup> a  $\lambda_2 = 200$  W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>. Řešení této úlohy ve formě teplotního pole je vizualizováno na obr. 38.



Obrázek 38: Tepelné pole v oblasti  $\Omega$

Tato úloha vedení tepla je v literatuře [22] řešena metodou konečných diferencí (MKD) a vypočtené hodnoty teploty  $T$  jsou uváděny ve vybraných bodech oblasti  $\Omega$ , vyznačených na obr. 39. Tyto teploty jsou vypsány v tab. 5. K porovnání jsme na obr. 40 vyznačili teplotu  $T$  ve stejných bodech, resp. v odpovídajících uzlech triangulace. Teploty se na tomto obrázku liší o méně než 2,5 K s teplotami uvedenými v tab. 5. Jedinou výjimkou je teplota v prvním bodě, která se od teploty v tabulce liší o 5,5 K. Z citovaného článku [22] se dočteme, že k výpočtu byly při prostorové diskretizaci oblasti  $\Omega$  použity relativně velké inkrementy. Lze tak v případě užití menších inkrementů předpokládat větší schodu s výsledky, které jsme získali prostřednictvím implementované MKP a tím se tak přesvědčit o správné implementaci třetí okrajové podmínky.

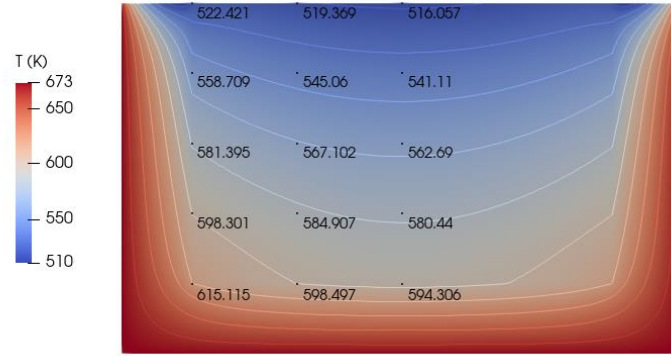


Obrázek 39: Oblast  $\Omega$  s vyznačenými body

Tabulka 5: Teploty ve vyznačených bodech oblasti  $\Omega$  v jednotkách K

$T_1 = 527,956$	$T_2 = 520,637$	$T_3 = 517,454$
$T_4 = 560,334$	$T_5 = 546,921$	$T_6 = 542,844$
$T_7 = 583,067$	$T_8 = 569,057$	$T_9 = 564,610$
$T_{10} = 600,770$	$T_{11} = 586,941$	$T_{12} = 582,423$
$T_{13} = 616,516$	$T_{14} = 600,688$	$T_{15} = 596,220$





Obrázek 40: Tepelné pole v oblasti  $\Omega$ , s vyznačenými teplotami ve vybraných bodech

### 4.3 Nestacionární vedení tepla v heterogenních materiálech

Slabou formulaci pro MKP při rovinném nestacionárním vedení tepla v homogenním materiálu, společně s její časovou diskretizací jsme již uvedli v kap. 3.7. V této kapitole jsme odvozovali slabou formulaci pro úlohu s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou na hranici  $\partial\Omega$  uvažované oblasti  $\Omega$ . Nyní doplníme tuto úlohu o zbylé dvě okrajové podmínky, které byly v této práci uvedeny (Neumannova a podmínka třetího druhu), tedy  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  a budeme ji řešit v heterogenní oblasti  $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma_{rozh.} \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{rozh.} \cup \dots \cup \Omega_N$ . Odvozením slabé formulace pro tuto úlohu v heterogenní oblasti, viz kap. 3.8 potom získáme rovnici (72) ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \rho_k c_{p_k} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx dy - \int_{\Gamma_2} \psi v \, dS + \int_{\Gamma_3} \alpha (u - u_\infty) v \, dS + \\ + \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \lambda_k \left( \sum_{s=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_s} \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) dx dy = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} f v \, dx dy \end{aligned} \quad (133)$$

kde číslo  $N$  značí počet dílčích oblastí  $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_N$ , s odlišnými fyzikálními vlastnostmi, které heterogenní materiál  $\Omega$  tvoří. V rovnici (133) značíme teplotu jako funkci  $u$ , materiálové konstanty  $\rho, c_p, \lambda$  označují hustotu materiálu, měrnou tepelnou kapacitu a tepelnou vodivost,  $\alpha$  a  $u_\infty$  charakterizují konvektivní prostředí u hranice  $\Gamma_3$  jako součinitel přestupu tepla a teplota okolí a funkce  $\psi, f$  popisují v této rovnici hustotu tepelného toku na hranici  $\Gamma_2$  a plošný tepelný zdroj uvnitř oblasti  $\Omega$ .

Prostorovou diskretizaci rovnice (133) provedeme pomocí MKP podle kap. 3.2 s tím, že hledané koeficienty  $U_j$  v uzlech triangulace jsou již funkcemi času, tj.  $U_j = U_j(t)$ . Obdržíme tak soustavu obyčejných diferenciálních rovnic  $\mathbb{M} \vec{U} + \mathbb{A} \vec{U} = \vec{b}$ , viz kap. 3.7 s prvky



$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \varrho_k c_{p_k} \varphi_j \varphi_i \, dx dy, \\
 a_{ij} &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \lambda_k \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx dy + \int_{\Gamma_3} \alpha \varphi_j \varphi_i \, dS, \\
 b_i &= \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} f \varphi_i \, dx dy + \int_{\Gamma_2} \psi \varphi_i \, dS + \int_{\Gamma_3} \alpha u_\infty \varphi_i \, dS.
 \end{aligned} \tag{134}$$

Pro časovou diskretizaci funkce  $\vec{U}$  uijeme z kap. 3.7 aproximaci pomocí zpětné derivace 1. řádu (BDF1) a soustavu obyčejných diferenciálních rovnic zapíšeme jako

$$\mathbb{M} \frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^n}{\Delta t} + \mathbb{A} \vec{U}^{n+1} = \vec{b}, \tag{135}$$

kde funkce  $\vec{U}^{n+1}$  značí neznámou funkci  $\vec{U}$  v čase  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Neznámá funkce  $\vec{U}^{n+1}$  je vzdálena v čase od poslední vypočtené známé funkce  $\vec{U}^n$ , o délku časového kroku  $\Delta t$ . Rovnici (135) lze opakovaně řešit, známe-li hodnoty funkce  $\vec{U}^n$  pro  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  tímto způsobem

$$\vec{U}^{n+1} = \left( \frac{\mathbb{M}}{\Delta t} + \mathbb{A} \right)^{-1} \left( \vec{b} + \frac{\mathbb{M}}{\Delta t} \vec{U}^n \right), \tag{136}$$

kde hodnoty funkce  $\vec{U}^{(0)}$  pro  $n = 0$  jsou předepsány počáteční podmínkou, v čase  $t_0$ .

Pro algoritmizaci časové diskretizace doplníme funkci *femLaplace2.m*. Příkazem

```
Mt = femLaplace2(M)
```

potom získáme matici  $Mt$  s prvky  $m_{ij}$  z rovnice (134). Jelikož užíváme při MKP triangulaci  $\tau_h$  s trojúhelníky  $K$ , viz kap. 3.3 tyto prvky vypočteme jako

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \varrho_K c_{p_K} \varphi_j \varphi_i \, dx dy = \\
 &= \sum_{K \in \tau_h} |\det \mathbb{B}_K| \int_{\hat{K}} \varrho_K c_{p_K} \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \, d\hat{x} d\hat{y} = \\
 &= \sum_{K \in \tau_h} |\det \mathbb{B}_K| \varrho_K c_{p_K} \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) \, d\hat{x} d\hat{y} = \\
 &= \sum_{K \in \tau_h} m_{ij}^K,
 \end{aligned} \tag{137}$$

kde pro trojúhelník  $K \subset \bar{\Omega}_k$  platí  $\varrho_K = \varrho_k, c_{p_K} = c_{p_k}$ . Jednotlivé lokální příspěvky  $m_{ij}^K$  do matice  $Mt$  obdržíme integrací bázových funkcí (jejichž předpis je uveden v kap. 3.5) na referenčním trojúhelníku  $\hat{K}$  ve tvaru

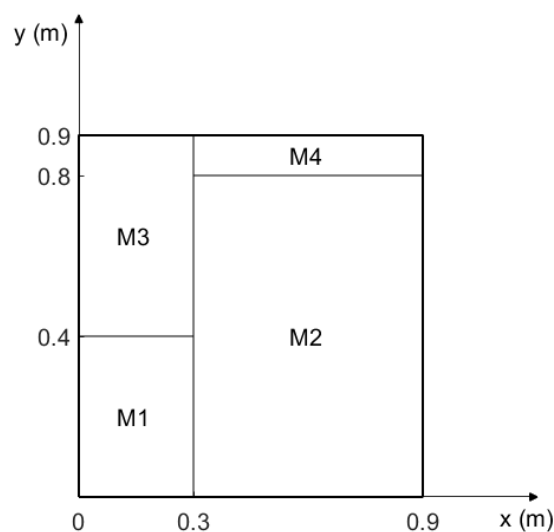
$$m_{ij}^K = |K| \varrho_K c_{pK} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (138)$$

kde indexy sloupců a řádků matice odpovídají indexům uzlů, které tvoří daný trojúhelník  $K \in \tau_h$ . Cyklem přes  $M.nbTriangles$  trojúhelníků tak vytvoříme výslednou matici  $Mt$ , kterou následně používáme při opakovaném řešení soustavy lineárních rovnic (136), příkazy

```
U = zeros(M.nbNod, 1);
dt = 10;
t = 0;
while t < 1000
    Un = inv(Mt/dt + A) * (b + Mt/dt * U);
    U = Un;
    t = t + dt;
end.
```

Prvním příkazem,  $U = \text{zeros}(M.nbNod, 1)$ ; , předepisujeme počáteční podmínku. Počáteční podmínka je v této ukázce ve tvaru  $\vec{U}^{(0)} = 0$ , teplota je tedy v čase  $t = 0$  s v celé oblasti  $\Omega$  nulová. Číslem  $dt$  volíme délku časového kroku  $\Delta t$  a příkazem `while t < 1000` časový interval, ve kterém zkoumáme teplotu oblasti  $\Omega$ .

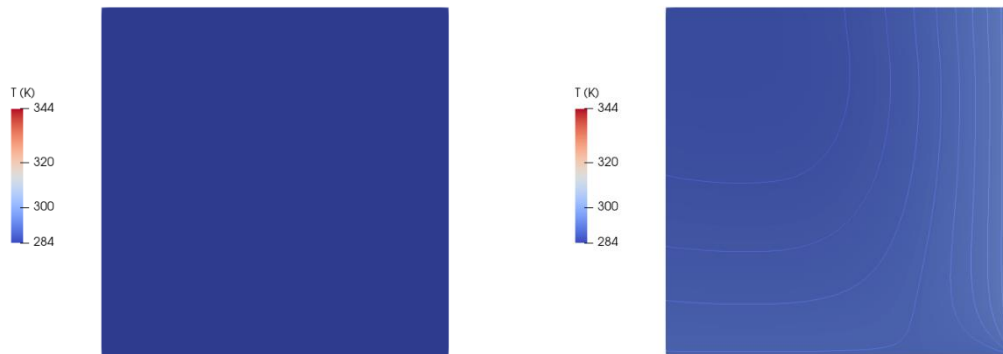
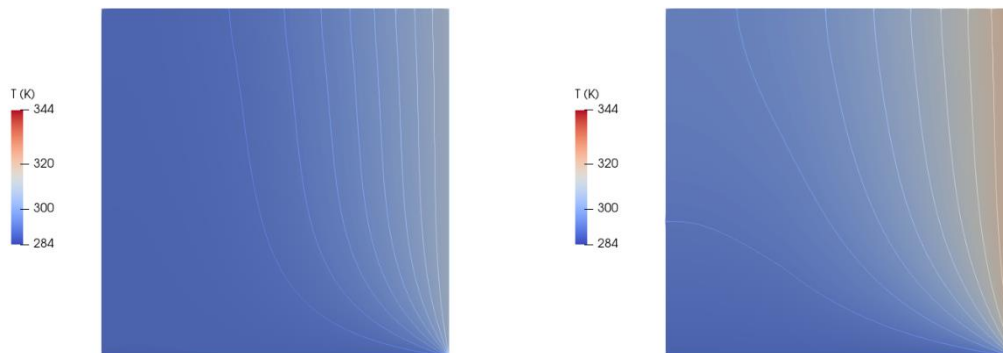
Předcházející postup v této kapitole uplatníme na následující úloze. Uvažujeme těleso  $\Omega = (0; 0,9) \times (0; 0,9)$  m na obr. 41, viz [23] které je tvořeno ze čtyř materiálů. Každá jeho strana je vystavena různým okrajovým podmínkám. Dolní strana tělesa  $\Omega$  je udržována při teplotě  $T = 291$  K, na horní straně je předepsána jednotná hustota tepelného toku  $\psi = 89 \text{ W m}^{-2}$ , kolem levé strany proudí tekutina s teplotou  $T_\infty = 308$  K a součinitelem přestupu tepla  $\alpha = 8 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ , zatímco pravá strana je ohřívána teplotou  $T = (284 + 0,006 \cdot t)$  K, která postupně roste s časem  $t$ . Počáteční teplota tělesa  $\Omega$  je  $T_0 = 284$  K. Úkolem této úlohy je zjistit průběh teploty v tělese  $\Omega$  až do času  $t = 10\,000$  s. Fyzikální vlastnosti materiálů M1, M2, M3 a M4 jsou uvedeny v tab. 6.

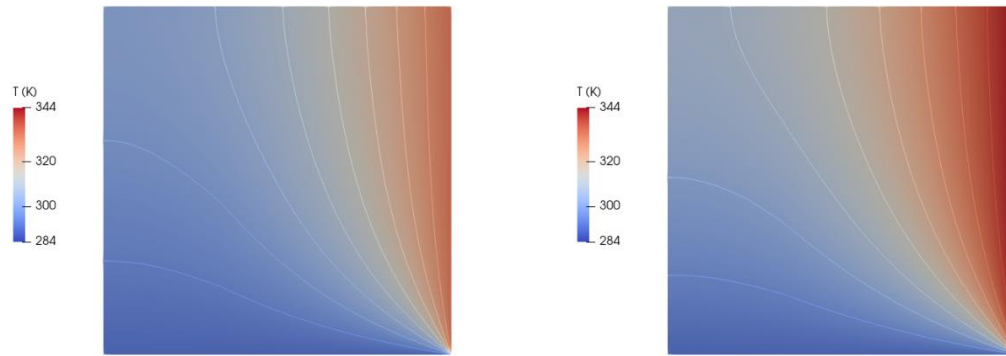

 Obrázek 41: Těleso  $\Omega$

Tabulka 6: Materiálové vlastnosti

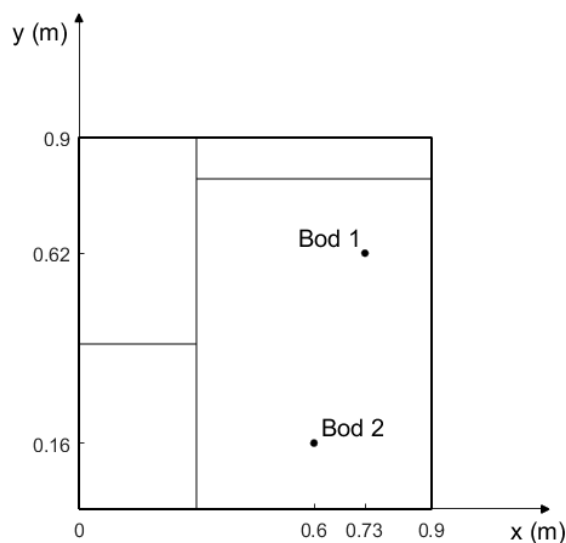
Materiál	Hustota materiálu $\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	Měrná tepelná kapacita $c_p$ [J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]	Tepelná vodivost $\lambda$ [W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
M1	2500	970	180
M2	2700	930	140
M3	2200	710	150
M4	1700	920	140

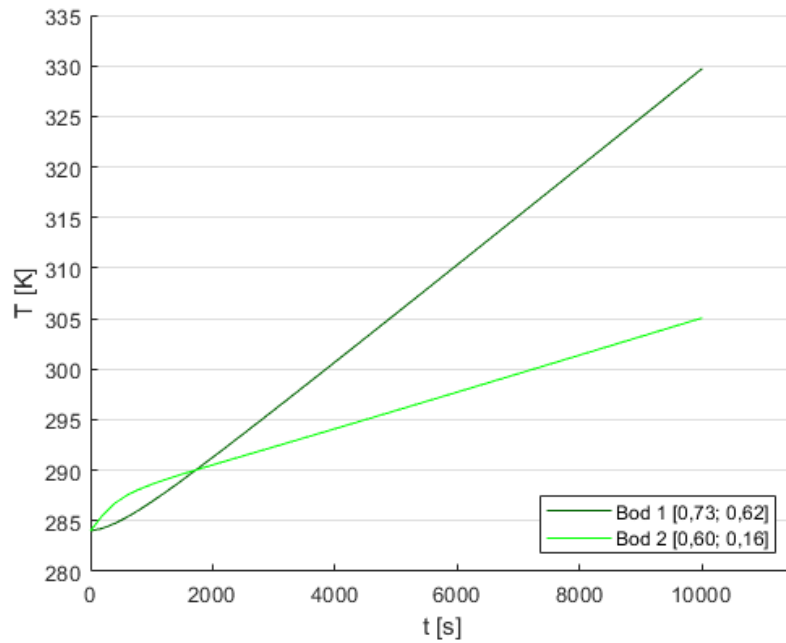
Při řešení úlohy jsme zvolili délku kroku  $\Delta t = 200$  s a hledaný průběh teploty jsme zobrazili na obr. 42 – 44 ve formě tepelného pole v oblasti  $\Omega$  každých 2000 s. Z těchto obrázků je zřejmé, že teplota se v oblasti  $\Omega$  zvyšuje pozvolným tempem, zejména kvůli její pravé hranici, která je vystavena rostoucí teplotě. U této hranice tak pozorujeme v průběhu času nejvýraznější změnu teploty. Současně si lze povšimnout, že teplota na spodní straně oblasti  $\Omega$ , která je udržována na neměnné hodnotě, zpočátku oblast mírně ohřívá, jelikož je o 7 K vyšší než teplota počáteční, později se však tato teplota stává hlavní příčinou pro nerovnoměrný ohřev oblasti.


 Obrázek 42: Tepelná pole v oblasti  $\Omega$  v čase  $t = 0$  s a  $t = 2000$  s

 Obrázek 43: Tepelná pole v oblasti  $\Omega$  v čase  $t = 4000$  s a  $t = 6000$  s

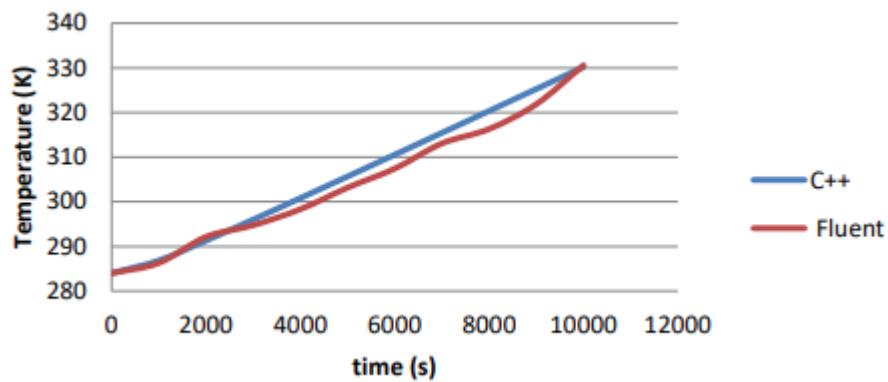

 Obrázek 44: Tepelná pole v oblasti  $\Omega$  v čase  $t = 8000$  s a  $t = 10000$  s

Ověření správnosti řešení pro tuto úlohu provedeme porovnáním výsledků, prezentovaných v literatuře [23]. V tomto článku je úloha nestacionárního vedení tepla řešena numericky, v jazyce C++, ve kterém je implementována metoda konečných objemů (MKO), zároveň je také úloha řešena pomocí simulačního softwaru Ansys Fluent. Výsledky jsou ve článku uvedeny ve formě grafu, na kterém je zobrazena závislost průběhu teploty na čase, v daném bodě oblasti  $\Omega$ . Konkrétně je tato závislost zkoumána ve dvou vybraných bodech, v místech  $[0,73; 0,62]$  m a  $[0,6; 0,16]$  m, vyznačených na obr. 45. Průběhy teploty v čase, v těchto bodech (uzlech), které jsme získali prostřednictvím implementace MKP, jsou zobrazeny v grafu na obr. 46. Výsledky z literatury [23] jsou vyobrazeny na obr. 47 a 48. Komparací těchto obrázků lze shledat, že výsledky, vypočtené pomocí MKP jsou ve velmi dobré shodě s výsledky, dosaženými MKO a simulačním softwarem Ansys Fluent. Pro definitivní úsudek by bylo vhodné výpočty opakovat na uniformních sítích, společně s užitím stejné časové diskretizace a volbou stejné délky kroku  $\Delta t$ .

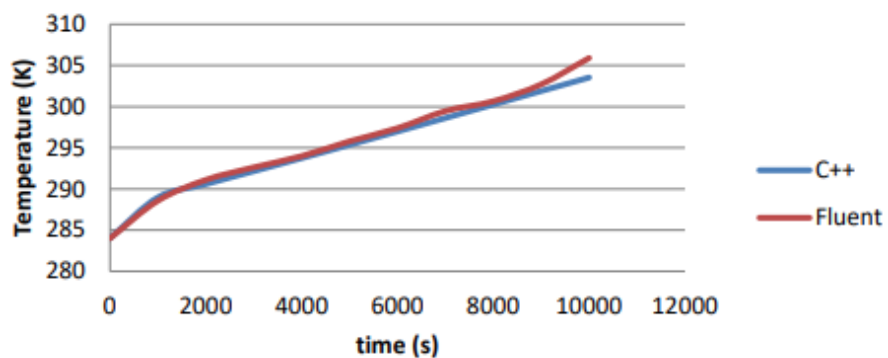

 Obrázek 45: Oblast  $\Omega$ , s vyznačenými body 1 a 2



Obrázek 46: Grafy průběhu teploty v čase, v bodech 1 a 2 z oblasti  $\Omega$



Obrázek 47: Graf průběhu teploty v čase, v bodě 1 [0,73; 0,62] z oblasti  $\Omega$ , převzatý z literatury [23]



Obrázek 48: Graf průběhu teploty v čase, v bodě 2 [0,60; 0,16] z oblasti  $\Omega$ , převzatý z literatury [23]

## Závěr

V této práci jsme se seznámili s úlohou vedení tepla v tuhé látce a uvedli jsme počáteční a okrajové podmínky pro její matematický model. Zároveň jsme rozlišili pojmy stacionární a nestacionární vedení tepla. Abychom mohli úlohu v dané oblasti numericky řešit, byla provedena prostorová diskretizace pomocí metody konečných prvků. Odvozením slabé formulace úlohy vedení tepla v diskrétní oblasti jsme získali soustavu lineárních rovnic, s maticí tuhosti a vektorem zatížení. V dalším postupu jsme se zabývali sestavením matice tuhosti a vektoru zatížení pomocí transformace na referenční trojúhelník.

K diskretizaci oblasti jsme použili program Gmsh, který vytvořil nestrukturovanou síť (triangulaci) s konečným počtem trojúhelníků. Proces tvorby matice tuhosti a vektoru zatížení byl algoritmizován v programu Matlab a vzniklou soustavu lineárních rovnic jsme řešili přímo. Řešení soustavy v podobě vektoru je exportováno do programu Paraview, ve kterém jsou hodnoty teploty, resp. složky vektoru přiřazeny odpovídajícím místům diskrétní oblasti a výsledek úlohy vedení tepla je tak prezentován ve formě teplotního profilu.

V druhé části práce jsme ověřili správnost numerického řešení implementované metody konečných prvků na testovací úloze, u které jsme znali její přesné analytické řešení. Následně byla metoda užita k řešení vybraných úloh rovinného stacionárního vedení tepla v heterogenních materiálech, u kterých jsme současně otestovali implementaci všech uvedených okrajových podmínek v první části práce. Na závěr jsme se pokusili o řešení úlohy rovinného nestacionárního vedení tepla v heterogenním materiálu, kvůli které jsme provedli i diskretizaci časovou.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] SAZIMA, Miroslav, Vladimír KMONÍČEK a Jiří SCHNELLER. *Teplota*. 1. vydání. Praha: SNTL, 1989. Česká matice technická. ISBN 80-030-0043-2.
- [2] ŠESTÁK, Jiří a František RIEGER. *Přenos hybnosti, tepla a hmoty*. Vyd. 3. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-010-2933-6.
- [3] VACEK, Václav a Vojtěch HLAVAČKA. *Přenos tepla a hmoty*. 1. vydání. Praha: České vysoké učení technické, 1990. ISBN 80-01-00200-4.
- [4] DONTOVÁ, Eva. *Matematika I*. Vyd. 3. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-010-2938-7.
- [5] KOLAT, Pavel. *Přenos tepla a hmoty*. 3. vyd. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 2001. ISBN 80-248-0003-9.
- [6] NEUSTUPA, Jiří. *Matematika II*. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2008. ISBN 978-80-01-03961-8.
- [7] SVÁČEK, Petr a Miloslav FEISTAUER. *Metoda konečných prvků*. 1. vydání. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-010-3522-0.
- [8] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 3., nezměn. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1973. Česká matice technická (SNTL). ISBN 80-7196-181-7.
- [9] DUŠEK, František a Daniel HONC. *Matlab a Simulink: úvod do používání*. První. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2005. ISBN 80-719-4776-8.
- [10] SVÁČEK, Petr. *Numerická matematika* [online]. 2021, s. 70 [cit. 2021-06-17]. Dostupné z: [https://marian.fsik.cvut.cz/~svacek/numericka\\_matematika/pdf/lecture\\_notes.pdf](https://marian.fsik.cvut.cz/~svacek/numericka_matematika/pdf/lecture_notes.pdf)
- [11] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody II*. První. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2722-1.
- [12] TALER, Jan a Paweł OĆOŃ. Finite Element Method in Steady-State and Transient Heat Conduction. *Encyclopedia of Thermal Stresses* [online]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2014, , 1604-1633 [cit. 2021-07-23]. ISBN 978-94-007-2738-0. Dostupné z: doi:[https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7\\_897](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_897)
- [13] *Gmsh* [online]. [cit. 2021-06-27]. Dostupné z: <https://gmsh.info/>
- [14] *Matlab* [online]. [cit. 2021-07-05]. Dostupné z: <https://uk.mathworks.com/products/matlab.html>

- [15] *Paraview* [online]. [cit. 2021-06-27]. Dostupné z: <https://www.paraview.org/>
- [16] ROY, Christopher J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. In: *Journal of Computational Physics* [online]. Elsevier, s. 25 [cit. 2021-07-02]. ISSN 0021-9991. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999104004619#!>
- [17] ZHANG, Kun, Cheng-An WANG a Jian-Yu TAN. Numerical study with OpenFOAM on heat conduction problems in heterogeneous media. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* [online]. Elsevier, s. 7 [cit. 2021-05-16]. ISSN 0017-9310. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931017351232>
- [18] *Gmsh Reference Manual*. 2021. Dostupné také z: <http://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.pdf>
- [19] *The Fresh Open Source Software Archive* [online]. 2020 [cit. 2021-07-04]. Dostupné z: [https://fossies.org/linux/gmsh/utis/converters/matlab/load\\_gmsh.m](https://fossies.org/linux/gmsh/utis/converters/matlab/load_gmsh.m)
- [20] GOEL, Narendra, John GERBOC a Gary LEHMANN. A simple model for heat conduction in heterogeneous materials and irregular boundaries. In: *International communications in heat and mass transfer* [online]. Elsevier, s. 12 [cit. 2021-05-17]. ISSN 0735-1933. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0735193392900075>
- [21] *Ansys* [online]. [cit. 2021-07-09]. Dostupné z: <https://www.ansys.com/>
- [22] HOLMAN, Jack P. *Heat Transfer* [online]. Tenth. McGraw-Hill, 2010 [cit. 2021-05-17]. ISBN 978-0-0-7352936-3. Dostupné z: <https://easyengineering.net/heat-transfer-by-holman/>
- [23] ADSUL, Pranita a L. DINESHKUMAR. *On code verification of 2D transient heat conduction in composite wall* [online]. IOP Publishing, , 7 [cit. 2021-07-18]. Dostupné z: doi:<https://doi.org/10.1088/1757-899X/377/1/012128>



## Příloha

K práci je přiložen soubor ve formátu *.rar*, na kterém jsou uloženy všechny zdrojové funkce, které byly vytvořeny při implementaci metody konečných prvků v programu Matlab. Na tyto funkce je v práci odkazováno zejména v kap. 4.2.2 a dále potom v kap. 4.2.5 a 4.3.