

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

Ústav technické matematiky
Obor: bez oboru



Numerické řešení Helmholtzovy
rovnice pomocí metody konečných
prvků

Numerical solution of Helmholtz
equation by finite element method

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Jiří Hubálek
Vedoucí práce: Ing. Jan Valášek
Rok: 2021

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Hubálek** Jméno: **Jiří** Osobní číslo: **483156**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Numerické řešení Helmholtzovy rovnice pomocí metody konečných prvků

Název bakalářské práce anglicky:

Numerical solution of Helmholtz equation by finite element method

Pokyny pro vypracování:

1. Na základě studia literatury formulovat rovnice popisující šíření zvuku a odvodit Helmholtzovu rovnici.
2. Seznámení se s metodou konečných prvků a obecně s principy numerické simulace.
3. Vlastní realizace metody konečných prvků v programovacím prostředí Matlab a její otestování na jednoduchém příkladě.
4. Sestavení programu pro numerickou aproximaci Helmholtzovy rovnice včetně vhodných okrajových podmínek.
5. Použití vyvinutého programu na vybranou úlohu a popis získaného řešení.

Seznam doporučené literatury:

1. P. Sváček, M. Feistauer, Metoda konečných prvků, skripta FS, Vydavatelství ČVUT, 2007.
2. M. Brdička, L. Samek, B. Sopko: Mechanika kontinua, Academia 2005.
3. E. Vitásek, Numerické metody, SNTL 1987.
4. D. Blackstock, Fundamentals of Physical Acoustics, Wiley, 2000.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Jan Valášek, ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **09.04.2021**

Termín odevzdání bakalářské práce: **15.08.2021**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Jan Valášek
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Ing. Jana Valáška a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

.....

Jiří Hubálek

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Janu Valáškoví za odborné vedení, přátelský přístup, čas, který mi věnoval, a cenné rady, které byly nezbytné pro napsání této práce. Dále bych rád poděkoval svým nejbližším za jejich trpělivost a podporu při studiu.

Jiří Hubálek

Název práce:

Numerické řešení Helmholtzovy rovnice pomocí metody konečných prvků

Autor: Jiří Hubálek

Studijní program: Teoretický základ strojího inženýrství

Obor: bez oboru

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Jan Valášek

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt:

Tato bakalářská práce se zabývá použitím Helmholtzovy rovnice při řešení úloh akustiky. Helmholtzova rovnice je odvozena ze základních fyzikálních zákonů a pro její numerické řešení je použita metoda konečných prvků (MKP). U této metody jsou podrobně popsány její základní principy. V programovacím jazyku *MATLAB* je vytvořen program realizující metodu konečných prvků včetně implementace tří různých okrajových podmínek. Funkčnost programu je ověřena na několika úlohách se známým analytickým řešením. Následně jsou pomocí tohoto programu nalezeny rezonanční frekvence zjednodušeného modelu motorového prostoru.

Klíčová slova:

akustika, metoda konečných prvků, Helmholtzova rovnice, Sommerfeldova radiační podmínka, modální analýza, frekvenční přenosová funkce

Title:

Numerical solution of Helmholtz equation by finite element method

Author: Jiří Hubálek

Abstract:

This bachelor's thesis describes a use of the Helmholtz equation in solving acoustic problems. The Helmholtz equation is derived from basic laws of physics, and the finite elements method (FEM) is employed in order to find its numerical solution. Basic principles of the FEM are described in detail. A program which realises the finite element method along with an implementation of three different boundary conditions is created in the *MATLAB* programming language. Its verification is performed by testing it on several problems with known analytical solutions. Subsequently, the program is used to find resonant frequencies of a simplified model of an engine space.

Key words:

acoustics, finite element method, Helmholtz equation, Sommerfeld radiation condition, modal analysis, frequency transfer function

Obsah

Úvod	8
1 Matematicko-fyzikální model	9
1.1 Vlnová rovnice a její odvození	9
1.2 Odvození Helmholtzovy rovnice	10
1.3 Uvažované okrajové podmínky	11
2 Metoda konečných prvků	14
2.1 Modelový problém	14
2.2 Slabá formulace	14
2.3 Diskretizace	15
2.4 Principy metody konečných prvků	16
2.4.1 Přípustná triangulace oblasti	16
2.4.2 Volba báze funkcí	17
2.4.3 Referenční zobrazení	18
2.4.4 Sestavení matice tuhosti	20
2.4.5 Sestavení pravé strany	21
2.4.6 Realizace Dirichletovy okrajové podmínky	22
3 Řešení Helmholtzovy rovnice pomocí metody konečných prvků	23
3.1 Slabá formulace	23
3.2 Diskretizace Helmholtzovy rovnice	24
3.2.1 Sestavení matice hmotnosti	24
3.2.2 Sestavení matice tlumení	25
3.3 Diskrétní řešení Helmholtzovy rovnice	26
3.3.1 Modální analýza	26
3.3.2 Numerický výpočet frekvenční přenosové funkce	27
4 Numerické výsledky	28
4.1 Řešení pomocí modální analýzy	28
4.1.1 Příklad 1 – model kmitající membrány	28
4.1.2 Příklad 2 – model varhanní píšťaly	30
4.2 Řešení pomocí frekvenční přenosové funkce	31
4.2.1 Příklad 3 – druhý model varhanní píšťaly	31
4.2.2 Příklad 4 – model motorového prostoru	34
Závěr	37

Seznam použitých zdrojů

38

Příloha

40

Úvod

Matematický popis mnoha fyzikálních systémů, u kterých nás zajímá především časově harmonické chování, vede často k Helmholtzově parciální diferenciální rovnici druhého řádu. My v této práci budeme tuto parciální diferenciální rovnici eliptického typu používat pro popis úloh akustiky. Mimo jiné se Helmholtzova rovnice pro vektorovou neznámou často vyskytuje v problémech mechaniky anebo elektrodynamiky, viz [9].

Pro náš případ odvodíme Helmholtzovu rovnici z vlnové rovnice pro tlakové fluktuační skalárního pole. Z časové domény, která popisuje změny systému v čase, přejdeme do domény frekvenční, která nám dává informaci o chování systému na dané frekvenci včetně případného fázového posunu. Takto původní hyperbolickou vlnovou rovnici převedeme na Helmholtzovu rovnici, která je eliptická, a vyhneme se nutnosti časové diskretizace.

Pro numerické řešení Helmholtzovy rovnice použijeme metodu konečných prvků (MKP). V 60. letech 20. století tato metoda zažila rozmach s nástupem výpočetní techniky, která umožnila její algoritmizaci, a následně v 70. letech byla vytvořena její základní matematická teorie. Mezi výhody této numerické metody patří především její univerzálnost při řešení inženýrských problémů napříč velkým množstvím odvětví a možnost řešení problémů i pro složité geometrie, což je hlavní úskalí algoritmicky jednodušší metody konečných diferencí (MKD). Mezi nevýhody metody konečných prvků patří hlavně časově náročná příprava vhodných triangulací vyšetřované oblasti.

Tato práce je členěna do čtyř kapitol. V první kapitole je odvozena vlnová rovnice popisující šíření akustických vln. V druhé kapitole jsou popsány základní principy metody konečných prvků na modelové úloze. Ve třetí kapitole je metoda konečných prvků aplikována při numerickém řešení Helmholtzovy rovnice. Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny numerické výsledky několika testovacích příkladů a také řešení obtížné úlohy hledání rezonančních frekvencí modelu motorového prostoru. Závěr obsahuje zhodnocení dosažených výsledků.

Kapitola 1

Matematicko-fyzikální model

V této kapitole se budeme věnovat odvození vlnové rovnice popisující šíření zvuku a jejímu převodu na Helmholtzovu rovnici. Následně uvedeme používané okrajové podmínky.

1.1 Vlnová rovnice a její odvození

Pro odvození vlnové rovnice šíření zvuku vyjdeme ze základních rovnic mechaniky tekutin se zanedbáváním viskozity a bez uvažování zdrojových členů:

- rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.1)$$

kde ρ je hustota a \mathbf{v} je vektor rychlosti.

- Eulerova rovnice

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\operatorname{grad} p, \quad (1.2)$$

kde $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ značí materiálovou derivaci, tj. $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ a p je tlak.

Experimentálně bylo zjištěno, že při průchodu zvukové vlny dochází k adiabatické kompresi vzduchu, viz [10], tzn. nedochází ke sdílení tepla s okolím. Můžeme tedy uvést poslední potřebný vztah, tj. rovnici adiabaty

$$p\rho^{-\kappa} = \operatorname{konst}, \quad (1.3)$$

kde κ je Poissonova konstanta. Při šíření zvukové vlny dochází k fluktuaci hustoty a tlaku. Celkovou hustotu a tlak můžeme psát ve tvaru

$$p = p_0 + p'(x, t), \quad \rho = \rho_0 + \rho'(x, t), \quad (1.4)$$

kde p_0 a ρ_0 jsou rovnovážné (konstantní) hodnoty tlaku a hustoty, p' a ρ' jsou jejich změny způsobené průchodem zvukové vlny, kdy předpokládáme

$$|p'(x, t)| \ll p_0, \quad |\rho'(x, t)| \ll \rho_0. \quad (1.5)$$

Zároveň předpokládáme, že tekutina je v klidu a pohyb je způsoben pouze průcho- dem zvukové vlny, viz [4]. Celkovou rychlost můžeme tedy psát ve tvaru

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v}'(x, t). \quad (1.6)$$

Pokud do rovnice (1.3) dosadíme vztah (1.4), zderivujeme ji podle času a zanedbáme nelineární členy, dostáváme

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad (1.7)$$

kde $c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}}$ je rychlost šíření zvuku pro model ideálního plynu. Dosazením vztahů (1.4) a (1.7) do rovnic (1.1) a (1.2) a zanedbáním nelineárních členů získáváme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \quad (1.8)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\operatorname{grad} p'. \quad (1.9)$$

Tato soustava parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu (1.8) a (1.9) pro fluktuace tlaku p' a akustickou rychlost \mathbf{v}' popisuje šíření akustické vlny v ideálním plynu. Nyní z ní odvodíme jednu skalární parciální diferenciální rovnici druhého řádu, tj. vlnovou rovnici. Tím popis akustiky výhodně zredukujeme o jednu vektorovou proměnnou.

Rovnici (1.8) parciálně zderivujeme podle času

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = 0. \quad (1.10)$$

Použijeme operátor divergence na obě strany rovnice (1.9) a dostáváme tvar

$$\rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} p', \quad (1.11)$$

kde $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ je Laplaceův operátor Δ . Za výraz $\rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}$ v rovnici (1.10) dosadíme výraz z rovnice (1.11), upravíme a dostaneme výsledný tvar vlnové rovnice pro tlakové fluktuace

$$\Delta p' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

1.2 Odvození Helmholtzovy rovnice

Uvažujme nyní řešení rovnice (1.12) pro časově harmonické skalární pole ve speciální periodické podobě, viz [2],

$$p'(x, t) = \operatorname{Re}\{\hat{P}(x, \omega)e^{-j\omega t}\}, \quad (1.13)$$

kde $\operatorname{Re}(\cdot)$ značí reálnou část, $\hat{P}(x, \omega)$ je komplexní funkce závisující na prostorové proměnné x a na kruhové frekvenci ω a pomocí j označujeme imaginární jednotku.

Tento komplexní tvar řešení má výhodu, že komplexní funkce $\hat{P}(x, \omega)$ obsahuje i informaci o fázovém posunu vlnění, což zjednodušuje další postup řešení. Derivací vztahu (1.13) podle času získáme

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -j\omega \hat{P} e^{-j\omega t} \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\omega^2 \hat{P} e^{-j\omega t}. \quad (1.14)$$

Derivací vztahu podle prostorových proměnných získáme

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \Delta \hat{P} e^{-j\omega t}. \quad (1.15)$$

Dosazením vztahů (1.14) a (1.15) do vlnové rovnice (1.12) dostáváme

$$\Delta \hat{P} e^{-j\omega t} = -\frac{1}{c^2} \omega^2 \hat{P} e^{-j\omega t}. \quad (1.16)$$

Rovnici (1.16) upravíme do tvaru

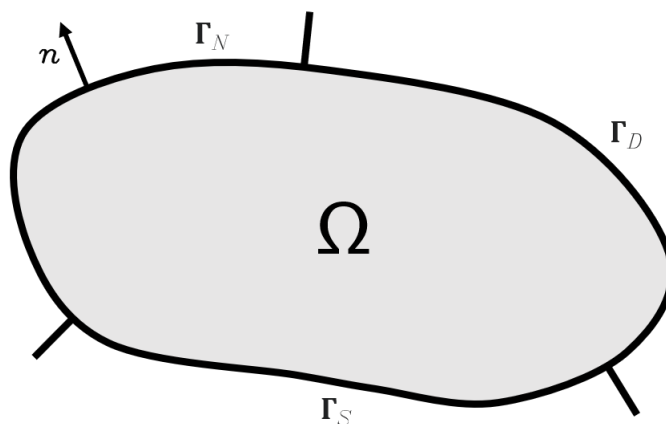
$$\Delta \hat{P} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{P} = 0. \quad (1.17)$$

Tato eliptická parciální diferenciální rovnice (1.17) se nazývá Helmholtzova rovnice. V této práci budeme Helmholtzovu rovnici uvažovat s obecným akustickým zdrojem \hat{f} na pravé straně, tj. ve tvaru

$$\Delta \hat{P} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{P} = \hat{f}(x, \omega). \quad (1.18)$$

1.3 Uvažované okrajové podmínky

Pro jednoduchost se budeme zabývat řešením úlohy (1.18) ve dvourozměrné oblasti $\Omega \in R^2$, viz obr. 1.1. Její hranice je složena ze tří disjunktních částí Γ_D , Γ_N a Γ_S , tedy $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_S$. Tyto části hranice v závislosti na volbě okrajových podmínek mohou být nenulové, nebo i prázdné množiny v případě, kdy danou okrajovou podmínku nepředepisujeme.



Obrázek 1.1: Oblast Ω s hranicemi Γ_D , Γ_N a Γ_S a zobrazenou vnější normálou \mathbf{n} .

Jelikož rovnice (1.18) nezávisí na čase, tak pro kompletní matematickou formulaci ji doplníme pouze o okrajové podmínky na celé hranici oblasti $\partial\Omega$. Zde budeme uvažovat tyto okrajové podmínky¹:

- **Dirichletova okrajová podmínka**

Dirichletova okrajová podmínka předepisuje určitou hodnotu neznámé funkce na části hranice oblasti. My ji zde uvažujeme ve tvaru

$$\hat{P}(x, \omega) = 0 \quad \text{pro } x \in \Gamma_D. \quad (1.19)$$

Tato podmínka se typicky používá pro předepsání akusticky otevřeného konce vlnovodu. Je plně odrazivá, odraz nastává s opačnou fází, viz [2].²

- **Neumannova okrajová podmínka**

Tato okrajová podmínka předepisuje hodnotu derivace hledaného řešení ve směru normály na hranici Γ_N . Tuto okrajovou podmínku uvažujeme ve tvaru

$$\frac{\partial \hat{P}(x, \omega)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{pro } x \in \Gamma_N, \quad (1.20)$$

kde \mathbf{n} je jednotková vnější normála k hranici $\partial\Omega$. Využití nachází při předepisování akusticky uzavřeného konce vlnovodu jako modelu dokonale odrazivé zdi. Akustické vlnění se zde odráží se stejnou fází, viz [2].

- **Sommerfeldova radiační podmínka**

Pro úlohy na neomezené oblasti Ω se často používá Sommerfeldova radiační podmínka, viz [15],

$$\lim_{\|x\|_E \rightarrow \infty} \|x\|_E^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial \hat{P}(x, \omega)}{\partial \|x\|_E} - j \frac{\omega}{c} \hat{P}(x, \omega) \right) = 0, \quad (1.21)$$

kde d značí počet dimenzí daného prostoru a $\|\cdot\|_E$ je Eukleidovská norma. Symbolem $\frac{\partial}{\partial \|x\|_E}$ rozumíme parciální derivaci podle proměnné r při transformaci do sférických souřadnic, viz [15]. Tato podmínka vynucuje, aby se z nekonečna nešířilo vlnění a tím bylo zabráněno i zpětným odrazům vln v nekonečnu. Při numerickém řešení, kdy máme pouze omezenou oblast Ω s hranicí $\partial\Omega$, budeme pro náš případ uvažovat nejjednodušší absorpční okrajovou podmínku ve tvaru

$$\frac{\partial \hat{P}(x, \omega)}{\partial \mathbf{n}} - j \frac{\omega}{c} \hat{P}(x, \omega) = 0 \quad \text{pro } x \in \Gamma_S. \quad (1.22)$$

Poznamenejme, že tato absorpční okrajová podmínka (1.22) je aplikovatelná bez omezení na 1D úlohu. Omezení nastává při aplikaci na úlohy 2D a výše.

¹Okrajové podmínky zde uvádíme pouze ve tvaru pro frekvenční doménu. Pro případ časové domény by se odlišovala pouze Sommerfeldova okrajová podmínka, viz [6].

²Předepsáním Dirichletovy okrajové podmínky ve tvaru (1.19) lze chápat jako odraz od nekonečně měkkého média, viz [2].

Je to z toho důvodu, že tato okrajová podmínka předepsaná na části hranice Γ_S pohlcuje při průchodu pouze složku vln rovnoběžnou s vnější normálou \mathbf{n} , tj. vlny kolmé na hranici Γ_S . Zbývající složka, tj. tečná složka, se odráží. To znamená, že Sommerfeldovu okrajovou podmínku ve tvaru (1.22) můžeme použít pouze za předpokladu, když všechny dopadající vlny na část hranice Γ_S budou kolmé. Pro absorpci vln dopadajících na hranici v libovolném směru je potřeba zvolit nějakou pokročilejší numerickou metodu, viz [6] nebo [12].

Kapitola 2

Metoda konečných prvků

V této kapitole vysvětlíme základní principy metody konečných prvků na modelové úloze. Tu nejprve převedeme do slabé formulace a následně ji budeme diskretizovat pomocí metody konečných prvků.

2.1 Modelový problém

Řešme modelový problém v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, o které předpokládáme, že je omezená s Lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$,

$$-\Delta u = f(x, y) \quad \text{pro } (x, y) \in \Omega, \quad (2.1)$$

spolu s předepsanou Dirichletovou a Neumannovou okrajovou podmínkou na hranici $\partial\Omega$, kde $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$,

$$u(x, y) = u_D \quad \text{pro } (x, y) \in \Gamma_D, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \mathbf{n}} = u_N \quad \text{pro } (x, y) \in \Gamma_N. \quad (2.3)$$

Okrajová úloha (2.1) se nazývá Poissonova¹. Tato stacionární úloha může popisovat např. deformaci membrány, rozložení teploty, problémy akustiky a elektrostatiky.

2.2 Slabá formulace

Rovnici (2.1) vynásobíme testovací funkcí $v \in V = \{f \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$, kde prostor $H^1(\Omega)$ je Sobolevův prostor na množině Ω , viz [17]. Ten je tvořen takovými funkcemi f z Lebesgueova prostoru $L^2(\Omega)$, které mají navíc integrovatelné s kvadrátem i první parciální derivace, tj. $\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx < +\infty$. Rovnost $f = 0$ na Γ_D je myšlena ve smyslu stop, viz [17]. Násobením funkcí v dostáváme

$$-\Delta uv = fv. \quad (2.4)$$

¹Speciálním případem Poissonovy okrajové úlohy je Laplaceova okrajová úloha, pro kterou platí: $f(x, y) = 0$.

Člen Δu můžeme vyjádřit pomocí Einsteinovy sumační konvence, můžeme tedy psát $\Delta u = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$, kde provádíme sumaci přes opakující se indexy, tj. zde přes $i = 1, 2$. Následně rovnici (2.4) zintegrujeme přes zadanou oblast Ω

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.5)$$

Na první člen rovnice (2.5) aplikujeme Greenovu větu, viz [17],

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (2.6)$$

kde

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dS = - \int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dS - \int_{\Gamma_N} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}}_{u_N} v \, dS. \quad (2.7)$$

Jelikož je na části hranice Γ_D testovací funkce v rovna nule, je i $\int_{\Gamma_D} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v \, dS = 0$. Nakonec dostáváme výslednou rovnici ve tvaru

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N v \, dS. \quad (2.8)$$

Slabým řešením Poissonovy úlohy (2.1) nazveme takovou funkci $u \in H^1(\Omega)$, pro kterou platí rovnice (2.8) pro libovolnou funkci $v \in V$ a zároveň funkce u splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku (2.2).

2.3 Diskretizace

Z důvodu numerického řešení pomocí metody konečných prvků je nutné slabou formulaci (2.8) převést do diskrétní podoby. Nekonečně-dimenzionální prostor V testovacích funkcí nahradíme prostorem V_h s konečnou dimenzí N_h , kde $V_h \subset V$. V tomto prostoru V_h hledáme aproximační řešení u_h rovnice (2.8) tak, aby platilo

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N v_h \, dS \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.9)$$

Prostor V_h má bázi $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}$, a proto můžeme hledané řešení rovnice (2.9) zapsat ve tvaru

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \varphi_j(x), \quad (2.10)$$

kde $\alpha_j \in \mathbb{R}$ jsou neznámé váhové koeficienty. Protože i libovolnou funkci $v_h \in V_h$ lze zapsat jako lineární kombinaci bázevých funkcí, můžeme za testovací funkci v_h v rovnici (2.9) postupně volit bázevé funkce, tj. pro volbu $v_h = \varphi_i, i = 1, 2, \dots, N_h$ dostáváme

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N \varphi_i \, dS. \quad (2.11)$$

Poté do rovnice (2.11) dosadíme vztah (2.10) a upravíme do tvaru

$$\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx}_{k_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N \varphi_i \, dS}_{b_i}. \quad (2.12)$$

Tuto soustavu rovnic (2.12) můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbb{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}, \quad (2.13)$$

kde

$$\mathbb{K} = (k_{ij})_{i,j=1}^{N_h}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)_{j=1}^{N_h}, \quad \mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^{N_h}. \quad (2.14)$$

Matice \mathbb{K} je často nazývána maticí tuhosti, je symetrická a pozitivně definitní, viz [17].

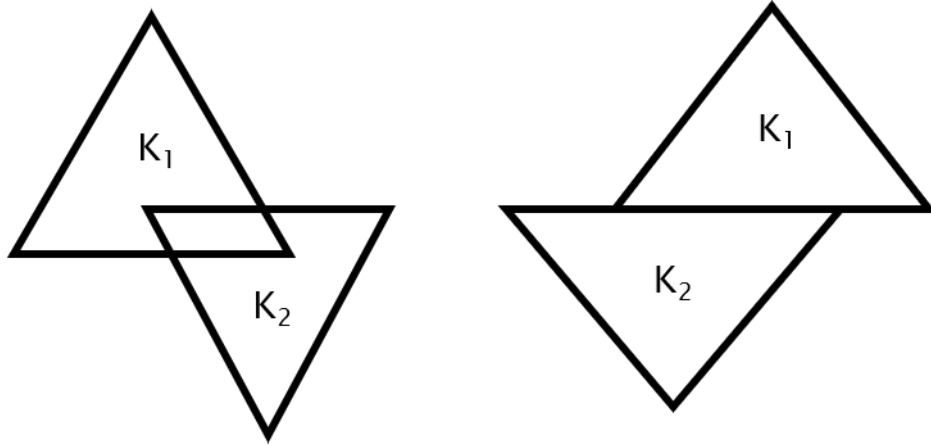
2.4 Principy metody konečných prvků

Nyní vysvětlíme volbu bázevých funkcí, transformaci pomocí referenčního zobrazení a následné sestavení matice tuhosti a vektoru pravé strany.

2.4.1 Přípustná triangulace oblasti

Dále budeme pro jednoduchost předpokládat, že oblast Ω je omezená a polygonální. Její triangulaci τ_h budeme označovat jako přípustnou, jestliže platí:

1. Triangulace τ_h je tvořena konečným počtem uzavřených trojúhelníků K .
2. $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \tau_h} K$.
3. Pro trojúhelníky $K_i, K_j \in \tau_h$, kde $i \neq j$, platí jedna z následujících možností, viz obr. 2.1:
 - $K_i \cap K_j = \emptyset$.
 - $K_i \cap K_j$ je společný vrchol.
 - $K_i \cap K_j$ je společná strana trojúhelníků K_i a K_j .



Obrázek 2.1: Příklady nepřipustných triangulací.

Systém triangulací $\{\tau_h\}_{h \in (0, h_0)}$ oblasti Ω dále nazýváme regulární, jestliže existuje konstanta $c > 0$ a zároveň splňuje podmínku

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq c \quad \text{pro všechna } K \in \tau_h, h \in (0, h_0), \quad (2.15)$$

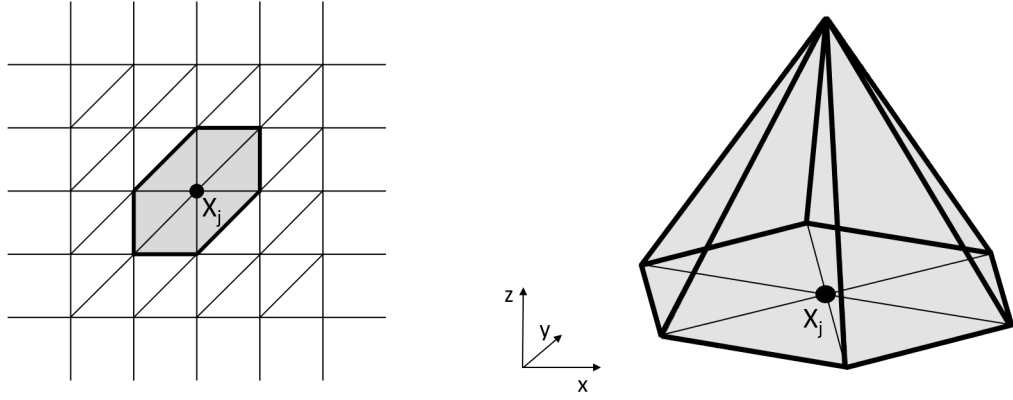
kde ρ_K má význam poloměru největší vepsané kružnice do trojúhelníku K a h_K označuje délku nejdelší strany trojúhelníku K .

2.4.2 Volba báze funkcí

Pro lepší řešitelnost soustavy (2.13) budeme požadovat, aby matice tuhosti \mathbb{K} byla maticí řídkou, tj. obsahovala většinu prvků nulových. Tohoto požadavku dosáhneme vhodnou volbou báze funkcí. Pro jednoduchost se omezíme na po částech lineární báze funkce, tj. $V_h = \{v \in C(\Omega); v|_K \in P_1(K) \forall K \in \tau_h\}$, kde $C(\Omega)$ je množina spojitých funkcí na Ω a $P_1(K)$ je množina polynomů nejvýše prvního stupně na K . Tyto báze funkce volíme ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi_j(X_j) &= 1, \\ \varphi_j(X_i) &= 0, \quad \text{pro } j \neq i, \end{aligned} \quad (2.16)$$

kde X_j jsou vrcholy dané triangulace. Při takové volbě báze funkcí dosáhneme toho, že nenulová funkční hodnota báze funkce φ_j příslušící vrcholu X_j bude pouze ve vrcholu X_j a ve všech ostatních vrcholech X_i bude funkce φ_j nulová, viz obr. 2.2. Na trojúhelníku s vrcholem X_j klesá báze funkce lineárně až k hodnotě nula, které je dosaženo právě ve zbývajících dvou vrcholech X_i . V ostatních trojúhelnících, ve kterých neleží vrchol X_j , je funkční hodnota φ_j nulová, viz obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Vlevo je vyznačen nosič bázové funkce φ_j příslušící vrcholu X_j , vpravo je zobrazen její graf.

2.4.3 Referenční zobrazení

Protože v této práci při numerické realizaci používáme nestrukturovanou triangulaci oblasti Ω , byl by přímý výpočet integrálů daných rovnic (2.12) značně složitý. Využijeme tedy bijektivní afinní transformaci referenčního trojúhelníku s vrcholy $\hat{A} = [0, 0]$, $\hat{B} = [1, 0]$ a $\hat{C} = [0, 1]$ na libovolný trojúhelník s vrcholy $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ a $C = [c_1, c_2]$, viz obr. 2.3. Tuto transformaci můžeme zapsat pomocí lineárního zobrazení $F_K : \hat{K} \mapsto K$ ve tvaru

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{B}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K, \quad (2.17)$$

kde prvky matice \mathbb{B}_K a vektoru \mathbf{b}_K lze jednoduše odvodit dosazením do předpisu (2.17), viz [18]. Matice \mathbb{B}_K a vektor \mathbf{b}_K jsou tedy ve tvaru

$$\mathbb{B}_K = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{K11} & b_{K12} \\ b_{K21} & b_{K22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_K = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Rozepsáním získáme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbb{B}_K \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Pokud je matice \mathbb{B}_K regulární, můžeme pro lineární zobrazení F_K zavést jeho inverzní zobrazení $F_K^{-1} : K \mapsto \hat{K}$ ve tvaru

$$F_K^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}_K^{-1} \mathbf{x} - \mathbb{B}_K^{-1} \mathbf{b}_K, \quad (2.20)$$

tedy

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = F_K^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}_K^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \mathbb{B}_K^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Matici \mathbb{B}_K^{-1} můžeme určit podle následujícího vzorce

$$\mathbb{B}_K^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{B}_K} \begin{pmatrix} c_2 - a_2 & a_2 - b_2 \\ a_1 - c_1 & b_1 - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{11} & b^{12} \\ b^{21} & b^{22} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

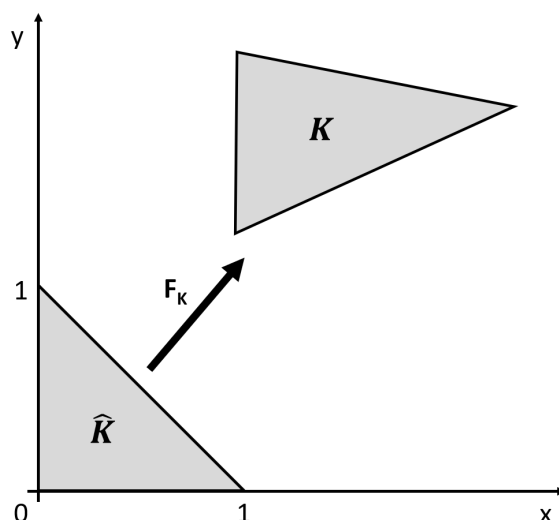
Dále při substituci v integrálech budeme potřebovat Jakobián lineární transformace (2.17), který vypočteme jako

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial (b_{K11}\hat{x} + b_{K12}\hat{y} + a_1)}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial (b_{K11}\hat{x} + b_{K12}\hat{y} + a_1)}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial (b_{K21}\hat{x} + b_{K22}\hat{y} + a_2)}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial (b_{K21}\hat{x} + b_{K22}\hat{y} + a_2)}{\partial \hat{y}} \end{vmatrix} = \det \mathbb{B}_K. \quad (2.23)$$

Lze ukázat, viz [17], že

$$|\det \mathbb{B}_K| = \frac{|K|}{|\hat{K}|}, \quad (2.24)$$

kde $|K|$ a $|\hat{K}|$ značí obsah trojúhelníků K a \hat{K} .



Obrázek 2.3: Bijektivní afinní transformace referenčního trojúhelníku \hat{K} na libovolný trojúhelník K .

Jak jsme uvedli v odstavci 2.4.2, tak pro libovolný trojúhelník K požadujeme, aby funkční hodnota bázové funkce φ_j příslušící vrcholu X_j byla rovna hodnotě jedna ve vrcholu X_j a lineárně klesala až ke zbylým dvěma vrcholům, ve kterých nabývá hodnoty nula. Totéž musí platit i pro referenční trojúhelník \hat{K} , na kterém zavedeme bázové funkce

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Bázové funkce příslušící referenčnímu trojúhelníku \hat{K} transformujeme na bázové funkce příslušící libovolnému trojúhelníku K předpisem

$$\varphi_j(x, y) = \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}), \quad (2.26)$$

kde platí $(x, y) = F_K(\hat{x}, \hat{y})$. Parciálně zderivujeme vztah (2.26) podle pravidla pro derivaci složené funkce

$$\left(\frac{\frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y}} \right) = \left(\frac{\frac{\partial \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}}{\frac{\partial \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y}} \right). \quad (2.27)$$

Použijeme vztah (2.21), který dosadíme do (2.27) a následně upravíme do tvaru

$$\left(\frac{\frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi_j(x, y)}{\partial y}} \right) = \left(\frac{\frac{\partial \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} b_{11} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} b_{21}}{\frac{\partial \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}} b_{12} + \frac{\partial \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{y}} b_{22}} \right), \quad (2.28)$$

tedy

$$(\nabla \varphi_j(x, y))^T = (\mathbb{B}_K^{-1})^T \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \right)^T. \quad (2.29)$$

Transpozicí rovnice dostaneme

$$\nabla \varphi_j(x, y) = \hat{\nabla} \hat{\varphi}_j(\hat{x}, \hat{y}) \mathbb{B}_K^{-1}. \quad (2.30)$$

Ze znalosti báзовých funkcí (2.25) příslušící referenčnímu trojúhelníku \hat{K} lze jednoduše určit jejich gradienty na trojúhelníku \hat{K}

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\hat{A}}(\hat{x}, \hat{y}) &= (-1, -1), \\ \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\hat{B}}(\hat{x}, \hat{y}) &= (1, 0), \\ \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\hat{C}}(\hat{x}, \hat{y}) &= (0, 1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Takto na základě vztahu (2.30) a ze znalosti souřadnic vrcholů trojúhelníka K můžeme rychle vyjádřit gradient zvolené báзовé funkce φ_j na libovolném trojúhelníku K .

2.4.4 Sestavení matice tuhosti

Jednotlivé prvky matice tuhosti \mathbb{K} vypočteme jako

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \sum_{K \in \tau_h} \underbrace{\int_K \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx}_{k_{ij}^K} = \sum_{K \in \tau_h} k_{ij}^K, \quad (2.32)$$

kde součin gradientů $\nabla \varphi_i$ a $\nabla \varphi_j$ je nenulový pouze na trojúhelnících, které obsahují oba vrcholy X_i a X_j příslušející báзовým funkcím φ_i a φ_j .² Díky tomu je drtivá většina lokálních příspěvků k_{ij}^K rovna nule vyjma výše zmíněných případů. Použitím referenčního zobrazení můžeme přepsat příspěvky k_{ij}^K z trojúhelníku K k prvku matice tuhosti k_{ij} jako

$$k_{ij}^K = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1} \right) \, d\hat{x}, \quad (2.33)$$

²Indexy i a j zde mohou být shodné.

kde $\det \mathbb{B}_K$ je konstanta, viz (2.24). Gradienty bázových funkcí jsou také konstanty díky volbě lineárních bázových funkcí, a proto se předpis (2.33) zjednoduší na

$$\begin{aligned} k_{ij}^K &= |\det \mathbb{B}_K| \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1} \right) \int_{\hat{K}} 1 \, d\hat{x} = \\ &= |K| \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_j \mathbb{B}_K^{-1} \right) \cdot \left(\hat{\nabla} \hat{\varphi}_i \mathbb{B}_K^{-1} \right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

kde $|K| = \frac{|\det \mathbb{B}_K|}{2}$ je plocha trojúhelníku K .

2.4.5 Sestavení pravé strany

Jednotlivé prvky vektoru pravé strany \mathbf{b} dané rovnicí (2.12) vypočteme obdobným způsobem jako prvky matice tuhosti \mathbb{K} . Tedy

$$b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} u_N \varphi_i \, dS = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f \varphi_i \, dx + \sum_{S \in \gamma_N} \int_S u_N \varphi_i \, dS, \quad (2.35)$$

kde S označuje stranu trojúhelníku K a γ_N je množina všech stran triangulace ležících na části hranice Γ_N . Lokální příspěvky b_i^{K+S} do pravé strany po použití referenčního zobrazení lze psát jako

$$b_i^{K+S} = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| \hat{f}(\hat{x}) \hat{\varphi}_i \, d\hat{x} + \int_{\hat{S}} |S| \hat{u}_N(\hat{x}) \hat{\varphi}_i \, d\hat{S}, \quad (2.36)$$

kde $\hat{f}(\hat{x}) = f(x)$ a $\hat{u}_N(\hat{x}) = u_N(x)$, $x = F_K(\hat{x})$ a $|S|$ je velikost strany trojúhelníku K a \hat{S} je referenční strana trojúhelníka \hat{K} mezi vrcholy \hat{A} a \hat{B} . Jelikož se nejedná o integraci konstantních funkcí, pro výpočet integrálů použijeme numerickou kvadraturu, viz [17], [19]. Zde využijeme kvadraturu přesnou pro polynomy až druhého stupně pro integraci na trojúhelníku \hat{K} , kde uzly numerické kvadratury jsou středy stran trojúhelníku \hat{K} , respektive přesnou pro polynomy až třetího stupně pro integraci na straně \hat{S} . Pak můžeme lokální příspěvky do pravé strany přepsat do tvaru

$$b_i^{K+S} = |K| \sum_{m=1}^3 \omega_m \hat{f}(\hat{X}_m) \hat{\varphi}_i(\hat{X}_m) + |S| \sum_{n=1}^2 \omega_n \hat{u}_N(\hat{X}_n) \hat{\varphi}_i(\hat{X}_n), \quad (2.37)$$

kde ω_m, ω_n jsou váhy a \hat{X}_m, \hat{X}_n jsou uzly numerické kvadratury, viz [17]. Tyto váhy a uzly jsou zvoleny jako

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{3} & \hat{X}_1 &= \left[\frac{1}{2}, 0 \right], \\ \omega_2 &= \frac{1}{3} & \hat{X}_2 &= \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \\ \omega_3 &= \frac{1}{3} & \hat{X}_3 &= \left[0, \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

a

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2} & \hat{X}_1 &= \left[\frac{3 - \sqrt{3}}{6}, 0 \right], \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} & \hat{X}_2 &= \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{6}, 0 \right].\end{aligned}\tag{2.39}$$

2.4.6 Realizace Dirichletovy okrajové podmínky

Jak již bylo zmíněno, Dirichletova okrajová podmínka předepisuje hodnoty hledaného řešení na části hranice Γ_D , tedy i určuje numerické řešení u_h ve vrcholech triangulace ležících na hranici Γ_D . Při její realizaci postupujeme následovně:

1. Prvky vektoru pravé strany b_i odpovídající vrcholům ležících na hranici Γ_D přepíšeme známou hodnotou danou Dirichletovou okrajovou podmínkou, tedy modelový problém na hodnotu u_D .
2. Odpovídající řádky matice tuhosti $k_{i\bullet}$ vynulujeme.
3. Abychom zachovali symetrii matice \mathbb{K} , odeliminujeme i sloupce s indexy i , tj. sloupce $k_{\bullet i}$. Tedy od prvků vektoru b_j odečteme postupně součiny známých hodnot v bodech s indexem i uložených jako b_i a prvků matice \mathbb{K} s indexy k_{ji} .
4. Na diagonálu s indexy i doplníme jedničky, tj. prvky k_{ii} položíme rovny jedné.

Takto jsme zajistili, že matice \mathbb{K} bude symetrická a výsledná soustava rovnic (2.13) bude mít řešení dané Dirichletovou okrajovou podmínkou pro indexy i , které odpovídají vrcholům triangulace na části hranice Γ_D .

Kapitola 3

Řešení Helmholtzovy rovnice pomocí metody konečných prvků

V této kapitole převedeme Helmholtzovu rovnici (1.18) s okrajovými podmínkami z odstavce 1.3 do slabé formulace a dále do diskrétní podoby pomocí metody konečných prvků analogicky postupu z kapitoly 2. Dále uvažujeme $\hat{P}(x, \omega) \in C$.

3.1 Slabá formulace

Rovnici (1.18) pro jedno pevně zvolené $\omega \in R$ vynásobíme testovací funkcí $v \in V = \{f \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_D\}$ a poté zintegrujeme přes zadanou oblast Ω . Na člen $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} \right)$ aplikujeme Greenovu větu a dostáváme

$$-\int_{\Omega} \nabla \hat{P} \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Omega} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{P} v \, dx = \int_{\Omega} \hat{f} v \, dx, \quad (3.1)$$

kde integrál přes hranici $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S$ můžeme rozepsat jako

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbf{n}} v \, dS = \int_{\Gamma_D} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbf{n}} v \, dS + \int_{\Gamma_S} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbf{n}} v \, dS. \quad (3.2)$$

Jelikož je na části hranice Γ_D testovací funkce v rovna nule, je i $\int_{\Gamma_D} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbf{n}} v \, dS = 0$, a protože uvažujeme Neumannovu okrajovou podmínku ve tvaru (2.3), je také $\int_{\Gamma_N} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbf{n}} v \, dS = 0$. Ze Sommerfeldovy okrajové podmínky (1.22) je zřejmé, že výraz $\frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbf{n}}$ na části hranice Γ_S je roven $j \frac{\omega}{c} \hat{P}$. Výsledná rovnice má pak tvar

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{P} \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_S} j \frac{\omega}{c} \hat{P} v \, dS - \int_{\Omega} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{P} v \, dx = \int_{\Omega} \hat{f} v \, dx. \quad (3.3)$$

Slabým řešením Helmholtzovy rovnice (1.18) pro pevně zvolené ω nazveme takovou funkci $\hat{P} \in H^1(\Omega)$, pro kterou platí rovnice (3.3) pro libovolnou funkci $v \in V$ a zároveň funkce $\hat{P}(x, \omega)$ splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku (1.19).

3.2 Diskretizace Helmholtzovy rovnice

Stejně jako u modelové úlohy nahradíme nekonečně-dimenzionální prostor V testovacích funkcí prostorem $V_h \subset V$ s konečnou dimenzí N_h , ve kterém hledáme aproximační řešení \hat{P}_h rovnice (3.3) tak, aby platilo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \hat{P}_h \cdot \nabla v_h \, dx - \int_{\Gamma_S} j \left(\frac{\omega}{c} \right) \hat{P}_h v_h \, dS - \int_{\Omega} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{P}_h v_h \, dx = \\ = \int_{\Omega} \hat{f} v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Přibližné řešení \hat{P}_h budeme hledat ve tvaru

$$\hat{P}_h(x, \omega) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(\omega) \varphi_j(x). \quad (3.5)$$

Dosazením vztahu (3.5) do rovnice (3.4) a postupnou volbou bázevých funkcí φ_i za testovací funkci v_h dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx}_{k_{ij}} - j \frac{\omega}{c} \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \underbrace{\int_{\Gamma_S} \varphi_j \varphi_i \, dS}_{c_{ij}} - \\ - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \underbrace{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx}_{m_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} \hat{f} \varphi_i \, dx}_{b_i}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tuto soustavu rovnic (3.6) můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbb{A}(\omega) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}, \quad (3.7)$$

kde

$$\mathbb{A}(\omega) = \mathbb{K} - j \frac{\omega}{c} \mathbb{C} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbb{M}. \quad (3.8)$$

Prvky matice hmotnosti $\mathbb{M} = (m_{ij})_{i,j=1}^{N_h}$ a matice tlumení $\mathbb{C} = (c_{ij})_{i,j=1}^{N_h}$, zde realizující Sommerfeldovu okrajovou podmínku, jsou dány vztahy

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx, \quad c_{ij} = \int_{\Gamma_S} \varphi_j \varphi_i \, dS. \quad (3.9)$$

Matice \mathbb{M} a \mathbb{C} jsou také symetrické a pozitivně definitní.

3.2.1 Sestavení matice hmotnosti

Sestavení matice hmotnosti \mathbb{M} probíhá obdobným způsobem jako matice tuhosti \mathbb{K} . Tedy jednotlivé prvky matice hmotnosti \mathbb{M} v návaznosti na danou triangulaci τ_h

oblasti Ω vypočteme jako

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i \, dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \varphi_j \varphi_i \, dx = \sum_{K \in \tau_h} m_{ij}^K. \quad (3.10)$$

Obdobně jako u výpočtu lokálních příspěvků k_{ij}^K do matice tuhosti \mathbb{K} i součin báзовých funkcí φ_i a φ_j je nenulový pouze na trojúhelnících obsahující oba vrcholy X_i a X_j příslušící těmto báзовým funkcím. Tím pádem je jen velmi málo nenulových lokálních příspěvků m_{ij}^K do matice hmotnosti \mathbb{M} . Použitím referenčního zobrazení lze lokální příspěvek m_{ij}^K do matice hmotnosti zapsat jako

$$m_{ij}^K = \int_{\hat{K}} |\det \mathbb{B}_K| \hat{\varphi}_j \hat{\varphi}_i \, d\hat{x}. \quad (3.11)$$

Jelikož součinem dvou lineárních báзовých funkcí získáme polynom druhého stupně, pro integraci na trojúhelníku \hat{K} využijeme numerickou kvadraturu stejnou jako pro integraci vektoru pravé strany na trojúhelníku \hat{K} , tj. přesnou až pro polynomy druhého stupně. Lokální příspěvek do matice hmotnosti můžeme napsat ve tvaru

$$m_{ij}^K = |K| \sum_{m=1}^3 \omega_m \hat{\varphi}_j(\hat{X}_m) \hat{\varphi}_i(\hat{X}_m), \quad (3.12)$$

kde váhy ω_m a uzly \hat{X}_m jsou dány vztahem (2.38).

3.2.2 Sestavení matice tlumení

U matice tlumení \mathbb{C} postupujeme analogicky. Jednotlivé prvky této matice vypočteme jako

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_S} \varphi_j \varphi_i \, dS = \sum_{S \in \gamma_S} \int_S \varphi_j \varphi_i \, dS = \sum_{S \in \gamma_S} c_{ij}^S, \quad (3.13)$$

kde γ_S je množina všech stran triangulace τ_h ležících na části hranice Γ_S . I v tomto případě dostáváme velmi malé množství nenulových lokálních příspěvků c_{ij}^S do matice tlumení \mathbb{C} . Lokální příspěvek c_{ij}^S do matice tlumení \mathbb{C} lze za použití referenčního zobrazení zapsat jako

$$c_{ij}^S = \int_{\hat{S}} |S| \hat{\varphi}_j \hat{\varphi}_i \, d\hat{S}. \quad (3.14)$$

Jako u matice hmotnosti součinem dvou lineárních báзовých funkcí získáme polynom druhého stupně definovaný na referenční straně \hat{S} . Využitím stejné numerické kvadratury jako pro integraci vektoru pravé strany dané Neumannovou okrajovou podmínkou lze lokální příspěvek do matice tlumení napsat ve tvaru

$$c_{ij}^S = |S| \sum_{n=1}^2 \omega_n \hat{\varphi}_j(\hat{X}_n) \hat{\varphi}_i(\hat{X}_n), \quad (3.15)$$

kde váhy ω_n a uzly \hat{X}_n jsou dány vztahem (2.39).

3.3 Diskrétní řešení Helmholtzovy rovnice

Obecně o řešitelnosti Helmholtzovy rovnice (1.18) a její diskrétní podoby (3.7) pojednává věta s názvem Fredholmova alternativa. My zde uvedeme její znění pro diskrétní případ, viz [1], [11].

Věta (Fredholmova alternativa). *Nechť matice \mathbb{A} je o rozměru $m \times n$ a vektor \mathbf{b} o rozměru $m \times 1$, kde m, n jsou přirozená čísla. Pak platí jedna z následujících dvou možností:*

1) *Buď existuje řešení $\mathbf{x} \in R^n$ nehomogenní rovnice*

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.16)$$

2) *anebo má řešení $\mathbf{y} \in R^m$ následující homogenní rovnice*

$$\mathbb{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

kde $\mathbf{y}^T\mathbf{b} \neq 0$.

Důkaz této věty lze najít v [1].

Tato věta aplikovaná na náš případ se symetrickou maticí $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\omega)$ říká, že pro zvolené číslo ω a nenulový vektor pravé strany \mathbf{b} má rovnice (3.16) řešení, anebo existuje netriviální řešení homogenní rovnice (3.17). Pokud bychom se zajímali o množství řešení $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tj. varianty (3.16), mohli bychom využít Frobeniovu větu, viz [14]. Tedy pro takové zadané kruhové frekvence, pro které je matice $\mathbb{A}(\omega)$ regulární, existuje právě jedno řešení. Pokud by bylo zadané takové ω , pro které je $\mathbb{A}(\omega)$ singulární, nastane jedna z následujících dvou možností:

1) Buď $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\mathbf{b})$ a existuje nekonečně mnoho řešení rovnice (3.16),

2) nebo $h(\mathbb{A}) < h(\mathbb{A}|\mathbf{b})$ a neexistuje řešení rovnice (3.16).

O druhém případě ($h(\mathbb{A}) < h(\mathbb{A}|\mathbf{b})$) pak hovoří druhé tvrzení Fredholmovy alternativy, kdy existuje nekonečně mnoho řešení homogenní rovnice (3.17). Tento případ je charakterizován vztahem mezi vektory \mathbf{y} a \mathbf{b} , kde platí $\mathbf{y}^T\mathbf{b} \neq 0$.

V dalším odstavci nejprve pomocí tzv. modální analýzy vyšetříme řešení rovnice (3.17) a dále pak v následujícím odstavci budeme řešit rovnici (3.16), jejíž řešení využijeme k sestavení frekvenční přenosové funkce.

3.3.1 Modální analýza

Zde se pro jednoduchost omezíme na případ pouze s Dirichletovou a Neumannovou okrajovou podmínkou, tj. bez Sommerfeldovy okrajové podmínky. Dále budeme uvažovat $\hat{f} = 0$. V tomto případě se rovnice (3.7) zjednoduší na

$$\left(\mathbb{K} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbb{M} \right) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

kteřá představuje základní rovnici modální analýzy. Tato rovnice se nazývá zobecněný problém vlastních čísel, viz [8]. Rovnice (3.18) má pro nás nezajímavé triviální řešení. Netriviální řešení existuje právě tehdy, když matice $\left(\mathbb{K} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbb{M}\right)$ je singulární, a tedy když

$$\det\left(\mathbb{K} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbb{M}\right) = 0. \quad (3.19)$$

Řešení rovnice (3.19) vyhovují zobecněná vlastní čísla $\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, kde jim odpovídající ω nazýváme vlastní kruhové frekvence soustavy. Každému zobecněnému vlastnímu číslu λ přísluší zobecněný vlastní vektor $\boldsymbol{\alpha}$, který představuje vlastní tvar kmitání akustického prostoru na dané frekvenci. Na základě diskretizace pomocí metody konečných prvků víme, že matice tuhosti \mathbb{K} i matice hmotnosti \mathbb{M} jsou symetrické a pozitivně definitní. Díky tomu víme, že i matice $\Lambda(\omega) = \left(\mathbb{K} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbb{M}\right)$ je symetrická, a tedy vlastní čísla λ jsou reálná. Lze dokázat, že tyto vlastní čísla λ jsou nezáporná, viz [7]. To nás opravňuje psát $\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Leftrightarrow \omega = c\sqrt{\lambda}$ pro $\omega \in R^+$.

3.3.2 Numerický výpočet frekvenční přenosové funkce

Nyní již budeme u rovnice (3.7) uvažovat všechny zmíněné okrajové podmínky z odstavce 1.3 a vektor pravé strany. I v tomto případě nás budou zajímat především takové kruhové frekvence ω , pro které nastává rezonance akustického prostoru.

Zvolme tedy určitý rozsah kruhových frekvencí $\langle \omega_a, \omega_b \rangle$, který nás pro zadanou úlohu zajímá. V tomto intervalu vybereme konečný počet kruhových frekvencí ω s krokem h a ty postupně dosazujeme do rovnice (3.7). Vyřešením této rovnice získáme obecně komplexní vektor $\boldsymbol{\alpha}$. Nakonec pomocí přístupu frekvenční přenosové funkce zjistíme, pro jaké hodnoty kruhové frekvence ω ze zvoleného intervalu dochází k rezonanci.

Frekvenční přenosová funkce je přístup hojně využívaný při řešení inženýrských problémů, kde tak označujeme poměr Laplaceových obrazů výstupu ke vstupu, viz [16]. Zde definujeme frekvenční přenosovou funkci $F(\omega)$ jako poměr amplitudy akustického tlaku $\|\hat{P}_h(x, \omega)\|_2$ k amplitudě vstupního buzení $\|\hat{f}(x, \omega)\|_2$ na dané kruhové frekvenci ω , tedy

$$F(\omega) = \frac{\|\hat{P}_h(x, \omega)\|_2}{\|\hat{f}(x, \omega)\|_2}. \quad (3.20)$$

Vstupní buzení, tj. vektor pravé strany \mathbf{b} zadaný funkcí $\hat{f}(x, \omega)$, v této práci volíme jako jednotkový akustický zdroj v předem zvolených bodech. Normu akustického tlaku $\|\hat{P}_h\|_2$ počítáme jako $\|\hat{P}_h\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^H \mathbb{M} \boldsymbol{\alpha}}$. Lokální maxima frekvenční přenosové funkce jsou potom hledané rezonanční kruhové frekvence ω .

Výhoda použití frekvenční přenosové funkce je ta, že získáme řešení obecnější podoby rovnice (3.7) pro libovolnou kruhovou frekvenci z určitého rozsahu. Tento frekvenční rozsah může být omezen na pár významných frekvencí na rozdíl od modální analýzy, která poskytne rovnou celé frekvenční spektrum. Negativem této metody je to, že je nutné vyřešit mnohokrát rovnici (3.7) pro různé kruhové frekvence ω_i . Dále je nutné správně navzorkovat rozsah kruhových frekvencí $\langle \omega_a, \omega_b \rangle$.

Kapitola 4

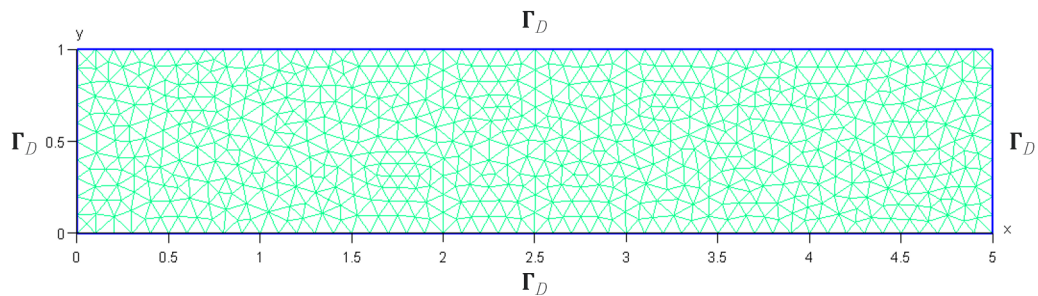
Numerické výsledky

V této kapitole nejprve otestujeme program vytvořený v programovacím jazyku *MATLAB*, viz [13], na úlohách se známým analytickým řešením. Tento program načte síť vytvořenou v programu *Gmsh*, viz [5]. Dále vyplní matici tuhosti \mathbb{K} , matici hmotnosti \mathbb{M} , popřípadě matici tlumení \mathbb{C} a vektor pravé strany \mathbf{b} . Následně pomocí tohoto programu ukážeme numerické řešení dalších úloh. Rychlost zvuku jsme ve všech příkladech zvolili $c = 343 \text{ m/s}$.

4.1 Řešení pomocí modální analýzy

4.1.1 Příklad 1 – model kmitající membrány

Řešme Helmholtzovu rovnici (1.17) pomocí metody konečných prvků na oblasti $\Omega = (0, 5) \times (0, 1)$ spolu s Dirichletovou okrajovou podmínkou na celé hranici $\partial\Omega = \Gamma_D$, viz obr. 4.1. Tento model popisuje například kmitání pevně uchycené membrány, viz [3].



Obrázek 4.1: Oblast Ω s ukázkou triangulace τ_h . Celá hranice $\partial\Omega$ je volena jako Γ_D .

Pro nalezení rezonančních frekvencí použijeme modální analýzu, tedy hledáme netriviální řešení rovnice (3.18)

$$\left(\mathbb{K} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mathbb{M} \right) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

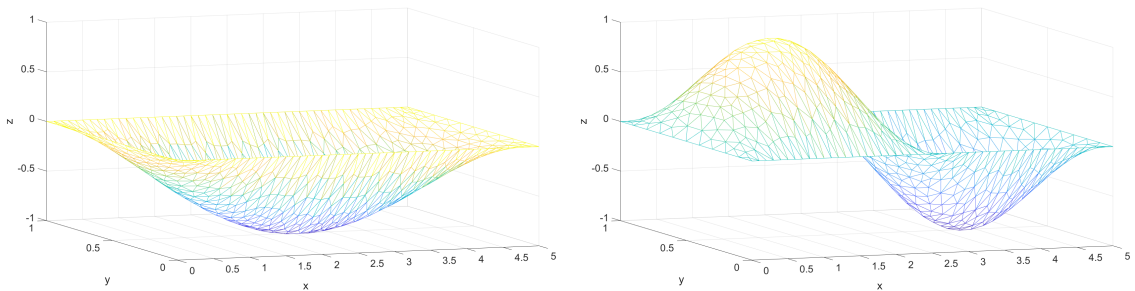
Nejmenší vlastní čísla λ a k nim příslušící vlastní vektory této úlohy zjistíme pomocí programovacího jazyka *MATLAB* příkazem *eigs* ($\mathbb{K}, \frac{1}{c^2}\mathbb{M}$). Následně ze vztahu $\omega = \sqrt{\lambda}$ spočítáme vlastní kruhovou frekvenci ω .¹ Takto získané vlastní kruhové frekvence na oblasti Ω porovnáme s analytickým řešením dle [3] daným vzorcem

$$\omega_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \text{pro } m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.1)$$

kde a, b jsou délky stran obdélníku. V tabulce 4.1 jsou uvedeny nejnižší vlastní kruhové frekvence získané numericky a dle analytického vzorce (4.1). Je vidět, že získané kruhové frekvence jsou velmi blízké analytickým hodnotám. Při větších kruhových frekvencích ω může začít hrát roli počet bodů na jednu vlnovou délku. Pro inženýrsky dostatečnou přesnost se doporučuje alespoň 20 bodů na jednu vlnovou délku. Pro vlastní kruhovou frekvenci ω_{51} , kdy příslušný vlastní vektor reprezentuje vlnění s 2,5 násobkem vlnové délky obdélníka Ω , viz obr. 4.3 vpravo, tento limit zvolená triangulace splňuje (20,4 bodů na jednu vlnovou délku). Rozdíl kruhové frekvence ω_{51} vypočítané numericky vůči hodnotě analytické je 0,6 %. Pro numerické získání vyšších vlastních kruhových frekvencí by již bylo vhodnější zjemnit výpočetní síť. Vybrané vlastní tvary kmitání jsou zobrazeny na obr. 4.2 a 4.3.

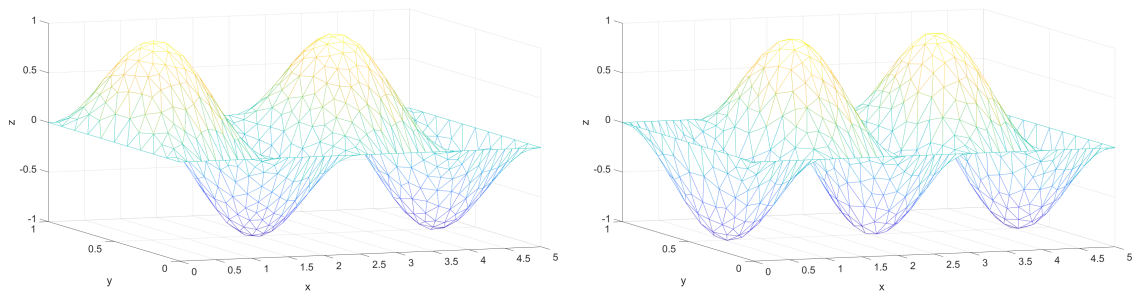
ω_{mn} [rad · s ⁻¹]	pomocí modální analýzy	dle vzorce (4.1)
ω_{11}	1102,2	1098,9
ω_{21}	1164,5	1160,6
ω_{31}	1261,7	1256,6
ω_{41}	1386,7	1380
ω_{51}	1533,1	1523,9

Tabulka 4.1: Prvních 5 nejnižších vlastních kruhových frekvencí ω spočítaných numericky a analyticky.



Obrázek 4.2: Vlastní tvary kmitání odpovídající prvnímu a druhému vlastnímu číslu λ s kruhovou frekvencí $\omega_{11} = 1102,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f_{11} = 175,4 \text{ Hz}$) a $\omega_{21} = 1164,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f_{21} = 185,3 \text{ Hz}$).

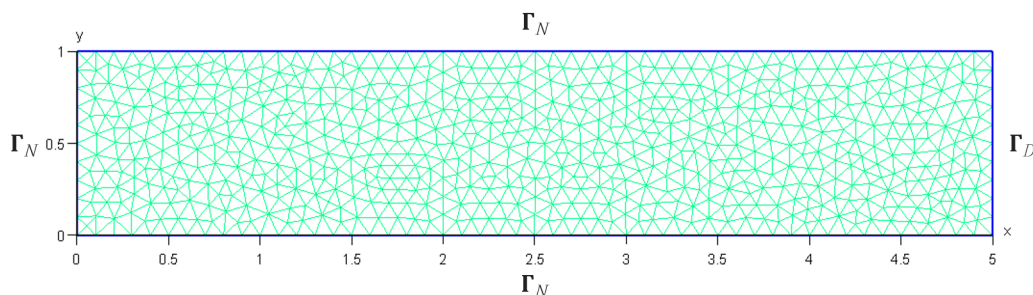
¹Kruhovou frekvenci ω lze pomocí vztahu $f = \frac{\omega}{2\pi}$ přepočítat na frekvenci f .



Obrázek 4.3: Vlastní tvary kmitání odpovídající čtvrtému a pátému vlastnímu číslu λ s kruhovou frekvencí $\omega_{41} = 1386,7 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ($f_{41} = 220,7 \text{ Hz}$) a $\omega_{51} = 1533,1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ($f_{51} = 244 \text{ Hz}$).

4.1.2 Příklad 2 – model varhanní píšťaly

Uvažujme nyní stejnou úlohu jako v příkladu 1 pouze s rozdílnými okrajovými podmínkami. Dirichletovu okrajovou podmínku předepíšeme pouze na pravé straně obdélníku a na zbylých třech stranách budeme uvažovat Neumannovu okrajovou podmínku ve tvaru (1.20), viz obr. 4.4. Toto nastavení může modelovat základní frekvence varhanních píšťal.



Obrázek 4.4: Oblast Ω s ukázkou triangulace τ_h . Hranice $\partial\Omega$ je volena jako Γ_D a Γ_N .

Numerický výpočet vlastních čísel λ a k nim příslušících vlastních vektorů a následný výpočet kruhové frekvence ω , respektive frekvence f , je analogický jako v příkladu 1. Tento matematicko-fyzikální model představuje takzvaný čtvrtvlnový rezonátor, jehož vlastní frekvenci lze spočítat pomocí vzorce dle [2] jako

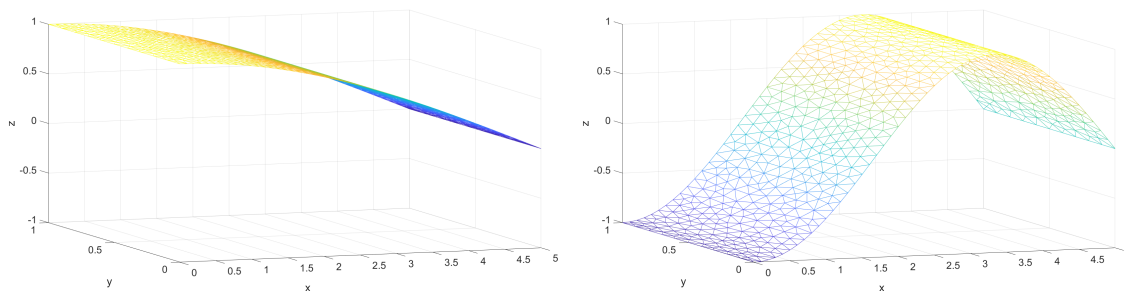
$$f_k = \frac{1}{4} \frac{c}{L} (2k - 1) \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.2)$$

kde L je délka rezonátoru. V tabulce 4.2 je opět uvedeno několik nejnižších vlastních kruhových frekvencí vypočtených pomocí modální analýzy a dle vzorce (4.2). Tyto hodnoty se téměř shodují.

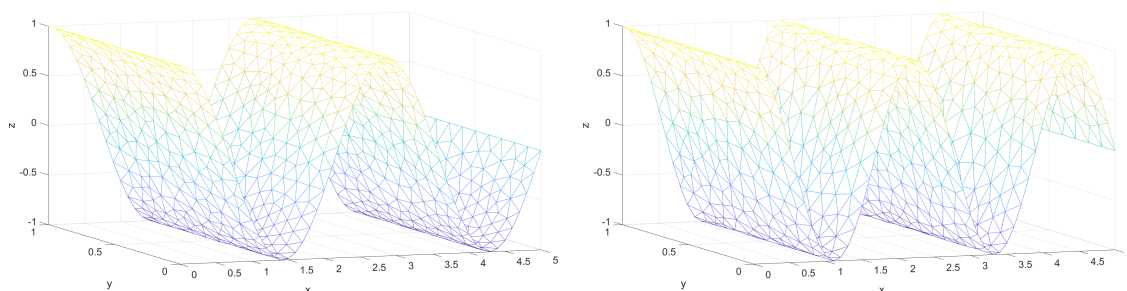
Z průběhů vlastních tvarů kmitání na obr. 4.5 a 4.6 je zřejmé, že Dirichletova okrajová podmínka na pravé straně obdélníku je splněna. Neumannova okrajová podmínka předepsaná na zbývajících stranách obdélníku vynucuje, aby změna tlaku na části hranice Γ_N ve směru vnější normály \mathbf{n} byla nulová. Tohoto požadavku je také dosaženo, viz obr. 4.5 a 4.6.

ω_k [rad · s ⁻¹]	pomocí modální analýzy	dle vzorce (4.2)
ω_1	107,8	107,8
ω_2	323,4	323,3
ω_3	539,2	538,8
ω_4	755,5	754,3
ω_5	972,3	969,8

Tabulka 4.2: Prvních 5 nejnižších vlastních kruhových frekvencí ω spočítaných numericky a analyticky.



Obrázek 4.5: Vlastní tvary kmitání pro akustický tlak odpovídající prvnímu a druhému vlastnímu číslu λ s kruhovou frekvencí $\omega_1 = 107,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f_1 = 17,2 \text{ Hz}$) a $\omega_2 = 323,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f_2 = 51,5 \text{ Hz}$).



Obrázek 4.6: Vlastní tvary kmitání pro akustický tlak odpovídající čtvrtému a pátému vlastnímu číslu λ s kruhovou frekvencí $\omega_4 = 755,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f_4 = 120,2 \text{ Hz}$) a $\omega_5 = 972,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f_5 = 154,7 \text{ Hz}$).

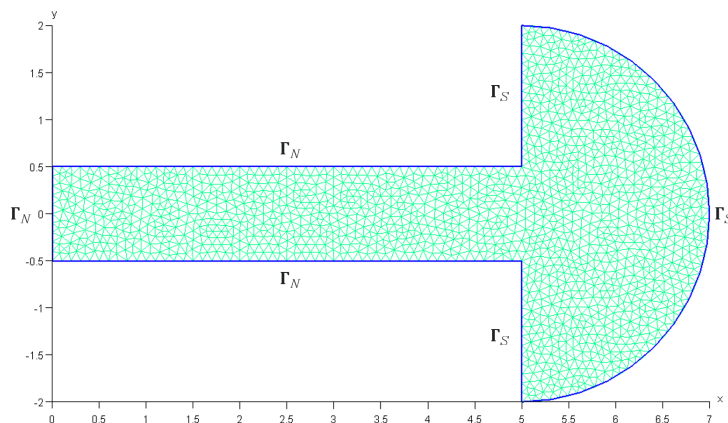
4.2 Řešení pomocí frekvenční přenosové funkce

4.2.1 Příklad 3 – druhý model varhanní píšťaly

V tomto případě budeme řešit obdobnou úlohu jako v příkladu 2 s tím rozdílem, že na pravé straně obdélníku místo Dirichletovy okrajové podmínky budeme uvažovat část vnějšího prostoru, do kterého se akustická vlna šíří, a na jeho hranici předepíšeme Sommerfeldovu okrajovou podmínku, viz obr. 4.7. Toto nastavení představuje

realističtější matematicko-fyzikální model varhanní píšťaly, jelikož je zde zachycen přechod akustické vlny z rezonátoru do vnějšího prostoru. Dále předepíšeme v ε -okolí bodu $A = [0,5; 0]$ jednotkový bodový zdroj, tj.

$$\hat{f}(x, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in U_\varepsilon(A) \\ 0, & \text{pro } x \notin U_\varepsilon(A) \end{cases}. \quad (4.3)$$

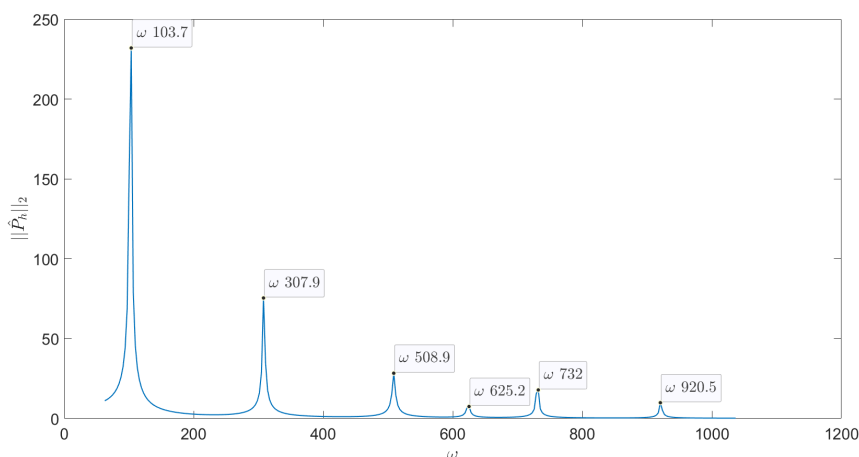


Obrázek 4.7: Oblast Ω s ukázkou triangulace τ_h . Hranice $\partial\Omega$ je volena jako Γ_N a Γ_S .

Pro nalezení rezonančních frekvencí numericky spočítáme frekvenční přenosovou funkci v rozsahu $\omega_a = 2\pi \cdot 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ až $\omega_b = 2\pi \cdot 165 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ s krokem $h = 0,5$. Budeme tedy hledat pro jednotlivé kruhové frekvence ω řešení rovnice (3.7)

$$\left(\mathbb{K} - j\frac{\omega}{c}\mathbb{C} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbb{M} \right) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}.$$

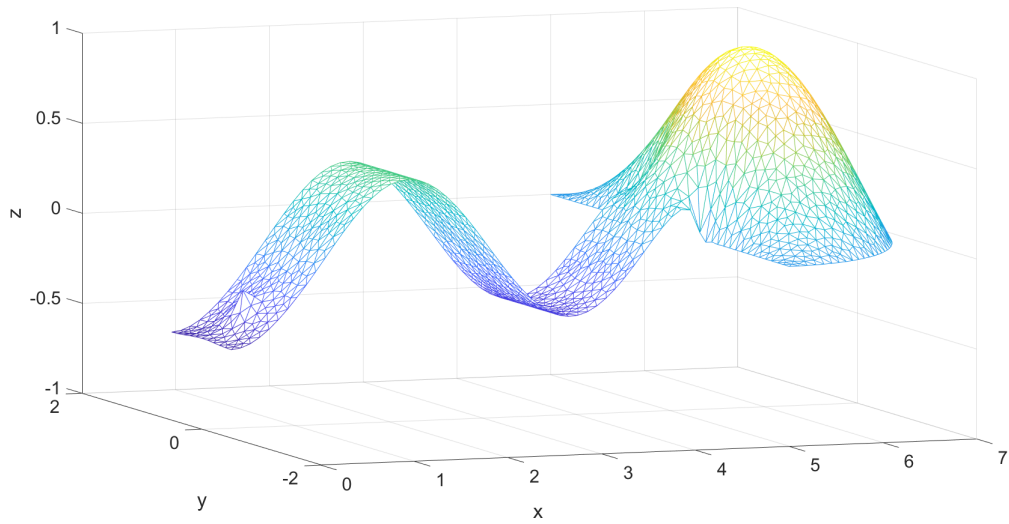
Ze získaného řešení $\boldsymbol{\alpha}$ pak pomocí vztahu (3.5) získáme přibližné řešení \hat{P}_h . Norma akustického tlaku \hat{P}_h v závislosti na volbě ω je zobrazena na obr. 4.8. Hodnota normy $\|\hat{P}_h\|_2$ pro zvolené ω představuje přímo hodnotu frekvenční přenosové funkce tak, jak je definovaná rovnicí (3.20) díky volbě jednotkového bodového zdroje v předem zvoleném bodě.



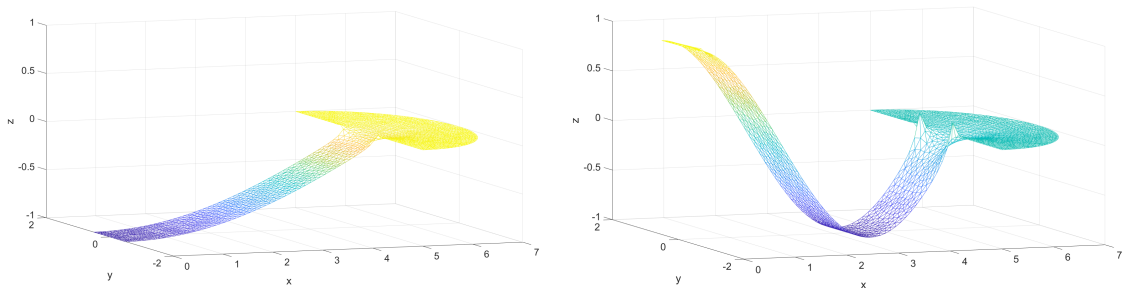
Obrázek 4.8: Závislost normy akustického tlaku \hat{P}_h na kruhové frekvenci ω a zobrazení hodnot ω , pro které nastávají lokální maxima.

Z obr. 4.8 je vidět, že rezonanční kruhové frekvence ω jsou lehce odlišné od hodnot uvedených v tabulce 4.2 s výjimkou dodatečné kruhové frekvence $\omega = 625,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pro tuto kruhovou frekvenci $\omega = 625,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ získáváme tvar kmitání, ve kterém kmitá především vnější prostor, viz obr. 4.9. Tento tvar kmitání není fyzikální a je způsoben pouze volbou rozměru vnějšího prostoru. Další vybrané vlastní tvary kmitání akustického tlaku jsou zobrazeny na obr. 4.10 a 4.11.

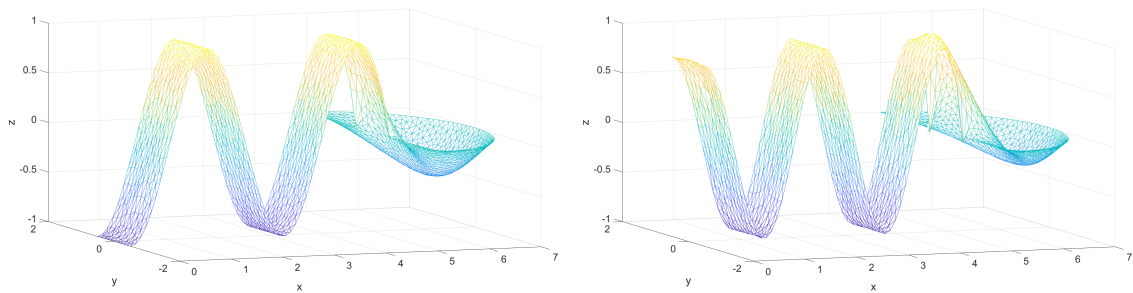
Jeden z důvodů lehce odlišných kruhových frekvencí ω od hodnot uvedených v tabulce 4.2 může být ten, že na pravé straně akustického rezonátoru akustická vlna přechází do otevřeného prostoru. To je patrné zejména při vyšších kruhových frekvencích ω , kdy rovinný charakter akustické vlny pozvolna přechází na šíření kulových vln z bodů ústí rezonátoru do volného prostoru, viz obr. 4.11. Oproti tomu je v příkladu 2 na pravé straně předepsána Dirichletova okrajová podmínka, která vynucuje, aby hodnota tlaku zde byla nulová. V neposlední řadě malé odchylky mohou být způsobené tím, že při výpočtu frekvenční přenosové funkce dosazujeme do rovnice (3.7) konečný počet kruhových frekvencí ω .



Obrázek 4.9: Nefyzikální vlastní tvar kmitání odpovídající kruhové frekvenci $\omega = 625,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f = 99,5 \text{ Hz}$). Největší amplituda kmitání akustického tlaku se nachází ve vnějším prostoru.



Obrázek 4.10: Vlastní tvary kmitání odpovídající kruhové frekvenci $\omega = 103,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f = 16,5 \text{ Hz}$) a $\omega = 307,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f = 49 \text{ Hz}$).

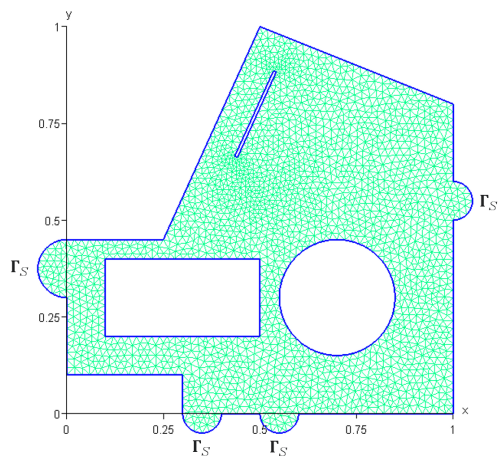
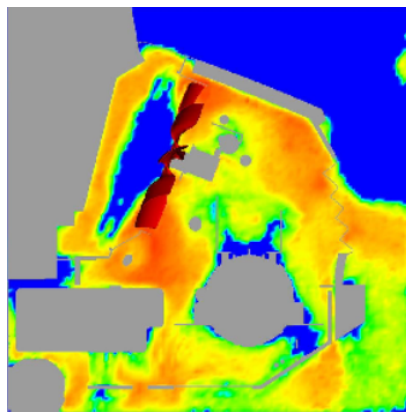


Obrázek 4.11: Vlastní tvary kmitání odpovídající kruhové frekvenci $\omega = 732 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f = 116,5 \text{ Hz}$) a $\omega = 920,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f = 146,5 \text{ Hz}$).

4.2.2 Příklad 4 – model motorového prostoru

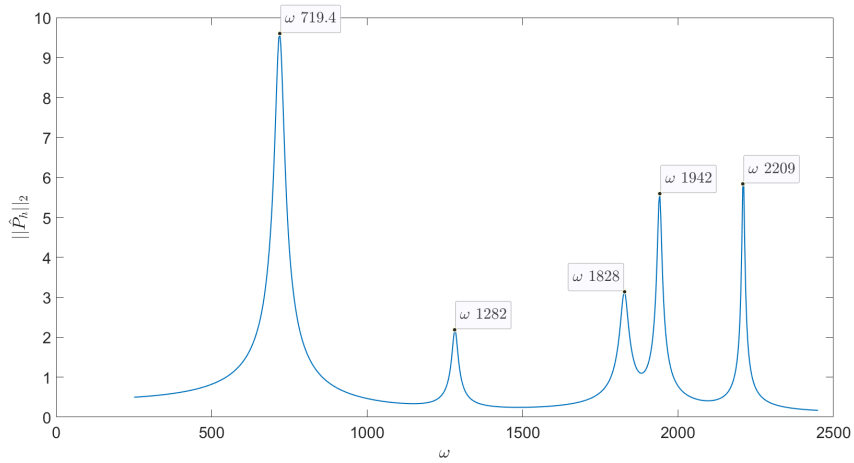
Po otestování vytvořeného programu na matematicko-fyzikálních modelech, u kterých je známo analytické řešení, nyní přistoupíme k numerickému řešení na oblasti Ω s Neumannovou a Sommerfeldovou okrajovou podmínkou na hranici $\partial\Omega$, viz obr. 4.12 vpravo. Toto nastavení reprezentuje zjednodušený matematicko-fyzikální model motorového prostoru, který je inspirován modelem motoru malého bagru firmy *Bobcat*, viz obr. 4.12 vlevo. Jednotkový bodový zdroj postupně předepíšeme v ε -okolí bodu:

- a) $A = [0,5; 0,5]$,
- b) $B = [0,45; 0,8]$.

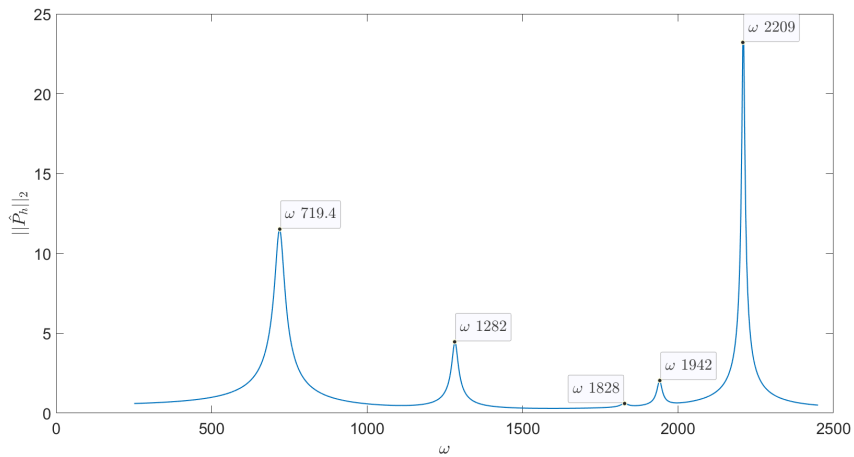


Obrázek 4.12: Vlevo je zobrazen model motorového prostoru malého bagru firmy *Bobcat*. Vpravo je zobrazena oblast Ω zjednodušeného modelu s ukázkou triangulace τ_h . Hranice $\partial\Omega$ je tvořena Γ_N a Γ_S , kde hranice Γ_N není v obrázku označena a skládá se z částí křivek reprezentující pevné stěny motorového prostoru.

Pro nalezení rezonančních frekvencí budeme postupovat analogicky jako v příkladu 3. Frekvenční přenosová funkce vypočítaná v rozsahu $\omega_a = 2\pi \cdot 40 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ až $\omega_b = 2\pi \cdot 390 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ s krokem $h = 0,5$ s buzením v ε -okolí bodu A je zobrazena na obr. 4.13 a pro buzení v ε -okolí bodu B na obr. 4.14.



Obrázek 4.13: Závislost normy akustického tlaku \hat{P}_h na kruhové frekvenci ω a zobrazení hodnot ω , pro které nastávají lokální maxima pro buzení v ε -okolí bodu $A = [0,5; 0,5]$.

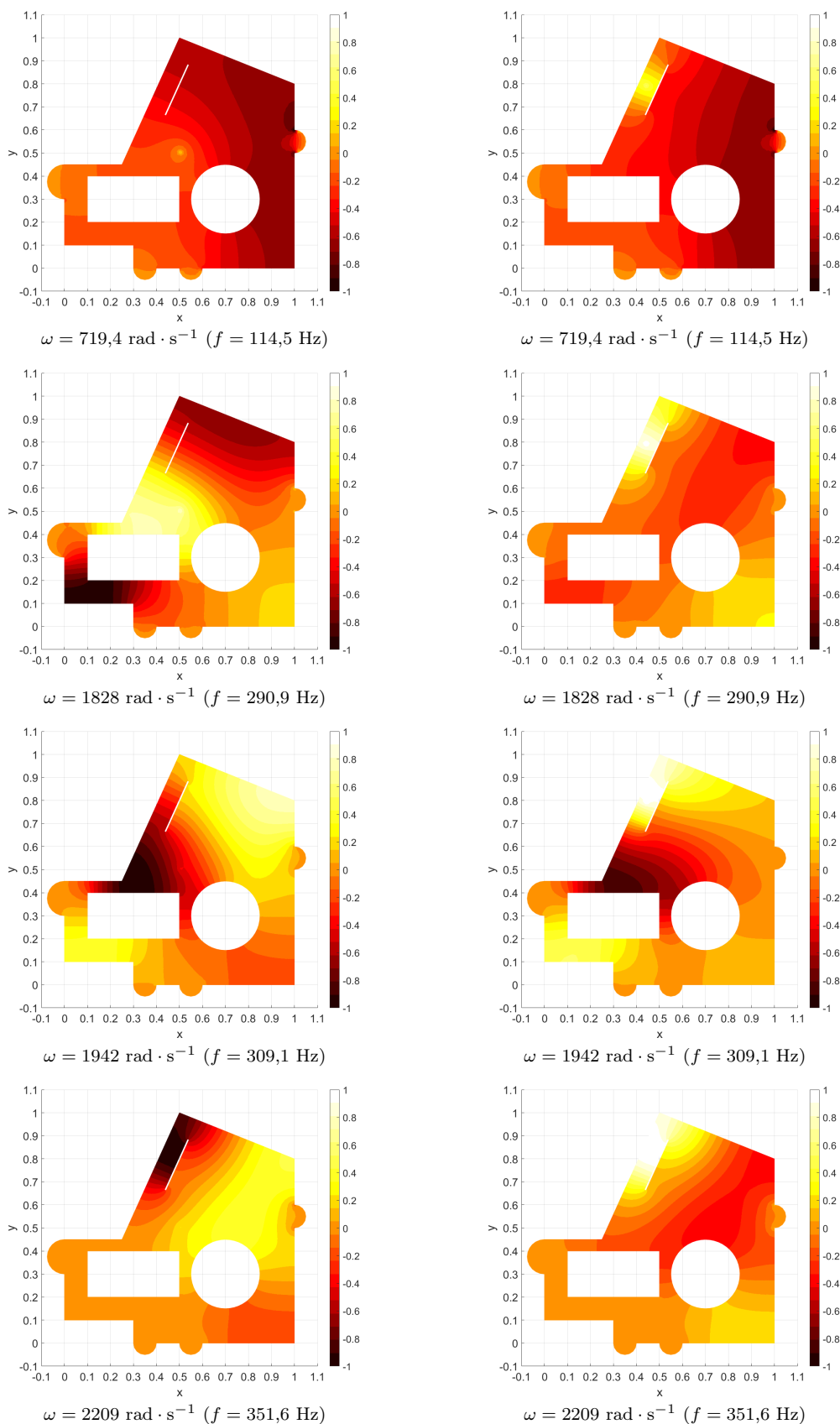


Obrázek 4.14: Závislost normy akustického tlaku \hat{P}_h na kruhové frekvenci ω a zobrazení hodnot ω , pro které nastávají lokální maxima pro buzení v ε -okolí bodu $B = [0,45; 0,8]$.

Z porovnání obr. 4.13 a 4.14 lze vidět, že si jednotlivé polohy lokálních maxim pro buzení v ε -okolí bodu $A = [0,5; 0,5]$ a $B = [0,45; 0,8]$ odpovídají, i když hodnoty lokálních maxim jsou rozdílné. Pro $\omega = 1828 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ v případě b) nastává velmi nevýrazné lokální maximum, kdy je akustické kmitání nejvýraznější především v levém horním rohu, viz obr. 4.15. Tvar kmitání získaný pro buzení v ε -okolí bodu $A = [0,5; 0,5]$ pro $\omega = 1828 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ má odlišný prostorový průběh. Ostatní vlastní tvary kmitání pro oba uvažované případy buzení zobrazené na obr. 4.15 mají již velmi podobné prostorové průběhy. Pro nejnižší rezonanční frekvenci $f = 114,5 \text{ Hz}$, která představuje pro účely návrhu většinou nejdůležitější parametr, je akustická vlna víceméně rovnoběžná s osou x . Pro frekvence $f = 309,1 \text{ Hz}$, respektive $f = 351,6 \text{ Hz}$, jsou pak akustické vlny dominantně rozloženy podél úhlopříčky zleva nahoru, respektive shora doprava. Pro jednotkový bodový zdroj předepsaný v ε -okolí bodu $C = [0,525; 0,3]$ byly získány velmi podobné výsledky jako pro buzení v případě a), tedy v ε -okolí bodu $A = [0,5; 0,5]$.

a) Buzení v ε -okolí bodu $A = [0,5; 0,5]$

b) Buzení v ε -okolí bodu $B = [0,45; 0,8]$



Obrázek 4.15: Vybrané vlastní tvary kmitání akustického tlaku pro buzení v ε -okolí bodu $A = [0,5; 0,5]$ (vlevo) a $B = [0,45; 0,8]$ (vpravo).

Závěr

V této práci jsme se zabývali úlohami akustiky a jejich numerickým řešením. Nejprve jsme vlnovou rovnicí popisující šíření akustických vln odvodili ze základních fyzikálních zákonů a doplnili o tři různé okrajové podmínky na hranici oblasti. Dále jsme popsali principy metody konečných prvků na modelové úloze. Tu jsme převedli do slabé formulace, diskretizovali pomocí metody konečných prvků a důkladně popsali všechny potřebné kroky při tvorbě konečné numerické procedury.

Tyto principy jsme následně aplikovali při numerickém řešení Helmholtzovy rovnice. Zde jsme využili dvou přístupů pro nalezení rezonančních frekvencí daného systému. První byl založen na modální analýze, tj. hledali jsme zobecněná vlastní čísla výsledné soustavy rovnic daného systému, a druhý byl založen na numerickém výpočtu frekvenční přenosové funkce (FPF). Hodnoty frekvenční přenosové funkce na intervalu našeho zájmu jsme určili opakovaným dosazováním různých hodnot kruhové frekvence. Lokální maxima FPF jsou hledané rezonanční kruhové frekvence.

Jako hlavní výsledek této práce jsme v programovacím jazyku *MATLAB* vytvořili program realizující metodu konečných prvků. Tento program načte síť vytvořenou v programu *Gmsh*, sestaví příslušné matice, vektor pravé strany a umožňuje aplikovat tři různé okrajové podmínky v libovolné kombinaci. Funkčnost tohoto programu jsme otestovali na několika úlohách se známým analytickým řešením. Ve všech případech jsme dosáhli dobré shody s očekávanými výsledky. Porovnali jsme též vhodnost předepsání Dirichletovy a Sommerfeldovy okrajové podmínky v ústí akustického rezonátoru. Nakonec jsme pomocí tohoto programu řešili zjednodušený matematicko-fyzikální model motorového prostoru inspirovaný modelem motoru firmy *Bobcat*. I pro tuto netriviální úlohu byly získány vlastní tvary a vlastní frekvence kmitání v rozumném frekvenčním rozsahu.

Seznam použitých zdrojů

- [1] BARTL, David. *Věty o alternativě a lineární programování v nekonečně rozměrných prostorech* [online]. Praha, 2006 [cit. 2021-7-9]. Dostupné z: <https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/7472/150010733.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Disertační práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
- [2] BLACKSTOCK, David T. *Fundamentals of Physical Acoustics*. Austin, Texas: JOHN WILEY & SONS, INC., 2000. ISBN 978-0-471-31979-5.
- [3] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua*. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005. Česká matice technická (Academia). ISBN 80-200-1344-X.
- [4] EHRENFRIED, Klaus. *Strömungsakustik I*. Berlin, 2003.
- [5] GEUZAINÉ, Christophe a Jean-François REMACLE. *Gmsh* [software]. Verze 2.8.4. Belgie, 7. února 2014 [cit. 2021-7-6]. Dostupné z: <https://gmsh.info/>.
- [6] GIVOLI, Dan. *Absorbing Boundary Conditions*. SPICE [online]. Venice, 2004 [cit. 2021-6-7]. Dostupné z: http://www.spice-rtn.org/events/workshops/venice2004/downloads/theabcofabcs.pdf/attachment_download/theabcofabcs.pdf
- [7] HORÁČEK, Lukáš. *Použití metody konečných prvků pro modální analýzu elastického tělesa* [online]. Praha, 2015 [cit. 2021-7-10]. Dostupné z: https://dspace.cvut.cz/bitstream/handle/10467/63596/F2-DP-2015-Horacek-Lukas-Lukas_Horacek_Diploma_Theisis_2015.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Diplomová práce. ČVUT, Fakulta strojní.
- [8] CHALUPA, Jakub. *Zobecněný problém vlastních čísel* [online]. Brno, 2012 [cit. 2021-7-2]. Dostupné z: <https://is.muni.cz/th/lxul/diplomka.pdf>. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.
- [9] IHLENBURG, Frank. *Finite element analysis of acoustic scattering*. New York: Springer, 1998. ISBN 03-879-8319-8.
- [10] INGARD, Uno. *Notes on acoustics*. Hingham, Massachusetts: INFINITY SCIENCE PRESS LLC, 2008. ISBN 978-1-934015-08-7.

- [11] JIRÁSEK, Pavel. *Fredholmova alternativa* [online]. Plzeň, 2009 [cit. 2021-7-10]. Dostupné z: https://portal.zcu.cz/StagPortletsJSR168/PagesDispatcherServlet?pp_destElement=%23ssSouboryStudentuDivId_760&pp_locale=cs&pp_reqType=render&pp_portlet=souboryStudentuPagesPortlet&pp_page=souboryStudentuDownloadPage&pp_nameSpace=G610131&soubidno=4633. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd.
- [12] KRAMÁŘ, Martin. *Metoda konečných prvků pro Helmholtzovu rovnici* [online]. Ostrava, 2009 [cit. 2021-6-7]. Dostupné z: https://home1.vsb.cz/~luk76/students/Kramar_Ing.pdf. Diplomová práce. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava.
- [13] MATHWORKS. *Matlab* [software]. Verze R2019b. USA, 17. září 2019 [cit. 2021-7-6]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/products/get-matlab.html?s_tid=gn_getml.
- [14] NEUSTUPA, Jiří. *Matematika I*. Vyd. 5., přeprac. Praha: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 978-80-01-04111-6.
- [15] SCHOT, Steven H. *Eighty years of Sommerfeld's radiation condition*. *Historia Mathematica* [online]. 1992, 19(4), 385-401 [cit. 2021-6-7]. ISSN 03150860. Dostupné z: doi:10.1016/0315-0860(92)90004-U
- [16] SKALICKÝ, Jiří. *Teorie řízení* [online]. 2. vydání. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2002 [cit. 2021-7-24]. Dostupné z: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwi93LG0u_rxAhVG3aQKHebSCqUQFjAAegQIBhAD&url=https%3A%2F%2Fwww.vutbr.cz%2Fwww_base%2Fpriloha.php%3Fdpid%3D66661&usg=AOvVaw2K0VA2Z3ptwsiQf21Hjwvw
- [17] SVÁČEK, Petr a Miloslav FEISTAUER. *Metoda konečných prvků*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-010-3522-0.
- [18] VALÁŠEK, Jan. *Numerické řešení deformace pružných těles metodou konečných prvků* [online]. Praha, 2011 [cit. 2021-6-23]. Dostupné z: <https://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/data/articles/Valasek2011bachelor.pdf>. Bachelářská práce. ČVUT, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská.
- [19] VITÁSEK, Emil. *Numerické metody*. Praha: SNTL, 1987.

Příloha

Soubor ve formátu *.zip* obsahující triangulace oblastí a program pro numerické řešení Helmholtzovy rovnice pomocí MKP.