České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

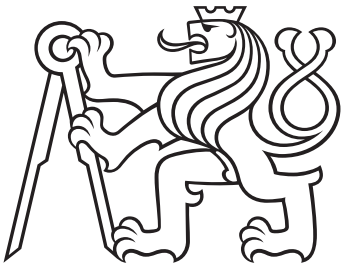
Energetická závislost hadronové struktury v rámci kvantové chromodynamiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval:	Radim Dvořák
Vedoucí práce:	Ing. Jan Čepila, Ph.D.
Školitel specialista:	Ing. Dagmar Bendová
Rok:	2021

Czech Technical University in Prague
Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering

Department of Physics
Branch of Study: Experimental Nuclear and Particle Physics



Energy dependence of hadron structure within QCD

BACHELOR'S THESIS

Author:	Radim Dvořák
Supervisor:	Ing. Jan Čepila, Ph.D.
Consultant:	Ing. Dagmar Bendová
Year:	2021

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
PRAHA 1 - STARÉ MĚSTO, BŘEHOVÁ 7 - PSČ 115 19

Katedra: fyziky *Akademický rok:* 2020/2021

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Radim Dvořák
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Experimentální jaderná a částicová fyzika
Název práce: (česky)	Energetická závislost hadronové struktury v rámci kvantové chromodynamiky
Název práce: (anglicky)	Energy dependence of hadron structure within QCD

Pokyny pro vypracování:

1) Co je kvantová chromodynamika, kvarky a gluony, partonový model, partonové distribuce v hadronu, evoluční rovnice

2) Co je partonová saturace, proč je důležité studovat tento jev a v jakých oblastech se projevuje, jak lze tento jev zahrnout do výpočtů

3) Co je model barevného dipolu, co je vlnová funkce a dipolový účinný průřez, jak lze modelovat příčnou strukturu hadronu

4) Co je exkluzivní a disociativní produkce vektorových mesonů, jaké jsou kinematické proměnné, které proces charakterizují, jak lze spočítat účinný průřez tohoto procesu

5) Numerický výpočet účinného průřezu v přiblížení barevného dipolu pro různé vektorové mesony v kinematických rozmezích plánovaných experimentů, porovnání výsledků s daty z předchozích experimentů

Doporučená literatura:

[1] F. Halzen and A.D.Martin: Quarks and Leptons, Wiley, 2008

[2] C. Wong: Introduction to High-energy Heavy-ion Collisions, World Scientific, 1994

[3] J. L. Albacete and C. Marquet: Gluon saturation and initial conditions for relativistic heavy ion collisions, arxiv:hep-ph/1401.4866v1

[4] J. Cepila, J. G. Contreras and J. D. Tapia Takaki: Energy dependence of dissociative J/psi photoproduction as a signature of gluon saturation at the LHC, Phys. Lett. B 766, 186 (2017)

[5] D. Bendova, J. Cepila and J. G. Contreras: Dissociative production of vector mesons at electron-ion colliders, Phys. Rev. D 99, no.3, 034025 (2019)

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Jan Čepila, Ph.D.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Jméno a příjmení školitele-specialisty

Ing. Dagmar Bendová
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Datum zadání bakalářské práce: 23.10.2020

Termín odevzdání bakalářské práce: 07.07.2021

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

.....
garant oboru

.....
vedoucí katedry

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská -1-

.....
děkan

V Praze dne 23.10.2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne ....

Radim Dvořák

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Janu Čepilovi, Ph.D. a mé konzultantce Ing. Dagmar Bendové za jejich neocenitelné rady a pomoc při psaní této bakalářské práce.

Radim Dvořák

Název práce:

Energetická závislost hadronové struktury v rámci kvantové chromodynamiky

Autor: Radim Dvořák

Studijní program: Aplikace přírodních věd
Obor: Experimentální jaderná a částicová fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Jan Čepila, Ph.D.
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze
Konzultant: Ing. Dagmar Bendová
Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt:

Tato práce se věnuje popisu struktury hadronů a její závislosti na energii srážky. Studium struktury hadronů je realizováno pomocí procesu produkce vektorových mezonů v přiblížení barevného dipólu. V práci jsou vypočítány účinné průřezy tohoto procesu pro mezony J/Ψ, ϕ a ρ, které jsou porovnány s daty z urychlovačů HERA a LHC. Pro porovnání jsou využity tři různé modely dipólového účinného průřezu. Energetická závislost je demonstrována použitím hot spot modelu, který aproximuje hadron jako shluky barevného náboje, jejichž počet závisí na energii. Tento model umožňuje spočítat účinný průřez nejen exkluzivní ale i disociativní produkce vektorových mezonů.

Klíčová slova: Kvantová chromodynamika, produkce vektorových mezonů, hot spot model

Title:

Energy dependence of hadron structure within QCD

Author: Radim Dvořák

Abstract:

This thesis is devoted to the description of the structure of hadrons and its dependence on the energy of a collision. The study of the structure of hadrons is realized using the vector meson production in the colour dipole approach. It contains cross sections of these processes for mesons J/Ψ, ϕ and ρ, which are compared with the data from HERA and LHC accelerators. Three different models for the dipole cross-section are used for comparison. Energy dependence is demonstrated via the hot spot model which approximates hadron as a group of colour charges whose number depends on energy. This model allows to calculated also the dissociative cross section.

Key words: Quantum chromodynamic, production of vector mesons, hot spot model

Obsah

Úvod **13**

1 Kvantová chromodynamika **15**
1.1 Kvarky . . . 15
1.2 Gluony . . . 15
1.3 Strukturní funkce . . . 16
1.3.1 Hluboce nepružný rozptyl . . . 16
1.3.2 Partonový model . . . 18
1.3.3 Kvarky a gluony v rámci hluboce nepružného rozptylu . . . 20
1.4 Evoluční rovnice . . . 20
1.4.1 DGLAP rovnice . . . 21
1.4.2 BFKL a JIMWLK rovnice . . . 22

2 Produkce vektorových mezonů **23**
2.1 Barevný dipól . . . 23
2.2 Diferenciální a celkový účinný průřez . . . 25
2.3 Korekce . . . 25
2.4 Vlnové funkce . . . 26
2.5 Modely dipólového účinného průřezu . . . 26
2.5.1 GBW . . . 27
2.5.2 CGC . . . 27
2.5.3 b-CGC . . . 28
2.6 Hot spot model . . . 28

3 Výsledky **31**
3.1 Parametrizace . . . 31
3.2 Diferenciální účinný průřez . . . 33
3.3 Celkový účinný průřez . . . 35
3.4 Hot spot model . . . 37
3.4.1 Diferenciální účinný průřez . . . 37
3.4.2 Celkový účinný průřez . . . 38

Závěr **41**

Úvod

Kvantová chromodynamika je teorie, která popisuje interakce mezi kvarky a gluony v hadronech. Tyto částice lze na základě pozorování z hluboce nepružného experimentu identifikovat jako partony, které mohou být popsány pomocí partonového modelu. Počet partonů v hadronech ale není konstantní a může se měnit. S rostoucí energií srážky, respektive klesajícím Bjorkenovým x, roste počet partonů. Tento růst může být popsán pomocí Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov (BFKL) rovnice. Počet partonů ale neroste nade všechny meze a od určitého momentu se partony začnou saturovat. Toto lze popsat pomocí teorie Color Glass Condensate, která vede na Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov, Kovner (JIMWLK) rovnice případně Balitsky-Kovchegov (BK) rovnici. Při konstantním Bjorkenově x a rostoucí virtualitě Q^2 fotonu se zjemňuje rozlišení, kterým se zkoumá hadron. Tedy s rostoucím Q^2 lze pozorovat menší detaily uvnitř protonu.

Produkce vektorových mezonů je proces, při kterém lze zkoumat vnitřní strukturu hadronů. V tomto procesu se rozptyluje elektron na hadronu (pomocí výměny virtuálního fotonu), přičemž vzniká vektorový mezon. Při exkluzivní produkci je ve finálním stavu vektorový mezon a hadron. Při disociativní produkci se hadron rozpadne na systém jiných částic. Dále tento proces lze rozdělit na elektroprodukci a fotoprodukci podle virtuality vyměňovaného fotonu.

Tato bakalářská práce je členěna následovně: V první kapitole jsou popsány základní vlastnosti kvantové chromodynamiky. Dále je uveden hluboce nepružný rozptyl, což je experiment pomocí, kterého lze popsat vlastnosti hadronů. Následně je zadefinován partonový model a jeho vztah k hluboce nepružnému rozptylu. Nakonec jsou uvedeny vlastnosti evoluční rovnice, které popisují energetickou závislost struktury hadronů.

Druhá kapitola se věnuje produkci vektorových mezonů, které jsou nejprve zadefinovány. Následně je popsána jejich produkce v přiblížení barevného dipólu a jsou uvedeny kinematické veličiny tohoto procesu. Poté je ukázáno, jak lze vypočítat účinné průřezy produkce jednotlivých mezonů v tomto přiblížení. Rovněž jsou zavedeny tři různé modely pro výpočet účinného průřezu interakce dipólu s hadronem. V poslední části je představen hot spot model, což je model, ve kterém se hadron modeluje pomocí energeticky proměnné struktury.

Ve třetí kapitole jsou rozebrány vypočítané výsledky produkce vektorových mezonů. Konkrétně jde o mezony J/Ψ, ϕ a ρ. Nejdříve je popsán diferenciální účinný průřez a následně celkový účinný průřez pro produkci těchto tří mezonů ve srážkách elektronu s protonem případně protonu s olovem. Poslední část je zaměřena na hot spot model a jsou uvedeny účinné průřezy exkluzivní a disociativní produkce.

Kapitola 1

Kvantová chromodynamika

Kvantová chromodynamika [1, 2] je teorie silné interakce, která popisuje silové působení mezi kvarky pomocí gluonů. Kvarky a gluony nemohou existovat (za normálních podmínek) jako volné částice, ale mohou tvořit vázané stavy, které se nazývají hadrony. Silná interakce je nábojově nezávislá. Na rozdíl od kvantové elektrodynamiky mohou její intermediální částice (gluony) interagovat i mezi sebou.

1.1 Kvarky

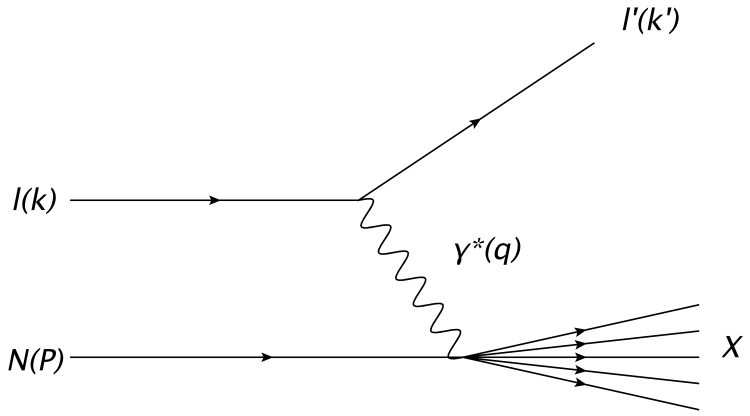
Kvarky jsou částice se spinem 1/2 a neceločíselným nábojem. Jejich přehled je v Tab. 1.1. Kvarky mohou interagovat pomocí silné, slabé a elektromagnetické interakce. V současné době jsou považovány za elementární částice. Hadrony jsou částice tvořené kvarky a podle jejich počtu je můžeme rozdělit na mezony, které jsou složeny z kvarku a antikvarku, a baryony, které se skládají ze tří kvarků. Předpokládá se také, že existují pentakvarky a tetrakvarky. I přes velké množství experimentů nebyly přímo pozorovány žádné volné kvarky.

1.2 Gluony

Gluony jsou nehmotné částice se spinem 1 a nulovým elektrickým nábojem. Jedná se o intermediální částice silné interakce, která se dá charakterizovat pomocí výměny

kvark	náboj	podivnost	půvab	krása	pravda
d	-1/3	0	0	0	0
u	+2/3	0	0	0	0
s	-1/3	-1	0	0	0
c	+2/3	0	+1	0	0
b	-1/3	0	0	-1	0
t	+2/3	0	0	0	+1

Tabulka 1.1: Tabulka základních vlastností kvarků.



Obrázek 1.1: Grafické znázornění hluboce nepružného rozptylu.

barevného náboje. Důvodem, proč byla zavedena barva, byla existence částice Δ^{++}, která se skládá ze tří u kvarků. Protože kvarky jsou fermiony se spinem $1/2$, nemůžou existovat dva kvarky ve stejném stavu a v této částici musí být dva kvarky ve stejném stavu. Z tohoto důvodu byl zaveden barevný náboj. Tento náboj může nabývat hodnot R, G a B (a příslušných antibarev) a každá částice, která může interagovat silně, má jeden z těchto nábojů. Gluony zprostředkovávají výměnu těchto barev (interakci částic) a mohou existovat v těchto variantách: $R\bar{B}$, $R\bar{G}$, $B\bar{G}$, $B\bar{R}$, $G\bar{R}$, $G\bar{B}$, $1/\sqrt{2}(R\bar{R}-B\bar{B})$, $1/\sqrt{6}(R\bar{R}+B\bar{B}-2G\bar{G})$, které se nazývají barevný oktet. Dále existuje ještě jeden gluon - $1/\sqrt{3}(R\bar{R}+B\bar{B}+G\bar{G})$, který ale nemá fyzikální význam. Částice s nenulovým barevným nábojem nelze pozorovat samostatně. Gluony se mohou rozpadnout na pár kvark antikvark, nebo mohou vyzářit gluon.

1.3 Strukturní funkce

1.3.1 Hluboce nepružný rozptyl

Hluboce nepružný rozptyl [1, 2] je experiment, který se využívá pro studium struktury hadronů. Tento experiment lze popsat pomocí následující rovnice:

$$l(k) + N(P) \rightarrow l'(k') + X, \tag{1.1}$$

kde $l(k)$ je nalétávající lepton s čtyřhybností k, $N(P)$ je hadron s čtyřhybností P. Přilétávající lepton vyzáří virtuální foton s čtyřhybností q, který následně interaguje s hadronem. Lepton vyletí ze srážky s novou čtyřhybností k' a hadron se rozpadne na stav X. Nejčastěji se za lepton volí elektron a za hadron proton. Hluboce nepružný rozptyl je graficky znázorněn na Obr. 1.1.

Pro popis experimentu je výhodné zavést Lorentz-invariantní proměnné [3]:

$$s = (P + k)^2, \qquad W^2 = (P + q)^2, \qquad Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 \tag{1.2}$$

$$x = \frac{Q^2}{2Pq}, \qquad y = \frac{PQ}{Pk}, \qquad \nu = \frac{Pq}{m_p}. \tag{1.3}$$

První z nich je s, což je Mandelstamova proměnná, která značí kvadrát celkové energie systému v těžišťové soustavě. W^2 je kvadrát celkové energie, která je dostupná pro tvorbu finálního stavu X, a je rovna klidové hmotnosti tohoto finálního stavu M_X^2. Q^2 je virtualita, kterou lze interpretovat jako „rozlišení“ srážky. V případě, že je virtualita malá (malý přenesený kvadrát čtyřhybnosti), tak se proton chová jako bodová částice, ale s rostoucím Q^2 lze pozorovat jemnější strukturu protonu. Další proměnnou je Bjorkenovo x, která nabývá hodnot od nuly do jedné a čím menší je Bjorkenovo x, tím větší je energie ve srážce. Inelasticita y je podíl energie nesené virtuálním fotonem vůči energii původního leptonu. Inelasticita nabývá hodnoty nula pro elastickou srážku a čím více se blíží jedné, tím více je srážka nepružná. Poslední zmíněnou proměnou je ν, která v laboratorní soustavě značí, kolik energie přešlo z elektronu na proton (m_p je hmotnost protonu).

Účinný průřez hluboce nepružného rozptylu

Pro účinný průřez hluboce nepružného rozptylu lze odvodit vzorec [3]:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left(\left(1 - y - \frac{m_p^2 y^2}{Q^2}\right)\frac{F_2(x,Q^2)}{x} + y^2 F_1(x,Q^2)\right), \tag{1.4}$$

kde α je vazbová konstanta elektromagnetické interakce (konstanta jemné struktury). Tento účinný průřez závisí na dvou funkcích F_1 a F_2, kterým se říká strukturní funkce, a které jsou závislé na kvadrátu čtyřhybnosti přenesené fotonem Q^2 a Bjorkenově x. Závislost strukturních funkcí na virtualitě Q^2 a Bjorkenově x ukazuje na složitější vnitřní strukturu protonu. Rovnici (1.4), lze pro $Q^2 \gg m_p^2 y^2$ (tzv. Bjorkenova limita) zjednodušit do tvaru [1]:

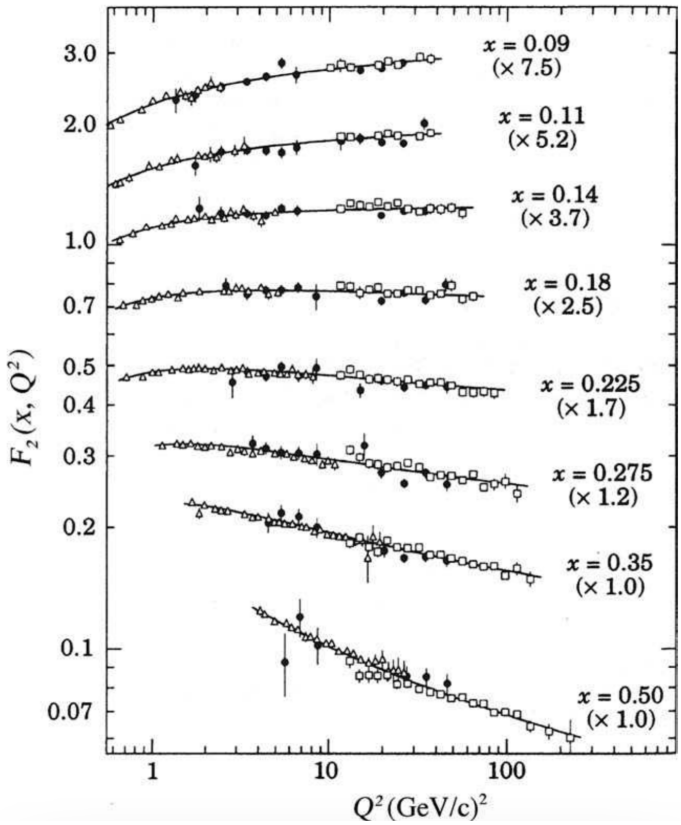
$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}x\mathrm{d}Q^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4}\left((1-y)\frac{F_2(x,Q^2)}{x} + y^2 F_1(x,Q^2)\right). \tag{1.5}$$

Bjorkenovo škálování a Callan-Grossův vztah

V prvních experimentech, při kterých byly měřeny strukturní funkce, bylo zjištěno, že strukturní funkce F_1 a F_2 jsou nezávislé na Q^2. Z tohoto důvodu lze zanedbat závislost strukturní funkce na Q^2 následovně:

$$F_1(x,Q^2) \to F_1(x) \quad \text{a} \quad F_2(x,Q^2) \to F_2(x). \tag{1.6}$$

Experimenty byly prováděny na lineárním urychlovači ve Stanfordu. Byly použity elektrony s energiemi mezi 5 a 20 GeV, se kterými se ostřeloval tekutý vodík. V pozdějších experimentech prováděných při vyšších energiích se zjistilo, že strukturní funkce přece jenom závisí na Q^2, a tím bylo narušeno Bjorkenovo škálování. Na Obr. 1.2 jsou naměřená data strukturních funkcí pro různé hodnoty Bjorkenova x.



Obrázek 1.2: Data z měření strukturních funkcí. Převzato z [2].

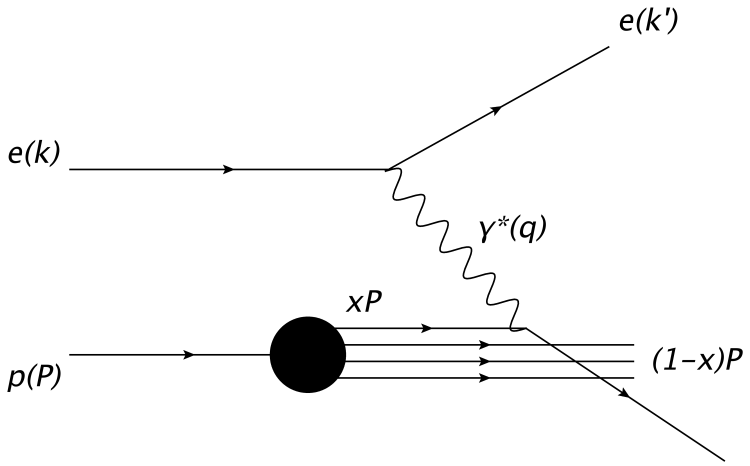
Dalším pozorování bylo zjištěno, že strukturní funkce F_1 a F_2 nejsou navzájem nezávislé (pro Q^2 v řádu jednotek GeV), ale splňují následující vztah, který se nazývá Callan-Grossův vztah [3]:

$$F_2(x) = 2xF_1(x). \tag{1.7}$$

Tento jev může být vysvětlen tím, že se jedná o rozptyl elektronu na bodových částicích se spinem 1/2, ze kterých se skládá proton. Toto zjištění bylo v souladu s paralelně vyvíjenou kvarkovou teorií popsanou v předchozí sekci 1.1.

1.3.2 Partonový model

Pro malá Q^2 je vlnová délka virtuálního fotonu velká (v porovnání s protonem), tudíž se proton při rozptylu virtuálního fotonu chová jako bodová částice. V případě, že se zvýší energie virtuálního fotonu, pak se jeho vlnová délka zmenší a je možné pozorovat jemnější strukturu protonu. Partonový model [1–3] je takový model protonu, ve kterém je proton složen z konstituentů (partonů). Každý z těchto partonů nese frakci hybnosti x z celkové hybnosti protonu. Partonový model je definován v soustavě, kde má proton nekonečnou hybnost a v této soustavě lze frakci hybnosti x interpretovat jako Bjorkenovo x (1.3). V tomto modelu virtuální foton interaguje pouze s partonem, který nese část frakci hybnosti x a zbytek protonu se reakce neúčastní. Případ, kdy se elektron rozptyluje na partonu lze popsat pomocí Obr. 1.3.



Obrázek 1.3: Nákres hluboce nepružného rozptylu v přiblížení partonového modelu.

Strukturní funkce lze pomocí partonového modelu vyjádřit jako:

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \quad a \quad F_1(x) = \frac{1}{2x} F_2(x), \tag{1.8}$$

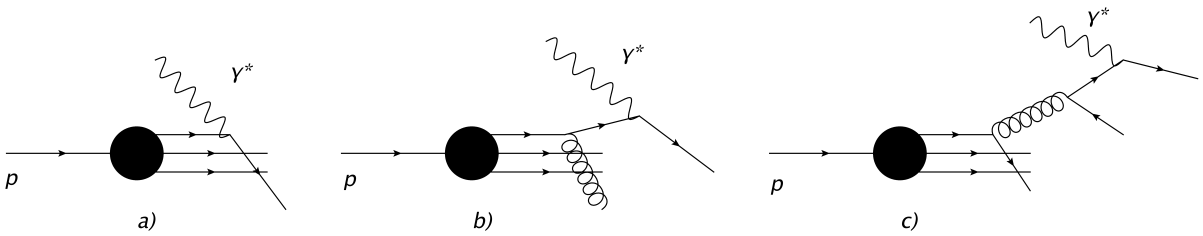
kde $f_i(x)$ se nazývá partonová distribuční funkce, která značí pravděpodobnost, že parton i má hybnost xP a e_i je náboj partonu v jednotkách elementárního náboje. Strukturní funkce lze tedy rozepsat jako sumu součinu kvadrátu náboje partonu, Bjorkenova x a partonové distribuční funkce, vysčítanou přes všechny partony. Ze znalosti nábojů kvarků a rozepsání partonových distribučních funkcí na distribuční funkce kvarků $u(x)$ a antikvarků $\bar{u}(x)$ lze rovnici (1.8) přepsat do následujícího tvaru:

$$\frac{1}{x} F_2(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (u(x) + \bar{u}(x)) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (d(x) + \bar{d}(x)) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (s(x) + \bar{s}(x)). \tag{1.9}$$

Celková suma byla provedena přes tři různé vůně kvarků - u, d, s. Pro proton, který je z kvarkového modelu [1] složen ze dvou kvarků u a jednoho kvarku d, musí být splněny následující rovnice:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u(x) - \bar{u}(x)) \mathrm{d}x &= 2 \\ \int_0^1 (d(x) - \bar{d}(x)) \mathrm{d}x &= 1 \\ \int_0^1 (s(x) - \bar{s}(x)) \mathrm{d}x &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Tyto rovnice značí, že při integraci distribučních funkcí přes všechna x, musí celkový počet kvarků odpovídat kvarkovému modelu. Střední hodnota celkové hybnosti



Obrázek 1.4: Nákres interakce virtuálního fotonu s partonem. a) foton interaguje přímo s partonem, b) parton před interakcí vyzáří gluon, c) parton vyzáří gluon, který se rozpadne na pár kvark antikvark a foton se rozptýlí na vzniklém kvarku (antikvarku)

nesená kvarky může být vypočtena pomocí strukturní funkce F_2 [3]:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^1 x F_2(x) \mathrm{d}x}{\int_0^1 F_2(x) \mathrm{d}x} \approx 0.5. \tag{1.11}$$

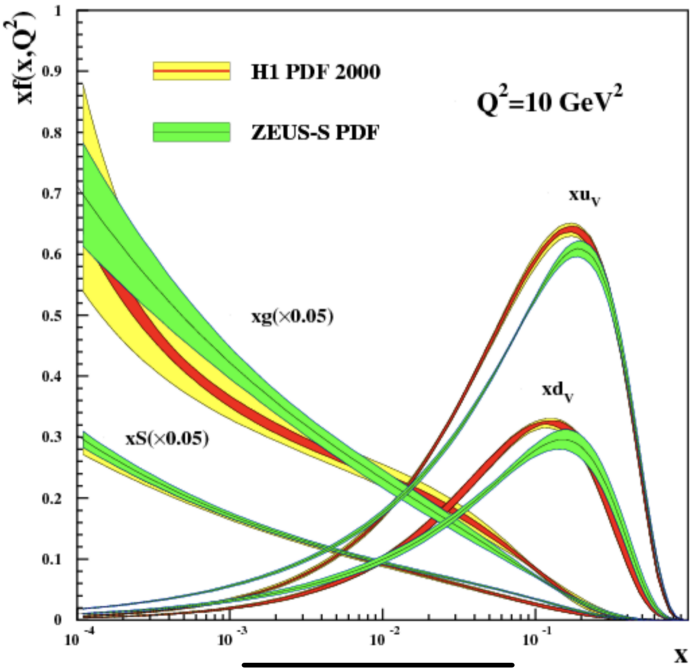
Experimentálně bylo zjištěno, že pouze přibližně jedna polovina střední hodnoty celkové hybnosti protonu je nesena kvarky, a tudíž proton musí obsahovat navíc i elektricky neutrální částice, které zanechají strukturní funkci nezměněnou, a které ponesou zbylou střední hodnotu hybnost protonu. Těmito částicemi jsou gluony.

1.3.3 Kvarky a gluony v rámci hluboce nepružného rozptylu

Partony z partoného modelu lze identifikovat jako kvarky a gluony. Kvarky lze rozdělit do dvou kategorií [2] na valenční a mořské. Valenční kvarky dominují pro vysoká x (nízké energie) a mořské dominují pro nízká x. Mořské kvarky vznikají rozpadem gluonu na pár kvark a antikvark. Partony s malým Bjokenovým x mohou vzniknout tím, že parton vyzáří před interakcí gluon a virtuální foton následovně zreaguje se vzniklým partonem. Další možností je, že parton vyzáří gluon, který se poté rozpadne na pár kvark antikvark a virtuální foton zreaguje s jedním z nich. Tento efekt je znázorněn na Obr. 1.4. Platí tedy, že pro vysoké x se proton chová jako částice složená ze tří kvarků (uud) a pro nižší x se v jeho struktuře začnou projevovat mořské kvarky a gluony, jak je vidět na Obr. 1.5.

1.4 Evoluční rovnice

Evoluční rovnice popisují strukturu hadronů v závislosti na Bjorkenově x (případně na rapiditě Y) a virtualitě Q^2 virtuálního fotonu, kterým se zkoumá jeho struktura. Z předchozího odstavce plyne, že se zvyšující se energií ve srážce roste počet mořských kvarků a gluonů, a tudíž je pozorováno větší množství stejně velkých partonů. Naopak pro konstantní energii a pro zvyšující se virtualitu fotonu lze pozorovat jemnější strukturu. Tyto jevy jsou na znázorněny na Obr. 1.6.



Obrázek 1.5: Závislost protonové struktury na Bjorkenově x získaná z experimentů na urychlovači HERA. Převzato z [4]

1.4.1 DGLAP rovnice

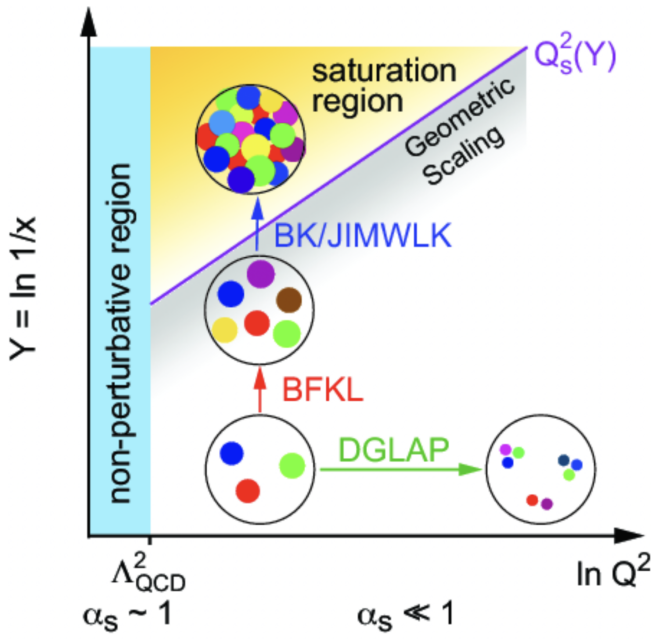
První z evolučních rovnic je rovnice DGLAP [1] (Dokshitser-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi), která popisuje vývoj struktury protonu se zvětšující se virtualitou Q^2 (a konstantním Bjorkenovým x). Pro evoluci kvarků ji lze zapsat následovně:

$$\frac{\mathrm{d}q_i(x,Q^2)}{\mathrm{d}\ln(Q^2)} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\left(q_i(y,Q^2)P_{q\bar{q}}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y,Q^2)P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right)\right), \tag{1.12}$$

kde α_s je vazbová konstanta silné interakce. $q_i(x,Q^2)$ jsou distribuce kvarků s vůní i v protonu (i nabývá všech hodnot vůně). První část této rovnice vyjadřuje fakt, že kvark s frakcí hybnosti x pochází z mateřského kvarku s frakcí hybnosti y, který vyzářil gluon s přesně danou hybností, kde $P_{q\bar{q}}$ je tzv. větvící funkce vyjadřující pravděpodobnost tohoto vyzáření. Druhý sčítanec značí, že výsledný kvark pochází s gluonu s frakcí hybnosti y, který vyzářil pár kvark antikvark. Pravděpodobnost tohoto jevu je popsána větvící funkcí P_{qg}. Pro evoluci gluonů lze zapsat rovnici podobně:

$$\frac{\mathrm{d}g(x,Q^2)}{\mathrm{d}\ln(Q^2)} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\left(\sum_i q_i(y,Q^2)P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y,Q^2)P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right)\right), \tag{1.13}$$

kde $g(x,Q^2)$ jsou distribuce gluonů. Opět lze rovnici interpretovat jako to, že gluon pochází z kvarku $q_i(y,Q^2)$, který vyzářil gluon s pravděpodobností P_{gq}. Druhá část rovnice odpovídá tomu, že gluon pochází z mateřského gluonu s větším zlomkem hybnosti protonu $g(y,Q^2)$, který vyzářil gluon, P_{gg} udává pravděpodobnost tohoto děje.



Obrázek 1.6: Diagram evoluce hadronové struktury s měnící se rapiditou a virtualitou. Převzato z [5].

1.4.2 BFKL a JIMWLK rovnice

BFKL (Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov) [5] rovnice popisuje evoluci partonů při konstantní virtualitě Q^2 a rostoucí rapiditě Y respektive s klesajícím x. S rostoucí rapiditou roste v protonu počet partonů, které mají stejně velkou energii. Tato rovnice popisuje systém pouze pro nepříliš velké rapidity. V případě, že by se rapidita neustále zvyšovala, rostl by tedy neustále počet partonů a limitně by se v protonu muselo nacházet nekonečné množství partonů. Tento efekt, ale není možný, jelikož by pozorovatelné veličiny divergovaly, což je v rozporu s pozorováními. Předpokládá se tedy, že v určitém momentu se začnou gluony rekombinovat a jejich počet dále neroste stejnou rychlostí. Tento jev lze popsat pomocí JIMWLK [5] (Jalilian-Marian, Iancu, McLerran, Weigert, Leonidov, Kovner) evoluční rovnice. Tato rovnice je základem teorie Color Glass Condensate (CGC), která popisuje hadrony při vysokých energiích, kdy dochází k saturaci gluonů. Název této teorie ukazuje na vlastnosti stavu hadronů, které popisuje: color - gluony mají barevný náboj, glass - k evoluci systému dochází pouze pomalu a systém se chová jako amorfní struktura, condensate - systém je ve stavu daném saturovanými gluony.

Kapitola 2

Produkce vektorových mezonů

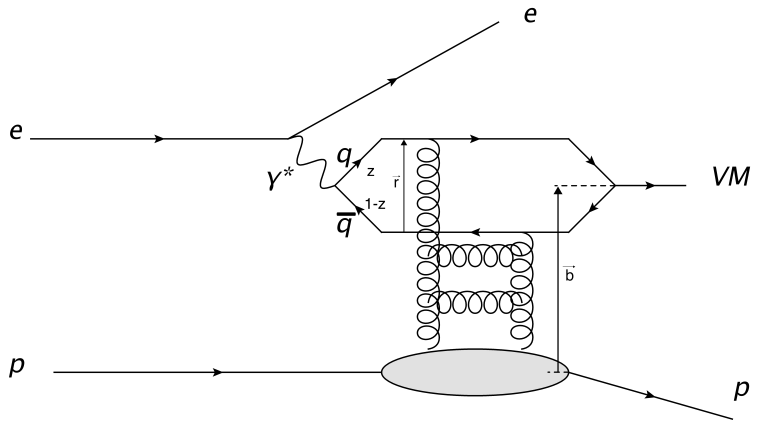
Vektorové mezony [6] jsou hadrony, které se skládají z páru kvark antikvark, mají paritu -1 a moment hybnosti 1. Mezi nejznámější vektorové mezony patří částice J/Ψ, která je tvořena párem půvabných kvarků $c\bar{c}$. Tento mezon je částice s nulovým půvabem, ale protože se skládá z půvabných kvarků jde o částici se skrytým půvabem. Dalším vektorovým mezonem je mezon ϕ. Ten se skládá z páru podivných kvarků $s\bar{s}$. Posledním použitým mezonem v této práci je mezon ρ, který se skládá ze superpozice $1/\sqrt{2}(u\bar{u} - d\bar{d})$.

2.1 Barevný dipól

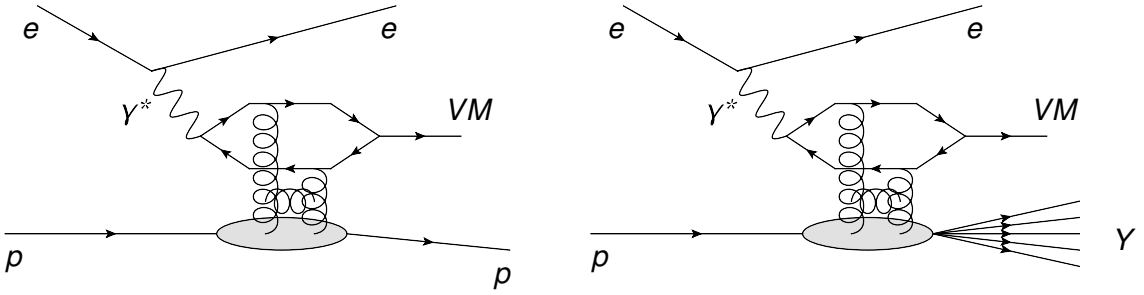
Přiblížení barevného [7] dipólu je model, ve kterém je možné popsat velké množství procesů v rámci QCD při vysokých energiích a jedním z nich je i produkce vektorových mezonů. V toto modelu se využívá toho, že se virtuální foton může rozpadnout na pár kvark antikvark, který může existovat po dobu danou relacemi neurčitosti. Celý proces lze popsat následovně (viz Obr. 2.1): V první fázi se virtuální foton rozdělí na pár kvark antikvark, každý z nich nese zlomek původní hybnosti z respektive $(1 - z)$. Tento dipól má příčnou velikost $\vec{r}$ a následně silně interaguje s protonem tím, že si s ním vymění gluony. Na závěr z páru kvark antikvark vznikne vektorový mezon.

Rozlišujeme dva případy produkce vektorových mezonů. První z nich je exkluzivní produkce, při které nedochází k rozpadu protonu na hadronický systém. Druhým z nich je disociativní produkce, při které na rozdíl od exkluzivní produkce dochází k rozpadu protonu na další částice. Nákres exkluzivní a disociativní produkce je na Obr. 2.2. Produkci vektorových mezonů lze dále rozdělit na elektroprodukci a fotoprodukci. Při fotoprodukci je virtualita virtuálního fotonu blízká nule, pro větší virtuality $Q^2 > 0$ hovoříme o elektroprodukci.

Pro popis produkce vektorových mezonů se zavádí nová proměnná $\vec{\Delta}$, která je definovaná jako ztráta hybnosti protonu $\vec{\Delta} = \vec{P} - \vec{P}'$. Dále se využívá proměnná t, která je obdobou Q^2 pro proton, tedy $t = -\vec{\Delta}^2$. Amplitudu (transverzální, longitudinální)



Obrázek 2.1: Nákres produkce vektorových mezonů v přiblížení barevného dipólu.



Obrázek 2.2: Nákres exkluzivní produkce vektorových mezonů (vlevo) a disociativní produkce (vpravo).

pro produkci vektorových mezonů lze vyjádřit následovně [8]:

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \to VMp}(x, Q^2, \vec{\Delta}) = i \int \mathrm{d}^2\vec{r} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{4\pi} |\Psi_{VM}^* \Psi_{\gamma^*}| \mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, \vec{r}, \vec{\Delta}), \tag{2.1}$$

kde $\mathcal{A}_{q\bar{q}}(x, \vec{r}, \vec{\Delta})$ je amplituda interakce páru $q\bar{q}$ s protonem a $|\Psi_{VM}^* \Psi_{\gamma^*}|$ je konvoluce vlnové funkce virtuálního fotonu a vlnové funkce vektorového mezonu. Vzorec (2.1) lze přepsat do tvaru [8]:

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \to VMp}(x, Q^2, \vec{\Delta}) = i \int \mathrm{d}^2\vec{r} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{4\pi} \int \mathrm{d}^2\vec{b} |\Psi_{VM}^* \Psi_{\gamma^*}| e^{-i[\vec{b}-(1-z)\vec{r}]\cdot\vec{\Delta}} \frac{\mathrm{d}\sigma_{q\bar{q}}}{\mathrm{d}\vec{b}}. \tag{2.2}$$

Kde $\frac{d\sigma_{q\bar{q}}}{d\vec{b}}$ je diferenciální účinný průřez pro rozptyl páru kvark antikvark na protonu. Komplexní exponenciálu lze přepsat pomocí Besselových funkcí a dále za využití sférické symetrie protonu lze vzorec dále upravit na:

$$\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p \to VMp}(x, Q^2, \Delta) = i \int_0^\infty \mathrm{d}r 2\pi r \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{4\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}b 2\pi b |\Psi_{VM}^* \Psi_{\gamma^*}| J_0(b\Delta) J_0((1-z)r\Delta) \frac{\mathrm{d}\sigma_{q\bar{q}}}{\mathrm{d}\vec{b}}, \tag{2.3}$$

kde J_0 jsou Besselovy funkce prvního druhu. Bjorkenovo x je v tomto případě rovno [9]:

$$x = \frac{Q^2 + M_{VM}^2}{Q^2 + W^2}, \tag{2.4}$$

kde W^2 je kvadrát součtu čtyřhybností protonu P a virtuálního fotonu q. Vůči proměnné W se velmi často vykreslují grafy účinného průřezu produkce vektorových mezonů.

2.2 Diferenciální a celkový účinný průřez

Pomocí amplitudy pro produkci vektorových mezonů lze vypočítat transverzální a longitudinální diferenciální účinný průřez:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{T,L}^{\gamma^* p\to VMp}}{\mathrm{d}|t|} = \frac{1}{16\pi}|\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p\to VMp}|^2. \tag{2.5}$$

Celkový diferenciální účinný průřez pak získáme sečtením longitudinální a transverzální části:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\gamma^* p\to VMp}}{\mathrm{d}|t|} = \frac{\mathrm{d}\sigma_T^{\gamma^* p\to VMp}}{\mathrm{d}|t|} + \frac{\mathrm{d}\sigma_L^{\gamma^* p\to VMp}}{\mathrm{d}|t|} = \frac{1}{16\pi}(|\mathcal{A}_T^{\gamma^* p\to VMp}|^2 + |\mathcal{A}_L^{\gamma^* p\to VMp}|^2). \tag{2.6}$$

Z diferenciálního účinného průřezu lze vypočítat celkový účinný průřez tím, že se pře integruje přes t.

$$\sigma(x, Q^2) = \int_0^\infty \mathrm{d}|t| \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}|t|} \tag{2.7}$$

2.3 Korekce

Amplituda produkce vektorových mezonů se musí na závěr ještě zkorigovat. Tato korekce vychází z předpokladu, že S matice není čistě reálná a výsledná amplituda není čistě imaginární. Korekce na reálnou část amplitudy lze provést vynásobením výsledné amplitudy faktorem $\sqrt{1+\beta_{T,L}^2}$ [8], kde:

$$\beta_{T,L} = \tan\left(\frac{\pi\lambda_{T,L}}{2}\right), \qquad \lambda_{T,L} = \frac{\partial \ln(\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p\to VMp})}{\partial \ln(\frac{1}{x})} = \frac{x}{\mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p\to VMp}} \frac{\partial \mathcal{A}_{T,L}^{\gamma^* p\to VMp}}{\partial x}. \tag{2.8}$$

Druhá korekce je korekce na skewedness, která pochází z faktu, že gluony vyměňované na Obr. 2.1 mohou nést různá Bjorkenova x. V tomto případě je třeba vynásobit amplitudu faktorem $(R_g)_{T,L}$ [8]:

$$(R_g)_{T,L} = \frac{2^{2\lambda_{T,L}+3}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\lambda_{T,L}+\frac{5}{2})}{\Gamma(\lambda_{T,L}+4)}, \tag{2.9}$$

kde $\lambda_{T,L}$ je stejné jako v korekci na reálnou část a Γ je Gamma funkce.

2.4 Vlnové funkce

Konvoluce vlnových funkcí virtuálního fotonu a výsledného vektorového mezonu (respektive její transverzální a longitudinální část) lze zapsat následovně [8]:

$$|\Psi^*_{VM}\Psi_{\gamma^*}|_T = \hat{e_f}e\frac{N_c}{\pi z(1-z)}(m_f^2 K_0(\epsilon r)\phi_T(r,z) - (z^2+(1-z)^2)\epsilon K_1(\epsilon r)\partial_r\phi_T(r,z)) \tag{2.10}$$

$$|\Psi^*_{VM}\Psi_{\gamma^*}|_L = \hat{e_f}e\frac{N_c}{\pi}2Qz(1-z)K_0(\epsilon r)(M_V\phi_L(r,z) + \delta\frac{m_f^2-\nabla_r^2}{M_V z(1-z)}\phi_L(r,z)). \tag{2.11}$$

Efektivní náboj vektorových mezonů označujeme $\hat{e_f}$ ($\hat{e_f} = 2/3, 1/3, 1/\sqrt{2}$ pro J/Ψ, ϕ a ρ), $e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}}$, $\epsilon^2 = z(1-z)Q^2 + m_f^2$, počet barev je $N_c = 3$. $K_{0,1}$ jsou modifikované Besselovy funkce a m_f, M_V je hmotnost kvarku respektive vektorového mezonu. ∇_r^2 je Laplaceův operátor, který vypadá ve sférických souřadnicích následovně:

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r}\partial_r + \partial_r^2. \tag{2.12}$$

Poslední částí jsou skalární funkce $\phi_{T,L}$. Tyto funkce lze nalézt ze dvou modelů: gaussian a boosted gaussian. První z nich modeluje skalární funkci jako gaussovské rozdělení [8]:

$$\phi_T(r,z) = N_T(z(1-z))^2 e^{-r^2/2R_T^2} \tag{2.13}$$

$$\phi_T(r,z) = N_L z(1-z)e^{-r^2/2R_L^2}. \tag{2.14}$$

V tomto modelu je $\delta = 0$. V druhém modelu - boosted gaussian - se volí skalární funkce následovně [8]:

$$\phi_{T,L}(r,z) = N_{T,L}z(1-z)\exp\left(-\frac{m_f^2R^2}{8z(1-z)} - \frac{2z(1-z)r^2}{R^2} + \frac{m_f^2R^2}{2}\right) \tag{2.15}$$

a δ se volí jako $\delta = 1$.

2.5 Modely dipólového účinného průřezu

Pro výpočet amplitudy ze vzorce (2.3) je třeba znát diferenciální dipólový účinný průřez. Tento účinný průřez lze nalézt z optického teorému [10]:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\vec{b}} = 2N(x,r,b), \tag{2.16}$$

kde $N(x,r,b)$ je dopředná dipólová amplituda. Jelikož získat plnou amplitudu se závislostí na b může být složitější, lze ji pro dva modely (GBW a CGC) separovat následovně:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\vec{b}} = \sigma_0 N(x,r)T_p(\vec{b}), \tag{2.17}$$

kde σ_0 je parametr, který může být odvozen z naměřených dat, případě jej lze vypočítat z kvadrátu poloměru protonu B. $T_p(b)$ je profilová funkce protonu, která charakterizuje rozdělení hustoty gluonů v protonu v příčné rovině, v této práci je využit model, ve kterém je proton ve tvaru Gaussova rozdělení:

$$T_p(b) = \frac{1}{2\pi B} e^{-\frac{b^2}{2B}} \tag{2.18}$$

σ_0 je pro tento model voleno jako $\sigma_0 = 4\pi B$. V případě, že se diferenciální dipólový účinný průřez integruje přes b, lze získat celkový dipólový účinný průřez následovně:

$$\sigma_{q\bar{q}} = \int \mathrm{d}\vec{b}\sigma_0 N(x,r) T_p(\vec{b}) = \sigma_0 N(x,r), \tag{2.19}$$

kde druhá rovnost vyplývá z normalizační podmínky na profilovou funkci $T_p(b)$.

2.5.1 GBW

V GBW modelu lze nalézt celkový účinný průřez interakce proton dipól pomocí následujícího vzorce [11, 12]:

$$\sigma_{q\bar{q}}^{GBW}(x,r) = \sigma_0(1 - e^{r^2 Q_s^2(x)/4}), \tag{2.20}$$

kde $Q_s(x)$ je saturační škála závislá na Bjorkenově x, lze ji vyjádřit jako $Q_s^2(x) = (\frac{x_0}{x})^{\lambda_{GBW}}$. Parametry x_0 a λ_{GBW} se získají z fitu dat. Druhý z těchto parametrů λ_{GBW} je člen, který určuje rychlost růstu dipólového účinného průřezu s klesajícím x. GBW model dává dobré výsledky pro hodnoty od $Q^2 \sim 0.1\,\mathrm{GeV}^2$ do $Q^2 \sim 30\,\mathrm{GeV}^2$, pro vyšší Q^2 nesouhlasí s DGLAP evoluční rovnicí [8].

2.5.2 CGC

CGC model [13] využívá pro výpočet dipólového účinného průřezu přibližné řešení Balitsky-Kovchegov rovnice. V CGC modelu lze dipólový účinný průřez vypočítat následovně:

$$\sigma_{q\bar{q}}^{CGC} = \sigma_0 \cdot \begin{cases} \mathcal{N}_0 (\frac{rQ_s}{2})^{2(\gamma_s + \frac{1}{\kappa\lambda Y}\ln\frac{2}{rQ_s})} & \text{pro } rQ_s \leq 2 \\ 1 - e^{-A\ln^2(BrQ_s)} & \text{pro } rQ_s \geq 2 \end{cases} \tag{2.21}$$

kde $Y = \ln(1/x)$, $Q_s(x) = (x_0/x)^{\lambda/2}$. Parametry σ_0, $\mathcal{N}_0$, λ a x_0 se získají z fitu dat. Parametry A a B lze získat z:

$$A = -\frac{\mathcal{N}_0^2 \gamma_s^2}{(1-\mathcal{N}_0)^2 \ln(1-\mathcal{N}_0)}, \qquad B = \frac{1}{2}(1-\mathcal{N}_0)^{-\frac{(1-\mathcal{N}_0)}{\mathcal{N}_0\gamma_s}} \tag{2.22}$$

2.5.3 b-CGC

Posledním použitým modelem je b-CGC, který vychází z CGC modelu upraveného tak, aby zahrnoval závislost na $\vec{b}$ [8]:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{q\bar{q}}}{\mathrm{d}\vec{b}} = 2\mathcal{N}(x,r,b) = 2\cdot\begin{cases}\mathcal{N}_0(\frac{rQ_s}{2})^{2(\gamma_s+\frac{1}{\kappa\lambda Y}\ln\frac{2}{rQ_s})} & \text{pro } rQ_s \leq 2\\ 1-e^{-A\ln^2(BrQ_s)} & \text{pro } rQ_s \geq 2\end{cases} \tag{2.23}$$

Závislost na $\vec{b}$ je přidána v $Q_s(x,b)$:

$$Q_s(x,b) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\lambda/2}\left(\exp\left(-\frac{b^2}{2B_{CGC}}\right)\right)^{1/2\gamma_s}. \tag{2.24}$$

Volné parametry tohoto modelu, které se získají z fitu dat, jsou $\mathcal{N}_0$, λ a x_0.

2.6 Hot spot model

Hot spot model [10] je takový model, ve kterém je proton modelován pomocí shluku gluonů, které jsou v něm náhodně rozmístěny a jejich rozmístění se mění event-by event. Počet těchto gluonů na pozicích b_i je N_{hs} a každý z nich má gaussovský tvar. Profilová funkce protonu lze tedy zapsat:

$$T(\vec{b}) = \frac{1}{N_{hs}}\sum_{i=1}^{N_{hs}} T_{hs}(\vec{b}-\vec{b_i}), \tag{2.25}$$

$$T_{hs}(\vec{b}-\vec{b_i}) = \frac{1}{2\pi B_{hs}} e^{-\frac{(\vec{b}-\vec{b_i})^2}{2B_{hs}}}, \tag{2.26}$$

kde T_{hs} je profilová funkce gluonů, B_{hs} je kvadrát poloměru gluonu. Umístění gluonů b_i je generováno z 2D gaussovského rozdělení se středem v $(0,0)$ a odchylkou $\sigma = \sqrt{B_p}$, kde B_p je kvadrát poloměru protonu. Počet gluonů N_{hs} je vyšší pro vyšší energie, tudíž musí být $N_{hs} = N_{hs}(x)$. V této práci je využito parametrizace:

$$\langle N_{hs}(x)\rangle = p_0 x^{p_1}(1+p_2\sqrt{x}), \tag{2.27}$$

kde $p_0 = 0.011$, $p_1 = -0.58$, $p_2 = 300$. Z této rovnice lze vypočítat střední hodnotu parametru $\langle N_{hs}\rangle$, skutečná hodnota se získá z upraveného Poissonova rozdělení pro každý event zvlášť. Rovnici (2.1) lze v tomto modelu přepsat do tvaru [9]:

$$\mathcal{A}_{T,L} = i\mathcal{A}_b(\vec{\Delta})\mathcal{A}_r(x,Q^2,\Delta)_{T,L}, \tag{2.28}$$

kde

$$\mathcal{A}_b = \int \mathrm{d}\vec{b} e^{-i\vec{b}\cdot\vec{\Delta}} T(\vec{b}) = e^{-B_{hs}\vec{\Delta}^2/2}\frac{1}{N_h s}\sum_{i=1}^{N_{hs}} e^{-i\vec{b_i}\cdot\vec{\Delta}} \tag{2.29}$$

a

$$\mathcal{A}_r(x,Q^2,\Delta)_{T,L} = \sigma_0 \int \mathrm{d}r 2\pi r \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{4\pi} |\Psi^*_{VM}\Psi_{\gamma^*}|_{T,L} J_0((1-z)r\Delta)N(x,r). \tag{2.30}$$

Na rozdíl od předchozí části lze v hot spot modelu integrál přes b vypočítat analyticky. Z hot spot modelu lze vypočítat diferenciální účinný průřez pro exkluzivní produkci vektorových mezonů:

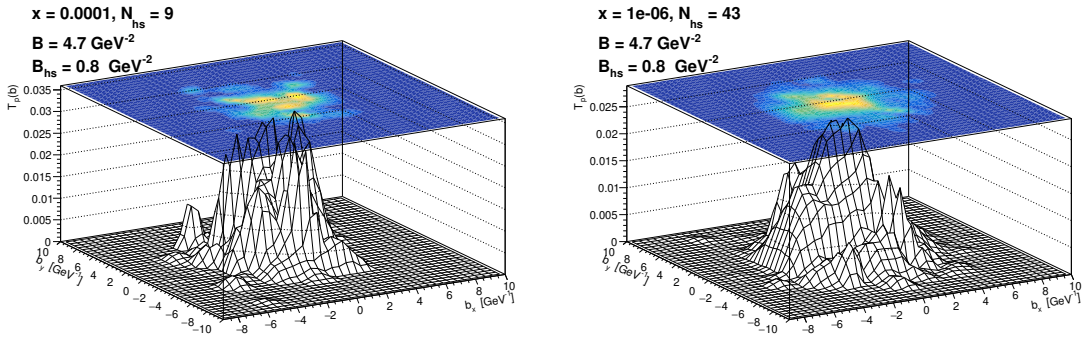
$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{T,L}^{\gamma^* p\to VMp}}{\mathrm{d}|t|} = \frac{(R_g^{T,L})^2}{16\pi}|\langle\mathcal{A}(x,Q^2,\Delta)_{T,L}\rangle|^2, \tag{2.31}$$

kde $|\langle\mathcal{A}(x,Q^2,\Delta)_{T,L}\rangle|^2$ je kvadrát střední hodnoty amplitudy a $R_g^{T,L}$ je korekce na skewedness (na rozdíl od předchozího případu, v hot spot modelu není třeba dělat korekci na reálnou část). Dále lze vypočítat diferenciální účinný průřez pro disociativní produkci vektorových mezonů:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{T,L}^{\gamma^* p\to VMp}}{\mathrm{d}|t|} = \frac{(R_g^{T,L})^2}{16\pi}(\langle|\mathcal{A}(x,Q^2,\Delta)_{T,L}|^2\rangle - |\langle\mathcal{A}(x,Q^2,\Delta)_{T,L}\rangle|^2), \tag{2.32}$$

kde $\langle|\mathcal{A}(x,Q^2,\Delta)_{T,L}|^2\rangle$ je střední hodnota kvadrátu amplitudy.

Hot spot model se implementuje následovně: Nejdříve se zvolí dostatečně velký počet eventů, následně se spočítá $\langle N_{hs}\rangle$, které se pro každý event vloží do modifikovaného Poissonova rozdělení a získá se tím hodnota N_{hs}. Dále se pro každý event vygeneruje příslušný počet $\vec{b_i}$ a vypočítá se amplituda (2.28). Podle toho jaká produkce se počítá se buď spočítá střední hodnota (exkluzivní produkce), nebo variance (disociativní produkce). Na Obr. 2.3 jsou pro ilustraci znázorněna možná rozložení tvarů protonu v hot spot modelu pro dvě různá x.



Obrázek 2.3: Znázornění profilové funkce protonu pro dvě různá x.

Kapitola 3

Výsledky

V této části bakalářské práce jsou uvedeny vypočítané účinné průřezy. Výsledky jsou pro tři různé vektorové mezony konkrétně J/Ψ, ϕ a ρ. Nejprve bude uvedena použitá parametrizace, která bude doprovozena grafy zobrazujícími vlnové funkce jednotlivých mezonů, dále budou uvedeny modely použité pro výpočet dipólového účinného průřezu a jednotlivé modely budou vykresleny do grafů pro jejich porovnání. Následně se práce věnuje na diferenciálnímu účinnému průřezu, který byl vypočítán pro proton modelovaný jako Gaussovo rozdělení. Pro tento model je dále uveden i celkový účinný průřez. V poslední části jsou uvedeny předpovědi pro hot spot model, ve kterém je vypočítána jak exkluzivní tak disociativní produkce. Veškeré výpočty byly prováděny v programu ROOT [14].

3.1 Parametrizace

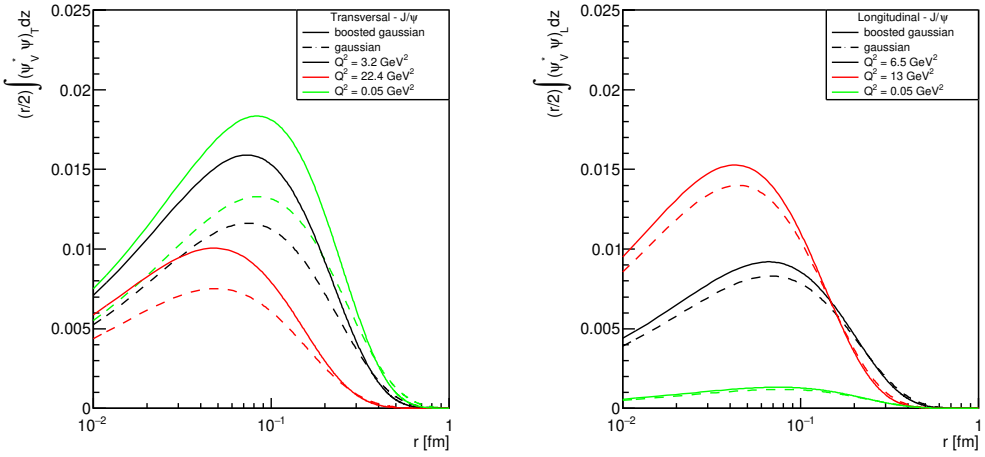
Pro konvoluci vlnových funkcí jsou využity dva modely - gaussian a boosted gaussian - viz sekce 2.4. Parametry použité pro výpočet této konvoluce jsou uvedeny v Tab. 3.1.

		M_V [GeV]	m_f [GeV]	N_T	N_L	R_T^2 [GeV^{-2}]	R_L^2 [GeV^{-2}]	R^2 [GeV^{-2}]
J/Ψ	gaussian	3.097	1.4	1.23	0.83	6.5	3.0	-
	boosted gaussian			0.578	0.575	-	-	2.3
ϕ	gaussian	1.019	0.14	4.75	1.41	16.0	9.7	-
	boosted gaussian			0.919	0.825	-	-	11.2
ρ	gaussian	0.776	0.14	4.47	1.79	21.9	10.4	-
	boosted gaussian			0.911	0.853	-	-	12.9

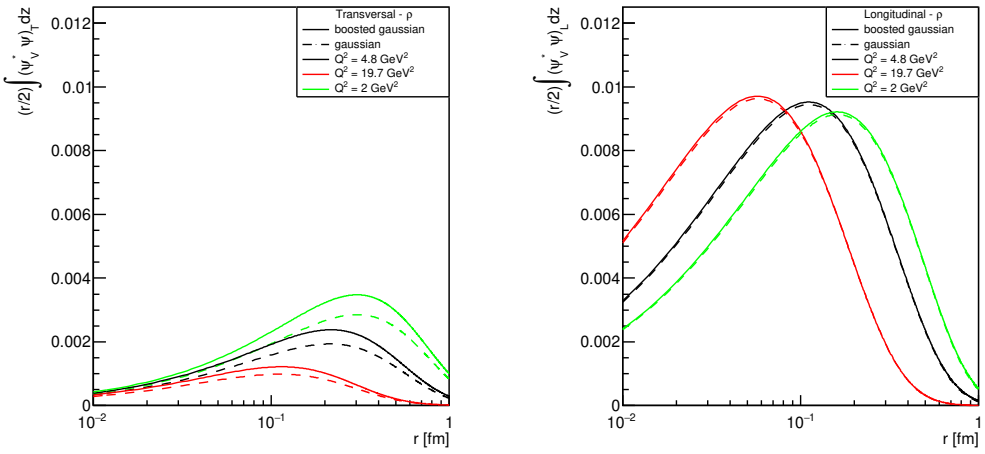
Tabulka 3.1: Tabulka použitých parametrů v konvoluci vlnových funkcí. [8]

Na Obr. 3.1 je vynesena závislost integrálu konvoluce vlnových funkcí na velikosti

dipólu pro mezon J/Ψ. Barevně jsou odlišeny různé virtuality Q^2 a stylem čáry jsou rozlišeny modely gaussian (přerušovaná čára) a boosted gaussian (plná čára). Pro nízké Q^2 dominuje transverzální část. Se zvyšujícím Q^2 se poměr mezi longitudinální a transverzální částí vyrovnává a pro vyšší Q^2 převažuje longitudinální část. Rozdíl mezi modely gaussian a boosted gaussian je zejména v transverzální části, kdy gaussian model dává asi o třetinu nižší výsledky než druhý model. Na Obr. 3.2 je vykreslena stejná veličina tentokrát pro mezon ρ. V tomto případě dominuje longitudinální část pro všechny vynesené Q^2. Dále stojí za zmínku, že pro mezon ρ jsou si modely gaussian a boosted gaussian velmi podobné, jak je vidět především v pravé části Obr. 3.2.



Obrázek 3.1: Integrál konvoluce vlnových funkcí v závislosti na velikosti dipólu pro mezon J/Ψ. Vlevo je transverzální část konvoluce, longitudinální je vpravo.



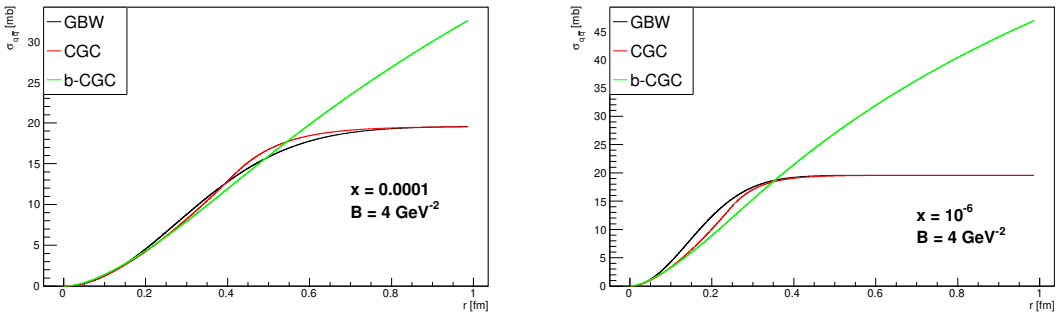
Obrázek 3.2: Integrál konvoluce vlnových funkcí v závislosti na velikosti dipólu pro mezon ρ. Vlevo je transverzální část konvoluce, longitudinální je vpravo.

Pro výpočet dipólového účinného průřezu jsou využity tři modely - GBW, CGC a b-CGC, viz sekce 2.5. Jejich parametry jsou uvedeny v Tab. 3.2. Na Obr. 3.3 je

vykreslena závislost dipólového účinného průřezu na velikosti dipólu pro dvě různá Bjorkenova x, konkrétně $x = 10^{-4}$ (vlevo) a $x = 10^{-6}$ (vpravo). Pro malé dipóly r dávají všechny tři modely velmi podobné hodnoty. Při vyšších hodnotách r se GBW a CGC modely saturují, kdežto b-CGC model roste i nadále. Při klesajícím Bjorkenově x se mění bod saturace GBW a CGC modelů. Bod saturace při $x = 10^{-4}$ je přibližně $r \approx 0.6\,\text{fm}$, kdežto při $x = 10^{-6}$ je bod saturace okolo $r \approx 0.4\,\text{fm}$. Při nižších Bjorkenových x je tedy vyšší pravděpodobnost vytvoření malého dipólu.

model	λ	x_0	$\mathcal{N}_0$	γ_s	$B_{CGC}[\text{GeV}^{-2}]$
GBW	0.287	$1.11 \cdot 10^{-4}$	-	-	-
CGC	0.2319	$6.226 \cdot 10^{-5}$	0.7	0.762	-
b-CGC	0.2023	$6.9 \cdot 10^{-4}$	0.3658	0.6492	5.5
GBW - hot spot	0.210	$2 \cdot 10^{-4}$	-	-	-

Tabulka 3.2: Tabulka použitých parametrů pro dipólové účinné průřezy. Pro CGC a b-CGC modely parametry pochází z [15], GBW model je z [8] a GBW - hot spot parametry pochází z [10].

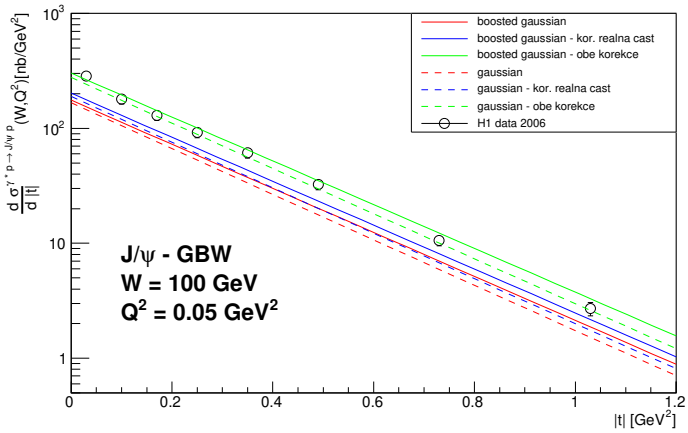


Obrázek 3.3: Dipólový účinný průřez pro modely GBW, CGC a b-CGC pro dvě různá Bjorkenova x.

3.2 Diferenciální účinný průřez

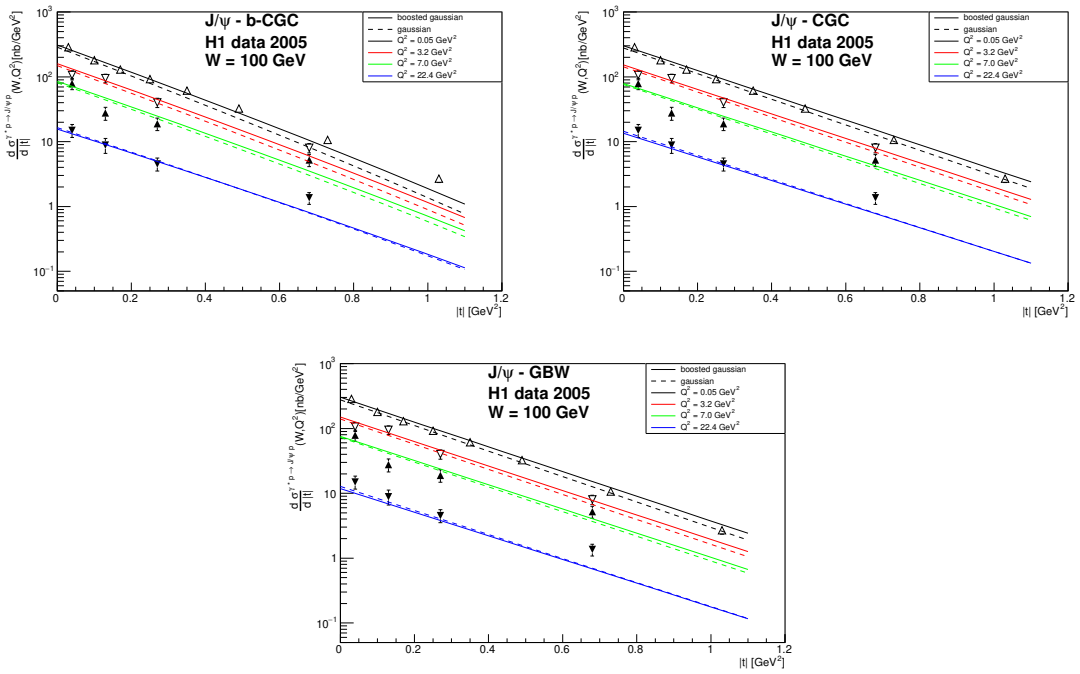
Diferenciální účinný průřez byl vypočítán z rovnice (2.5), za použití parametrů z Tab. 3.1 a 3.2. Kvadrát poloměru protonu je zvolen jako $B = 4\,\text{GeV}^{-2}$. Na Obr. 3.4 je závislost diferenciálního účinného průřezu v GBW modelu na kvadrátu přenesené čtyřhybnosti protonu $|t|$, předpověď je porovnána s daty z H1 [16]. Účinný průřez je uveden jak bez započítání korekcí tak se jejich započítáním. Je vidět, že korekce představují důležitou část výpočtu a nemohou být zanedbány, protože bez nich by model nedával hodnoty odpovídající naměřeným datům. Korekce na reálnou část upravuje původní výpočet asi o 10%, zatímco korekce na skewedness výpočet upravuje téměř o 50%. Rozdíl mezi modely gaussian a boosted gaussian je minimální a oba po provedení korekcí odpovídají datům.

Na Obr. 3.5 jsou diferenciální účinné průřezy mezonu J/Ψ pro modely b-CGC, CGC a GBW vždy pro několik virtualit při energii $W = 100\,\text{GeV}$. Výsledky jsou



Obrázek 3.4: Diferenciální účinný průřez mezonu J/Ψ pro GBW model při $Q^2 = 0.05\,\mathrm{GeV}^{-2}$ a $W = 100\,\mathrm{GeV}$.

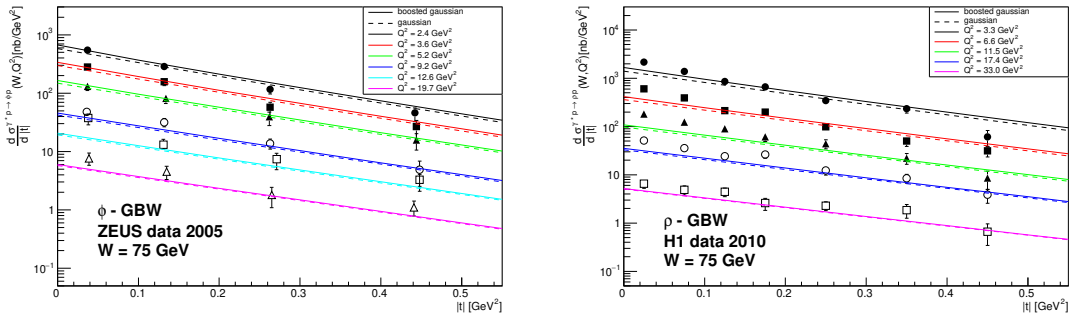
porovnány s daty z H1 [16]. Diferenciální účinný průřez se zmenšuje se vzrůstající virtualitou Q^2 a klesá s rostoucí hodnotou $|t|$. Hlavní rozdíl mezi modely dipólového účinného průřezu je pro vyšší $|t|$, kdy b-CGC model dává horší shodu s daty pro nízké virtuality, kdežto zbylé dva modely mají stále dobré výsledky. Rozdíl mezi gaussian a boosted gaussian je v rámci shody s daty minimální.



Obrázek 3.5: Diferenciální účinný průřez mezonu J/Ψ pro modely b-CGC, CGC a GBW při různých Q^2 a $W = 100\,\mathrm{GeV}$.

Na Obr. 3.6 je diferenciální účinný průřez pro mezon ϕ a mezon ρ. Jako model dipólového účinného průřezu byl použit GBW model. Data pochází z [17, 18]. GBW model dává dobré předpovědi pro mezon ϕ a pro mezon ρ jsou výsledky také dobré

až na oblast nízkých $|t|$, kdy jsou data mírně podhodnocena. Rozdíl mezi gaussian a boosted gaussian modelem je největší při nízkých virtualitách, kdy gaussian model dává nepatrně nižší výsledky. Pro vysoké virtuality jsou předpovědi téměř totožné. Při virtualitách okolo $Q^2 \approx 3.3\,\mathrm{GeV}^2$ má největší diferenciální účinný průřez mezon ρ, mezon ϕ má druhý největší diferenciální účinný průřez a nejnižších hodnot dosahuje mezon J/Ψ.



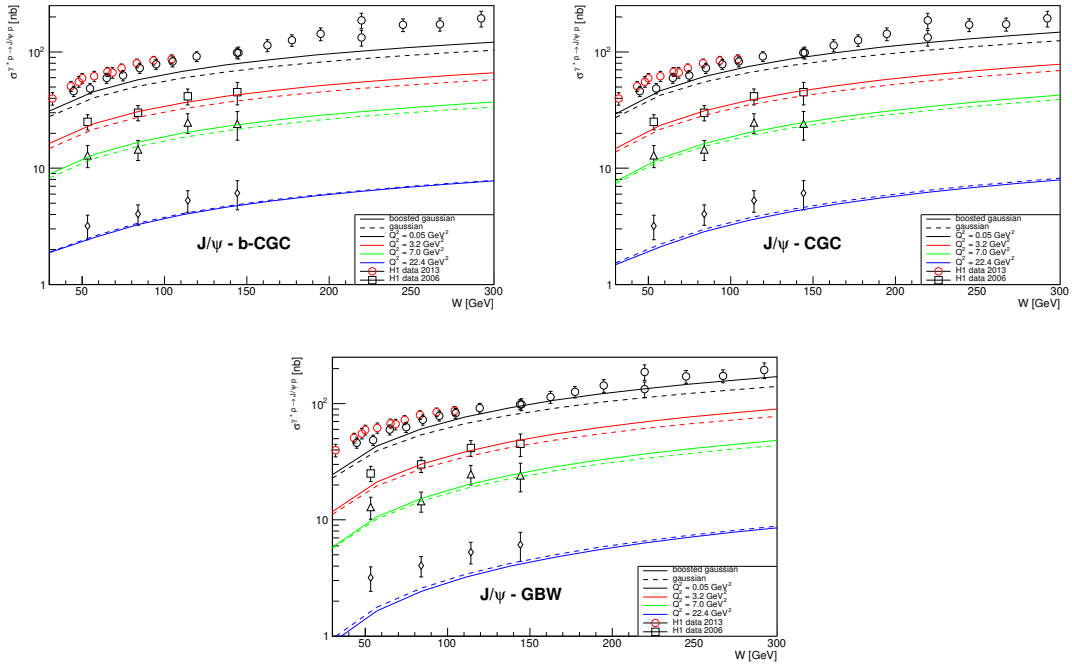
Obrázek 3.6: Diferenciální účinný průřez mezonu ϕ (vlevo) a ρ (vpravo) pro model GBW při různých Q^2 a $W = 75\,\mathrm{GeV}$.

3.3 Celkový účinný průřez

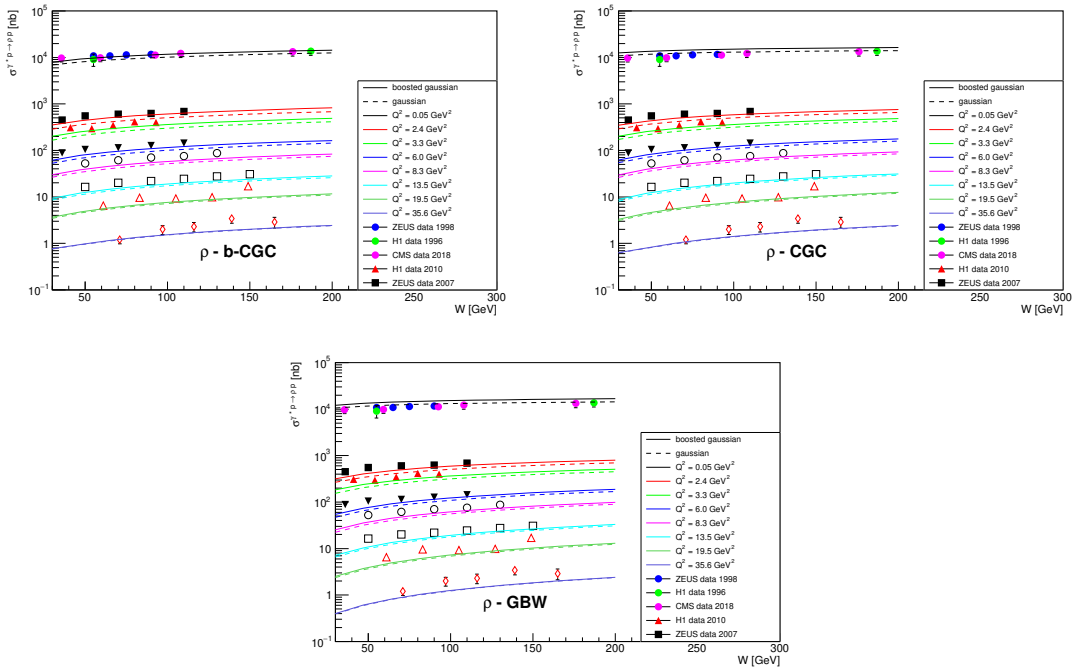
Celkový účinný průřez byl vypočítán integrací diferenciálního účinného průřezu pomocí rovnice (2.7). Parametr kvadrátu poloměru protonu byl zvolen jako $B = 4\,\mathrm{GeV}^{-2}$, výjimkou je fotoprodukce mezonu ρ, kdy je $B = 8\,\mathrm{GeV}^{-2}$ z důvodu normalizace, viz [19]. Na Obr. 3.7 je závislost celkového účinného průřezu produkce J/Ψ na W pro modely b-CGC, CGC a GBW. Data pochází z [16,20]. Celkový účinný průřez roste se zvyšujícím se W. V tomto případě dává pro virtualitu $Q^2 = 0.05\,\mathrm{GeV}^2$ nejlepší výsledky GBW model. Naopak pro $Q^2 = 22.4\,\mathrm{GeV}^2$ nejlépe odpovídá datům model b-CGC. Rozdíl mezi gaussian a boosted gaussian je největší pro fotoprodukci, kdy boosted gaussian dává výsledky, které lépe odpovídají datům.

Na Obr. 3.8 je celkový účinný průřez produkce mezonu ρ s použitím modelů b-CGC, CGC a GBW. Data pochází z [21–25]. Předpovědi pro různé virtuality jsou odlišeny různými barvami čar. Data, která jim odpovídající jsou odlišena tvary bodů a experimenty, ze kterých data pochází jsou odlišeny různými barvami. Nejlepších výsledků dosahuje model b-CGC, který popisuje data pro všechny virtuality. CGC model dává mírně nadhodnocené výsledky při fotoprodukci, při elektroprodukci dává dobré výsledky, GBW model má velmi podobné chování. Gaussian model opět dává podhodnocené výsledky a pro virtuality $Q^2 \approx 5\,\mathrm{GeV}^2$ už neodpovídá naměřeným datům, na rozdíl od modelu boosted gaussian.

Na Obr. 3.9 je závislost celkového účinného průřezu na W pro vektorový mezon ϕ a několik zvolených virtualit Q^2. Předpovědi jsou porovnány s daty z [17, 18]. Vypočítané křivky odpovídají naměřeným datům pro všechny dipólové účinné průřezy.

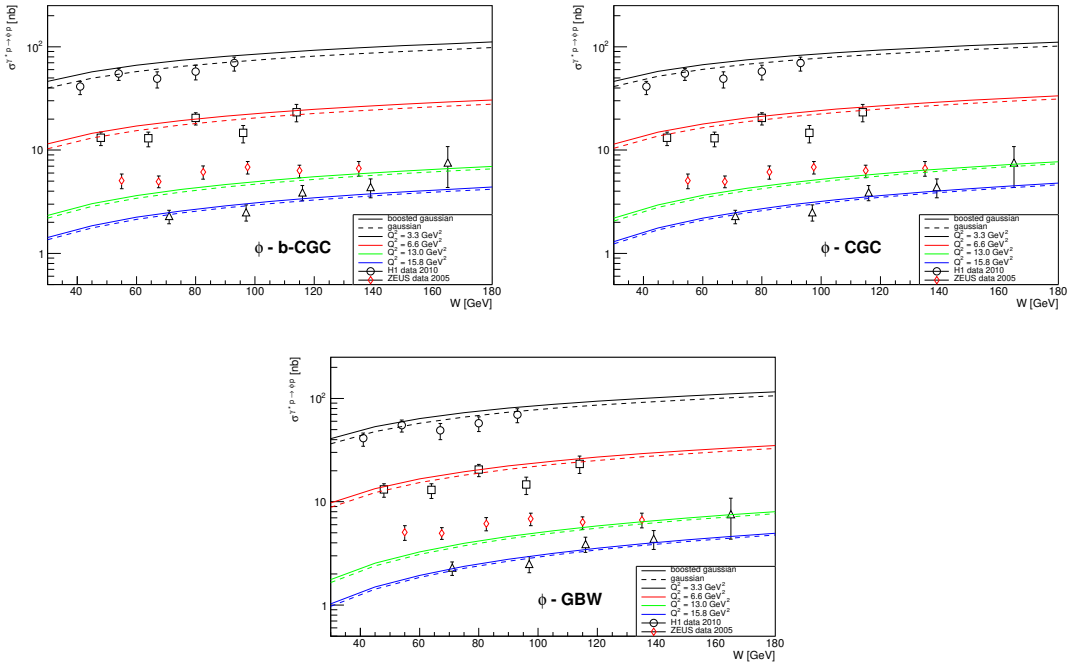


Obrázek 3.7: Celkový účinný průřez mezonu J/Ψ pro modely b-CGC, CGC a GBW a různé virtuality Q^2.



Obrázek 3.8: Celkový účinný průřez mezonu ρ pro modely b-CGC, CGC a GBW a různé virtuality Q^2. Body jsou barevně odlišeny body podle toho, ze kterého experimentu pochází, tvarově jsou odlišeny různé Q^2.

Jedinou výjimkou je virtualita $Q^2 = 13\,\mathrm{GeV}^2$, kdy dávají všechny modely podhodnocené výsledky pro nízké W. Model gaussian dává nižší výsledky, než model boosted



Obrázek 3.9: Celkový účinný průřez mezonu ϕ pro modely b-CGC, CGC a GBW a různé virtuality Q^2. Body jsou barevně odlišeny podle toho, ze kterého experimentu pochází, tvarově jsou odlišeny různé Q^2.

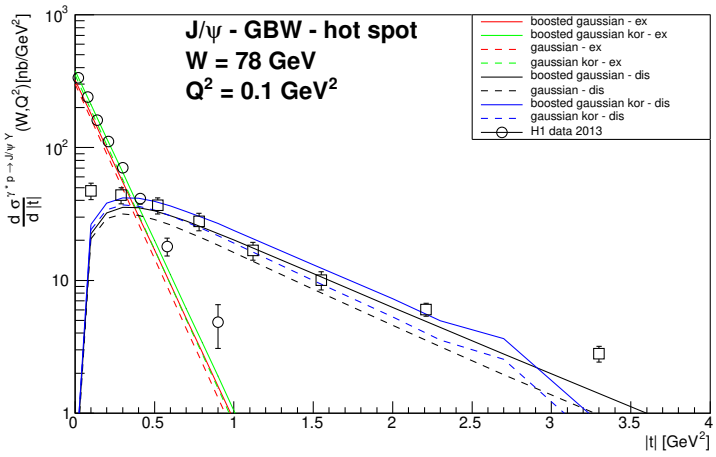
gaussian ale oba odpovídají naměřeným datům.

3.4 Hot spot model

V této části je vypočítaný diferenciální a celkový účinný průřez z hot spot modelu za použití rovnice (2.31) pro exkluzivní produkci a (2.32) pro disociativní produkci. Parametry pochází z Tab. 3.1 a 3.2. Jako parametr kvadrátu poloměru protonu je použit $B = 4.7\,\mathrm{GeV}^{-2}$ [10] a velikost gluonu je parametrizována jako $B_{hs} = 0.8\,\mathrm{GeV}^{-2}$. Výjimkou je fotoprodukce mezonu ρ, kdy je za kvadrát poloměru protonu použito $B = 8\,\mathrm{GeV}^{-2}$.

3.4.1 Diferenciální účinný průřez

Na Obr. 3.10 je závislost diferenciálního účinného průřezu na $|t|$ pro exkluzivní a disociativní produkci. Data pochází z experimentu H1 [20]. Exkluzivní diferenciální účinný průřez klesá se vzrůstajícím $|t|$, zatímco disociativní diferenciální účinný průřez roste pro velmi malé $|t|$, pro vyšší $|t|$ pak naopak klesá, na rozdíl od exkluzivního procesu však klesá pomaleji. GBW model dobře popisuje data pro exkluzivní produkci a malá $|t|$. Při disociativní produkci GBW model odpovídá datům pro střední $|t|$, pro vysoké $|t|$ začíná být model hot spot model nestabilní a vypočítaný účinný průřez velmi fluktuuje. Korekce na skewedness hraje důležitou roli při výpočtu a



Obrázek 3.10: Diferenciální účinný průřez exkluzivní a disociativní fotoprodukce mezonu J/Ψ pro model GBW a $W = 78\,\mathrm{GeV}$.

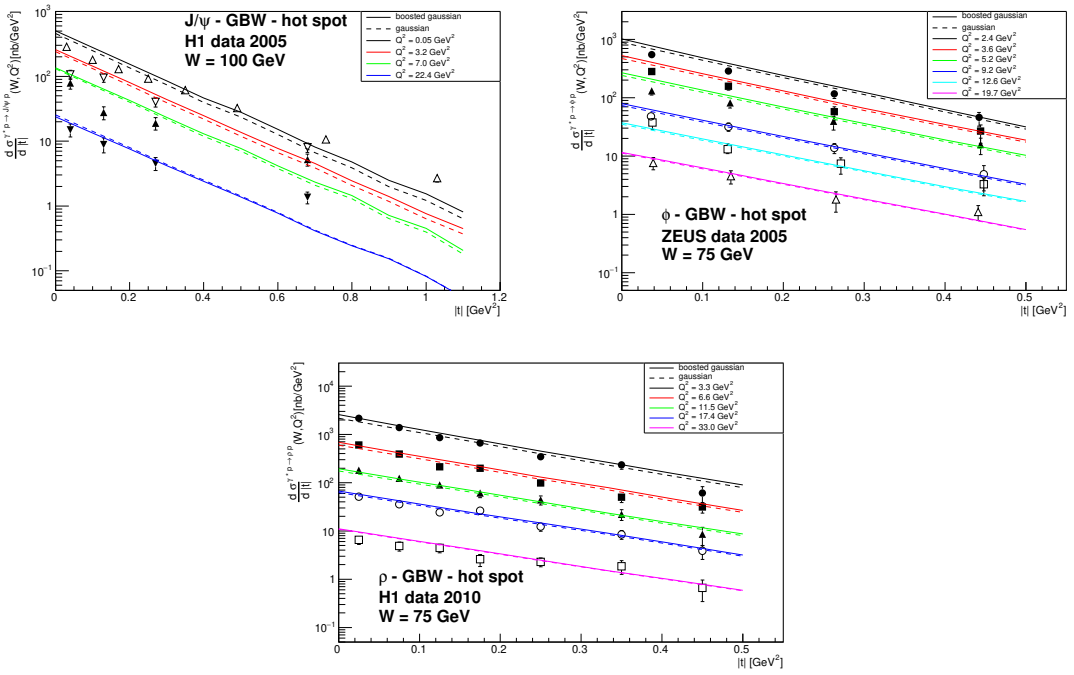
upravuje původní výsledek asi o 20% pro disociativní produkci. Boosted gaussian model dává opět lepší výsledky oproti gaussian modelu.

Na Obr. 3.11 je závislost diferenciálního účinného průřezu J/Ψ, ϕ a ρ na $|t|$. Data pochází z [16–18]. U mezonu J/Ψ jsou výsledky pro nízká $|t|$ nadhodnocené, naopak u vyšších $|t|$ jsou data podhodnocená. Předpovězená křivka má tedy špatný sklon. Při porovnání s Obr. 3.5 lze říci, že předchozí model dává v tomto případě lepší výsledky oproti hot spot modelu. U mezonu ϕ dává hot spot model dobré výsledky, pouze u virtualit $Q^2 \leq 9.2\,\mathrm{GeV}^2$ a u malých $|t| \leq 0.3$ jsou výsledky mírně nadhodnocené. Pro mezon ρ dává hot spot model dobré výsledky pro všechny virtuality. Při porovnání s Obr. 3.6 si lze všimnout, že hot spot model dává mírně lepší výsledky pro mezon ρ, kdežto pro mezon ϕ má lepší výsledky původní model.

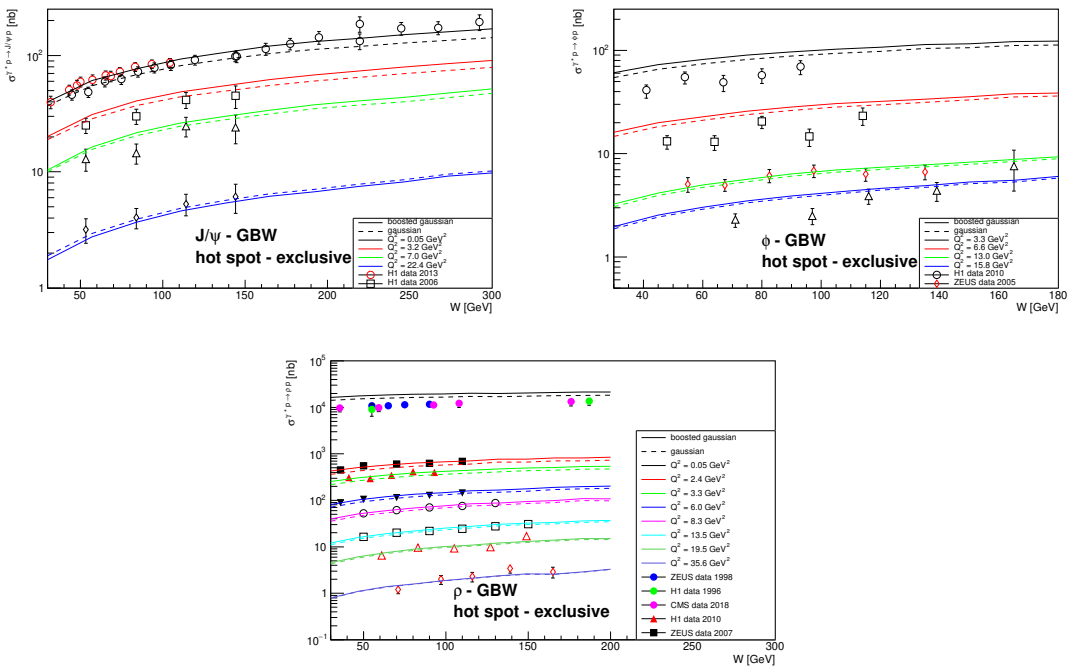
3.4.2 Celkový účinný průřez

Na Obr. 3.12 je celkový účinný průřez mezonů J/Ψ, ϕ a ρ při exkluzivní produkci. Data pochází z [16–18, 20–22, 24, 25]. Pro mezon J/Ψ hot spot model popisuje data pro všechny virtuality. Při porovnání s předchozím modelem na Obr. 3.7 je vidět, že hot spot model dosahuje výrazně lepších výsledků zejména pro fotoprodukci a vysoké virtuality. U mezonu ϕ výsledky souhlasí zejména u vyšších Q^2, pro nižší Q^2 jsou data nadhodnocena. Při porovnání výsledků s předchozím modelem na Obr. 3.9 dává hot spot model horší předpovědi až na virtualitu $Q^2 = 13\,\mathrm{GeV}^2$, kdy na rozdíl od předchozího modelu odpovídá naměřeným datům. U mezonu ρ jsou data v souladu s měřením pro elektroprodukci. Při fotoprodukci je předpověď vyšší. Hot spot model dává mírně lepší předpovědi pro ρ oproti předchozímu modelu viz Obr. 3.8.

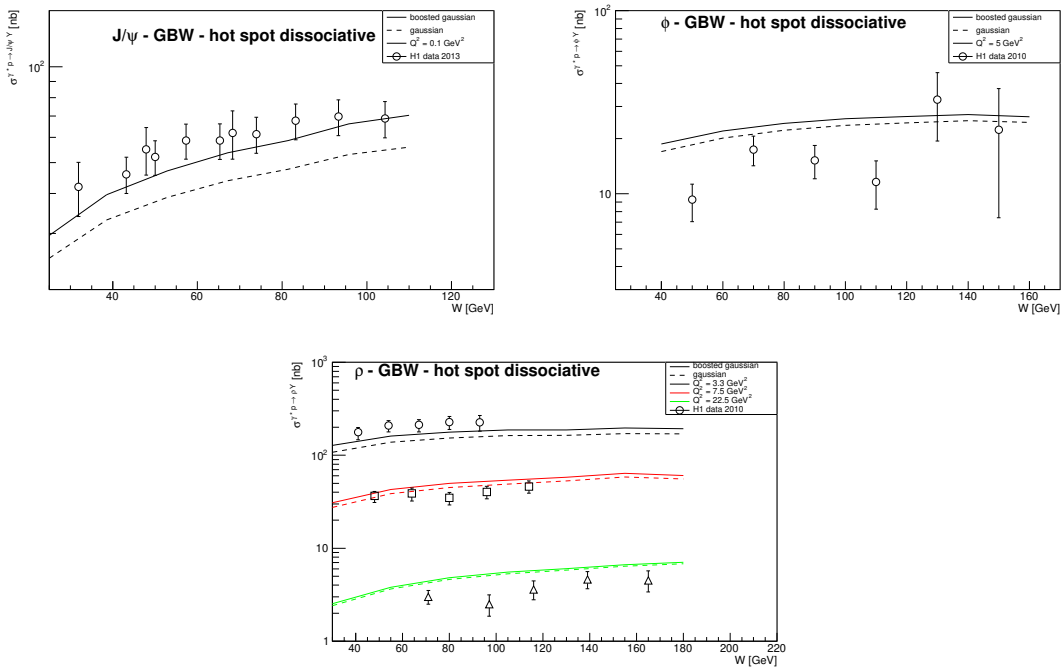
Na Obr. 3.13 je závislost celkového disociativního účinného průřezu na W pro mezony J/Ψ, ϕ a ρ. Data pochází z [17, 20]. U mezonu J/Ψ jsou předpovědi v souladu s daty, toto platí pouze pro boosted gaussian, gaussian model dává silně podhodno-



Obrázek 3.11: Diferenciální účinný průřez exkluzivní produkce mezonu J/Ψ, ϕ a ρ pro model GBW a různé Q^2.



Obrázek 3.12: Celkový účinný průřez exkluzivní produkce mezonu J/Ψ, ϕ, ρ pro model GBW a různé Q^2.



Obrázek 3.13: Celkový účinný průřez disociativní fotoprodukce mezonu J/Ψ a elektroprodukce mezonů ϕ a ρ pro model GBW.

cené výsledky. U mezonu ϕ dává GBW model dobré výsledky zejména pro vysoká W. U mezonu ρ jsou výsledky v souladu s daty zejména pro $Q^2 = 7.5\,\mathrm{GeV}^2$, pro vyšší virtualitu jsou data nadhodnocena, naopak pro nižší virtualitu jsou data podhodnocena.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámení se s kvantovou chromodynamikou a jejími základními vlastnostmi, které se projevují při zkoumání hadronové struktury. Konkrétně v této práci byla analyzována energetická struktura protonu pomocí produkce vektorových mezonů v přiblížení barevného dipólu. Amplituda této produkce se skládá ze dvou částí. První částí je konvoluce vlnové funkce virtuálního fotonu s vektorovým mezonem. Částí této vlnové funkce jsou skalární funkce. V této práci jsou pro jejich popis využity dva modely, konkrétně gaussian a boosted gaussian. Porovnání těchto dvou modelů je na Obr. 3.1 a 3.2. Další částí amplitudy je dipólový diferenciální účinný průřez, který lze nalézt z několika modelů. Prvním z nich je b-CGC model, který je definován jako diferenciální účinný průřez a má v sobě zabudovanou závislost na $\vec{b}$. V dalších dvou modelech - GBW a CGC - je dán celkový dipólový účinný průřez bez závislosti $\vec{b}$, ale tuto závislost lze přidat pomocí profilové funkce protonu. V první části práce je profilová funkce protonu dána Gaussovým rozdělením a v druhé části je dána hot spot modelem. Gaussovo rozdělení je uniformní, kdežto hot spot model obsahuje náhodné fluktuace. Porovnání tří dipólových účinných průřezů je na Obr. 3.3.

Předpovědi účinných průřezů jsou vypočítány pro tři vektorové mezony, konkrétně J/Ψ, ϕ a ρ. V první části je v profilové funkci protonu za kvadrát jeho poloměru voleno $B = 4\,\mathrm{GeV}^{-2}$. Výjimkou je fotoprodukce mezonu ρ, kdy je z důvodu normalizace $B = 8\,\mathrm{GeV}^{-2}$. Tato parametrizace dobře odpovídá diferenciálním účinným průřezům. Všechny tři modely dipólového účinného průřezu dávají velmi podobné výsledky, které odpovídají naměřeným datům. U celkového účinného průřezu a mezonu J/Ψ jsou předpovědi dobré pro střední virtuality, pro fotoprodukci a pro vysoké virtuality jsou data podhodnocena všemi modely. U zbývajících dvou mezonů jsou předpovědi v souladu s daty pro všechny modely.

V hot spot modelu je dána profilová funkce protonu jako součet náhodně distribuovaných gluonů, které se mění event-by-event. Ačkoliv tento model vyžaduje průměrování přes velké množství eventů, jeho výhodou je, že lze provést integraci amplitudy přes $\vec{b}$ analyticky. Nicméně jeho hlavní předností je možnost vypočítat mimo exkluzivní produkce i disociativní produkci. V tomto modelu je proton modelován v profilové funkci parametrem $B = 4.7\,\mathrm{GeV}^{-2}$ až na výjimku fotoprodukce ρ, kdy je $B = 8\,\mathrm{GeV}^{-2}$. Hot spot model dává obecně horší výsledky pro diferenciální účinný průřez mezonu J/Ψ, kdy směrnice linie předpovědí má mírně vyšší sklon než data. Pro zbylé mezony jsou předpovědi v souladu s daty až na malé výjimky. Celkový účinný průřez mezonu J/Ψ v hot spot modelu odpovídá datům lépe než v předchozím modelu. U mezonu ρ jsou předpovědi v souladu s daty pro elektroprodukci, ale

u fotoprodukce jsou data nadhodnocena. U disociativní produkce jsou předpovědi v souladu s daty pro mezon J/Ψ a ϕ, u mezonu ρ se předpovědi částečně liší oproti datům.

Celkově jsou ve všech vypočítaných účinných průřezech výsledky pro modely gaussian a boosted gaussian velmi podobné, model boosted gaussian dává mírně lepší výsledky než druhý model. Tento rozdíl nastává zejména pro fotoprodukci. Z výsledků uvedených v celé práci vyplývá, že jak model, ve kterém se proton modeluje pomocí Gaussovy křivky, tak hot spot model dávají dobré předpovědi pro produkci vektorových mezonů, které odpovídají naměřeným datům.

Literatura

[1] F. Halzen and Alan D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. 1984.

[2] Brian Robert Martin and Graham Shaw. *Particle physics*. 2008.

[3] Mark Thomson. *Modern particle physics*. Cambridge University Press, New York, 2013.

[4] Edmond Iancu. Color Glass Condensate and its relation to HERA physics. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 191:281–294, 2009.

[5] Cyrille Marquet. Open questions in QCD at high parton density. *Nucl. Phys. A*, 904-905:294c–301c, 2013.

[6] P. A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.

[7] Yuri V. Kovchegov and Eugene Levin. *Quantum chromodynamics at high energy*, volume 33. Cambridge University Press, 8 2012.

[8] H. Kowalski, L. Motyka, and G. Watt. Exclusive diffractive processes at HERA within the dipole picture. *Phys. Rev. D*, 74:074016, 2006.

[9] Dagmar Bendová. Study of hadron structure within quantum chromodynamic. Diplomová práce, ČVUT, Praha, 2018.

[10] J. Cepila, J. G. Contreras, and J. D. Tapia Takaki. Energy dependence of dissociative J/ψ photoproduction as a signature of gluon saturation at the LHC. *Phys. Lett. B*, 766:186–191, 2017.

[11] Krzysztof J. Golec-Biernat and M. Wusthoff. Saturation effects in deep inelastic scattering at low Q**2 and its implications on diffraction. *Phys. Rev. D*, 59:014017, 1998.

[12] Krzysztof J. Golec-Biernat and M. Wusthoff. Saturation in diffractive deep inelastic scattering. *Phys. Rev. D*, 60:114023, 1999.

[13] E. Iancu, K. Itakura, and S. Munier. Saturation and BFKL dynamics in the HERA data at small x. *Phys. Lett. B*, 590:199–208, 2004.

[14] R. Brun and F. Rademakers. ROOT: An object oriented data analysis framework. *Nucl. Instrum. Meth. A*, 389:81–86, 1997.

[15] Amir H. Rezaeian and Ivan Schmidt. Impact-parameter dependent Color Glass Condensate dipole model and new combined HERA data. *Phys. Rev. D*, 88:074016, 2013.

[16] A. Aktas et al. Elastic J/psi production at HERA. *Eur. Phys. J. C*, 46:585–603, 2006.

[17] F. D. Aaron et al. Diffractive Electroproduction of rho and phi Mesons at HERA. *JHEP*, 05:032, 2010.

[18] S. Chekanov et al. Exclusive electroproduction of phi mesons at HERA. *Nucl. Phys. B*, 718:3–31, 2005.

[19] J. Cepila, J. G. Contreras, M. Krelina, and J. D. Tapia Takaki. Mass dependence of vector meson photoproduction off protons and nuclei within the energy-dependent hot-spot model. *Nucl. Phys. B*, 934:330–340, 2018.

[20] C. Alexa et al. Elastic and Proton-Dissociative Photoproduction of J/psi Mesons at HERA. *Eur. Phys. J. C*, 73(6):2466, 2013.

[21] J. Breitweg and Michal Kasprzak. Elastic and proton-dissociative photoproduction at hera. *European Physical Journal C*, 2:247–267, 01 1998.

[22] S. Aid et al. Elastic photoproduction of rho0 mesons at HERA. *Nucl. Phys. B*, 463:3–32, 1996.

[23] Martino Marelli, David Salvetti, Fabio Gastaldello, Simona Ghizzardi, Silvano Molendi, Andrea De Luca, Alberto Moretti, Mariachiara Rossetti, and Andrea Tiengo. A Systematic Analysis of the XMM-Newton Background: I. Dataset and Extraction Procedures. *Exper. Astron.*, 44(3):297–308, 2017.

[24] Exclusive $\rho(770)^0$ photoproduction in ultra-peripheral pPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV with the CMS experiment. Technical report, CERN, Geneva, 2018.

[25] S. Chekanov et al. Exclusive rho0 production in deep inelastic scattering at HERA. *PMC Phys. A*, 1:6, 2007.