FJFI ČVUT v Praze
katedra matematiky
115 19 Praha 1

Posudek oponenta bakalářské práce

Studentka: Katarína Studeničová

Název práce: Vlastnosti variant spojené informace

Recenzovaná bakalářská práce se zabývá možnostmi popisu různých interakcí, které vznikající v multivariátních pravděpodobnostních systémech. K tomuto popisu se používají různé druhy entropických funkcionálů a jejich modifikace studované v současné výzkumné literatuře, viz články [1,2,3].

Bakalářská práce je svým rozsahem poměrně dlouhá (115 stran) a je velmi přehledně členěna. V kapitole 1 autorka opakuje základní definice teorie pravděpodobnosti, charakteristiky diskrétních náhodných veličin a zejména pojmy týkající se teorie informace (Shannonova entropie, vzájemná informace atd.) Kapitola 2 zavádí tři základní způsoby, které omezují výběr maximálně entropické distribuce: zachování marginálních rozdělení, zachování momentů a zachování entropií. U každé z těchto konstrukcí autorka zkoumá vlastnosti tzv. spojené informace, která měří kvalitu uvedených zjednodušení skutečné vícerozměrné distribuce. Kapitola 3 je věnovaná interakcím mezi veličinami (implikovaným a neimplikovaným). V kapitole 4 se zavádí pojem informačního diagramu, který se používá k aditivnímu rozkladu informačních funkcionálů a zejména multiinformace (veličina E na obr. 4.1.) To se využije v navazující páté kapitole, kde autorka prozkoumá nejen existující maximálně entropickou konstrukci, ale navrhne i nový informační funkcionál a popíše jejich vlastnosti. Tabulka 5.4 přehledně shrnuje vlastnosti studovaných maximálně entropických konstrukcí.

Zadání práce patřilo mezi obtížnější. Studentka se musela seznámit se základy teorie informace, jejími pokročilejšími partiemi (informační diagramy) i současnými výsledky v oblasti studia komplexních stochastických systémů (zejména články [1,2,3]). Část zadání navíc vyžadovala "formalizaci souvisejících objektů". To je ovšem možná úloha vhodná spíše pro zkušenějšího matematika, vzhledem k mnoha partiím, se kterými uvedené problémy souvisejí - diskrétní teorie pravděpodobnosti, optimalizace, teorie informace atd. V práci se tak ne vždy vyskytuje korektní a srozumitelné značení (viz detailní komentáře níže), ale domnívám se, že to lze vzhledem k výše uvedenému autorce snadno odpustit. Zadání tak hodnotím jako splněno bez výhrad. Text je srozumitelný a všechny matematické problémy jsou pečlivě komentovány, důkazy jsou velmi dobře čitelné. Všechny důležité konstrukce (maximalizace entropického funkcionálu na podmnožině simplexu vymezené různými druhy podmínek) jsou detailně popsány. Některé příklady interakcí veličin by se pro svou jasnost a názornost klidně mohly objevit jako část současné učebnice nebo článku na poli teori informace.

Předloženou bakalářskou práci proto navrhuji hodnotit známkou **B** (velmi dobře).

Detailní komentáře

1. str. 14, podmínka K3. Aby pravděpodobnostní míra byla σ-aditivní, množiny musí být po dvou disjunktní.
2. str. 15. V případě diskrétní náhodné veličiny nebývá zvykem nazývat funkci $p(\mathbf{x})$ "hustota pravděpodobnosti". To je typicky vyhrazeno pro spojitý případ.
3. str. 16. *Marginální rozdělení k-tého stupně* - lépe a konzistentněji s terminologií pro náhodné vektory prostě "*k*-rozměrné marginální rozdělení"
4. str. 26, Definice 2.1. Značení $\{\mathbf{X}\}$ pro množinu náhodných veličin se zadaným rangem $R_1, \ldots, R_n$ je nevhodně zvoleno. Domnívám se, že autorka chce jednoduše mluvit o množině náhodných vektorů, jejichž pravděpodobnostní rozdělení má nosič obsažen v množině $R_1 \times \cdots \times R_n$. Jen o kousek dál v textu se objeví značení $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, tedy $\mathbf{X}$ je prostě náhodný vektor. Jedná se tedy spíše o jednoprvkovou množinu obsahující element $\mathbf{X}$ a použití této notace je např. v definici množiny na str. 27 uprostřed pomocí $\mathbf{X} \in \{\mathbf{X}\}$ matoucí. Poznámka 3.15 je v podobném duchu naprosto nejasná.
5. str. 27, Značení 2.4. Hodnota pravděpodobnostní funkce marginálního rozdělení by měla být správněji značena $p_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}})$. I vektor proměnných $\mathbf{x}$ je totiž potřeba promítnout (omezit) na odpovídající souřadnice zadané multiindexem $\mathbf{n}$.

6. str. 32, Lemma 2.21. Inkluze mezi množinami M_i^j nedává smysl, protože ty množiny jsou podmnožinami disjunktních nadmnožin (rozdělení, entropie, momenty). Z kontextu je ovšem zřejmé, jaký mají množiny M_i^j význam.
7. str. 42. Poznámka 2.47 je zbytečná, jen opakuje znění předchozí věty. To samé platí pro Poznámku 2.49.
8. str. 53, Definice 3.4. Pokud značíme rozdělení náhodného vektoru jako p, bylo by vhodnější označit marginální rozdělení zadané množinou indexů I jako p_I. Odlišit to na úrovni proměnných nemusí pro jednoznačnost zápisu stačit.
9. str. 61. Znění některých vět by šlo zkrátit a zpřehlednit. Např. vztahy (3.1)-(3.2) jsou zřejmé a stačilo by uvést rovnosti (3.3)-(3.4).
10. str. 80. Tvar atomů pole $\mathscr{F}_n$ (tedy volné Booleovy algebry nad n generátory) je spíše důsledkem definice toho pole a nikoli samostatnou definicí (atom konečné Booleovy algebry je nejmenší její prvek nad 0).
11. str. 115. Reference [7] by měla být http://www.kybernetika.cz/content/2020/5/979

Případné dotazy k obhajobě

1. Co znamená formulace "možnost řešit pomocí JuMP.jl" v Tabulce 5.4? Můžete ukázat kód v Julii, který uvedený problém řeší pomocí té knihovny?
2. K poznámce 3.17. Jak přesněji souvisí Vámi zkoumané maximálně entropické funkcionály s konstrukcemi v článku [7]?

V Praze dne 16.8. 2021

doc. Ing. Tomáš Kroupa, Ph.D.
FEL ČVUT