



**FAKULTA
INFORMAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ
ČVUT V PRAZE**

Zadání bakalářské práce

Název:	Použití intervalové aritmetiky v řešičích soustav lineárních rovnic
Student:	Bc. Stanislav Hlubocký
Vedoucí:	doc. Ing. Ivan Šimeček, Ph.D.
Studijní program:	Informatika
Obor / specializace:	Bezpečnost a informační technologie
Katedra:	Katedra počítačových systémů
Platnost zadání:	do konce letního semestru 2022/2023

Pokyny pro vypracování

1. Seznamte se se stávajícími knihovnamí podporující intervalovou aritmetiku na architektuře x86 [1,2].
2. Nastudujte a analyzujte alternativní reprezentace intervalové aritmetiky.
3. Implementujte Gaussovu eliminační metodu s využitím intervalových aritmetik z bodu 1) a 2). Pravou stranu reprezentujte náhodnými veličinami s předem daným rozdělením (rovnoměrné, normální, ...).
4. Analyzujte výsledky pro vybrané soustavy rovnic a navrhňte řešení pomocí vhodné permutace řádků či sloupců.
5. Porovnejte výkonnost algoritmů pro řešič a účinnost heuristik pro minimalizaci šířek intervalů.

Elektronicky schválil/a prof. Ing. Pavel Tvrdík, CSc. dne 8. března 2021 v Praze.



**FAKULTA
INFORMAČNÍCH
TECHNOLÓGIÍ
ČVUT V PRAZE**

Bakalářská práce

Použití intervalové aritmetiky a náhodných veličin v řešičích soustav lineárních rovnic

Bc. Stanislav Hlubocký

Katedra teoretické informatiky

Vedoucí práce: doc. Ing. Šimeček Ivan Ph.D.

25. června 2021

Poděkování

Vedoucímu práce doc. Ing. Ivanu Šimečkovi Ph.D. za zajímavý nápad na téma práce, který dovoluje zkombinovat mé předchozí matematické vzdělání se současným inženýrským.

Děkuji Michalům za obrovskou spolupráci během celého studia. Bez vás bych vylétl během prvého.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů. V souladu s ust. § 2373 odst. 2 zákona č. 89/2012 Sb., občanský zákoník, ve znění pozdějších předpisů, tímto uděluji nevýhradní oprávnění (licenci) k užití této mojí práce, a to včetně všech počítačových programů, jež jsou její součástí či přílohou a veškeré jejich dokumentace (dále souhrnně jen „Dílo“), a to všem osobám, které si přejí Dílo užít. Tyto osoby jsou oprávněny Dílo užít jakýmkoli způsobem, který nesnižuje hodnotu Díla a za jakýmkoli účelem (včetně užití k výdělečným účelům). Toto oprávnění je časově, teritoriálně i množstevně neomezené. Každá osoba, která využije výše uvedenou licenci, se však zavazuje udělit ke každému dílu, které vznikne (byť jen zčásti) na základě Díla, úpravou Díla, spojením Díla s jiným dílem, zařazením Díla do díla souborného či zpracováním Díla (včetně překladu) licenci alespoň ve výše uvedeném rozsahu a zároveň zpřístupnit zdrojový kód takového díla alespoň srovnatelným způsobem a ve srovnatelném rozsahu, jako je zpřístupněn zdrojový kód Díla.

V Praze dne 25. června 2021

.....

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta informačních technologií

© 2021 Stanislav Hlubocký. Všechna práva vyhrazena.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Českém vysokém učení technickém v Praze, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna právními předpisy a mezinárodními úmluvami o právu autorském a právech souvisejících s právem autorským. K jejímu užití, s výjimkou bezúplatných zákonných licencí a nad rámec oprávnění uvedených v Prohlášení na předchozí straně, je nezbytný souhlas autora.

Odkaz na tuto práci

Hlubocký, Stanislav. *Použití intervalové aritmetiky a náhodných veličin v řešících soustav lineárních rovnic*. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií, 2021.

Abstrakt

Tato práce má za prozkoumat vlastnosti řešení soustav lineárních rovnic s nepřesnou pravou stranou reprezentovanou pomocí náhodných veličin. Následně je porovnává s výsledky, které dává intervalová aritmetika. Výpočet je prováděn pomocí Gaussovy eliminační metody. Cílem práce je zjistit, zdali je možno za určitých předpokladů zpřesnit výsledky intervalové aritmetiky. Ukazuje se však, že ač v těchto netradičních přístupech dochází ke zlepšení přesnosti, toto je vykoupeno v praxi naprosto zničujícím nárůstem výpočetní složitosti.

Klíčová slova intervalová aritmetika, náhodné veličiny, numerická integrace, soustavy lineárních rovnic, pivotace

Abstract

This thesis aims to explore solving systems of linear equations with imprecise right hand sides. Those imprecisions are represented by random variables and the results are compared with the results obtained by using interval arithmetic. The solutions are obtained by using the Gaussian elimination method. The goal of this thesis is to determine whether the results obtained using interval arithmetic can be refined. However, while that is true in the end, it transpires

that any increase in precision leads to a damning increase in computational complexity.

Keywords interval arithmetic, random variables, numeric integration, linear equation systems, pivotation

Obsah

Úvod	1
1 Základy lineární algebry	3
1.1 Matice a výpočty s nimi	3
1.2 Gaussova eliminační metoda	5
2 Intervalová aritmetika	9
2.1 Teoretická část	9
2.2 Implementace	10
2.3 Interpretace a srovnání výsledků	12
3 Náhodné veličiny	15
3.1 Teoretická část	15
3.2 Implementace	16
3.3 Interpretace a srovnání výsledků	17
3.3.1 Časová náročnost	19
3.3.2 Pivotace	19
3.3.3 Srovnání s intervalovou aritmetikou	20
4 Zmenšení výpočetní náročnosti	23
4.1 Teoretická část	23
4.2 Implementace	24
4.3 Interpretace a srovnání výsledků	24
5 Výpočty s náhodným výběrem	29
5.1 Teorie	29
5.2 Implementace	29
5.3 Interpretace a srovnání výsledků	30
6 Nové hypotézy	35

Závěr	37
A Seznam použitých zkratk	39
B Obsah přiloženého média	41
Literatura	43

Seznam obrázků

3.1	Rozdělení x_1 pro normální rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A} . . .	18
3.2	Rozdělení x_1 pro trojúhelníkové rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}	18
3.3	Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A} . .	19
3.4	Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{C} . .	20
3.5	Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{E} . .	21
4.1	Rozdělení x_1 pro normální rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A} . . .	25
4.2	Rozdělení x_1 pro trojúhelníkové rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}	25
4.3	Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A} . .	26
4.4	Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{C} . .	26
4.5	Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{E} . .	27
5.1	Aproximace rozdělení x_1 pro normální rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}	30
5.2	Aproximace rozdělení x_1 pro normální rozdělení pravých stran, matice \mathbb{E}	31
5.3	Aproximace rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}	32
5.4	Aproximace rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{C}	32
5.5	Aproximace rozdělení x_1 pro trojúhelníkové rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}	33
5.6	Aproximace rozdělení x_1 pro trojúhelníkové rozdělení pravých stran, matice \mathbb{E}	33

Seznam tabulek

2.1	Šířka intervalů	13
3.1	Srovnání s IA	20
5.1	Srovnání s Approx	30

Úvod

Řešení soustav lineárních rovnic je úloha, se kterou je možno se setkat v mnoha aplikacích. V praxi ovšem při měření nezřídka vznikají chyby a nepřesnosti. Případně nepřesnost do výpočtu mohou zavést numerické výpočty. Je potřeba tyto nepřesnosti brát v potaz a dojít i přes toto ztížení ke správnému výsledku či alespoň jeho dobré aproximaci s předem danou pravděpodobností omylu¹. V této práci pravé strany rovnic a výsledné neznámé reprezentují dvěma různými způsoby:

- jako interval, v němž se skutečná hodnota nachází
- jako náhodnou veličinu s předem známým rozdělením.

Úkolem této bakalářské práce je porovnat výpočetní vlastnosti těchto dvou reprezentací, zdali reprezentace pravé strany jako náhodné veličiny nepřinese zajímavé a potenciálně přesnější výsledky a jaký efekt na velikost intervalů či rozdělení má vliv pivotace sloupců a řádků matice. Tato práce se snaží rozšířit a navázat na práce [1] a [2].

Z důvodu obrovské výpočetní náročnosti zde za nepřesnou považují pouze pravou stranu. Koeficienty u neznámých na levých stranách rovnic jsou vždy přesně dané.

Během práce jsem k tomuto porovnání ještě několik dalších. Hlavní motivací k hledání jiných postupů byla obrovská náročnost korektních výpočtů s náhodnými veličinami. Díky tomu přibyly další dvě kapitoly. Jedna z nich má za cíl prozkoumat nutnost předpokladů ve větách, které mohou výrazně zjednodušit práci. Druhá místo přesných reprezentací náhodných veličin používá aproximaci pomocí náhodného výběru.

Práce je tedy rozdělena do šesti hlavních kapitol. V první zavádím většinu pojmů, se kterými budu následně pracovat a které budou využívány v celém

¹Jedná se o tzv hladinu statistického testu. Taktéž je možno se potkat s názvy pravděpodobnost chyby prvního druhu či P-hodnota. Více informací například v [4]

zbytku práce. Následující čtyři kapitoly popisují čtyři různé přístupy k řešení této úlohy a jsou, pokud to u dané kapitoly dává smysl, rozděleny na následující sekce:

- Teoretická část, ve které zavádím potřebné pojmy a představuji myšlenky za tím postupem.
- Implementace, kde popisuji reprezentaci těch myšlenek v řešícím programu a proč jsem zvolil zrovna takové postupy.
- Interpretace, kde rozebírám výsledky a popisuji, co se z naměřených dat dá a nedá usoudit. Zároveň srovnávám výsledky daného postupu s výsledky z předešlých kapitol.

V poslední kapitole odůvodňuji, proč se objevily některé zajímavé a na první pohled překvapivé zajímavé výsledky.

Základy lineární algebry

V této kapitole budu zavádět pojmy, které většina čtenářů pravděpodobně zná. Jedná se o matice a operace s nimi. Jelikož se celá tato práce zabývá řešením soustav lineárních rovnic a jejich vlastnostmi, matice jsou nezbytnou pomůckou. Díky korespondenci jedna ku jedné mezi maticí a danou soustavou rovnic je možné použít tento zkrácený zápis a mnoho dalších zjištění z oblasti lineární algebry. Příkladem budiž Gaussova eliminační metoda (GEM), kterou používám v celé práci jako základní algoritmus řešení soustav.

1.1 Matice a výpočty s nimi

Následující trojice definic je převzata z [3] a neměla by nikoho překvapit. Jedinou změnou je značení jednotkové matice \mathcal{I} proti \mathbb{E} . Důvodem je to, že později budu používat pětičlenné reprezentativní matic značených \mathbb{A} až \mathbb{E}

Definice 1 (Matice). Nechtě $m, n \in \mathbb{N}$. Uspořádaný soubor mn čísel zapsaný do tabulky o m řádcích a n sloupcích nazýváme matice typu $m \times n$. Matice obvykle značíme takto:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{12} & \cdots & \mathbb{A}_{1n} \\ \mathbb{A}_{21} & \mathbb{A}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{A}_{m1} & \mathbb{A}_{m2} & \cdots & \mathbb{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

Definice 2 (Násobení matic). Budte $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ matice s prvky \mathbb{A}_{ij} a $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n,p}$ matice s prvky b_{ij} . Součinem matic \mathbb{A} a \mathbb{B} je matice $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{m,p}$ s prvky d_{ij} , pro kterou platí

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{ik} b_{kj},$$

Značíme $\mathbb{D} = \mathbb{A}\mathbb{B}$

Definice 3 (Maticový zápis soustavy lineárních rovnic). Necht' $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Rovnici

$$\mathbb{A}x = b$$

nazýváme soustavou m lineárních rovnic pro n neznámých x_1, x_2, \dots, x_n . Sloupcový vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ nazýváme vektorem neznámých. $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ nazýváme vektorem pravých stran.

Definice 4 (Horní stupňovitý tvar). O matici $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{m,n}$ řekneme, že je v horním stupňovitém tvaru, jestliže všechny řádky jsou nulové, nebo existuje $k \in \{1, \dots, m\}$ tak, že řádky 1 až k matice \mathbb{D} jsou nenulové a řádky $k+1$ až m jsou nulové a jestliže platí následující: Označme pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ index nejlevějšího nenulového prvku v i -tém řádku jako j_i , tj.

$$j_i = \min\{l \in \{1, \dots, n\} | \mathbb{D}_{il} \neq 0\}.$$

Potom platí $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Definice 5 (Diagonální matice). Reálnou diagonální matici n -tého řádu nazveme libovolnou čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující

$$i \neq j \rightarrow \mathbb{A}_{i,j} = 0$$

Definice 6 (Jednotková matice). Čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ splňující

$$i \neq j \rightarrow \mathbb{A}_{i,j} = 0$$

$$i = j \rightarrow \mathbb{A}_{i,j} = 1$$

Nazveme jednotkovou maticí. Značíme \mathcal{I} .

Definice 7 (Regulární matice). Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Existuje-li matice $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ taková, že

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathcal{I},$$

nazveme matici \mathbb{A} regulární. V opačném případě ji nazveme singulární.

Regularita matice je zde důležitý předpoklad, který zaručuje jednoznačnost řešení. Všechny matice, které dále uvažují, jsou regulární.

Definice 8 (Podmíněnost matice). Necht' $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je regulární matice. Pak číslo $\kappa(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{A}^{-1}\|$, kde $\|\cdot\|$ je libovolná maticová norma, nazvu podmíněností (číslem podmíněnosti) matice \mathbb{A} vzhledem k dané normě.

Podmíněnost matice ukazuje, jak moc je daná matice blízko singulární. Pro špatně podmíněnou matici (tj. takovou, kde podmíněnost je velká) platí, že malá změna v neznámé může vyvolat téměř libovolně velkou změnu pravé strany.

A nakonec ještě konkrétní normu, kterou používám pro určení podmíněnosti v této práci:

Definice 9 (Eukleidovská norma). Necht' $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ je matice. Pak číslo $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbb{A}_{i,j}^2}$ nazvu eukleidovskou (L_2) normou matice \mathbb{A} .

1.2 Gaussova eliminační metoda

Mým cílem je najít řešení soustav lineárních rovnic se speciálními pravými stranami. Ty jsou nejprve reprezentovány pomocí intervalů a později pomocí náhodných veličin. K tomu používám Gaussovu eliminační metodu. Zde je dobré si uvědomit, že během operací GEM se buď členy na pravé straně sčítají mezi sebou nebo násobí reálným číslem. Tyto operace jsou jak pro intervaly, tak pro náhodné veličiny dobře definované a problémy při výpočtech nám to nezpůsobí. Tyto zvláštní struktury nikdy neovlivní levou stranu. A nyní k zavedení samotné Gaussovy eliminační metody:

Definice 10 (Gaussova eliminační metoda bez pivotace). Mějme regulární matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ a vektor pravých stran b . Algoritmus Gaussovy eliminační metody (GEM) bez pivotace se skládá z následujících kroků:

- Ke všem řádkům v pořadí $i \in \{2, \dots, n\}$, a to včetně pravých stran, přičtu první řádek vynásobený číslem $(-\mathbb{A}_{i,1}/\mathbb{A}_{1,1})$ a vytvořím tak na pozici $\mathbb{A}_{i,1}$ nulu.
- Postup opakuji na matici bez prvního řádku a prvního sloupce, přičemž tyto dále nechám beze změny.

Algoritmus skončím ve chvíli, kdy mi zbude k výpočtu matice o jednom řádku a dvou sloupcích, z čehož jeden sloupec je poslední pravá strana.

Ekvivalentní postup zapsaný pseudokódem je uveden jako algoritmus 1.

Jelikož v x -tém opakování vzniknou na všech pozicích $\mathbb{A}_{x+1,x} \cdots \mathbb{A}_{n,x}$ nuly, výsledná matice bude, pomínu-li vektor pravých stran, v horním trojúhelníkovém tvaru. Tento postup ovšem závisí na tom, že na diagonále nikde během výpočtu nevznikne nula. V opačném případě by koeficient $(-\mathbb{A}_{i,1}/\mathbb{A}_{1,1})$ nebyl definovaný. Tento problém a některé další, jak později ukáže například tabulka 2.1, odstraňuje pivotace. Alespoň v případě regulárních matic. Ovšem pokud řeším soustavu rovnic se singulární maticí, vznikají úplně jiné problémy. Singulární matice zde neuvažuji.

Definice 11 (Sloupcová a řádková pivotace). Necht $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je reálná čtvercová matice. Necht p je index prvku takového, že platí:

$$|\mathbb{A}_{1,p}| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |\mathbb{A}_{1,j}|$$

Tento prvek nazveme (sloupcovým) pivotem. O matici \mathbb{B} řeknu, že vznikla sloupcovou pivotací z matice \mathbb{A} , pokud vznikne prohozením prvního sloupce a sloupce s pivotem.

Obdobně definuji řádkovou pivotaci.

Definice 12 (Celková pivotace). Necht' $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je reálná čtvercová matice. Necht' p, q jsou indexy prvku takového, že platí:

$$|\mathbb{A}_{p,q}| = \max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} |\mathbb{A}_{i,j}|$$

Tento prvek $\mathbb{A}_{p,q}$ nazveme (celkovým) pivotem. O matici \mathbb{B} řeknu, že vznikla (celkovou) pivotací z matice \mathbb{A} , pokud vznikne pomocí následujících dvou operací v libovolném pořadí:

- prohozením prvního sloupce a sloupce s pivotem
- prohozením prvního řádku a řádku s pivotem

Důležitým faktem je, že při sloupcové pivotaci prohazujeme sloupce odpovídající jednotlivým neznámým. Pokud během výpočtu prohodíme i -tý a j -tý sloupec, kde $i < j$, a následně soustavu vyřešíme, nedostaneme řešení ve tvaru (x_1, \dots, x_n) , ale $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$. Nyní již mohu GEM rozšířit o pivotaci. Pseudokód pro GEM s řádkovou pivotací je uveden jako algoritmus 2. Varianty pro sloupcovou a celkovou pivotaci jsou obdobné. Pomocí pivotace dostanu do levé horní pozice v GEM prvek s největší absolutní hodnotou a zaručím tak, že podíl pro následné výpočty bude dobře definovaný. Zároveň, jak ukážu v následující kapitole, má pivotace příznivý efekt na kvalitu výpočtů v intervalové aritmetice.

Nyní mám algoritmy pro převedení libovolné regulární matice do horního stupňovitého tvaru. To je ovšem pouze polovina řešení. Aby byly jednoznačně vidět výsledky, je potřeba z horního stupňovitého tvaru udělat diagonální. K tomu slouží tzv. zpětný chod:

Definice 13 (Zpětný chod GEM). Necht' $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je čtvercová reálná matice ve stupňovitém tvaru a b je její pravá strana. Zpětný chod Gaussovy eliminace se skládá z následujících kroků:

- Ke všem řádkům $i \in \{1, \dots, n-1\}$, a to včetně pravých stran, přičtu $(-\mathbb{A}_{n,i}/\mathbb{A}_{n,n})$ násobek n -tého řádku.
- Postup opakuji na matici bez n -tého řádku a sloupce, přičemž tyto dále nechávám beze změny.
- Nakonec všechny řádky nyní již diagonální matice s pravou stranou vydělím posledním zbývajícím členem na diagonále, $\mathbb{A}_{x,x}$.

Pseudokódem je tento postup zapsán jako algoritmus 3. Jeho výsledkem je diagonální jednotková matice s pravou stranou, která reprezentuje nalezené neznámé. Pokud byla povolena sloupcová pivotace, tyto nebudou obecně v původním pořadí. Proto je potřeba si během sloupcové pivotace pamatovat, která neznámá je umístěna na které pozici ve vektoru neznámých.

Algoritmus 1 GEM bez pivotace

```

Procedura GEM( $\mathbb{A}, b$ ):
for  $x \in \{1, \dots, n-1\}$  do
  for  $y \in \{x+1, \dots, n-1\}$  do
     $Quot \leftarrow -\mathbb{A}_{y,x}/\mathbb{A}_{x,x}$ 
    for  $j \in \{x, \dots, n\}$  do
       $\mathbb{A}_{j,y} \leftarrow \mathbb{A}_{j,y} + Quot \times \mathbb{A}_{j,x}$ 
    end for
     $b_y \leftarrow b_y + Quot \times b_x$ 
  end for
end for

```

Algoritmus 2 GEM s řádkovou pivotací

```

Procedura GEM-RowPivot( $\mathbb{A}, b$ ):
for  $x \in \{1, \dots, n-1\}$  do
  for  $y \in \{x+1, \dots, n-1\}$  do
     $MaxX \leftarrow index(\max_{i \in \{x, \dots, n\}}(abs(\mathbb{A}_{i,y})))$ 
    for  $k \in \{1, \dots, n\}$  do
       $Swap(\mathbb{A}_{MaxX,k}, \mathbb{A}_{x,k})$ 
    end for
     $Swap(b_{MaxX}, b_x)$ 
     $Quot \leftarrow -\mathbb{A}_{y,x}/\mathbb{A}_{x,x}$ 
    for  $k \in \{x, \dots, n\}$  do
       $\mathbb{A}_{k,y} \leftarrow \mathbb{A}_{k,y} + Quot \times \mathbb{A}_{k,x}$ 
    end for
     $b_y \leftarrow b_y + Quot \times b_x$ 
  end for
end for

```

Algoritmus 3 Zpětný chod Gaussovy eliminace

```

Procedura ReverseGEM( $\mathbb{A}, b$ ):
for  $x \in \{n, n-1, \dots, 2\}$  do
  for  $y \in \{x-1, x-2, \dots, 1\}$  do
     $Quot \leftarrow -\mathbb{A}_{y,x}/\mathbb{A}_{x,x}$ 
     $\mathbb{A}_{x,y} \leftarrow \mathbb{A}_{x,y} + Quot \times \mathbb{A}_{x,x}$ 
     $b_y \leftarrow b_y + Quot \times b_x$ 
  end for
end for
for  $x \in \{1, \dots, n\}$  do
   $b_x \leftarrow b_x/\mathbb{A}_{x,x}$ 
   $\mathbb{A}_{x,x} \leftarrow 1$ 
end for

```

Intervalová aritmetika

V intervalové aritmetice počítáme s intervaly, které jsou určeny svými mezemi. Pohybujeme se zde na reálné ose a tedy mezemi intervalů jsou dvojice reálných čísel. To, že neznámou reprezentují intervalem, znamená, že její skutečná hodnota je někde v tomto intervalu, ale nemám žádnou informaci, kde přesně.

Intervalová aritmetika je dobře prozkoumaný způsob výpočtů, které zohledňují možné nepřesnosti. V této práci slouží jako kontrolní vzorek, se kterým jsou všechny ostatní výsledky porovnávány, nikoliv jako hlavní předmět zkoumání.

2.1 Teoretická část

Definice 14 (Interval). Uzavřeným intervalem I s dolní mezí $a \in \mathbb{R}$ a horní mezí $b \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu reálných čísel definovanou vztahem:

$$I = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$

Dále definuji šířku intervalu jako $wid(I) = b - a$.

Definice 15 (Operace v intervalové aritmetice). Binární operace v intervalové aritmetice je definována následovně. Nechť I_1, I_2 jsou intervaly a \circ je binární operátor. Potom

$$I_1 \circ I_2 = \{x_1 \circ x_2 \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$$

Je dobré si povšimnout, že výsledek nemusí být interval. Ovšem tato vlastnost je zaručena pro základní operátory $+$, $-$, \cdot , $/$ (s výjimkou dělení nulou) a jiné operace v této práci používat nebudu. Pro tyto konkrétní operátory je možné použít i jednodušeji počítatelné vyjádření:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$[a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$
$$0 \notin [c, d] \rightarrow \frac{[a, b]}{[c, d]} = [\min(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}), \max(\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d})]$$

Je potřeba poznamenat, že dělení intervalem, který obsahuje nulu, zůstává nedefinováno. Existují rozšíření intervalové aritmetiky, které tento nedostatek odstraňují, stejně tak rozšíření na komplexní čísla. Jejich příklady lze nalézt například v [6] a [7]. V této práci ovšem budu intervaly dělit pouze nenulovou konstantou (tj. uzavřeným intervalem $[a, a]$; $a \neq 0$) a složitější konstrukty potřeba nebudou.

Pozorování 1. Operace s intervaly výsledné intervaly rozšiřují. Pokud bych měl dvě nepřesně neznámé reprezentované intervaly I_1, I_2 , pro které platí $wid(I_1) \neq 0, wid(I_2) \neq 0$, a pokoušel se vyhodnotit výraz $(I_1 + I_2) - I_2$ případně $(I_1 \cdot I_2) / I_2$, zjistím, že šířka výsledného intervalu bude větší než šířka I_1 .

Je potřeba tedy pokud možno omezit počet operací s pravou stranou, abych neztratil veškerou informaci v intervalu obsaženou. Šířka výsledného intervalu je důležitý ukazatel jeho použitelnosti. Interval $(-\infty, \infty)$ je sice naprosto korektní, ale z praktického hlediska nenesou naprosto žádnou informaci. K tomuto intervalu se navíc mohou velice snadno přiblížit, pokud bych během výpočtu například dělil číslem blízkým nule.

Tento problém by mohla zmírnit pivotace a/nebo použití náhodných veličin místo intervalů, jak předvedu v následujících kapitolách.

2.2 Implementace

Knihoven pro práci s intervaly existuje několik. Z těch, které v práci nevyužívám, mohu jmenovat například MPFI (Multiple Precision Floating-Point Interval Library)[11] nebo GAOL (Not Just Another Interval Library)[10]. Všechny uvažované knihovny jsem převzal z [1].

Pro reprezentaci intervalů jsem využil C++ knihovnu Boost a její hotovou třídu `numeric::interval_lib::interval`. Důvodem k tomu byla hlavně pohodlnost při programování. Alternativně jsem uvažoval o použití knihovny PROFIL/BIAS, kterou můj předchůdce v [1] označuje za výkonnější. Boost lze ovšem mnohem snadněji připojit do projektu ve Visual Studiu pod Windows a, jak uvidíme brzo, i bez optimalizací bude výpočet pomocí intervalů násobně rychlejší.

Při výpočtu jsem nejprve určil postup, kterým zadanou matici převedu na jednotkovou matici, a až poté výsledný postup aplikoval na pravou stranu. Hlavní výhoda tohoto přístupu je v tom, že Gaussovu eliminaci je na matici na levé straně potřeba provést jen jednou nehledě na pravou stranu a ušetřím si tak později mnoho výpočtů.

Kolik výpočtů bude potřeba provést? Hledání postupu výše je ekvivalentní hledání inverzní matice pomocí GEM. Složitost tohoto algoritmu je známá:

Pro matici o n řádcích a sloupcích je $o(n^3)$. Jeho aplikace na pravou stranu poté má složitost už pouze $o(n^2)$. Fakt, že se jedná o intervalovou a nikoliv číselnou pravou stranu, se zde projeví pouze jako, multiplikativní konstanta „krát dva“.

Jelikož přesnost jakýchkoliv numerických výpočtů danou maticí je výrazně ovlivněna její podmíněností, viz [8],[9], rozhodl jsem se výpočty provádět na pěti různých maticích s postupně se zhoršující podmíněností. Rozměr 4x4 byl zvolen jako nejvyšší upočítatelný. V následující kapitole, konkrétně v sekci 3.2, bude jasně vidět, proč cokoliv většího bez výrazné optimalizace nemá smysl počítat. Jako krajní případy jsem zvolil matice s výraznou diagonálou jako příklad dobře podmíněné matice a čtyřrozměrnou Hilbertovu matici, kterou jsem pro snadnější zápis přenásobil 420, jako příklad extrémně špatně podmíněné. Matice s čísly podmíněnosti mezi těmito extrémy jsem si nechal vygenerovat náhodně pomocí Pythonu. Každá následující má číslo podmíněnosti přibližně o řád větší. Celá čísla jako koeficienty jsem zvolil pouze pro lepší čitelnost. Jako pětici reprezentačních matic mám v pořadí od nejlépe podmíněné po nejhůře podmíněnou:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -56 & 49 & -96 & -88 \\ -93 & -70 & -11 & -5 \\ 14 & 6 & -19 & 31 \\ 75 & 72 & -52 & 61 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 93 & 69 & -32 & -15 \\ 54 & 15 & -11 & 28 \\ 62 & 16 & -17 & 26 \\ 97 & 13 & -61 & 21 \end{pmatrix}, \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 31 & -52 & -11 & -95 \\ 27 & 73 & -79 & -4 \\ -5 & -3 & 8 & -6 \\ 20 & -76 & 49 & 36 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 420 & 210 & 140 & 105 \\ 210 & 140 & 105 & 84 \\ 140 & 105 & 84 & 70 \\ 105 & 84 & 70 & 60 \end{pmatrix}$$

Jejich čísla podmíněnosti počítaná L_2 normou jsou v tomto pořadí:

$$\kappa(\mathbb{A}) = 1.95, \kappa(\mathbb{B}) = 54.12, \kappa(\mathbb{C}) = 190.6, \kappa(\mathbb{D}) = 3018.02, \kappa(\mathbb{E}) = 15513.73$$

Ovšem spíš než přesné hodnoty čísel podmíněnosti je důležitý fakt, že každá následující matice je pro počítač horší na zpracování. Jakékoliv nepřesnosti, ať už v naměření pravé strany nebo zaokrouhlovací chyby při výpočtu, mají u pozdějších matic větší dopady, než u těch dřívějších.

Pravé strany příslušící maticím jsem zvolil tak, aby prostředek intervalů vedl na snadno kontrolovatelný vektor řešení $x = (1, 2, 3, 4)$ a kraje intervalů jsem zvolil s podmínkou, aby nepřesnosti na pravých stranách byly v řádu jednotek procent.

Vektory pravých stran (RHS, right hand side) příslušné těmto maticím jsou:

$$RHS(\mathbb{A}) = \begin{pmatrix} [6.5, 7.5] \\ [13, 15] \\ [19, 23] \\ [21, 25] \end{pmatrix}, RHS(\mathbb{B}) = \begin{pmatrix} [-628, -568] \\ [-306, -266] \\ [88, 98] \\ [297, 317] \end{pmatrix}, RHS(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} [70, 80] \\ [153, 173] \\ [137, 157] \\ [19, 29] \end{pmatrix},$$
$$RHS(\mathbb{D}) = \begin{pmatrix} [254, 294] \\ [-85, -75] \\ [-13, -19] \\ [149, 169] \end{pmatrix}, RHS(\mathbb{E}) = \begin{pmatrix} [1600, 1760] \\ [1081, 1201] \\ [832, 932] \\ [673, 773] \end{pmatrix}$$

2.3 Interpretace a srovnání výsledků

Přímo v této práci uvádím pouze vybrané výsledky, na kterých ukazují obecný trend. Různých kombinací rozdělení, druhů pivotace, podmínek matice a určované neznámé, je na vyplnění 120 stránek pouze obrázky. Zde pro jednoduchost uvádím pouze výsledky pro první neznámou x_1 . Data pro ostatní neznámé vypadají obdobně a všechna je možné najít v příloze ve formátu CSV, případně XLSX.

Mám zaručeno, že výsledné intervaly musí pokrývat skutečnou hodnotu neznámé. Důležitá je tedy šíře výsledného intervalu a platí, že větší interval znamená horší výsledek. Jak je vidět z tabulky 2.1, vliv pivotace na účinnost výpočtů v intervalové aritmetice je značný. Jedinou výjimku tvoří Hilbertova matice, kde se šíře intervalu se zavedením jednoho ze dvou druhů pivotace mírně zvětšila. U všech ostatních pokusů platí:

- Pokud je pivotace zakázána úplně, šíře intervalů je maximální.
- Povolení pouze řádkové či pouze sloupcové pivotace obvykle vede ke zlepšení, ale není možné říci s jistotou, která z nich dá lepší výsledek či jestli ke zlepšení vůbec dojde.
- Pokud je povolena jak řádková, tak sloupcová pivotace, šíře intervalů je minimální.

	Bez pivotace	Řádková piv.	Sloupcová piv.	Celková piv.
Matice A	0,339381	0,339381	0,339381	0,339381
Matice B	69,5448	11,3333	14,49698	9,52774
Matice C	60,512	22,6192	28,7774	20,59621
Matice D	812,27	725,672	69,5718	35,0184
Matice E	11179,42	11331,8	11320,76	3559,42

Tabulka 2.1: Šířka výsledných intervalů pro x_1

Náhodné veličiny

Hlavní výhoda použití náhodných veličin proti intervalové aritmetice spočívá v možnosti nastavit pravděpodobnost výskytu skutečné hodnoty neznámé v zadaném intervalu. Pokud výzkumník experimentálně naměří hodnotu na pravé straně s nějakou přesností, je rozumný předpoklad, že jeho měření se bude pohybovat někde poblíž skutečné hodnoty s větší pravděpodobností než někde dále od ní. Toto můžeme reprezentovat právě výběrem rozdělení. Zároveň použití náhodných veličin nám může dát lepší představu o tom, jak moc informace ztrácíme při intervalové aritmetice.

3.1 Teoretická část

Definice 16 (Rovnoměrné rozdělení). Mějme reálný interval $[a, b]$. O spojitě náhodné veličině X řeknu, že má rovnoměrné rozdělení, pokud její hustota pravděpodobnosti je:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}; x \in [a, b]$$

$$f(x) = 0; \text{jinak.}$$

Definice 17 (Normální rozdělení). O spojitě náhodné veličině X řeknu, že má náhodné rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 , pokud její hustota pravděpodobnosti je:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}; x \in \mathbb{R}$$

Definice 18 (Nosič rozdělení). Nechť X je diskrétní náhodná veličina. Potom o množině N řeknu, že je nosičem rozdělení X právě tehdy, když $P(X \in N) = 1$ a pro libovolnou neprázdnou množinu $A \subset N$ platí $P(X \in A) > 0$.

Nechť X je spojitá náhodná veličina. Potom o intervalu N řeknu, že je nosičem rozdělení X právě tehdy, když $P(X \in N) = 1$ a pro libovolný interval I takový, že $\text{wid}(I) > 0, I \subset N$ platí $P(X \in I) > 0$.

V obou případech tak jde v určitém ohledu o nejmenší množinu, na které náhodná veličina nabývá svých hodnot. Nosič jde samozřejmě zavést i obecně, ale zde si vystačím s takto omezenou definicí.

Definice 19 (Trojúhelníkové rozdělení). Mějme reálný interval $[a, b]$. O spojitě náhodné veličině X řeknu, že má trojúhelníkové rozdělení, pokud její hustota pravděpodobnosti je:

$$f(x) = \frac{4x - 4a}{(b - a)^2}; x \in [a, \frac{b + a}{2}]$$

$$f(x) = \frac{4b - 4x}{(b - a)^2}; x \in [\frac{b + a}{2}, b]$$

$$f(x) = 0; jinak.$$

Zde se jedná o speciální případ. Obecně je trojúhelníkové rozdělení možné definovat i nesymetricky. Zde předpokládám, že chyby nepřesnosti oběma směry jsou stejně pravděpodobné.

Tvrzení 1 (Výpočty s náhodnými veličinami). Mějme dvě náhodné veličiny X, Y se známými rozděleními a funkci dvou neznámých f definovanou alespoň na kartézském součinu oborů hodnot X a Y . Potom $Z = f(X, Y)$ je náhodná veličina a pro její distribuční funkci platí

$$F_Z(x) = P(Z < x) = P(f(X, Y) < x)$$

Pro důkaz a obecnější tvrzení, jehož je tvrzení výše triviálním důsledkem viz [4] kapitola 3.2

3.2 Implementace

V programu samotném aproximuji spojitě náhodné veličiny v tvrzení 1 pomocí podobně rozdělených diskretních. V jejich případě platí i verze s rovností. Tj: $P(Z = x) = P(f(X, Y) = x)$ a to mi dává možnost velice přesně počítat rozdělení výsledku integrací přes celý pravděpodobnostní prostor.

Numerické integraci pravých stran se věnuje asi největší část příloženého programu. Předpokládejme, že pro každou náhodnou veličinu X_i na pravé straně existuje interval $I_i = [A_i, b_i]$ takový, že $P(X_i \in I_i) = 1$. Potom si tento interval můžu rozsekat na menší intervaly a diskretní hodnoty v něm používat jako reprezentanty. místo $P(X_i \in [x_j, x_{j+1}])$ pak pro malé kroky mezi x_j a x_{j+1} mohu použít $P(X_i = x_j)$ Pomocí těchto diskretních veličin, jejich přesnost je volitelná a pro zmenšující se krok dělení intervalu konvergují k původním spojitým, mohu generovat různé pravé strany.

Jelikož nemůžeme předpokládat žádné nezávislosti mezi neznámými, je potřeba všechny možné tvary pravé strany řešit nezávisle na sobě. Předpokládejme, že náhodnou veličinu kubu reprezentovat pomocí k malých intervalů. Vznikne tak k^n různých pravých stran. Dále jednu takovou pravou stranu budu nazývat instancí a dává tedy smysl mluvit o pravděpodobnosti nějaké konkrétní instance. Nyní je potřeba určit, jak přesné dělení si můžu dovolit upočítat a tady narážím na velký problém s výkonem.

Složitost tohoto přístupu nespočívá v samotné GEM. Stále zde platí, že nalezení postupu, jak určit z pravé strany neznámé, má složitost $O(n^3)$ a aplikace tohoto postupu $O(n^2)$. Problém je v tom, že tuto aplikaci je potřeba provádět opakovaně pro každou instanci zvlášť a instancí je obecně mnoho. Pokud uvažuji, stejně jako výše, dělení na k intervalů, potom aplikací postupu na pravou stranu musím provést k^n a celková složitost algoritmu je $O(k^n \cdot n^2)$. Toto je také hlavní důvod předpokladu v úvodu, že na levé straně jsou čísla přesná. Na jakkoliv větší úlohu je tento přístup nepoužitelný, pokud se výsledku chci dožít.

Dále budu používat poměrně konzervativní dělení na 50 malých intervalů pro jednu náhodnou veličinu. V tomto případě mám pro matici 4x4 celkem $50^4=6,25$ milionu instancí. Tuto kombinaci konstant jsem zvolil, protože dává stále ještě výsledky, ze kterých se dá něco vyčíst, a celý výpočet pro vícero matic a pivotací doběhne na osobním počítači v řádu hodin.

Jak tvorba instancí, tak jejich zpracování na vektory výsledných neznámých se dá masivně paralelizovat. Původní idea byla, že pokud bych měl dostatek výpočetního výkonu, mohl bych díky pravděpodobnostem jednotlivých instancí získat přesnější výsledky, než při použití intervalové aritmetiky. Bohužel se ukazuje, že toho výpočetního výkonu a paměti je potřeba neúměrně mnoho nanepříliš výrazné zpřesnění.

3.3 Interpretace a srovnání výsledků

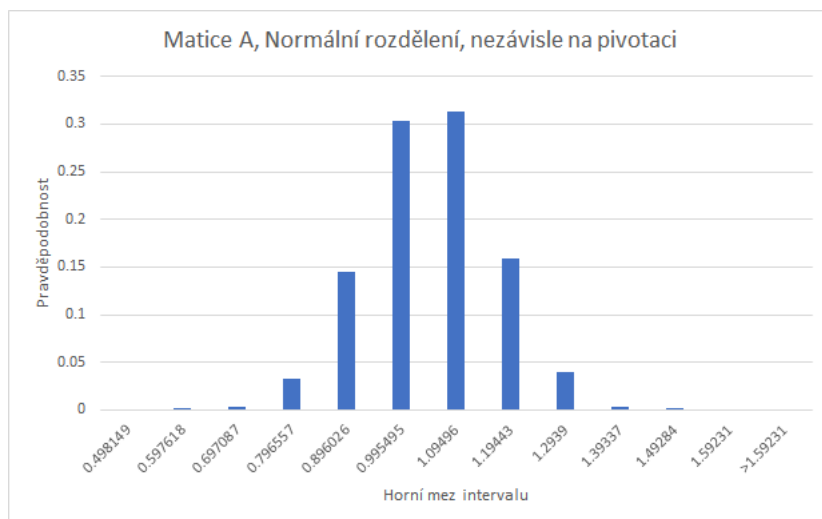
Nechť I je interval pro libovolnou neznámou pravé strany libovolné matice uvedený v předchozí kapitole. Nahrazuji jej postupně třemi různými náhodným veličinami:

- rovnoměrné rozdělení na I
- normální rozdělení takové, že $I = [EX - \sigma(X), EX + \sigma(X)]$
- trojúhelníkové rozdělení na I

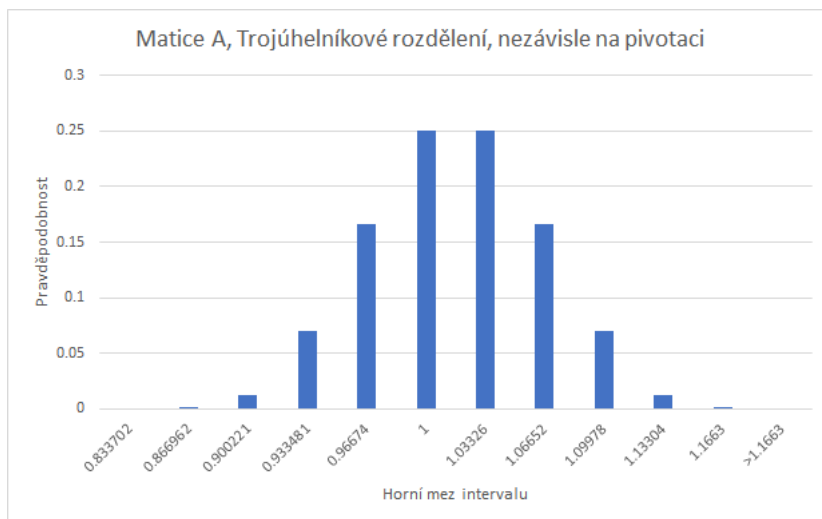
A sleduji, jak se změní rozdělení výsledných neznámých s závislosti na tom, zdali povolím pivotaci řádků a/nebo sloupců, a na rozdělení pravých stran. Zajímavé je, jak můžeme vidět na grafech 3.1, 3.2 a 3.3, že tvar výsledného rozdělení na rozdělení pravých stran až tak nezávisí a vždy připomíná Gaussovu křivku. Pokud bychom nepočítali s maticemi 4x4, ale většími, tento efekt

3. NÁHODNÉ VELIČINY

by byl ještě markantnější.² Liší se rozptyl, ale to je pravděpodobně důsledkem toho, že vybraná rozdělení nebyla vybrána, aby měla stejný rozptyl, ale podobné intervaly spolehlivosti na vysokých hladinách.

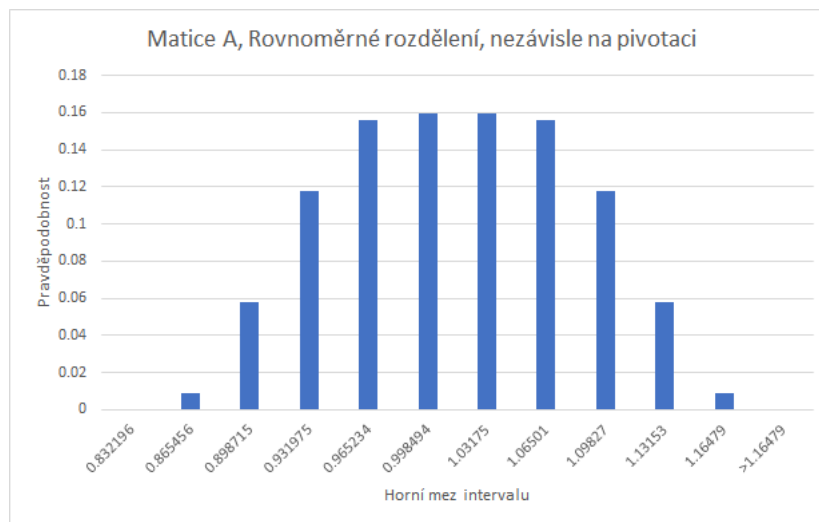


Obrázek 3.1: Rozdělení x_1 pro normální rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}



Obrázek 3.2: Rozdělení x_1 pro trojúhelníkové rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}

²Jelikož výsledná náhodná veličina je stále lineární kombinací čtyř vstupních náhodných veličin, je možno tento toto pozorování podložit CLV, konkrétně Ljapunovovou variantou.[5] To je ovšem nad rámec této práce.

Obrázek 3.3: Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}

3.3.1 Časová náročnost

Výpočty v intervalové aritmetice se sestávají z vyřešení levé strany a aplikování té samé transformace na pravou stranu tvořenou intervaly. Výpočty zahrnující náhodné veličiny s rozumnou přesností se sestávají z vyřešení levé strany a aplikace tohoto postupu na mnoho milionů pravých stran. To má za následek fakt, že pokud nemáme počítač s mnoha miliony procesorových jader, což by také s sebou neslo mnoho problémů při implementaci, místo čekání na výsledek řádově milisekundy čekáme na řešení jedné soustavy rovnic jednotky až desítky minut. Takové zvýšení výpočetní složitosti bohužel tento postup na dobro vyrazuje z jakéhokoliv praktického použití.

3.3.2 Pivotace

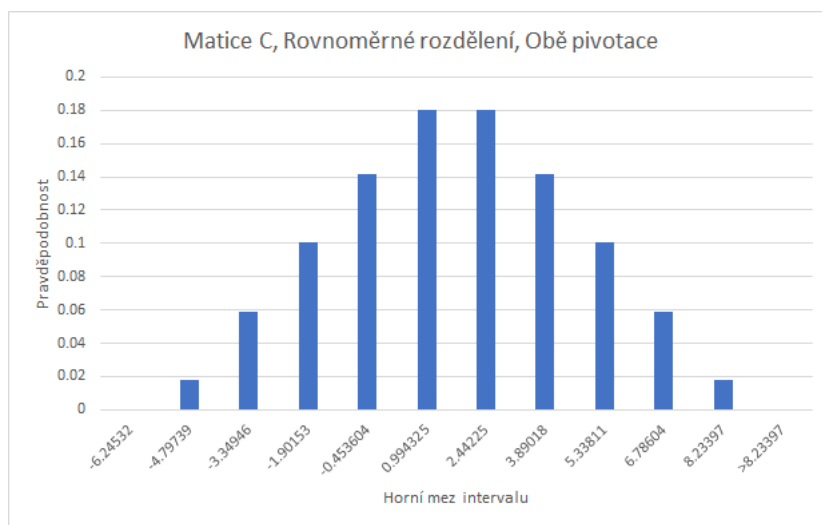
Překvapivým výsledkem pro mě byl fakt, že na výsledné rozdělení nemá pivotace téměř žádný vliv. Nehledě na to, zdali byla zapnuta pouze řádková, pouze sloupcová, celková či žádná pivotace, výsledné rozdělení bylo na první pohled vždy stejné. Tento zvláštní výsledek se dá ovšem odůvodnit poměrně snadno: V každé instanci řeším soustavu rovnic s pevně danou reálnou pravou stranou. Chyby ve zpracování intervalů se zde neprojeví a chyby na úrovni strojové přesnosti se při zhruba 20 operacích budou pohybovat na hranici měřitelnosti. Skutečně, při pohledu do zdrojových dat na výsledky u velice špatně podmíněné matice \mathbb{E} vidím mezi pivotacemi odchylky v řádu deseti-tisícin procent.

3.3.3 Srovnání s intervalovou aritmetikou

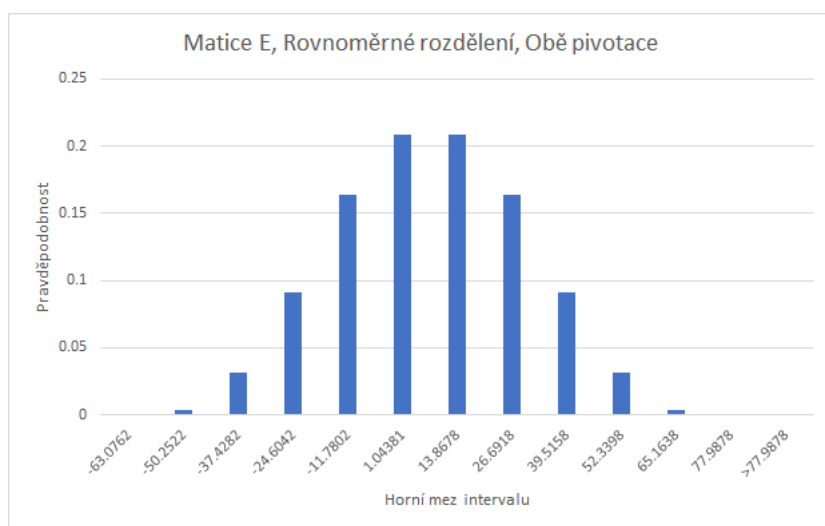
Pokud porovná výsledná rozdělení náhodných veličin pro rovnoměrné rozdělení pravých stran s tím, co mi dala intervalová aritmetika v tabulce 2.1, je vidět zlepšení. Bohužel pokud pomínu extrémně špatně podmíněnou Hilbertovu matici, zlepšení je minimální a je otázka, zdali stojí za mnohonásobně horší výpočetní náročnost. V tabulce 3.1 je srovnání šířky nosiče rozdělení (tj. takové množiny M , že $P(x \in M) = 1$) s výsledky intervalové aritmetiky se zapnutou pivotací a na grafech 3.3, 3.4 a 3.5 jsou vidět přímo rozdělení pro matice \mathbb{A} , \mathbb{C} , a \mathbb{E}

	Nosič rozdělení	Intervalová Aritmetika
Matice \mathbb{A}	0,332594	0,339381
Matice \mathbb{B}	5,43597	9,52774
Matice \mathbb{C}	14,47929	20,59621
Matice \mathbb{D}	31,2881	35,0184
Matice \mathbb{E}	141,064	3559,42

Tabulka 3.1: Srovnání šířek nosiče rozdělení x_1 s výsledky intervalové aritmetiky



Obrázek 3.4: Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{C}

Obrázek 3.5: Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{E}

Zmenšení výpočetní náročnosti

Jelikož přesné výpočty v předchozí kapitole trvají nepříjemně dlouho, další úvahy směřují ke zmírnění výpočetní náročnosti. Vyzkoušel jsem postupně dva způsoby, jakými by mohlo dojít ke znatelnému zrychlení. První z nich je založen vlastnostech součtu normálně rozdělených veličin. Bohužel tato vlastnost funguje pouze pro nezávislé náhodné veličiny a rozhodně není zaručena v případě, že výsledky dále zpracovávám a kombinuji mezi sebou. V této kapitole zjišťuji, jak velkých chyb se v případě, že tento fakt opominu, mohu dopustit.

4.1 Teoretická část

Vycházím z následující vlastnosti, kterou je možno najít i s důkazem v [4] Základech matematické statistiky:

Tvrzení 2. Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé normálně rozdělené náhodné veličiny se středními hodnotami μ_1, μ_2 a rozptyly σ_1^2, σ_2^2 a $a, b \in \mathbb{R}$ jsou reálná čísla. Potom $aX_1 + bX_2$ je normálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou $a\mu_1 + b\mu_2$ a rozptylem $a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$.

Vypadá to tedy, že pokud budeme sčítat normálně rozdělené náhodné veličiny, vyjdou nám opět normálně rozdělené náhodné veličiny. A díky centrální limitní větě se s dostatkem operací bude výsledek stále více a více podobat normálnímu rozdělení nehledě na to, jak vypadají rozdělení vstupních veličin. V tomto postupu je ale zásadní chyba: Jak věta výše, tak CLV stojí na předpokladu nezávislosti vstupních náhodných veličin a během vykonávání GEM se mezi sebou náhodné veličiny na pravé straně kombinují a míchají tak, že už po první iteraci je předpoklad nezávislosti naprosto nemyslitelný. Otázka je, jak moc to znehodnotí výsledky.

4.2 Implementace

Díky předchozí kapitole máme zaručeně správné a velice přesné výsledky. Nyní rozdělení na pravých stranách nebudu počítat pomocí numerické integrace, ale pouze aritmetikou se středními hodnotami a rozptyly podle tvrzení výše. Zanedbám při tom požadavky na nezávislost a na konci porovnáám výsledky tohoto nekorektního postupu s výsledky v předchozí kapitole.

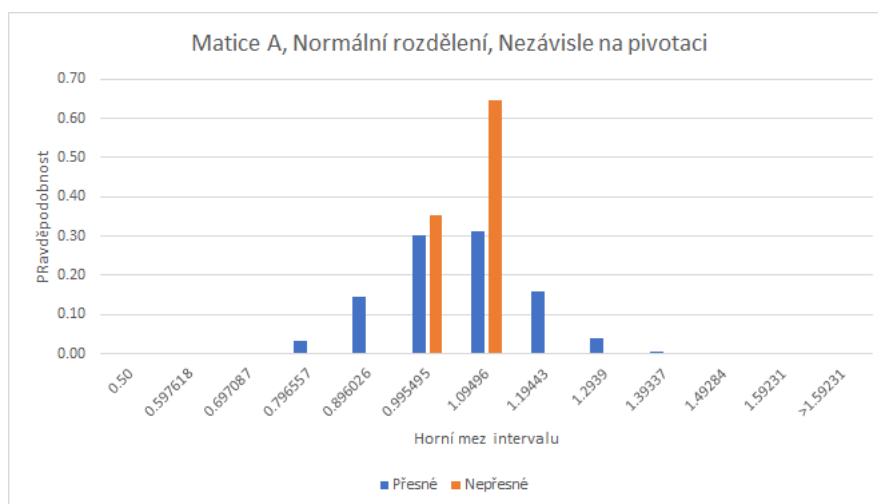
Normální rozdělení je plně určeno dvěma parametry: Střední hodnotou a rozptylem. Stačilo si tedy pamatovat dvě čísla v plovoucí desetinné čárce a implementovat metody na sčítání a násobení normálních rozdělení podle věty výše.

Složitostí se tam dostávám opět na úroveň toho, co potřebuje intervalová aritmetika. Nejprve $o(n^3)$ na nalezení postupu a následně $o(n^2)$ při aplokaci na pravou stranu. Oproti číselné pravé straně je zde sčítání/násobení parametrů normálního rozdělení složitější. Každá operace zahrnuje jedno sčítání a jedno násobení jak pro střední hodnotu, tak pro rozptyl. Rozptyl je potřeba násobit ještě jednou. Opět se jedná o malou multiplikativní konstantu, která je v porovnání s obrovskými počty instancí v jiných postupech naprosto zanedbatelná.

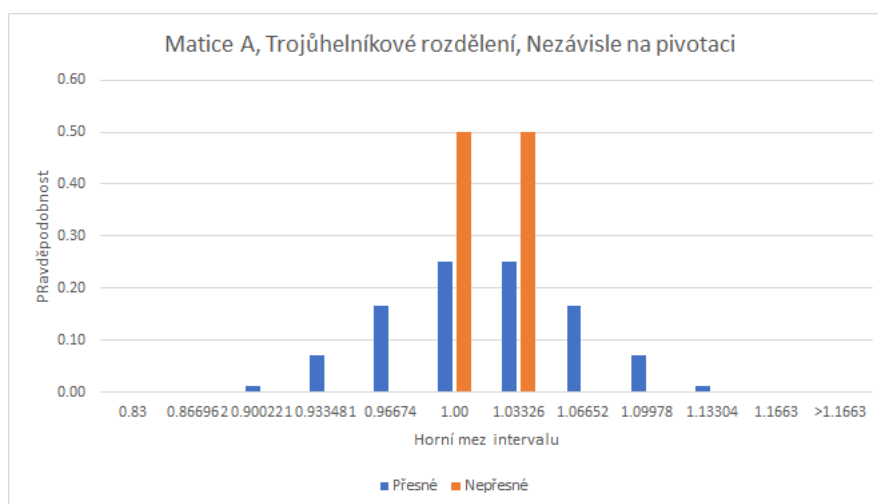
4.3 Interpretace a srovnání výsledků

Bohužel se ukazuje že tento postup, ač rychlý, je fundamentálně špatně a naprosto nepoužitelný, jak poměrně jasně ukazují grafy 4.1 až 4.5,. Jedná se o grafy ze sekce 3.3 doplněné o hodnoty naměřené tímto postupem. Na grafech je jasně vidět, že použitelnost velice závisí na podmíněnosti matice. Pokud je matice špatně podmíněná, dostáváme výsledky rozprostřené po mnohonásobně větší ploše, než nám dává i jinak velice opatrná intervalová aritmetika. V tom případě efektivně nevím nic. A pokud je matice dobře podmíněná, tento postup zase tvrdí, že má mnohem přesnější výsledek, než má ve skutečnosti. V tomto případě jsem na tom ještě hůř. Myslím si, jak mám nádherně přesný výsledek, ale přitom je naprosto špatně. Tudy cesta ke zjednodušení rozhodně nevede a předpoklad nezávislosti je tady naprosto zásadní.

4.3. Interpretace a srovnání výsledků

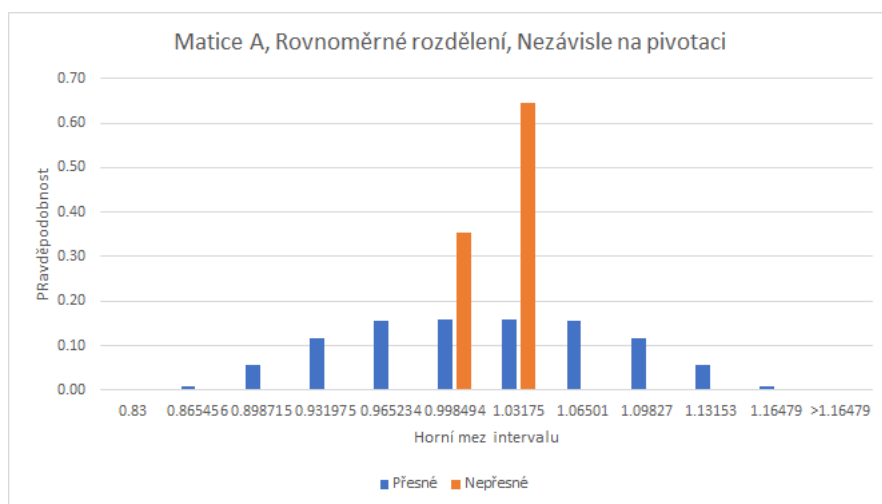


Obrázek 4.1: Rozdělení x_1 pro normální rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}

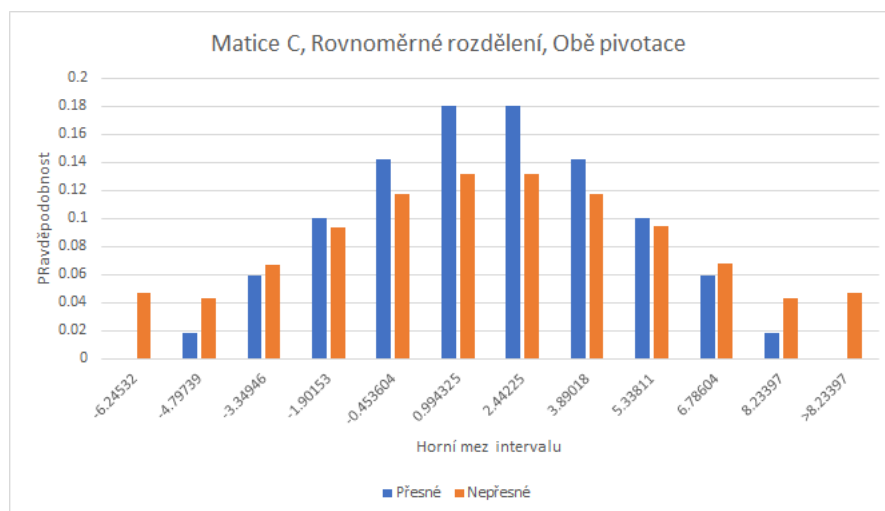


Obrázek 4.2: Rozdělení x_1 pro trojúhelníkové rozdělení pravých stran, matice \mathbb{A}

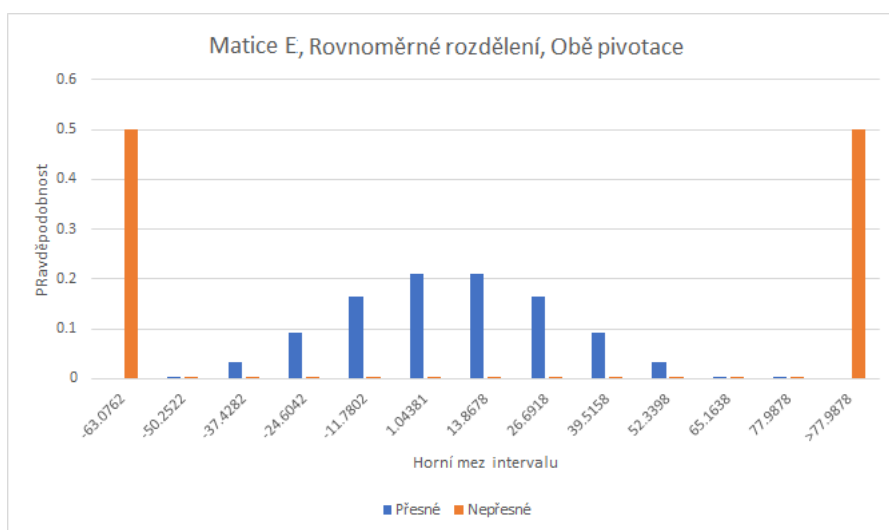
4. ZMENŠENÍ VÝPOČETNÍ NÁROČNOSTI



Obrázek 4.3: Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice A



Obrázek 4.4: Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice C

Obrázek 4.5: Rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice \mathbb{E}

Výpočty s náhodným výběrem

Dalším způsobem, jak si práci usnadnit, může být nějaká aproximace rozdělení na pravé straně. Efektivně něco podobného, ač systematicky a ne náhodně, dělám už v kapitole 3. Možná ovšem nepotřebujeme kombinovat „každý s každým“ a můžeme si práci usnadnit třeba pomocí řádově menšího náhodného výběru z mnohorozměrného rozdělení na pravé straně.

5.1 Teorie

Teorie k této sekci je stejná jako u předchozí kapitoly a není potřeba zavádět nové pojmy.

5.2 Implementace

Jelikož 6,25 milionu instancí už je na hraně upočitatelnosti, jak jsem rozebíral dříve, zavrhl jsem náhodný výběr o velikosti řádově milionů pozorování. Stejně tak jsem zavrhl řády desetitisíců či méně. Aproximace čtyřrozměrného rozdělení tak malým počtem pozorování mi přišla už příliš nepřesná. Zvolil jsem tedy pro své výpočty číslo 10^5 jako jakýsi kompromis mezi rychlostí a přesností.

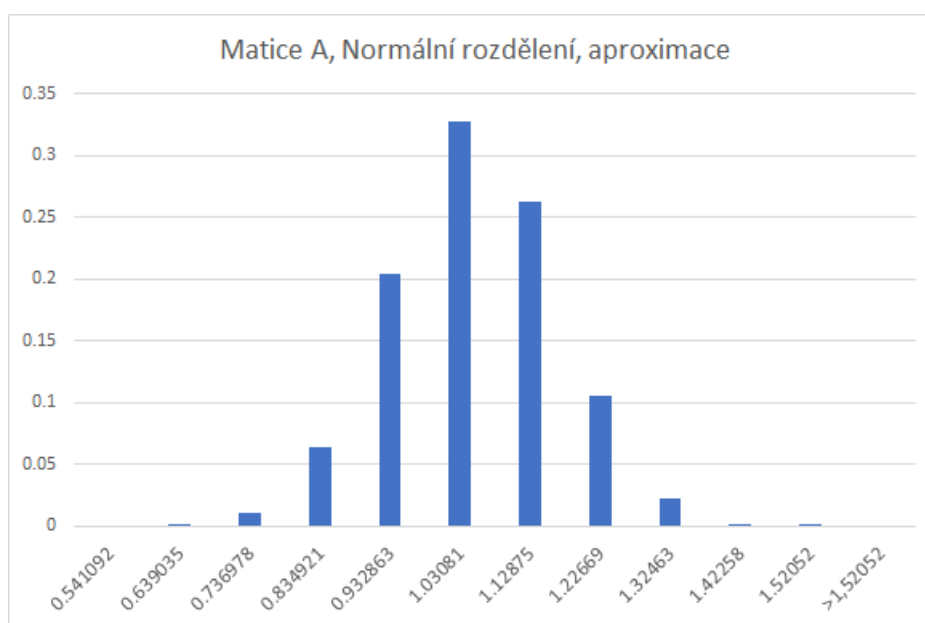
Provádění náhodného výběru jsem implementoval dost přímočaře. V každém cyklu jsem si bez jakýchkoliv složitostí ze všech čtyř rozdělení vyžádal jedno pozorování a tuto čtveřici zkombinoval do stejné struktury, jako jsem používal v kapitole 3. Kvůli cca 60x nižšímu počtu pozorování celý výpočet trval nikoliv dvě hodiny, ale necelé dvě minuty. Otázka je, o jak velkou přesnost jsem se tímto postupem připravil.

Složitost tohoto postupu je identická jako v předchozí kapitole. Pouze máme kontrolu nad množstvím instancí.

5.3 Interpretace a srovnání výsledků

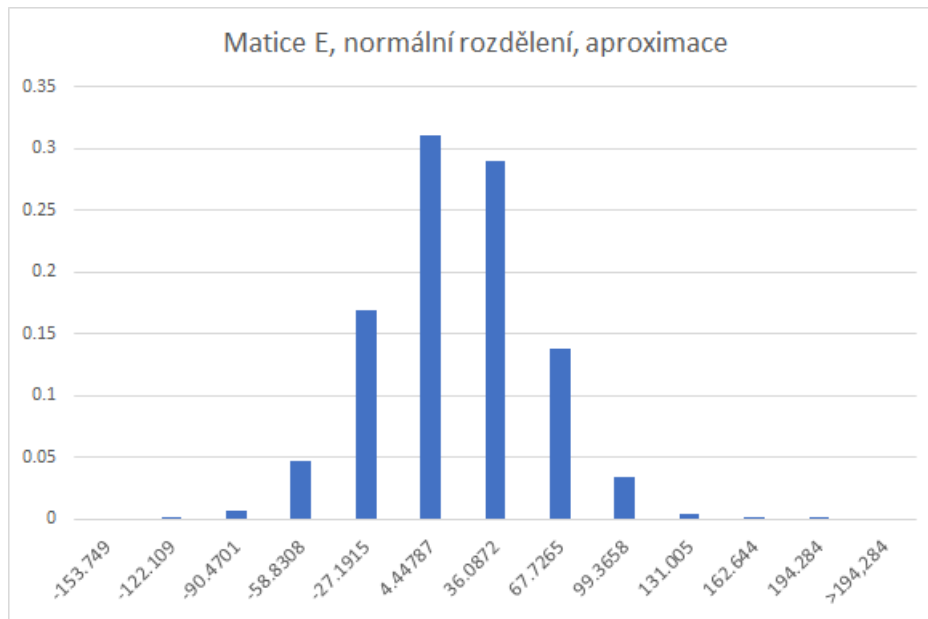
	Aproximace	Nosič rozdělení	Intervalová Aritmetika
Matice A	0,257739	0,332594	0,339381
Matice B	3,505016	5,43597	9,52774
Matice C	12,28321	14,47929	20,59621
Matice D	24,00484	31,2881	35,0184
Matice E	79,0006	141,064	3559,42

Tabulka 5.1: Srovnání šířek nosiče rozdělení x_1 s jeho aproximací a výsledky intervalové aritmetiky



Obrázek 5.1: Aproximace rozdělení x_1 pro normální rozdělení pravých stran, matice A

Zde nejsou výsledky až tak průkazné. U normálně či trojúhelníkově rozdělené pravé strany je vidět, 5.1, 5.2 přibližně normální rozdělení výsledků nehledě na podmíněnost matice. Zároveň u rovnoměrně rozdělené pravé strany se sice výsledky částečně koncentrují u středních hodnot, viz grafy 5.3 a 5.4. Tato měření jsou naprosto konsistentní s hypotézou, že dostaneme obdobné, ale méně „hladké“ výsledky jako u přesných výpočtů. Zároveň je nutno podotknout, že jak grafy, tak výsledky v tabulce 5.1 jsou pouze přibližné a náhodné. Při jiném spuštění programu se mohou výrazně lišit oběma směry. Ovšem nikdy by neměly vyjít větší, než jsou přesné výsledky. Přesné výpočty jistě pokryjí krajní případy, zatímco náhodný výběr skoro jistě nikoliv. To je

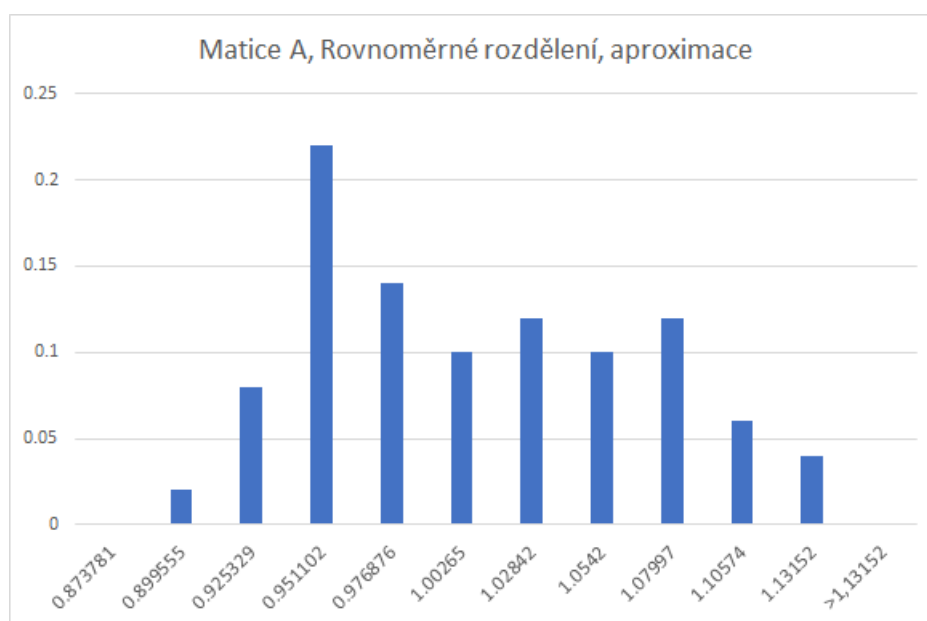


Obrázek 5.2: Aproximace rozdělení x_1 pro normální rozdělení pravých stran, matice \mathbb{E}

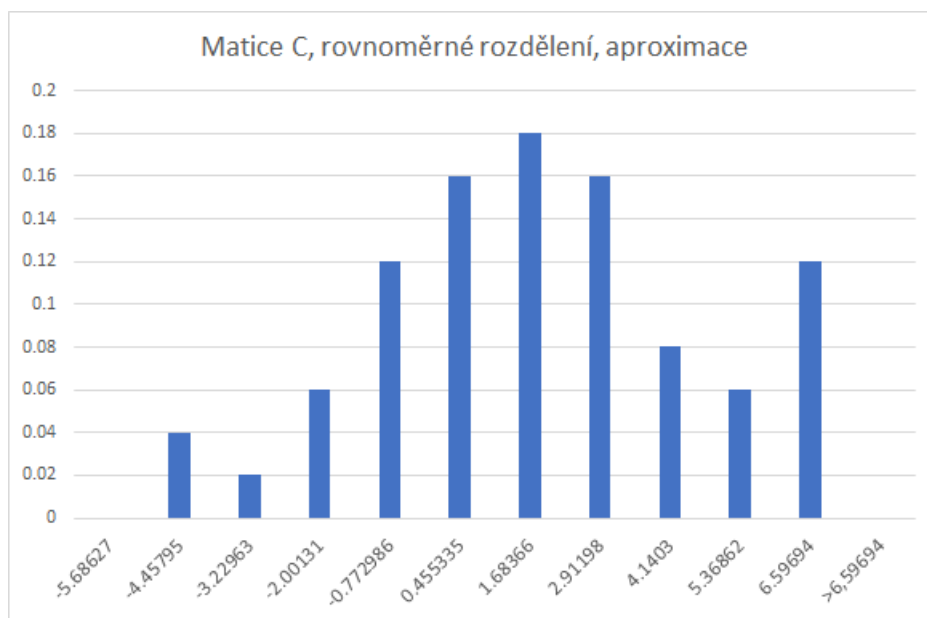
ovšem velice špatná vlastnost. Tento postup také dává výsledky, o kterých tvrdí, že jsou přesnější, ne ve skutečnosti jsou. Tento efekt není tak markantní jako při předchozím pokusu, ale stále zvyšuje pravděpodobnost, že udělám špatný závěr či neplatný interval spolehlivosti. Konkrétní příklad: Intervaly, které aproximace označila jako celé nosiče a jejichž šířky jsou v tabulce 5.1 v prvním sloupci, mají ve většině případů šířku mezi 85% a 90% intervalem spolehlivosti určeným z přesných výpočtů.

Efekt pivotace jsem na těchto datech neměřil, neb pro každé řešení jsem v programu generoval jiný náhodný výběr. Pokud mezi způsoby pivotace při řešení existují rozdíly, jsou dost malé na to, aby je překryla náhodnost těchto výběrů. Odhaduji, že efekt pivotace by byl opět nulový či naprosto zanedbatelný, ale s jistotou to zatím tvrdit nemohu.

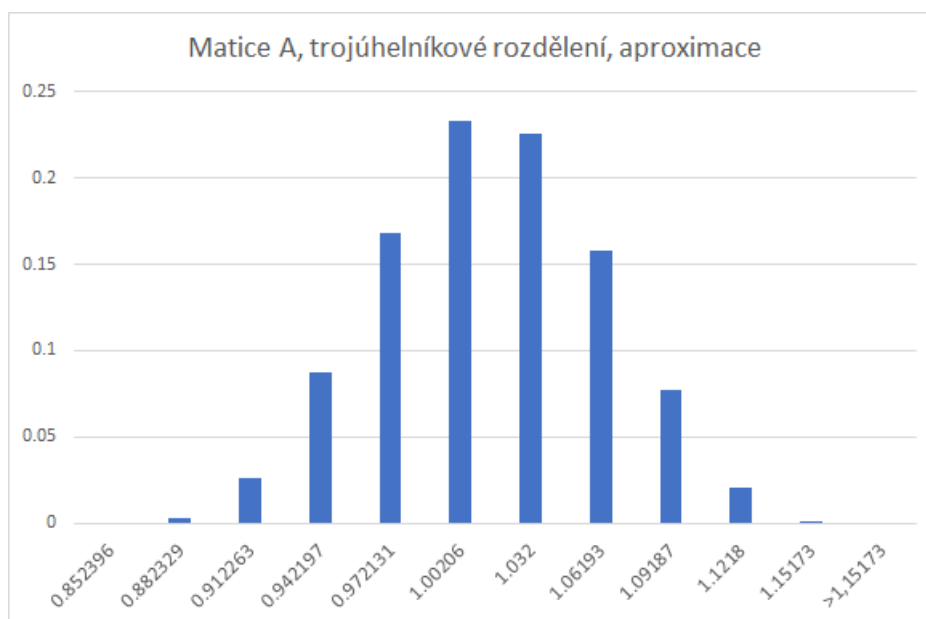
5. VÝPOČTY S NÁHODNÝM VÝBĚREM



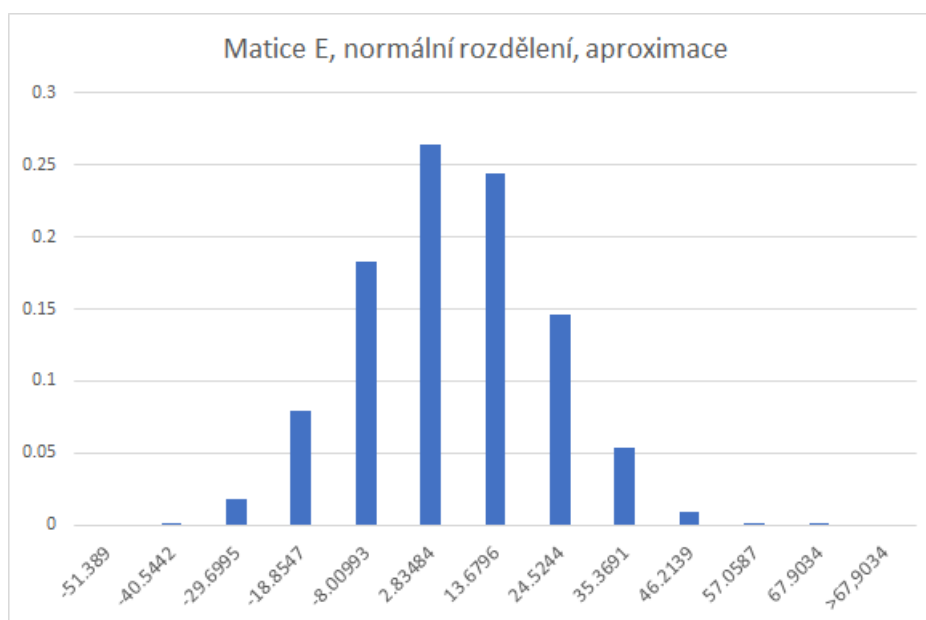
Obrázek 5.3: Aproximace rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice A



Obrázek 5.4: Aproximace rozdělení x_1 pro rovnoměrné rozdělení pravých stran, matice C



Obrázek 5.5: Aproximace rozdělení x_1 pro trojúhelníkové rozdělení pravých stran, matice A



Obrázek 5.6: Aproximace rozdělení x_1 pro trojúhelníkové rozdělení pravých stran, matice E

Nové hypotézy

Během výpočtů se objevily zajímavé vlastnosti některých použitých postupů, o kterých věřím, že jsou univerzální a dokázatelné. Jedná se však pouze o domněnky a matematický důkaz pro ani jedno z tvrzení se mi najít nepodařilo.

Pozorování 2. Pokud hledáme řešení soustavy lineárních rovnic s pravou stranou reprezentovanou náhodnými veličinami pomocí numerické integrace na malých maticích, pivotace při výpočtu výsledky ovlivní minimálně, pokud vůbec. Změny jsou pozorovatelné pouze u velice špatně podmíněných matic levých stran.

Podle mě toto pozorování ukazuje, jak moc informace ztrácím při práci s intervalovou aritmetikou. Mějme nějakou regulární matici \mathbb{A} . Nosič rozdělení pravých stran je n -rozměrný kvádr. Nosič neznámých je potom n -rozměrný rovnoměrník složený z vlastních vektorů inverzního zobrazení \mathbb{A}^{-1} . Při výpočtech efektivně kreslím síť pokrývající tento rovnoběžník a hledám jednotlivé body na něm. Kvůli vlastnostem počítačové aritmetiky se nějaké nepřesnosti objeví, ale operací s pravou stranou dělám poměrně málo, zhruba n^2 . V čísle s plovoucí desetinnou čárkou s dvojitou přesností podle IEEE 754 mám uloženou přesnost na 53 binárních míst. Při sčítání přijdu maximálně o jedno, při násobení o dvojkový logaritmus činitele. Pokud tedy nejsem nucen opakovaně násobit velkými čísly, což mě právě při výpočtu nutí dělat špatně podmíněná matice, strojová přesnost se u takto malých matic sotva projeví. Tedy výsledky budou podobné nezávisle na pivotaci.

Pozorování 3. Pokud spojitou náhodnou veličinu na pravé straně rovnice při výpočtu nahradíme náhodným výběrem, intervaly spolehlivosti a nosič náhodné veličiny reprezentující hledané neznámé se s velkou pravděpodobností hraničící s jistotou zmenší.

Při numerické integraci provádím úplně stejné výpočty jako při náhodném výběru. Jde tedy o pravděpodobnost, že najdu takovou kombinaci pravých

stran, že pro sledovanou proměnnou dostanu extrémní výsledky. Protože zobrazení mezi pravou stranou a vektorem neznámých je lineární, tak tyto extrémy budou na krajních bodech intervalů. Pokud celý pravděpodobnostní prostor systematicky procházím s pevně danou velikostí kroku, od těchto extrémů se nutně vzdám maximálně o velikost kroku. Toto při náhodném výběru zaručené nemám. Abych dosáhl stejně širokého nosiče, musel bych se při náhodném výběru trefit zároveň do obou extrémů lépe než při systematickém procházení. A mám na to při náhodném výběru řádově méně pokusů, než při procházení. Tedy pravděpodobnost, že se takto dobře trefím, bude malá.

Závěr

Prozkoumal jsem čtyři různé přístupy ke zpracování nepřesnosti ve výpočtech. Intervalovou aritmetiku, numerickou integraci náhodných veličin, použití CLV ke zjednodušení výpočtů a náhodný výběr. S výjimkou třetího zmíněného postupu (CLV bez předpokladu nezávislosti) měl každý své výhody a nevýhody. Jejich shrnutí je následující:

- Intervalová aritmetika je rychlá a spolehlivá, avšak výsledné intervaly jsou příliš široké a tedy s malou výpovědní hodnotou. Tento problém je možné univerzálně potlačit pomocí pivotace řádků a sloupců.
- Numerická integrace náhodných veličin dává libovolně přesné a korektní výsledky. Její nevýhodou je skutečně obrovská výpočetní a paměťová náročnost. Pivotace má ve většině případů naprosto zanedbatelný efekt.
- Předpokládat nezávislost náhodných veličin při GEM je extrémně špatný a nespolehlivý postup, který není možné doporučit v žádném případě a využití. V závislosti na vstupní matici může vrátit naprosto špatný či naprosto nicneříkající výsledek.
- Využití náhodného výběru k reprezentaci spojitě náhodné veličiny je možné a dává rozumné výsledky. Je ale nutno vzít v potaz, že spolehlivost jakýchkoliv závěrů dělaných z těchto výpočtů může být výrazně nadsazená.

Seznam použitých zkratk

GEM Gaussova eliminační metoda (Gauss' elimination method)

RHS Vektor pravých stran rovnic (Right hand side.)

CLV Centrální limitní věta

Obsah přiloženého média

Resitel.cpp.....	zdrojový kód řešitele
Resitel.exe.....	spustitelná forma téhož
README.txt	Návod k použití řešitele
Export	
_ Results_X#.csv	výsledky pro proměnnou číslo #
_ Results_X#.xlsx.....	totéž, ale upravené do XLSX pro snadnější čtení
ExportApprox	stejně uspořádané výsledky z výpočtů pomocí náhodných výběrů
Matrix#	složka s informacemi o matici číslo # (0-4)
_ IntrRHS.txt.....	zápis pravých stran pro intervalovou aritmetiku
_ Matice.txt.....	zápis samotné matice
_ NormalRHS.txt.....	Střední hodnota a rozptyl normálně rozdělených pravých stran
_ RealRHS.txt.....	Pouze prostředky intervalu. Pro kontrolu správnosti výpočtů
_ UniformRHS.txt.....	Zápis rovnoměrně rozdělených pravých stran
_ Notes.txt.....	Poznámky pro jednodušší odlišení jednotlivých matic
_ RESULTS_FF.txt	Výsledky vypočtené řešitelem. Bez pivotace
_ RESULTS_FT.txt ...	Výsledky vypočtené řešitelem. Sloupcová pivotace
_ RESULTS_TF.txt.....	Výsledky vypočtené řešitelem. Řádková pivotace
_ RESULTS_TT.txt	Výsledky vypočtené řešitelem. Celková pivotace
thesis.pdf	text práce ve formátu PDF

Literatura

- [1] Kulle, Martin: Použití intervalové aritmetiky v řešících soustav lineárních rovnic. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií, 2015.
- [2] Kulle, Martin: Pokročilé algoritmy pro řešení soustav lineárních intervalových rovnic. Diplomová práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií, 2017.
- [3] Dombek, Daniel; Kalvoda, Tomáš; Klemprlík, Luděk; Klouda, Karel: Lineární algebra - Studijní text. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií, 2018.
- [4] Anděl, Jiří: Základy matematické statistiky. Praha, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2002.
- [5] Dupač, Václav; Hušková, Marie: Pravděpodobnost a matematická statistika. Praha, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2005. ISBN 978-80-246-009-3
- [6] Pryce, J. D.; Corliss, G. F.: Interval arithmetic with containment sets. <http://www.cas.mcmaster.ca/~isl/Publications/IntvlArithCsets.pdf>
- [7] Ramdani, N.; Raissi, T.; Candau, Y.: Complex interval arithmetic using polar form. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.101.9298&rep=rep1&type=pdf>
- [8] Lichtblau, Daniel and Weisstein, Eric W. "Condition Number." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/ConditionNumber.html>, [cit. 30.5.2021].
- [9] https://encyclopediaofmath.org/wiki/Condition_number, revize 15.12.2020

LITERATURA

- [10] <https://frederic.goualard.net/#research-software>, [cit. 14.6.2021].
- [11] <https://directory.fsf.org/wiki/MPFI>, [cit. 14.6.2021].