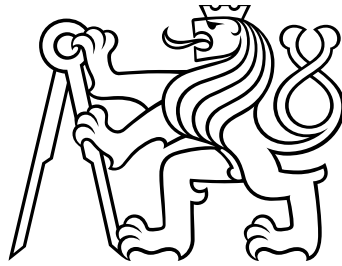


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV ŘÍZENÍ A EKONOMIKY PODNIKU



Analýza časových řad
Time series analysis

Bakalářská práce

2021

Autor: Jakub Frolík
Studijní program: Výroba a ekonomika ve strojírenství
Vedoucí práce: Ing. Barbora Stieberová, Ph.D.



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Frolík** Jméno: **Jakub** Osobní číslo: **484015**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav řízení a ekonomiky podniku**
Studijní program: **Výroba a ekonomika ve strojírenství**
Studijní obor: **Technologie, materiály a ekonomika strojírenství**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Analyza časových řad

Název bakalářské práce anglicky:

Time series analysis

Pokyny pro vypracování:

1. Úvod do problematiky časových řad.
2. Charakteristika metod analýzy časových řad (exponenciální vyrovnání, ARIMA, SARIMA).
3. Aplikace metod analýzy časových řad v konkrétním případě.
4. Závěrečné vyhodnocení.

Seznam doporučené literatury:

ARLT, Josef, Markéta ARLTOVÁ a Eva RUBLÍKOVÁ. Analýza ekonomických časových řad s příklady. Praha: Vysoká škola ekonomická, 2002. ISBN 80-245-0307-7.
HINDLS, Richard, Markéta ARLTOVÁ, Stanislava HRONOVÁ, Ivana MALÁ, Luboš MAREK, Iva PECÁKOVÁ a Hana ŘEZANKOVÁ. Statistika v ekonomii. [Přůhonice]: Professional Publishing, 2018. ISBN 978-80-88260-09-7.
SHUMWAY, Robert H. a David S. STOFFER. Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples. 4th ed. Springer International Publishing, 2017, 562 s. ISBN 978-3-319-52452-8.
BUDÍKOVÁ, Marie, Marie KRÁLOVÁ a Bohumil MAROŠ. Průvodce základními statistickými metodami. Praha: Grada, 2010. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-3243-5.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Barbora Stieberová, Ph.D., ústav řízení a ekonomiky podniku FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **30.04.2021** Termín odevzdání bakalářské práce: **23.07.2021**

Platnost zadání bakalářské práce: **28.02.2022**

Ing. Barbora Stieberová, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

Ing. Miroslav Žilka, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Analýza časových řad vypracoval pod vedením vedoucí bakalářské práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury.

Dne 15. 7. 2021

Jakub Frolík

Anotace

Tato bakalářská práce je zaměřena na analýzu časových řad. Za pomoci různých metod analýzy je hledán model nejprve sezonní a poté nesezonní časové řady a na jeho základě je vytvořena předpověď na další období. V závěru práce jsou výsledné předpovědi porovnány se skutečnými hodnotami k určení vhodnosti daného modelu.

Klíčová slova

Časové řady, dekompozice, exponenciální vyrovnání, regrese, ARIMA, SARIMA

Annotation

This bachelor thesis is focused on the time series analysis. Using various methods of analysis, a model of firstly seasonal and then non-seasonal time series is found, and based on that, a forecast for the next period is created. At the conclusion of this thesis, the resulting forecast is compared with the real values to determine the suitability of the model.

Keywords

Time series, decomposition, exponential smoothing, regression, ARIMA, SARIMA

Poděkování

Rád bych touto cestou vyjádřil poděkování paní Ing. Barboře Stieberové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a za čas, který mi věnovala při zpracování této bakalářské práce.

Obsah

Úvod	8
Teoretická část.....	9
1 <i>Regresní analýza</i>	9
1.1 Volba regresní funkce.....	10
1.2 Index determinace	10
1.3 Lineární regresní model	11
1.4 Nelineární regresní modely	12
2 <i>Časové řady.....</i>	14
2.1 Definice časových řad.....	14
2.2 Dělení časových řad.....	15
2.3 Grafická analýza časových řad	16
2.4 Charakteristiky časových řad.....	16
2.5 Dekompozice časové řady.....	18
2.6 Analýza trendu pomocí regresní analýzy	20
2.7 Metoda klouzavých průměrů	20
2.8 Exponenciální vyrovnání	21
2.9 Boxova-Jenkinsonova metodologie	22
2.10 Způsoby hodnocení modelů.....	26
Praktická část.....	27
1 <i>Software SPSS</i>	27
2 <i>Sezonní časová řada.....</i>	28
2.1 Sezonní dekompozice.....	29
2.2 Regresní metoda	34
2.3 Exponenciální vyrovnání	37
2.4 SARIMA metoda	39
2.5 Shrnutí sezonní časové řady.....	47
3 <i>Nesezonní časová řada</i>	48
3.1 ARIMA metoda	49
3.2 Exponenciální vyrovnání	54
3.3 Shrnutí nesezonní časové řady.....	56
Závěr	57
Citovaná literatura	58
Seznam grafů	60
Seznam tabulek.....	61

Úvod

V dnešní době jsou ekonomická rozhodnutí mnohdy zásadní pro prosperitu společnosti. Špatná rozhodnutí vedou k finančním ztrátám, naopak ta dobrá mohou firmu posunout vpřed, třeba před její konkurenci. Pro takovéto zhodnocení jsou ale klíčová samotná data, podle kterých se pak například predikuje, jakých společnost dosáhne tržeb v následujícím období.

Tímto zhodnocením se zabývá statistika a v ní použité metody. V této práci se budu zabývat analýzou časových řad, pomocí které budu moci určit, jak se budou jednotlivé časové řady chovat v nastávajících letech, přičemž bude aplikováno více metod analýzy. Data pro analýzu časových řad budu brát prioritně z výročních zpráv a také z archivu vybrané společnosti.

První část se zaměřuje na teoretická východiska práce, konkrétně regresní analýzu, což poskytne určitý základ a popis matematických funkcí, které se v časových řadách používají. Poté se přejde k samotné problematice časových řad, bude představena jejich definice a možnosti dělení. Dále bude ukázána stručná charakteristika, ve které budou popsány základní rovnice, dekompozice časových řad, kdy se řada rozdělí na jednotlivé složky, nebo také různé metody, podle kterých se časové řady dají modelovat.

V druhé části práce bude nejprve představen software, se kterým se bude pracovat a pomocí předchozích zkušeností získaných z teoretické části budou aplikovány různé metody na konkrétní časové řady za pomoci tohoto softwaru. Nejvíce se budou aplikovat metody z Boxovi-Jenkinsonovi metodologie, konkrétně metody ARIMA a SARIMA. Prostřednictvím těchto modelů bude poté možné predikovat vývoj daného ukazatele na další období a daný výsledek zhodnotit.

Teoretická část

1 Regresní analýza

Tato kapitola je citovaná z literatury [1] a [2].

Regresní analýza se dnes používá v různých sektorech, ať už v ekonomické statistice, při zkoumání hrubého domácího produktu daného státu, či ve finanční analýze, účetnictví a mnoha dalších.

Regresní analýza se zabývá jednostrannými závislostmi a je používána při odhadu závislosti proměnných, přičemž počet číselných proměnných je větší nebo roven 2. V ekonomice se pracuje s proměnnými veličinami x a y . Je otázkou, zda jeden či více prediktorů x , označeny jako nezávisle proměnné, ovlivňuje chování sledované veličiny y , označené jako závislé proměnné. Tato závislost je vyjádřena funkcí $y = \varphi(x)$, ale tato funkce je neznámá, nebo ji nelze vhodnou funkcí vyjádřit. Jediné známé je, že při nastavení určité hodnoty x , je získána jedna hodnota y .

Při opakovaném pozorování, kdy by byla nastavena stejná hodnota x , je ovšem získána různá hodnota y než v předchozím pozorování. Důsledkem je takzvaný „šum“, kterým je závislost mezi jednotlivými veličinami ovlivněna. Proměnná y se tedy chová jako náhodná veličina, která je značena Y a o které se předpokládá, že její střední hodnota E je rovna nule, což znamená, že se zde nevyskytují systematické chyby a výchyly od skutečné hodnoty jsou rozloženy jak v kladném, tak v záporném smyslu.

Pro získání závislosti náhodné veličiny Y na hodnotě x , je její střední hodnota $E(Y|x)$ rovna zvolené funkci $\eta(x; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$. Vztah mezi nimi lze zapsat jako

$$E(Y|x) = \eta(x; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p). \quad (1.1)$$

Funkci $\eta(x)$ je nazývána regresní funkce a parametry $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ regresními koeficienty, kde $p > 1$.

Úkolem je nalézt vhodnou matematickou funkci, aby vyrovnání hodnot touto funkcí bylo co nelepší. Taková funkce se nazývá **regresní funkce**.

1.1 Volba regresní funkce

Tato kapitola je citovaná z literatury [1], [2] a [3].

Při provádění regresní analýzy je důležité také určit, zda je zvolená regresní funkce pro vyrovnání zvolených dat optimální. Regresní funkce by měla být zvolena na základě věcného rozboru analýzy vztahů mezi veličinami (jedná se o tzv. ekonomická kritéria), přičemž základem rozhodnutí by měla být již existující teorie. Pomocí této teorie je možné určit, které nezávisle proměnné použít pro analýzu daných závislých proměnných a také jakou regresní funkci použít pro model této závislosti. Pomocí toho lze například určit, jak moc je funkce klesající nebo rostoucí.

Pokud není možno určit vhodný typ pro danou funkci pomocí ekonomických kritérií, lze se uchýlit k induktivnímu způsobu volby, u kterého je základní metodou metoda grafická. U grafické metody je znázorněn průběh závislosti bodového diagramu pomocí dvojic x a y , které zobrazují jednotlivé body grafu. Podle průběhu grafu se rozhodne, který typ funkce použít (přímka, parabola, hyperbola apod.).

Pokud se používá více regresních funkcí, pak se k posouzení použije reziduální součet čtverců, kdy nejlépe přiléhající funkce vede k jeho nejmenší hodnotě.

1.2 Index determinace

Tato kapitola je citovaná z literatury [2] a [3].

Adekvátnost modelu se dá posoudit i podle indexu determinace, který určuje, jak dobře zvolená regresní funkce vystihuje závislost mezi proměnnými. Index lze zapsat jako

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{S_E}{S_T}, \quad (1.2)$$

kde S_E je reziduální součet čtverců a S_T je celkový součet čtverců.

Hodnota indexu determinace se pohybuje v intervalu od nuly do jedné. Pokud je hodnota indexu u nalezeného modelu rovna jedné, pak se pozorované hodnoty přesně kryjí s vypočtenými hodnotami z modelu. Naopak čím blíže se blíží k nule, tím je daná

závislost slabší a tudíž model méně výstižný, což ovšem nemusí znamenat, že je model neadekvátní. Index se často násobí číslem 100 a uvádí se v procentech.

1.3 Lineární regresní model

Tato kapitola je citovaná z literatury [1] a [2].

Lineární regrese představuje proložení bodů v grafu regresní přímkou nebo parabolou tak, aby součet druhých mocnin odchylek bodů od přímky vyšel co nejmenší. Pro výpočet se používá metody nejmenších čtverců.

Přímková regrese

Nejjednodušším a také nepoužívanějším typem lineární regresní funkce je regresní přímka. Platí tedy

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x. \quad (1.3)$$

Prvním krokem je stanovit parametry β_0 a β_1 pomocí metody nejmenších čtverců. Odhady parametrů β_0 a β_1 jsou označeny jako b_0 a b_1 , kdy za nejlepší se považují b_0 a b_1 , které minimalizují funkci rovnou součtu obsahů čtverců. Parametry se vypočítají podle vzorců

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \quad (1.4)$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}, \quad (1.5)$$

kde \bar{x} a \bar{y} jsou výběrové průměry, které se vypočtou následovně

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.6)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (1.7)$$

Odhad regresní přímky je poté dán vztahem

$$\hat{\eta} = b_0 + b_1 x. \quad (1.8)$$

1.4 Nelineární regresní modely

Tato kapitola je citovaná z literatury [1], [2] a [5].

Ačkoli je lineární regrese nejjednodušším typem regresní funkce, který lze použít, mnohdy si pouze s lineární závislostí při modelování není možné vystačit.

Parabolická regrese

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \quad (1.9)$$

Polynomická regrese

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p \quad (1.10)$$

Hyperbolická regrese

$$\eta = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x} \quad (1.11)$$

Logaritmická regrese

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 \log x \quad (1.12)$$

U nelineárních regresních modelů zvolená regresní funkce nesplňuje fakt, že ji lze vyjádřit lineární kombinací parametrů a funkcí, které jsou nezávislé na těchto parametrech.

Funkce je linearizovatelná, pokud při vhodné transformaci vznikne funkce, která na svých parametrech lineárně závisí. Zpětnou transformací se pak dostanou odhady zadaných parametrů.

1.4.1 Speciální nelinearizovatelné funkce

Dále existují tři speciální nelinearizovatelné funkce, které se převážně používají v časových řadách. Jedná se o *modifikovaný exponenciální trend*, *logistický trend* a *Gompertzova křivka*.

Modifikovaný exponenciální trend

Modifikovaný exponenciální trend náleží do kategorie funkcí, které mají ve vývoji asymptotu. Používá se v případech, kdy je funkce shora či zdola omezená a lze ji zapsat pomocí vzorce

$$\eta(x) = \beta_1 + \beta_2 \beta_3^x . \quad (1.13)$$

Logistický trend

Logistický trend je stejně jako modifikovaný exponenciální trend shora i zdola omezený, navíc se však v jeho inflexním bodě mění průběh křivky z polohy nad tečnou na polohu pod tečnou a naopak. Tato křivka se například používá při modelování vývoje, výroby a prodeje některých druhů výrobků. Řadí se mezi S-křivky symetrické kolem inflexního bodu. Lze ho zapsat jako

$$\eta(x) = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 \beta_3^x} . \quad (1.14)$$

Gompertzova křivka

Gompertzova křivka vzniká transformací modifikovaného exponenciálního trendu. Je shora i zdola omezená, v jeho inflexním bodě se mění průběh křivky z polohy nad tečnou na polohu pod tečnou a naopak. Řadí se mezi S-křivky nesymetrické kolem inflexního bodu, protože většina hodnot leží až za inflexním bodem (bod, kde se konvexní průběh křivky mění v konkávní). Lze ho zapsat jako

$$\eta(x) = e^{\beta_1 + \beta_2 \beta_3^x} . \quad (1.15)$$

2 Časové řady

2.1 Definice časových řad

Tato kapitola je citovaná z literatury [1], [2], [3] a [4].

Při analýze časových řad je dobré získat představu o charakteru procesu, který je reprezentován touto časovou řadou. Jedná se o posloupnost srovnatelných pozorování, neboli dat, která jsou jednoznačně uspořádaná z časového hlediska z minulosti až po přítomnost. Analýzou časových řad se rozumí soubor metod, které se dají použít pro popis těchto řad. Kromě analýzy zákonitosti v jejich průběhu, dává zápis zároveň možnost určit jejich budoucí vývoj.

První krok v každém vyšetřování časové řady by měl zahrnovat pečlivé prozkoumání zaznamenaných dat vynesných v čase.

S takto uspořádanými daty je možné se setkat v těch nejrůznějších odvětvích, ať už v demografii, která popisuje například změnu stavu obyvatelstva, v ekonomii, kde jde například o makroekonomické ukazatele (vývoj HDP, inflace apod.), či v sociologii. Při pohledu na záznam EKG se nejedná o nic jiného, než posloupnost dat v čase, tudíž časovou řadu.

V posledních letech, především díky různým statistickým softwarům a výpočetní technice, došlo k rozvoji metod analýzy a prognózy časových řad. Díky těmto metodám je k dispozici celá řada nástrojů a technik pro jejich zpracování. Za jednu z nejvýznamnějších metod se považuje Boxova-Jenkinsonova metodologie. Jak již bylo zmíněno, díky rozvoji výpočetní techniky, lze ověřit i ty metody, které jsou numericky náročnější.

2.2 Dělení časových řad

Tato kapitola je citovaná z literatury [1] a [2].

Časové řady se obvykle určitým způsobem člení. Jedná se především o vyjádření rozdílností v obsahu sledovaných ukazatelů. Z tohoto důvodu se volí i různé prostředky analýzy. Základním členěním je dělení časových řad na **intervalové** a **okamžikové**.

2.2.1 Intervalové časové řady

Intervalovou časovou řadou se rozumí ta, u níž velikost ukazatele závisí na délce intervalu, za který je sledován. Jedná se o ukazatele, které charakterizují kolik jevů, věcí a událostí vzniklo či zaniklo v určitém časovém intervalu (sňatky, rozvody, narození, roční tržba apod.). Intervalové ukazatele by se měli vztahovat ke stejně dlouhým intervalům, jinak dochází ke zkreslení (nelze například srovnávat výrobu za leden a únor, neboť mají jiný počet dnů). Pro zajištění srovnatelnosti se období přepočítávají na jednotkový časový interval. Nejčastěji se provádí očištění na kalendářní dny, jako

$$y_t^{(0)} = y_t \frac{\bar{k}_t}{k_t}. \quad (2.1)$$

Kde y_t je hodnota očišťovaného ukazatele v dílčím období roku, \bar{k}_t je průměrný počet kalendářních dní v dílčím období roku a k_t je počet kalendářních dní v dílčím období.

2.2.2 Okamžikové časové řady

Okamžiková časová řada je sestavena z ukazatelů, které se vztahují k určitému časovému okamžiku, například ke dni (stav zásob k počátku nebo konci určitého období, střední stav obyvatelstva, počet zaměstnanců na konci roku). Na rozdíl od intervalových časových řad, sčítání údajů a tím vytvoření součtu za více období, nemá v okamžikových časových řadách reálnou interpretaci.

2.2.3 Další dělení časových řad

Časové řady se dále dělí podle délky časového horizontu na **dlouhodobé** (roční) a **krátkodobé** (zde jsou údaje ve čtvrtletních, měsíčních, nebo týdenních intervalech), nebo podle druhu ukazatelů na časové řady **primárních** a **sekundárních** charakteristik.

2.3 Grafická analýza časových řad

Tato kapitola je citovaná z literatury [2] a [5].

Jedním ze základních způsobů vyjádření časových řad je grafické řešení. Časové řady se často zobrazují tak, aby byly patrné jejich charakteristické vlastnosti a rysy. K tomuto používáme různé typy grafů:

- **Spojnicový graf** – Jednotlivé hodnoty jsou vyneseny ve středech příslušných intervalů jako body, kde sousední dva body jsou spojeny úsečkami.
- **Sloupcový graf** – Hodnoty jsou znázorněny obdélníky, jejichž základny se rovnají velikosti jejich intervalů a výšky hodnotám v daném intervalu.
- **Krabicový graf** – Způsob grafického řešení pomocí kvartilů. Základním prvkem je krabice, jejíž dolní a horní hrana je tvořena prvním a třetím kvantilem. Dále je uvnitř vyznačen medián. Z krabice vycházejí svislé čáry, na kterých leží hodnoty minima a maxima.

2.4 Charakteristiky časových řad

Tato kapitola je citovaná z literatury [1], [2], [3] a [5].

Prvním úkolem obvykle bývá získat orientační představu o tom, který z charakteristických procesů časová řada reprezentuje. K tomu je používána vizuální analýza v podobě grafů spolu s určením základních statistických charakteristik. Je dána časová řada intervalového nebo okamžikového ukazatele, jejíž hodnoty v intervalech t_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$, jsou označeny y_i . K základním charakteristikám lze potom řadit:

Průměr intervalové časové řady

Průměrná hodnota intervalové časové řady se vypočítá pomocí prostého aritmetického průměru

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i. \quad (2.2)$$

Průměr okamžikové časové řady

Průměrná hodnota okamžikové časové řady se naopak vypočítá pomocí chronologického průměru. Pokud je délka jednotlivých časových okamžiků stejná, jedná se o prostý chronologický průměr a vzorec bude ve tvaru

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1}. \quad (2.3)$$

Pokud je délka jednotlivých časových okamžiků různá, jedná se o vážený chronologický průměr a vzorec bude ve tvaru

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2}d_1 + \frac{y_2 + y_3}{2}d_2 + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}d_{n-1}}{d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}}. \quad (2.4)$$

První diference

Nejjednodušší mírou dynamiky je absolutní přírůstek, neboli první diference. Vyjadřuje, o kolik se změnila hodnota časové řady v určitém okamžiku. Jedná se o rozdíl dvou po sobě jdoucích hodnot, tedy

$$d_i(y) = y_i - y_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.5)$$

Průměr prvních diferencí

Z prvních diferencí se získá jejich průměr, což říká, o kolik se průměrně hodnota časové řady změnila za jednotkový časový interval. Lze ji zapsat jako

$$\overline{d(y)} = \frac{y_n - y_1}{n-1}. \quad (2.6)$$

Koeficient růstu

O tom, jak rychle vzrostly či poklesly hodnoty časové řady pojednává koeficient růstu, neboli tempo růstu. Vyjadřuje, kolikrát vzrostla hodnota v určitém časovém okamžiku a lze ji vypočítat jako

$$k_i(y) = \frac{y_i}{y_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.7)$$

Průměrný koeficient růstu

Průměrný koeficient růstu, neboli průměrné tempo růstu, vystihuje průměrnou změnu koeficientů růstu za jednotkový časový interval. Ten lze vypočítat jako geometrický průměr jednotlivých koeficientů růstu

$$\overline{k(y)} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}. \quad (2.8)$$

Relativní přírůstek

Relativní přírůstek říká, jak změnila hodnota časové řady v časovém okamžiku ve srovnání s časovým okamžikem předcházejícím. Počítá se ze vzorce koeficientu růstu jako

$$\delta_i = \frac{y_i}{y_{i-1}} - 1, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.9)$$

2.5 Dekompozice časové řady

Tato kapitola je citovaná z literatury [1], [2], [5], [6].

Hodnoty časové řady se dají rozložit na několik složek a to konkrétně *trendovou složku*, *sezónní složku*, *cyklickou složku* a *náhodnou složku*. Ne vždy musí existovat všechny čtyři složky, neboť je to podmíněno charakterem daného ukazatele. Dekompozice časové řady může být buď *aditivní* nebo *multiplikativní*.

U *aditivní dekompozice* se hodnoty časové řady určí jako součet jednotlivých složek, tedy

$$y_i = T_i + C_i + S_i + e_i, \quad (2.10)$$

kde T_i je trendová složka, C_i je sezónní složka, S_i je cyklická složka a e_i je náhodná složka.

U *multiplikativní dekompozice* se pak hodnoty určí jako násobek jednotlivých složek.

Trendová složka

Trendová složka vyjadřuje tendenci dlouhodobého vývoje hodnot ukazatele v čase. Trend může být jak rostoucí tak klesající. Je důsledkem faktorů, které působí dlouhodobě stejným směrem, například demografické podmínky.

Sezónní složka

Sezónní složka vyjadřuje pravidelné kolísání kolem trendové složky. Odehrávají se během jednoho kalendářního roku, přičemž se opakují každý rok. Sezónní kolísání je způsobeno například střídáním ročních období. Pro zkoumání se používají především měsíční nebo čtvrtletní měření.

Cyklická složka

Cyklická složka vyjadřuje kolísání okolo trendu, které je způsobeno cyklickým vývojem. Na rozdíl od sezónní složky je zde délka periody delší než jeden rok a má nepravidelný charakter. Cyklus může mít i jiný původ než ekonomický cyklus, například demografický nebo technologický. Eliminace cyklické složky je poněkud obtížná, neboť nejsou přesně známé příčiny jejího vzniku a také se může měnit její charakter v průběhu času.

Náhodná složka

Náhodnou neboli reziduální složku nelze popsat žádnou časovou funkcí. Náhodná složka vzniká až po vyloučení všech předchozích složek (trendové, sezónní a cyklické). Je tvořena náhodnými fluktuacemi, které nemají rozpoznatelný charakter. Tato složka také pokrývá chyby v měření údajů časové řady.

2.6 Analýza trendu pomocí regresní analýzy

Tato kapitola je citovaná z literatury [1], [2] a [5].

Modelování trendu pomocí trendových funkcí se používá, pokud vývoj časové řady odpovídá některé z časových funkcí například lineární, kvadratické apod. Tyto funkce byli již podrobněji popsány v kapitole regresní analýzy. Regresní analýza je jeden z nejpoužívanějších způsobů popisu vývoje časové řady. Tato analýza umožňuje jak vyrovnání, tak i predikci dalšího vývoje časové řady.

Při modelování trendu se vychází z následujících předpokladů. Časová řada y_i je řada, která má v čase uspořádané hodnoty získané měřením určitého ukazatele ve stejně dlouhých časových intervalech (například rok, měsíc atd.). Lze ji zapsat ve tvaru

$$y_i = T_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

kde T_i vyjadřuje model trendu, jelikož se jedná o časovou řadu pouze s trendovou složkou, a e_i vyjadřuje složku náhodnou.

2.7 Metoda klouzavých průměrů

Tato kapitola je citovaná z literatury [1], [2] a [3].

Metoda klouzavých průměrů se používá, pokud trend mění v čase svůj charakter a tudíž na něj nelze použít vhodnou časovou funkci. Vyhlazená hodnota časové řady je získána zprůměrováním původních pozorování. Lze si představit, že podél časové řady klouže jakési okénko, v jehož rámci se hodnoty průměrují.

Pokud toto okénko má d členů nalevo od bodu t a d členů napravo od bodu t , pak se jedná o okénko šířky $h = 2d + 1$. Tento typ se nazývá **prostý klouzavý průměr**. Prvních a posledních d hodnot nevyhlazujeme, protože okénko není symetrické. Výsledná hodnota je potom dána vztahem

$$\hat{y}_t = \frac{1}{2d + 1} (y_{t-d} + y_{t-d+1} + \dots + y_{t+d}). \quad (2.12)$$

Pokud se šířka okénka rovná sudému číslu, neboli $h = 2d$, pak se výsledný průměr počítá jako aritmetický průměr dvou sousedních prostých klouzavých průměrů. Takto spočtený průměr se nazývá **centrovaný klouzavý průměr**. Tento průměr lze vyjádřit jako

$$\hat{y}_t = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{t-d} + y_{t-d+1} + \dots + y_{t+d-1}}{2d} + \frac{y_{t-d+1} + y_{t-d+2} + \dots + y_{t+d}}{2d} \right). \quad (2.13)$$

2.8 Exponenciální vyrovnání

Tato kapitola je citovaná z literatury [1] a [5].

Exponenciální vyrovnání je metoda pro vyhlazování a krátkodobou predikci časových řad. Vychází se z toho, že váha bodu pro predikci exponenciálně klesá s časovou vzdáleností od predikce.

U exponenciálního vyrovnání je model časové řady definován odlišným způsobem. Předpokládá se, že v časovém okamžiku t , je k dispozici časová řada y_{t-k} , kde k označuje staří (věk) pozorování. Odhady parametru k lze získat pomocí metody nejmenších čtverců.

Tímto postupem je přisuzována stejná váha ke každému pozorování. To znamená, že pozorování blízká současnosti jsou stejně důležitá jako pozorování starší. Dále se předpokládá, že pozorování blízká současnosti budou ovlivňovat více budoucí vývoj, proto se jim dává větší váha.

Podle toho jaký typ trendu je zvolen se jedná nejčastěji buď o *jednoduché exponenciální vyrovnání*, nebo *dvojitě exponenciální vyrovnání*.

Jednoduché exponenciální vyrovnání

Pokud lze trend považovat za konstantní, hovoří se o jednoduchém exponenciálním vyrovnání a lze ho vyjádřit ve tvaru

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_{t-1}, \quad (2.14)$$

kde α je vyrovnávací konstanta, která nabývá hodnoty od 0 do 1, \hat{y}_t je exponenciální průměr v čase t a \hat{y}_{t-1} je exponenciální průměr v čase $t - 1$.

Dvojité exponenciální vyrovnání

Pokud lze trend považovat za lineární, jedná se o dvojité exponenciální vyrovnání. U dvojitého exponenciálního vyrovnání lze lineární trend vyjádřit modelem

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t. \quad (2.15)$$

Odhad parametrů určil Brown tak, že nejprve uplatnil jednoduché exponenciální vyrovnání, u kterého však zjistil, že řada prvních exponenciálních průměrů \hat{y}_t má systematickou chybu. Po opětovné aplikaci jednoduchého exponenciálního vyrovnání získal exponenciální vyrovnání druhého stupně \hat{y}_t'' , které však opět obsahovalo systematickou chybu.

Díky těmto poznatkům byly určeny odhady parametrů β_0 a β_1 jako

$$\beta_0 = 2\hat{y}_t + \hat{y}_t'', \quad (2.16)$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}(\hat{y}_t + \hat{y}_t''), \quad (2.17)$$

kde α je vyrovnávací konstanta nabývající hodnoty od 0 do 1, \hat{y}_t je jednoduchý exponenciální průměr a \hat{y}_t'' je dvojitý exponenciální průměr získaný z \hat{y}_t .

Dále ještě existuje trojité exponenciální vyrovnání, které aplikuje jednoduché exponenciální vyrovnání třikrát.

2.9 Boxova-Jenkinsonova metodologie

Tato kapitola je citovaná z literatury [1], [5], [7] a [8].

Jak již bylo řečeno v dřívější kapitole, za jednu z nejvýznamnějších metod se považuje Boxova-Jenkinsonova metodologie. Tato metodologie pokládá za základní prvek při konstrukci modelu časové řady náhodnou složku. Na rozdíl od dekompozice, kde se počítá s tím, že jednotlivá pozorování jsou vzájemně nekorelovaná, jádro pozornosti nespočívá v konstrukci systematické složky, ale dává důraz na korelační analýzu různých pozorování, uspořádaných do tvaru časové řady. Předpokladem této metodologie je disponovat s delší časovou řadou.

Stacionarita časové řady

Časová řada y_t je stacionární, pokud se její rozdělení pravděpodobností v čase nemění. Pokud jsou všechny statistické vlastnosti nezávislé na čase, jedná se o tzv. *striktní stacionární proces*. Jelikož je ale v praxi obtížné ověřovat striktní stacionární proces, je zde zaveden i méně omezující pojem *slabá stacionarita*. U slabé stacionarity stačí časová stabilita jen u některých statistických vlastností (střední hodnota, rozptyl).

Bílý šum

Při dekompozici časových řad je cílem nalézt vhodné parametry pro funkci trendu, sezónnosti nebo cykličnosti, kdy při odečtení těchto složek zůstane jen složka náhodná.

Náhodnou složku lze chápat jako výsledek blíže nespécifikovaného souboru náhodných, neboli stochastických vlivů. Zdrojem této složky jsou nepodchycené a vzájemně nezávislé náhodné jevy, které se kompenzují v rámci časové řady. Lze tedy předpokládat, že mají nulové střední hodnoty, konstantní rozptyl a jsou vzájemně lineárně nezávislé.

Pokud jsou splněny tyto předpoklady, tvoří výsledná časová řada tzv. *bílý šum*.

Autokorelační funkce

Autokorelační funkce (též označována jako ACF) udává, jak je silná závislost mezi veličinami y_t a y_{t-k} . Lze ji popsat jako podobnost mezi pozorováními v závislosti na časové prodlevě mezi nimi.

Odhad autokorelační funkce ρ_k je dán výběrovou autokorelací se zpožděním k jako

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 1, 2, \dots, T - k. \quad (2.18)$$

Dále se rozlišuje ještě parciální autokorelační funkci (též označována jako PACF), která nám dává informaci o korelaci veličin y_t a y_{t-k} navíc očištěnou o vliv veličin ležících mezi nimi.

2.9.1 Stacionární a integrované procesy

Boxova-Jenkinsonova metodologie se zabývá *stacionárními a integrovanými procesy*.

Mezi *stacionární procesy* se řadí například *proces AR* (autoregresní proces), *proces MA* (proces klouzavých průměrů), nebo *proces ARMA*, jenž je kombinací předcházejících dvou procesů.

Mezi integrované procesy se poté řadí proces ARIMA a pokud se jedná o sezónní proces, označuje se jako *proces SARIMA*

Proces AR

Autoregresní proces řádu p označuje takový proces, kdy výstupní proměnná lineárně závisí na přechozích (minulých) hodnotách této řady. Proces se dá zapsat jako

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + a_t, \quad (2.19)$$

kde a_t vyjadřuje proces bílého šumu (proces s nulovou střední hodnotou, konstantním rozptylem a nulovou ACF a PACF). Autoregresní proces lze také zapsat ve zkrácené formě jako

$$\phi_p(B)y_t = a_t, \quad (2.20)$$

kde B je operátor zpětného posunutí, kdy platí $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$.

Proces MA

Proces klouzavých průměrů řádu q je definován tak, že výstupní proměnná lineárně závisí na současné a minulé hodnotě náhodné veličiny a_t . Takový proces lze zapsat ve tvaru

$$y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (2.21)$$

nebo pomocí zpětného operátoru jako

$$y_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)a_t = \theta_q(B)a_t. \quad (2.22)$$

Proces ARMA

Dalším stacionárním procesem je smíšený proces ARMA spojený z předcházejících procesů AR a MA. Tento proces lze zapsat ve zkráceném tvaru jako

$$\phi_p(B)y_t = \theta_q(B)a_t . \quad (2.23)$$

Proces ARIMA

Pokud proces po transformaci integrovaného procesu pomocí diference vykazuje takové autokorelace, že jej lze vyjádřit jako stacionární proces ARMA, potom se původní proces vyjádřený ve formě jako

$$\phi_p(B)(1 - B)^d y_t = \theta_q(B)a_t \quad (2.24)$$

nazývá *autoregresní integrovaný proces klouzavých procesů*.

Proces SARIMA

Pokud se jedná o sezónní proces, jde o takzvaný proces SARIMA. Na rozdíl od procesu ARIMA, tento proces obsahuje i sezónní kolísání, tudíž zde není pouze závislost mezi veličinami y_t , ale také mezi sobě odpovídajícími veličinami v jednotlivých sezónách.

Předpokládá se, že proces obsahuje oba tyto typy závislostí. Závislost uvnitř periody je dána modelem ARIMA

$$\phi_p(B)(1 - B)^d y_t = \theta_q(B)b_t . \quad (2.25)$$

Proces b_t obsahuje pouze sezónní závislosti a je dán jako

$$\Phi_p(B^s)(1 - B^s)^D b_t = \Theta_Q(B^s)a_t . \quad (2.26)$$

Při spojení těchto dvou procesů se získá proces

$$\Phi_p(B^s)\phi_p(B)(1 - B)^d(1 - B^s)^D y_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t , \quad (2.27)$$

který se označuje jako SARIMA.

2.10 Způsoby hodnocení modelů

Tato kapitola je citovaná z literatury [5].

Pro každý odhadovaný model se dá vybrat jeden či více způsobů, jak určit vhodnost daného modelu, neboli jak přesně model vystihuje skutečnou časovou řadu. Zkoumá se charakter rozdílů skutečných hodnot a vyrovnaných (odhadnutých) hodnot trendu v čase.

Jedním ze způsobů, jak určit míru přesnosti modelu, je pomocí průměrné absolutní procentuální chyby (Mean absolute percentage error). Průměrná absolutní procentuální chyba je měřítkem přesnosti predikce u předpovědi. Obvykle se tato přesnost vyjadřuje pomocí následujícího vzorce

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{A_t - F_t}{A_t} \right|, \quad (2.28)$$

kde A_t je skutečná hodnota, F_t je hodnota předpovědi a n je počet hodnot.

Dalším ze způsobů je pomocí parametru BIC (Bayesian information criterion). Jedná se o kritérium, které slouží pro výběr modelu mezi více modely. Upřednostňuje se ten model, který má nižší hodnotu BIC.

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(\hat{L}), \quad (2.29)$$

kde k je počet parametrů modelu, n je počet pozorování (dat) a \hat{L} je maximální hodnota pravděpodobnostní funkce modelu M , vyjádřenou jako

$$\hat{L} = p(x|\hat{\theta}, M), \quad (2.30)$$

kde $\hat{\theta}$ jsou hodnoty parametrů maximalizující pravděpodobnostní funkci.

Pro míru kvality modelu se také používá koeficient determinace. Čím je hodnota koeficientu determinace vyšší, tím lépe model vystihuje trend časové řady a obráceně. Tento vzorec byl popsán již dříve v práci.

Praktická část

V teoretické části bylo popsáno několik způsobů, jak lze s časovou řadou pracovat a predikovat její budoucí vývoj. Nyní budou tyto způsoby aplikovány na konkrétních příkladech časových řad. Nejprve bude analyzována sezonní časová řada tržeb společnosti Apple Inc., a pak bude také analyzována nesezonní časová řada měnového kurzu. Všechny metody a kroky budou provádět v softwaru SPSS.

1 Software SPSS

Tato kapitola je citovaná z literatury [9].

Software IBM SPSS Statistics poskytuje výkonnou sadu statistických funkcí, které organizacím po celém světě umožňují maximálně využít všechny informace, které data mohou poskytnout. Při hlubším pohledu na data lze objevit informace pro lepší rozhodování společnosti, zlepšení výzkumu a jeho výsledků, řízení rizik a mnoho dalších.

IBM SPSS Statistics obsahuje robustní a propracované funkce a postupy, které zahrnují celou analytiku jako například:

- Řeší všechny aspekty analytického procesu od přípravy a správy dat až po samotnou analýzu a její výsledky
- Vylepšuje předpovědi a plány tak, že doplňuje chybějící hodnoty očekávanými hodnotami pomocí regrese
- Poskytuje automatizované metody k identifikaci anomálií a statistické transformace k řešení odlehlých hodnot
- Poskytuje tabulky k efektivnímu zobrazení výsledků
- Rozdělí data do skupin a předpovídá hodnoty cílové proměnné založené na hodnotách predikční proměnné
- Umožňuje přesné modelování lineárních a nelineárních vztahů

2 Sezonní časová řada

Sezonní časová řada je taková řada, která obsahuje pravidelně se opakující cykly v průběhu času. Takto opakující se cyklus každý rok se nazývá sezonní variace. Sezonnost v časové řadě lze vidět v časovém horizontu například týdnů, měsíců či čtvrtletí v roce. Čtvrtletní časovou řadou je tedy řada, kdy lze v rámci několika let vidět určitý vzor v jednotlivých čtvrtletích. Příklad takové řady lze vidět níže.

Hledáme model čtvrtletní časové řady obratu za mobilní telefon iPhone společnosti Apple Inc., která je k dispozici v tisících amerických dolarů (USD) od prvního čtvrtletí roku 2012 do druhého čtvrtletí roku 2020.

Čtvrtletní hlášení společnosti Apple je však vedeno tak, že Q1 roku 2012 je období od října do prosince předcházejícího roku. Fiskální rok je tedy od října do září, místo od ledna do prosince, jako je tomu tak u většiny společností.

Řada bude vyřešena několika způsoby a na základě zvoleného modelu vypočtena předpověď.

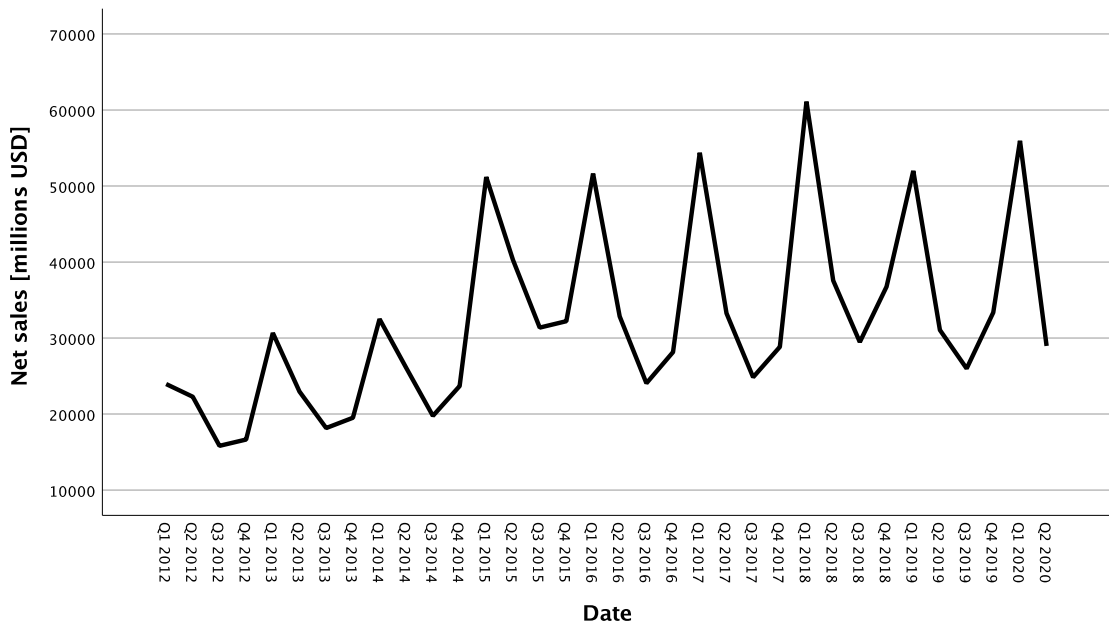
U všech způsobů je nejprve třeba nahrát data do softwaru SPSS. Data pro tento příklad jsou brána z literatury [10]. To se provede tak, že se při spuštění softwaru přejde na kartu **File** a vybere možnost **Import Data**. Na výběr je z několika možností jako například Database, Excel, CSV Data a mnoho dalších. Jelikož jsou data připravena v souboru Excel, vybere se tato možnost.

Poté nahrání dat je u každé časové řady nutné definovat datum a čas. Na kartě **Data** se zvolí **Define date and time**. Jelikož jde o čtvrtletní časovou řadu, vybere se možnost **Years, quarters**. Za rok se dá počáteční rok řady, tedy rok 2012 a za čtvrtletí se napíše 1, jelikož se začíná prvním čtvrtletím roku 2012. Tímto se definuje parametr **Date**, který se bude následně používat.

Nyní už je vše připraveno a lze se pustit do samotného modelování.

Aby bylo vidět, jak vybraná časová řada vypadá, vytvoří se její graf. Na kartě **Analyze** se zvolí **Forecasting** a poté **Sequence Charts**. Do kolonky **Variables** se vyberou data a do kolonky **Time Axis Labels** se zvolí formát času, který bude zobrazen mít na spodní ose. V tomto případě to bude parametr **Date**, který byl vytvořen v předcházejícím kroku.

Výsledný sequence chart bude vypadat následovně:

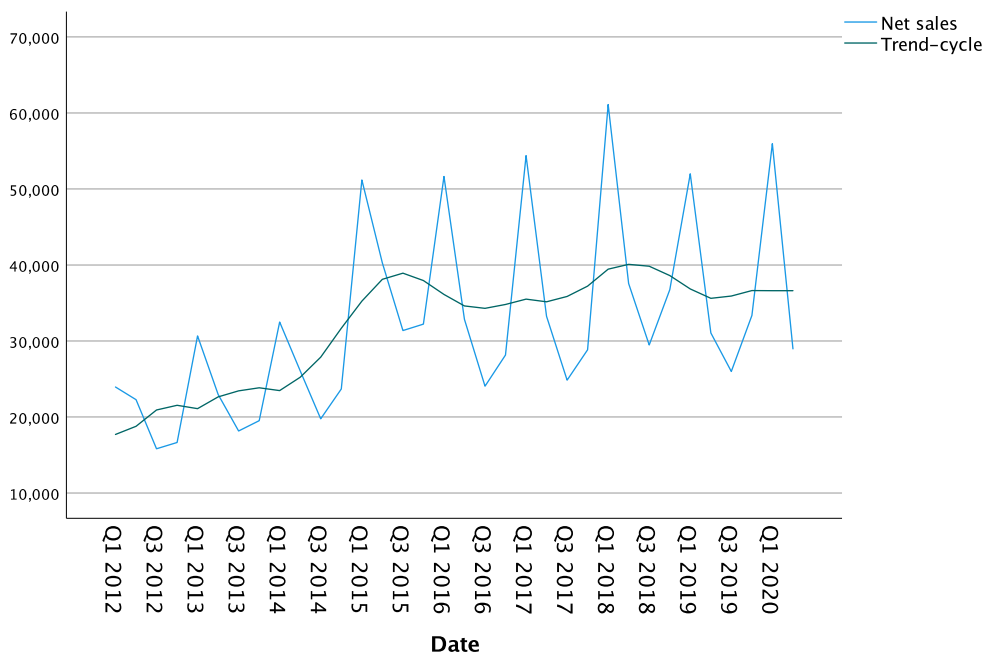


Graf 1 - Časová řada Apple

2.1 Sezonní dekompozice

Nyní bude provedena sezonní dekompozice časové řady. Řada se poté očistí od sezonních vlivů a provede se odhad.

Sezonní dekompozice se provede tak, že se na kartě **Analyze** zvolí **Forecasting** a **Seasonal Decomposition**. Do **Variables** se vyberou data a za **Model Type** se zvolí **Additive**, jelikož se variabilita, až na jeden velký skok, v čase moc nemění. Tato dekompozice přidá do vstupních dat další čtyři proměnné, konkrétně Error, Seasonal adjusted series, Seasonal factors a Trend-cycle. Ve sloupci Trend-cycle jsou centrované klouzavé průměry (centrované proto, že délka sezonnosti je 4, tedy sudé číslo). Tyto průměry vyjadřují odhad trendové-cyklické složky. Její grafické vyjádření lze vidět níže, přičemž všechny grafy jsou vytvořeny přes již dříve zmiňovaný Sequence chart, kdy se do kolonky Variables vloží hodnoty jednotlivých sloupců.



Graf 2 - Trendová-cyklická složka

Odhad sezonních výkyvů, neboli sezonních průměrů, je vidět v následující tabulce.

Seasonal Factors

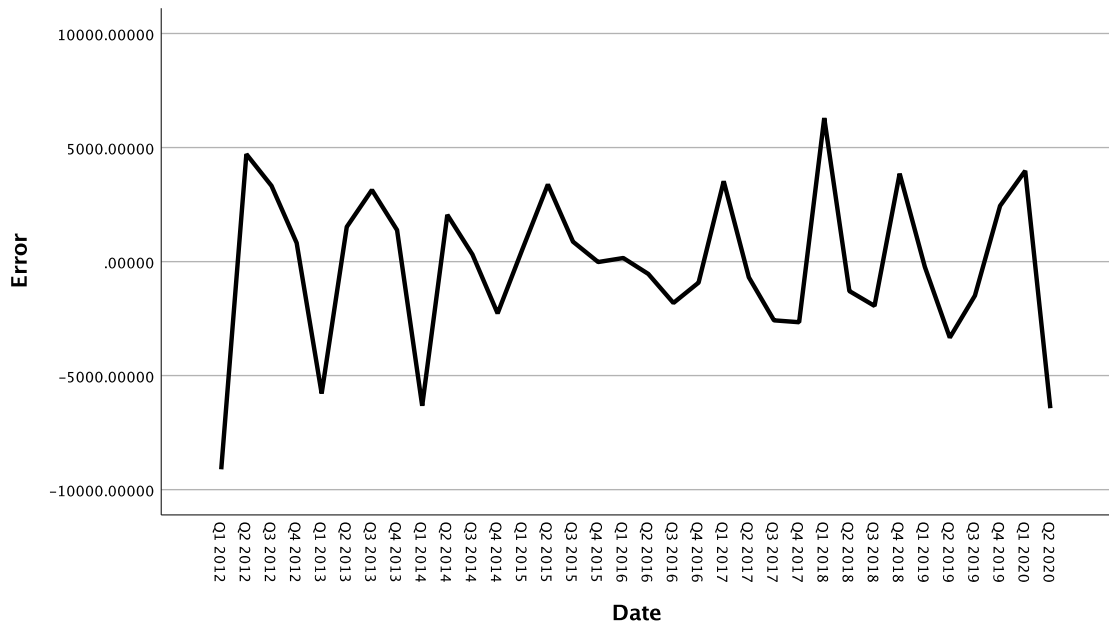
Series Name: Net sales

Period	Seasonal Factor
1	15357,252
2	-1217,225
3	-8427,467
4	-5712,560

Tabulka 1 - Sezonní faktory

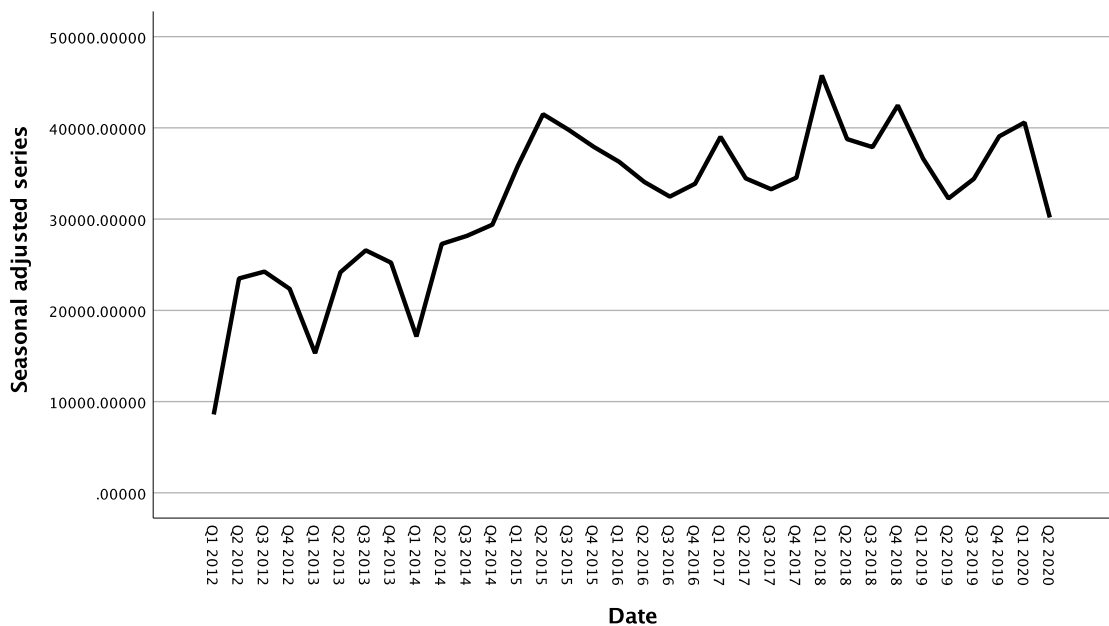
Z tabulky lze vyčíst, že každoročně nejvyšší prodeje jsou v Q1 (u společnosti Apple tedy před Vánocemi), naopak nejnižší v Q3, tedy období od dubna do června. Sezonní faktor udává počet, o který se skutečná hodnota liší od průměrné hodnoty nebo od hodnoty vyjadřující trend. Hodnota faktoru pro Q1 je kladná a jde tedy o sezonní nárůst o hodnotu 15357,252. U dalších období se jedná o sezonní pokles (hodnota faktoru je záporná).

Ve sloupci Error jsou uvedena rezidua, tedy odhady nesystematické složky.



Graf 3 - Rezidua časové řady

Ve zbývajícím sloupci, tedy ve sloupci Seasonal adjusted series, jsou hodnoty sezonně očištěné časové řady, které se získají jako součet hodnot časové řady a příslušných sezonních průměrů. Takto očištěnou časovou řadu lze chápat jako odhad trendové-nesystematické složky. Řada je vidět níže.



Graf 4 - Sezonně očištěná řada

Nyní nastává samotná předpověď po sezonní dekompozici. Trendová složka původní časové řady se předpoví ze sezonně očištěné časové řady. Na jejím základě bude vybrán vhodný model exponenciálního vyrovnání a dojde k odhadu jeho parametrů.

Předpověď se vypočítá tak, že se k předpovědím trendu přičtou sezonní průměry příslušných období.

Pro sezonně očištěnou časovou řadu by bylo možné použít jednoduché exponenciální vyrovnání, nebo Holtův lineární trend. Nyní se vytvoří předpověď pro oba modely a podle parametru *Normalized BIC* bude rozhodnuto, který model je vhodnější pro předpověď do Q4 roku 2021.

Začne se s jednoduchým exponenciálním vyrovnáním a poté se přejde na Holtův lineární trend.

Model Statistics

Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Seasonal adjusted series-Model_1	0	16,789	17,312	27,921	17	0,046	0

Tabulka 2 - Statistika jednoduchého exponenciálního vyrovnání

Model Statistics

Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Seasonal adjusted series-Model_1	0	17,085	17,395	25,165	16	0,067	0

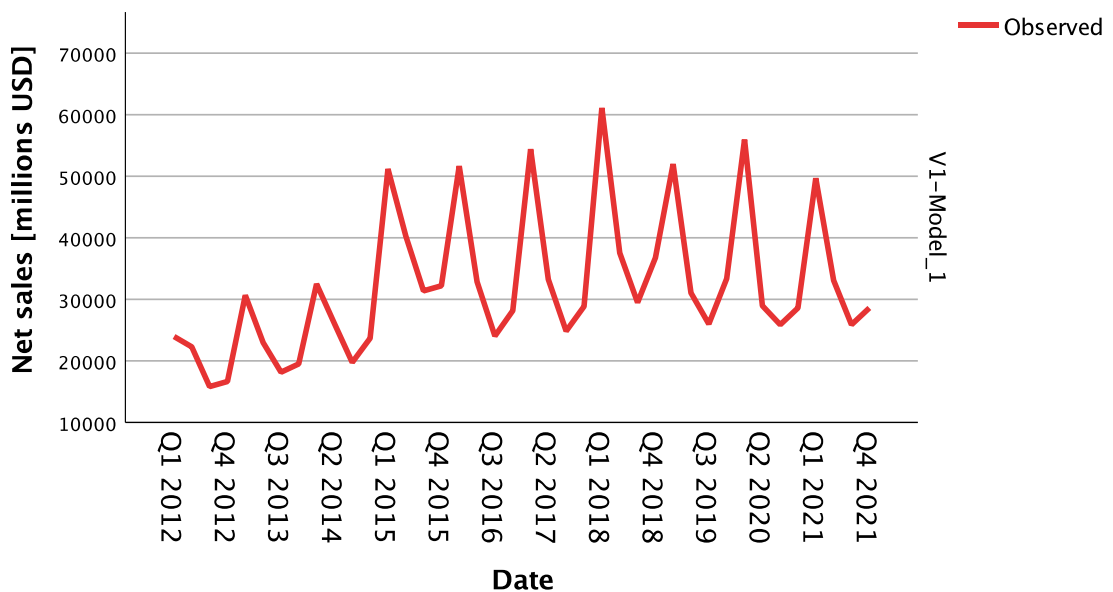
Tabulka 3 - Statistika Holtova lineárního trendu

Jak je vidět, Jednoduché exponenciální vyrovnání má nižší hodnotu *Normalized BIC*, zvolí se tedy tento model a pro něj bude vytvořena předpověď. Podle velikosti MAPE (Mean absolute percentage error) lze předpokládat, že extrapolace, tedy přibližné hodnoty funkce mimo interval známých hodnot, budou s 16,7% chybou.

		Forecast					
Model		Q3 2020	Q4 2020	Q1 2021	Q2 2021	Q3 2021	Q4 2021
Seasonal adjusted series-Model_1	Forecast	34304	34304	34304	34304	34304	34304
	UCL	45401	46856	48159	49349	50453	51485
	LCL	23207	21752	20449	19259	18156	17123

Tabulka 4 - Předpověď sezonně očištěné řady

K předpovědím trendu se nyní přičtou sezonní průměry příslušných období a vyjde tak skutečná předpověď. Tu lze vidět v grafu níže od období Q3 2020 do Q4 2021.



Graf 5 - Předpověď časové řady pro metodu sezonní dekompozice

2.2 Regresní metoda

Další možností, jak určit model a předpověď časové řady, je pomocí regresního modelu, ve kterém se odhadnou parametry trendu a sezonnosti. Trendová složka se modeluje pomocí vhodné časové funkce, jako je například parabola, hyperbola, nebo klasická přímka. Sezonní složka je vyjádřena pomocí umělých proměnných. Tyto proměnné přiřazují hodnotě časové řady buď 1, pokud se hodnota nachází v dané sezóně, nebo 0. V tomto případě jde o čtvrtletní časovou řadu. Pro hodnoty z Q1 se tedy na první místo napíše 1 a na ostatní 0, pro Q2 se na druhé místo napíše 1 a na ostatní 0 a tak dále. Stejně by tomu bylo například u měsíční časové řady.

Takto připravené hodnoty v MS Excel se nahrají do softwaru SPSS.

Jelikož je pro tuto metody vytvořený jiný data set s umělými proměnnými, je opět nutné definovat datum a čas. To bude provedeno stejným způsobem jako na začátku.

Nyní už lze vytvořit lineární regresy. Na kartě **Analyze** se zvolíme **Regression** a následně **Linear**. Do **Dependent** se vyberou data a do pole **Independents** časová proměnná (sloupec V6), za druhé čtvrtletí proměnnou V3, za třetí čtvrtletí proměnnou V4 a za čtvrté čtvrtletí proměnnou V5. Hodnoty V2, jež označují první čtvrtletí se nepoužijí, protože V2 je referenční čtvrtletí.

Dále je třeba na otevřít nabídku **Save** a v **Predicted Values** a **Residuals** zaškrtnout pole **Unstandardized**.

Výsledkem je tabulka hodnocení modelu a tabulka koeficientů.

Model Summary^b

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.882 ^a	0,778	0,748	6016,687

a. Predictors: (Constant), V5, t, V4, V3

b. Dependent Variable: Net sales

Tabulka 5 - Hodnocení modelu regrese

Coefficients^a

Model	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
1 (Constant)	35623,212	2688,408		13,251	0,000
t	606,118	105,313	0,504	5,755	0,000
V3	-15949,452	2838,248	-0,596	-5,619	0,000
V4	-22246,722	2923,585	-0,800	-7,609	0,000
V5	-19137,715	2925,481	-0,688	-6,542	0,000

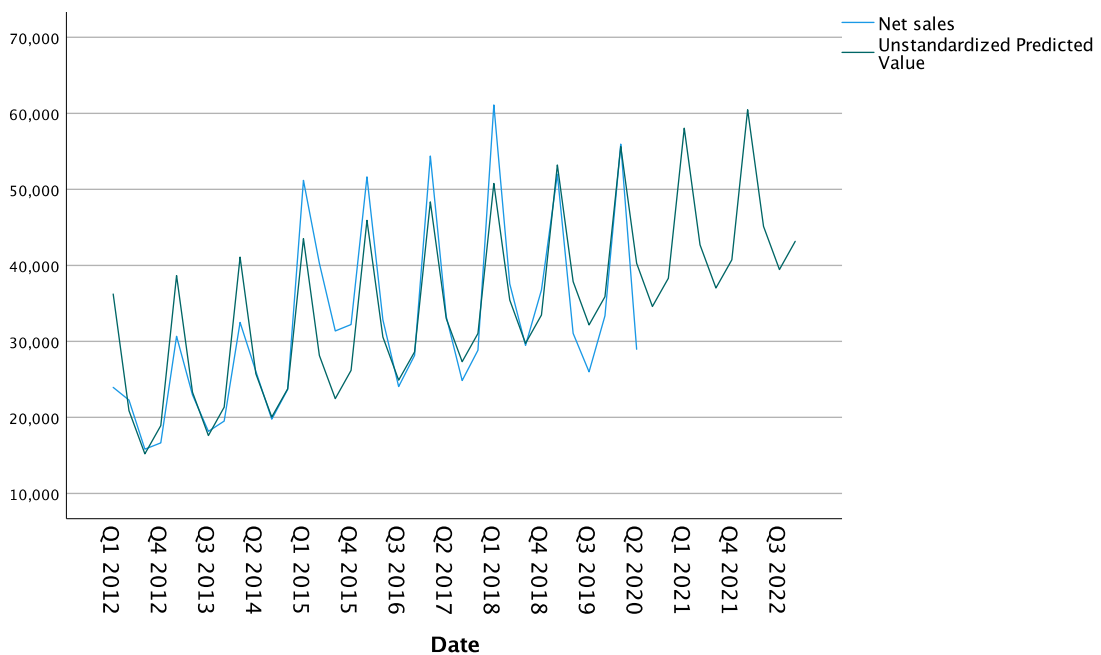
a. Dependent Variable: Net sales

Tabulka 6 - Koeficienty modelu regrese

Z první tabulky je vidět, že kvalita modelu je v pořádku. V druhé tabulce se pod **Standardized Coefficients Beta** nalézají jednotlivé koeficienty beta a sloupec **Sig.** vypovídá o tom, že se druhé, třetí a čtvrté čtvrtletí významně liší od prvního.

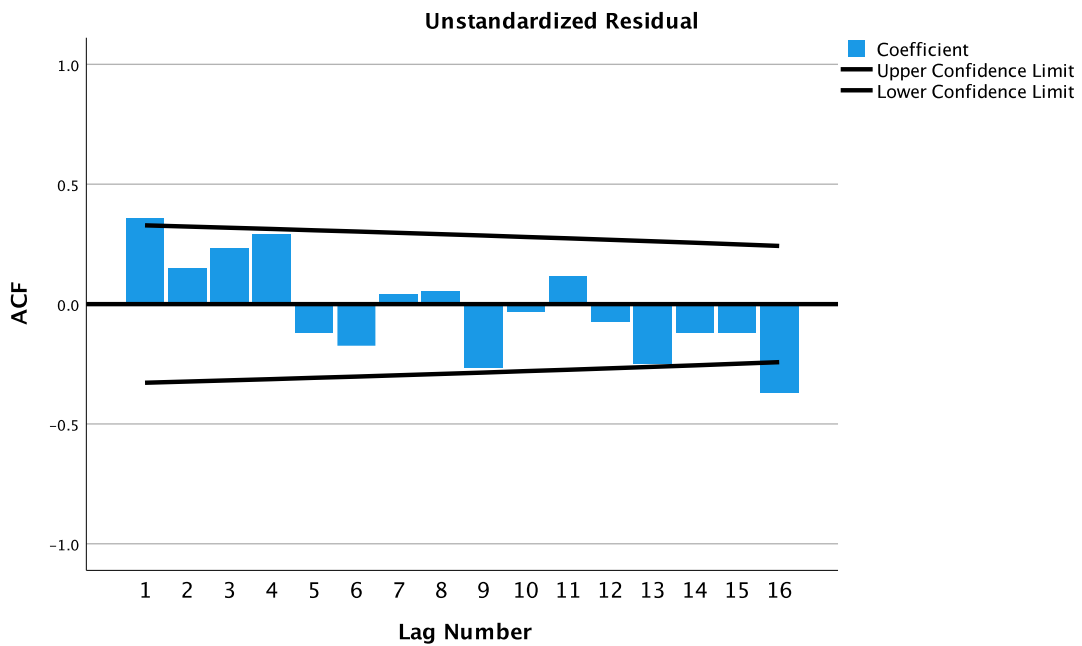
Do původních hodnot se přidali další dva sloupce, konkrétně **Unstandardized Predicted Values** (predikované hodnoty) a **Unstandardized Residuals** (rezidua).

Z těchto hodnot lze nyní vytvořit graf.

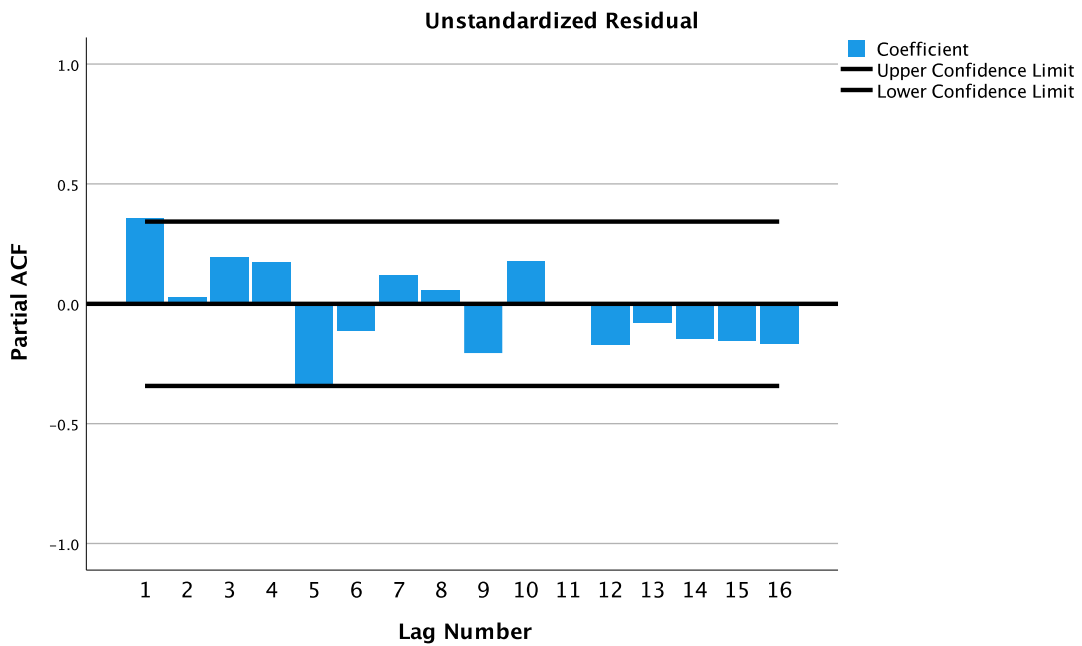


Graf 6 - Časová řada regresní metody s predikovaným vývojem

Také lze vytvořit autokorelační funkce.



Graf 7 - Autokorelační funkce pro regresní metodu



Graf 8 - Parciální autokorelační funkce pro regresní metodu

Jak je možné vidět, většina hodnot, až na jednu u funkce ACF, se nachází v rámci intervalů. Graf na obrázku nad autokorelačními funkcemi tedy predikuje budoucí vývoj společnosti.

2.3 Exponenciální vyrovnání

Další možností je použít exponenciální vyrovnání.

Na kartě **Analyze** se zvolí **Forecasting** a **Create Traditional Models**. Otevře se okno **Time Series Modeler**. Do **Variables** se vyberou data a za metodu se zvolí exponenciální vyrovnání (exponential smoothing). Je však potřeba tuto metodu podrobněji definovat. Po rozkliknutí možnosti **Criteria** se otevře další nabídka a jelikož se jedná o sezonní časovou řadu, bude se rozhodovat mezi sezonními modely.

U předchozí metody, kde došlo k dekompozici, se za **Model Type** zvolil **Additive**, jelikož se variabilita časové řady, až na jeden velký skok, v čase moc neměnila.

V tomto případě se tedy ze sezonních modelů vybere Winterův aditivní model. Níže lze vidět statistiku a parametry zvoleného modelu. Hodnota Alpha značí odhadovanou úroveň, hodnota Gamma odhadovaný trend a hodnota Delta charakterizuje intenzitu sezonních kolísání.

Model Statistics							
Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Net sales-Model_1	0	8,656	17,253	20,206	15	0,164	0

Tabulka 7 - Statistiky Winterova aditivního modelu

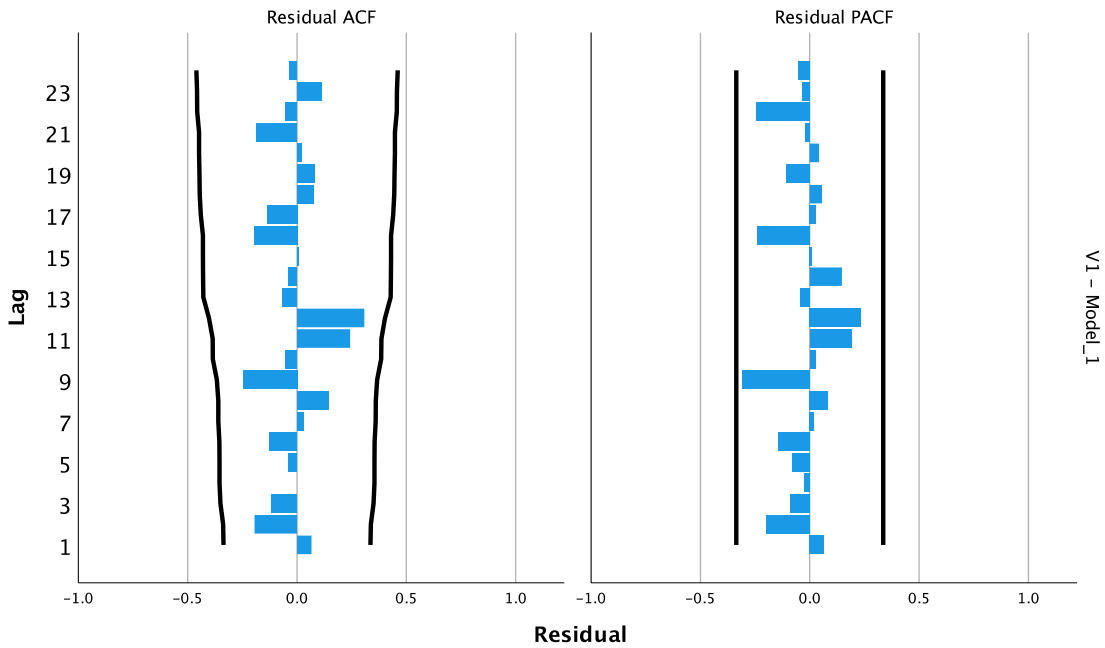
Exponential Smoothing Model Parameters

Model			Estimate	SE	t	Sig.
Net sales-Model_1	No Transformation	Alpha (Level)	0,600	0,156	3,850	0,001
		Gamma (Trend)	9,903E-05	0,150	0,001	0,999
		Delta (Season)	1,000	0,443	2,257	0,031

Tabulka 8 - Parametry Winterova aditivního modelu

Trendová konstanta je blízká nule, takže trend závisí skoro na všech datech. Sezonní konstanta se rovná jedné, tudíž sezonní složka závisí na předchozích hodnotách.

Funkce ACF a PACF jsou na následujícím grafu.



Graf 9 - Autokorelační funkce Winterova aditivního modelu

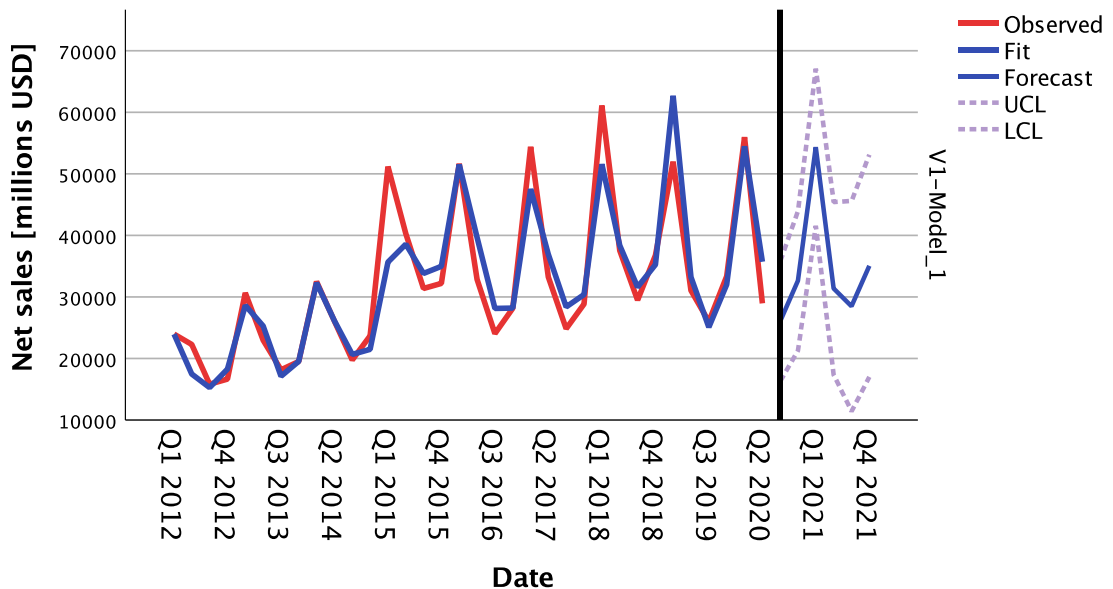
Jak hodnoty funkce ACF tak i PACF leží v rámci mezí. Tento model lze tedy považovat za vhodný. Předpověď na Q4 roku 2021 je vidět v následující tabulce.

Forecast

Model		Q3 2020	Q4 2020	Q1 2021	Q2 2021	Q3 2021	Q4 2021
Net sales- Model_1	Forecast	26067	32628	54326	31383	28488	35049
	UCL	35801	43979	67091	45420	45571	53103
	LCL	16333	21277	41562	17346	11405	16995

Tabulka 9 - Předpověď Winterova aditivního modelu

Výsledný graf včetně předpovědi má následující tvar. Na grafu je červeně původní časová řada, modře hodnoty modelu a předpověď na další období. Horní a dolní mez je vyobrazena přerušovanou čarou.

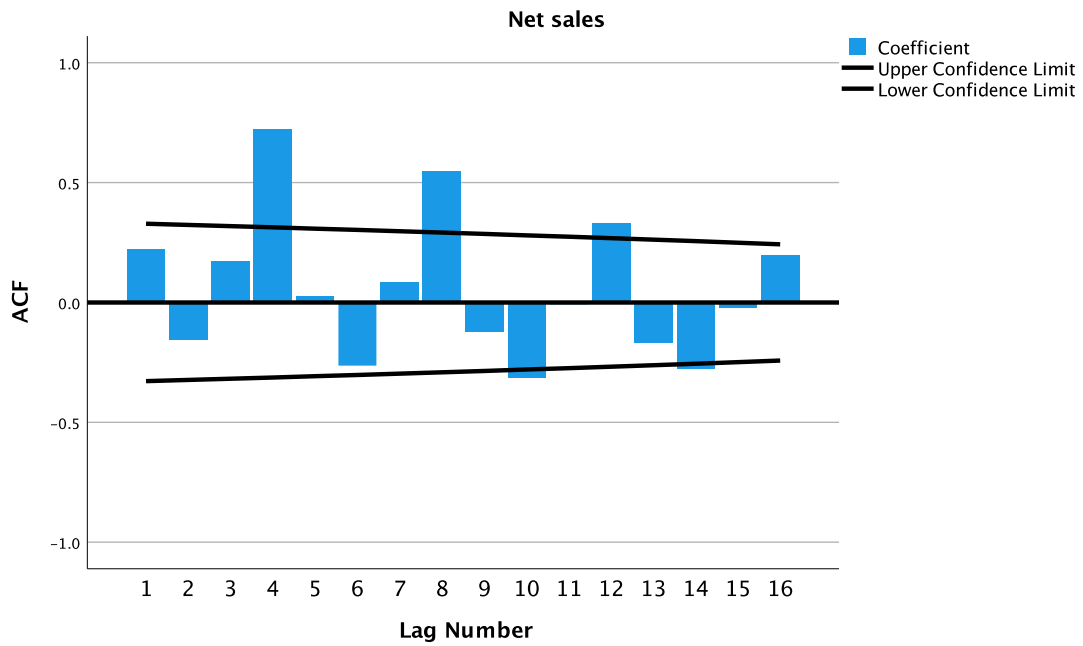


Graf 10 - Časová řada včetně předpovědi Winterova aditivního modelu

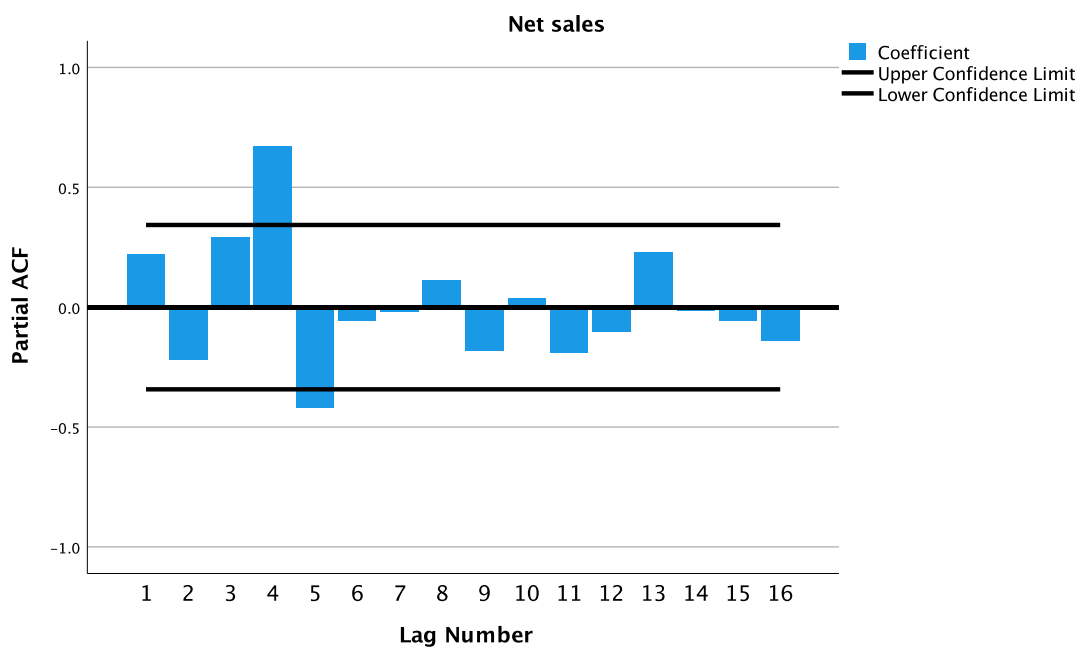
2.4 SARIMA metoda

Z grafu, který byl vytvořen na začátku, je vidět, že časová řada má určitý trend, tudíž není stacionární. Řadu tedy bude nutné stacionarizovat.

Nejprve je vhodné ukázat autokorelace samotné časové řady. To se provede tak, že na kartě **Analyze** se zvolí **Forecasting** a poté **Autocorrelations**. Do kolonky **Variables** se vloží data. Jelikož je úkolem získat autokorelace původní časové řady, nic dalšího se vybírat nebude. Výsledné funkce ACF a PACF jsou na následující straně.



Graf 11 - Autokorelační funkce časové řady



Graf 12 - Parciální autokorelační funkce časové řady

Z grafu je možné vidět, že ACF má významnou každou čtvrtou kladnou hodnotu. Funkce PACF má významnou jednu kladnou a jednu zápornou hodnotu. Z toho lze předpokládat, že se jedná o sezonní integrovaný proces.

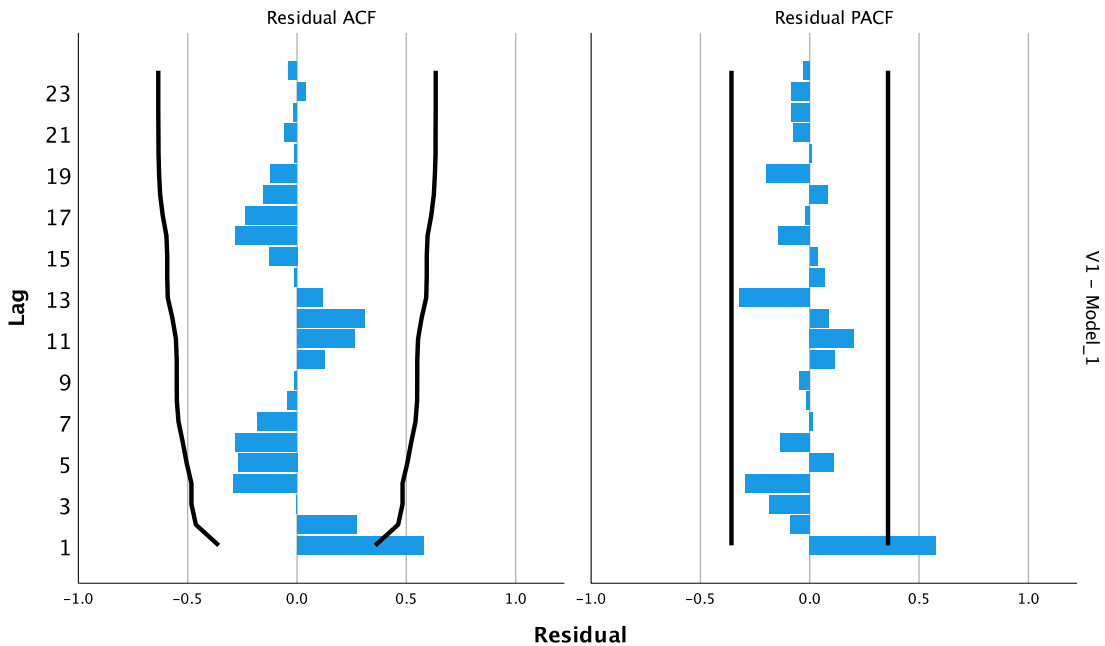
Pro stacionarizaci řady bude tedy použita první sezonní diference a proveden odhad modelu **SARIMA(0,0,0)(0,1,0)**.

Model Statistics

Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Net sales-Model_1	0	13,604	17,617	46,888	18	0,000	0

Tabulka 10 - Statistiky modelu SARIMA(0,0,0)(0,1,0)

Na následujícím obrázku jsou vidět grafy reziduální ACF a PACF. ACF má sinusoidní tvar a PACF má statisticky významnou první hodnotu.



Graf 13 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,0,0)(0,1,0)

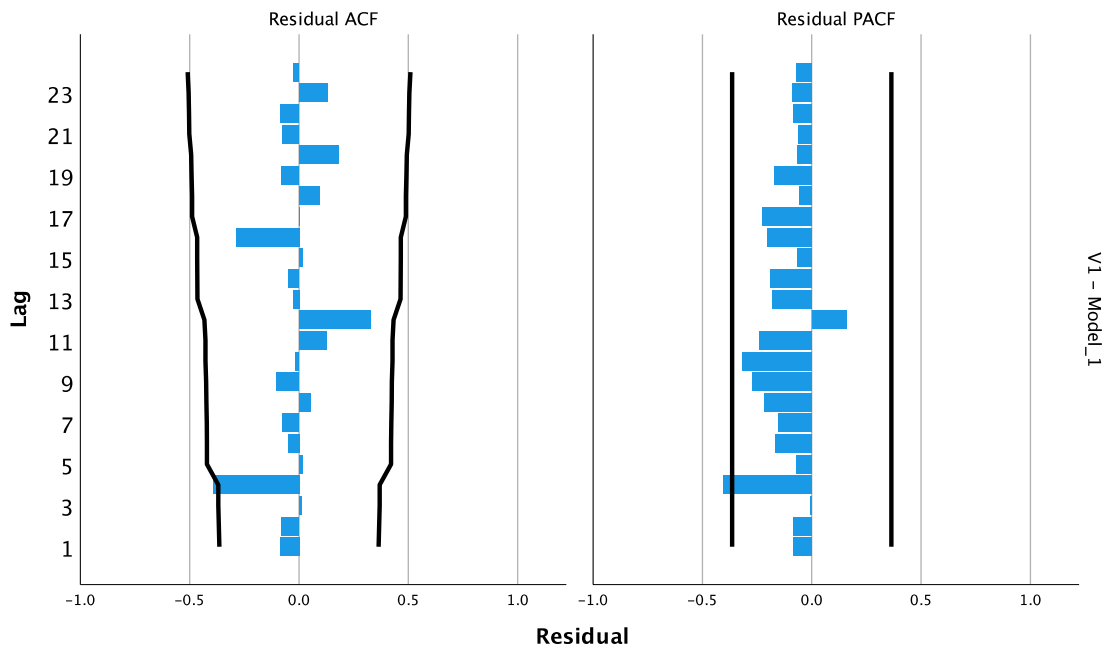
Díky tomuto tvaru funkce ACF a PACF bude model rozšířen o nesezonní diferenci. Tvary základních funkcí lze najít v učebnici [8].

Bude tedy odhadnut model **SARIMA(0,1,0)(0,1,0)**.

V následující tabulce a na obrázku je opět vidět základní charakteristika a funkce ACF a PACF vybraného modelu.

Model Statistics							
Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Net sales-Model_1	0	10,830	17,440	20,153	18	0,324	0

Tabulka 11 - Statistika modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,0)



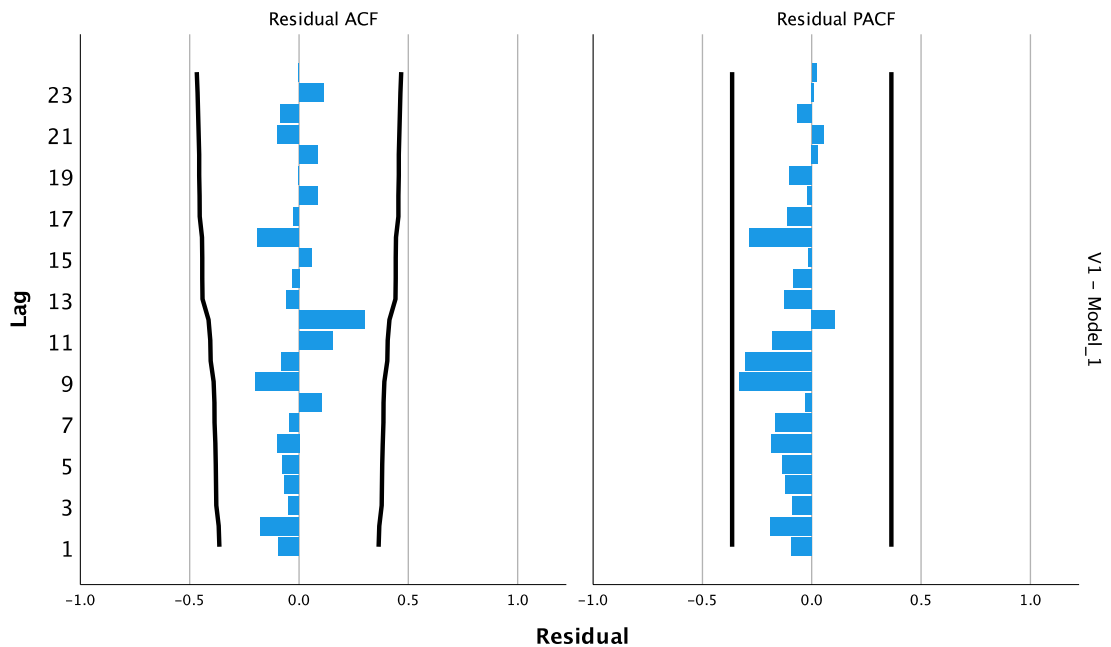
Graf 14 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,0)

U obou funkcí je patrná statisticky významná čtvrtá hodnota a proto bude model znovu rozšířen, tentokrát o část SAR(1). Model je tedy ve tvaru **SARIMA(0,1,0)(1,1,0)**.

Model Statistics

Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Net sales-Model_1	0	10,099	17,403	14,346	17	0,642	0

Tabulka 12 - Statistika modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0)



Graf 15 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0)

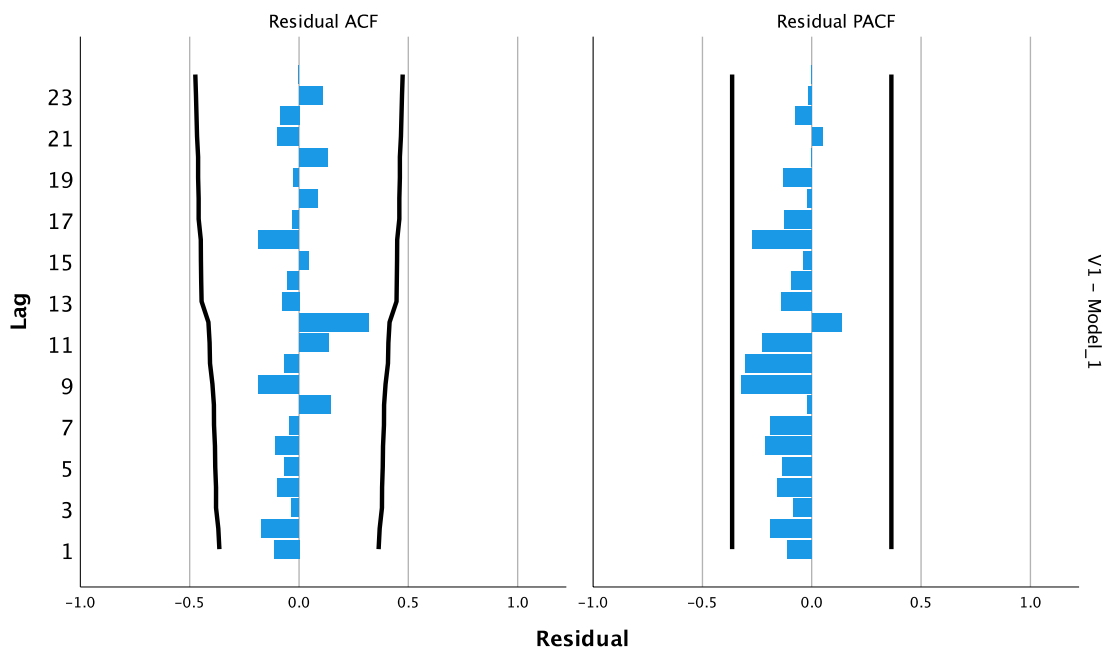
Po rozšíření modelu o část SAR(1) se hodnoty reziduální ACF a PACF snížily a leží v intervalu spolehlivosti.

Nyní bude model rozšířen o část SMA(1) místo o část SAR(1). Odhadovaný model má tedy tvar **SARIMA(0,1,0)(0,1,1)**.

Model Statistics

Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Net sales-Model_1	0	10,414	17,438	14,974	17	0,597	0

Tabulka 13 - Statistika modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,1)



Graf 16 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,1)

Jak je možno vidět, grafy reziduálních funkcí ACF a PACF vypadají podobně. Podle hodnoty parametru *Normalized BIC* se rozhodne, který model je vhodnější. Hodnota BIC u modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) se rovná 17,259. Hodnota BIC u modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,1) se rovná 17,295. Kvalitnějším modelem je tedy SARIMA(0,1,0)(1,1,0), protože má nižší hodnotu *Normalized BIC*.

Doteď se u všech modelů počítalo i s konstantou. Pokud se konstanta z modelu odebere, parametry modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty budou vypadat následovně:

Model Statistics

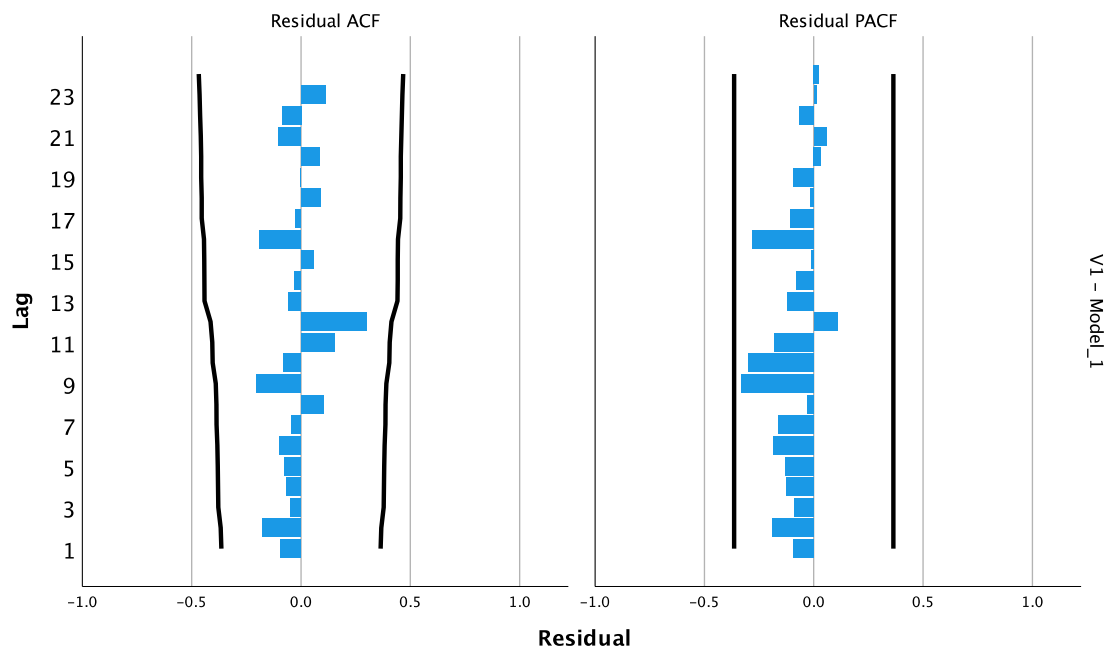
Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
Net sales-Model_1	0	10,053	17,259	14,344	17	0,643	0

Tabulka 14 - Statistika modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty

ARIMA Model Parameters

				Estimate	SE	t	Sig.	
Net sales-Model_1	Net sales	No Transformation	Difference	1				
			AR, Seasonal	Lag 1	-0,395	0,181	-2,182	0,038
			Seasonal Difference	1				

Tabulka 15 - Parametry modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty



Graf 17 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty

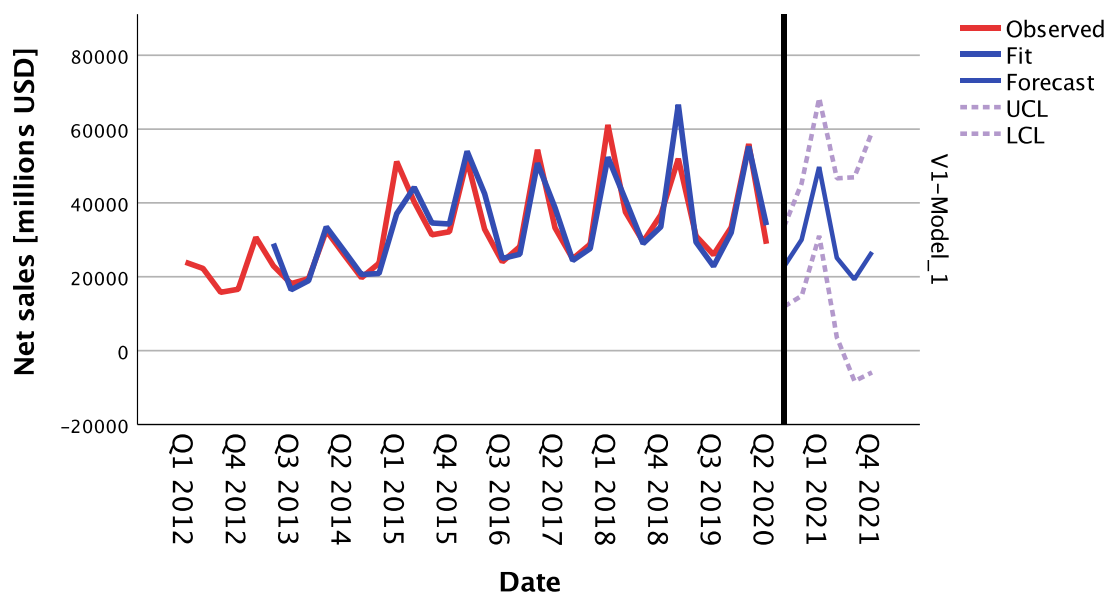
U modelu bez konstanty se hodnota *Normalized BIC* ještě snížila, bude použit tedy tento model a pro něj vytvořena předpověď na Q4 roku 2021.

Forecast

Model		Q3 2020	Q4 2020	Q1 2021	Q2 2021	Q3 2021	Q4 2021
Net sales- Model_1	Forecast	22702	30042	49724	25126	19338	26693
	UCL	33471	45272	68377	46665	46953	59269
	LCL	11933	14812	31072	3588	-8276	-5883

Tabulka 16 - Předpověď modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty

Výsledný model má následující tvar. Na grafu je vidět červeně původní časovou řadu, modře hodnoty modelu a předpověď na další období, včetně horní a dolní meze, které jsou znázorněny přerušovanou čarou.



Graf 18 - Časová řada včetně předpovědi modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty

2.5 Shrnutí sezonní časové řady

U sezonní časové řady byly použity čtyři různé metody pro odhad modelu a předpovědi řady od Q3 roku 2020 do Q4 roku 2021. Skutečné hodnoty jsou ale dostupné pouze do nynějšího data, tedy Q2 roku 2021, proto bude hodnota MAPE spočtena pouze pro první 4 hodnoty předpovědi. První z metod byla sezonní dekompozice, poté regresní analýza, exponenciální vyrovnání a na závěr SARIMA metoda.

U exponenciálního vyrovnání byl použit Winterův aditivní model, jelikož se variabilita časové řady moc neměnila. U SARIMA metody se došlo k modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty.

Na všechny metody se aplikuje vzorec MAPE a podle jeho hodnoty se určí, která metoda je nejvíce vhodná pro použití. Zde lze vidět vypočtené hodnoty MAPE jednotlivých metod:

- Sezonní dekompozice: 16,4 %
- Regresní metoda: 24,6 %
- Exponenciální vyrovnání: 19,1 %
- SARIMA metoda: 24,9 %

Podle výše uvedených hodnot se za nejvhodnější metodu dá označit sezonní dekompozice a exponenciální vyrovnání, u kterých vyšla hodnota MAPE nejnižší, tedy že předpověď nejvíce souhlasí s realitou. Předpověď u těchto metod se dá považovat za vcelku kvalitní.

Ve statistikách modelů jednotlivých metod lze také vidět hodnotu MAPE, která se liší od hodnot MAPE vypočtených výše. Hodnota ve statistikách jednotlivých modelů značí, s jakou chybou se přibližně určí jejich předpověď.

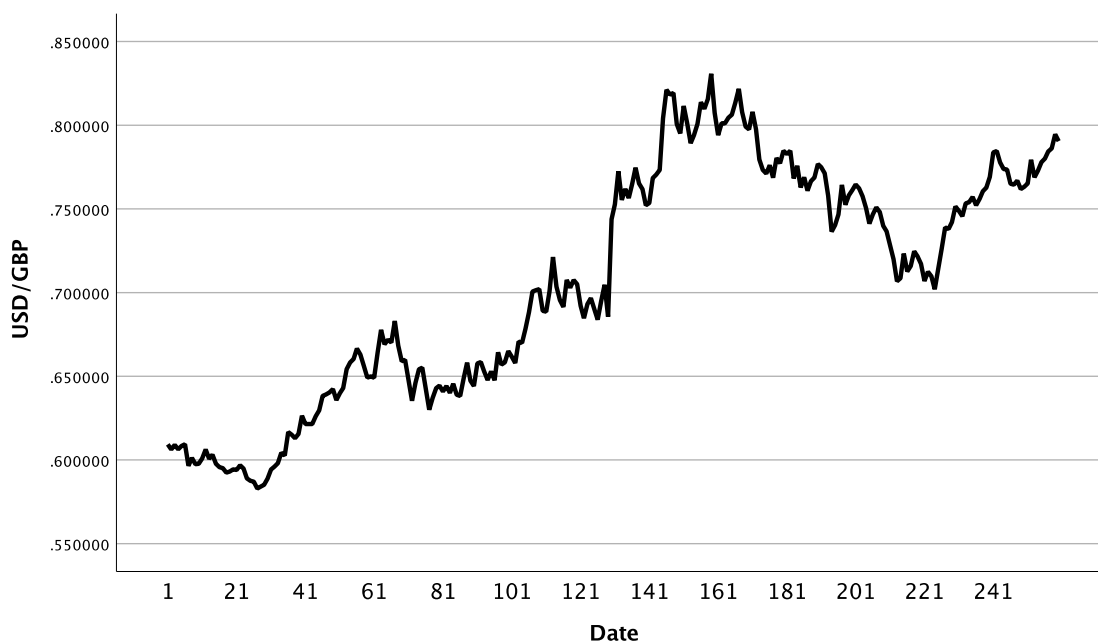
3 Nesezonní časová řada

Nesezonní časová řada, na rozdíl od sezonní časové řady, neobsahuje pravidelně se opakující cykly v průběhu času. V průběhu let tudíž vykazuje nepravidelný tvar a není zde vidět určitý vzor jako u sezonní časové řady. Příkladem může být měnový kurz, který je popsán v následujícím odstavci.

Hledá se model týdenní časové řady měnového kurzu amerického dolaru (USD) na britské libře (GBP), tedy (USD/GBP). Časová řada obsahuje 260 dat za pět let od 6. ledna 2014 do 24. prosince 2018. Na základě zvoleného modelu se vypočte předpověď na dalších 26 týdnů. Z důvodu celosvětové pandemie se bude pracovat pouze s daty z let předcházejících a to i včetně předpovědi na první polovinu roku 2019.

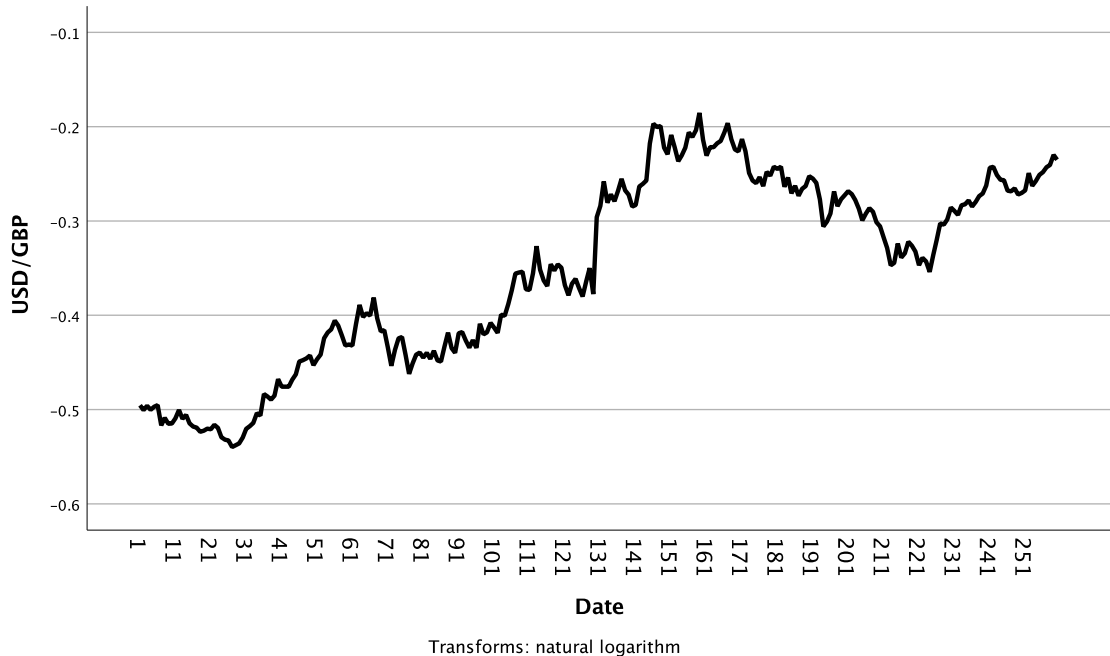
Stejně jako u každé časové řady je třeba nejprve nahrát data do softwaru SPSS a definovat datum a čas. Data jsou brána z literatury [11]. Postup je stejný jako tomu bylo u sezonní časové řady. Pro týdenní časovou řadu však nelze zvolit týden (week). Zvolí se proto den (day), což v tomto případě nevádí, protože jde pouze o formát data, který se bude zobrazovat u grafů na spodní ose.

Pomocí funkce **Sequence Charts** si vytvoříme průběh časové řady.



Graf 19 - Časová řada měnového kurzu

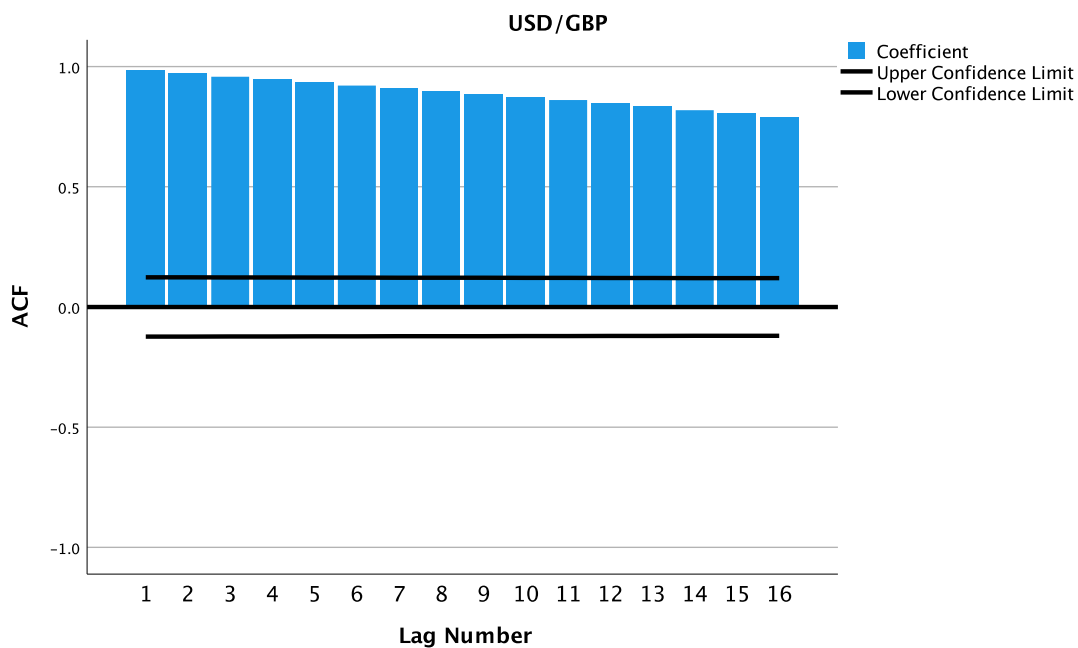
Podle pana Arlta [5] je však u finanční časové řady měnového kurzu potřeba provést logaritmickou transformaci. Průběh takto transformované časové řady je vidět na následujícím obrázku.



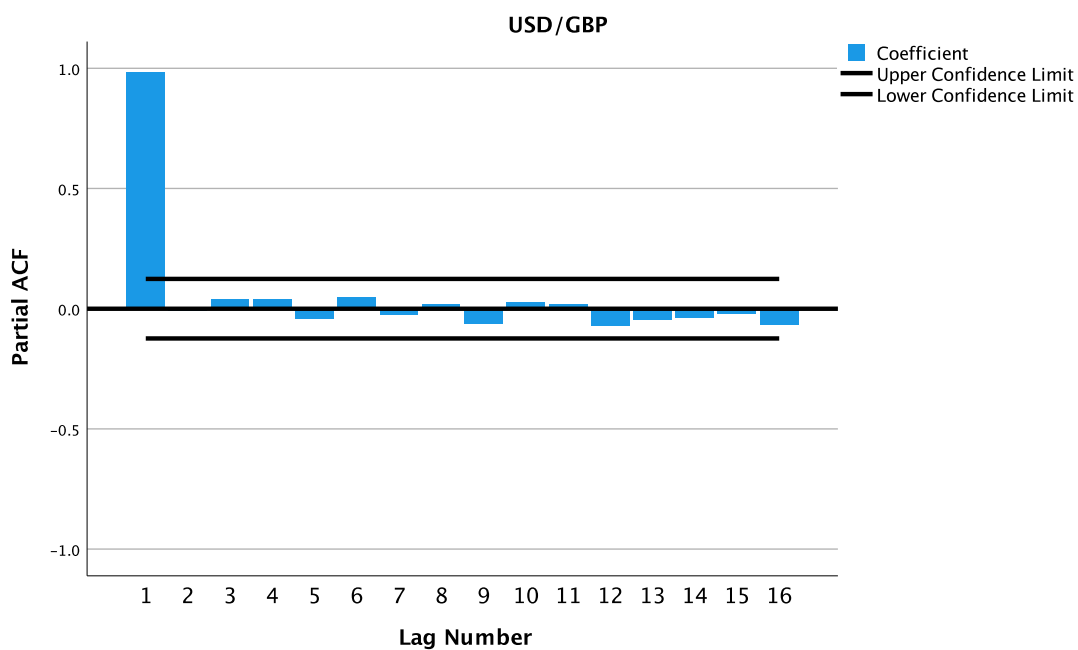
Graf 20 - Transformovaná časová řada měnového kurzu logaritmickou funkcí

3.1 ARIMA metoda

První metodou, která se u tohoto příkladu použije, bude ARIMA metoda. Pro zjištění základních parametrů modelu je třeba analyzovat autokorelační funkce ACF a PACF. Opět je třeba zaškrtnout transformaci logaritmickou funkcí.



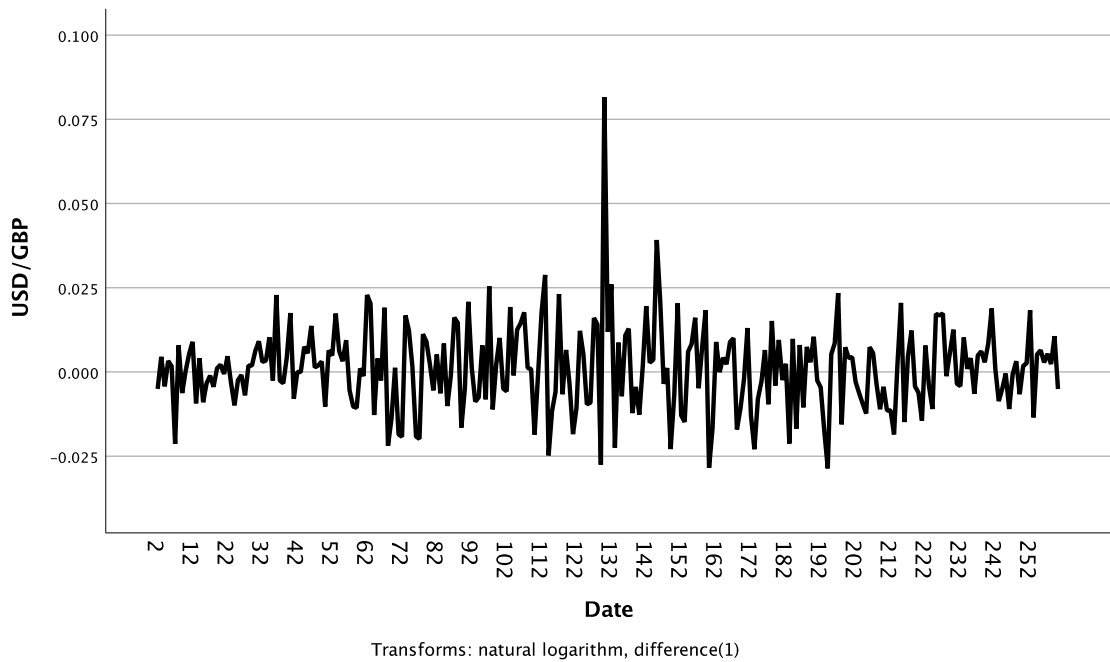
Graf 21 - Autokorelační funkce časové řady měnového kurzu



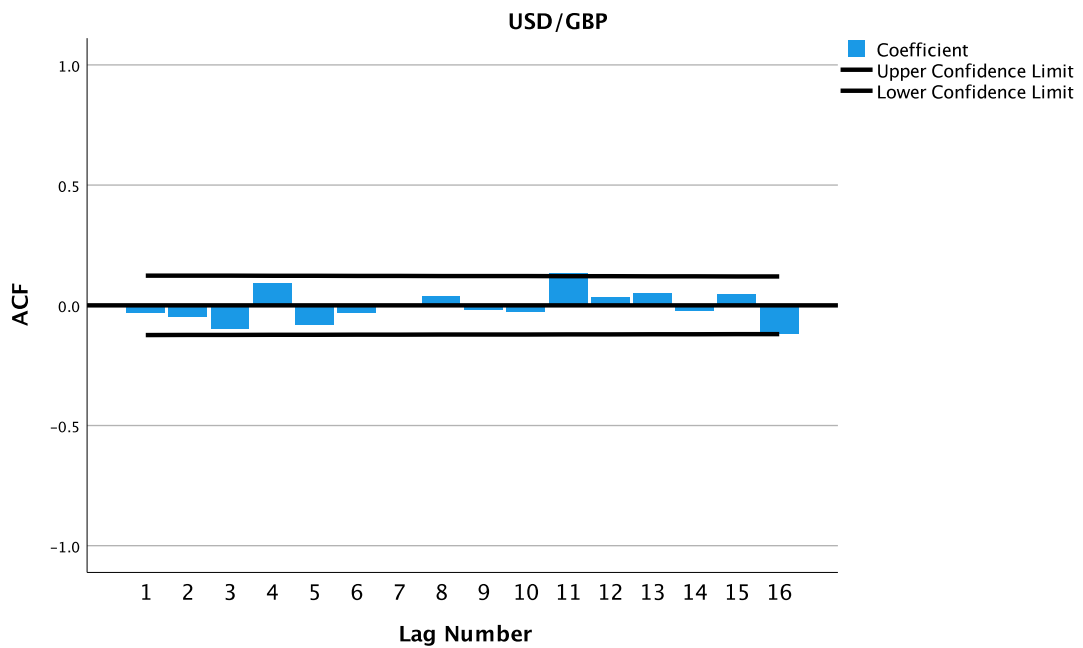
Graf 22 - Parciální autokorelační funkce časové řady měnového kurzu

Z tvaru průběhu časové řady a tvaru funkcí ACF a PACF vyplývá, že je řada nestacionární. Řada bude transformována první diferencí. Na základě průběhů funkcí by tedy mohlo jít o **ARIMA(0,1,0)**.

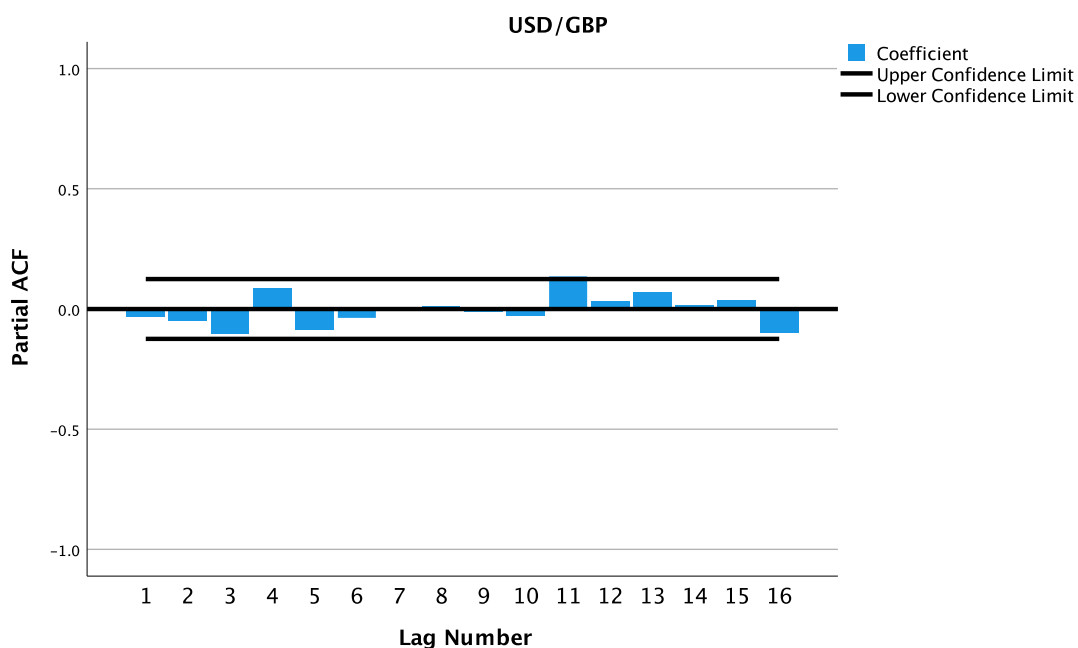
Nejprve je možno ukázat graf transformované časové řady první diferencí.



Graf 23 - Transformovaná časová řada měnového kurzu logaritmickou funkcí a první diferencí



Graf 24 - Autokorelační funkce transformované časové řady měnového kurzu



Graf 25 - Parciální autokorelační funkce transformované časové řady měnového kurzu

Z výše uvedených grafů je možné vidět, že se již jedná o stacionární časovou řadu.

Nyní se vytvoří odhad modelu **ARIMA(0,1,0)**.

Model Statistics

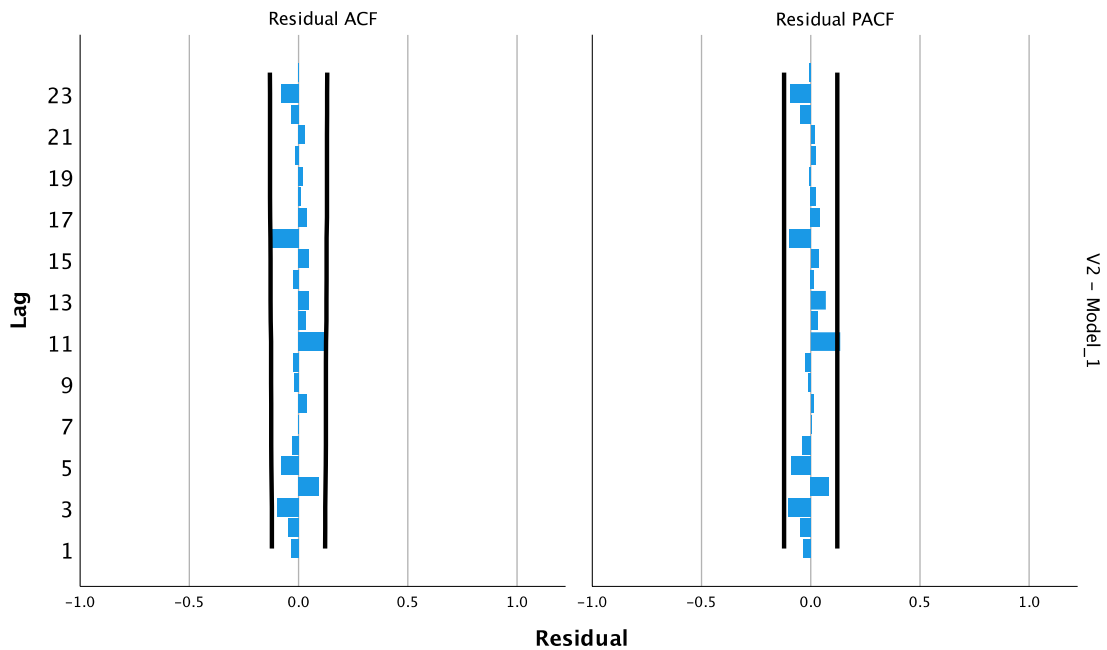
Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
USD/GBP-Model_1	0	0,944	-9,374	19,562	18	0,358	0

Tabulka 17 - Statistiky modelu ARIMA(0,1,0)

ARIMA Model Parameters

				Estimate	SE	t	Sig.
USD/GBP-Model_1	USD/GBP	Natural Logarithm	Constant	0,001	0,001	1,281	0,201
			Difference	1			

Tabulka 18 - Parametry modelu ARIMA(0,1,0)

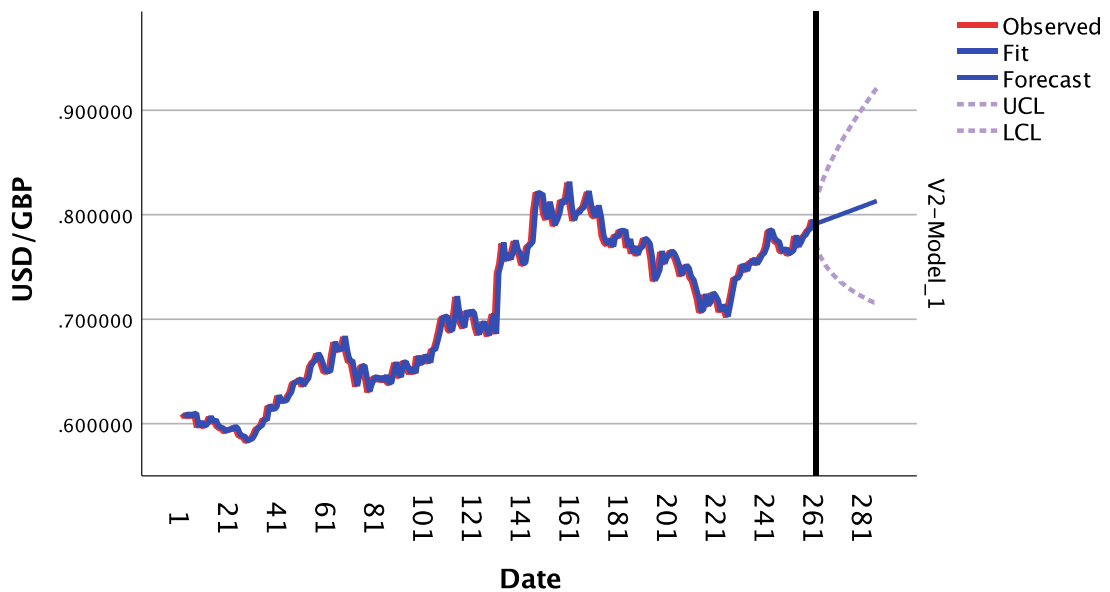


Graf 26 - Autokorelační funkce modelu ARIMA(0,1,0)

Všechny autokorelační koeficienty leží v rozsahu nebo na hraně intervalu spolehlivosti a funkce nevykazují žádné významné autokorelace. Jelikož jsou koeficienty v rámci intervalu spolehlivosti, lze je pokládat na nulové a tudíž by tato řada neměla obsahovat systematickou složku. Tento model lze tedy považovat za vhodný a nemusí se dále rozšiřovat.

Podle pana Arlta je však nutné u časových řad krátkého intervalu vzít v potaz fakt, že výběrová autokorelační funkce je citlivým prostředkem detekce systematické složky v časové řadě. Byl by poté použit složitější rozšířený lineární model.

Výsledný model ARIMA(0,1,0), včetně předpovědi na polovinu roku 2019, má tedy následující tvar.



Graf 27 - Časová řada včetně předpovědi modelu ARIMA(0,1,0)

3.2 Exponenciální vyrovnání

Poslední metodou u této časové řady bude exponenciální vyrovnání.

Jak lze vidět z hodnot a grafu výše u tohoto příkladu, časová řada obsahuje určitý trend. Z tohoto důvodu bude použit Holtův lineární trend. Ten se udělá obdobně jako u předcházející časové řady, tedy na kartě **Analyze** se vybere **Forecasting** a **Create Traditional Models**. Do **Variables** se vloží data a za metodu se zvolí exponenciální vyrovnání. Jako u předchozí metody je nutné zvolit logaritmickou transformaci.

Níže lze vidět parametry modelu a hodnoty koeficientů Holtova modelu. Hodnota Alpha značí odhadovanou úroveň a hodnota Gamma odhadovaný trend.

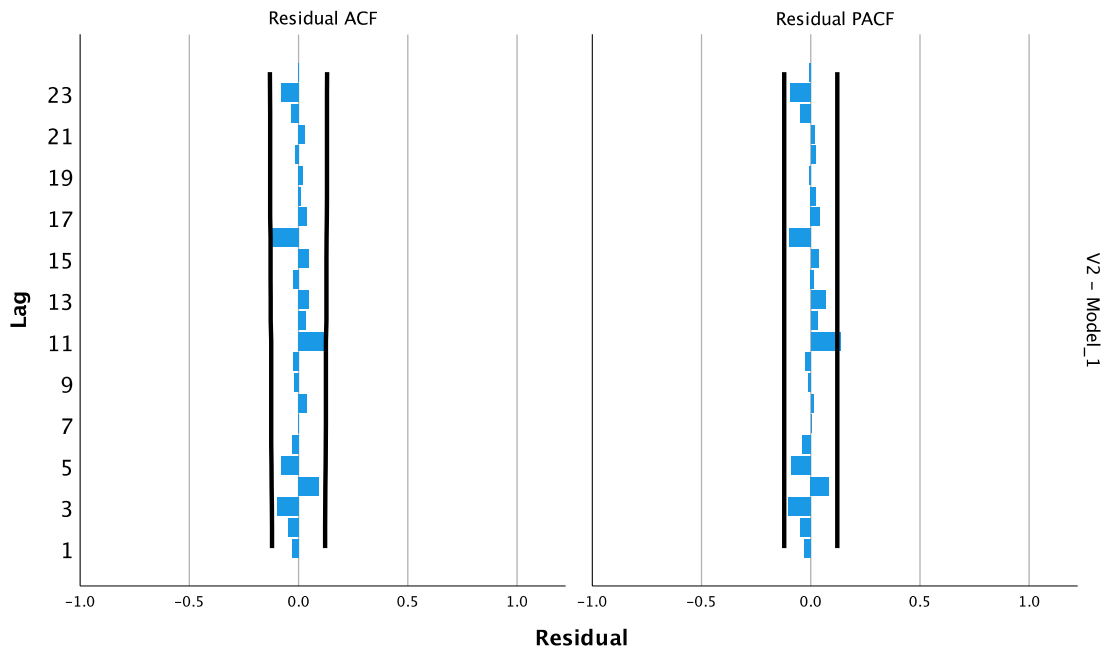
Model Statistics							
Model	Number of Predictors	Model Fit statistics		Ljung-Box Q(18)			Number of Outliers
		MAPE	Normalized BIC	Statistics	DF	Sig.	
USD/GBP-Model_1	0	0,940	-9,352	19,568	16	0,240	0

Tabulka 19 - Statistiky Holtova lineárního modelu

Exponential Smoothing Model Parameters

Model			Estimate	SE	t	Sig.
USD/GBP- Model_1	Natural Logarithm	Alpha (Level)	0,998	0,063	15,947	0,000
		Gamma (Trend)	2,637E-06	0,012	0,000	1,000

Tabulka 20 - Parametry Holtova lineárního modelu

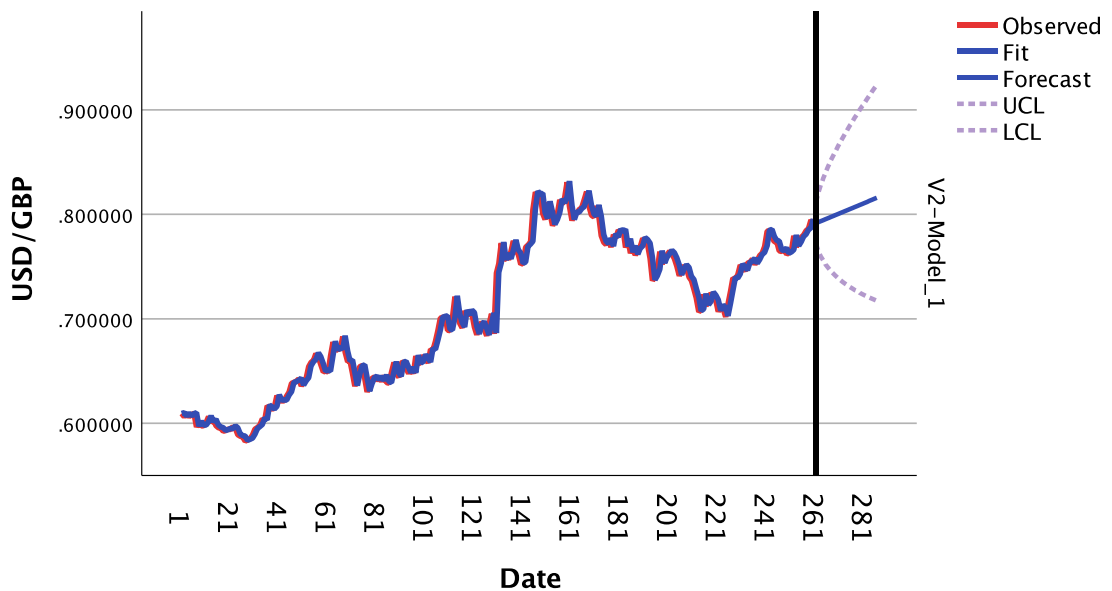


Graf 28 - Autokorelační funkce Holtova lineárního modelu

Alpha se blíží jedné, závisí proto na předchozím pozorování. Trendová konstanta je blízká nule, tudíž trend závisí skoro na všech datech

Residuální funkce ACF a PACF má podobný průběh jako u ARIMA modelu. Všechny autokorelační koeficienty leží v rozsahu nebo na hraně intervalu spolehlivosti, proto i tento model lze považovat za uspokojující. Model ARIMA(0,1,0) má však nižší koeficient BIC, tudíž ho lze považovat za přesnější.

Graf Holtova lineárního modelu včetně odhadu modelu a předpovědi budoucích 26 hodnot znázorňuje následující obrázek.



Graf 29 - Časová řada včetně předpovědi Holtova lineárního modelu

3.3 Shrnutí nesezonní časové řady

U nesezonní časové řady byly použity pouze dvě metody (exponenciální vyrovnaní a ARIMA metoda). U ARIMA metody se došlo k modelu ARIMA(0,1,0). U exponenciálního vyrovnaní byl použit z důvodu přítomnosti trendu model Holtova lineárního trendu.

Obě použité metody u nesezonní časové řady mají podobný průběh autokorelačních funkcí i grafů s předpovědí na dalších 26 týdnů. Hodnoty MAPE a normalized BIC jsou také podobně velké. Obě metody je možné tedy v tomto konkrétním případě považovat za srovnatelné.

Závěr

Tato bakalářská práce se zaměřovala na analýzu časových řad. V první části práce byla pozornost věnována především teoretickým poznatkům nutným k porozumění jednotlivých metod v praktické části práce, která byla rozdělena na dvě části.

V první části byla analyzována sezonní časová řada společnosti Apple. U většiny metod byla spočítána předpověď hodnot od Q3 roku 2020 do Q4 roku 2021. Skutečné hodnoty jsou však dostupné pouze do nynějšího data, tedy Q2 roku 2021. Pro tento časový horizont byla vypočtena pomocí vzorce hodnota MAPE (mean absolute percentage error), která vyjadřuje, jak se předpověď shoduje, případně liší od pravých hodnot. U sezonní dekompozice vyšla hodnota MAPE 16,4 %. Předpověď je tedy o tuto hodnotu podhodnocena. Druhou metodou byla regresní metoda. Konkrétní hodnoty předpovědi se zapsali do vstupní matice, ze kterých se vytvořil graf předpovědi znázorňující meziroční růst a hodnota MAPE vyšla 24,6 %. Další metodou bylo exponenciální vyrovnání u kterého vyšla hodnota MAPE 19,1 %. Podle statistik modelu, kde vyšla hodnota 8,7 %, je tedy skutečná hodnota vyšší. Poslední metodou u nesezonní časové řady byla metoda SARIMA, u které bylo dosaženo výsledného modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0). Podle statistik modelu vyšla hodnota MAPE 17,3 %, tedy že model bude nepřesný o tuto hodnotu. Skutečná hodnota MAPE je rovna 24,9 %. U sezonní časové řady by tedy bylo vhodné použít model sezonní dekompozice a exponenciálního vyrovnání, kde předpověď nejvíce souhlasí s realitou.

V druhé části byla analyzována nesezonní časová řada měnového kurzu amerického dolaru na britské libře. Byly zde použity pouze dvě metody, konkrétně exponenciální vyrovnání a ARIMA metoda. U této řady nebyl nasimulován přesný průběh hodnot, pouze jakýsi trend, kterým by se řada měla v dalším období vydávat. U ARIMA metody byl za výsledný model použit model ARIMA(0,1,0), pro který se vytvořila předpověď na dalších 26 týdnů. U exponenciálního vyrovnání byl použit, z důvodu výskytu trendu, Holtův lineární trend. Oba výsledné modely (ARIMA i exponenciální vyrovnání) vykazují podobný průběh. V tomto případě lze obě metody považovat za srovnatelné.

Citovaná literatura

- [1] HINDLS, Richard. *Statistika pro ekonomy*. 8. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. ISBN 978-80-86946-43-6.
- [2] KROPÁČ, Jiří. *Statistika B: jednorozměrné a dvourozměrné datové soubory, regresní analýza, časové řady*. 2., dopl. vyd. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2009. ISBN 978-80-214-3295-6.
- [3] BUDÍKOVÁ, Marie, Maria KRÁLOVÁ a Bohumil MAROŠ. *Průvodce základními statistickými metodami*. Praha: Grada, 2010. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-3243-5.
- [4] SHUMWAY, Robert H. a David S. STOFFER. *Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples*. 4th ed. Springer International Publishing, 2017, 562 s. ISBN 978-3-319-52452-8.
- [5] ARLT, Josef, Markéta ARLTOVÁ a Eva RUBLÍKOVÁ. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Praha: Vysoká škola ekonomická, 2002. ISBN 80-245-0307-7.
- [6] HINDLS, Richard, Markéta ARLTOVÁ, Stanislava HRONOVÁ, Ivana MALÁ, Luboš MAREK, Iva PECÁKOVÁ a Hana ŘEZANKOVÁ. *Statistika v ekonomii*. Praha: Professional Publishing, 2018. ISBN 978-80-88260-09-7.
- [7] ARLT, Josef a Markéta ARLTOVÁ. *Finanční časové řady: vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*. Praha: Grada, 2003. ISBN 80-247-0330-0.
- [8] TABACHNICK, Barbara G. a Linda S. FIDELL. *Using Multivariate Statistics*. 6th ed. Pearson, 2013. ISBN 9780205849574.
- [9] Why IBM SPSS Statistic? IBM: *IBM SPSS Statistic* [online]. [cit. 2021-7-10]. Dostupné z: <https://www.ibm.com/products/spss-statistics>
- [10] *Apple - Investor Relations: Financial Data* [online]. [cit. 2021-7-15]. Dostupné z: <https://investor.apple.com/investor-relations>

[11] *Yahoo! Finance: USD/GBP (USDGBP=X)* [online]. [cit. 2021-7-15]. Dostupné z:
<https://finance.yahoo.com/quote/usdgbp=X/>

Seznam grafů

Graf 1 - Časová řada Apple.....	29
Graf 2 - Trendová-cyklická složka	30
Graf 3 - Rezidua časové řady.....	31
Graf 4 - Sezonně očištěná řada.....	31
Graf 5 - Předpověď časové řady pro metodu sezonní dekompozice	33
Graf 6 - Časová řada regresní metody s predikovaným vývojem	35
Graf 7 - Autokorelační funkce pro regresní metodu	36
Graf 8 - Parciální autokorelační funkce pro regresní metodu	36
Graf 9 - Autokorelační funkce Winterova aditivního modelu	38
Graf 10 - Časová řada včetně předpovědi Winterova aditivního modelu	39
Graf 11 - Autokorelační funkce časové řady.....	40
Graf 12 - Parciální autokorelační funkce časové řady	40
Graf 13 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,0,0)(0,1,0).....	41
Graf 14 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,0).....	42
Graf 15 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0).....	43
Graf 16 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,1).....	44
Graf 17 - Autokorelační funkce modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty.....	45
Graf 18 - Časová řada včetně předpovědi modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty	46
Graf 19 - Časová řada měnového kurzu	48
Graf 20 - Transformovaná časová řada měnového kurzu logaritmickou funkcí	49
Graf 21 - Autokorelační funkce časové řady měnového kurzu.....	50
Graf 22 - Parciální autokorelační funkce časové řady měnového kurzu	50
Graf 23 - Transformovaná časová řada měnového kurzu logaritmickou funkcí a první diferencí.....	51
Graf 24 - Autokorelační funkce transformované časové řady měnového kurzu	51
Graf 25 - Parciální autokorelační funkce transformované časové řady měnového kurzu	52
Graf 26 - Autokorelační funkce modelu ARIMA(0,1,0).....	53
Graf 27 - Časová řada včetně předpovědi modelu ARIMA(0,1,0).....	54
Graf 28 - Autokorelační funkce Holtova lineárního modelu	55
Graf 29 - Časová řada včetně předpovědi Holtova lineárního modelu	56

Seznam tabulek

Tabulka 1 - Sezonní faktory.....	30
Tabulka 2 - Statistika jednoduchého exponenciálního vyrovnaní.....	32
Tabulka 3 - Statistika Holtova lineárního trendu	32
Tabulka 4 - Předpověď sezonně očištěné řady	33
Tabulka 5 - Hodnocení modelu regrese	34
Tabulka 6 - Koeficienty modelu regrese.....	35
Tabulka 7 - Statistika Winterova aditivního modelu	37
Tabulka 8 - Parametry Winterova aditivního modelu	37
Tabulka 9 - Předpověď Winterova aditivního modelu	38
Tabulka 10 - Statistika modelu SARIMA(0,0,0)(0,1,0)	41
Tabulka 11 - Statistika modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,0)	42
Tabulka 12 - Statistika modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0)	43
Tabulka 13 - Statistika modelu SARIMA(0,1,0)(0,1,1)	44
Tabulka 14 - Statistika modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty	45
Tabulka 15 - Parametry modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty.....	45
Tabulka 16 - Předpověď modelu SARIMA(0,1,0)(1,1,0) bez konstanty	46
Tabulka 17 - Statistika modelu ARIMA(0,1,0)	52
Tabulka 18 - Parametry modelu ARIMA(0,1,0)	52
Tabulka 19 - Statistika Holtova lineárního modelu	54
Tabulka 20 - Parametry Holtova lineárního modelu	55