

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA STROJNÍ

---

ÚSTAV FYZIKY



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Studium šíření vlnění ve struně elektrické kytary

Study of wave propagation in the electric guitar string

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Randák** Jméno: **Filip** Osobní číslo: **483238**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav fyziky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Studium šíření vlnění ve struně elektrické kytary**

Název bakalářské práce anglicky:

**Study of wave propagation in the electric guitar string**

Pokyny pro vypracování:

- 1) Sestavte diferenciální rovnici pro případ šíření vlnění ve struně elektrické kytary a proveďte rozbor jejího řešení.
- 2) Výsledky využijte k simulaci vlnění pomocí aplikace Matlab.
- 3) Porovnejte a diskutujte teoretické výsledky pro různé parametry struny.

Seznam doporučené literatury:

HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER, DUB, Petr, ed. Fyzika. 2., přeprac. vyd. Přeložil Miroslav ČERNÝ. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.  
BUDINSKÁ, Zuzana, Petr DUCHÁČEK, Zdeněk KOHOUT a Miroslav JÍLEK. Fyzika I. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2020. ISBN 978-80-01-06673-7.  
STRAUSS, Walter A. Partial differential equations: an introduction. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, c2008. 978-0-470-05456-7.  
KOCH, Martin. Building Electric Guitars: How to Make Solid-Body, Hollow-Body and Semi-Acoustic Electric Guitars and Bass Guitars. 2nd. místo neznámé : Koch Verlag, 2001. 3901314075.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**RNDr. Zuzana Budinská, Ph.D., ústav fyziky FS**

Jméno a pracoviště druhého(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **31.03.2021**

Termín odevzdání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

Platnost zadání bakalářské práce: \_\_\_\_\_



RNDr. Zuzana Budinská, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce



Ing. Petr Vičák, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

22.4.2021

Datum převzetí zadání

Filip Randák

Podpis studenta

## *Prohlášení*

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucí práce RNDr. Zuzany Budinské, Ph.D., na Ústavu fyziky Fakulty strojní ČVUT v Praze a na zařízení, které bylo realizováno z grantových prostředků ústavu. Při vypracování jsem použil pouze podklady uvedené v seznamu na konci této práce.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), pokud tak bude učiněno po dohodě s vedoucí práce a Ústavem fyziky Fakulty strojní ČVUT.

V Praze dne: .....

.....

Filip Randák

## *Poděkování*

Rád bych tímto poděkoval vedoucí práce RNDr. Zuzaně Budinské, Ph.D. za její ochotu, věnovaný čas, trpělivost a pomoc, kterou mi poskytla při vypracování této bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Michalu Haubnerovi a Bc. Marku Fenclovi za cenné konzultace k praktické části této práce. Poděkování patří rovněž Bc. Šimonu Svobodovi za zdokonalení návrhu měřící sestavy a její zhotovení. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům za podporu v průběhu mých studií.

## *Anotační list*

Jméno autora:	Filip Randák
Název práce:	Studium šíření vlnění ve struně elektrické kytary
Title:	Study of wave propagation in the electric guitar string
Akademický rok:	2020 – 2021
Studijní program:	Teoretický základ strojního inženýrství
Ústav:	Ústav fyziky
Vedoucí práce:	RNDr. Zuzana Budinská, Ph.D.
Bibliografické údaje:	61 stran, 44 obrázků, 3 tabulky
Klíčová slova:	Šíření vlnění, parciální diferenciální rovnice vlny, kytarová struna, MATLAB graphical user interface, fyzikální měření
Anotace:	Tato bakalářská práce podrobně provádí matematickým a fyzikálním řešením šíření příčného vlnění v napjaté struně, v užším kontextu pak v napjaté struně elektrické kytary. Dále práce popisuje interaktivní počítačovou aplikaci vytvořenou v programu MATLAB za účelem názorné interpretace těchto výsledků. Na závěr se zabývá porovnáním teoretických výsledků s reálným chováním struny elektrické kytary a návrhem fyzikálního měření pro tento účel.
Abstract:	This bachelor thesis closely follows the physical and mathematical solution to the problem of transverse wave propagation in a stretched string, focusing on the electric guitar string. The thesis then describes an interactive computer application developed in MATLAB for the purpose of interpretation of the results. Finally, it compares these theoretical results with a real electric guitar string and proposes a physical experiment for this.

# Obsah

SEZNAM ZÁKLADNÍCH OZNAČENÍ A INDEXŮ .....	8
1. ÚVOD.....	10
2. TEORETICKÁ ČÁST.....	11
2.1 Stručně o základní konstrukci elektrické kytary.....	11
2.2 Odvození vlnové parciální diferenciální rovnice struny .....	11
2.3 Rozbor vlnové rovnice a rychlost šíření vlny .....	14
2.4 Zavedení počátečních a okrajových podmínek.....	15
2.5 Intuitivní odvození principu stacionárního vlnění a vztahu pro výpočet frekvence .....	17
2.6 Analytické řešení úlohy pro kytarovou strunu .....	19
2.7 Rozbor řešení úlohy a ověření předpokládaných principů .....	24
2.8 Zahrnutí vlivu tlumení a řešení úlohy s tlumením.....	28
2.9 Rozbor řešení úlohy s tlumením.....	32
2.10 Interpretace zvuku a tónu .....	33
3. POČÍTAČOVÁ SIMULACE.....	35
3.1 Popis aplikace a jejích funkcí.....	35
3.2 Omezení počítačového prostředí .....	37
3.3 Základní struktura .....	37
3.4 Rozbor skriptu aplikace .....	38
3.4.1 Cyklus animace.....	38
3.4.2 Hlavní cyklus.....	40
3.4.3 Cyklus výběru počáteční podmínky.....	42
3.4.4 Iniciací programu a první iterace.....	43
3.5 Proces tvorby aplikace .....	43
4. NÁVRH MĚŘENÍ REÁLNÉ STRUNY.....	44
4.1 Cíle měření .....	44
4.2 Měřicí sestava .....	44
4.2.1 Rám.....	45
4.2.2 Tenzometrický snímač.....	45
4.2.3 Uložení struny .....	45
4.2.4 Frekvenční snímač.....	46
4.2.5 Struna .....	46
4.2.6 Zpracování signálu.....	46
4.3 Zpracování měřených hodnot.....	47
4.4 Naměřené hodnoty a porovnání.....	47

4.4.1	Měření výšky tónu.....	48
4.4.2	Měření barvy tónu.....	49
5.	DISKUZE.....	52
6.	ZÁVĚR.....	53
7.	PŘÍLOHY.....	54
7.1	PŘÍLOHA I.....	54
7.2	PŘÍLOHA II.....	55
7.3	PŘÍLOHA III.....	55
8.	CITOVANÁ LITERATURA.....	59
9.	SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK.....	61
	Seznam obrázků.....	61
	Seznam tabulek.....	61

# SEZNAM ZÁKLADNÍCH OZNAČENÍ A INDEXŮ

Symbol	Jednotka	Význam
$a$	–	obecný parametr
$a$	–	směrnice přímky
$a_n$	$m$	$n$ -tý koeficient Fourierovy řady liché funkce
$a_y$	$m \cdot s^{-2}$	zrychlení do směru osy $y$
$A$	–	obecná amplituda harmonické funkce
$b$	–	obecný parametr
$b$	$m$	posunutí přímky
$b$	$s^{-1}$	útlum
$b_n$	$m$	$n$ -tý koeficient Fourierovy řady liché funkce
$b_{ij}$	$m$	$x$ -ová souřadnice $j$ -tého uzlu $i$ -té složky vlnění
$c$	–	směrnice přímky
$c$	$m \cdot s^{-1}$	rychlost šíření vlny
$C$	$\sim$	integrační konstanta
$d$	$m$	posunutí přímky
$D$	$s^{-2}$	diskriminant charakteristické rovnice
$e$	–	eulerovo číslo
$f$	$\sim$	obecná funkce
$f$	$Hz$	frekvence
$f_n$	$Hz$	frekvence $n$ -té harmonické složky
$\tilde{f}_n$	$Hz$	frekvence $n$ -té harmonické složky tlumeného vlnění
$\tilde{F}$	$N$	tlumící síla
$g$	$\sim$	obecná funkce
$g$	$m \cdot s^{-2}$	konstanta gravitačního zrychlení
$h$	$m$	malý úsek osy $x$
$i$	–	imaginární jednotka
$k$	–	celé číslo
$k$	$m^{-1}$	vlnčet
$k$	$mV \cdot V^{-1}$	citlivost tenzometrického měřicího členu
$k$	$N \cdot s \cdot m^{-2}$	koeficient tlumení
$K_n$	$\sim$	integrační konstanta náležící $n$ -té složce
$L$	$m$	celková délka napjaté části struny
$m$	$kg$	hmotnost
$M$	–	počet členů Fourierovy řady užitý k počítačovému výpočtu
$n$	–	$n$ -tý v pořadí
$N$	–	uzel vlnění
$O$	–	počátek pravouhlého souřadného systému $Oxy$
$P$	$s$	perioda
$t$	$s$	čas
$T$	$\sim$	obecná funkce
$T$	$N$	napínající síla
$T_y$	$N$	napínající síla ve směru osy $y$
$T^{teor}$	$N$	změřená napínající síla získaná teoretickým přepočtem
$u$	$m$	výchylka struny ve směru osy $y$
$u_0$	$m$	výchylka bodu definujícího počáteční tvar struny
$u^*$	$m$	výchylka určité složky celkového řešení vlnění ve struně
$u_n^*$	$m$	výchylka $n$ -té složky celkového řešení vlnění ve struně
$U$	$\sim$	obecná funkce



$U^{výst}$	$V$	výstupní napětí tenzometrického senzoru
$U_{max}^{výst}$	$V$	maximální výstupní napětí tenzometrického senzoru
$U^{zdroj}$	$V$	napětí zdroje tenzometrického senzoru
$v$	$m$	výchylka struny ve směru osy $y$ v kontextu počátečního tvaru
$x$	$m$	souřadnice pravoúhlého souřadného systému $Oxy$
$x_b$	$m$	souřadnice snímače
$x_0$	$m$	souřadnice bodu definujícího počáteční tvar struny
$y$	$m$	souřadnice pravoúhlého souřadného systému $Oxy$
<i>Řecká písmena</i>		
$\alpha$	$rad$	úhel natočení napínající síly
$\gamma$	$m^{-2}$	separační konstanta
$\delta$	$kg \cdot V^{-1}$	směrnice přímky
$\lambda$	$\sim$	kořen kvadratické rovnice
$\lambda$	$m$	vlnová délka
$\lambda_n$	$m$	vlnová délka $n$ -té složky
$\mu$	$kg \cdot m^{-1}$	délková hustota
$\pi$	$-$	Ludolfovo číslo
$\psi$	$rad$	fázový posun
$\omega$	$rad \cdot s^{-1}$	kruhová frekvence
$\omega_n$	$rad \cdot s^{-1}$	kruhová frekvence $n$ -té složky
$\widetilde{\omega}_n$	$rad \cdot s^{-1}$	kruhová frekvence $n$ -té složky tlumého vlnění
<i>Zvláštní symboly</i>		
$\mathbb{N}$		obor přirozených čísel
$\mathbb{R}$		obor reálných čísel
$\mathbb{Z}$		obor celých čísel
<i>Indexy</i>		
$b$		vztaženo ke snímači
$n$		pořadí $n$ -té složky vlnění
$max$		maximální
$P$		periodický
$teor$		teoretická hodnota
$výst$		výstupní hodnota tenzometrického snímače
$y$		ve směru osy $y$
$0$		počáteční
$1$		zvolený
$1 - 6$		rozlišení konstant
$I - VI$		rozlišení posloupností konstant

# 1. ÚVOD

Ačkoli se může zprvu zdát, že hudba jako forma umění nemá s inženýrskými obory příliš společného, je tomu zvláště v dnešní době právě naopak. Hudební teorie se opírá o fundamentální matematické a fyzikální principy, hudba jako taková je produkována díky nástrojům důmyslné inženýrské invence a je nahrávána a zpracovávána odbornou metodikou za užití komplexního hardwaru a softwaru. Fyzikální popis chování kytarových strun je pouze jedním z mnoha problémů, na které můžeme v této rozsáhlé oblasti aplikovat základní inženýrské znalosti a dovednosti.

Prvním z cílů této práce je popsat výstavbu a řešení fyzikálního a matematického modelu popisujícího vlnové děje na kytarové struně, a to podrobně a didakticky s uvedením širšího významu. Související literatura totiž často buď vysvětluje pouze základní principy stacionárního vlnění a složitější rozbor neprovádí, nebo naopak zkoumá jen související pokročilé diferenciální rovnice a opomíjí základy jako triviální (jak vyplývá z různých úrovní vzdělání). Tato práce má být jakýmsi sjednocením obou přístupů a čtenáři má poskytnout podrobný a kompletní přehled o řešení tohoto problému. Přistupuji proto také k vytváření vlastních obrázků pro větší soudržnost práce. Užité postupy pak mohou posloužit i při řešení podobných případů, například drátů vysokého napětí rozhýbávaných větrem či napnutého řemenu řemenového převodu schopného přenášet příčná vlnění.

Vzdělávací charakter bude mít i druhý výstup této práce, tedy simulace kytarové struny zpracovaná jako počítačová aplikace. V interaktivním prostředí si uživatel bude moci vizualizovat komplexní vlnové děje na virtuální struně tak, jak vychází z odvozených matematických rovnic, a zkoumat vliv souvisejících fyzikálních veličin na chování struny. Program bude zároveň schopen výsledky interpretovat jako zvuk a přímo syntetizovat tón „matematické kytary“. Bude to tak názorný doplněk výuky.

Závěrečná část této práce již má praktický přesah – teoretické výsledky budeme konfrontovat s měřením na reálné kytarové struně. Za tímto účelem bude navržena a vyrobena jednoduchá měřicí sestava. I toto měření by mohlo být v důsledku využito k výuce a zavedeno jako laboratorní úloha, neboť v nejjednodušší formě představuje ověření platnosti elementárního fyzikálního vztahu.

## 2. TEORETICKÁ ČÁST

### 2.1 Stručně o základní konstrukci elektrické kytary

Základním prvkem kytary jsou přirozeně struny. Struny pro elektrickou kytaru jsou obvykle ocelové s kruhovým průřezem, struny o vyšších tloušťkách pak bývají tvořeny ocelovým jádrem šestiúhelníkového průřezu a niklovým vinutím, které toto jádro obaluje v těsné šroubovici. Každá ze standardně šesti strun o odstupňovaných tloušťkách (a tedy různých hmotnostech) je na hlavě kytary upevněna v ladící mechanice. Jedná se o drobný šroubový převodový mechanismus, který umožní hráči utahováním kolíku přesně vyvodit požadovanou míru předepjetí struny. Odsud je struna vedena přes nultý pražec, který přesně oddělí základní délku aktivní části struny, a přes hmatník s pražci, které umožňují tuto délku dále přesně dělit prstokladem. V oblasti těla vede struna nad elektromagnetickými snímači a konečně je ukotvena v kobylce. Zde obvykle drží pomocí kotvícího kroužku, který zabraňuje konci struny projít úzkou dírou, kterou je zde struna provlečena. Hudební výška tónu se zde tedy ovlivňuje tloušťkou, napětím, a aktivní délkou kmitající struny. Toto bude fyzikálně odůvodněno v následujících kapitolách. [1]

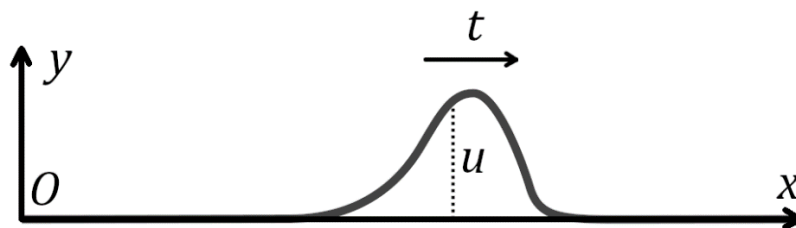
Elektromagnetické snímače fungují na principu Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Permanentní magnet ve snímači zmagnetizuje ferromagnetickou strunu nad sebou. Je-li úsek struny nad snímačem rozkmitán, vznikne časově proměnné magnetické pole a v cívice začne vznikat indukovaný elektrický proud. Snímačů je po délce struny vedle sebe obvykle řazeno více. Lze mezi nimi přepínat a měnit tak barvu výsledného tónu, která je dána polohou, případně konstrukcí jednotlivých snímačů. Tento princip bude rovněž vysvětlen později. Ze snímačů je pak signál vyveden do základní elektroniky uložené v těle kytary, sestávající obvykle z potenciometrů pro regulaci hlasitosti, kondenzátorů pro regulaci barvy tónu a páčky pro přepínání snímačů. Dále je signál odveden 3,5 mm kabelem z nástroje ven do zesilovače, kde je reprodukován jako zvuk. [1]

### 2.2 Odvození vlnové parciální diferenciální rovnice struny

V této kapitole bude popsána jedna z metod odvození parciální diferenciální rovnice vlny. Tato rovnice následně poslouží jako hlavní nástroj k popisu vlnových dějů na napjaté struně. Na začátek je vhodné učinit několik základních předpokladů a idealizací. Napjatou strunu je vhodné uvažovat jako jednorozměrné kontinuum o libovolné délce. Předpokládejme též, že vlnění se po ní šíří pouze v rovině, kde lze zavést pravouhlý souřadný systém  $Oxy$  [ $m$ ] tak, že osa  $x$  splývá se strunou v rovnovážném stavu. Struna je napínána silou  $T$  [ $N$ ] a má délkovou hustotu  $\mu$  [ $kg \cdot m^{-1}$ ].

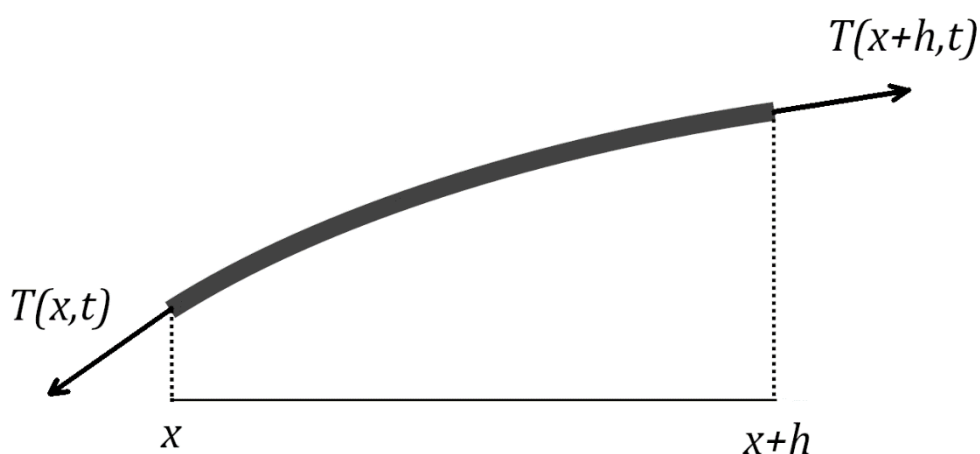
Můžeme zde očekávat dva mechanismy šíření vln – vlnění příčné (vychylování bodů ve směru kolmém na strunu, v našem případě ve směru osy  $y$ ), ale také podélné (vychylování bodů ve směru struny  $x$ ), které je důsledkem pružného chování struny. Podélné vlnění však nemá na tvorbu zvuku velký vliv – materiál umožňuje v tomto směru jen drobné výchylky oproti vlnění příčnému. Řekněme tedy, že struna je dokonale pružná a všechny její body se vychylují pouze ve směru  $y$ , čímž se zároveň výrazně zjednodušuje celé řešení. Tento předpoklad se do jisté míry kryje s požadavkem malých výchylek, který později učiníme a který mimo jiné zajišťuje, že struna se nevychyluje natolik, aby její skutečná pružnost měla velký vliv. Budeme rovněž předpokládat dokonalou ohebnost struny a dokonalou homogenitu materiálu. [2, 3]

Jelikož předpokládáme vychylování bodů pouze ve směru  $y$ , lze zavést  $u = u(x, t)$  [ $m$ ] jako neznámou funkci popisující výchylku bodu o souřadnici  $x$  v čase  $t$  [ $s$ ]. Nechme nyní strunou postupovat vlnu obecného tvaru (Obr. 2.1). Z matematického hlediska lze na Obr. 2.1 nahlížet jako na izokřivku trojrozměrného grafu  $y = u(x, t)$  v určité časové vrstvě. [2]



Obr. 2.1 Příčná vlna šířící se jednorozměrnou strunou; vytvořeno dle [2]

Dále v libovolném okamžiku zvolíme část zvlněné struny na libovolném krátkém úseku  $h$  osy  $x$  (Obr. 2.2). Ze zákona akce a reakce působí v krajních bodech tohoto segmentu tečné napínající síly dané  $T(x, t)$  [N] a  $T(x + h, t)$  [N] od „odstřižených“ částí struny. Přestože výše zmíněný předpoklad dokonale pružné struny implikuje napínající sílu konstantní, lze ji pro zatím pro obecnost ponechat proměnnou.



Obr. 2.2 Uvolněný segment struny na úseku  $h$  s reakčními silami, vytvořeno dle [2]

K tomu je již nutné zavést předpoklad dokonale ohebné struny, neboť snaha struny narovnat se by způsobila, že síly by nemusely být k segmentu v krajních bodech vždy tečné a řešení by se zkomplikovalo.

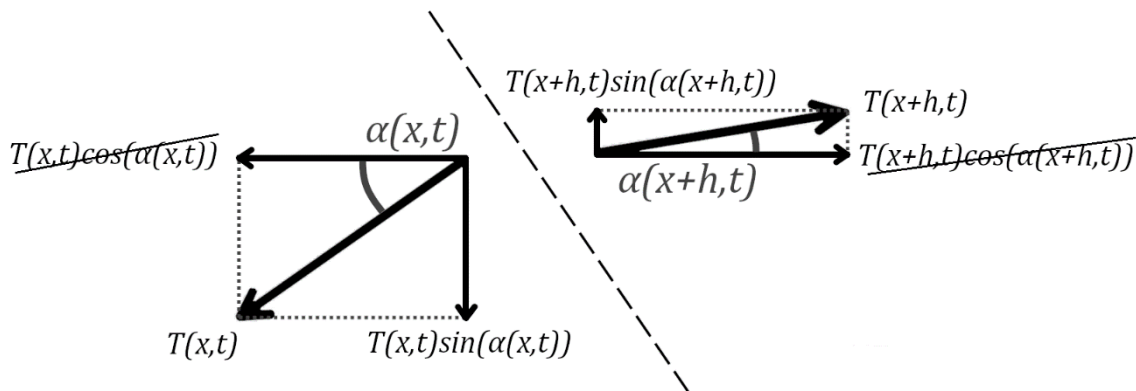
Funkce  $u(x, t)$  popisuje výchylky bodů do směru  $y$  v čase, její druhá derivace podle času tedy musí odpovídat zrychlení  $a_y(x, t)$  [ $m \cdot s^{-2}$ ] ve směru osy  $y$

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.2.1)$$

Předpokládejme, že struna je homogenní, a délková hustota  $\mu$  [ $kg \cdot m^{-1}$ ] bude tedy konstantní. Budeme-li také uvažovat, že výchylky jsou malé, můžeme délku oblouku segmentu struny aproximovat vzdáleností  $h$  na ose  $x$ , neboť struna se od osy příliš neodchýlí, a hmotnost segmentu  $m$  [ $kg$ ] následně vyjádřit jako

$$m = \mu h \quad (2.2.2)$$

Zbývá vyšetřit působení napínajících sil. Zavedením proměnného úhlu sklonu struny  $\alpha(x, t)$  [ $rad$ ] lze síly rozložit do směrů souřadnicových os  $xy$  dle Obr. 2.3.



Obr. 2.3 Rozklad sil do směrů souřadných os

Pracujeme s předpokladem, že body se vychylují pouze ve směru osy  $y$ . Z toho vyplývá, že velikosti sil působících do směru osy  $x$  se musí sobě rovnat a síly musí být opačně orientované – hmota tímto směrem pak není uváděna do pohybu a úsek struny zůstává dle předpokladu v tomto směru v klidu. Segment se tedy pohybuje ve směru osy  $y$  s celkovou silou  $T = T_y$  [N], pro kterou platí: [3]

$$T_y = T(x + h, t)\sin(\alpha(x + h, t)) - T(x, t)\sin(\alpha(x, t)) \quad (2.2.3)$$

V tomto kroku lze do rovnice zahrnout i další vnější síly, například vlastní tíhu struny nebo tlumící sílu. Tíha je však v porovnání s napínající silou zcela zanedbatelná a tlumení bude věnována kapitola 7.

Nyní můžeme na úsek struny aplikovat druhý Newtonův pohybový zákon do směru osy  $y$

$$T_y = ma_y \quad (2.2.4)$$

Dosažením (2.2.1) – (2.2.3) do Newtonova zákona (2.2.4) získáme následující neupravený tvar parciální diferenciální rovnice šíření vlny:

$$T(x + h, t)\sin(\alpha(x + h, t)) - T(x, t)\sin(\alpha(x, t)) = \mu h \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.2.5)$$

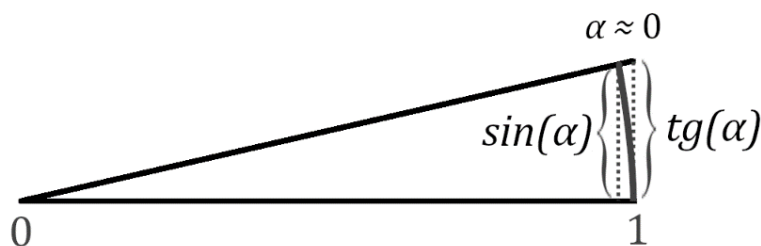
Nyní bude naší snahou rovnici dále zjednodušit. Vydělíme celou rovnici délkou  $h$  a budeme předpokládat, že  $h \rightarrow 0$ . Tím přecházíme z krátkého segmentu struny na její nekonečně malý element.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x + h, t)\sin(\alpha(x + h, t)) - T(x, t)\sin(\alpha(x, t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right)$$

Lze si všimnout, že levá strana má obecný tvar derivace funkce podle  $x$ , v tomto případě konkrétně funkce  $T(x, t)\sin(\alpha(x, t))$ . Pravá strana je vzhledem k  $h$  konstantní. Rovnici lze takto dále zjednodušit na tvar

$$\frac{\partial}{\partial x} (T(x, t)\sin(\alpha(x, t))) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Nyní opět využijeme předpokladu malých výchylek. Díky němu je tvar vlny relativně plochý a úhel sklonu  $\alpha(x, t)$  je malý. Za těchto okolností lze nahradit  $\sin(\alpha(x, t)) \approx \text{tg}(\alpha(x, t))$ , jak je patrné z výřezu jednotkové kružnice.



Obr. 2.4 Znárodnění goniometrických funkcí pro malé úhly, vytvořeno dle [4]

Nahrazení je vhodné, neboť vektory sil jsou tečné ke křivce struny a výraz  $tg(\alpha(x, t))$  tak odpovídá směrnici tečny grafu funkce  $u(x, t)$  v rovině  $xy$ , a tedy i derivaci funkce  $u(x, t)$  podle  $x$  (patrně z Obr. 2.2). Rovnici můžeme takto dále upravit na

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.2.6)$$

Na závěr můžeme opět užít předpokladu malých výchylek, případně dokonalé pružnosti struny, a napínající sílu aproximovat jako konstantu. Díky tomu ji lze vytknout před operátor derivace a získat jeden ze základních tvarů vlnové parciální diferenciální rovnice. [2, 3, 5]

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.2.7)$$

## 2.3 Rozbor vlnové rovnice a rychlost šíření vlny

Rozborem rovnice (2.2.7) nyní získáme lepší náhled do celé problematiky. Struktura rovnice umožňuje relativně snadno odhadnout možný tvar řešení  $u(x, t)$ . Druhá derivace funkce  $u(x, t)$  dle proměnné  $t$  se od druhé derivace dle  $x$  musí odlišovat pouze činitelem, který vykrátí koeficient  $\mu/T$  a zajistí rovnost levé a pravé strany. Touto úvahou lze argument funkce  $u(x, t)$  sestavit jako vnitřní funkci  $x + ct$

$$u(x, t) = u(x \pm ct); c \in \mathbb{R}^+ \quad (2.3.1)$$

neboť

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(x \pm ct)) = \frac{\partial^2 u(x \pm ct)}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u(x \pm ct)) = \frac{\partial^2 u(x \pm ct)}{\partial t^2} c^2$$

A tyto výrazy vyhovují diferenciální rovnici (2.2.7) jestliže

$$\frac{T}{\mu} = c^2 \quad (2.3.2)$$

Funkce (2.3.1) popisuje vlnu o tvaru daném vnější funkcí  $u$  šířící se strunou pro znaménko  $+$  do záporného směru osy  $x$  a pro znaménko  $-$  do kladného směru osy  $x$ . Tato funkce tedy je i předpisem vlny na obrázku (2.2.4), ze kterého celé odvození vychází.

Dále vidíme, že výraz v argumentu funkce (2.3.1) má dva členy, z nichž člen  $x$  je vzdálenost a udává se tedy v jednotkách  $[m]$ . Aby měl součet smysl, musí člen  $ct$  prvnímu členu rozměrově odpovídat.

Konstanta  $c$  tím pádem získává rozměr  $[m \cdot s^{-1}]$  a lze ji proto interpretovat jako rychlost, konkrétně rychlost šíření vlny, jak bylo popsáno v předchozím odstavci. Ke stejnému závěru bychom došli rozměrovou analýzou přímo diferenciální rovnice (2.2.7). [5]

Diferenciální rovnici šíření vlny (2.2.7) můžeme pak pomocí (2.3.2) přepsat jako

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.3.3)$$

Rovnice tedy říká, že zrychlení struny v libovolném bodě je přímo úměrné konvexnosti/konkávnosti struny v tomto bodě s koeficientem kvadrátu rychlosti šíření vlnění ve struně.

Jelikož v rovnosti (2.3.2) je délková hustota  $\mu$  definována kladně a napínající síla  $T$  nemůže být tlaková, tzn. nemůže být záporná, a ani nulová, podíl těchto veličin může být jedinečně kladný. Lze ho proto jednoznačně odmocnit a vyjádřit tak rychlost šíření vlny  $c [m \cdot s^{-1}]$  jako [2, 5]

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2.3.4)$$

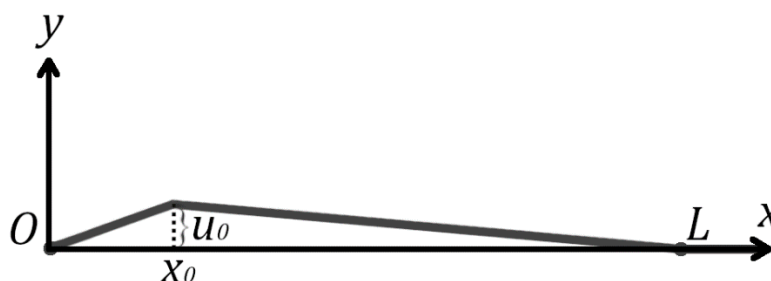
## 2.4 Zavedení počátečních a okrajových podmínek

Obecnou diferenciální rovnici (2.3.3) můžeme aplikovat na strunu kytary zavedením vhodných počátečních a okrajových podmínek. Strunou se bude v tomto případě šířit vlnění po určité délce  $L$  mezi dvěma uzly. Uzly nazýváme takové body struny, jejichž okamžitá výchylka  $u$  zůstává po celou dobu šíření vln nulová. Tyto krajní uzly mohou být určeny upevněním struny na nástroji nebo prstokladem na hmatníku. Můžeme zde zavést homogenní Dirichletovy okrajové podmínky [2]

$$u(0, t) = 0 \qquad u(L, t) = 0 \quad (2.4.1)$$

Zde se opět dopouštíme idealizace oproti skutečným nástrojům, neboť reálná ukotvení struny nejsou absolutně tuhá a přenášejí vlnění do těla nástroje, které se rovněž podílí na charakteru finálního tónu, zvláště u akustických nástrojů. Tyto jevy však lze již těžko analyticky obsáhnout.

Na počátku děje je na strunu zahráno. V terminologii klasické kytary se toto nazývá úder. Struna je uvedena do počátečního nerovnovážného stavu popsaného  $u(x, 0)$ , ze kterého je následně v čase  $t = 0$  uvolněna, jak z ní prst či trsátka sklouzne (vzhledem k délce struny můžeme zavést předpoklad, že se struny dotýkáme v jediném bodě). Takový stav může vypadat takto:



Obr. 2.5 Graf počáteční podmínky pro úder na kytaru, vytvořeno dle [6]

kde  $x_0 \in (0, L)$  je poloha úderu (u kytary obvykle okolo  $0,2L$ ) a  $u_0$  je počáteční výchylka v tomto místě (zpravidla velmi malá). Je patrné, že tato počáteční podmínka bude funkcí po částech lineární.

Zavedeme pro ni označení  $v(x)$  a nalezneme její analytické vyjádření. Obě části budou ležet na přímkách o obecných předpisech

$$y_1 = ax + b \quad (2.4.2)$$

$$y_2 = cx + d \quad (2.4.3)$$

Přímka (2.4.2) přitom prochází uzlem v počátku  $[0; 0]$  a bodem  $[x_0, u_0]$ . Po dosazení do předpisu a jeho úpravě lze jednoznačně určit parametry  $a$  a  $b$ .

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0 \\ u_0 &= ax_0 \Rightarrow a = \frac{x_0}{u_0} \end{aligned}$$

Obdobně přímka (2.4.3) prochází uzlem  $[L, 0]$  a také bodem  $[x_0, u_0]$ . Dosazením nalezneme také parametry  $c$  a  $d$ .

$$\begin{aligned} 0 &= cL + d \Rightarrow d = -cL \\ u_0 &= cx_0 - cL \Rightarrow c = \frac{u_0}{x_0 - L} \\ d &= -\frac{u_0}{x_0 - L}L \end{aligned}$$

Přímky definující tvar struny tedy budou mít tvar

$$y_1 = \frac{x_0}{u_0}x \quad (2.4.4)$$

$$y_2 = \frac{u_0}{x_0 - L}x - \frac{u_0}{x_0 - L}L = \frac{u_0}{L - x_0}(L - x) \quad (2.4.5)$$

Tyto přímky nyní omezíme na patřičných intervalech a uvedeme do souhrnného předpisu po částech definované počáteční podmínky ve tvaru

$$u(x, 0) = v(x) = \begin{cases} \frac{u_0}{x_0}x & ; \quad x \in \langle 0, x_0 \rangle \\ \frac{u_0}{L - x_0}(L - x) & ; \quad x \in (x_0, L) \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Výhodou je, že při dané délce struny stačí k jednoznačnému určení tvaru funkce pouze dvojice parametrů  $[x_0, u_0]$  odpovídající souřadnici místa úderu a výchylce. [6, 7]

Druhou počáteční podmínkou je předpis rychlostí bodů struny v čase  $t = 0$ . Rychlost je popsána první derivací okamžité výchylky  $u$  podle času a u kytary ji lze z charakteru úderu považovat po celé délce struny za nulovou (struna je pouze vychýlena a puštěna), a tedy

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (2.4.7)$$

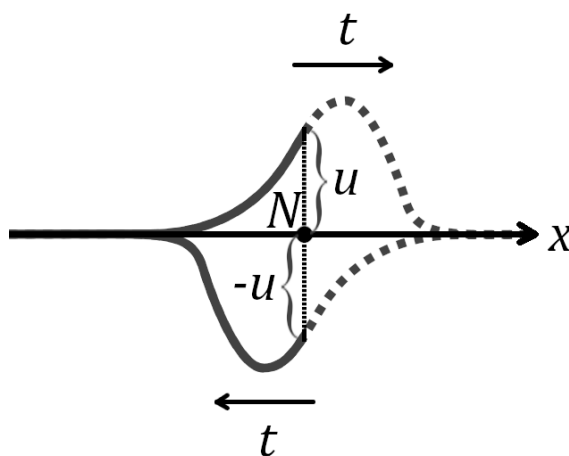
Exaktní řešení diferenciální rovnice (2.3.3) s ohledem na okrajové podmínky (2.4.1) a počáteční podmínky (2.4.6) a (2.4.7) nám umožní určit polohu libovolného bodu v libovolném čase, a tak kompletně zmapovat pohyb struny. [7]



## 2.5 Intuitivní odvození principu stacionárního vlnění a vztahu pro výpočet frekvence

Zajímá-li nás pouze vztah pro výpočet frekvencí vlnící se struny, není nutné diferencíální rovnici z předchozích kapitol přímo řešit. Lze budovat čistě na pečlivých představách o dějích, které zde nastávají. Vztah tak získáme relativně lehce, nebude ovšem stát na matematických základech.

Představme si, že vlna z Obr. 2.1 šířící se strunou dorazí do krajního bodu N, kde platí  $u(L, t) = 0$  a jedná se tedy o uzel. V praxi lze vyzorovat, že vlna se při vstupu do uzlu odrazí zpět s opačnou fází („převrácená“). Pro odůvodnění tohoto jevu můžeme uzel odebrat (zachovat tak původní tvar vstupující vlny) a jeho působení nahradit reakcí – opačně orientovanou výchylkou, než jaká do bodu právě vstupuje, o stejné velikosti. Tato výchylka je na Obr. 2.6 znázorněna jako  $-u$  a zajišťuje, že celková výchylka zůstává v místě uzlu vždy nulová.



Obr. 2.6 Vlna vcházející do uzlu N, jehož účinek je nahrazen převrácenou vlnou; vytvořeno dle [4]

Tyto reakce na postupně vstupující výchylky se přitom stávají zdrojem nové vlny, která kopíruje tvar té původní, ale je převrácena podle obou os a postupuje opačným směrem. Složení těchto vln pak odpovídá reálnému tvaru struny v okolí uzlu. Proces se znovu opakuje, když nové vlnění vchází do uzlu na druhém okraji struny (neuvažujeme energetické ztráty, které způsobují nedokonalý odraz vlny a výraznější změny jejího tvaru). [4, 8]

Všechna tato vlnění spolu interferují a principem superpozice se skládají. Díky tomu, že proti sobě postupující vlny mají mnoho identických parametrů, předně velikost rychlosti šíření vlny  $c$ , vzniká takzvané stacionární vlnění, které je charakteristické tím, že vlny již nadále nevypadají, že strunou postupují, ale struna jakoby pouze kmitala. Stacionární vlnění lze přesněji definovat tak, že maximální výchylka  $u_{max}$  pro kterékoli zvolené  $x$  je konstantní v čase  $t$ . Jak stacionární vlnění vzniká lze výhodně ukázat na níže vybraném harmonickém vlnění šířícím se do kladného směru osy  $x$

$$u_1(x, t) = A \sin(k(x - ct)) \quad (2.5.1)$$

Kde  $A$  [m] je amplituda,  $k = 2\pi/\lambda$  [ $m^{-1}$ ] je vlnčet a  $c$  [ $m \cdot s^{-1}$ ] je rychlost šíření vlny (můžeme si všimnout, že funkce odpovídá předpisu (2.3.1) a vyhovuje tedy diferencíální rovnici vlny). Ze symetrických vlastností funkce sinus lze předpokládat, že vlnění vracející se z uzlu bude mít po překlopení ve směru  $x$  i  $y$  identický průběh jako  $u_1$  s rozdílem, že se bude šířit opačným směrem.

$$u_2(x, t) = A \sin(k(x + ct)) \quad (2.5.2)$$

Okamžité výchylky  $u_1$  a  $u_2$  se superponují

$$u(x, t) = u_1 + u_2 = A\sin(k(x - ct)) + A\sin(k(x + ct)) \quad (2.5.3)$$

Na tento tvar lze aplikovat goniometrickou identitu

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (2.5.4)$$

Dosadíme, postupně zjednodušíme. Vzhledem k tomu, že cosinus je sudá funkce, lze odstranit znaménko minus v argumentu

$$u(x, t) = 2A\sin\left(\frac{k(x - ct) + k(x + ct)}{2}\right)\cos\left(\frac{k(x - ct) - k(x + ct)}{2}\right)$$

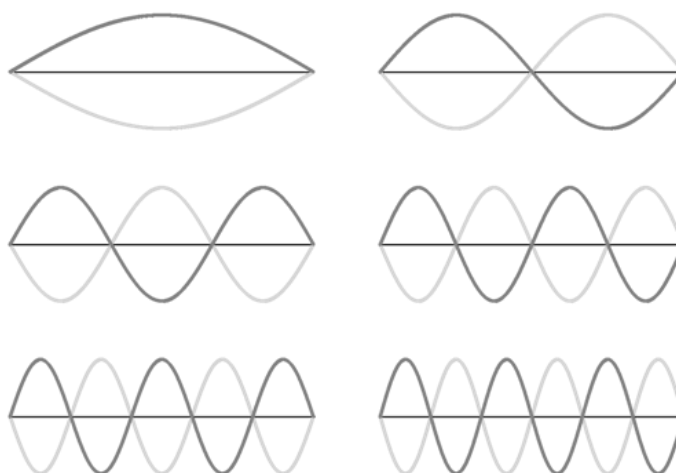
$$u(x, t) = 2A\sin\left(\frac{2kx + kct - kct}{2}\right)\cos\left(\frac{-2kct + kx - kx}{2}\right)$$

$$u(x, t) = 2A\sin(kx)\cos(kct) \quad (2.5.5)$$

Z rovnice (2.5.5) je patrné, že výsledek má část závislou jen na  $x$  a část závislou pouze na  $t$ . Zvolíme-li libovolný bod  $x = x_1$ , výraz  $2A\sin(kx_1)$  se stane konstantní amplitudou kmitavého pohybu hmotného bodu v čase  $t$ , což odpovídá naší definici stacionárního vlnění. [4]

Předpokládejme, že obdobně se důsledkem odrazů v krajních uzlech budou chovat i vlnění jiných, obecnějších tvarů, tedy nejen harmonické vlnění (2.5.1). Toto tvrzení lze podpořit tím, že neharmonické funkce lze často Fourierovým rozkladem zapsat jako nekonečnou sumu harmonických složek (je-li funkce řešením parciální diferenciální rovnice vlny, pak je dost „rozumná“, aby mohla být ekvivalentně nahrazena Fourierovou řadou). Těto metody bude užito později.

Pokud jsme tedy odůvodnili, že tento jev nastává vždy, pokusme se nyní vytvořit jakýsi seznam možností, jak se může struna pohybovat, aby maximální výchylky zůstávaly ve všech bodech konstantní a jednalo se tak o předpokládané stacionární vlnění. Výsledkem jsou schémata na Obr. 2.7. Mezi uzly vzdálenými  $L$  může vzniknout pouze půlvlna, vlna s uzlem uprostřed, vlna a půl se dvěma uzly, a tak dále.



Obr. 2.7 Základní tvary harmonických stacionárních vlnění, vytvořeno dle [4]

Z obrázku můžeme vyčíst přímou závislost mezi délkou kmitající struny  $L$  [m] a možnými vlnovými délkami  $\lambda_n$  [m] zcela bez nutnosti znalosti diferenciální rovnice (2.3.3)

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.5.6)$$

Rovnici můžeme pomocí elementárního vztahu  $\lambda = c/f$  upravit a vyjádřit závislost frekvencí na vzdálenosti  $L$  a rychlosti šíření vln  $c$  [ $m \cdot s^{-1}$ ]

$$f_n = \frac{n}{2L} c \quad (2.5.7)$$

Nyní je již třeba vrátit se ke struktuře diferenciální rovnice (2.3.3), ze které jsme získali vztah pro rychlost šíření vlny (2.3.4) a ten dosadit (nutno podotknout, že také  $c$  lze odvodit elementárněji, i když podobným principem)

$$f_n(L, T, \mu) = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.5.8)$$

Funkce (2.5.8) popisuje námi hledanou závislost frekvence  $f_n$  [Hz] na proměnných  $L$  [m] – délce kmitající struny,  $T$  [N] – síle napínající strunu a  $\mu$  [ $kg \cdot m^{-1}$ ] – délkové hustotě struny. Parametr  $n$  rozlišuje pořadí jednotlivých vznikajících frekvencí. Stále však nic nevíme o poměrném zastoupení těchto dílčích frekvencí ve výsledném vlnění. [4, 9]

Předtím, než se budeme tímto vztahem a jeho významem dále zabývat, bylo by vhodné prozkoumat jeho roli v řešení parciální diferenciální rovnice vlny. Toho dosáhneme nalezením exaktního řešení diferenciální rovnice vlny s počátečními a okrajovými podmínkami z předchozí kapitoly.

## 2.6 Analytické řešení úlohy pro kytarovou strunu

Nyní analyticky vyřešíme úlohu z kapitoly 2.4 za užití metody separace proměnných podle [2]. Zde jsou pro přehlednost znovu v plném znění uvedeny rovnice (2.3.3), (2.4.1), (2.4.6), (2.4.7). Významy jednotlivých parametrů a podmínek jsou rozebrány v kapitole 2.4.

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad u(0, t) = u(L, t) = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{Parametry:} \\ L \in \mathbb{R}^+; u_0 \in \mathbb{R}; x_0 \in \langle 0, L \rangle; \\ c \in \mathbb{R}^+ \end{array} \quad u(x, 0) = v(x) = \begin{cases} \frac{u_0}{x_0} x & ; x \in \langle 0, x_0 \rangle \\ \frac{u_0}{L - x_0} (L - x) & ; x \in (x_0, L) \end{cases}$$

$$x \in \langle 0, L \rangle; t > 0 \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$$

V předchozí kapitole jsem vyslovil domněnku, že na struně mezi dvěma uzly bude vznikat stacionární vlnění. Předpokládejme tedy, že níže uvedená funkce (2.6.1), jež je zobecněním funkce (2.5.5), řeší parciální diferenciální rovnici (2.3.3)

$$u^*(x, t) = U(x)T(t) \quad (2.6.1)$$

Dosadíme do (2.3.3) a vhodně upravíme

$$U(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} T(t)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{T(t)} = \frac{\partial^2 U(x)}{U(x)} \quad (2.6.2)$$

Rovnici jsme tak převedli do tvaru rovnosti dvou nezávislých funkcí různých proměnných.

$$f(t) = g(x) \quad (2.6.3)$$

Levá a pravá strana rovnice si mohou být rovny pouze v případě, že  $f(t)$  a  $g(x)$  jsou konstantní funkce (zvolíme-li  $x = x_0$ , musí se pravá strana  $g(x_0)$  rovnat levé straně  $f(t)$  pro všechna  $t$ , a naopak zvolíme-li  $t = t_0$ , musí se levá strana  $f(t_0)$  rovnat pravé straně  $g(x)$  pro všechna  $x$ . Toto může nastat pouze v případě, jsou-li obě funkce konstantní.) Platí tedy

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{T(t)} = \frac{\partial^2 U(x)}{U(x)} = \gamma; \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (2.6.4)$$

kde  $\gamma$  se nazývá separační konstanta. Parciální diferenciální rovnici lze pomocí ní rozdělit na dvě obyčejné diferenciální rovnice, které lze zvlášť snáze vyřešit

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = c^2 \gamma T(t) \quad (2.6.5) \quad \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = \gamma U(x) \quad (2.6.6)$$

Analyzujeme nejprve diferenciální rovnici (2.6.6), neboť s jejími okrajovými podmínkami se bude snáze pracovat. Obvyklým postupem určíme její charakteristickou rovnici

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} - \gamma U(x) = 0$$

$$\lambda^2 - \gamma = 0 \quad (2.6.7)$$

Kořeny charakteristické rovnice a tedy i tvar řešení  $U(x)$  závisí na hodnotě separační konstanty  $\gamma$ . Mohou nastat tři případy ( $\gamma < 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\gamma > 0$ ), které musíme řešit každý zvlášť. Pokud  $\gamma$  je nula

$$\gamma = 0: \quad \lambda = 0$$

Obecné řešení v tomto případě bude mít lineární tvar

$$U(x) = C_1 + C_2 x \quad (2.6.8)$$

V případě, že  $\gamma$  je kladná, jsou kořeny charakteristické rovnice reálná čísla

$$\gamma > 0: \quad \lambda = \pm \sqrt{\gamma}$$

Obecné řešení pak nabyde tvaru

$$U(x) = C_3 e^{-\sqrt{\gamma}x} + C_4 e^{\sqrt{\gamma}x} \quad (2.6.9)$$

A když  $\gamma$  je záporná, jsou kořeny imaginární

$$\gamma < 0: \quad \lambda = \pm\sqrt{-\gamma}i$$

A obecné řešení bude vypadat

$$U(x) = C_5 \sin(\sqrt{-\gamma}x) + C_6 \cos(\sqrt{-\gamma}x) \quad (2.6.10)$$

Kde  $C_1, C_2, \dots, C_6 \in \mathbb{R}$ . [10]

Nyní zbývá určit konstanty pro všechny varianty obecných řešení z okrajových podmínek s ohledem na hodnotu  $\gamma$ . Začneme popořadě opět nejjednodušším případem (2.6.8), kdy  $\gamma = 0$ :

$$u(0, t) = U(0) = 0; \quad C_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$u(L, t) = U(L) = 0; \quad 0 + C_2 L = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Pro  $\gamma = 0$  tedy získáváme pouze triviální řešení  $U(x) = 0$ , které je z hlediska našeho problému nevýznamné.

Pokračujme případem (2.6.9), kdy  $\gamma > 0$

$$u(0, t) = U(0) = 0; \quad 0 = C_3 e^{-\sqrt{\gamma} \cdot 0} + C_4 e^{\sqrt{\gamma} \cdot 0} = C_3 + C_4 \Rightarrow C_3 = -C_4$$

$$u(L, t) = U(L) = 0; \quad 0 = C_3 e^{-\sqrt{\gamma}L} + C_4 e^{\sqrt{\gamma}L} = C_3(e^{-\sqrt{\gamma}L} - e^{\sqrt{\gamma}L}) \\ \Rightarrow C_3 = -C_4 = 0$$

Výraz  $e^{-\sqrt{\gamma}L} - e^{\sqrt{\gamma}L}$  by totiž mohl být roven nule pouze v případě, že  $\gamma = 0$ , což nemůže nastat, jelikož v tomto případě je  $\gamma$  vymezena jako kladná. Nalézáme tedy pouze další nepřínosné triviální řešení.

Naposledy vyřešíme případ (2.6.10), tedy  $\gamma < 0$

$$u(0, t) = U(0) = 0; \quad 0 = C_5 \sin(\sqrt{-\gamma} \cdot 0) + C_6 \cos(\sqrt{-\gamma} \cdot 0) \Rightarrow C_6 = 0$$

$$u(L, t) = U(L) = 0; \quad 0 = C_5 \sin(\sqrt{-\gamma}L) \quad (2.6.11)$$

Z rovnice (2.6.11) vidíme, že zanedbáme-li další triviální řešení  $C_5 = 0$ , výraz  $\sin(\sqrt{-\gamma}L)$  bude roven nule a tím splňovat rovnost pro celou nekonečnou posloupnost hodnot, a to

$$\sqrt{-\gamma} = \frac{\pi}{L}; \frac{2\pi}{L}; \dots; \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.6.12)$$

Nalezli jsme tedy posloupnost netriviálních obecných řešení obyčejné diferenciální rovnice (2.6.6) vycházejících z tvaru (2.6.10), kde každému z nich bude připadat vlastní konstanta  $K_n^I \in \mathbb{R}$ ;  $n \in \mathbb{N}$

(pro přehlednost budeme od sebe tyto posloupnosti konstant rozlišovat římskou číslicí v horním indexu).

$$U_n(x) = K_n^I \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.6.13)$$

Vyřešme nyní druhou z obyčejných diferenciálních rovnic, rovnici (2.6.5), za stejného předpokladu, kdy platí (2.6.13), tedy pro  $\gamma < 0$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - c^2 \gamma T(t) = 0$$

$$\lambda^2 - c^2 \gamma = 0 \quad (2.6.14)$$

Za užití (2.6.12) získáváme imaginární kořeny charakteristické rovnice

$$\gamma < 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{-\gamma} ci = \pm \frac{n\pi c}{L} i \quad (2.6.15)$$

Obecná řešení pak nalzááme opět ve tvaru posloupnosti. Obdobně jako v případě (2.6.13) má každé své dvě konstanty  $K_n^{II}; K_n^{III} \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$

$$T_n(t) = K_n^{II} \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + K_n^{III} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.6.16)$$

Nyní se můžeme vrátit k předpokládanému tvaru řešení naší rovnice (2.6.1), funkce  $U_n(x)$  a  $T_n(t)$  spolu vynásobit a nalézt tak posloupnost obecných řešení původní vlnové rovnice (2.3.3)

$$u_n^*(x, t) = K_n^I \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( K_n^{II} \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + K_n^{III} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right)$$

Tvar dále roznásobíme a součiny posloupností konstant označíme pro přehlednost jako nové posloupnosti  $K_n^{IV}$  a  $K_n^V$

$$u_n^*(x, t) = K_n^{IV} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + K_n^V \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad (2.6.17)$$

Vlnová rovnice je lineární parciální diferenciální rovnicí, což znamená, že sečteme-li všechny členy posloupnosti řešení (2.6.17), získáme principem superpozice nové, obecnější řešení.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( K_n^{IV} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + K_n^V \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right) \quad (2.6.18)$$

Nalezli jsme tak obecné řešení naší parciální diferenciální rovnice. [2, 7, 10]

Dále se budeme zabývat nalezením posloupností integračních konstant  $K_n^{IV}$  a  $K_n^V$ . Učiníme tak z dosud nevyužitých počátečních podmínek (2.4.6) a (2.4.7) za užití Fourierovy transformace. Vezměme nejprve

podmínku v jednodušším tvaru  $\partial u(x, 0)/\partial t = 0$ , pro kterou obecné řešení (2.6.18) derivujeme podle  $t$ :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( K_n^{IV} \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) - K_n^V \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right)$$

Dosadíme počáteční podmínku (2.4.7) a opět pro zjednodušení konstanty přeznačíme na  $K_n^{VI}$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{IV} \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{VI} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \quad (2.6.19)$$

Využitím počáteční podmínky (2.4.7) vzešla v čase  $t = 0$  z výrazu přirozeně Fourierova řada pro lichou funkci proměnné  $x$ , která je položena rovna nule. Přestože lze již nyní odhadnout, že konstanty  $K_n^{VI}$  vyjdou z tohoto nulové, přistupme k formálnímu řešení. Na pravou stranu lze nahlížet jako na funkci  $f(x) = 0$ . Tato funkce je mimo jiné lichá periodická funkce s periodou  $P = 2L$  a můžeme ji do Fourierovy řady rozvinout také, a touto řadou ji pak na původním intervalu ekvivalentně nahradit.

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{VI} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.6.20)$$

Tím nalezneme tvar konstant  $K_n^{VI}$  podle obecného vztahu pro výpočet posloupnosti koeficientů Fourierovy řady

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.6.21)$$

Což je v tomto případě triviální, jelikož  $f(x) = 0$ , a tedy

$$K_n^{VI} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L 0 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0 \Rightarrow K_n^{IV} = 0 \quad (2.6.22)$$

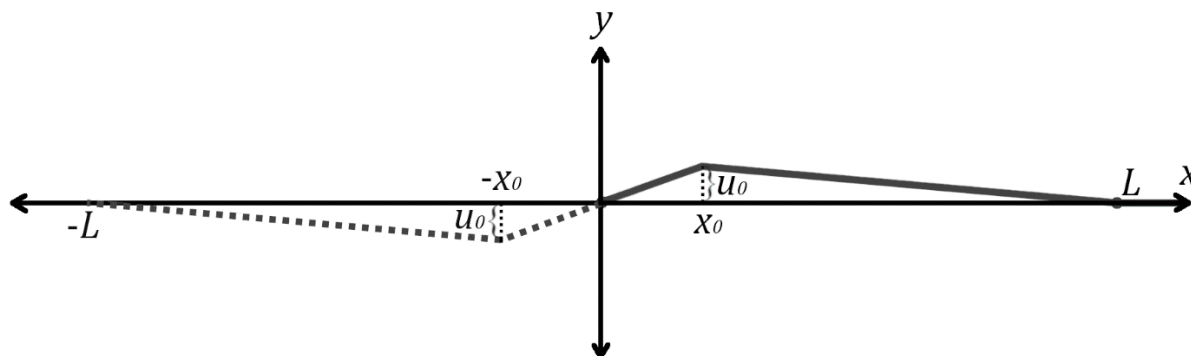
Člen tedy mizí a obecné řešení rovnice se zjednoduší na následující tvar [11]

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^V \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad (2.6.23)$$

Na závěr využijeme druhou počáteční podmínku (2.6.2) a vyřešíme ji analogicky

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^V \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = v(x) \quad (2.6.24)$$

Získáme opět tvar Fourierovy řady pro lichou funkci proměnné  $x$ . Tentokrát je však v rovnosti s nenulovou funkcí  $v(x)$  popisující výchozí stav struny, čili řešení již triviální nebude. Nejprve je třeba rozvinout  $v(x)$  jako lichou funkci  $v_p(x)$  s periodou  $p = \langle -L, L \rangle$ .



Obr. 2.8 Počáteční podmínka rozvinuta v lichou periodickou funkci (vykreslena jedna perioda)

Analytický předpis periody funkce  $v_p(x)$  je nalezen analogicky postupu v kapitole 2.4. Dále určíme její sinovou Fourierovu řadu a tou ji opět ekvivalentně nahradíme na původním intervalu  $\langle 0, L \rangle$ . Získáme tak

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^V \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = v_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.6.25)$$

Pro posloupnost konstant  $K_n^V$  tedy platí podle vzorce (2.6.21)

$$K_n^V = \frac{1}{L} \int_{-L}^L v_p(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (2.6.26)$$

Postup integrace je pro svou rozsáhlost podrobně popsán v příloze I. Po integraci jsme našli poslední zbývající posloupnost konstant  $K_n^V$ , kterou dosadíme do obecného řešení a přenecháme jí pro přehlednost konvenční označení posloupnosti koeficientů Fourierovy řady  $b_n$  [11]

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right); \quad (2.6.27)$$

$$b_n = \frac{2u_0 L^2}{x_0(L-x_0)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)$$

Tato vlnová funkce je exaktním řešením vlnové parciální diferenciální rovnice včetně zvolených počátečních a okrajových podmínek popisujících strunu kytary poté, co je na ni zahráno. [2, 7]

## 2.7 Rozbor řešení úlohy a ověření předpokládaných principů

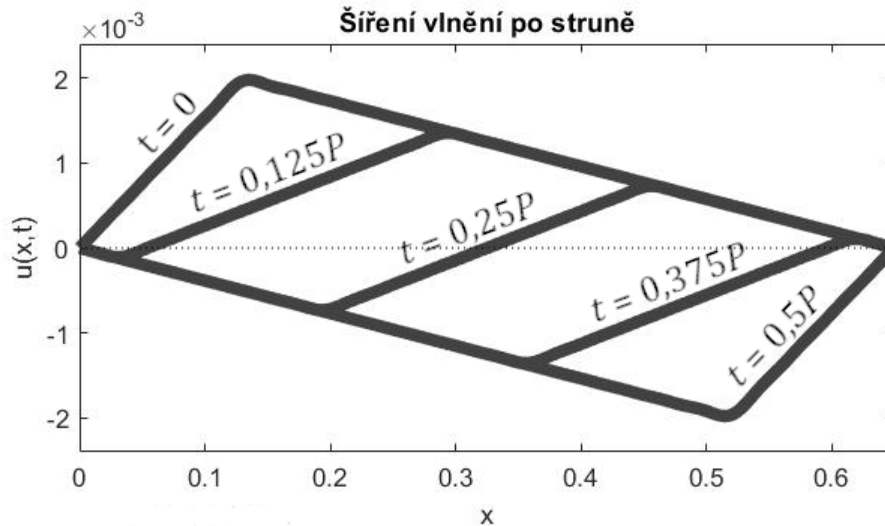
Funkci (2.6.27) můžeme názorně zobrazit jako řezy jejím trojrozměrným grafem v několika časových vrstvách. Křivky pak kopírují tvary struny v daných okamžicích. Pro ilustraci byly zvoleny vstupní parametry odpovídající reálné kytarové struně (hornímu E) dle [12] s počáteční podmínkou odpovídající přibližně tvaru počáteční podmínky užitá v kapitole 4, tedy

$$L = 0,65 \text{ m}; T = 56,4 \text{ N}; \mu = 3,09 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \quad (2.7.1)$$

$$x_0 = 0,13 \text{ m}; u_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Zmapována byla polovina periody  $P$  v pěti vrstvách a pro vykreslení bylo užito prvních 40 členů Fourierovy řady. Struna se podle našeho řešení chová po rozeznění takto



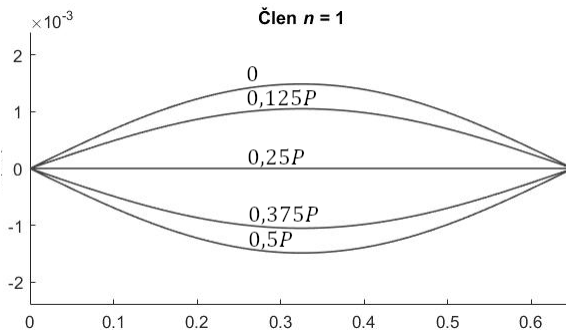


Obr. 2.9 Graf řešení vlnové rovnice pro kytarovou strunu s konkrétními hodnotami (jednotky os jsou v m)

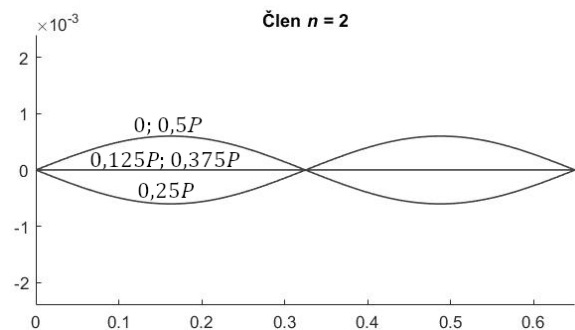
Toto vlnění se zřejmě stacionárně nechová. Podíváme-li se však na jednotlivé členy řady, jež naše řešení (2.6.27) tvoří, mají tvar

$$u_n^*(x, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \quad (2.7.2)$$

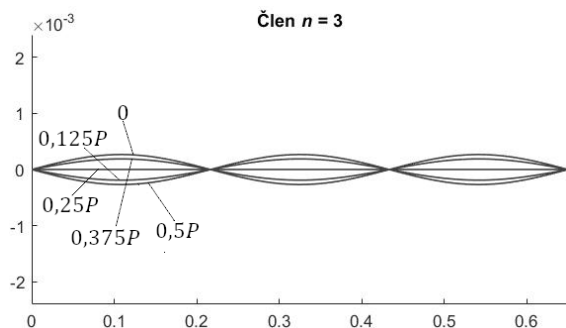
Jestliže zobrazíme první čtyři členy, uvidíme, že každý člen již řady skutečně představuje stacionární vlnění, odpovídající našemu předpokladu z Obr. 2.7. Tato stacionární vlnění se složí ve výsledný tvar  $u(x, t)$



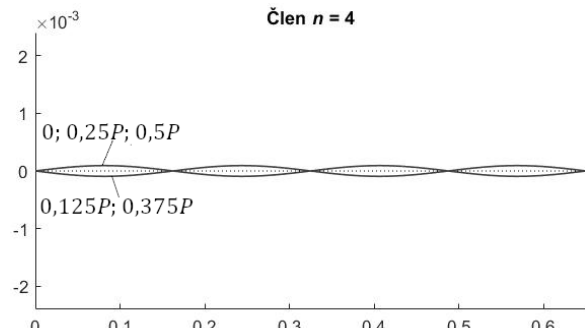
Obr. 2.10



Obr. 2.11



Obr. 2.12



Obr. 2.13

Průběhy jsou zobrazeny stejným způsobem a ve stejných souřadnicích jako celkový tvar na Obr. 2.9, se stejnými vstupními parametry (2.7.1). Grafy se bohužel v této fázi stávají poněkud nepřehlednými. Jednotlivé časové vrstvy se kryjí a vývoj v čase není na první pohled zřejmý. Pro lepší ilustraci poslouží aplikace vyvinutá v praktické části.

Že se skutečně jedná o stacionární vlnění můžeme ukázat i matematicky, podobně jako u příkladu funkce (2.5.5). Zvolíme-li libovolný bod  $x = x_1$ , výraz  $b_n \sin(n\pi x_1/L)$  se stane konstantní amplitudou harmonického kmitavého pohybu hmotného bodu o souřadnici  $x_1$ . [3]

Kterýkoli zvolený bod pak bude kmitat s úhlovou rychlostí  $\omega_n [s^{-1}]$ , která má v argumentu cosinu tvar

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad (2.7.3)$$

Po dosazení  $\omega = 2\pi f$  a úpravě získáme vztah

$$f_n = \frac{n}{2L} c \quad (2.7.4)$$

Po dosazení (2.3.4) za  $c$  získáváme opět vztah (2.5.8) [3]

$$f_n(L, T, \mu) = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}; \quad n \in \mathbb{N}$$

Je tak určena jeho skutečná role v naší úloze. Ze vzorce (2.6.27) plynou nyní navíc nové důležité informace o velikostech výchylek jednotlivých složek vlnění, ke kterým frekvence korespondují.

$$b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \frac{2u_0 L^2}{x_0(L-x_0)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_0\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right); \quad (2.7.5)$$

Berme zatím v potaz pouze maximální výchylku  $b_n$  každé z prostorových vln, vycházející z počáteční podmínky (položíme  $\sin(n\pi x/L) = 1$ ). Nejvyšší maximální výchylku získáme ve složce  $n = 1$  (Obr. 2.10). Tato složka je nejvýznamnější a nazývá se fundamentální, stejně jako její vlnová délka  $\lambda_1$  či frekvence  $f_1$ . Maximální výchylky zbylých členů  $n \geq 2$  mají tendenci klesat podle  $1/n^2$ , ale toto může být výrazně měněno členem  $\sin(n\pi x_0/L)$ , viz dále. Tyto složky a s nimi spojené veličiny nazýváme vyšší harmonické (např. Obr. 2.11, Obr. 2.12 a Obr. 2.13). [3]

Z členu  $\sin(n\pi x/L)$  dále vidíme, že uzly – body s nulovou výchylkou v čase, můžeme v některých složkách nalézt i uvnitř struny, nejen na okrajích. Vyřešíme tedy  $\sin(n\pi x/L) = 0$ . To platí v případě, že

$$\frac{n\pi}{L} x = k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k}{n} L \quad (2.7.6)$$

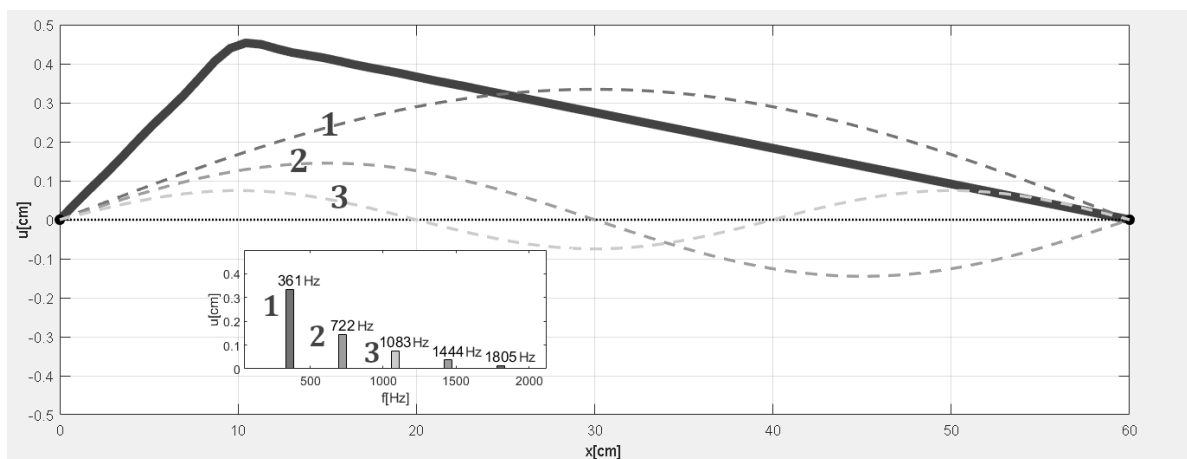
Tuto jednoduchou rovnici můžeme nyní na intervalu  $x \in \langle 0, L \rangle$  řešit pro jednotlivé složky  $n = 1, 2, 3, \dots$ , jak je demonstrováno v následující tabulce:

Tabulka 1 Určení poloh uzlů stacionárních vlnění různých frekvencí

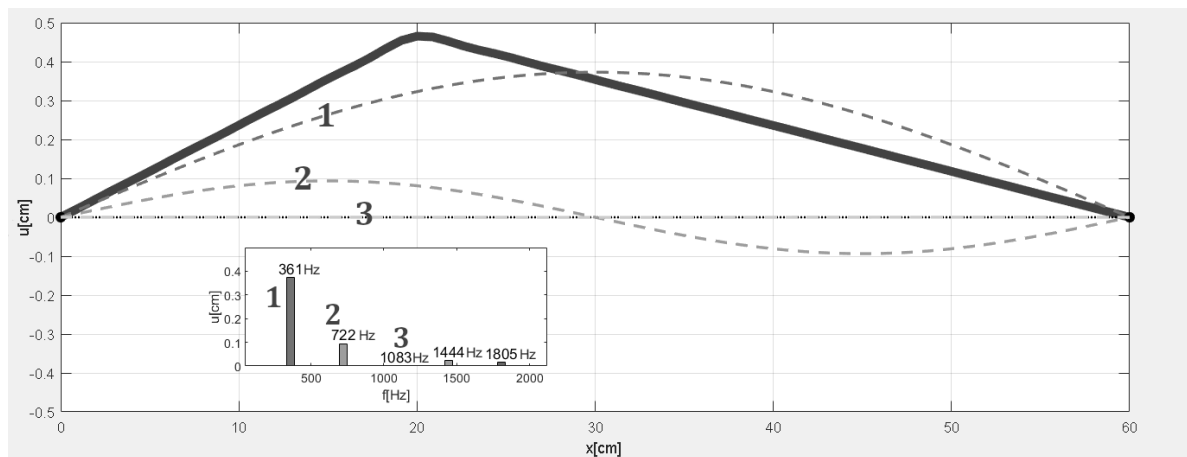
$n = 1:$	$x = kL$	$k_1 = 0 \Rightarrow b_{11} = 0$ $k_2 = 1 \Rightarrow b_{12} = L$
$n = 2:$	$x = \frac{k}{2}L$	$k_1 = 0 \Rightarrow b_{21} = 0$ $k_2 = 1 \Rightarrow b_{22} = L/2$ $k_3 = 2 \Rightarrow b_{23} = L$
$n = 3:$	$x = \frac{k}{3}L$	$k_1 = 0 \Rightarrow b_{31} = 0$ $k_2 = 1 \Rightarrow b_{32} = L/3$ $k_3 = 2 \Rightarrow b_{33} = 2L/3$ $k_4 = 3 \Rightarrow b_{34} = L$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Je vidět, že fundamentální složka má uzly dva, a to v krajních bodech. V druhé složce již přibude uzel uprostřed délky  $L$ , třetí bude mít uzly v obou třetinách délky  $L$ , atd.  $n$ -tému stacionárnímu vlnění bude náležet počet uzlů  $N = n + 1$ .

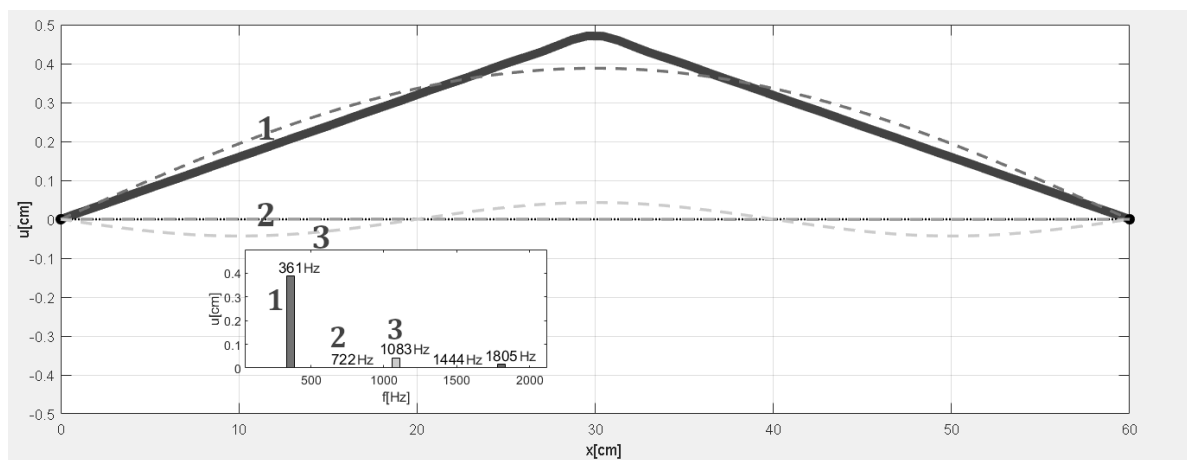
Jelikož v rovnici (2.7.5) je zastoupen i velice podobný člen  $\sin(n\pi x_0/L)$ , závislý na parametru  $x_0$  počáteční podmínky, bude-li na strunu zahráno v souřadnici uzlu (tedy zvoleno  $x_0 = b_{ni}$ ), pak složky, kterým tento uzel náleží, budou eliminovány. Složka téměř mizí i v případě, kdy  $x_0$  náleží do dostatečně blízkého okolí odpovídajícího uzlu. Princip je zjednodušeně demonstrován na třech různých tvarech počáteční podmínky a korespondujících frekvenčních spektrech vzniklých vlnění (vložené grafy závislosti maximální výchylky na frekvenci). Vykresleno je pro ilustraci několik prvních složek vlnění a jejich pořadí je přiřazeno velkými číslicemi. [6]



Obr. 2.14 Zastoupení harmonických frekvencí, je-li na strunu zahráno přibližně v jedné šestině její délky



Obr. 2.15 Zastoupení harmonických frekvencí, je-li na strunu zahráno přibližně v jedné třetině její délky



Obr. 2.16 Zastoupení harmonických frekvencí, je-li na strunu zahráno přibližně v polovině její délky

Na Obr. 2.15 bylo zvoleno  $x_0 \approx L/3$ , což odpovídá dle tabulky 1 poloze uzlu složky  $n = 3$ . Ze spektrogramu vidíme, že v důsledku toho tato složka ve výsledném vlnění téměř vůbec není zastoupena. Z výše uvedených pozorování plyne, že frekvenční spektrum, a tedy i výsledný zvuk struny (konkrétně barva tónu) je významně ovlivněn místem, kde je na ní zahráno, což odpovídá realitě. Pro vytvoření spektrogramu je užito akustické interpretace popsané v kapitole 2.10, a tedy vztahu (2.10.1). Grafy byly vytvořeny aplikací vyvinutou v části 3.

Frekvence těchto stacionárních vlnění jsou od sebe vzdáleny o hudební intervaly, které jsou lidskému vnímání příjemné. Mezi fundamentální frekvencí  $f_1$  a první harmonickou frekvencí  $f_2$  je interval oktávy, mezi  $f_2$  a  $f_3$  je interval čisté kvinty, mezi  $f_3$  a  $f_4$  čisté kvarty, a tak dále. Frekvence takto tvoří základní intervaly v hudební teorii. Prvních několik slyšitelných frekvencí těchto stacionárních vlnění vytváří hudební tón. Vzájemný poměr jejich amplitud je zodpovědný za barvu tónu. [13]

## 2.8 Zahrnutí vlivu tlumení a řešení úlohy s tlumením

Dosavadní model opomíjí jeden podstatný fakt. Struna po rozeznění postupně ztrácí energii do ní vloženou a navrácí se zpět do rovnovážného stavu. Tyto ztráty je obtížné přesně modelovat, neboť jsou různého původu (neideální uložení struny, odpor proti ohybu, odpor prostředí ...). V další části zohledníme alespoň obecné tlumení lineární. Téměř veškeré postupy aplikované v této kapitole blíže sledují předchozí kapitoly, pouze pracují s rozšířeným tvarem původní rovnice. Opakující se problematiku nebudu znovu podrobně rozebírat a v následujícím textu budu pouze odkazovat na příslušné předcházející odstavce.

Tlumení je třeba zahrnout již během odvození diferenciální rovnice vlny, kam do rovnosti (2.2.5) na levou stranu do bilance sil působících na úsek struny  $h$  přidáme tlumicí sílu  $\tilde{F}$ . Předpokládejme pro zachování linearitu diferenciální rovnice, že síla je úměrná rychlosti, tedy první derivaci výchylky  $u$ . Předpokládejme, že odporová síla roste i s rozměrem struny  $h$ .

$$\tilde{F} = -k \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} h \quad (2.8.1)$$

$k$  [ $Pa \cdot s$ ] je neznámá konstanta tlumení, rozměrově odpovídající dynamické viskozitě. Rovnice (2.2.5) bude pak vypadat takto

$$\begin{aligned} T(x+h, t) \sin(\alpha(x+h, t)) - T(x, t) \sin(\alpha(x, t)) - k \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} h = \\ = \mu h \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Tento tvar lze nadále upravit analogicky postupu v kapitole 2.2. Získáme tak parciální diferenciální rovnici vlny s lineárním tlumením

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.8.3)$$

Rovnici vydělíme silou  $T$ . Podíl síly  $T$  a délkové hustoty nahradíme podle kapitoly 2.3 kvadrátem rychlosti, a koeficient před první derivací  $u$  nahradíme výrazem  $2b$ , kde  $b$  [ $s^{-1}$ ] nazveme útlum. Rovnice bude takto přehledněji řešitelná

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad 2b = \frac{k}{\mu} \quad (2.8.4)$$

Rozdělíme-li podle proměnných, získáme tvar [14]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2b}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.8.5)$$

Nyní představíme počáteční a okrajové podmínky pro kytarovou strunu, stejné jako u úlohy v kapitole 2.6, a rovnici budeme i analogicky řešit. Znovu využijeme separace proměnných (řešení je naznačeno v [14]). Předpokládaný tvar řešení je tedy opět

$$u^*(x, t) = U(x)T(t) \quad (2.8.6)$$

Po dosazení

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} T(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} U(x) + \frac{2b}{c^2} \frac{\partial T(t)}{\partial t} U(x)$$

Proměnné separujeme a se stejnou argumentací jako u (2.6.4) pokládáme rovno konstantě.

$$\frac{\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}}{U(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}}{T(t)} + \frac{2b}{c^2} \frac{\frac{\partial T(t)}{\partial t}}{T(t)} = \gamma; \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (2.8.7)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial T(t)}{\partial t} = c^2 \gamma T(t) \quad (2.8.8) \qquad \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = \gamma U(x) \quad (2.8.9)$$

Získáváme znovu dvě obyčejné diferenciální rovnice. Vidíme, že (2.8.9) je identická rovnici (2.6.6), kterou jsem již řešil v kapitole 2.6. Výsledkem je

$$U_n(x) = K_n^I \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \qquad n \in \mathbb{N} \quad (2.8.10)$$

Což platí pro hodnotu separační konstanty

$$\sqrt{-\gamma} = \frac{\pi}{L}; \frac{2\pi}{L}; \dots; \frac{n\pi}{L} \qquad \gamma < 0 \quad (2.8.11)$$

Tentokrát bude vhodné separační konstantu  $\gamma$  i explicitně vyjádřit

$$\gamma = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (2.8.12)$$

Nyní stačí vyřešit diferenciální rovnici (2.8.8). Její charakteristickou rovnicí je

$$\lambda^2 + 2b\lambda - c^2\gamma = 0$$

Víme, že děj má oscilační charakter, čemuž odpovídá záporný diskriminant charakteristické kvadratické rovnice. To nastane v následujícím případě

$$\begin{aligned} D = 4b^2 + 4c^2\gamma &< 0 \\ 4b^2 &< -4c^2\gamma \\ b &< c\sqrt{-\gamma} \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

Konstanta  $b$  musí být menší než nejmenší hodnota, které může  $\sqrt{-\gamma}$  nabývat. V opačném případě již děj nebude mít oscilační charakter a po struně se nebude šířit vlnění. Za užití (2.8.11)

$$\begin{aligned} b &< \min_{n \geq 1} \left( c \frac{n\pi}{L} \right) \\ b &< \frac{c\pi}{L} \end{aligned} \quad (2.8.14)$$

Je-li splněna tato podmínka, pak budou kořeny charakteristické rovnice mít tvar

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 + 4c^2\gamma}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 + c^2\gamma} = \begin{cases} -b + \sqrt{-(b^2 + c^2\gamma)} i \\ -b - \sqrt{-(b^2 + c^2\gamma)} i \end{cases}$$

kde  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  jsou komplexní čísla s nenulovou reálnou částí. Řešení tedy bude ve tvaru

$$T(t) = e^{-bt} \left( C_1 \sin\left(\sqrt{-b^2 - c^2\gamma}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{-b^2 - c^2\gamma}t\right) \right)$$

Po dosazení za  $\gamma$  z (2.8.12) získáváme opět posloupnost řešení

$$T_n(t) = e^{-bt} \left( K_n^{II} \sin\left(\sqrt{-b^2 + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}}t\right) + K_n^{III} \cos\left(\sqrt{-b^2 + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2}}t\right) \right)$$

Pro zjednodušení zápisu můžeme zavést kruhovou frekvenci tlumeného vlnění jako

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} - b^2} \quad (2.8.15)$$

A získáme tak

$$T_n(t) = e^{-bt} (K_n^{II} \sin(\tilde{\omega}_n t) + K_n^{III} \cos(\tilde{\omega}_n t)) \quad (2.8.16)$$

Nyní lze dosadit do předpokládaného tvaru řešení (2.8.6), členy roznásobit a vytknout

$$u^*(x, t) = e^{-bt} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (K_n^{IV} \sin(\tilde{\omega}_n t) + K_n^V \cos(\tilde{\omega}_n t)) \quad (2.8.17)$$

Principem superpozice nalezneme obecnější celkové řešení jako součet řady [10, 14, 15]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x, t) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-bt} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (K_n^{IV} \sin(\tilde{\omega}_n t) + K_n^V \cos(\tilde{\omega}_n t)) \end{aligned} \quad (2.8.18)$$

Pro porovnání s počáteční podmínkou je funkci opět nutno derivovat podle času

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -b e^{-bt} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (K_n^{IV} \sin(\tilde{\omega}_n t) + K_n^V \cos(\tilde{\omega}_n t)) \right. \\ &\quad \left. + e^{-bt} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (\tilde{\omega}_n K_n^{IV} \cos(\tilde{\omega}_n t) - K_n^V \tilde{\omega}_n \sin(\tilde{\omega}_n t)) \right) \end{aligned}$$

S využitím počáteční podmínky v  $t = 0$  získáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -b K_n^V \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + \tilde{\omega}_n K_n^{IV} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right) = 0 \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\omega}_n K_n^{IV} - b K_n^V) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.8.19)$$

Aplikací teorie Fourierových řad analogicky ke kapitole 2.6 získáváme závislost mezi oběma konstantami

$$\tilde{\omega}_n K_n^{IV} - b K_n^V = 0 \quad 2.8.20$$

Využití zbývajících počátečních podmínek vede na stejný tvar jako (2.6.24)

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^V \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (2.8.21)$$

Pro který jsme rovněž již dříve (příloha I) určili posloupnost konstant jako

$$K_n^V = \frac{2u_0 L^2}{x_0(L - x_0) n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x_0\right) \quad (2.8.22)$$

Ze vztahu 2.8.20 pak lze vyjádřit zbývající posloupnost konstant

$$K_n^{IV} = \frac{bK_n^V}{\tilde{\omega}_n} \quad (2.8.23)$$

Tyto konstanty pak stačí dosadit do obecného tvaru (2.8.18). Po úpravě a přejmenování posloupnosti konstant  $K_n^V = a_n$  (označení  $b$  je tentokrát vyhrazeno útlumu) získáváme exaktní řešení parciální diferenciální rovnice vlny s lineárním tlumením: [14]

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-bt} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( \frac{b}{\tilde{\omega}_n} \sin(\tilde{\omega}_n t) + \cos(\tilde{\omega}_n t) \right);$$

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} - b^2}; \quad b = \frac{k}{2\mu};$$

$$a_n = \frac{2u_0 L^2}{x_0(L-x_0)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right); \quad (2.8.24)$$

Pokud

$$b < \frac{c\pi}{L}$$

## 2.9 Rozbor řešení úlohy s tlumením

Ze znalosti chování exponenciálního členu  $e^{-bt}$  plyne pro funkci (2.8.24)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (2.9.1)$$

To již odpovídá chování skutečné struny, která se za nějakou dobu po rozeznění ustálí zpět v rovnovážné poloze. Dále vidíme, že položíme-li naopak  $b = 0$ , výraz se zjednoduší na tvar identický (2.6.27), což je řešení vlnové rovnice bez vlivu tlumení.

Členy řady budou mít po vytknutí  $e^{-bt}$  před součtový operátor tvar

$$u_n^*(x, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left( \frac{b}{\tilde{\omega}_n} \sin(\tilde{\omega}_n t) + \cos(\tilde{\omega}_n t) \right) \quad (2.9.2)$$

Lineární kombinaci harmonických funkcí je možné nahradit jedinou harmonickou funkcí s neznámými parametry  $A$  a  $\psi$ , které bude třeba zpětně vyjádřit

$$\frac{b}{\tilde{\omega}_n} \sin(\tilde{\omega}_n t) + \cos(\tilde{\omega}_n t) = A \sin(\tilde{\omega}_n t + \psi) \quad (2.9.3)$$

Po úpravě pravé strany podle součtového vzorce dostáváme

$$\frac{b}{\tilde{\omega}_n} \sin(\tilde{\omega}_n t) + \cos(\tilde{\omega}_n t) = A \sin(\tilde{\omega}_n t) \cos(\psi) + A \cos(\tilde{\omega}_n t) \sin(\psi)$$

Porovnáme-li koeficienty u odpovídajících členů na obou stranách, získáváme soustavu rovnic

$$\begin{cases} \frac{b}{\tilde{\omega}_n} = A \cos(\psi) \\ 1 = A \sin(\psi) \end{cases}$$



Hodnotu  $A$  nalezneme jejich umocněním a sečtením

$$\frac{b^2}{\tilde{\omega}_n^2} + 1 = A^2(\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi)) = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{b^2}{\tilde{\omega}_n^2} + 1} \quad (2.9.4)$$

Hodnotu  $\psi$  jejich vydělením

$$\frac{\tilde{\omega}_n}{b} = \frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi)} = \operatorname{tg}(\psi) \Rightarrow \psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{\omega}_n}{b}\right) \quad (2.9.5)$$

Každá složka vlnění lze tedy zapsat jako

$$u_n^*(x, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(\sqrt{\frac{b^2}{\tilde{\omega}_n^2} + 1}\right) \sin\left(\tilde{\omega}_n t + \operatorname{arctg}\left(\frac{\tilde{\omega}_n}{b}\right)\right) \quad (2.9.6)$$

Na tento člen můžeme aplikovat stejný postup jako na předpis (2.7.2) a říct, že před vynásobením tlumicím členem  $e^{-bt}$  se jedná o stacionární vlnění, a tedy že maximální výchylka v určitém bodě se nemění s časem. Zvolený bod bude kmitat s tlumenou kruhovou frekvencí  $\tilde{\omega}_n$  [ $s^{-1}$ ]

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} - b^2} \quad (2.9.7)$$

Užitím  $\omega = 2\pi f$  a úpravou získáme vztah

$$\tilde{f}_n = \frac{\sqrt{\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} - b^2}}{2\pi}$$

Po dosazení (2.3.2) za  $c^2$  získáváme obecnější variantu vztahu (2.5.8): [15]

$$\tilde{f}_n(L, T, \mu, b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2 T}{L^2 \mu} - \left(\frac{b}{\pi}\right)^2}; \quad b = \frac{k}{2\mu}; n \in \mathbb{N} \quad (2.9.8)$$

Tento model tedy říká, že harmonické frekvence vlnění struny jsou ovlivněny mírou tlumení. Mezi frekvencemi bez tlumení (2.5.8) s tlumením je následující vztah.

$$\tilde{f}_n = \sqrt{f_n^2 - \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2} \quad (2.9.9)$$

Význam této závislosti však není u hudebních nástrojů velký, neboť člen  $(b/(2\pi))^2$  je oproti  $f_n^2$  zanedbatelně malý. Dále si můžeme všimnout, že člen  $f_n^2$  roste kvadraticky s  $n$ , zatímco  $(b/(2\pi))^2$  na  $n$  nezávisí. To znamená, že tlumení ovlivní nejvíce fundamentální frekvenci  $n = 1$  a vyšší harmonické frekvence  $n \geq 1$  již výrazně méně. Z toho můžeme vyslovit domněnku, že tón zahráný na více tlumenou strunu by zněl méně harmonicky, neboť posloupnost frekvencí jej tvořících by již neodpovídala tak dokonale přirozeným hudebním intervalům. Než však tento efekt začne být u vysokých hodnot  $b$  markantní, převládne u kytary exponenciální člen a vlnění zcela utlumí. [15]

## 2.10 Interpretace zvuku a tónu

V závěru tvorby modelu se dostáváme do spekulativnější oblasti problému – souvislosti vlnící se struny a vznikajícího zvuku, potažmo tónu. V případě akustického nástroje jsou struna a nástroj přímo zdrojem zvukových vln ve vzduchu, zatímco v případě elektrického nástroje je vlnění struny měněno snímačem

na elektrický signál, který je na zvukové vlny převeden až v zesilovači. V obou případech však podrobná fyzikální analýza vzniku zvuku přesahuje rozsah této práce. Zvukové důsledky pohybu struny interpretujeme pouze velmi zjednodušeně a s užitím mnoha předpokladů. [1]

V první řadě naše řešení (2.8.24) (případně (2.6.27)), které leží v dvourozměrném prostoru určeném proměnnými  $x$  a  $t$ , zúžím pouze do rozměru  $t$ . Zvuk tak získám jako funkci jedné proměnné, která má jednoznačně určeny amplitudy harmonických frekvencí (bez závislosti na  $x$ , z hlediska tónu lze tak přímo studovat jejich poměrné zastoupení) a kterou dokáže zvuková jednotka počítače velmi snadno reprodukovat. Klíčový pro tuto transformaci je člen  $\sin(n\pi x/L)$ , objevující se jak v řešení s tlumením, tak bez tlumení, obsahující proměnnou  $x$ . S tímto členem nakládám dvěma způsoby.

V případě akustického nástroje prohlásím, že poměrné zastoupení  $n$ -té složky zvukových vln je určeno místem s maximální výchylkou dané složky vlnění struny, tedy že

$$\sin(n\pi x/L) = 1 \quad (2.10.1)$$

Struna vytváří zvuk po celé své délce, a tak je možno užít maximální výchylky každé složky jako směrodatné charakteristiky nehledě na to, na jaké souřadnici  $x$  se tato výchylka nachází. Tento přístup nazvu „akustickou interpretací“. [6]

Naproti tomu elektromagnetický snímač na elektrické kytáře zaznamenává výchylky pouze v určité části struny, kde je nainstalován. Pro zjednodušení řekněme v jediném bodě  $x_b \in (0; L)$ . V tomto bodě snímač nalézá různé fáze harmonického průběhu stacionárních vln po souřadnici  $x$  a dále tím tak upravuje poměrné zastoupení frekvencí ve výsledném zvuku. Pro klíčový člen pak platí

$$\sin(n\pi x/L) = \sin(n\pi x_b/L) \quad (2.10.2)$$

Umístění snímače  $x_b$  na struně ovlivňuje harmonické spektrum zvuku podobně, jako místo úderu (tvar počáteční podmínky), jak bylo popsáno v kapitole 2.7. Je-li například snímač umístěn pod uzlem určité složky vlnění, tato složka ve výsledném zvuku nebude zastoupena. Tento přístup nazvu „interpretace snímačem“.

Dále činím předpoklad, že transformace vlnění ve struně na zvuk zachová všechny vlastnosti původního děje charakterizující hudební tón, tedy frekvence jeho složek a jejich poměrné zastoupení, definované výše. Jako zvuk tedy interpretuji přímo rovnici (2.8.24) (případně (2.6.27)) s dosazenou rovností (2.10.1) nebo (2.10.2).

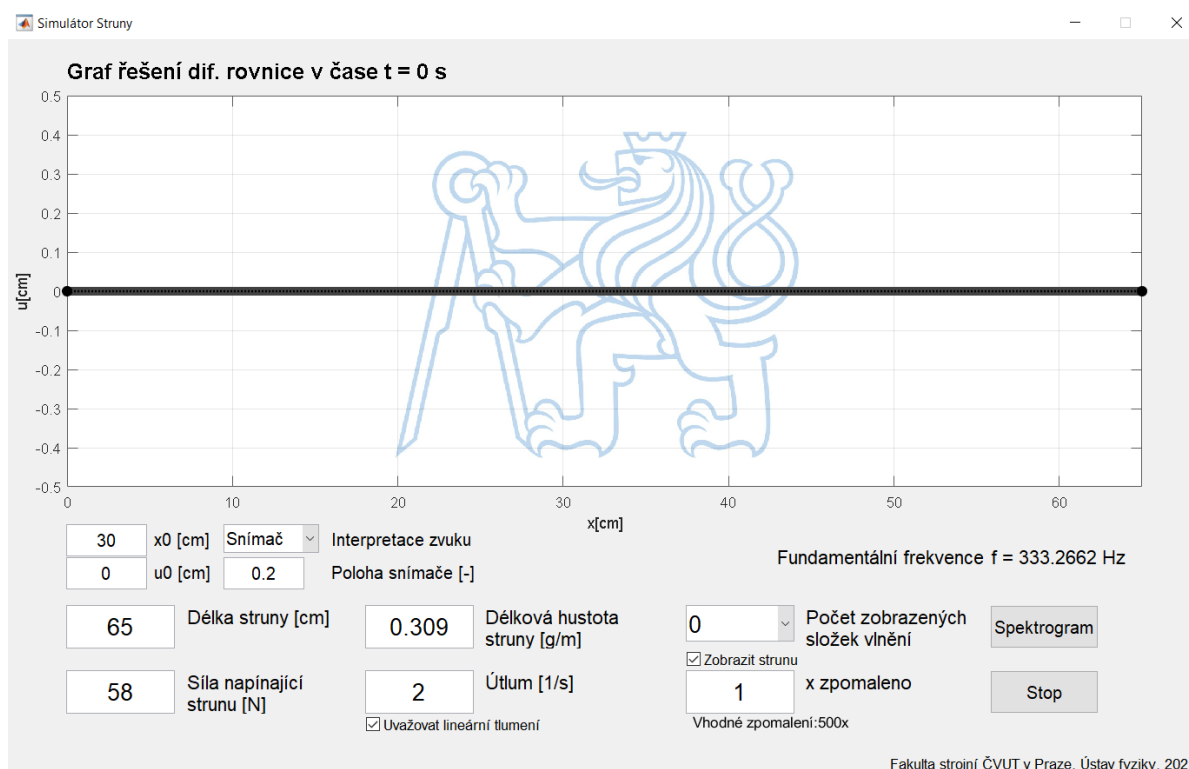
## 3. POČÍTAČOVÁ SIMULACE

V této části budu hovořit o aplikaci vyvinuté pro podporu výuky předmětu Fyzika I na Fakultě strojní ČVUT. Její výstupy byly využity i pro názorné dokreslení složité problematiky v této práci (předně např. v kapitole 2.7).

### 3.1 Popis aplikace a jejích funkcí

Pro vytvoření počítačové simulace struny jsem využil standardní inženýrský výpočetní software Matlab verze R2020b od společnosti MathWorks. Kód jsem napsal na základě předchozích zkušeností a s využitím dokumentace softwaru [16]. Aplikaci je možno používat na jakémkoli počítači, kde je nainstalován Matlab R2020b nebo příslušný Matlab Runtime (drobná sada knihoven umožňujících spustit kompilované Matlab aplikace bez nutnosti instalace celého softwaru s licenci). Aplikace bývá kompatibilní i s blízkými staršími či novějšími verzemi softwaru, tyto možnosti však blíže nedokumentuji. [17]

Základní princip aplikace je velmi jednoduchý – jedná se o vykreslení vlnové funkce a jejích složek, jak byly nalezeny v předchozí teoretické části, jako vývoj systému v reálném čase formou animace (animace postupuje časem  $t$  a v každém jejím snímku jsou zobrazeny aktuální funkční hodnoty po celé souřadnici  $x$ ). Při tvorbě aplikace bylo navíc dbáno na názornost a interaktivitu. Vytvořil jsem tak jednoduché uživatelské rozhraní, které umožňuje snadno a přehledně měnit fyzikální parametry a pozorovat jejich vliv na chování struny. Tuto aplikaci jsem pojmenoval „Simulátor struny“.



Obr. 3.1 Rozhraní aplikace Simulátor struny, přednastavené parametry odpovídají hornímu E elektrické kytary dle [12]

V prostředí aplikace pod souřadným systémem pro zobrazení struny je možno do jednotlivých polí vkládat parametry struny a nastavovat možnosti zobrazení. Práce s aplikací je relativně intuitivní a nevyžaduje podrobné instrukce. Parametry určující tvar počáteční podmínky mohou být vloženy kurzorem myši po kliknutí do souřadného systému způsobem napodobujícím brnknutí, což dodává aplikaci snadnou ovladatelnost a autentičnost. Aplikace dále nabízí možnost zvláště zobrazit prvních pět

harmonických složek vlnění a spektrogram, kde lze zhlédnout jejich frekvence a poměrné zastoupení v celkovém tvaru vlny při různých parametrech a interpretacích zvuku (graf spektrogramu odpovídá času  $t = 0$  a pokles velikostí složek nesleduje). Složky vlnění jsou rozlišeny barevně. Děj je rovněž možno libovolně zpomalit.

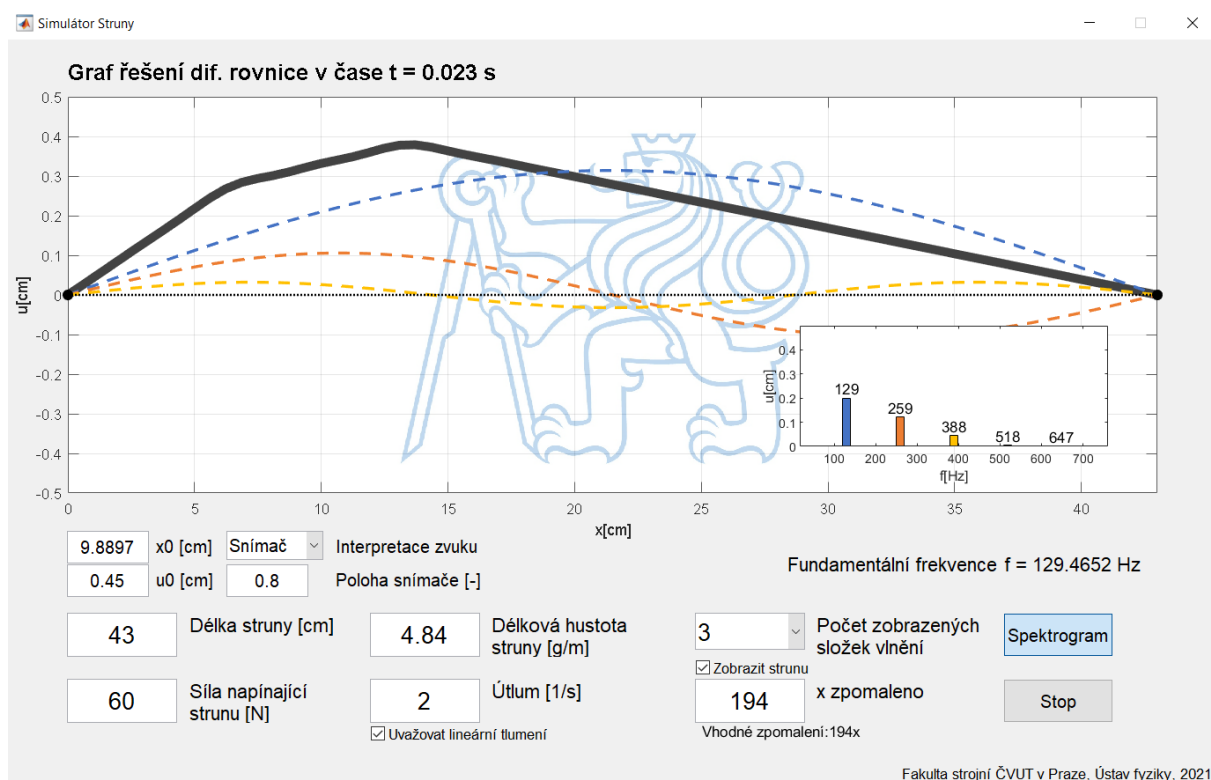
Vstupní parametry lze během chodu aplikace libovolně upravovat. Aplikace upozorní na případný neplatný vstup, který odporuje podmínkám řešení diferenciální rovnice. Je ovšem nutno klást důraz na užívání desetinné tečky namísto desetinné čárky, kterou aplikace nerozpozná a nedokáže na její užití ani upozornit (aplikace rozpozná neplatný vstup zaviněný mylnou interpretací zápisu s čárkou, i mylná interpretace však může být z hlediska řešení platná).

Zaškrtnutí pole „uvažovat lineární tlumení“ určuje, zda budou výpočty prováděny dle řešení (2.6.27) bez tlumení nebo dle (2.8.24) s tlumením (přestože řešení s tlumením zahrnuje řešení bez tlumení, skript aplikace používá pro větší flexibilitu obě). Nabídka „interpretace zvuku“ ovlivňuje výpočty pro spektrogram a zvukový výstup aplikace, u nichž užívá buď akustické interpretace dle (2.10.1) nebo interpretace snímačem dle (2.10.2).

Velikost souřadného systému v uživatelském rozhraní se v závislosti na parametrech struny nemění. Měřítka osy  $x$  je přizpůsobováno tak, aby výsledná délka struny vyplnila vyhrazený prostor v okně aplikace. Na ose  $y$  je nastaven stálý rozsah  $-0,5$  cm až  $0,5$  cm, což přibližně odpovídá běžné maximální možné výchylce na skutečné struně. Osy tedy pro názornost a jednoduchost aplikace nejsou ve stejném měřítku.

Pokud aplikace pracuje v reálném čase se zapnutým tlumením, tzn. nejlépe odpovídá realitě, je vizualizace doprovázena zvukovou interpretací funkce a syntetizuje zvuk reálné kytary.

Níže je pro ilustraci doplněn snímek aplikace pořízený během jejího chodu. Základní parametry jsou zde na ukázkou přizpůsobeny měření provedenému v části 3.



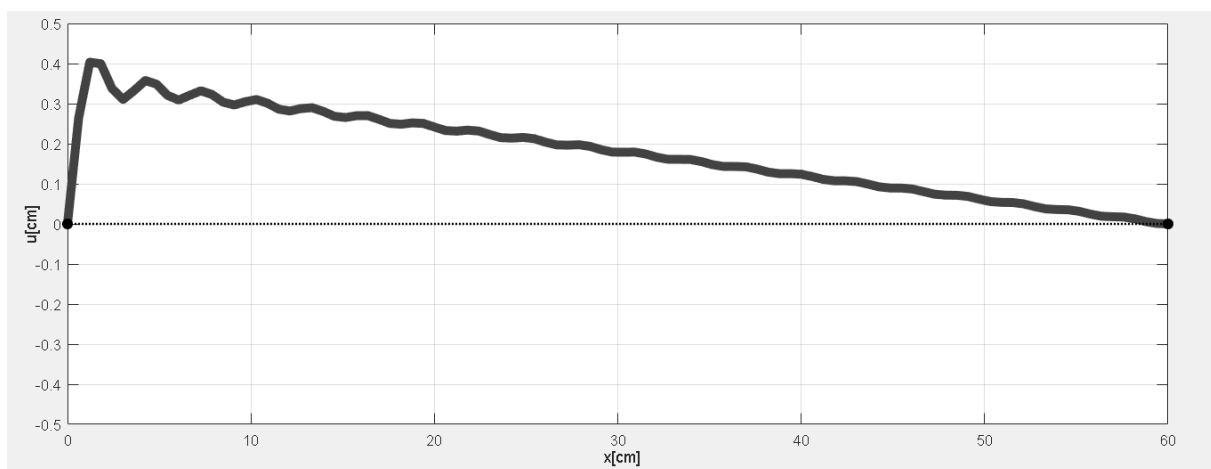
Obr. 3.2 Snímek aplikace pořízený během jejího chodu, v čase  $t = 0,023$  s

## 3.2 Omezení počítačového prostředí

Výpočet a zobrazení vlnové funkce bylo nutno digitálnímu prostředí přizpůsobit diskretizací spojitých intervalů a omezením počtu členů nekonečné řady tvořící celkové vlnění. Čas  $t$  je pravidelně navyšován o konstantní hodnotu danou snímkovou frekvencí 30 FPS (každý snímek je tedy zobrazen po dobu  $1/30$  s), délka struny popsána souřadnicí  $x$  je pravidelně rozdělena 100 body a součet řady je omezen na prvních 40 členů. Takto získáme konkrétní číselné hodnoty, pro něž lze výpočty vlnové funkce snadno algoritmizovat, a výsledkem je pak věrný obraz vlnové funkce, aniž by byla aplikace příliš výpočetně náročná. Diskretizační parametry a omezení počtu členů Fourierovy řady není možno měnit přímo v uživatelském rozhraní, ale jsou snadno přístupné a upravitelné v kódu programu.

Přesto vznikají digitalizací dvě výraznější nepřesnosti. První nastává v důsledku toho, že frekvence složek vlnění jsou výrazně vyšší, než dostupné snímkové frekvence animace. Může tedy nastávat forma stroboskopického jevu, kdy se struna zdánlivě pohybuje pomaleji, než je tomu ve skutečnosti (při vhodné volbě parametrů se může dokonce jevit, že struna zůstává zcela v klidu), což může tvořit mylnou představu o jejím chování. Jako řešení jsem tedy přidal adaptivní doporučenou hodnotu zpomalení, které je třeba, aby bylo možno rozeznávat jednotlivé periody. Toto číslo podává uživateli představu o skutečné rychlosti děje. [4]

Druhá významná nepřesnost pak vzniká důsledkem omezeného počtu užitých členů nekonečné řady. Zvolíme-li hodnotu  $x_0$  příliš blízko krajním uzlům (např. na Obr. 3.3 je  $x_0 < 1$  cm na  $L = 60$  cm), součet omezené řady členů (na Obr. 3.3 40 členů) harmonického charakteru nedokáže dost přesně složit žádaný tvar počáteční podmínky a výsledný průběh je výrazně zvlňný. V důsledku tohoto zvlňnění lze rozeznat i omezený počet bodů na souřadnici  $x$  užitý pro výpočty, jelikož průběh již patrně není hladký. Příčinou jsou základní vlastnosti Fourierovy transformace.



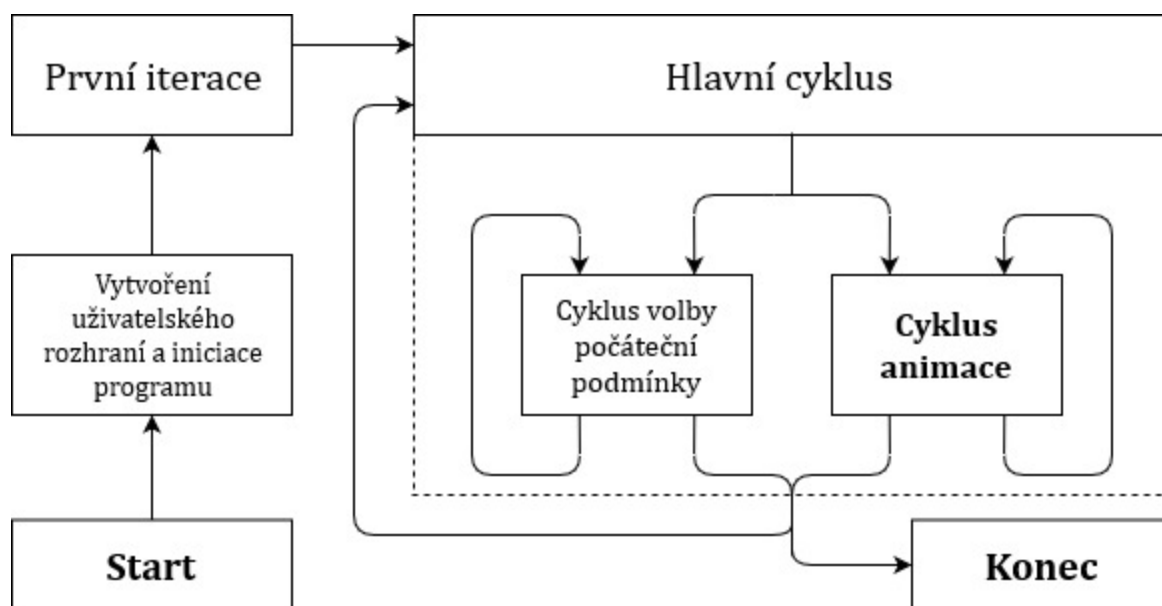
Obr. 3.3 Příklad zvlňnění tvaru počáteční podmínky při volbě parametru  $x_0$  příliš blízko krajnímu uzlu

Tímto problémem jsem se rozhodl příliš nezabývat, jelikož úder takto blízko krajním uzlům nelze v praxi efektivně provést kvůli ohybové tuhosti materiálu struny. Tyto mezní stavy tedy stejně nemají patřičný obraz v realitě. Zmíněné problémy lze však zmírnit zhuštěním diskretizačních parametrů a zvýšením počtu členů Fourierovy řady.

## 3.3 Základní struktura

Kvůli svému střednímu rozsahu a vysoké vnitřní provázanosti je skript soustředěn v jednom celku, v jediném MATLAB souboru. Samotný program sestává ze tří základních cyklů vytvořených pomocí funkce *while* – cyklus animace a cyklus volby počáteční podmínky, které jsou oba součástí nadřazeného hlavního cyklu. Každý z cyklů odpovídá určitému stavu aplikace a má přiřazeny určité logické proměnné, které podmiňují vstup do něj i jeho následné opakování. Pokud je v průběhu cyklu hodnota

některé z příslušných proměnných změněna na nesprávnou, cyklus je opuštěn a program se posouvá jinam. Tím je zajištěno, že program během své práce pružně reaguje na akce uživatele. Krom těchto tří cyklů jsou součástí programu ještě dvě iniciační fáze – iniciace programu a první iterace, vykonané pouze jednou ihned po spuštění. O struktuře lze získat lepší představu dle následujícího schématu.



Obr. 3.4 Vizualizace fungování programu

Program většinu času stráví v cyklu animace. Ten v reálném čase tvoří vlastní animaci děje, ale program se v tomto stavu nachází i pokud je struna v klidu (v takovém případě má obsažená vlnová funkce nulové výstupy a čas je také držen nulový). Obsah je zde redukován na co nejmenší množství kódu, aby animace pracovala plynule. Provede-li uživatel během cyklu vhodnou akci (např. změnil-li parametr), program pružně zareaguje a vystoupí z cyklu animace do hlavního cyklu, který ukončí současný děj, zaznamená změny a podle nich provede adekvátní úpravy v prostředí aplikace, načez se opět do cyklu animace vrátí. Klikne-li uživatel přímo do souřadného systému, přesune se program (také přes hlavní cyklus) do cyklu volby počáteční podmínky. Souřadný systém se v této fázi stává interaktivním a uživatel volí počáteční tvar struny. Opětovným kliknutím je vybraný tvar zaznamenán a program pokračuje opět do cyklu animace, kde je děj s takto vybraným vstupním tvarem realizován. Zjednodušeně lze z hlediska rovnice vlny říci, že během cyklu animace se mění proměnná  $t$ , během cyklu volby počáteční podmínky se mění parametry  $x_0$  a  $u_0$  a hlavní cyklus slouží ke změnám všech ostatních parametrů.

Vlastní kód přiblížím v následujících kapitolách. Kód z větší části přebírá značení zavedené v kapitole 2 až na výjimky, které by porušovaly syntax nebo přesahují možnosti základního textového rozhraní.

## 3.4 Rozbor skriptu aplikace

Jelikož skutečně podrobný rozbor skriptu s vysvětlením veškerých užitých funkcí by značně přesahoval rozsah této práce, stručně okomentuji a vysvětlím pouze jeho nejpodstatnější části.

### 3.4.1 Cyklus animace

Tento *while* cyklus je jádrem celého programu. Provádí výpočty vlnové funkce, které následně graficky zobrazuje a animuje. Aby čas v aplikaci plynul stejně, jako ve skutečnosti, je ve fázi iniciace programu nastaven časovač (Obr. 3.5). Ten je vždy před vstupem do cyklu animace spuštěn a za každý časový interval  $1/(\text{snímková frekvence})$  sekund vykoná funkci *uiresume*. Na tu čeká funkce *uiwait* v závěru cyklu animace, čímž si animace udržuje relativně přesné tempo s reálným plynutím času (Obr. 3.6).

```
FPS=30; %Počet snímků za sekundu

tau=timer; %Časovač
tau.StartDelay=1/FPS;
tau.Period=1/FPS;
tau.ExecutionMode='fixedRate';
tau.TasksToExecute=inf;
tau.TimerFcn=@(~,~) uiresume;
```

Obr. 3.5 Vytvoření časovače na počátku skriptu

```
start(tau); %Zapnout časovač
while drag == false && change == false %Cyklus animace
    ...
    uiwait; %Počkat na čas
end
stop(tau); %Zastavit časovač
```

Obr. 3.6 Základní kostra while cyklu animace (obsah je pro přehlednost prozatím vynechán)

Uvnitř cyklu animace je pak minimum kódu potřebného pro výpočet a vykreslení grafu, aby proces netrval zbytečně dlouho a animace byla plynulá. Za tímto účelem jsou veškeré grafické prvky dopředu vytvořeny již ve fázi prvního cyklu (viz dále) a v cyklu animace jsou pouze přepisovány. V případě, kdy proces proběhne pomaleji, než je časovačem stanovený limit, zůstane program čekat na příkazu *uiwait* do dalšího podnětu časovače a animace se opozdí. Cyklus je opakován dokud má logická proměnná *change* hodnotu *false*. Změnu hodnoty proměnné *change* vyvolá interakce uživatele s některým prvkem v uživatelském rozhraní (úprava hodnoty pole, kliknutí do souřadného systému nebo na tlačítko *stop*). Interaktivním prvkům je tato vlastnost přisouzena ve fázi iniciace programu. Cyklus je navíc podmíněn proměnnou *drag* (proměnná řídící cyklus volby počáteční podmínky, zde užitá jako pojistka pro případ zakázaného stavu, kdy by se program nějakou chybou podle řídicích logických proměnných měl nacházet v obou fázích najednou).

Nejdůležitější součástí cyklu animace je samozřejmě samotná vlnová funkce, obsažená v programu ve variantě jak bez tlumení, tak s tlumením, podle volby uživatele. V každé časové vrstvě, odpovídající jedné iteraci *while* cyklu či jednomu snímku animace, jsou propočítány hodnoty  $x$  po celé délce struny způsobem, jak je podrobně vysvětleno níže.

```
umain = zeros(size(x));

if handles.Tlumit.Value == 0 %Výpočet bez tlumení
    for n=1:1:M
        u{n} = 2*u0*(L^2)*sin(n*pi*x0/L)*sin(n*pi*x/L)*cos(n*pi*c*t/L) / (x0*(L-x0)*(n^2)*(pi^2));
        umain = umain + u{n};
    end
elseif handles.Tlumit.Value == 1 %Výpočet s tlumením
    for n=1:1:M
        an=2*u0*L^2*sin(n*pi*x0/L) / (x0*(L-x0)*n^2*pi^2);
        omg=sqrt(c^2*n^2*pi^2/L^2-b^2);
        u{n} = exp(-b*t)*an*sin(n*pi*x/L)*( (b/omg)*sin(omg*t)+cos(omg*t) );
        umain = umain + u{n};
    end
end
```

Obr. 3.7 Řešení vlnové rovnice rozepsané v prostředí Matlab

Do rovnice čas  $t$  vstupuje jako skalární hodnota určená pořadím iterace cyklu (čas je průběžně navyšován, jak plyne animace), zatímco poloha  $x$  vstupuje jako vektor bodů rovnoměrně rozložených po délce struny  $\langle 0; L \rangle$  pomocí příkazu  $x = \text{linspace}(0, L, 100)$  provedeném již dříve v hlavním cyklu.

Vektor  $x$  je pak po jednotlivých prvcích přepočítán na vektor funkčních hodnot  $u\{n\}$   $n$ -té harmonické složky vlnění podle funkce odvozené v teoretické části ( $u$  je v tomto případě tzv. *cell array*, entita, jejíž prvky nemusí být jen čísla, ale např. právě vektory). Toto je prováděno uvnitř *for* cyklu pro každé  $n$  od 1 až do zvolené hodnoty  $M = 40$ . Tento cyklus nahrazuje součet řady obsažený v našem řešení – každý vektor  $u\{n\}$  harmonické složky vlnění je v závěru *for* cyklu přičten k vektoru výsledné vlny *umain*. Tato metoda nám umožní uchovat pro zobrazení nejen výsledný tvar struny ve vektoru *umain*, ale i tvary jednotlivých harmonických složek v prvcích pole  $u$ .

Po propočtu všech harmonických složek a výsledného vlnění dojde k přepsání existujících grafů, které byly vytvořeny ve fázi první iterace pomocí funkce *plot* (viz dále) a je navýšena hodnota času *t* v závislosti na snímcích za sekundu a zvoleném zpomalení.

```

set(pmain, 'XData',x,'YData',umain)           %Přepsat křivky výsledného vlnění
for st=1:1:N                                  %Přepsat křivky složek
    set(p(st), 'Xdata',x,'YData',u{st})
end

if u0 ~= 0                                     %Plynutí času
    t=t+1/(FPS*sm);
else
    pause(0.2);
end

```

Obr. 3.8 Příkazy pro přepis grafů funkcí a navyšování proměnné *t*

V příští iteraci cyklu animace je tak vlnová funkce propočítána a vykreslena pro takto získaný nový čas. Je-li struna v klidu (tzn. počáteční podmínka je nulová funkce, tedy parametr  $u_0 = 0$ ) čas není navyšován, zůstává nulový a cyklus je místo toho vždy na 0,2 sekund pozastaven. Do tohoto stavu přejde aplikace například hned po svém zapnutí, nebo po zmáčknutí tlačítka *stop*. Prodleva příkazem *pause* snižuje množství zbytečných výpočtů s nulovým výstupem a šetří výpočetní paměť. Aplikace je při tom schopna stále velmi rychle reagovat na vstup uživatele.

Krom těchto funkcí je v cyklu obsažen ještě příkaz pro přepisování aktuální hodnoty času *t* v grafickém rozhraní.

### 3.4.2 Hlavní cyklus

Hlavním cyklem projde aplikace po každé akci uživatele, která představuje změnu charakteru vlnového děje. Tento nadřazený cyklus během fungování aplikace již nelze opustit, pouze příkazem pro zavření okna symbolem křížku v záhlaví okna. Tato akce nastaví hodnotu logické proměnné *run* na *false*, což vede k ukončení celé aplikace.

Prvním krokem hlavního cyklu je restartování času *t* na hodnotu 0, získání aktuálních hodnot veličin vložených uživatelem do polí a jejich přepsání do patřičných proměnných. Jsou tak zaregistrovány veškeré změny parametrů.

```

t=0;                                           %Restart

I=str2double(get(Pole1,'String')); %Převzít hodnoty
F=str2double(get(Pole2,'String'));
R=str2double(get(Pole3,'String'));
b=str2double(get(Pole35,'String'));
sm=str2double(get(Pole5,'String'));
x0=str2double(get(Pole6,'String'));
u0=str2double(get(handles.Pole7,'String'));
pos=str2double(get(Pole10,'String'));

N=get(Pole4,'Value')-1;

```

Obr. 3.9 Přepis parametrů hodnot z upravitelných polí do proměnných

Tyto parametry jsou následně zkontrolovány funkcemi *if*, zda pro ně vlnová funkce má smysl. Pokud se některý parametr vymyká svému omezení, je zobrazeno chybové hlášení, funkce *continue* přeskočí zbytek hlavního cyklu a předejde tak chybě či nesmyslnému výsledku. Takto ho navrácí na začátek, dokud není nevhodný parametr opraven. Pak program postupuje dál a chybové hlášení je odstraněno. Pro šetření výkonu je opět vložena funkce *pause*.



```

if L <= 0 || F <= 0 || R <= 0 || ... %Kontrola podmínek I
    x0 < 0 || x0 > L || sm < 1 || ...
    pos < 0 || pos > 1
        ErrorText.Visible='on';
        pause(0.2);
        continue
end

c=100*sqrt(1000*F/R); %Základní výpočty
blim = c*pi/L;

if b >= blim %Kontrola podmínek II
    ErrorText.Visible='on';
    pause(0.2);
    continue
end

ErrorText.Visible='off';

```

Obr. 3.10 Kontrola platnosti vstupních parametrů

Podle platných získaných parametrů jsou přepočítány základní veličiny (rychlost šíření vlny  $c$ , dále i harmonické frekvence a jejich amplitudy ...) a upraven korespondující stálý grafický výstup (hodnoty na ose  $x$ , spektrogram, základní frekvence, doporučené zpomalení ...) podobně, jako v případě Obr. 3.8. Větší část těchto příkazů je vložena až do části za cyklus volby počáteční podmínky, aby mohl program reagovat i na právě zvolený počáteční tvar. Pro příklad je zde uveden výpočet frekvencí a maximálních výchylek pro spektrogram dle dříve popsané interpretace zvuku kytarovým snímačem.

```

xs = L*pos;

if Pole9.Value == 1 %Výpočet spektra pro snímačovou interpretaci
    if handles.Tlumit.Value == 0 %S tlumením
        for i=1:1:5
            f(i)=i*c/(2*L);
            A(i)=abs(2*u0*(L^2)*sin(i*pi*x0/L)*sin(i*pi*xs/L)/(x0*(L-x0)*(i^2)*(pi^2)));
        end
    elseif handles.Tlumit.Value == 1 %Bez tlumení
        for i=1:1:5
            omg = sqrt(((c^2)*(i^2)*(pi^2)/L^2)-b^2);
            f(i)=omg/(2*pi);
            A(i)=abs(2*u0*(L^2)*sin(i*pi*x0/L)*sin(i*pi*xs/L)*sqrt((b^2)/(omg^2)+1)/(x0*(L-x0)*(i^2)*(pi^2)));
        end
    end
    ...

```

Obr. 3.11 Příklad výpočtů pro úpravu neanimovaného grafického výstupu

Podobně je před návratem do cyklu animace vypočten vektor zvuku, opět za užití vlnové funkce. Na rozdíl od její aplikace v tvorbě animace je zde ale počítána přes vektor času, vytvořený rozdělením časového intervalu pěti sekund, zatímco  $x$  (nebo výraz  $x$  obsahující) je pevně zvoleno. Časový interval je dělen výrazně jemněji, než prostorový – sekunda je rozdělena na 24 000 dílů. Jelikož však není nutné ukládat jednotlivé složky vlnění, ani je následně spolu s celkovým vlněním překreslovat do grafu, provedení je uspokojivě rychlé, zvláště s ohledem na to, že zvuk je vytvořen pouze jednou, před započítáním animace.

```

if sm == 1 && handles.Tlumis.Value == 1 && b >= 1.5    %Zvuk

    ts = 1:(24000):5;
    umains = zeros(size(ts));
    us=zeros(size(ts));

    if Pole9.Value == 1                                %Sním. interpretace
        for ns = 1:1:M
            anS=2*u0*L^2*sin(ns*pi*x0/L)/(x0*(L-x0)*ns^2*pi^2);
            omgs=sqrt((c^2*ns^2*pi^2/L^2)-b^2);
            Amp=sin(ns*pi*xs/L);
            us = exp(-b*ts)*anS*Amp.*((b/omgs)*sin(omgs*ts)+cos(omgs*ts));
            umains = umains + us;
        end
    elseif Pole9.Value == 2                            %Akust. interpretace
        for ns = 1:1:M
            anS=2*u0*L^2*sin(ns*pi*x0/L)/(x0*(L-x0)*ns^2*pi^2);
            omgs=sqrt((c^2*ns^2*pi^2/L^2)-b^2);
            Amp=1;
            us = exp(-b*ts)*anS*Amp.*((b/omgs)*sin(omgs*ts)+cos(omgs*ts));
            umains = umains + us;
        end
    end
    umains=10*umains;                                  %Optimalizace hlasitosti a přehrání
    sound(umains,24000);
end
change=false;

```

Obr. 3.12 Výpočet a provedení zvukového výstupu dle obou metod

Zvuk je odeslán k přehrání do zvukové jednotky počítače, logická proměnná *change* je nastavena zpět na hodnotu 0 a program se tak může navrátit zpět do cyklu animace. Má-li během vykonávání hlavního cyklu logická proměnná *drag* hodnotu 1 (společně s přepsáním *change* se tak stane kliknutím do souřadného systému) přejde hlavní cyklus přibližně ve své polovině do cyklu výběru počáteční podmínky.

### 3.4.3 Cyklus výběru počáteční podmínky

Prvním krokem cyklu výběru počáteční podmínky je otevření souřadného systému pro volbu počáteční podmínky kurzorem (je tak učiněno v první iteraci, dále je tento krok podmínkou *if* přeskokován). Funkcí *mouseMove* jsou sbírány údaje o aktuální poloze kurzoru v souřadném systému, a to ihned po vstupu do cyklu, tedy po iniciujícím kliknutí do grafu (příkaz volně ve skriptu), a následně při každé změně polohy kurzoru (příkaz jako výstup funkce *WindowButtonMotionFcn*).

```

if isempty(fig1.WindowButtonMotionFcn) %Zapnout interaktivitu
    set(fig1,'WindowButtonMotionFcn',@mouseMove);
    set(gcf,'pointer','hand');
    mouseMove;
end

```

Obr. 3.13 Aktivace interaktivity souřadného systému

Souřadnice jsou následně přepisovány do parametrů  $x_0$  a  $u_0$ , které definují tvar struny. Děje se tak ve vlastní funkci *mouseMove*, definované v zápatí skriptu.

```

function mouseMove(~,~) %Počáteční podmínka dle kurzoru
    C = get(gca,'CurrentPoint');
    assignin('base','x0',C(1,1));
    assignin('base','u0',C(1,2));
end

```

Obr. 3.14 Funkce *mouseMove*, která získává informace o poloze kurzoru

Ze získaných hodnot je následně propočítávána vlnová funkce a překreslovány grafy, podobně jako v cyklu animace na Obr. 3.7 a Obr. 3.8, samozřejmě pouze za stále nulové hodnoty  $t$  (mění se pouze  $x_0$  a  $u_0$ ). Dle získaných hodnot parametrů počáteční podmínky jsou přepisovány i korespondující pole v uživatelském rozhraní.

Jelikož tento cyklus se odehrává zcela v nulté časové vrstvě, není třeba regulovat tempo animace a počet snímků za sekundu je zde variabilní podle rychlosti vykonávání programu. Funkce časovače je nahrazena jednoduchým příkazem *drawnow* v závěru cyklu. Opětovným kliknutím do souřadného systému je hodnota logické proměnné *drag* změněna na 0 a program se navrácí zpět do druhé části hlavního cyklu s nově zvolenou počáteční podmínkou. Interaktivita grafu je po opuštění cyklu opět vypnuta a je vykonána zbylá část hlavního cyklu, která již pracuje s hodnotami počáteční podmínky (např. data do spektrogramu, tvorba zvuku).

### 3.4.4 Iniciací programu a první iterace

Tyto fáze programu jsou vykonány pouze jednou ihned po spuštění aplikace. Během iniciací programu jsou iniciovány proměnné řídicí chod programu, je vytvořeno uživatelské rozhraní a interaktivním prvkům je nastaveno žádoucí chování a startovní hodnoty. Během prvního cyklu je jednou velmi zjednodušeně vykonán obsah hlavního cyklu a cyklu animace za účelem vytvoření všech potřebných prvků, které jsou v následujícím chodu programu již pouze upravovány a je tak výrazně šetřen čas. Jako příklad je uvedeno vytvoření prvků grafů vlnové funkce a jejích složek. Křivkám je zde také přisouzena barva, tvar i styl. Jejich interaktivita je pro hladký chod animace potlačena. Funkce *hold* umožní vytvořit více grafů ve stejném souřadném systému.

```
pmain = plot(x,umain,'LineWidth',6,'Color',[0.259 0.259 0.259], ... %Vykreslit vlnovou funkci
            'PickableParts','none','Visible',Zobrazeni.Value);

    hold on

for st=1:1:5
    p(st)=plot(x,u{st},'LineWidth',2,'Color',Palette{st}, ... %Vykreslit harmonické složky
              'LineStyle','--','visible','off','PickableParts','none');
end
```

Obr. 3.15 Vytvoření entit grafů ihned po zapnutí aplikace

Podobně jsou vytvořeny i všechny ostatní prvky, jako spektrogram, čára vyznačující rovnovážnou polohu nebo body zvýrazňující krajní uzly struny. [16]

## 3.5 Proces tvorby aplikace

Během svého vzniku prošla aplikace mnoha podobami. V původní verzi veškeré výpočty probíhaly najednou před započítím animace. Funkcí *meshgrid* byla vytvořena pravidelná síť v souřadnicích  $x$  a  $t$  a pro jednotlivé body sítě byly pak vypočteny funkční hodnoty vlnové funkce. Skript následně procházel těmito hodnotami po souřadnici  $t$  a tvořil z nich jednotlivé snímky pomocí funkce *contour*. Tato metoda se však pro mou aplikaci z mnoha důvodů neoptimalní a těžko implementovatelná hlavně z hlediska interaktivity, předně kvůli nutnosti pracovat se dvěma fázemi programu (výpočty a animace) místo jedné společné. Aplikaci jsem tedy postupně převedl do současné podoby, kde výpočty a animace probíhají zároveň, funkce je propočítávána průběžně po jednotlivých časových vrstvách a místo *contour* je užita jednodušší a rychlejší funkce *plot*, která na jednotlivé časové vrstvy nahlíží jako na funkce jedné proměnné.

## 4. NÁVRH MĚŘENÍ REÁLNÉ STRUNY

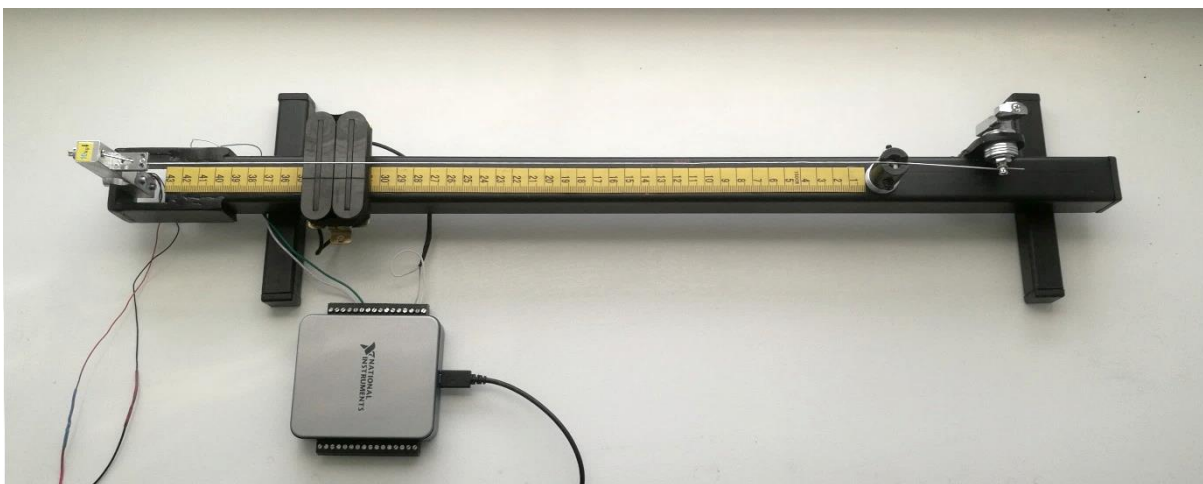
### 4.1 Cíle měření

Hlavním cílem měření je získat srovnání k výsledkům matematického modelu. Budu se proto snažit podmínky reálného měření co nejvíce přizpůsobit idealizovaným podmínkám modelu. V této práci budu v rámci měření zkoumat následující vlastnosti

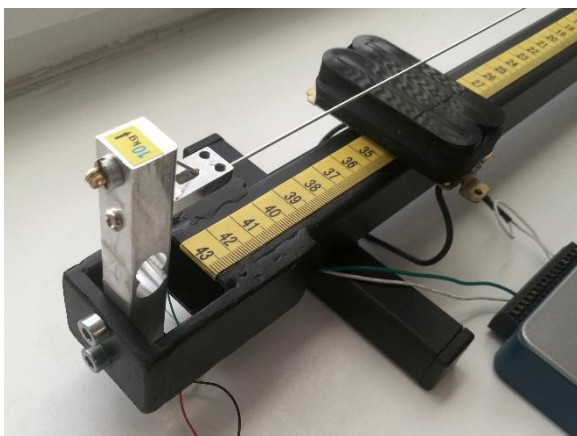
- 1) Výška tónu – tedy závislost vlastních frekvencí struny na napínající síle  
Ve struně o vybrané délkové hustotě  $\mu$  napnuté na zvolené délce  $L$  budu postupně vyvozovat různé hodnoty napínající síly  $T$ . Pro každou hodnotu  $T$  strunu rozeznám a změřím hodnotu její fundamentální frekvence. Takto naměřené hodnoty lze porovnat s výstupy fyzikálního vztahu (2.5.8).
- 2) Barva tónu – tedy poměr zastoupení vyšších vlastních harmonických frekvencí struny ve výsledném vlnění v závislosti na místě úderu a poloze snímače  
Strunu o stejných parametrech jako v předchozím měření předepnu na zvolenou konstantní hodnotu napínající síly  $N$ . Následně ji budu v různých bodech  $x_0$  rozeznávat a zaznamenávat frekvenční spektra vlnění. Tato spektra lze porovnat s korespondujícími výstupy rovnice (2.8.24), nejnázve prostřednictvím mírně přizpůsobené aplikace vytvořené v části 3.

### 4.2 Měřicí sestava

Pro účel experimentu byla navržena a vyrobena jednoduchá měřicí sestava.



Obr. 4.1 Celkový pohled na sestavu



Obr. 4.2 Detail struny s tenzometrickým snímačem



Obr. 4.3 Detail struny s ladící mechanikou

#### 4.2.1 Rám

Rám zajišťuje spolehlivé uložení všech členů sestavy. Jako materiál byla zvolena díky své vysoké tuhosti a spolehlivosti ocel, konkrétně třídy 11. Hlavní část rámu tvoří trubka čtvercového profilu o straně 30 mm o tloušťce stěny 2 mm, ke které jsou pomocí svarů upevněny další kusy materiálu pro snadné uskutečnění šroubových spojů vrtanými dírami a také pro vytvoření nohou ke stabilnímu usazení sestavy. Na horní stěně trubky je pod strunou vteřinovým lepidlem přilepeno měřítko (úsek umělohmotného svinovacího metru), které popisuje souřadnici  $x \in (0; L)$ . Dutá trubka může být vyplněna vhodným tlumícím materiálem, je-li snaha docílit minimálního možného vlivu rámu na vlnění struny (pro toto měření tak učiněno nebylo). Celková délka rámu včetně hlav šroubů je 633 mm, šířka pak 140 mm. Měřicí sestava se tak snadno vejde na běžný stůl či školní lavici.

#### 4.2.2 Tenzometrický snímač

Pro měření napínající síly volím váhový tenzometrický měřicí člen – hmotnostní senzor 10 kg YZC-133. Ten je připevněn dvojicí šroubů k čelní stěně dutiny vytvořené na konci hlavní trubky. Senzor má následující parametry:

Tabulka 2 Parametry užitého měřicího členu [18, 19]

Materiál	Hliník	Měřicí rozsah	0-10 [kg]
Rozměry	80x12,7x12,7 [mm]	Napájecí napětí	5-10 [V]
Hmotnost	27 [g]	Jmenovitý výstup	1,0±0,1 [mV/V]
		Nelinearita	±0,03% F.S.

Je nutno vzít v úvahu, že tento senzor měří síly na základě deformace. Jakákoli deformace je přitom v naší aplikaci nežádoucí. Je-li totiž struna na jedné straně ukotvena v tenzometrickém senzoru, s rostoucí napínající silou klesá vzdálenost, po které se vlnění šíří, tím, jak se senzor ohýbá. Při měření výšky tónu tedy nastavováním napínající síly  $T$  ovlivňujeme i parametr  $L$ , který má během měření zůstat konstantní a vnášíme tak do výsledků chybu. Tenzometr tímto rovněž hůře plní požadavek absolutně tuhého ukotvení. Předpokládám však, že deformace senzoru, které očekávám v řádu desetin milimetru, budou oproti původní vzdálenosti  $L$  zanedbatelné, a že snížení tuhosti ukotvení nebude příliš výrazné. Kvůli jednoduchosti provedení a nižším nárokům na přesnost výsledků tedy považuji aplikaci tenzometrického snímače za optimální. Zvolený snímač je svým měřicím rozsahem ideální pro síly, které lze na napnuté kytarové struně očekávat. [12, 20]

#### 4.2.3 Uložení struny

Ve volném konci tenzometrického snímače je ukotvena kytarová struna, a to svým koncem s kotvícím kroužkem. V horním závitě snímače je zašroubován dutý šroub, kterým je struna provlečena a o jehož hlavu se kotvící kroužek opírá a zabraňuje tak průchodu konce struny dírou. V dolním závitě je přišroubován segment kobylky elektrické kytary, kterým je struna dále provlečena, a který relativně přesně vymezuje polohu krajního uzlu.

Opačný krajní uzel je určen ocelovým válečkem s výřezem, přišroubovaným k základní tyči rámu. Odtud je struna vedena do ladící mechaniky, upevněné vlastní závitovou dvojicí k po straně přivařenému oku rámu. V ladící mechanice struna drží vlastním třením (případně jednoduchou smyčkou) a ladící mechanikou ji lze libovolně napínat či povolovat. K lepšímu vymezení poloh součástí je užito podložek pro šrouby s šestihrannou hlavou DIN 125 M10.

Mezi takto vytyčenými krajními uzly měříme délku  $L = 430 \text{ mm}$ , po které se šíří vlnění. Tato délka přibližně odpovídá délce struny vymezené stisknutím dvanáctého praxe na standardní elektrické kytáře, což nám poskytuje základní referenci. [1]

#### 4.2.4 Frekvenční snímač

Pro měření vlastních frekvencí struny volím standardní kytarový snímač typu humbucker od výrobce BHK, jehož základní princip je popsán v kapitole 2.1. Tento snímač spočívá volně pod strunou na hlavní tyči sestavy, kde je držen magnetickou přitažlivostí mezi permanentními magnety uvnitř snímače a feromagnetickou ocelí, ze které je sestava vyrobena (toto magnetické působení je stacionární a neovlivňuje tedy nijak měření). Se snímačem lze takto snadno posouvat po délce struny, aniž by přitom byl příliš nestabilně uložen. Provedení humbucker navíc kompenzuje elektromagnetické ruchy okolí a je tak vhodné pro laboratorní měření. Šířka dosedací plochy snímače byla naměřena  $36,5\text{ mm}$ . Jelikož poloha středu snímače by se na měřítku sestavy těžko přímo vymezovala, nastavujeme bližší okraj snímače (bráno od počátku měřítka) do polohy zmenšené o zaokrouhlenou polovinu šířky, tedy o  $18\text{ mm}$ . [1]

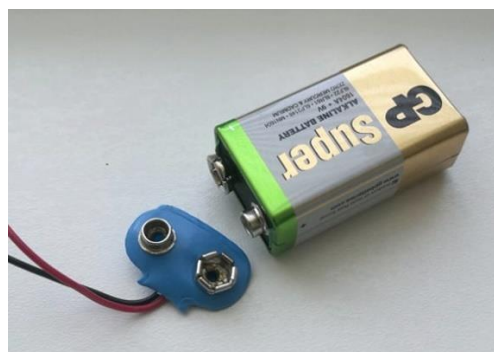
#### 4.2.5 Struna

V této práci byla k měření zvolena struna A tloušťky 38 (hodnota odpovídá rozměru průměru struny a udává se tradičně v tisícinách palce) ze sady strun Power Slinky 2220 od výrobce Ernie Ball. Struna má ocelové jádro a je vinuta niklem. Její délkovou hustotu, potřebnou pro teoretický výpočet, je možno určit zvážením struny na dostatečně přesných vahách a změřením její délky (pro tato měření je nutno odstranit kotvící kroužek). Délkovou hustotu  $\mu$  pak nalezneme jako podíl těchto hodnot. V mém případě jsem však parametr získal na vyžádání přímo od výrobce jako  $\mu = 0,00484\text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . Podrobnější informace jsou uvedeny v příloze II. [21]

Údery budou prováděny tvrdým ostrým kytarovým trsátkem *Tortex Sharp 1.35 mm* od firmy DUNLOP. Touto volbou se nejlépe přiblížíme ideálnímu bodovému dotyku zavedenému v kapitole 2.4. [22]



Obr. 4.4 Trsátko užitě k měření



Obr. 4.5 9V baterie a přípojka baterie

#### 4.2.6 Zpracování signálu

Signály z tenzometrického členu i frekvenčního snímače (v obou případech měříme rozdíly napětí na výstupech) jsou vedeny dráty do multifunkčního I/O modulu USB – 6001 od firmy National Instruments. Zařízení obsahuje analogově-digitální převodník s rozlišením 14 bit a maximální sdílenou vzorkovací frekvencí  $20\text{ kHz}$ . [23]

Modul by mohl sloužit i jako zdroj napětí pro napájení tenzometru, ale povaha tohoto zdroje je příliš nejasná. Nelze vyloučit, že takto dodávané napětí je nestabilní vlivem počítače, ke kterému je modul připojen. Bylo tedy prozatím zvoleno přímočařejší napájení běžné dostupnou 9V baterií, jejíž chování lze snáze předvídat. Ke snadnému připojování baterie byla užitá jednoduchá přípojka z osobních vah (Obr. 4.5). Čerpaná data jsou následně modulem zpracovávána a USB výstupem již v digitální podobě přenášena do počítače, kde je lze v softwaru LabView dále analyzovat. [24]

### 4.3 Zpracování měřených hodnot

Z parametrů tenzometrického snímače v tabulce 2 lze sestavit teoretický vztah pro závislost měřené síly na napětí výstupu snímače. Citlivost senzoru  $k = 1 \text{ mV/V}$  říká, že za plného zatížení bude při napájení 9 V baterií  $U^{výst}$  určeno jako

$$U_{max}^{výst} = kU^{zdroj} = 10^{-3} \cdot 9 = 0,009 \text{ V} \quad (4.3.1)$$

Víme, že toto plné zatížení senzoru odpovídá 10 kg. Za předpokladu, že nulové výstupní napětí odpovídá nulovému zatížení a vztah je lineární, můžeme nalézt závislost pomocí směrnice  $\delta$  [18; 25]

$$m_{max} = \delta U_{max}^{výst} \Rightarrow \delta = \frac{m_{max}}{U_{max}^{výst}} = \frac{10}{0,009} \approx 1111,11 \text{ kg} \cdot \text{V}^{-1} \quad (4.3.2)$$

Nyní zbývá přepočítat hmotnost na sílu vynásobením gravitační konstantou. Tímto získáme po dosažení veškerých vztahů teoretickou závislost síly na výstupním napětí senzoru jako

$$T^{teor} = mg = \frac{m_{max}g}{kU^{zdroj}} U^{výst} \quad (4.3.3)$$
$$T^{teor} = 10899,99U^{výst}$$

V praxi se ukazuje, že teoretický přepočítání není dostatečně přesný. Z teoretické hodnoty pouze vycházíme a po zapojení je provedena kalibrace měřící soustavy. Nejprve kompenzujeme offset, aby nulové výstupní napětí odpovídalo nezatíženému stavu, dále upravujeme směrnici po zavěšení 5 kg kalibrovaného závaží tak, aby měřená hodnota odpovídala této zátěži. Takto získáme výsledný přepočítání užité k získání dat v měření.

$$T = (T^{teor} - offset)korekce \quad (4.3.4)$$

Takto experimentálně byly těsně před započítáním měření nalezeny hodnoty  $offset = 19,45 \text{ N}$  a  $korekce = 0,956$ . Zdá se ovšem, že tyto hodnoty mohou být v čase dlouhodobě proměnné a záviset na rušení systému. Je proto zatím vhodné pro každé měření provést korekci znovu.

Zpracování dat frekvenčního snímače je o dost jednodušší, neboť zkoumáme přímo napětí na výstupu senzoru a analyzujeme pouze obsažené frekvence a amplitudy jeho průběhu. Tuto frekvenční analýzu obstarají funkce programu LabView.

Softwarové zpracování dosud nebylo dovedeno do finální verze a jeho současný popis je tedy přesunut mimo hlavní text do přílohy III.

### 4.4 Naměřené hodnoty a porovnání

Níže popsaná měření byla provedena na neoptimalizované sestavě (hlavně z hlediska zpracování dat tenzometrického snímače), a slouží proto spíše k ověření základní funkčnosti měřící sestavy a získání orientačních dat pro hrubé srovnání s výpočtovým modelem. Měřící sestava tedy v současné době neslouží pro opakované měření s přesně vymezenou chybou. Hlubší rozbor problému a návrh optimalizace je předložen v rámci diskuze v části 5.

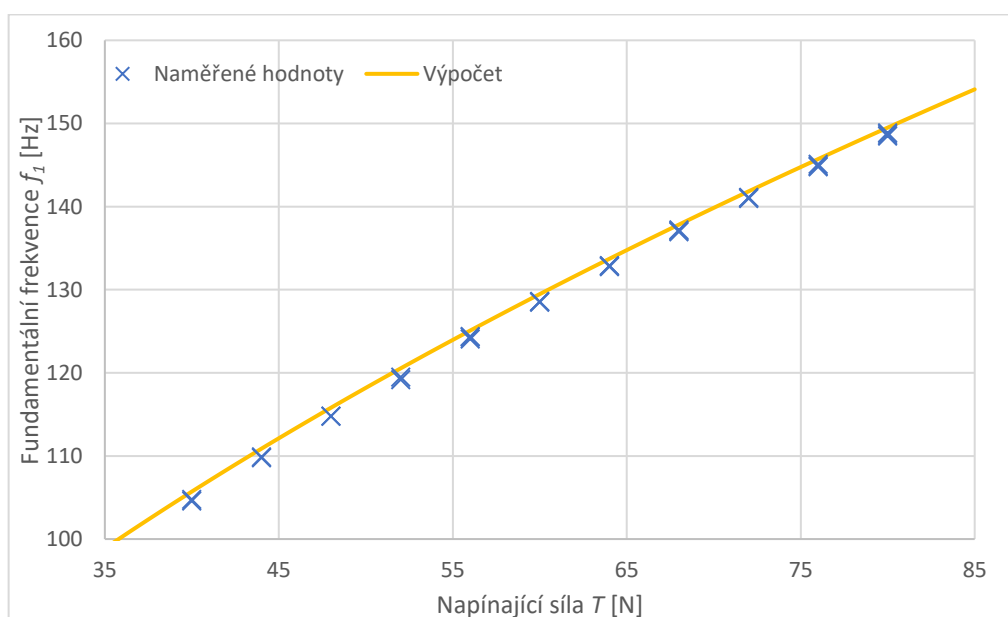
#### 4.4.1 Měření výšky tónu

Při měření budeme zaznamenávat fundamentální vlastní frekvenci struny pro napínající síly dle posloupnosti  $40\text{ N}, 44\text{ N}, 48\text{ N}, \dots 80\text{ N}$ . Měření bylo provedeno celkem třikrát. Pro stejné napínající síly je frekvence rovněž vypočtena dle dříve odvozeného vzorce (2.5.8), kde zbylé konstantní vstupní parametry struny jsou výše určené  $L = 430\text{ mm}$  a  $\mu = 0,00484\text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . Vliv tlumení je pro tyto výpočty možno zanedbat, jak bylo rovněž popsáno dříve. V této závislosti dle modelu vůbec nefigurují parametry  $x_0$ ,  $u_0$  a  $x_b$ , tedy tvar počáteční podmínky a poloha snímače. Jejich hodnoty tedy při měření nebudou přesně vymezovat, ale bude snaha je udržovat přibližně konstantní ( $u_0 < 1\text{ mm}$ ;  $x_0 \approx 0,3L$ ;  $x_b \approx 0,3L$ ). Takto naměřené hodnoty uvádím v následující tabulce:

Tabulka 3 Naměřené a vypočtené hodnoty fundamentální frekvence v závislosti na napínající síle

#	$T$ [N]	$f$ [Hz]				
		1. Měření	2. Měření	3. Měření	Průměr	Výpočet
1	40	105,4	104,8	104,6	104,7	105,7136
2	44	111,2	109,8	109,9	109,85	110,8734
3	48	115,7	114,8	114,8	114,8	115,8035
4	52	120,5	119,2	119,5	119,35	120,5321
5	56	124,4	124,1	124,3	124,27	125,082
6	60	128,6	128,5	128,6	128,57	129,4722
7	64	132,9	132,8	132,9	132,87	133,7183
8	68	137,1	137	137,2	137,1	137,8337
9	72	141,1	141	141,1	141,07	141,8297
10	76	144,8	144,9	145,1	144,93	145,7161
11	80	148,7	148,5	148,9	148,7	149,5016

První čtyři hodnoty prvního měření (v tabulce zvýrazněny šedě) byly pro svou konzistentní odlišnost z datového vzorku vyřazeny. Mohlo se jednat o chybu vzniklou nedokonalým přizpůsobením či usazením struny před prvním napnutím. Zbylé naměřené hodnoty byly vyneseny níže proti teoretickým spojitým hodnotám funkce (2.5.8).



Obr. 4.6 Porovnání naměřené a vypočtené závislosti fundamentální frekvence struny na napínající síle

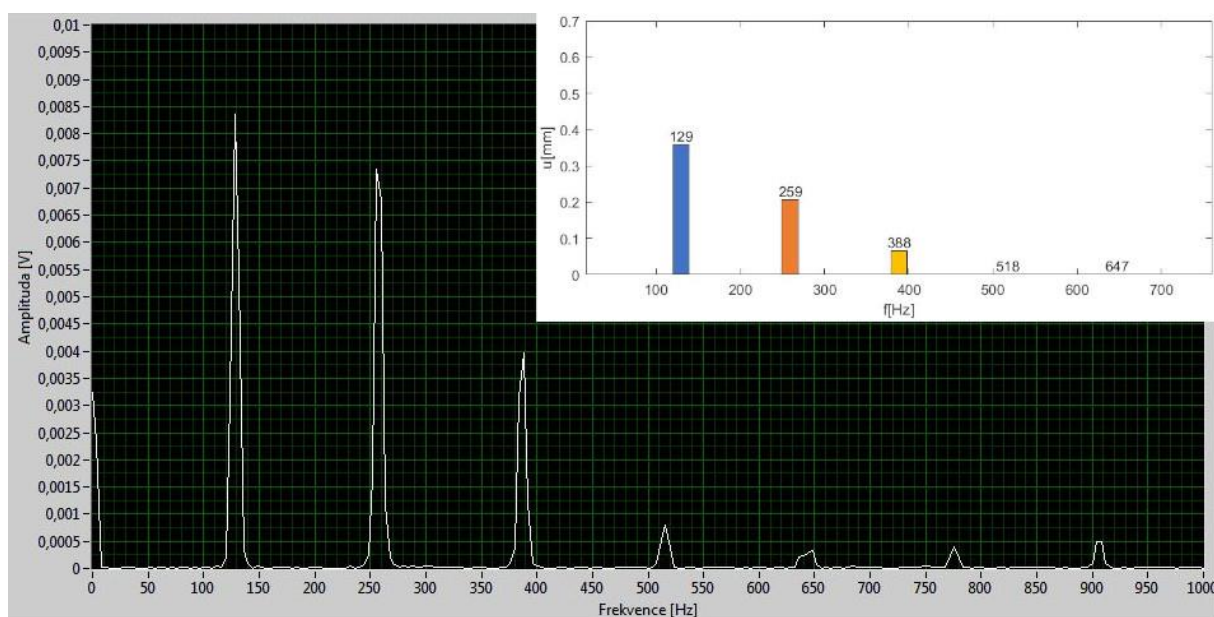


Toto měření potvrzuje platnost vzorce (2.5.8) vycházejícího z našeho matematického modelu. Za předpokladu, že tenzometrický senzor byl správně zkalibrován, můžeme dodat pozorování, že skutečné frekvence mohou být v některých případech mírně nižší, než jak vycházejí z teoretických výpočtů. V našem případě se jedná o rozdíl v řádu desetin  $Hz$ . Toto může být zapříčiněno zanedbáním ohybové tuhosti a pružnosti struny či dalšími idealizacemi zavedenými v teoretických výpočtech. Zajímavým závěrem je, že přestože závislost je obecně mocninná s exponentem 0,5, v našem případě, a tedy potažmo i v případě elektrické kytary (pouze vyšší  $L$ ), je závislost vzhledem k parametrům téměř lineární a dala by se tak i aproximovat.

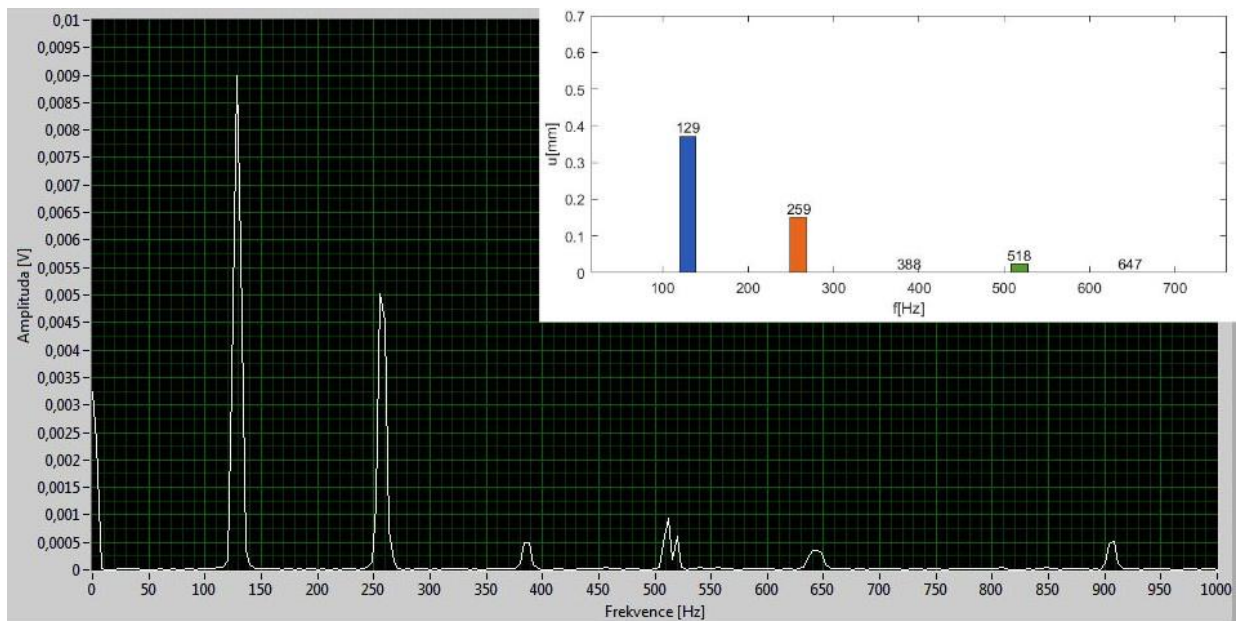
#### 4.4.2 Měření barvy tónu

V další fázi měření zkoumáme na stejné struně poměrné zastoupení jednotlivých vlastních harmonických frekvencí ve výsledném zvuku v závislosti na místě úderu  $x_0$ . V tomto měření přistoupíme pouze k vizuálnímu srovnání. Pod strunou napínanou zvolenou konstantní silou  $T = 60 N$  je střed snímače umístěn do  $L/5$  struny ze strany tenzometru (odpovídá nastavení okraje snímače bližšího nule do polohy  $326 mm$  na měřítku sestavy). Údery jsou prováděny v místech  $L/4 \approx 107 mm$ , v  $L/3 \approx 143 mm$ , a v  $L/2 \approx 215 mm$ . Počáteční výchylka  $u_0$  při úderu pro svou obtížnou měřitelnost nebyla volena přesně, ale pouze odhadem tak, aby byla pro všechny polohy úderu přibližně stejná a byla dostatečně malá, jak diktují podmínky teoretických výpočtů. Těsně po úderu bylo vždy automaticky zachyceno frekvenční spektrum vlnění na struně (závislost maximální výchylky na frekvenci).

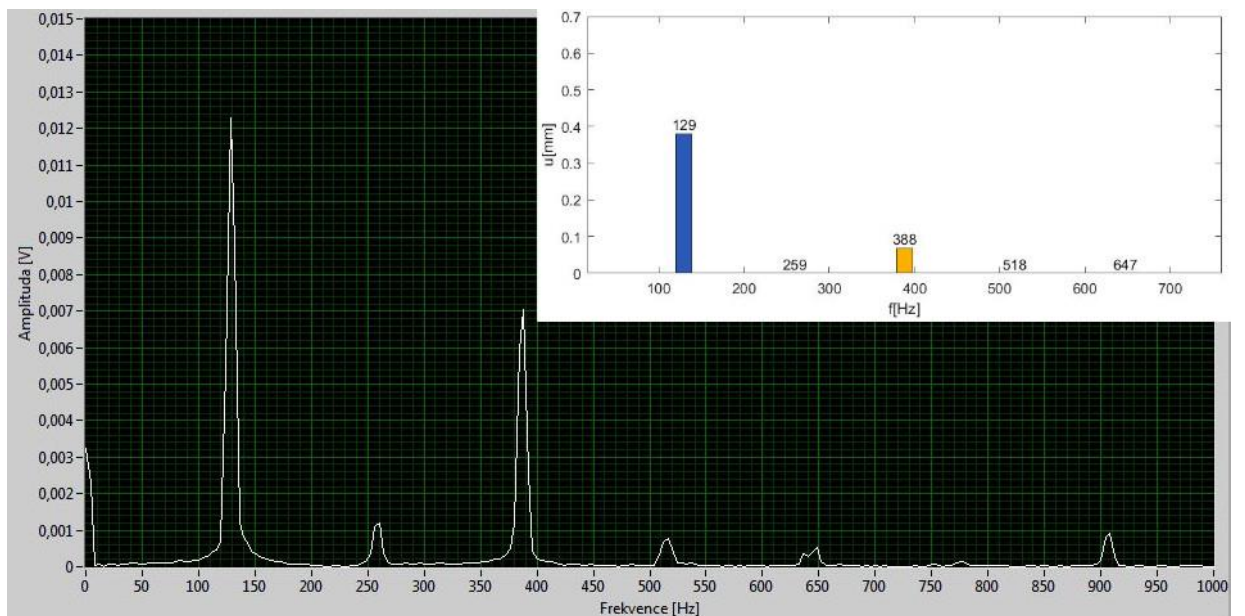
Následně byly vytvořeny korespondující výstupy v našem Simulátoru struny na základě matematického modelu, konkrétně řešení (2.8.24) a z něho vyplývajících vztahů pro amplitudy a frekvence. Vstupní parametr  $x_0$  byl volen postupně dle experimentu, počáteční výchylka  $u_0$  byla odhadnuta po provedení měření pro všechny případy jako  $0,8 mm$ . Zbylé vstupní parametry zůstávají  $T = 60 N$ ,  $L = 430 mm$ ,  $\mu = 0,00484 kg \cdot m^{-1}$  a  $x_b = 0,8L$  (přirozeně byla zvolena interpretace snímačem). Útlum byl zvolen  $b = 2 s^{-1}$ , má ovšem na frekvenční spektrum opět minimální vliv. Spektrum je zachyceno pro čas  $t = 0$ . Společným výstupem jsou naměřená frekvenční spektra na Obr. 4.7 - Obr. 4.9, kam jsou do pravého horního rohu vložena k porovnání frekvenční spektra teoreticky vypočtená.



Obr. 4.7 Porovnání naměřených a vypočtených frekvenčních spekter vlnění při poloze úderu  $x_0 = L/4 = 107 mm$



Obr. 4.8 Porovnání naměřených a vypočtených frekvenčních spekter vlnění při poloze úderu  $x_0 = L/3 = 143$  mm



Obr. 4.9 Porovnání naměřených a vypočtených frekvenčních spekter vlnění při poloze úderu  $x_0 = L/2 = 215$  mm

Nejvýraznějším rozdílem vypočtených a naměřených dat je, že zatímco z matematického modelu plynou diskrétní hodnoty frekvencí s korespondujícími diskrétními hodnotami amplitud, při reálném měření nalzáme závislost amplitudy na frekvenci zcela spojitou s výraznými maximy (*peaky*) namísto diskrétních hodnot (ve frekvenčním spektru je zachycen i nízkofrekvenční šum, který se nepodařilo vyfiltrovat a který neuvažujeme).

Z měření můžeme potvrdit, že vyšší harmonické frekvence vlnění jsou skutečně přibližně  $n$ -násobky fundamentální frekvence. Dále je vidět, že pořadí velikostí maximálních výchylek jednotlivých složek i jejich hrubě přibližné relativní poměry odpovídají našemu teoretickému řešení, jak bylo rozebráno v kapitole 2.7. Například úder v místě  $L/3$ , kde se nachází uzel třetí harmonické složky, prudce redukuje zastoupení třetí harmonické frekvence, obdobně úder v místě  $L/2$  redukuje zastoupení druhé harmonické frekvence. Fundamentální frekvence je ve všech případech nejvýznamnější.

Číselné poměrné hodnoty amplitud se však již liší a dokonce jsou v některých případech i proměnné v čase (v případě matematického modelu z charakteru členu  $e^{-bt}$  s časem  $t$  stejnoměrně klesají). Tyto markantní rozdíly nejspíše plynou jak z idealizací modelu (zanedbaná ohybová tuhost, pružnost struny ...), tak z nedokonalostí měřící sestavy (rezonance s tělem sestavy, pružná uložení struny, frekvenční snímač o nezanedbatelné tloušťce ...). Z těchto poznatků můžeme vyvodit závěr, že tvar počáteční podmínky na reálné struně není během vlnění zdaleka tak přesně uchován, jak naznačuje matematický model.

## 5. DISKUZE

Problematika šíření vlnění ve struně elektrické kytary byla zkoumána výpočtovým modelem a fyzikálním měřením, přičemž ani jeden z přístupů neposkytuje dokonale přesný náhled do problematiky. Teoretický výpočtový model je omezen mnoha idealizacemi, kterých jsme se během jeho výstavby dopustili, přičemž je obtížné přesně vymežit jejich vliv na výsledek. Naproti tomu fyzikální měření je ovlivněno nejistotami měření a obtížemi při snaze dosáhnout vytčených ideálních podmínek měření. Přesto bylo v této práci získáno a ověřeno mnoho poznatků a představ o vlnových dějích na napjaté struně a struně elektrické kytary.

Vytvořený matematický model je možno rozšířit o další zatím nepostihnuté vlivy, například o ohybovou tuhost struny či neideální ukotvení. Je však nutno zvážit, že jakákoliv zobecnění již znemožňují dostupné analytické řešení parciální diferenciální rovnice a vedou na komplikovaná numerická řešení. Není jasné, zda by tento přístup byl nadále realizovatelný v rozhraní vytvořené aplikace Simulátor struny. [6]

Vyvinutá aplikace Simulátor struny je v současné době kompletní a optimálně funkční. Přesto se naskytá stále mnoho možností, jak aplikaci dále rozšířit. Jednou z možností je vložení vizuální reprezentace snímače do souřadném systému pro lepší ilustraci, či přidání *tooltipů*, které po najetí kurzorem hlouběji objasní a vysvětlí význam jednotlivých prvků uživatelského rozhraní přímo v prostředí aplikace. Účelné by bylo i zpřehlednění a lepší unifikace samotného kódu.

Z hlediska měření nebyl zatím dostatečně zvládnut hlavně výstup tenzometrického snímače, jehož zpracování nyní představuje hlavní slabinu měření. Napěťový výstup senzoru v hodnotách jednotek  $mV$  se nachází na samé hraně rozlišení užitého I/O modulu, kde se vyskytují i mnohé ruchy. Signál je nyní díky značnému softwarovému zpracování čitelný, avšak jeho význam je dlouhodobě nestálý a jeho přesnost neurčitá. Problém lze do budoucna řešit užitím stabilního laboratorního napěťového zdroje pro napájení senzoru (případně stabilizací zdroje I/O modulu) a vložím operačního zesilovače na výstup senzoru pro zesílení výstupního napětí do lépe zpracovatelných hodnot. Bude-li tohoto dosaženo a bude-li optimalizováno rozhraní pro toto měření v aplikaci *LabView*, bude možno na tomto měření postavit laboratorní úlohu pro cvičení z předmětu Fyzika I. Dalším zajímavým rozšířením měření by byla implementace mikrofону, který by v dostatečně velké vzdálenosti snímal přímo zvukové projevy struny a poskytoval tak i data k porovnání s akustickou interpretací výpočtového modelu, jak byla popsána v kapitole 2.10.

Výsledky samotného měření již byly diskutovány v předchozí části.

## 6. ZÁVĚR

Vytyčené cíle této bakalářské práce byly naplněny. Bylo podrobně popsáno teoretické řešení šíření vlnění ve struně elektrické kytary, výsledky byly úspěšně užity pro vytvoření aplikace Simulátor struny, která je názorně a interaktivně demonstruje, a pro srovnání s reálnou strunou bylo provedeno provizorní měření na navržené a zhotovené měřící sestavě. Měření nebylo dosud úplně popsáno a optimalizováno, což tak zůstává předmětem budoucí práce. Vypracovaný teoretický výklad a aplikaci Simulátor struny je již nyní možno využívat pro hlubší zatraktivnění výuky na FS ČVUT.

## 7. PŘÍLOHY

### 7.1 PŘÍLOHA I

V této příloze je uveden postup řešení aplikované Fourierovy transformace. Pro tvar počáteční podmínky z Obr. 2.8 lze nalézt analytický předpis analogicky kapitole 2.4 jako po částech lineární funkci  $v_p(x)$ . Na ni aplikujeme Fourierovu transformaci a vyřešíme

$$v_p(x) = \begin{cases} \frac{u_0}{x_0 - L}(L + x) & x \in \langle -L, -x_0 \rangle \\ \frac{u_0}{x_0}x & x \in (-x_0, x_0) \\ \frac{u_0}{L - x_0}(L - x) & x \in (x_0, L) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L v_p(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \\ &= \frac{1}{L} \left( \int_{-L}^{-x_0} \frac{u_0}{x_0 - L}(L + x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-x_0}^{x_0} \frac{u_0}{x_0} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \int_{x_0}^L \frac{u_0}{L - x_0}(L - x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) = \frac{1}{L}(I + II + III) \end{aligned}$$

I)

$$\begin{aligned} &\int_{-L}^{-x_0} \frac{u_0}{x_0 - L}(L + x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{u_0}{x_0 - L} \int_{-L}^{-x_0} (L + x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} u = (L + x) \quad v' = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ u' = 1 \quad v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{array} \right] = \\ &= \frac{u_0}{x_0 - L} \left[ -(L + x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_{-L}^{-x_0} - \frac{u_0}{x_0 - L} \int_{-L}^{-x_0} \left( -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) dx = \\ &= \frac{-u_0 L}{(x_0 - L)n\pi} \left( (L - x_0) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \right) + \frac{u_0 L}{(x_0 - L)n\pi} \left[ \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_{-L}^{-x_0} = \\ &= \frac{u_0 L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{u_0 L^2}{(x_0 - L)n^2\pi^2} \left( -\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \sin(n\pi) \right) = \\ &= \frac{u_0 L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) - \frac{u_0 L^2}{(x_0 - L)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} &\int_{-x_0}^{x_0} \frac{u_0}{x_0} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2u_0}{x_0} \int_0^{x_0} x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \left[ \begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ u' = 1 \quad v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{array} \right] = \\ &= \frac{2u_0}{x_0} \left[ -\frac{xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_0^{x_0} - \frac{2u_0}{x_0} \int_0^{x_0} \left( -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) dx = \\ &= \frac{2u_0}{x_0} \left( -\frac{x_0 L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \right) + \frac{2u_0 L}{x_0 n\pi} \left[ \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_0^{x_0} = \\ &= -\frac{2u_0 L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{2u_0 L^2}{x_0 n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \end{aligned}$$

III)

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^L \frac{u_0}{L-x_0} (L-x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx &= \frac{u_0}{L-x_0} \int_{x_0}^L (L-x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \left| \begin{array}{l} u = (L-x) \quad v' = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ u' = -1 \quad v = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{array} \right| = \\ &= \frac{u_0}{L-x_0} \left[ -(L-x) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_{x_0}^L - \frac{u_0}{L-x_0} \int_{x_0}^L (-1) \left(-\frac{L}{n\pi}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \\ &= \frac{Lu_0}{(L-x_0)n\pi} \left( (L-x_0) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \right) - \frac{u_0L}{(L-x_0)n\pi} \left[ \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_{x_0}^L = \\ &= \frac{Lu_0}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) - \frac{u_0L^2}{(L-x_0)n^2\pi^2} \left( \sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \right) = \\ &= \frac{Lu_0}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{u_0L^2}{(L-x_0)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} (I + II + III) = \\ &= \frac{1}{L} \left( \frac{Lu_0}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{u_0L^2}{(L-x_0)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{u_0L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_0L^2}{(x_0-L)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + -\frac{2u_0L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{2u_0L^2}{x_0n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \right) = \\ &= \frac{1}{L} \left( -\frac{2u_0L^2}{(x_0-L)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{2u_0L^2}{x_0n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \right) = \\ &= -\frac{2u_0L}{(x_0-L)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) + \frac{2u_0L}{x_0n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) = \\ &= \left( \frac{2u_0L}{x_0n^2\pi^2} - \frac{2u_0L}{(x_0-L)n^2\pi^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) = \frac{-2u_0L^2}{x_0(x_0-L)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) = \\ &= \frac{2u_0L^2}{x_0(L-x_0)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \end{aligned}$$

Nalézáme tak tvar členu  $b_n$  jako: [11]

$$b_n = \frac{2u_0L^2}{x_0(L-x_0)n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)$$

## 7.2 PŘÍLOHA II

Na vyzádání od výrobce Ernie Ball jsem obdržel následující hodnoty lineárních hustot pro jednotlivé struny ze sady Power Slinky 2220. Hodnoty byly obdrženy v imperiálních jednotkách.

11	0.00002900 lbs/in.	28	0.00014700 lbs/in.
14	0.00004200 lbs/in.	38	0.00027100 lbs/in.
18p	0.00007100 lbs/in.	48	0.00042200 lbs/in.

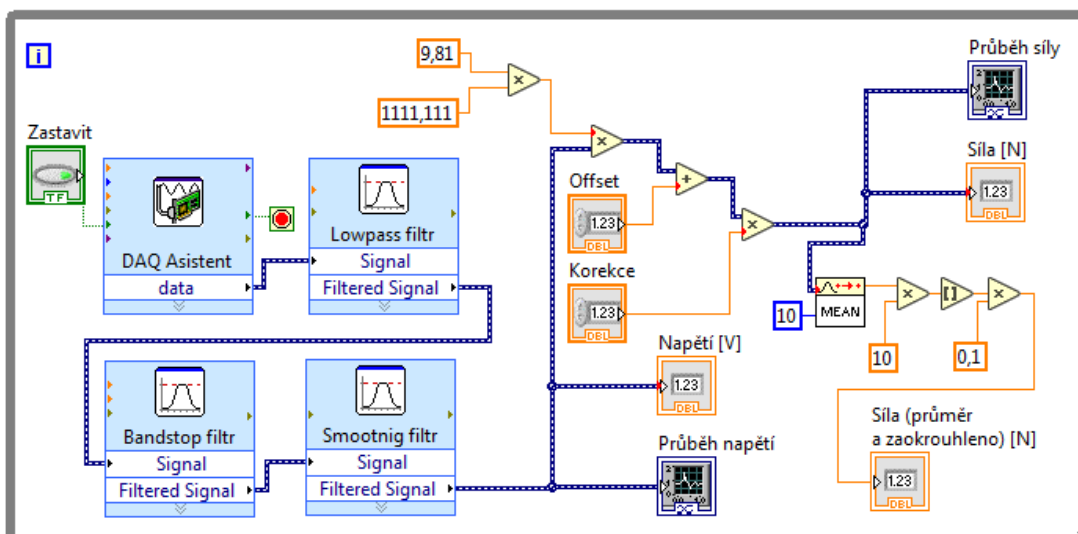
Hodnotu pro užitou strunu tloušťky 38 převedeme do systému SI jako

$$\mu = 0,000271 \text{ lbs} \cdot \text{in}^{-1} = 0,000271 \cdot 17,857967 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} = 4,8395 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

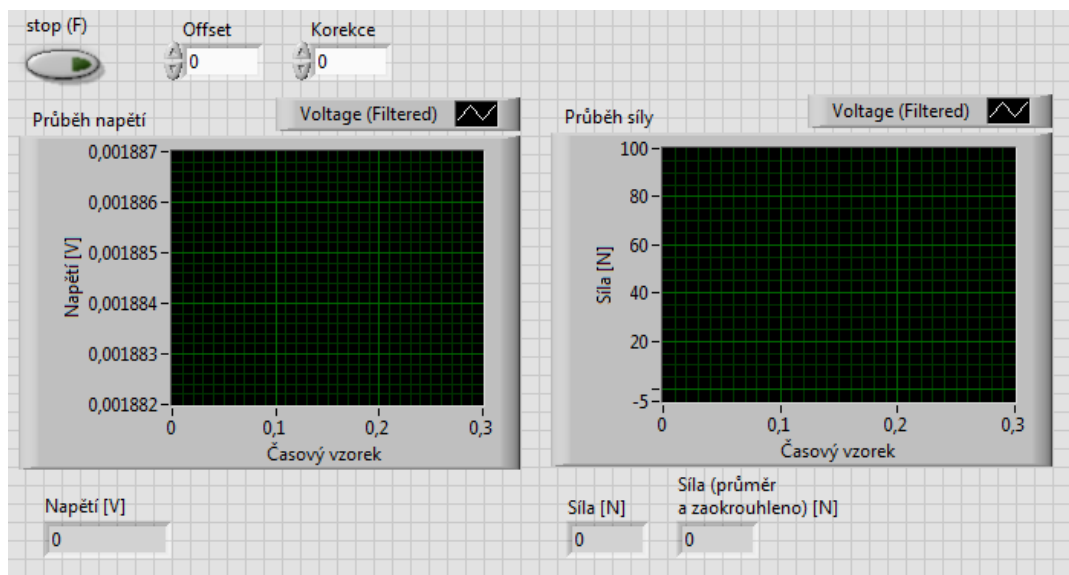
## 7.3 PŘÍLOHA III

Tato příloha pojednává o provizorních programech vytvořených v softwaru LabView k získání dat pro praktickou část této práce a ověření funkčnosti měřící sestavy. Kvůli potřebě čerpat nejširší možný datový vzorek z obou senzorů (po optimalizaci navržené v kapitole 5 toto již nebude nutno), bylo třeba v programu Labview vytvořit dva oddělené VI soubory – jeden pro nastavování napínající síly a druhý

pro následnou analýzu harmonických frekvencí. Níže jsou přiloženy snímky blokového diagramu a předního panelu souboru vytvořeného pro analýzu dat z tenzometrického snímače.



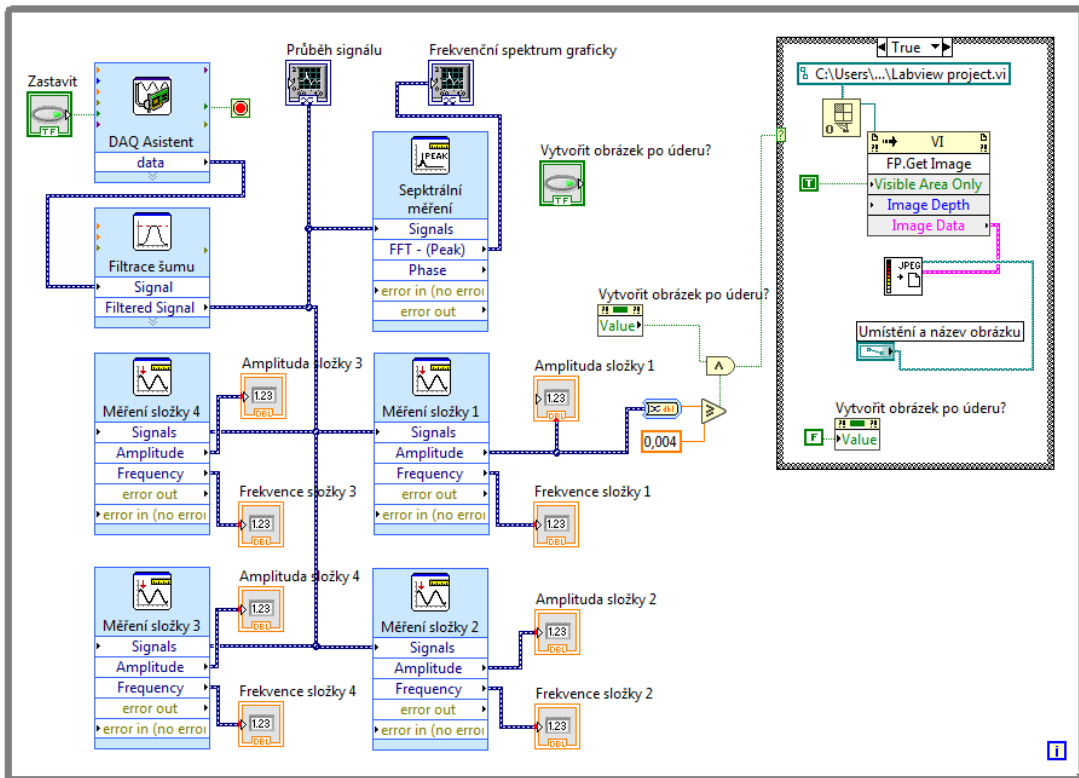
Obr. 7.1 Blokový diagram provizorního programu pro zpracování dat tenzometrického snímače



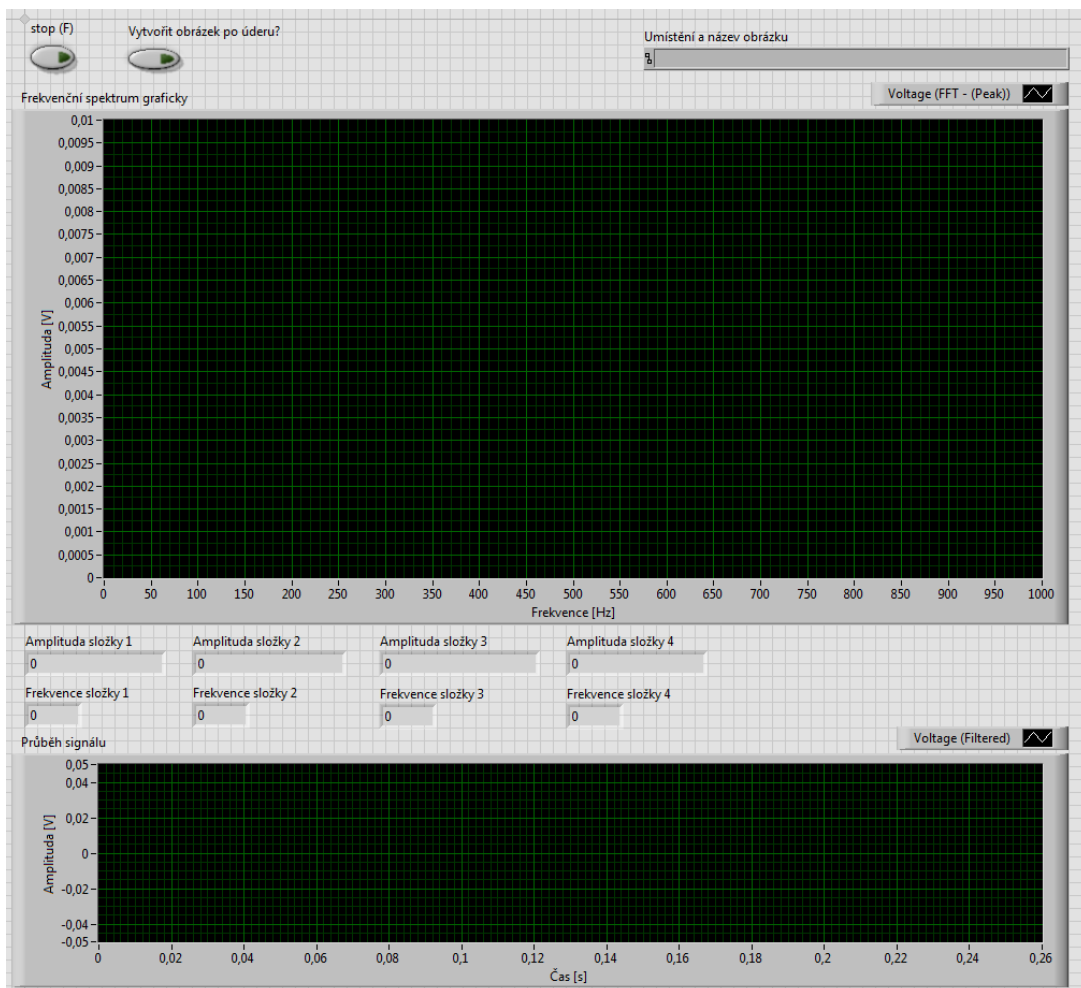
Obr. 7.2 Přední panel provizorního programu pro zpracování dat tenzometrického snímače

Výstupní signál modulu je nejprve zpracován filtrací, která redukuje škodlivý vliv rušení signálu a interpoluje hodnotu na širokém vzorku mezi nejmenšími dílky rozlišení. Na výstupu kontrolujeme zpracovanou hodnotu napětí. Ta je následně teoreticky přepočtena na sílu a korigována, dle metody uvedené v kapitole 4.3. Hodnotu zatížení snímače pak odečítáme po zprůměrování a zaokrouhlení na jedno desetinné místo. Blokový diagram a přední panel souboru pro sběr dat frekvenčního snímače pak vypadají takto:





Obr. 7.3 Blokový diagram provizorního programu pro zpracování dat frekvenčního snímače



Obr. 7.4 Přední panel provizorního programu pro zpracování dat frekvenčního snímače

Signál je na výstupu modulu lehce filtrován, načez je zpracován Express VI funkcí *Spectral Measurements*, ze které zobrazují data v grafu frekvenčního spektra. Signál je rovněž zpracováván Express VI funkcemi *Tone Measurements*, které nalézají jeho jednotlivé složky a určují jejich amplitudu a frekvenci přesněji číselně. Signál je také zobrazován přímo jako graf funkce času. Pravá část programu automatizuje pořízení snímku výstupu ihned po rozeznění struny. Je-li aktivováno tlačítko *Vytvořit obrázek po úderu?* a následně je detekována amplituda vyšší než 0,004 V, program zachytí přední panel se všemi výstupy a uloží ho ve formátu *jpg* do zvoleného adresáře pod zvoleným jménem. [24]

## 8. CITOVANÁ LITERATURA

- [1] KOCH, Martin. *Building Electric Guitars: How to Make Solid-Body, Hollow-Body and Semi-Acoustic Electric Guitars and Bass Guitars*. 2nd ed. Německo: Koch Verlag, 2001. ISBN 978-3901314070.
- [2] STRAUSS, Walter A. *Partial differential equations: an introduction*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-0-470-05456-7.
- [3] HANCOCK, Matthew J. *The 1-D Wave Equation*. In: MIT OpenCourseWare [online]. MIT, 2006. [vid. 28.02.2021]. Dostupné z: <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/lecture-notes/waveeqni.pdf>
- [4] OHANIAN, Hans C. a John T. MARKERT. *Physics for Engineers and Scientists*. 3rd ed. New York; London : W. W. Norton & Company, 2007. Sv. I. ISBN 978-0-393-11101-9
- [5] School of Physics Sydney, Australia. *The wave equation and wave speed*. In: Physclips [online]. UNSW. [vid. 21.02.2021]. Dostupné z: [https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/wave\\_equation\\_speed.htm#tension](https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/wave_equation_speed.htm#tension)
- [6] PELC, Jason. *Solving the Sound of a Guitar String*. In: Professor Robert B. Laughlin, Department of Physics [online]. Stanford University, 2007. [vid. 28.02.2021]. Dostupné z: <http://large.stanford.edu/courses/2007/ph210/pelc2/>
- [7] VAJIAC, M. a J. TOLOSA. *The Wave Equation*. In: An Introduction to Partial Differential Equations in the Undergraduate Curriculum [online]. Harvey Mudd College, 2003. [vid. 18.02.2021]. Dostupné z: <https://www.math.hmc.edu/~ajb/PCMI/lecture7.pdf>
- [8] MORIN, David. *Transverse Wave on a string*. In: Scholars at HARVARD [online]. Harvard, 2021. [vid. 28.02.2021]. Dostupné z: [https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/waves\\_transverse.pdf](https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/waves_transverse.pdf)
- [9] BUDINSKÁ, Zuzana. *Fyzika I*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2020. ISBN 978-80-01-06673-7.
- [10] HERRMANN, Leopold. *Obyčejné diferenciální rovnice – řady*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-03041-5.
- [11] HERRMANN, Leopold. *Fourierovy řady. Komentované přednášky*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2006. ISBN 80-01-02603-5.
- [12] ACHILLES, Daryl. *Tensions of Guitar Strings*. In: UIUC Physics 406 [online]. The Grainger College of Engineering, 2000. [vid. 22.05.2021]. Dostupné z: [https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Student\\_Projects/Fall00/DAchilles/Guitar\\_String\\_Tension\\_Experiment.pdf](https://courses.physics.illinois.edu/phys406/sp2017/Student_Projects/Fall00/DAchilles/Guitar_String_Tension_Experiment.pdf)
- [13] *Harmonic series (music)* [online]. Wikipedia, the free encyclopedia [vid. 05.05.2021]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic\\_series\\_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(music))
- [14] KOSHYAKOV, N. S., M. N. SMIRNOV a E. B GLINER. *Differential equations of mathematical physics*. Amsterdam: North-Holland Publishing company, 1964. ISBN neznámé.

- [15] HANCOCK, Matthew J. *Solutions to Problems for the 1-D Wave Equation*. In: MIT Libraries [online]. MIT, 2004. [vid. 28. 02, 2021]. Dostupné z: <https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/36869/18-303Fall-2004/NR/rdonlyres/Mathematics/18-303Fall-2004/901E96F1-5F61-4EFC-AADD-C9352D29B241/0/probwave1solns.pdf>
- [16] The MathWorks, Inc. *MATLAB® Primer*. In: PDF Documentation for MATLAB [online]. Mathworks, 2021. [vid. 15.04.2021]. Dostupné z: [https://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/matlab/learn\\_matlab.pdf](https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/learn_matlab.pdf)
- [17] *MATLAB* [online]. MathWorks. [vid. 07.03.2021]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
- [18] *YZC-133 Weighing Load Cell Sensor 10kg For Electronic Weighing Scale* [online]. MACFOS PRIVATE LIMITED. [viz. 22.04.2021]. Dostupné z: <https://robu.in/product/weighing-load-cell-sensor-10kg-electronic-yzc-133-wires/>
- [19] *Hmotnostní senzor 10kg YZC-133* [online]. Simple Engineering s.r.o. [vid. 22.04. 2021]. Dostupné z: <https://www.ptshop.cz/Hmotnostni-senzor-10kg-YZC-133-d764.htm>
- [20] *What is a beam load cell, and how does it work?* [online]. Flintec Inc. [vid. 22.05.2021]. Dostupné z: <https://www.flintec.com/weight-sensors/load-cells/how-does-a-beam-load-cell>
- [21] *Power Slinky Nickel Wound Electric Guitar Strings - 11-48 Gauge Ernie Ball* [online]. Ernie Ball Inc. [vid 22.05.2021]. Dostupné z: <https://www.ernieball.com/guitar-strings/electric-guitar-strings/slinky-nickel-wound-electric-guitar-strings/6-string#P02220>
- [22] *TORTEX® SHARP PICK 1.35MM* [online]. Dunlop Manufacturing, Inc. [vid. 26.05.2021]. Dostupné z: <https://www.jimdunlop.com/tortex-sharp-pick-1-35mm>
- [23] *NI USB-6001 specifications* [online]. National Instruments [vid. 26.05.2021]. Dostupné z: <https://www.ni.com/pdf/manuals/374369a.pdf>
- [24] *What Is LabVIEW?* [online]. NATIONAL INSTRUMENTS CORP [vid. 26.05.2021]. Dostupné z: <https://www.ni.com/cs-cz/shop/labview.html>
- [25] ZUMBRUN, Henry. *Converting an mV/V load cell signal into Engineering Units: Why this may be the most accurate and cost-effective way to use a calibration curve*. In: BlogPost [online]. MHFORCE, 2020. [vid. 22.05.2021]. Dostupné z: <https://www.mhforce.com/BlogPost/PostDetails/256?title=Converting-an-mV/V-load-cell-signal-into-Engineering-Units:-Why-this-may-be-the-most-accurate-and-cost-effective-way-to-use-a-calibration-curve>

# 9. SEZNAM OBRÁZKŮ A TABULEK

## Seznam obrázků

Obr. 2.1 Příčná vlna šířící se jednorozměrnou strunou; vytvořeno dle [2].....	12
Obr. 2.2 Uvolněný segment struny na úseku $h$ s reakčními silami, vytvořeno dle [2].....	12
Obr. 2.3 Rozklad sil do směrů souřadných os.....	13
Obr. 2.4 Znázornění goniometrických funkcí pro malé úhly, vytvořeno dle [4] .....	14
Obr. 2.5 Graf počáteční podmínky pro úder na kytaru, vytvořeno dle [6] .....	15
Obr. 2.6 Vlna vcházející do uzlu $N$ , jehož účinek je nahrazen převrácenou vlnou; vytvořeno dle [4] .....	17
Obr. 2.7 Základní tvary harmonických stacionárních vlnění .....	18
Obr. 2.8 Počáteční podmínka rozvinuta v lichou periodickou funkci (vykreslena jedna perioda).....	24
Obr. 2.9 Graf řešení vlnové rovnice pro kytarovou strunu s konkrétními hodnotami (jednotky os jsou v $m$ ) .....	25
Obr. 2.10 .....	25
Obr. 2.11 .....	25
Obr. 2.12 .....	25
Obr. 2.13 .....	25
Obr. 2.14 Zastoupení harmonických frekvencí, je-li na strunu zahráno přibližně v jedné šestině její délky .....	27
Obr. 2.15 Zastoupení harmonických frekvencí, je-li na strunu zahráno přibližně v jedné třetině její délky .....	28
Obr. 2.16 Zastoupení harmonických frekvencí, je-li na strunu zahráno přibližně v polovině její délky .....	28
Obr. 3.1 Rozhraní aplikace Simulátor struny, přednastavené parametry odpovídají hornímu E elektrické kytary dle [12] .....	35
Obr. 3.2 Snímek aplikace pořízený během jejího chodu, v čase $t = 0,023$ s.....	36
Obr. 3.3 Příklad zvlnění tvaru počáteční podmínky při volbě parametru $x_0$ příliš blízko krajnímu uzlu .....	37
Obr. 3.4 Vizualizace fungování programu .....	38
Obr. 3.5 Vytvoření časovače na počátku skriptu .....	39
Obr. 3.6 Základní kostra while cyklu animace (obsah je pro přehlednost prozatím vynechán) .....	39
Obr. 3.7 Řešení vlnové rovnice rozepsané v prostředí Matlab.....	39
Obr. 3.8 Příkazy pro přepis grafů funkcí a navýšování proměnné $t$ .....	40
Obr. 3.9 Přepis parametrů hodnot z upravitelných polí do proměnných .....	40
Obr. 3.10 Kontrola platnosti vstupních parametrů .....	41
Obr. 3.11 Příklad výpočtů pro úpravu neanimovaného grafického výstupu .....	41
Obr. 3.12 Výpočet a provedení zvukového výstupu dle obou metod .....	42
Obr. 3.13 Aktivace interaktivity souřadného systému .....	42
Obr. 3.14 Funkce mouseMove, která získává informace o poloze kurzoru.....	42
Obr. 3.15 Vytvoření entit grafů ihned po zapnutí aplikace .....	43
Obr. 4.1 Celkový pohled na sestavu .....	44
Obr. 4.2 Detail strany s tenzometrickým snímačem .....	44
Obr. 4.3 Detail strany s ladící mechanikou.....	44
Obr. 4.4 Trsátka užitá k měření.....	46
Obr. 4.5 9V baterie a přípojka baterie.....	46
Obr. 4.6 Porovnání naměřené a vypočtené závislosti fundamentální frekvence struny na napínající síle .....	48
Obr. 4.7 Porovnání naměřených a vypočtených frekvenčních spekter vlnění při poloze úderu $x_0 = L/4 = 107$ mm .....	49
Obr. 4.8 Porovnání naměřených a vypočtených frekvenčních spekter vlnění při poloze úderu $x_0 = L/3 = 143$ mm .....	50
Obr. 4.9 Porovnání naměřených a vypočtených frekvenčních spekter vlnění při poloze úderu $x_0 = L/2 = 215$ mm .....	50
Obr. 7.1 Blokový diagram provizorního programu pro zpracování dat tenzometrického snímače.....	56
Obr. 7.2 Přední panel provizorního programu pro zpracování dat tenzometrického snímače .....	56
Obr. 7.3 Blokový diagram provizorního programu pro zpracování dat frekvenčního snímače .....	57
Obr. 7.4 Přední panel provizorního programu pro zpracování dat frekvenčního snímače .....	57

## Seznam tabulek

Tabulka 1 Určení poloh uzlů stacionárních vlnění různých frekvencí.....	27
Tabulka 2 Parametry užitého měřicího členu [18; 19] .....	45
Tabulka 3 Naměřené a vypočtené hodnoty fundamentální frekvence v závislosti na napínající síle.....	48