

**ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE**

**FAKULTA STAVEBNÍ  
KATEDRA GEOMATIKY**



**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**RODÍLY VÝŠEK V SYSTÉMECH BPV  
A EGM96 NA ZÁKLADĚ MODELŮ  
KVAZIGEOIDU CR-2005 A QGZÚ-2013 A DAT  
GNSS-NIVELACE**

**2021**

**DIPLOMANT: BC. ZUZANA VAŇKOVÁ  
VEDOUCÍ PRÁCE: ING. JAN HOLEŠOVSKÝ**

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Vaňková Jméno: Zuzana Osobní číslo: 460390Zadávající katedra: Katedra geomatikyStudijní program: Geodézie a kartografieStudijní obor: Geomatika

### II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Rozdíly výšek v systémech Bpv a EGM96 na základě modelů kvazigeoidu CR2005 a QGZÚ-2013 a dat GNSS-nivelace..Název diplomové práce anglicky: Height differences of height systems Bpv and EGM96, based on the quasigeoid models CR2005 and QGZÚ-2013 and GNSS-levelling data.

Pokyny pro vypracování:

Určete rozdíly mezi výškovými systémy Bpv (závazný výškový systém v ČR) a EGM96 (systém, v němž se určují výšky pro potřeby civilního letectví), a to na základě modelů kvazigeoidu CR2005 a QGZÚ-2013, výsledky porovnejte. Provedte též výpočet rozdílů zadaných výškových systémů na základě dat GNSS-nivelace bodů výběrové údržby ZÚ, výsledky opět vzájemně srovnajte a zhodnoťte.

Podkladem pro zpracování práce jsou: a) geopotenciální model EGM96, b) model kvazigeoidu CR2005, c) model kvazigeoidu QGZÚ-2013, d) datový soubor GNSS-nivelace bodů výběrové údržby ZÚ.

Výstupem budou mapy rozdílů výšek systémů Bpv a EGM96 na území ČR a elektronický datový soubor rozdílů výšek daných výškových systémů.

Seznam doporučené literatury:

1. Lemoine, F.G., et al. (1998): The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96. NASA Technical Publication, NASA.
2. Holešovský J. (2007): Vztah výšek v systémech Bpv a EGM96 na území ČR. Diplomová práce, ČVUT, Fakulta stavební.
3. Kostecký, J., Kostecký jr, J., Pešek, I., Šimek, J., Švábenský, O., Weigel, J., Zeman, A. (2004): Quasigeoids for the territory of the Czech Republic. Stud. Geophys. Geod., 48 (2004), 503-518.
4. Zeman, A. (2003): Fyzikální geodézie 10. Teorie výšek a výškové systémy. Doplnkové skriptum. Vydavatelství ČVUT.

Jméno vedoucího diplomové práce: Ing. Jan HolešovskýDatum zadání diplomové práce: 5.2.2021Termín odevzdání diplomové práce: 16.5.2021*Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku*

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 16. 5. 2021 .....



.....  
Zuzana Vaňková

## Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala vedoucímu práce panu Ing. Janu Holešovskému, za odborné vedení, ochotu, trpělivost a poskytnutí cenných rad a věcných připomínek při zpracování diplomové práce. Také bych ráda poděkovala mé rodině za umožnění studia a za podporu v jeho průběhu.

## Abstrakt

Tato práce se zabývá výškovými systémy Bpv a EGM96. Vznikla za účelem zjistit rozdíl výšek pro ČR mezi těmito systémy pro potřeby civilního letectví. Výpočet výškového rozdílu je realizován jako rozdíl odlehlosti geoidu a výškové anomálie kvazigeoidu, kde obě veličiny jsou vztaženy ke stejnému referenčnímu elipsoidu. Práce se z velké části věnuje právě určení odlehlosti geoidu, kde tvar této plochy je zjištěn pomocí výpočtu velikosti průvodiče ze sady Stokesových koeficientů pro model EGM96. Modely kvazigeoidu CR-2005 a QGZÚ-2013, které jsou v této práci pro výpočet rozdílů využity, jsou popsány hodnotami výškové anomálie v pravidelné síti. Další možností výpočtu výškových rozdílů, kterému se práce pro kontrolu věnuje, je určení rozdílů pomocí souboru bodů výběrové údržby ZÚ. Tyto body mají měřenou elipsoidickou výšku metodou GNSS a také nivelovanou výšku v Bpv. Prostřednictvím těchto hodnot je na nich možno určit výškovou anomálii a pomocí ní poté opět rozdíl výšek. Práce se věnuje také vzájemnému porovnání jednotlivých výsledků. Výškové rozdíly jsou ztvárněny jako kartografický výstup (mapa rozdílů výšek pro ČR).

## Klíčová slova

CR-2005, Bpv, EGM96, elipsoidické výšky, geofyzika, geoid, kvazigeoid, normální Moloděnského výšky, odlehlost geoidu, QGZÚ-2013, Stokesovy koeficienty, Stokesovy ortometrické výšky, výšková anomálie.

# Abstract

This diploma thesis deals with height systems Bpv and EGM96. It was created in order to determine the height differences for the Czech Republic in these systems for the needs of civil aviation. The calculation of this difference is realized as the difference between the geoidal undulation and the height anomaly of the quasigeoid from the same reference ellipsoid. The work is largely devoted to determining the undulation of the geoid, where the shape of this surface is determined by calculating the size of the radius vector from a set of Stokes coefficients for the model EGM96. The quasigeoid models CR2005 and QGZÚ-2013, which are used in this work to calculate the differences, are described by the values of the height anomaly in the regular grid. Another calculation method is to determine the differences using a set of selective maintenance points. These points have a measured ellipsoidal height using the GNSS method and also a normal height in Bpv. Thus, it is possible to determine the height anomaly for them and then also compare it with the undulation of the geoid. The results of the work, which are the calculated differences, are presented as a cartographic output (maps of height differences for the Czech Republic) and compared with each other.

# Keywords

CR-2005, Bpv, EGM96, ellipsoidal heights, geophysics, geoid, quasigeoid, normal Molodensky height, geoidal undulation, QGZÚ-2013, Stokes coefficients, Stokes orthometric heights, height anomalies.

# Obsah

<b>Úvod.....</b>	<b>9</b>
<b>1 Úvod do teorie výšek.....</b>	<b>10</b>
<b>2 Výšky podle Stokesovy teorie a podle Moloděnského teorie.....</b>	<b>12</b>
2.1 Stokesovo řešení tvaru Země .....	12
2.1.1 Geoid .....	12
2.1.2 Ortometrické (Stokesovy) výšky.....	13
2.2 Moloděnského řešení tvaru Země .....	15
2.2.1 Normální (Moloděnského) výšky.....	15
2.2.2 Kvazigeoid.....	16
2.3 Vztahy mezi výškami.....	17
<b>3 Popis dat, použitých modelů a referenčních elipsoidů.....</b>	<b>19</b>
3.1 Referenční elipsoidy.....	19
3.1.1 Elipsoid GRS80 .....	19
3.1.2 Elipsoid WGS84.....	19
3.2 Geopotenciální model EGM96.....	20
3.3 Modely kvazigeoidu.....	21
3.3.1 Model kvazigeoidu CR-2005.....	21
3.3.2 Model kvazigeoidu QGZÚ-2013.....	21
3.4 GNSS-nivelace bodů výběrové údržby ZÚ.....	22
<b>4 Výpočet odlehlosti geoidu.....</b>	<b>23</b>
4.1 Výpočet normovaných přidružených Legendreových funkcí.....	23
4.1.1 Teorie výpočtu.....	23
4.1.2 Praktické řešení.....	24
4.2 Výpočet průvodiče ze Stokesových koeficientů .....	26
4.2.1 Teorie výpočtu.....	26
4.2.2 Praktické řešení.....	29
4.3 Finální výpočet - odlehlost geoidu a problém geocentrické šířky .....	32
4.3.1 Teorie výpočtu.....	32
4.3.2 Praktické řešení.....	34
<b>5 Výpočet rozdílů výšek.....</b>	<b>38</b>
<b>6 Výsledky a jejich zhodnocení.....</b>	<b>40</b>

6.1 Zpracování dat.....	40
6.2 Výškové rozdíly .....	40
6.3 Porovnání výškových rozdílů, zhodnocení modelů .....	47
6.4 Výsledná mapa výškových rozdílů .....	54
<b>7 Závěr .....</b>	<b>55</b>
<b>Seznam použité literatury .....</b>	<b>56</b>
<b>Seznam příloh .....</b>	<b>58</b>
Tištěná i elektronická forma:.....	58
T.1 _Mapy_rozdilu_vysek_QGZU2013_EGM96.PDF .....	58
Elektronická forma:.....	58
E.1_Vyskove_rozdily_QGZU2013_EGM96.TXT .....	58
E.2_Vyskove_rozdily_CR2005_EGM96.TXT .....	58
E.3_Vyskove_rozdily_GNSS-niv_EGM96.TXT .....	58
E.4_Vypocty_MATLAB .....	59



# Úvod

Tato práce je zaměřena na fyzikální geodézii, což je podobor multidisciplinární vědy nazývané geofyzika. Geofyzika se obecně věnuje aplikaci fyziky na planetu Zemi. Fyzikální geodézie je základem vyšší geodézie a zabývá se základy teorie gravitace, gravitačním a tíhovým potenciálem Země a především tíhovým polem Země.

[1], [2], [3]

Důvodem ke vzniku práce na toto téma jsou potřeby civilního letectví. V civilním letectví se určují výšky v systému EGM96, tedy jde o výšky vztažené ke geoidu. Naproti tomu, v závazném výškovém systému ČR jsou výšky určovány v Bpv (výškový systém baltský po vyrovnání), což jsou výšky vztažené ke kvazigeoidu. Tedy výšky v obou systémech jsou určeny nad rozdílnou vztažnou plochou a vzhledem k závaznosti druhého systému (a tedy množství ostatních oblastí, ve kterých jsou výšky určovány v Bpv) vzniká logická potřeba výšky převádět mezi systémy. Rozdíl ve výškách bodů v systému Bpv a EGM96 odpovídá vzdálenosti mezi modely. Tento rozdíl není konstantní, ale mění se v závislosti na zeměpisné poloze.

Cílem je určit rozdíly výšek v systému EGM96 a Bpv pro území ČR. A to na základě modelů kvazigeoidu (CR-2005 a QGZÚ-2013), které jsou dané hodnotou výškové anomálie pro body v pravidelné síti, a modelu EGM96, který je popsán sadou Stokesových koeficientů. Rozdíly výšek získané pomocí modelu CR-2005 jsou srovnány s výsledky získanými z modelu QGZÚ-2013. Poté pro ověření jsou také určeny rozdíly výškových systémů pomocí dat GNSS nivelace bodů výběrové údržby ZÚ. Výsledkem práce je mimo jiné kartografický výstup, umožňující rychlé srovnání výšek.

Práce je členěna do kapitol tak, že v prvních dvou kapitolách nalezne čtenář úvodní poznatky k řešené problematice a seznámí se s tou oblastí teorie výšek, která je nezbytná pro řešení daného úkolu. Především tedy s Moloděnského teorií výšek a s teorií Stokesovou. Dále následuje kapitola 3, ve které jsou popsána jak vstupní data (modely CR-2005, QGZÚ-2013 a EGM96 a body výběrové údržby ZÚ), tak i výchozí modely referenčních elipsoidů. Čtvrtá kapitola pak popisuje výpočet odlehlosti geoidu z dat modelu EGM96, a to postupně v jednotlivých krocích výpočtu. Vždy je popsána teoretická formulace části výpočtu a poté jeho praktické řešení. Pátá kapitola shrnuje závěrečný výpočet rozdílů výšek. Na konci práce se pak v kapitole šest nachází prezentace výsledků a jejich posouzení a porovnání.

# 1 Úvod do teorie výšek

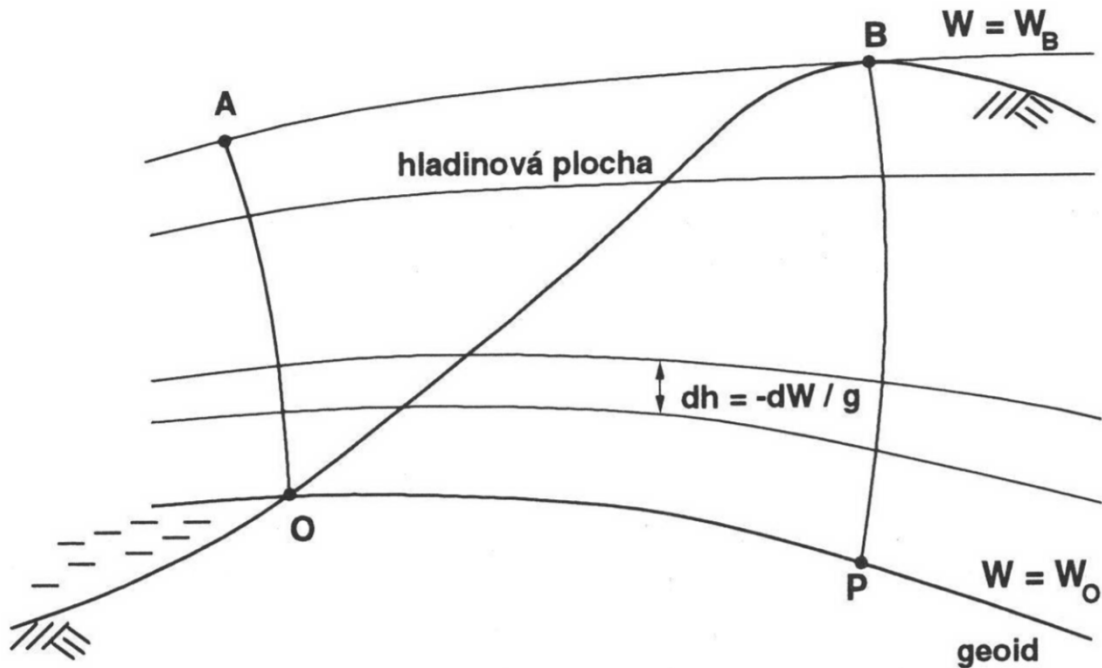
V geodézii je důležitá poloha bodu, ale stejně tak i jeho výška. Pro určení výšky musíme volit vztahnou plochu, od níž výšky měříme. V historii bylo v 18. století prokázáno, že Země má tvar elipsoidu, který je zploštěný na pólech. V první polovině 19. století však elipsoidický model přestal stačit. Začal se totiž projevovat vliv tížnicové odchylky (rozdíl mezi svislicí a normálou k elipsoidu), především pro větší triangulační sítě a jejich vyrovnání. To bylo vyřešeno až zavedením pojmu geoid (více viz kapitola 2.1.1 Geoid) ke konci 19. století. Výpočty se nadále realizují na ploše rotačního elipsoidu, z důvodu jejich jednoduchosti, ale právě díky znalosti průběhu geoidu můžeme polohová měření redukovat na daný referenční elipsoid. Poté, co byl zpřesněn tvar geoidu metodami kosmické geodézie, je možno redukovat i výšky. V moderní geodézii můžeme určit kartézské prostorové souřadnice bodu díky metodě GNSS. Tyto souřadnice je možno pomocí výpočetních vztahů transformovat na souřadnice elipsoidické (včetně výšky nad elipsoidem).

Pro doplnění výše uvedeného, zmiňme ještě dělení výšek na elipsoidické (geometrické) a fyzikální (příp. kvazifyzikální). Geometrické výšky jsou měřeny podél kolmice (normály) ke zvolené referenční ploše. V případě elipsoidu je geometrickou výškou přímá vzdálenost 2 bodů, měřená po normále k elipsoidu, procházející měřeným bodem na povrchu a nazýváme ji výškou elipsoidickou. Elipsoidické výšky pak lze, jak již bylo zmíněno, určit z kartézských souřadnic (které jsou produktem měření GNSS, a mají též čistě geometrický význam).

Fyzikální výšky definujeme jako vzdálenost bodu od jeho průmětu do zvolené (nulové) hladinové plochy směrem po tížnici (tedy ve směru siločar tíhového pole Země). Hladinová plocha je plocha, která má konstantní hodnotu tíhového potenciálu. Pokud by hladinové plochy byly rovnoběžné, pak bychom pomocí nivelace naměřili správné převýšení mezi libovolnými body, protože nivelační přístroj urovnáváme do svislého směru, tedy jeho vertikální osa je shodná s tížnicí. Ovšem hladinové plochy ve skutečnosti rovnoběžné nejsou (sbíhají se směrem k pólům) a mají obecně nepravidelný průběh. Naměřené převýšení by tedy záviselo na trase nivelace, jak je znázorněno na obrázku 1.1. Proto je nutno popsat výšky jinak, například jako rozdíl potenciálů hladinových ploch. Pokud bychom výšku bodu definovali pomocí rozdílu tíhového potenciálu nulové hladinové plochy  $W_0$  a tíhového potenciálu daného bodu  $W_B$ , dostali bychom tzv. geopotenciální kótu  $C_B$ , ze které po vydělení hodnotou 10 dostaneme hodnotu geopotenciální výšky. Vztah pro geopotenciální kótu v bodě B na zemském povrchu (podle obr. 1.1) je tedy:

$$C_B = W_0 - W_A = W_0 - W_B = \int_0^A g \, dh = \int_0^B g \, dh . \quad (1.1)$$

Geopotenciální kóta je udávána v geopotenciálních jednotkách (gpu).



Obr. 1.1 Závislost nivelovaného převýšení na cestě nivelačního pořadu [6]

Protože jsou však veškeré výpočty na geoidu složité a použití pouze geometrických výšek je často nedostačující, je v moderních geodetických systémech využíván tzv. hladinový rotační elipsoid, kterým se nahradí geoid. Povrch takového elipsoidu je hladinovou plochou normálního tíhového pole. Referenční hladinový elipsoid je definován jak geometrickými parametry, které udávají tvar (například hlavní poloosa a zploštění), tak fyzikálními (hmotnost elipsoidu, která je nejčastěji uvedena v součinu s gravitační konstantou, úhlová rychlost rotace).

V následujících kapitolách jsou zmíněny vztažné plochy a druhy výšek, které byly využity v této práci.

[2], [4], [5], [6]

## 2 Výšky podle Stokesovy teorie a podle Moloděnského teorie

Pro tuto práci je potřebná znalost Stokesových ortometrických výšek, normálních Moloděnského výšek a elipsoidických výšek. Pro úvod stručně popíšeme elipsoidické výšky, kterým není třeba věnovat samostatnou podkapitulu. Jde o výšky vztahované ke zvolenému elipsoidu. Nemají fyzikální význam (jde o výšky geometrické). Elipsoidická výška  $h_{el}$  je vzdálenost mezi bodem na povrchu Země a průmětem tohoto bodu po normále na elipsoid. Následující podkapitoly popisují Stokesovy a Moloděnského výšky a plochy, k nimž se výšky vztahují. Na závěr jsou popsány vztahy mezi uvedenými druhy výšek.

### 2.1 Stokesovo řešení tvaru Země

Stokesovu řešení odpovídají ortometrické výšky, vztahované k ploše geoidu, jedná se tedy o fyzikální výšky. Dále si proto představíme geoid a poté výšky k němu vztahované.

#### 2.1.1 Geoid

Název **geoid** zavedl Johann Benedict Listing v roce 1872 (podle [7]). Geoid je jedna konkrétní hladinová (ekvipotenciální) plocha tíhového pole Země. Každá hladinová plocha tíhového pole Země je množinou bodů o stejném tíhovém potenciálu a je definována rovnicí  $W = konst$ . Pokud bychom uvažovali ideálně tekutou Zemi, našli bychom plochu s tíhovým potenciálem  $W_0$ , která by byla totožná s povrchem takové Země. Reálná Země však toto nesplňuje. Proto volíme plochu  $W_0 = konst$  takovou, aby byla co nejbližší fyzickému povrchu Země. Pokud bychom ji vybrali tak, aby odpovídala střední hladině vody v oceánu, pak by procházela pod pevninou a všude byla kolmá k silokřivkám zemského tíhového pole. Takto vybranou plochu nazýváme geoid. Střední hladiny oceánů ale v realitě netvoří jednu hladinovou plochu, proto je geoid v praxi určen jako hladinová plocha procházející zvoleným bodem (v přibližně nulové výšce oproti středním hladinám oceánů).

Průběh reálné plochy geoidu je dán Stokesovými parametry řádu a stupně jdoucího do nekonečna, což je pro praktický výpočet nerealizovatelné. Proto volíme model geoidu, popsany do daného konečného řádu a stupně. Plocha modelu geoidu je „vyhlazená“ na základě toho, jaký je stupeň a řád těchto parametrů. Vztah pro výpočet tvaru geoidu (tedy pro výpočet jeho průvodiče), který je využit pro potřeby této práce, je odvozen ze vztahu pro výpočet tíhového potenciálu. Tíhový potenciál  $W$  je součtem

gravitačního potenciálu  $V$  a potenciálu odstředivé síly zemské rotace  $Q$ , kde gravitační potenciál  $V$  můžeme zapsat pomocí sféricko – harmonického rozvoje:

$$W = \frac{GM}{\rho} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n (c_{nm} \cos(m\Lambda) + s_{nm} \sin(m\Lambda)) P_{nm}(\sin \Phi) \right] + Q, \quad (2.1)$$

kde první člen výrazu je vztah pro gravitační potenciál a potenciál odstředivé síly zemské rotace určíme jako:

$$Q = \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2 \cos^2 \Phi. \quad (2.2)$$

$GM$  je pak geocentrická gravitační konstanta,  $a_0$  hlavní poloosa elipsoidu,  $\rho$  je hledaný průvodič geoidu,  $c_{nm}$  a  $s_{nm}$  jsou Stokesovy koeficienty,  $\Phi$  a  $\Lambda$  jsou geocentrické souřadnice výpočetního (nebo též potenciálového) bodu,  $P_{nm}$  je Legendreova přidružená funkce a  $\omega$  je úhlová rychlost zemské rotace.

Ze vzorce (2.1) je zřejmé, že přesný součet by byl nekonečný, což v reálném výpočtu nelze realizovat. Na vstupu jsou dány Stokesovy koeficienty pro model geoidu do konečného řádu  $m$  a stupně  $n$ , tedy v první sumaci nahradíme symbol nekonečna nejvyšší hodnotou stupně  $n$ .

[2], [3], [4], [8], [9]

### 2.1.2 Ortometrické (Stokesovy) výšky

Pravé ortometrické výšky jsou také nazývány geoidické a odpovídají Stokesově teorii. Uvedme nyní jeden z nepodstatnějších vztahů teorie výšek, který je nazýván Brunsův teorém:

$$dW = -g dh = konst. \quad (2.3)$$

Pravá ortometrická výška je vzdálenost bodu na zemském povrchu od jeho průmětu podél tížnice na geoid. Když vyjdeme ze vztahu (2.3), odvodíme vztah pro výšku bodu B na obr. 1.1:

$$H(B) = \frac{1}{g_m^B} \int_0^B g dh = \frac{W_0 - W_B}{g_m^B}, \quad (2.4)$$

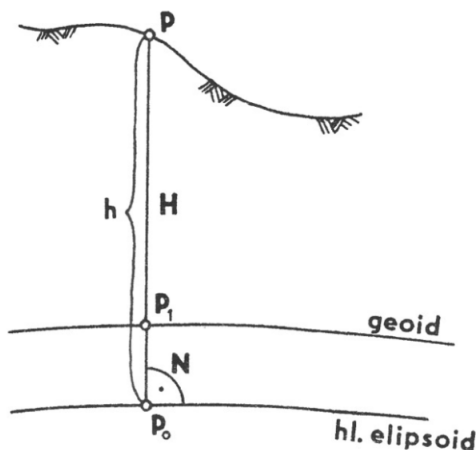
kde  $g_m^B$  je střední hodnota tíhového zrychlení mezi bodem B a jeho průmětem na geoid po tížnici. S využitím vztahu (1.1) je zřejmé, že integrál ve vzorci (2.4) bude mít stejnou hodnotu pro bod A i B v obr. 1.1, protože je roven geopotenciální kótě. Body se stejnou geopotenciální kótou ale nemají obecně stejnou výšku nad geoidem (z důvodu nepravidelnosti a sbíhavosti hladinových ploch), protože střední hodnota tíhového zrychlení se pro oba body liší. Tedy jinak řečeno: „*hladinová plocha tíhového potenciálu není obecně plochou stejné nadmořské výšky*“ [3].

Pravé ortometrické výšky ale není možno přesně určit kvůli problematickému členu  $g_m$ , vztah (2.4) má tedy spíše teoretický význam. Střední hodnotu tíhového zrychlení nelze přesně zjistit, protože neznáme přesné rozložení hmot mezi bodem na zemském povrchu a průmětem bodu na geoid a tíhové zrychlení nelze pod povrchem Země měřit (můžeme měřit pouze hodnotu na povrchu Země). Výpočet tedy závisí na teoretickém odhadu rozložení hmot pod zemským povrchem.

Pro doplnění zmiňme ještě normální ortometrické výšky. Jejich používání souvisí s tím, že v minulosti bylo komplikované určení tíhových zrychlení. Byl problém jak s určením hodnoty  $g_m$ , tak i s určením  $g$  (tíhová zrychlení podél nivelační linie). Proto bylo skutečné tíhové pole nahrazeno normálním tíhovým polem. Vycházíme ze vztahu (2.4), kde je tedy člen reálného tíhového zrychlení  $g$  nahrazen normálním tíhovým zrychlením  $\gamma$ :

$$H(B) = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_0^B \gamma dh, \quad (2.5)$$

kde  $\gamma_m$  je střední hodnota normálního tíhového zrychlení určené pro polovinu výšky bodu. Normální ortometrické výšky se používaly do první poloviny 20. století a bylo je možno snadno vypočítat – pomocí malých hodnot normálních ortometrických korekcí k měřeným převýšením. Tyto výšky jsou také vztaženy ke geoidu a byly použity v jadranském výškovém systému.



Obr. 2.1 Vztah odlehlosti geoidu  $N$ , ortometrické výšky  $H$  a elipsoidické výšky  $h$  [4]

Na závěr zmiňme ještě, že pokud bychom chtěli Stokesovy (ortometrické) výšky převést na výšky elipsoidické, budeme muset určit vzdálenost mezi průmětem bodu na geoid a na elipsoid. Tato vzdálenost  $N$  se nazývá odlehlost geoidu od elipsoidu (viz obr. 2.1). Pro elipsoidické výšky  $h_{el}$  můžeme psát, že se rovnají součtu odlehlosti geoidu a ortometrické výšky:

$$h_{el} = H + N. \quad (2.6)$$

[3], [4], [6]

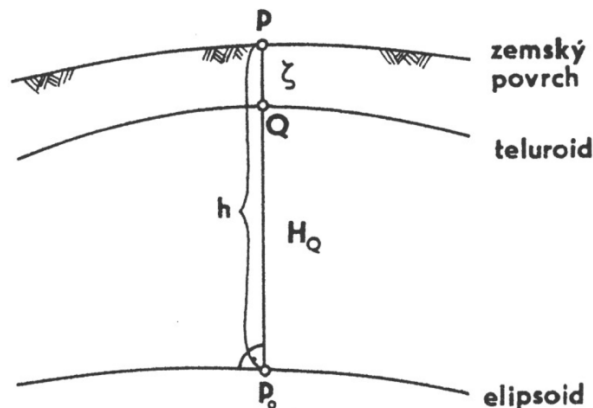
## 2.2 Moloděnského řešení tvaru Země

### 2.2.1 Normální (Moloděnského) výšky

Jak je zřejmé z předchozího textu, pro výpočet ortometrických výšek bychom museli znát hustotu hmotností nad geoidem, kterou ale nelze měřit. Moloděnský postupoval na základě úvahy: proč počítat elipsoidickou výšku ze vztahu (2.6), kde neznáme ortometrickou výšku ani odlehlost geoidu od elipsoidu přesně. Toto vyřešil vztahem:

$$h_{el} = H_Q + \zeta, \quad (2.7)$$

kde  $H_Q$  je normální Moloděnského výška a  $\zeta$  je výšková anomálie. Obě hodnoty je možno určit početně z gravimetrických a nivelačních měření na zemském povrchu, ale nemají fyzikální význam.



Obr. 2.2 Moloděnského výška  $H_Q$ , elipsoidická výška  $h$ , výšková anomálie  $\zeta$  a teluroid [4]

Pro objasnění významu výšky  $H_Q$  popišme tíhový potenciál bodu P na zemském povrchu jako  $W(P)$ . Obecně platí, že  $W(P)$  se liší od normálního tíhového potenciálu  $U(P)$  v bodě P. Na normále k elipsoidu procházející bodem P můžeme najít takový bod Q, jehož normální tíhový potenciál  $U(Q)$  je roven tíhovému potenciálu  $W(P)$ . Výška  $H_Q$  je pak vzdálenost bodu Q od elipsoidu měřená po normále.

Vztah pro výšku  $H_Q$  je následující:

$$H_Q = \frac{W_0 - W_P}{\gamma_m} = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^{H_Q} g \, dH_Q, \quad (2.8)$$

kde  $\gamma_m$  je střední hodnota normálního tíhového zrychlení:

$$\gamma_m = \frac{1}{H_Q} \int_0^{H_Q} \gamma \, dH_Q. \quad (2.9)$$

Množina bodů  $Q$ , pro které platí  $U(Q) = W(P)$ , tvoří plochu zvanou teluroid.

[3], [4], [6]

### 2.2.2 Kvazigeoid

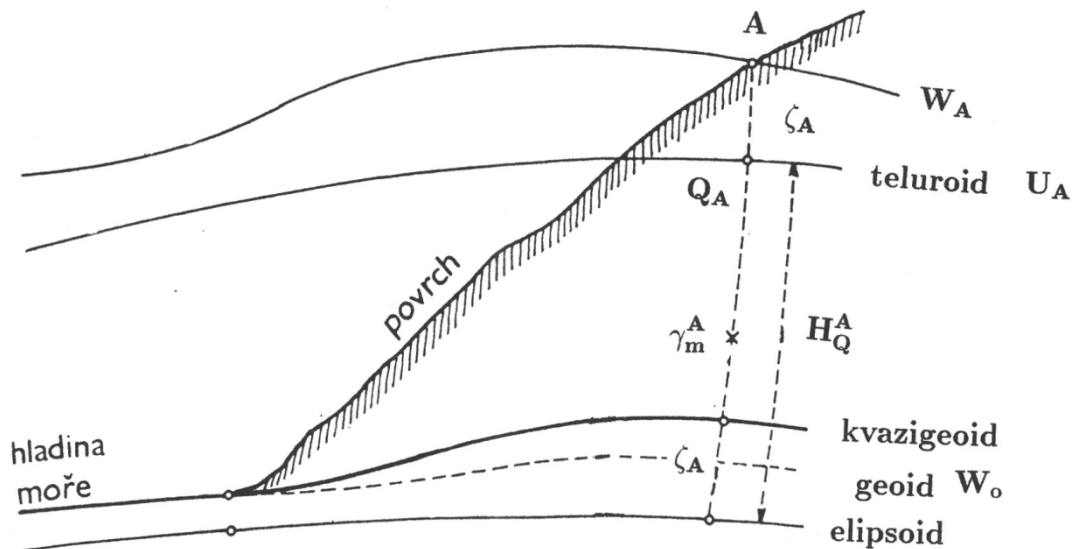
V počátku této podkapitoly je třeba nejprve objasnit pojem výšková anomálie  $\zeta$ . Pokud by se tíhový potenciál rovnal normálnímu tíhovému potenciálu v bodech na povrchu Země, pak by byla plocha teluroidu totožná se zemským povrchem. Protože to ale splněno není, elipsoidické výšky  $h_{el}(P)$  se nerovnají normálním výškám  $H_Q(P)$  a jejich rozdílem je právě výšková anomálie, jak je patrné z obr. 2.2.

Pokud tyto výškové anomálie vyneseme po normále od elipsoidu, dostaneme plochu zvanou (Moloděnského) kvazigeoid. Tvar kvazigeoidu je obecně blízký ke geoidu, rozdíl mezi geoidem a kvazigeoidem je v extrémních případech několik metrů, spíše však je v řádu několika decimetrů, nebo centimetrů až milimetrů. Na mořích jsou obě plochy totožné, protože výšky nad oběma plochami jsou rovny nule (odlehlost geoidu je rovna výškové anomálii:  $N = \zeta$ ). Teluroid přibližně kopíruje fyzický povrch Země, proto je kvazigeoid (ačkoli blízký geoidu) velmi nepravidelný.

Důležitou poznámkou je také to, že kvazigeoid ani teluroid není hladinovou plochou, tedy tyto plochy nemají fyzikální význam. V obr. 2.3 jsou znázorněny souvislosti mezi jednotlivými vztažnými plochami.

[3], [4], [6]

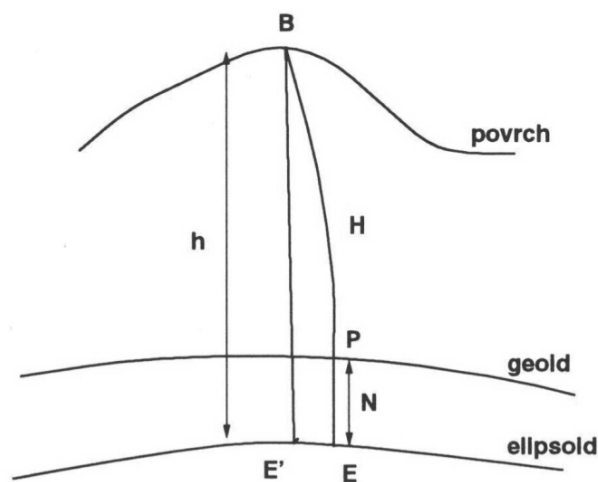




Obr. 2.3 Kvazigeoid, geoid, teluroid, elipsoid a zemský povrch [4]

### 2.3 Vztahy mezi výškami

Jak již bylo uvedeno v rovnici (2.6), elipsoidická výška  $h_{el}$  se vypočte jako součet ortometrické výšky  $H$  a odlehlosti  $N$  geoidu od elipsoidu. Mohla by však vyvstat otázka, zda bude výsledek správný, když elipsoidická výška má být měřena po normále a ortometrická výška je měřena po tížnici. Tento problém je naznačený v následujícím obr. 2.4.

Obr. 2.4 Geoidická výška  $H$  a elipsoidická výška  $h$  [6]

Tížnice je však velmi málo zakřivená, rovnice (2.6) je tak dostatečně přesná (rozdíl ve výsledku při měření po tížnici místo po normále je zanedbatelný).

Pomocí součtu normální (Moloděnského) výšky  $H_Q$  a výškové anomálie  $\zeta$  dostaneme také elipsoidickou výšku  $h_{el}$  (podle vztahu (2.7)). Normální výška je měřena

po normále k elipsoidu (stejně jako výška elipsoidická), proto nevzniká problém uvedený v předchozím případě (viz obr. 2.4) a výsledek součtu podle (2.7) je přesně roven výšce elipsoidické.

Z rovnic (2.6) a (2.7) můžeme vyjádřit vztah:

$$h_{el} = H + N = H_Q + \zeta. \quad (2.10)$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit například skutečnost, že rozdíl normální (Moloděnského) výšky a výšky geoidické je roven rozdílu odlehlosti a výškové anomálie:

$$H_Q - H = N - \zeta. \quad (2.11)$$

[3], [4], [6]

## 3 Popis dat, použitých modelů a referenčních elipsoidů

Podkladem pro zpracování práce je model geoidu EGM96, který je popsán pomocí sady Stokesových koeficientů. Dále pak modely kvazigeoidu popsané pomocí sítě bodů s odpovídajícími hodnotami výškové anomálie (CR-2005 a QGZÚ-2013). Další podkladová data tvoří body výběrové údržby ZÚ. Nejprve si však představíme referenční elipsoidy včetně jejich parametrů, protože ty jsou nezbytné pro zpracování dat.

### 3.1 Referenční elipsoidy

#### 3.1.1 Elipsoid GRS80

Elipsoidem GRS80 je reprezentován Geodetický referenční systém 1980 (GRS80), kde má význam jako hladinový rotační elipsoid, který se co nejlépe přimyká reálné Zemi. K tomuto elipsoidu se vztahují geometrické výšky. Výšky v systému ETRS89 se vztahují právě k elipsoidu GRS80. Konstanty tohoto elipsoidu nebyly pro výpočet využity, ačkoli jsou k němu vztaženy výškové anomálie modelů kvazigeoidu a to z důvodu, který je vysvětlen v následující podkapitole.

[2], [4], [8], [10]

#### 3.1.2 Elipsoid WGS84

Elipsoid WGS84 je elipsoidem systému WGS84 (World Geodetic System 1984). Tento geodetický geocentrický systém používají armády NATO (podle standardu STANAG 2211-IGEO), pro AČR bylo zavedeno jeho použití v r. 1998. Palubní efemeridy družic systému GPS NAVSTAR jsou vysílány právě v systému WGS84.

Pro potřeby této práce byly použity konstanty elipsoidu WGS84, protože se jeho parametry takřka neliší od elipsoidu GRS80 (vedlejší poloosa GRS80 je o 0,1 mm menší). Oba elipsoidy tedy můžeme pro potřeby této práce zaměnit a na přesnost výsledků to nebude mít vliv.

Jako tíhový potenciál na povrchu geoidu zvolíme normální tíhový potenciál na povrchu elipsoidu WGS84. Následující konstanty zohledňují korekční členy, včetně konstantního členu  $\zeta_z = -53$  cm.

Konstanty elipsoidu použité pro výpočty v této práci jsou:

hlavní poloosa:  $a = 6\,378\,137.00\text{ m}$ ,

zploštění:  $f = \frac{1}{298.257\,223\,563}$ ,

geocentrická gravitační konstanta:  $GM = 3.986\,004\,418 \cdot 10^{14}\text{ m}^3\text{s}^{-2}$ ,

úhlová rychlost rotace Země:  $\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11}\text{ rad s}^{-1}$ ,

normální tíhový potenciál elipsoidu:  $U_0 = 62\,636\,851.71\text{ m}^3\text{s}^{-2}$ .

[2], [8], [9], [10], [11]

### 3.2 Geopotenciální model EGM96

Systém WGS84 je definován primárními parametry (rozměry referenčního elipsoidu, úhlová rychlost rotace a geocentrická gravitační konstanta), které již byly popsány výše, a sekundárními parametry. Sekundární parametry popisují model struktury gravitačního pole Země (Earth Gravity Model). Model se nazývá EGM96 (Earth Gravity Model 1996) a je popsán souborem Stokesových parametrů, což jsou harmonické geopotenciální koeficienty v rozvoji geopotenciálu v řadu kulových funkcí, a to do stupně (resp. řádu) 360. Stokesovy koeficienty v souboru jsou již plně normované.

Soubor s daty (získán ze zdroje [12]) vypadá následovně:

```

EGM96.gfc
1 Lemoine F.G., Kenyon S.C., Factor J.K., Trimmer R.G., Pavlis N.K.,
2 Chinn D.S., Cox C.M., Klosko S.M., Luthcke S.B., Torrence M.H.,
3 Wang Y.M., Williamson R.G., Pavlis E.C., Rapp R.H., Olson T.R.;
4 The Development of the Joint NASA GSFC and the National
5 Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96;
6 NASA Technical Paper NASA/IP1998206861,
7 Goddard Space Flight Center, Greenbelt, USA, 1998
8
9 product_type          gravity_field
10 modelname            EGM96
11 earth_gravity_constant 0.3986004415E+15
12 radius               0.6378136300E+07
13 max_degree           360
14 errors                formal
15 tide_system          tide_free
16
17
18
19
20 key      L      M      C      S      sigma C      sigma S
21 end_of_head =====
22 gfc      0      0      1.000000000000e+00  0.000000000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00
23 gfc      2      0      -0.484165371736e-03  0.000000000000e+00  0.35610635e-10  0.00000000e+00
24 gfc      2      1      -0.186987635955e-09  0.119528012031e-08  0.10000000e-29  0.10000000e-29
25 gfc      2      2      0.243914352398e-05  -0.140016683654e-05  0.53739154e-10  0.54353269e-10
26 gfc      3      0      0.957254173792e-06  0.000000000000e+00  0.18094237e-10  0.00000000e+00
27 gfc      3      1      0.202998882184e-05  0.248513158716e-06  0.13965165e-09  0.13645882e-09
28 gfc      3      2      0.904627768605e-06  -0.619025944205e-06  0.10962329e-09  0.11182866e-09
29 gfc      3      3      0.721072657057e-06  0.141435626958e-05  0.95156281e-10  0.93285090e-10
30 gfc      4      0      0.539873863789e-06  0.000000000000e+00  0.10423678e-09  0.00000000e+00
31 gfc      4      1      -0.536321616971e-06  -0.473440265853e-06  0.85674404e-10  0.82408489e-10
32 gfc      4      2      0.350694105785e-06  0.662671572540e-06  0.16000186e-09  0.16390576e-09

```

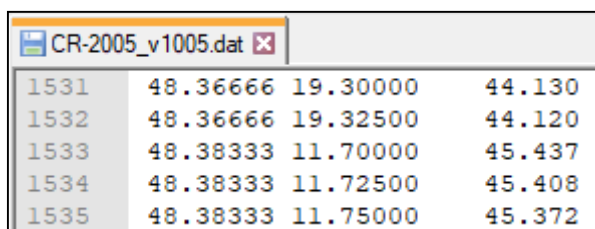
Obr. 3.1 Ukázka souboru s daty EGM96

V úvodu obsahuje soubor hlavičku, poté od řádku 22 obsahuje v každém řádku označení stupně (L), řádu (M), Stokesovy koeficienty (C, S) a směrodatnou odchylku Stokesových koeficientů (sigma C, sigma S).

[8], [9]

### 3.3 Modely kvazigeoidu

V rámci této práce byly zpracovány dva modely kvazigeoidu. Oba modely mají obdobnou strukturu souborů. Soubory s daty obou modelů obsahují vždy geodetické souřadnice [B, L] ve stupních. V prvním sloupci se nachází hodnota elipsoidické šířky, ve druhém pak hodnota elipsoidické délky. V posledním sloupci je uvedena hodnota výškové anomálie  $\zeta$ . Všechny hodnoty jsou vztaženy k elipsoidu GRS80 systému ETRS89.



1531	48.36666	19.30000	44.130
1532	48.36666	19.32500	44.120
1533	48.38333	11.70000	45.437
1534	48.38333	11.72500	45.408
1535	48.38333	11.75000	45.372

Obr. 3.2 Ukázka dat modelu kvazigeoidu CR-2005

#### 3.3.1 Model kvazigeoidu CR-2005

Model je určen k transformaci výšek vztažených k elipsoidu GRS80 do systému Bpv. Byl vytvořen navázáním předchozího modelu CR-2000 na síť bodů výběrové údržby (viz kapitola 3.4). Nachází se v jednom souboru s názvem *CR-2005\_v1005.dat*, který je možno získat z webových stránek [13]. První dva řádky souboru tvoří hlavička (od 3. řádku se již nachází data, jak byla popsána výše). Body souboru jsou v pravidelné síti se zeměpisnou šířkou v intervalu po 1' a zeměpisnou délkou po 1,5'.

[13], [14]

#### 3.3.2 Model kvazigeoidu QGZÚ-2013

Model se nachází celkem v sedmnácti souborech. Soubory jsou poskytovány zdarma a byly získány z e-shopu ČÚZK [15]. Data jsou popsána takto:

*„Podrobný gravimetrický kvazigeoid QGZÚ-2013 představuje transformační plochu umožňující převod nadmořských výšek  $H$  vyjádřených ve Výškovém systému baltském – po vyrovnání (Bpv) a elipsoidických výšek  $h$  určených v Evropském terestrickém referenčním systému 1989 (ETRS89) /realizace ETRF2000/ nad rotačním elipsoidem Geodetického referenčního systému 1980 (GRS80). Datový obsah tvoří*

výšková anomálie zeta vyjádřená v uzlových bodech pravidelné sítě (3" x 3") zeměpisných souřadnic ETRS89. Výšková anomálie realizuje vlastní transformační vztah, který má tvar  $h = H + \text{zeta}$ . Úplná střední chyba výškové anomálie zeta činí na území ČR 1 cm, v horském terénu a v příhraničních oblastech (do 10 km od státních hranic) může dosahovat hodnot vyšších, nejvýše však 3 cm. Model kvazigeoidu byl získán kombinovaným regionálním řešením lineární gravimetrické okrajové úlohy pro poruchový gravitační potenciál zemského tělesa, a to za významného přispění revidovaného kompletního souboru podrobných bodů gravimetrických mapování ČR zaměřených při geofyzikálním průzkumu mezi lety 1950 až 2010 a dalších dat. Model najde uplatnění v nejrůznějších geodetických pracích. Je určen k usnadnění provádění místních transformací výšek v dané lokalitě pro vyjádření výšek určených technologií GNSS nebo jinými geometrickými metodami v Bpv, pro vzájemné ztotožnění výšek terénu v systémech Bpv a ETRS89 v dané lokalitě, apod.“ [16]

### 3.4 GNSS-nivelace bodů výběrové údržby ZÚ

Soubor s daty obsahuje celkem 1024 bodů výběrové údržby. Tyto body mají nivelovanou výšku určenou v Bpv, tedy jde o výšku vztaženou ke kvazigeoidu. Tato výška je převzata z dat dodaných ZÚ. Také mají určenou elipsoidickou výšku pomocí metody GNSS (v systému ETRS89 vztaženou k elipsoidu GRS80), která je převzata z geodetických údajů. Body byly použity pro vznik modelu kvazigeoidu CR-2005.

[13], [14]

```

1 6 1
2 DATABAZE BODU GPS - NIVELACE
3 =====
4 ZANIVELLOVANE BODY VYBEROVE UDRZBY ZU V CR
5 GPS HODNOTY PREVZATY Z GEODETICKYCH UDAJU od M. Skaly - finalni blh z 2007
6 NADMORSKE VYSKY (V BPV) PREVZATY Z DAT DODANYCH ZU
7 BOD B L HEL. HNIV. KOD
8 '01150130' 50 59 20.2587 14 30 10.4288 473.320 430.013
9 '01200100' 50 59 40.2029 14 21 14.5874 395.210 351.756
10 '02200011' 51 1 9.6153 15 3 51.7558 285.320 242.838
11 '04050210' 50 21 58.8756 12 47 14.1823 920.910 874.885
12 '04050274' 50 21 21.5978 12 50 23.6584 1073.390 1027.430
13 '04100050' 50 23 46.1252 12 40 11.7465 908.110 861.954

```

Obr. 3.3 Ukázka souboru dat výběrové údržby

Soubor s daty obsahuje hlavičku a od řádku 8 obsahuje sloupce s následujícími údaji: číslo bodu, elipsoidické souřadnice [B, L] a elipsoidickou výšku  $h_{el}$ , nivelovanou výšku v Bpv  $h_{niv}$ .

## 4 Výpočet odlehlosti geoidu

Tato část obsahuje nejprve podkapitoly, ve kterých je vždy popsána teorie výpočtu jedné dílčí části a poté jeho realizace ve výpočetním softwaru. Na závěr v podkapitole 4.3.2 je shrnuta realizace dílčích částí v komplexním výpočtu. Jako výpočetní software pro tuto práci byl použit program Matlab, pro pomocné práce byl použit Excel.

### 4.1 Výpočet normovaných přidružených Legendreových funkcí

Začneme od vnitřního výpočtu, který je využit uvnitř výpočtů následujících. Tím je výpočet normovaných přidružených Legendreových funkcí.

#### 4.1.1 Teorie výpočtu

Legendreovy přidružené funkce mají velký nárůst numerických hodnot s rostoucím stupněm  $n$  a řádem  $m$ . Pro praktický výpočet je z důvodu výpočetní paměti a rychlosti třeba zavést normu, která numerické hodnoty sníží. Tedy vypočteme plně normované přidružené Legendreovy funkce ze sady plně normovaných Stokesových koeficientů pro model EGM96 a pro geocentrickou šířku  $\Phi$ .

Nejprve definujeme normu  $N_{nm}$  pomocí vztahu:

$$N_{nm} = \left[ \frac{(2 - \delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2}, \text{ kde } \delta_{0m} = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}. \quad (4.1)$$

Tedy dostaneme 2 vzorce pro normu podle toho, zda je řád  $m$  roven 0:

$$N_{nm} = \begin{cases} \sqrt{2n+1} & m = 0 \\ \sqrt{2 \cdot (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & m \neq 0 \end{cases}. \quad (4.2)$$

Legendreovy přidružené funkce (nenormované) vynásobíme normou  $N_{nm}$ . Tak dostaneme plně normované funkce:

$$\bar{P}_{nm} = N_{nm} P_{nm}. \quad (4.3)$$

Pro danou hodnotu zeměpisné šířky budeme vždy hledat matici  $\bar{P}_{nm}(\sin \Phi)$ , jejíž řádky budou odpovídat stupni  $n$  a sloupce řádu  $m$ . Pro výpočet prvku matice o daném konkrétním řádu  $m$  a stupni  $n$  existuje přímý vzorec, ale kvůli nutnosti vyčíslení faktoriálů vysokých stupňů by byl výpočet numericky nepřesný a tudíž není vhodný. Proto jsou pro výpočet využity rekurzivní vztahy. Neboť  $n$  i  $m$  se vyčísľují od 0 a platí, že  $n \geq m$ , bude  $\bar{P}_{nm}(\sin \Phi)$  tvořena jen trojúhelníkovou maticí (diagonála a část pod ní).

Prvky na diagonále, kde platí  $m = n$ , vypočteme pomocí následujícího vztahu:

$$\bar{P}_{nn}(\sin \Phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \cos \Phi \cdot \bar{P}_{n-1,n-1}(\sin \Phi). \quad (4.4)$$

Uvedený vztah platí pro  $n \geq 2$ . Vztah pro výpočet obecného prvku, který použijeme pro výpočet prvků pod diagonálou, je následující:

$$\bar{P}_{nm}(\sin \Phi) = w_n \left( \sin \Phi \cdot \bar{P}_{n-1,m}(\sin \Phi) - \frac{1}{w_{n-1}} \cdot \bar{P}_{n-2,m}(\sin \Phi) \right), \quad (4.5)$$

$$w_n = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+m)(n-m)}}. \quad (4.6)$$

Z (4.5) je zřejmé, že výpočet jednoho prvku je pro pevné  $m$  (vypočítávaný prvek i prvky vstupující do výpočtu mají stejný řád) a tedy pro jeden sloupec. Kdežto z hodnot  $n$  vidíme, že pro výpočet jsou třeba dvě předchozí hodnoty v rámci sloupce. Po výpočtu diagonálních prvků podle (4.4) máme pro výpočet prvního prvku pod diagonálou  $\bar{P}_{m+1,m}$  pouze jeden předchozí člen  $\bar{P}_{m,m}$  a proto člen  $\bar{P}_{m-1,m}$  z výpočetních důvodů položíme roven 0 a to způsobem takovým, že při výpočtu v počátku vytvoříme nulovou matici  $n * m$ . Startovací prvek  $w_{n-1}$  pak zvolíme roven 1. Toto ale nelze použít pro první sloupec matice, kde neexistuje předcházející nulová hodnota před prvkem  $\bar{P}_{00}$ . Proto budeme muset pro  $m = 0$  inicializovat prvky  $\bar{P}_{00}$  a  $\bar{P}_{10}$ , a tedy výpočet v prvním sloupci použijeme až pro prvek  $\bar{P}_{m+2,m}$ , tedy  $\bar{P}_{20}$ . Startovací prvek  $w_{n-1}$  v tomto případě nevolíme, ale vypočteme podle daného vzorce (4.6), protože při nenulovém rozdílu  $n - m$  je již možné ho vypočíst. Pro výpočet prvků na diagonále podle (4.4) vyjdeme ze členu  $\bar{P}_{11}$ , tedy ten je také potřeba inicializovat. První vypočtená hodnota na diagonále tak bude člen  $\bar{P}_{22}$ .

Inicializační hodnoty pro první prvky vstupující do rekurzivních vztahů tedy musíme vyčíslit pro prvek  $\bar{P}_{11}$  (výchozí prvek výpočtu po diagonále),  $\bar{P}_{00}$  a  $\bar{P}_{10}$  (výchozí prvky pro výpočet v prvním sloupci). Vztahy pro tyto prvky jsou následující:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{00}(\sin \Phi) &= 1, \\ \bar{P}_{10}(\sin \Phi) &= \sqrt{3} \cdot \sin \Phi, & \bar{P}_{11}(\sin \Phi) &= \sqrt{3} \cdot \cos \Phi. \end{aligned} \quad (4.7)$$

[3], [17], [18]

### 4.1.2 Praktické řešení

Programové řešení není nastaveno pro výpočet celé matice Legendreových přidružených funkcí, ale vždy pro výpočet konkrétního sloupce pro pevné  $m$  a všechna  $n \geq m$  a to pro všechny hodnoty zeměpisné šířky. Do výpočtu vstupuje sloupcový vektor zeměpisných šířek  $\vec{\Phi}$ , maximální stupeň (resp. řád)  $L$  a požadovaný řád  $m$ .



Nejprve je vytvořena nulová inicializační matice o rozměrech  $\vec{\Phi} * (L + 1)$ , kde  $k$  maximálnímu řádu musíme přičíst 1, protože koeficienty jsou číslovány od 0, kdežto pozice v matici v programu Matlab jsou číslovány od 1. Poté je výpočet rozdělen do tří situací. První možností je, že  $m = 0$ . Potom není potřeba počítat diagonální prvky, pouze inicializovat první dva prvky podle vztahů (4.7) a zbylé prvky sloupce vypočítat podle vztahů (4.5) a (4.6). Druhá možnost je, že  $m = 1$ . Pro tuto variantu také není nutné počítat diagonální prvky, stačí inicializovat hodnotu  $\bar{P}_{11}$  podle vztahu v (4.7) a poté již postupovat obdobně jako v minulém případě, protože hodnota předcházejícího prvku je rovna nule. Poslední možností je, že  $m \geq 2$ . V tomto případě vypočteme hodnotu  $\bar{P}_{11}$  a poté podle vztahu (4.4) postupujeme až do požadovaného  $m$ . Poté opět počítáme obdobně jako v předchozím případě. Vypočten je vždy celý sloupec matice Legendreových funkcí, a to pro každé  $\Phi$ . Ovšem ve výsledné matici je sloupec uložen do řádku matice a každý řádek odpovídá právě jednomu  $\Phi$ , podle pořadí ve vstupním vektoru. Ve výsledné matici této funkce jsou obsaženy pouze nenulové hodnoty (tedy pouze hodnoty z dolního trojúhelníku matice funkcí).

Výpočetní skript pro Matlab má název *calculate\_Legendre\_2\_0* a je následující:

```
%% Vstupní hodnoty:
% Fi ... sloupcový vektor zeměpisné šířky
% m ... pevná hodnota řádu m
% L ... maximální stupeň a řád Stokesových koeficientů
%% Výstupní hodnoty:
% P_nm ... matice o rozměru Fi*(L-m), do řádku je uložen sloupec
% matice Legendreových přidružených funkcí (tedy část pro
% pevné m a všechna n >= m) a každý řádek odpovídá právě
% jedné hodnotě Fi

function [ P_nm ] = calculate_Legendre_2_0( Fi, m, L)
Pnm = zeros(length(Fi),L + 1); % Inicializace nulové matice
% Cílem je určit m-tý sloupec matice Pnm, mohou nastat 3 případy:
% 1.) Pro první sloupec, tedy m = 0
if m == 0
    wn = sqrt(3); % Inicializace pro prvek P(0,1)
    Pnm(:,1) = ones(length(Fi),1); % Prvek P(0,0) = 1
    Pnm(:,2) = sqrt(3)*sin(Fi); % Prvek P(1,0)
    for N = 2:L % Od n = 2, výpočet hodnot ve sloupci
        w_n = sqrt(((2*N+1)*(2*N-1))/(N*N));
        Pnm(:,N+1) = w_n*(sin(Fi).*Pnm(:,N)-Pnm(:,N-1)/wn);
        wn = w_n;
    end
end
% 2.) Pro m = 1, druhý sloupec
elseif m == 1
    wn = 1;
    Pnm(:,2) = sqrt(3)*cos(Fi); % Prvek P(1,1)
    for N = 2:L % Od n = 2, výpočet hodnot ve sloupci
        w_n = sqrt(((2*N+1)*(2*N-1))/((N+m)*(N-m)));
        Pnm(:, N+1) = w_n*(sin(Fi).*Pnm(:,N)-Pnm(:,N-1)/wn);
        wn = w_n;
    end
end
% 3.) Obecně - výpočet po diagonále do prvku P(m,m), poté výpočet
```

```

% sloupce
elseif m >= 2
    P_diag = sqrt(3)*cos(Fi); % Prvek P(1,1)
    for M = 2:m % Výpočet diagonálního prvku - dojdeme do daného m
        P_diag = sqrt((2*M+1)/(2*M))*cos(Fi).*P_diag;
    end
    % Přiřadíme hodnotu na diagonále jako první vypočtenou hodnotu
    % sloupce
    Pnm(:,m+1) = P_diag;
    wn = 1;
    for N = (m+1):L % Výpočet zbytku sloupce od diagonálního prvku
        w_n = sqrt(((2*N+1)*(2*N-1))/((N+m)*(N-m)));
        Pnm(:,N+1) = w_n*(sin(Fi).*Pnm(:,N)-Pnm(:,N-1)/wn);
        wn = w_n;
    end
end
% Přiřazení nenulové části výsledku do matice
P_nm = Pnm(:, (m+1):(L+1));
end

```

## 4.2 Výpočet průvodiče ze Stokesových koeficientů

### 4.2.1 Teorie výpočtu

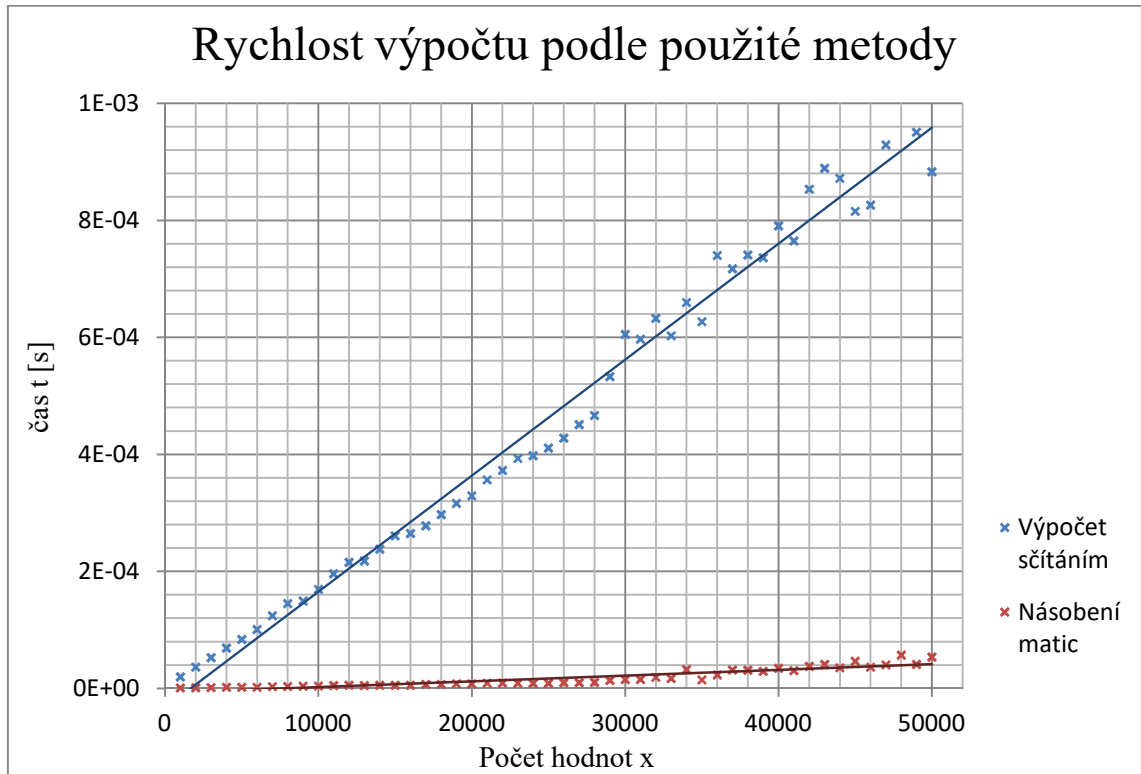
Pro výpočet vycházíme ze vztahu (2.1) pro tíhový potenciál, kde je gravitační potenciál, který je harmonickou funkcí, rozvinut do řady kulových funkcí. Z uvedeného vztahu tedy vyjádříme hodnotu průvodiče geoidu pro maximální stupeň a řád  $L$  a geocentrické souřadnice  $[\Phi, \Lambda]$ :

$$\rho_{i+1} = \frac{GM}{W_0} \left[ \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_0}{\rho_i} \right)^n (c_{nm} \cos(m\Lambda) + s_{nm} \sin(m\Lambda)) P_{nm}(\sin \Phi) + \frac{1}{2} \frac{\rho_i^3 \omega^2 \cos^2 \Phi}{GM} \right]. \quad (4.8)$$

Vztah (4.8) je však třeba upravit. Není totiž možné efektivně vypočítat velké množství bodů pomocí uvedeného vztahu. Budeme se nyní soustředit na případ, kdy máme k dispozici body v pravidelné síti. Cílem, ke kterému budeme v odvození směřovat, je získat jako výsledek ne jednu hodnotu, ale matici průvodičů, kde její jednotlivé hodnoty budou odpovídat bodům sítě.

Důležitou myšlenkou pro praktickou realizaci je to, že růst časového odhadu pro výpočet součtu jednotlivých prvků je velice rychlý, kdežto pokud součet získáme s využitím maticového násobení, časový odhad je mnohonásobně menší a má menší rychlost růstu. To je ukázáno v následujícím grafu, pro který byly hodnoty získány z jednoduchého pokusu. V programu Matlab byl vytvořen skript, generující 2 náhodné matice, první o rozměru  $1 \times x$  a druhá o rozměru  $x \times 1$ . Poté byl měřen čas výpočtu, a to jak pro postupné násobení a sečtení jednotlivých prvků matice, tak pro součin matic. To

bylo vždy realizováno desetkrát pro jedno  $x$  a výsledkem byla průměrná hodnota. Za  $x$  byly dosazovány různé hodnoty.



Obr. 4.1 Graf rychlosti výpočtu sumy: srovnání maticového výpočtu a postupného sčítání

Nejprve ve vztahu (4.8) provedeme záměnu sumací. A také pro realizaci výpočtu nahradíme nenormované veličiny normovanými (to platí pro Legendreovy přidružené funkce a Stokesovy koeficienty):

$$\rho_{i+1} = \frac{GM}{W_0} \left[ \sum_{m=0}^L \sum_{n=m}^L \left( \frac{a_0}{\rho_i} \right)^n (\bar{c}_{nm} \cos(m\Lambda) + \bar{s}_{nm} \sin(m\Lambda)) \bar{P}_{nm}(\sin \Phi) + \frac{1}{2} \frac{\rho_i^3 \omega^2 \cos^2 \Phi}{GM} \right]. \quad (4.9)$$

Poté je zřejmé, že můžeme z vnitřní sumy vytknout člen závislý pouze na řádu  $m$ :

$$\rho_{i+1} = \frac{GM}{W_0} \left[ \sum_{m=0}^L \left( \cos(m\Lambda) \sum_{n=m}^L \left( \frac{a_0}{\rho_i} \right)^n \bar{c}_{nm} \bar{P}_{nm}(\sin \Phi) + \sin(m\Lambda) \sum_{n=m}^L \left( \frac{a_0}{\rho_i} \right)^n \bar{s}_{nm} \bar{P}_{nm}(\sin \Phi) \right) + \frac{1}{2} \frac{\rho_i^3 \omega^2 \cos^2 \Phi}{GM} \right]. \quad (4.10)$$

Pro další úpravu vztahu (4.10) vyjádříme následující matice:

$$A_i^m(\Phi) = \sum_{n=m}^L \left( \frac{a_0}{\rho_i} \right)^n \bar{c}_{nm} \bar{P}_{nm}(\sin \Phi), \quad (4.11)$$

$$B_i^m(\Phi) = \sum_{n=m}^L \left( \frac{a_0}{\rho_i} \right)^n \bar{s}_{nm} \bar{P}_{nm}(\sin \Phi), \quad (4.12)$$

$$Q_i^R(\Phi) = \frac{1}{2} \frac{\rho_i^3 \omega^2 \cos^2 \Phi}{GM}, \quad (4.13)$$

$$COS_i^m(\Lambda) = \cos(m\Lambda), \quad (4.14)$$

$$SIN_i^m(\Lambda) = \sin(m\Lambda). \quad (4.15)$$

V následující tabulce je pro větší přehlednost uveden přehled rozměrů matic:

Matice	Řádky	Sloupce
$A_i^m(\Phi)$	$\Phi$	$L$
$B_i^m(\Phi)$	$\Phi$	$L$
$Q_i^R(\Phi)$	$\Phi$	$\Lambda$
$COS_i^m(\Lambda)$	$L$	$\Lambda$
$SIN_i^m(\Lambda)$	$L$	$\Lambda$

Tabulka 4.1 Přehled rozměrů matic

Rozměry matice v uvedené tabulce mají následující významy:  $\Phi$  – počet souřadnic zeměpisné šířky,  $\Lambda$  – počet souřadnic zeměpisné délky,  $L$  – maximální stupeň (resp. řád) Stokesových koeficientů.

Poté můžeme zapsat vztah (4.10) jako:

$$\rho_{i+1}(\Phi, \Lambda) = \frac{GM}{W_0} \left[ \sum_{m=0}^L \left( A_m(\Phi) COS_i^m(\Lambda) + B_m(\Phi) SIN_i^m(\Lambda) \right) + Q^R(\Phi) \right]. \quad (4.16)$$

Sestavení matic v požadovaném rozměru je popsáno v rámci další kapitoly.

[6], [17], [19]

### 4.2.2 Praktické řešení

Pro praktickou realizaci musíme postupně vypočítat všechny dílčí matice vztahu (4.16). Schéma výpočtu je na obr. 4.2, kde červeně jsou vyznačeny rozměry matice.

$$\Phi \begin{matrix} \rho_{i+1}(\Phi, \Lambda) \\ \Lambda \end{matrix} = \text{konst.} \cdot \left[ \begin{matrix} A_i^m(\Phi) \\ \Phi \\ L \end{matrix} \cdot L \begin{matrix} \text{COS}_i^m(\Lambda) \\ \Lambda \end{matrix} + \begin{matrix} B_i^m(\Phi) \\ \Phi \\ L \end{matrix} \cdot L \begin{matrix} \text{SIN}_i^m(\Lambda) \\ \Lambda \end{matrix} + \begin{matrix} Q_i^R(\Phi) \\ \Lambda \end{matrix} \right]$$

Obr. 4.2 Graficky znázorněné schéma vztahu (4.16)

Výpočet je realizován jako funkce v programu Matlab s názvem *calculate\_Geoid\_1\_2.m*. Předpokladem pro výpočet je, že hodnoty souřadnic  $[\Phi, \Lambda]$  jsou vybrané unikátní hodnoty (neopakují se) a jsou seřazené postupně ve vektorech. Jako první jsou funkcí vypočteny hodnoty matic  $\text{SIN}_i^m(\Lambda)$  a  $\text{COS}_i^m(\Lambda)$ . Ty jsou vypočteny tak, že sloupcový vektor všech hodnot řádu  $m$  vynásobíme řádkovým vektorem všech hodnot  $\Lambda$ . Tím dostaneme matici v požadovaném rozměru a je již pouze použita funkce sinus (nebo kosinus) na všechny hodnoty matice.

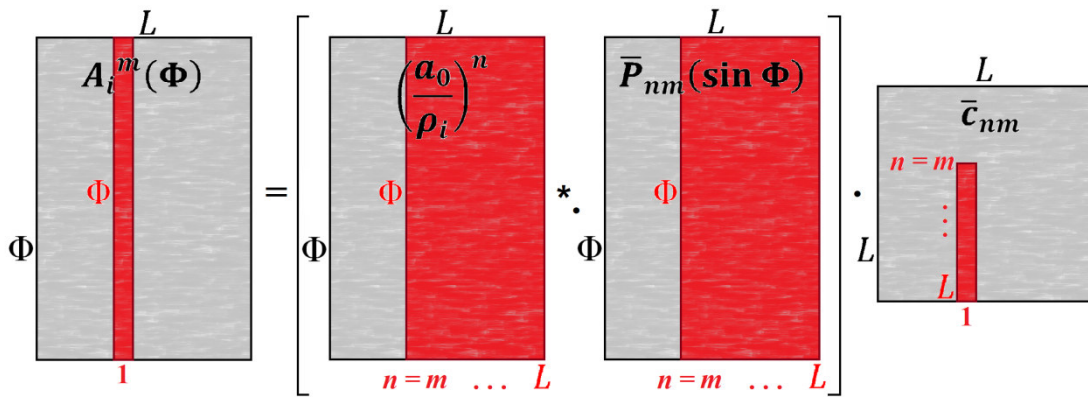
Před použitím *while cyklu* je ještě předpřipravena část matice  $Q_i^R$ , kterou je možno vypočítat předem, protože tato část vychází z konstantních hodnot:

$$Q_i^{\text{part}}(\Phi) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \cos^2 \Phi}{GM}. \quad (4.17)$$

Tuto část ještě rozšíříme do požadovaného rozměru výsledné matice násobením jednotkovou maticí o rozměrech stejných jako  $Q_i^R$ .

Poté již je ve výpočtu obsažen *while cyklus*, který se opakuje, dokud se velikost maximálního rozdílu nových a předchozích průvodičů neliší o méně, než je stanoveno v toleranci. Jako první je vypočten exponenciální člen  $\left(\frac{a_0}{\rho_i}\right)^n$ , potřebný k výpočtu matice  $A_i^m(\Phi)$  a  $B_i^m(\Phi)$ . Nejdříve je definován rozměr tohoto členu, jako matice  $\Phi * L$ , naplněná jedničkami (to vede k ušetření výpočtu prvního sloupce, kde dochází k umocňování na nultou). Poté jsou vypočteny další sloupce pomocí *for cyklu*, kde z důvodu úspory času počítáme další hodnotu vždy jako součin zlomku  $\frac{a_0}{\rho_i}$  s předchozí hodnotou (násobení řádku matice se zlomkem je mnohem rychlejší než umocňování).

Dále jsou vypočteny matice  $A_i^m(\Phi)$  a  $B_i^m(\Phi)$ . Výpočet je realizován pomocí *for cyklu*, matice tak vznikají postupně po sloupcích. Vždy jeden sloupec vzniká pro jedno pevné  $m$ . Princip pro matici  $A_i^m(\Phi)$  je schematicky naznačen na následujícím obrázku.

Obr. 4.3 Výpočet jednoho sloupce matice  $A_i^m(\Phi)$ 

Červeně vyznačené části matic v obrázku 4.3 jsou části, které vstupují do výpočtu v rámci jednoho for cyklu pro jedno pevné  $m$ . Vidíme tedy, že výsledkem je jeden sloupec. V rámci závorky dochází k násobení po prvcích. Prvním členem je exponenciální člen, z něhož je vybrána část pro všechna  $\Phi$  a pro  $n$  od daného pevného  $m$  do maximálního stupně  $L$ . Matice označená v obrázku jako  $\bar{P}_{nm}(\sin \Phi)$  není celou maticí Legendreových přidružených funkcí. Jde o matici, kde každý řádek je vyhrazen pro jedno  $\Phi$  a obsahuje hodnoty odpovídající stupni  $n$  od hodnoty rovné  $m$  do  $L$  a řádu  $m$ , který je neměnný. Výsledek tohoto násobení poté ještě násobíme částí matice Stokesových koeficientů  $\bar{c}_{nm}$ . Tím zajistíme vypočtení sumy (viz. vztah (4.11)). Výpočet pro  $B_i^m(\Phi)$  je obdobný.

Dále je v rámci *while cyklu* dopočtena matice  $Q_i^R$  podle aktuálních hodnot průvodičů. Poté jsou již vypočteny podle vztahu (4.16) nové hodnoty průvodičů, které jsou porovnány s předchozími, a na závěr je nalezena aktuální maximální velikost rozdílu.

Problém zjevně vzniká při výpočtu exponenciálního členu. Potřebujeme totiž, aby dosáhl rozměru  $\Phi * L$ . Což ale nemůže být splněno, pokud postupujeme podle vztahu  $\left(\frac{a_0}{\rho_i}\right)^n$ , kde  $a_0$  je pouze jedna hodnota, ale  $\rho_i$  je matice průvodiče o rozměrech  $\Phi * \Lambda$ . Potřebovali bychom, aby rozměr  $\rho_i$  byl  $\Phi * 1$ , poté by již z výpočtu *for cyklu* vznikla matice o správných rozměrech. Toho docílíme využitím metody řádkových průměrů (podle [17]). Pro danou zeměpisnou šířku  $\Phi$ , odpovídající jednomu řádku matice průvodičů, vždy spočteme průměrnou hodnotu v rámci řádku (tedy pro jednu zeměpisnou šířku  $\Phi$  a všechny hodnoty zeměpisné délky  $\Lambda$ ). To lze realizovat s dostatečnou přesností tak, že si hodnoty zeměpisné délky rozdělíme na několik pásů, a pro každý pás pak provádíme výpočet zvlášť (řádkové průměry počítáme pouze v rámci pásu). Počet pásů byl stanoven na základě posouzení odlišnosti výsledků pro různá nastavení. Tabulka 4.2 uvádí průměrné časy z 10 testovacích měření doby výpočtu průvodiče (testováno pro model CR-2005) pro různý počet pásů  $\Lambda$ . Hodnota

„maximální rozdíl“ v tabulce 4.2 pak označuje největší velikost rozdílu vybranou z rozdílů všech průvodičů pro daný počet pásů od průvodičů vypočtených pro každé  $\Lambda$  zvlášť (tj. exaktně bez průměrování průvodičů).

počet pásů $\Lambda$	průměrný čas z 10 nezávislých výpočtů [s]	maximální rozdíl [mm]
1	7.62	4.96
2	16.24	2.98
3	23.38	2.13
4	32.15	1.67
6	48.46	1.30
8	61.05	0.92
10	77.49	0.81

Tabulka 4.2 Posouzení přesnosti výpočtu v porovnání s jeho rychlostí

Výpočetní skript je následující:

```
%% Volané funkce: calculate_Legendre_2_0.m
%% Vstupní hodnoty:
% C_nm ... matice Stokesových koeficientů pro C
% S_nm ... matice Stokesových koeficientů pro S
% GM ... geocentrická gravitační konstanta
% W_0 ... tíhový potenciál na povrchu geoidu = normální tíhový
%      potenciál na elipsoidu WGS84
% a_0 ... hlavní poloosa elipsoidu WGS84
% A_0 ... apriorní hodnoty průvodičů pro iteraci
% Fi ... vektor souřadnic zeměpisné šířky
% Lam ... vektor souřadnic zeměpisné délky
% omega_0 ... úhlová rychlost rotace Země
% eps ... zvolená odchylka pro iteraci
%% Výstupní hodnoty:
% RO ... výsledný vektor průvodičů o rozměru Fi*Lam

function [ RO ] = calculate_Geoid_1_2(C_nm, S_nm, GM, W_0, a_0, A_0,
Fi, Lam, omega_0, eps)
L = length(C_nm)-1; % Maximální stupeň(resp. řád)
m_vector = [0:L]; % Vektor hodnot řádu m
m_Lam = m_vector'*Lam'; % Matice, kde na každém řádku jsou všechny
%      šířky násobené právě jedním m

sin_m_Lam = sin(m_Lam);
cos_m_Lam = cos(m_Lam);
Ro_0_prum = mean(A_0,2); % Řádkové průměry
Ro_0 = A_0; % Přiřazení výchozích hodnot průvodiče k proměnné
%      průvodiče
Konst = GM/W_0;
Q_part = ((omega_0^2.*cos(Fi).*cos(Fi))./(GM*2))*ones(1,length(Lam));
R = 10; % Pomocná dočasná hodnota, aby byl spuštěn while cyklus
A = zeros(length(Fi),L+1); % Příprava prázdné matice A
B = zeros(length(Fi),L+1); % Příprava prázdné matice B
while R >= eps
```

```

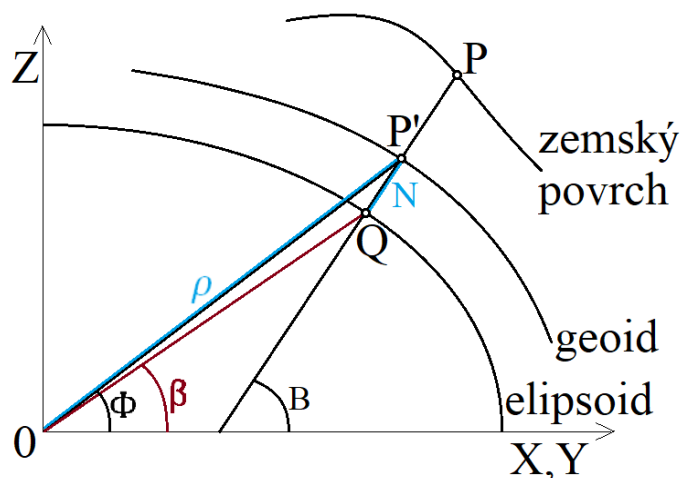
%% Exponenciální člen
% Je vytvořena jedničková matice, první sloupec exponenciálního
% členu je umocňován na nultou - nemusíme počítat první sloupec
a_Ro = ones(length(Fi),L+1);
for n = 1:L % Každý další sloupec jako součin s předchozím
    a_Ro(:,n+1) = a_Ro(:,n).*(a_0./Ro_0_prum);
end
%% Výpočet matice A a B postupně po sloupcích pro všechna m a Fi
for m = 0:L
    A(:,m+1) = (a_Ro(:,(m+1):L+1).*calculate_Legendre_2_0(Fi, m,
L))*C_nm((m+1):L+1,m+1);
    B(:,m+1) = (a_Ro(:,(m+1):L+1).*calculate_Legendre_2_0(Fi, m,
L))*S_nm((m+1):L+1,m+1);
end
%% Dopočtení matice Q
Q = (Q_part.*(Ro_0.^3));
%% Výpočet průvodiče
Ro = Konst.*(A*cos_m_Lam+ B*sin_m_Lam+ Q);
R = max(abs(Ro - Ro_0)); % Maximální rozdíl
Ro_0 = Ro; % Přiřazení nové hodnoty
Ro_0_prum = mean(Ro,2); % Průměry po řádcích
end
RO = Ro; % Přiřazení výsledné hodnoty
end

```

## 4.3 Finální výpočet - odlehlost geoidu a problém geocentrické šířky

### 4.3.1 Teorie výpočtu

Protože dosavadní výpočty pracují s geocentrickými souřadnicemi  $[\Phi, \Lambda]$ , ale ve vstupních souborech jsou dány pouze geodetické souřadnice  $[B, L]$ , musíme pomocí nich geocentrické souřadnice vypočítat.



Obr. 4.4 Přehled souřadnic zeměpisné šířky



Geocentrická šířka se určí ze vztahu:

$$\Phi = \text{atan}[(1 - e^2) \tan B] . \quad (4.18)$$

Uvedený vztah je snadné vypočítat. Problém ovšem spočívá v tom, že nedostaneme výslednou geocentrickou šířku bodu na geoidu, ale bodu na elipsoidu (tedy vztaženou k bodu Q v obrázku 4.4). Je zjevné, že toto bude potřeba řešit iterativně, prostřednictvím výpočtu odlehlosti  $N$ .

Nejprve vyjádříme kartézské souřadnice bodu  $P'$  pomocí rovnic:

$$X = \rho \cos \Phi \cos \Lambda , \quad (4.19)$$

$$Y = \rho \cos \Phi \sin \Lambda , \quad (4.20)$$

$$Z = \rho \sin \Phi . \quad (4.21)$$

V následujícím vyjádření geodetické šířky pomocí kartézských souřadnic vidíme, že geodetická a geocentrická šířka se sobě rovnají:

$$L = \text{atan} \frac{Y}{X} = \text{atan} \left( \frac{\sin \Lambda}{\cos \Lambda} \right) = \Lambda . \quad (4.22)$$

Vztah pro souřadnici  $Z$  určenou pomocí geodetických souřadnic v případě, že bod leží nad elipsoidem ve směru normály ve výšce  $H$  (tedy v našem případě leží bod  $P'$  na geoidu a jeho elipsoidická výška je rovna odlehlosti geoidu od elipsoidu  $H = N$ ), je:

$$Z = [N_{PPK}(1 - e^2) + N] \sin B , \quad (4.23)$$

kde  $N_{PPK}$  je příčný poloměr křivosti, který pro bod o dané geodetické šířce  $B$  dostaneme ze vztahu:

$$N_{PPK}(B) = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}} . \quad (4.24)$$

V uvedených vztazích je  $a$  velikost hlavní poloosy referenčního elipsoidu a  $e$  je excentricita elipsoidu.

Pro odvození vztahů pro odlehlost a geodetickou šířku využijeme vztah:

$$X^2 + Y^2 = (N_{PPK} + N)^2 \cos^2 B . \quad (4.25)$$

Vydělením vztahu (4.23) odmocněným vztahem (4.25) dostaneme:

$$\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = \frac{N_{PPK}(1 - e^2) + N}{N_{PPK} + N} \cdot \frac{\sin B}{\cos B} = \left( 1 - \frac{N_{PPK}}{N_{PPK} + N} e^2 \right) \tan B . \quad (4.26)$$

Vyjádření velikosti odlehlosti  $N$  a geodetické šířky  $B$  plyne ze vztahu (4.26):

$$\tan B = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left( 1 - \frac{N_{PPK}}{N_{PPK} + N} e^2 \right)^{-1} , \quad (4.27)$$

$$N = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B} - N_{PPK} . \quad (4.28)$$

Pro výpočet nulté iterace uvažujeme  $N = 0$  a tedy platí:

$$\frac{N_{PPK}}{N_{PPK+N}} = 1. \quad (4.29)$$

Nultou iteraci odlehlosti a geodetické šířky potom vypočteme po dosažení hodnoty vyjádřené v (4.29) do vztahů (4.27) a (4.28) jako:

$$\tan B_0 = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \left( \frac{1}{1-e^2} \right), \quad (4.30)$$

$$N_0 = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos B_0} - N_{PPK}(B_0). \quad (4.31)$$

Pro všechny další iterace pak platí:

$$\tan B_{i+1} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \left( 1 - \frac{N_{PPK}(B_i)}{N_{PPK}(B_i)+N_i} e^2 \right)^{-1}, \quad (4.32)$$

$$N_{i+1} = \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\cos B_{i+1}} - N_{PPK}(B_{i+1}). \quad (4.33)$$

Apriorní hodnotu geocentrické šířky pro nultou iteraci dostaneme ze vztahu (4.18). Novou hodnotu geocentrické šířky pro další iterace získáme přičtením opravy:

$$\Delta\Phi_{i+1} = \text{atan}[(1 - e^2) \tan(B - B_{i+1})]. \quad (4.34)$$

[8], [10], [17], [20]

### 4.3.2 Praktické řešení

V rámci této podkapitoly je shrnuto celkové řešení, protože skript zahrnující výpočty zmíněné v podkapitole 4.3.1 zahrnuje již komplexní výpočet.

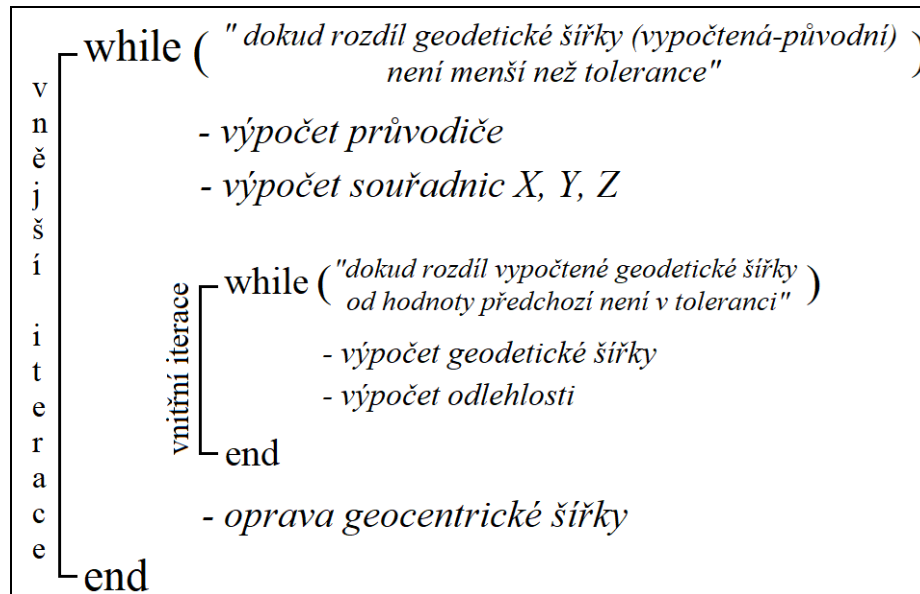
V rámci skriptu jsou nejprve nahrána vstupní data (hodnoty souřadnic, pro které chceme odlehlosti určit, Stokesových koeficientů a parametry elipsoidu WGS84). Následně je realizováno rozdělení na pásy podle zeměpisné délky. Pro souřadnice z obou modelů bylo zvoleno rozdělení na 10 pásů, ale hodnotu je možno snadno nastavit. Pro souřadnice bodů výběrové údržby nebylo možno realizovat rozdělení na pásy, protože data nejsou v pravidelné síti. Protože však nebylo množství bodů velké, byl výpočet upraven tak, že byl vypočten průvodič pro každý jeden bod zvlášť.

Poté jsou nastaveny mezní odchylky iterací, pro délku průvodiče 0,1 mm a pro zeměpisnou šířku  $1e-11$  rad (taková velikost úhlu vyvolá na kružnici o poloměru 6 380 000 km změnu v poloze menší než 0,1 mm).

Následuje výpočet pomocí *for cyklu* postupně pro všechny pásy zeměpisné délky (pro body výběrové údržby je upraveno na *for cyklus* pro všechny body). V rámci jednoho *for cyklu* je vypočtena přibližná výchozí hodnota geocentrické šířky

podle (4.18) a je nastavena velikost průvodičů v matici v rámci jednoho pruhu (resp. jednoho bodu) jako velikost hlavní poloosy elipsoidu  $a$ .

Výpočet dále pokračuje pomocí vnější a vnitřní iterace, jak je zjednodušeně naznačeno v obrázku 4.5.



Obr. 4.5 Schéma výpočtu while cyklů

Vnitřní *while* cyklus slouží k iterativnímu výpočtu geodetické šířky a odlehlosti (viz vztahy (4.30) – (4.33)).

Vnější *while* cyklus slouží k výpočtu průvodiče (do jehož výpočtu vstupuje aktuální hodnota geocentrické šířky). Pomocí hodnoty průvodiče a geocentrické šířky poté dostaneme aktuální hodnoty kartézských souřadnic, které vstupují do výpočtu vnitřní iterace. Na závěr je podle výsledku geodetické šířky z vnitřní iterace opravena geocentrická šířka.

Výpočetní skripty jsou celkem 3 (pro souřadnice z CR-2005, QGZÚ-2013 a bodů výběrové údržby) a odlišují se především v následujících detailech. Ve skriptu pro body výběrové údržby je realizován výpočet pro jednotlivé body místo pro pásy zeměpisné délky. Skript pro souřadnice modelu QGZÚ-2013 se liší z důvodu, že obsahoval obrovské množství dat (zeměpisnou šířku i délku v kroku po 3‘‘). S daty byla problematická manipulace (z důvodu omezené kapacity paměti zařízení), výpočet by byl jen těžko realizovatelný a poté by byla problematická i interpretace takto podrobných dat. Proto byla vybrána pouze data, která byla v řidší síti, která byla zvolena stejná jako pro model CR-2005. Výpočet je pak realizován tak, že geodetické souřadnice modelu QGZÚ-2013 nejsou nahrány, ale vygenerovány z nejnižších hodnot geodetické šířky a délky v daném kroku (pro šířku po 1‘ a pro délku po 1,5‘) až do hodnot maximálních. Na těchto datech se poté provede výpočet. Hlavní rozdíl je pak

v závěru výpočtu, kde jsou pro výsledky odlehlostí ve vygenerované síti vyhledávány odpovídající výškové anomálie modelu QGZÚ-2013 podle hodnoty souřadnic příslušejících dané výškové anomálii. Pokud se hodnoty shodují, daná odlehlost, výšková anomálie i souřadnice jsou zapsány do výsledné matice. Takto je prohledáno všech 17 souborů modelu QGZÚ-2013, a to pomocí funkce pro program Matlab k tomuto účelu vytvořené (*find\_QGZU.m*).

Skript pro Matlab uvedený v následující ukázce je pro výpočet souřadnic z modelu CR\_2005 a má název *Odlehlost\_CR2005.m*:

```
%% Volané funkce:
% calculate_Geoid_1_2.m - volá funkci: calculate_Legendre_2_0.m
% N_2_vector.m
%%*****%%
clc, clear, format long g
%% Vstup dat:
%% Načtení geodetických souřadnic ze souboru
B = xlsread('Sour_2005.xlsx', 'A:A'); % Geodetická šířka
B = B.*(pi/180);
B = unique(B); % Vybrání unikátních hodnot zeměpisné šířky

L = xlsread('Sour_2005.xlsx', 'B:B'); % Geodetická délka
L = L.*(pi/180);
L = unique(L); % Vybrání unikátních hodnot zeměpisné délky

%% Načtení matic normovaných Stokesových koeficientů
C_nm = xlsread('koef_C.xlsx');
S_nm = xlsread('koef_S.xlsx');

%% Parametry WGS84
GM = 0.3986004418E+15; % Geocentrická gravitační konstanta
W_0 = 62636851.71; % =U0 pro elipsoid WGS84, tíhový potenciál na
% geoidu
a_0 = 0.637813700E+07; % Velká poloosa geoidu
omega_0 = 7292115E-11; % Úhlová rychlost rotace
f = 1/298.257223563; % Zploštění elipsoidu
e2 = 2*f - f*f; % Čtverec excentricity
%%*****%%
%% Výstup:
% N_vec ... hodnoty odlehlosti geoidu od elipsoidu ve vektoru
% seřazené podle vstupních souřadnic
%%*****%%
%% Výpočet:
%% Příprava matice pro výsledek geocentrické šířky
RO = zeros(length(B), length(L));

%% Rozdělení na pruhy podle zeměpisné délky
pocet_pruhu = 10;
pom = floor(length(L)/pocet_pruhu);
posledni_dil = length(L) - (pocet_pruhu-1)*pom;
for p = 0:(pocet_pruhu-1)
    Pom(p+1,1) = p*pom;
end
Pom(pocet_pruhu+1,1) = ((pocet_pruhu-1)*pom + posledni_dil);
```

```

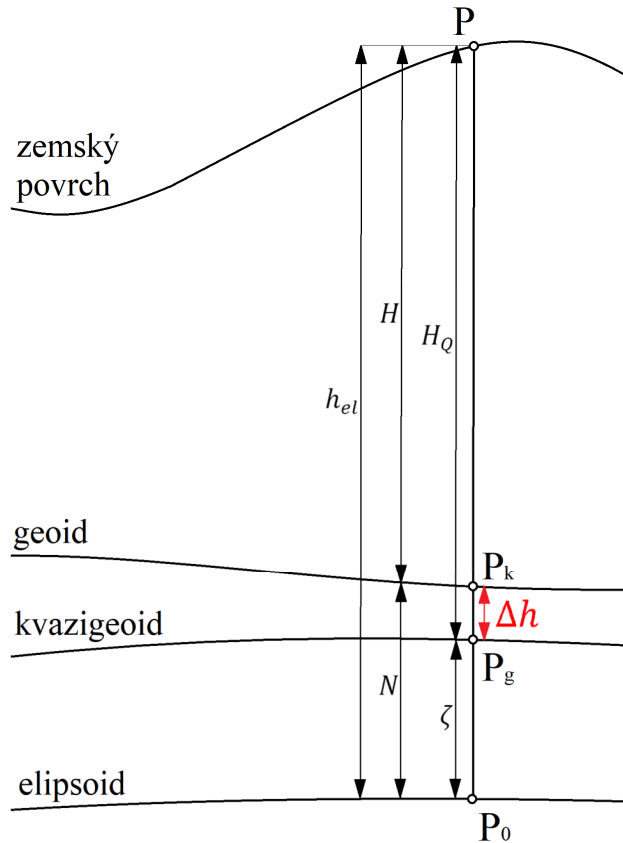
%% Nastavení mezních odchylek pro iteraci
eps_ro = 0.0001; % Odchylka pro iteraci průvodiče (0,1 mm)
eps_B = 1e-11; % Odchylka iterace zeměpisné šířky

%% Výpočet cyklů pro pruhy zeměpisných délek
for i = 2:length(Pom)
    pom_ = Pom(i-1);
    pom_2 = Pom(i);
    % První přibližná hodnota geocentrické šířky
    Fi = atan((1-e2)*tan(B));
    % Vybrání hodnot zeměpisné délky v pruhu
    lam = L((pom_ + 1):pom_2); % Výchozí hodnoty průvodičů
    A_0 = a_0*ones(length(B),length(lam));
    % Proměnná pro rozdíl iterací geodetické šířky
    deltaB = ones(length(B),1);
    it = 0; % Čítač vnější iterací
    while max(abs(deltaB)) > eps_B % Zahájení vnější iterace
        % Výpočet průvodiče
        RO = calculate_Geoid_1_2(C_nm, S_nm, GM, W_0, a_0, A_0, Fi,
lam, omega_0, eps_ro);
        A_0 = RO;
        % Kartézské souřadnice bodu na geoidu
        X = RO.*(cos(Fi)*cos(lam)');
        Y = RO.*(cos(Fi)*sin(lam)');
        Z = RO.*(sin(Fi)*ones(1,length(lam)));
        SQ = sqrt(X.^2 + Y.^2); % Pomocný výpočet
        % Příprava matic:
        B_0 = zeros(length(B), length(lam));
        B_1 = ones(length(B), length(lam));
        % Příčný poloměr křivosti:
        N_ppk = ones(length(B), length(lam));
        % Odlehlost geoidu od elipsoidu
        N = ones(length(B), length(lam))
        % Příprava rozdílu pro posouzení ve while cyklu
        deltaB_2 = max(max(abs(B_1 - B_0)));
        it_2 = 0; % Čítač vnitřních iterací
        while deltaB_2 > eps_B % Vnitřní iterace
            B_1 = atan(Z./(SQ.*(1 - N_ppk*e2./(N_ppk + N))));
            N_ppk = a_0./sqrt(1 - e2*sin(B_1).*sin(B_1));
            N = SQ./cos(B_1) - N_ppk;
            deltaB_2 = max(max(abs(B_1 - B_0)));
            B_0 = B_1;
            it_2 = it_2 + 1
        end
        deltaB = B - mean(B_1,2); % Průměr v řádku pro výpočet Fi
        dFi = atan((1-e2).*tan(deltaB)); % Oprava Fi
        Fi = Fi + dFi; % Opravená Fi
        it = it+1
    end
    N_end(:,(pom_ + 1):pom_2) = N; % Výsledná matice odlehlostí
end
N_vec = N_2_vector(N_end); % Převod na vektor po řádcích

```

## 5 Výpočet rozdílů výšek

Finálním úkolem této práce je vypočítat rozdíly mezi výškami v systému Bpv a EGM96. Pro určení výpočetních vztahů vyjděme z následujícího obrázku.



Obr. 5.1 Znárodnění vztahů výšek

V obr. 5.1 jsou znázorněny výšky: elipsoidická  $h_{el}$ , ortometrická výška  $H$  a normální (Moloděnského) výška  $H_Q$ . Dále také odlehlost geoidu od elipsoidu  $N$  a výšková anomálie  $\zeta$ . Hledaný rozdíl výšek je označen jako  $\Delta h$ .

Výpočet rozdílů výšek realizujeme jako rozdíl odlehlosti geoidu od elipsoidu a výškové anomálie (jak je zřejmé z obrázku 5.1 a také vztahu (2.11)). Všechny výpočty v této práci se vztahují k elipsoidu WGS84. Odlehlost geoidu od elipsoidu získáme pro všechny výpočty z modelu EGM96, proto ji označíme jako  $N_{EGM96}$ . Rozdíl výšek označíme jako  $\Delta h = H_Q - H$ . Pro modely QGZÚ-2013 a CR-2005 známe hodnoty výškových anomálií, rozdíly výšek tedy budou:

$$\Delta h_{(CR2005, EGM96)} = N_{EGM96} - \zeta_{CR2005}, \quad (5.1)$$

$$\Delta h_{(QGZÚ2013, EGM96)} = N_{EGM96} - \zeta_{QGZÚ2013}. \quad (5.2)$$

Dále je potřeba určit rozdíly výšek pro model EGM96 a body výběrové údržby ZÚ. Pro tyto body známe jak elipsoidickou výšku  $h_{WGS84}$  z GNSS měření, tak normální výšku v Bpv (tedy  $H_Q$ ). Z těchto hodnot tedy určíme snadno velikost výškové anomálie podle vztahu (2.7), ze kterého vyjádříme velikost výškové anomálie:

$$\zeta_{VYBUD} = h_{WGS84}^{VYBUD} - H_Q^{VYBUD} . \quad (5.3)$$

Rozdíl výšek poté určíme obdobným způsobem jako výše, tedy:

$$\Delta h_{(VYBUD, EGM96)} = N_{EGM96} - \zeta_{VYBUD} . \quad (5.4)$$

Výsledné výškové rozdíly byly vypočteny pomocí programu Excel.

Pro lepší přehlednost prezentace výsledků v kapitole 6 označíme výšky nikoli podle druhu, ale podle použitého výškového systému. Ortometrickou výšku  $H$  jako  $H_{EGM96}$ , protože se jedná o výšky v systému EGM96. Obdobně pak normální (Moloděnského) výšku  $H_Q$  označíme jako  $H_{Bpv}$ , protože se jedná o výšku v systému Bpv.

## 6 Výsledky a jejich zhodnocení

### 6.1 Zpracování dat

Výsledné rozdíly výšek byly dále zpracovány v softwaru ArcGIS Pro, kde byly vytvořeny mapy výškových rozdílů. Pro výsledky získané z modelů kvazigeoidu byl přímo vytvořen rastr výškových rozdílů, a to s využitím metody prostorové interpolace IDW (metoda inverzních vzdáleností), která se hodí právě pro data v pravidelné síti. Pro rozdíly výšek získané pomocí dat GNSS-nivelace bodů výběrové údržby ZÚ byla využita interpolace TIN (nepravidelná trojúhelníková interpolace) a následně pomocí funkce *TIN to Raster* byl vytvořen rastr rozdílů výšek.

Takto získané rastry byly použity jako podklad pro vizualizaci a také pro další vyhodnocení. Rastry byly srovnány mezi sebou pomocí funkce *Minus*, která vypočítá rozdíl 2 vstupních rastrů. Pro rozdíly z modelů kvazigeoidu byl pomocí funkce *Hillshade* (s nastavením azimutu na 315° a výšky osvětlení na 45°) vytvořen stínovaný reliéf rozdílů výšek, aby výsledek působil více plasticky a podal tak lepší představu o výškových rozdílech.

Dále byly pro všechny výškové rozdíly na základě rastrových modelů vygenerovány vrstevnice (funkce *Contour*) a poté byly pomocí funkce *Smooth Line* vyhlazeny a manuálně upraveny.

### 6.2 Výškové rozdíly

Rozdíl  $\Delta h = H_Q^{(Bpv)} - H^{(EGM96)}$  ortometrické výšky  $H_{Bpv}$  a normální (Moloděnského) výšky  $H_{EGM96}$  zjištěný na základě průběhu modelů EGM96 a CR-2005 byl stanoven odečtením výškové anomálie od odlehlosti geoidu od elipsoidu ( $N_{EGM96} - \zeta_{CR2005}$  dle vztahu (5.1)). Analogicky byly zjištěny rozdíly ve srovnání s modelem QGZÚ-2013 a vypočtenými výškovými anomáliemi pro body výběrové údržby (podle vztahů (5.2) a (5.4)).

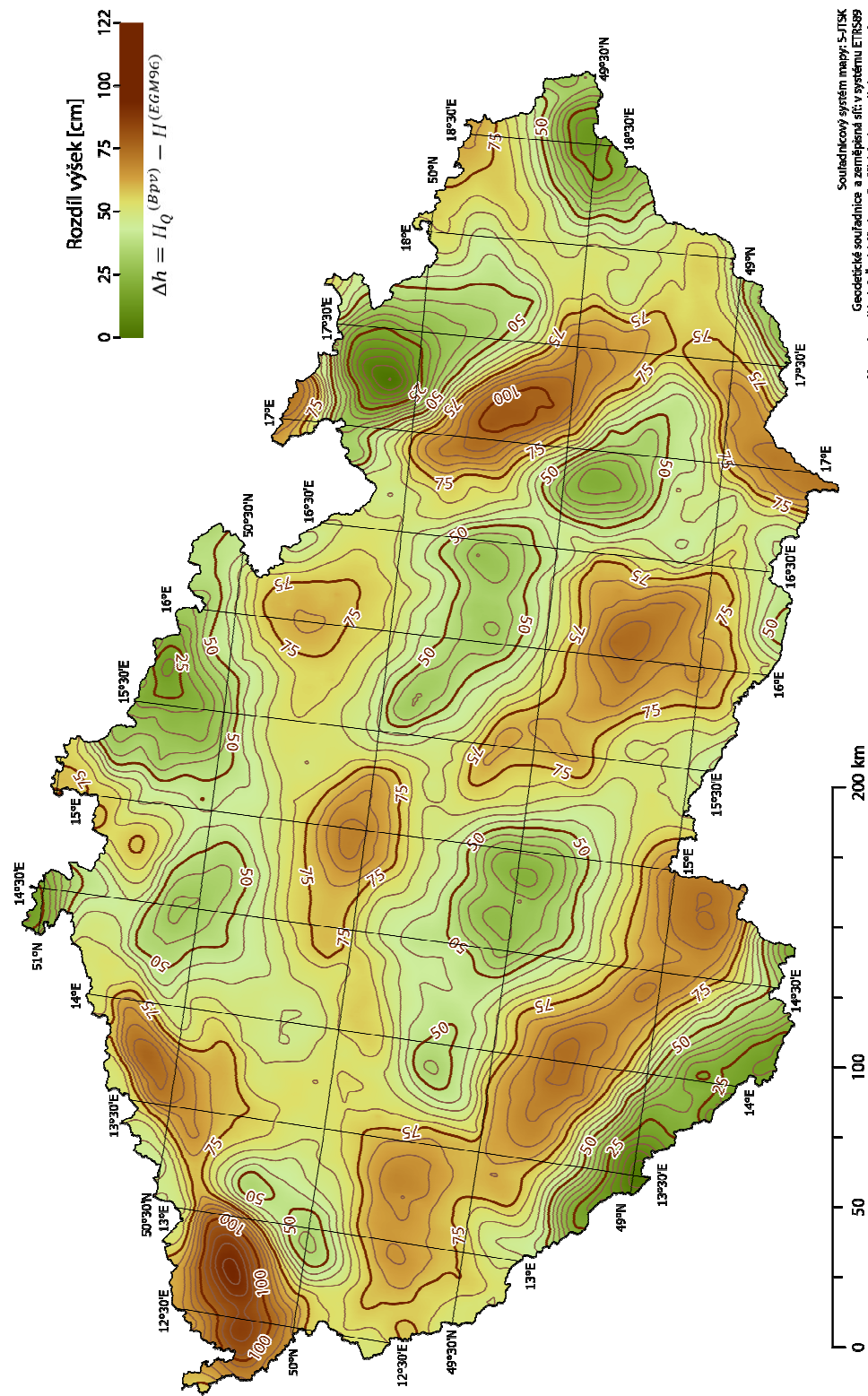
Výsledky vizualizace výškových rozdílů získaných na základě obou modelů i bodů GNSS-nivelace jsou prezentovány v této podkapitole jako kartografické výstupy. Pro modely EGM96 a CR-2005 jsou výsledky prezentovány v obr. 6.1A a 6.1B. Obě mapy obsahují stejné výškové rozdíly s tím, že obr. 6.1A obsahuje barevnou hypsometrickou mapu kombinovanou s vrstevnicovým popisem a obr. 6.1B obsahuje namísto výškopisu stínovaný reliéf plochy vzniklé z výškových rozdílů. Pro modely EGM96 a QGZÚ-2013 jsou výsledky podobné a nachází se na obr. 6.2A a 6.2B.



Data GNSS-nivelace bodů výběrové údržby ZÚ obsahují oproti modelům kvazigeoidu mnohem menší množství bodů, a to nepravidelně rozložených. Z tohoto důvodu se tento výstup odlišuje od předchozích. Nebyla vytvořena vizualizace pomocí stínování (stín by nepodával dobrou představu o tvaru plochy rozdílů výškových systémů, byl by příliš ovlivněn nepravidelnostmi). Vrstevnice vykresleny byly, ale jejich tvar je rozložením a množstvím bodů ovlivněn. Výsledek se nachází na obr. 6.3.

Uvedené obrázky 6.1 – 6.3 zobrazují mapy pro celou ČR. Aby byly dobře čitelné, jsou otočeny o 90° oproti textu práce (z důvodu jejich orientace na šířku).

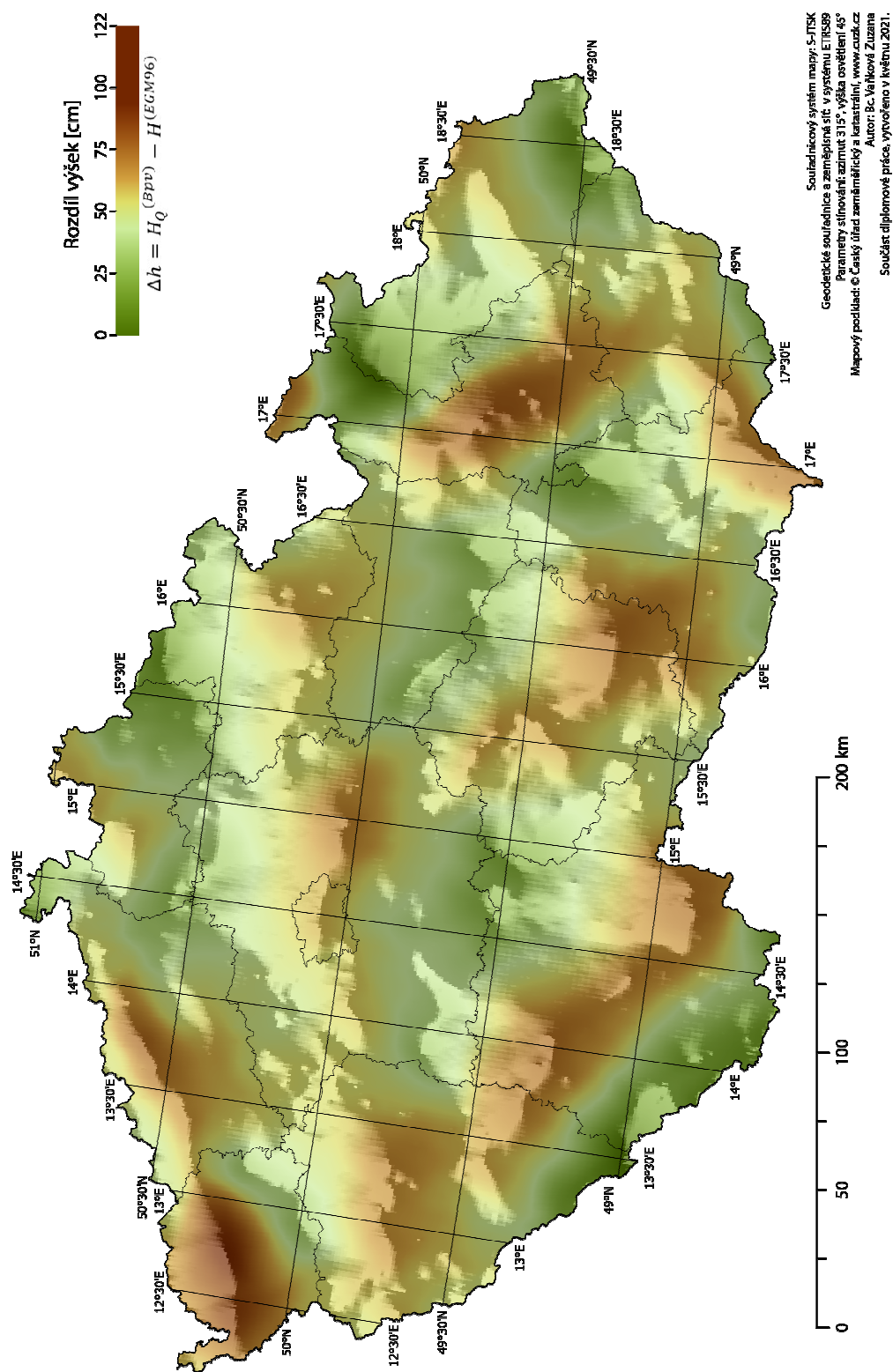
Rozdíl výšek v systémech Bpv a EGM96 na základě modelu kvazigeoidu CR-2005 pro území ČR



Geodetický souřadnicový systém mapy S-JTSK  
 Geodetická souřadnice a zeměpisná šířka v systému ETRS89  
 Mapový podklad: © Český úřad zeměměřičský a inženýrský, www.cuzk.cz  
 Autor: Bc. Veronika Zuzana  
 Součástí diplomové práce, vytvořeno v květnu 2021.

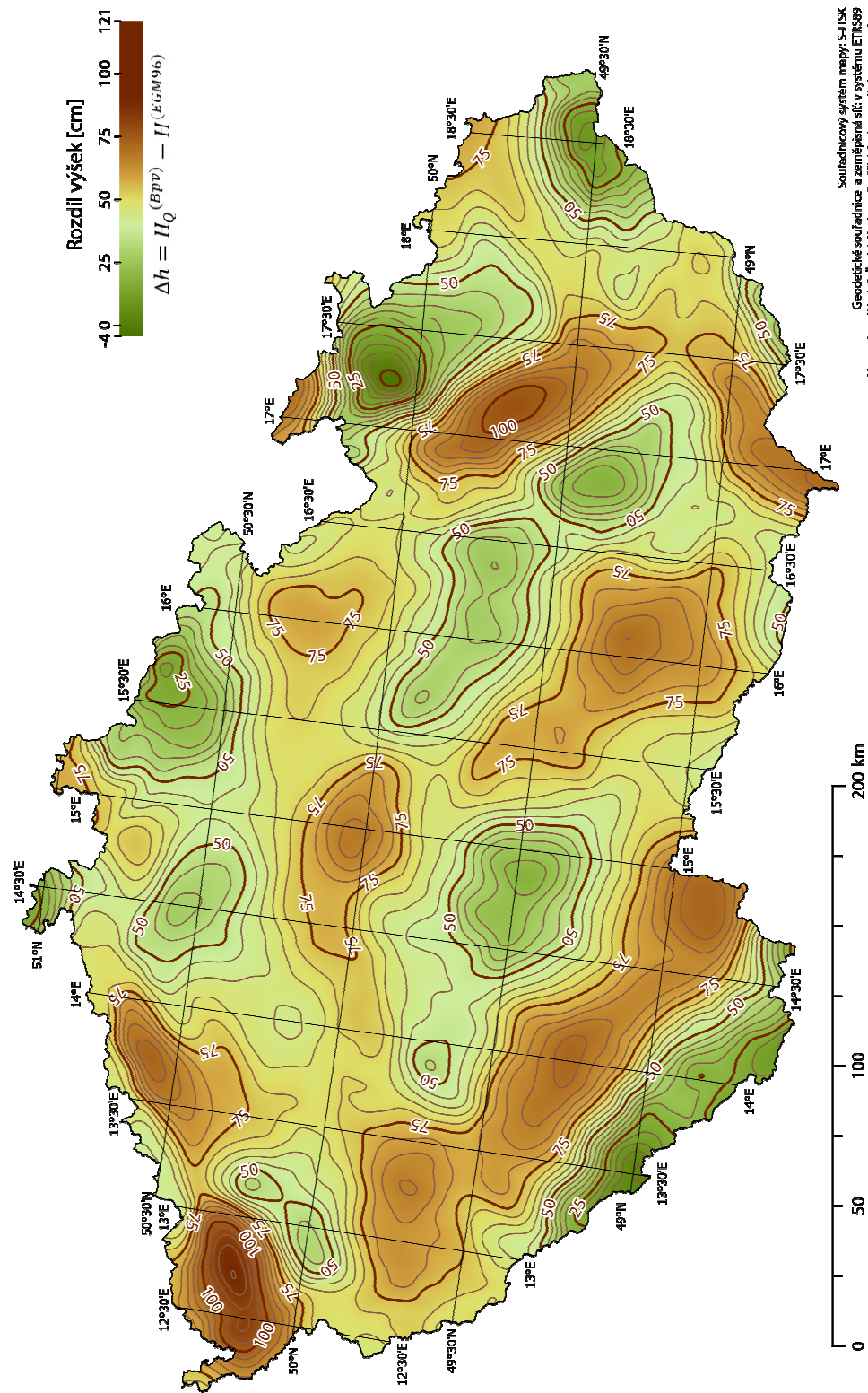
Obr. 6.1A Mapa rozdílu výšek s využitím vrstevnic

## Rozdíl výšek v systémech Bpv a EGM96 na základě modelu kvazigeoidu CR-2005 pro území ČR



Obr. 6.1B Mapa rozdílu výšek s využitím stínování reliéfu

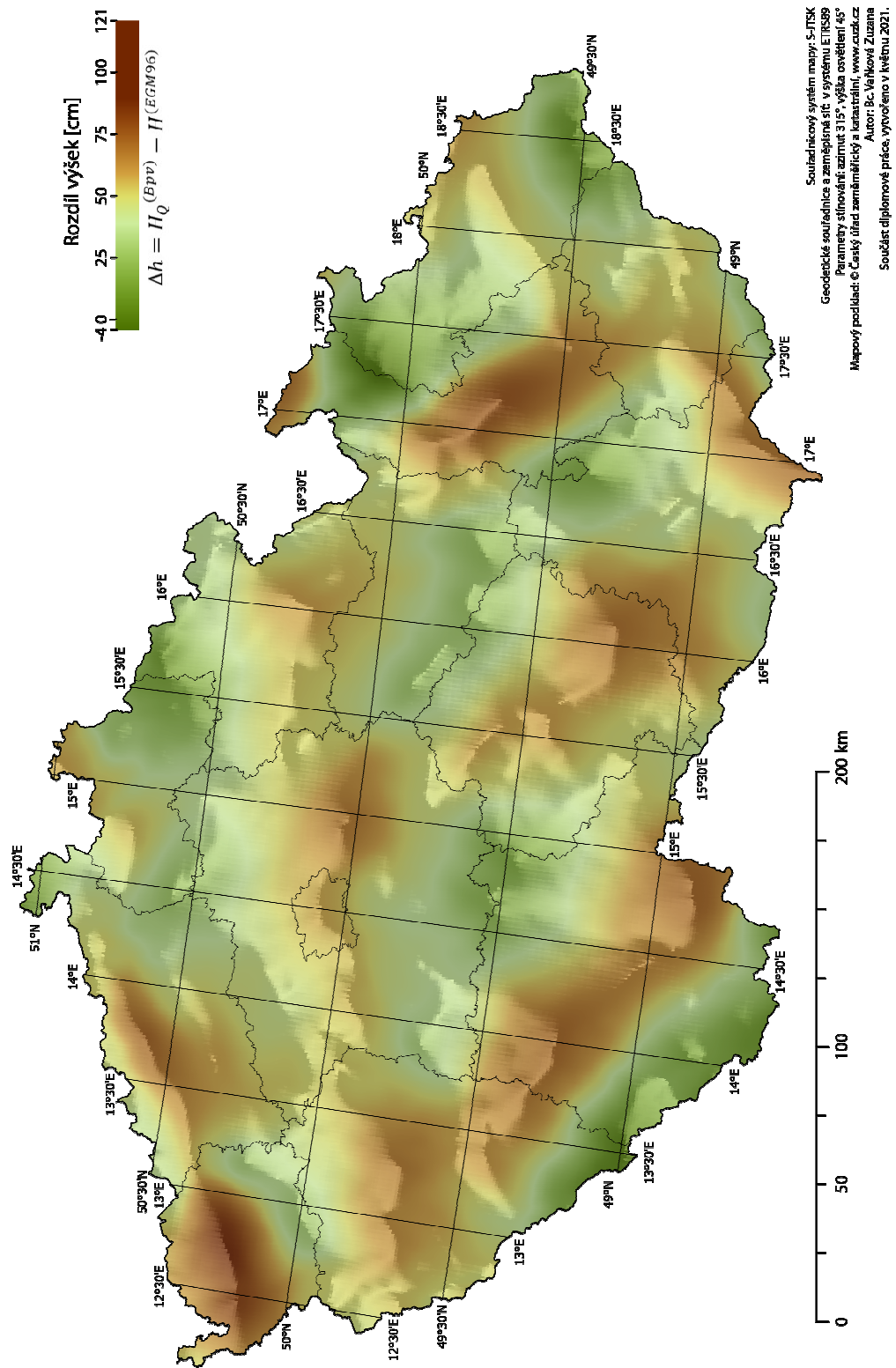
## Rozdíl výšek v systémech Bpv a EGM96 na základě modelu kvazigeoidu QGZÚ-2013 pro území ČR



Současný systém mapy S-JTSK  
 Geodetická souřadnice a zaměřená síť v systému ETRS89  
 Mapový podklad: © Český úřad zeměměřičský a inženýrský, www.uzi.cz  
 Autor: Bc. Veronika Zuzana  
 Součástí diplomové práce, vytvořeno v květnu 2021.

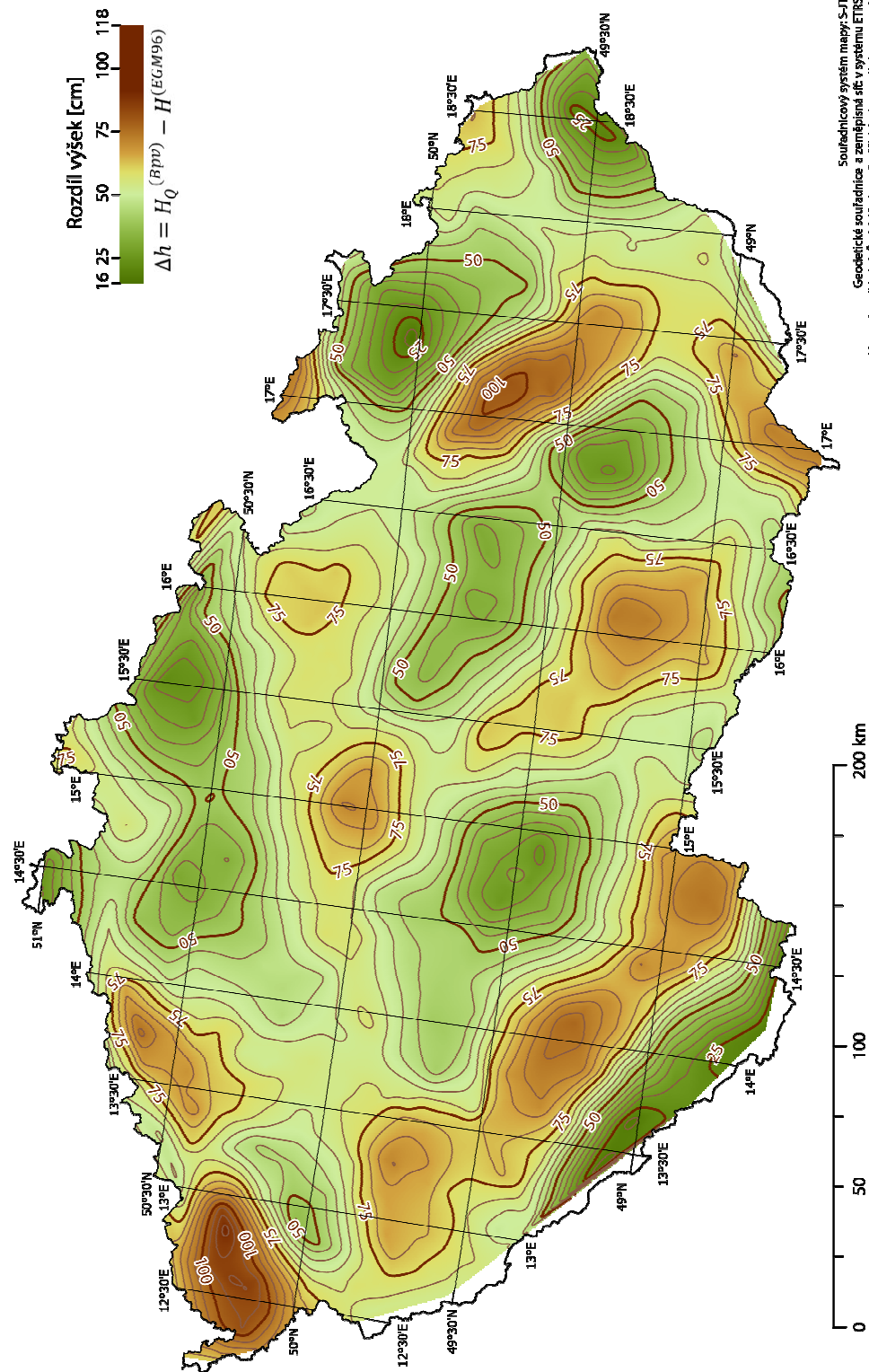
Obr. 6.2A Mapa rozdílu výšek s využitím vrstevnic

## Rozdíl výšek v systémech Bpv a EGM96 na základě modelu kvazigeoidu QGZÚ-2013 pro území ČR



Obr. 6.2B Mapa rozdílu výšek s využitím stínování reliéfu

## Rozdíl výšek v systémech Bpv a EGM96 na základě dat GNSS-nivelace pro území ČR



Souřadnicový systém mezin. S-JTSK  
Geoidníká souřadnice a zaměřená úř. v systému ETRS89  
Mapový podklad: © Český úřad zeměměřičský a inženýrský, www.cuzk.cz  
Autor: Bc. Věroslav Zuzana  
Součástí diplomové práce, vytvořeno v květnu 2021.

Obr. 6.3 Mapa rozdílu výšek s využitím vrstevnic

### 6.3 Porovnání výškových rozdílů, zhodnocení modelů

Výsledky můžeme porovnat pomocí jejich rozdílů. Diference rozdílů výšek na základě modelů kvazigeoidu a bodů GNSS-nivelace lze popsat podle (5.1), (5.2) a (5.4) vztahy:

$$\Delta h_{(CR2005, EGM96)} - \Delta h_{(VYBUD, EGM96)} = \zeta_{VYBUD} - \zeta_{CR2005}, \quad (6.1)$$

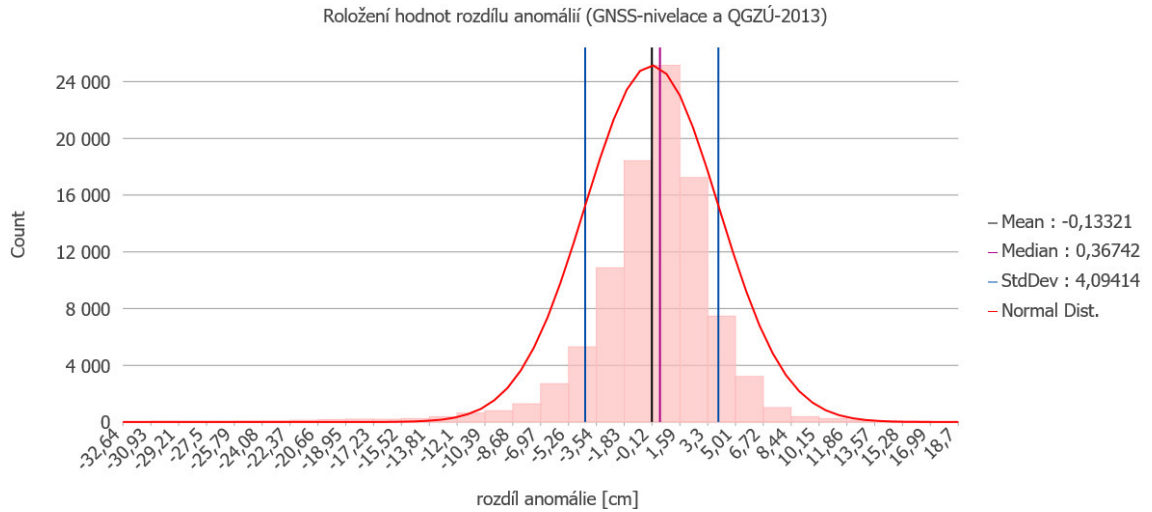
$$\Delta h_{(QGZÚ2013, EGM96)} - \Delta h_{(VYBUD, EGM96)} = \zeta_{VYBUD} - \zeta_{QGZÚ2013}, \quad (6.2)$$

$$\Delta h_{(QGZÚ2013, EGM96)} - \Delta h_{(CR2005, EGM96)} = \zeta_{CR2005} - \zeta_{QGZÚ2013}. \quad (6.3)$$

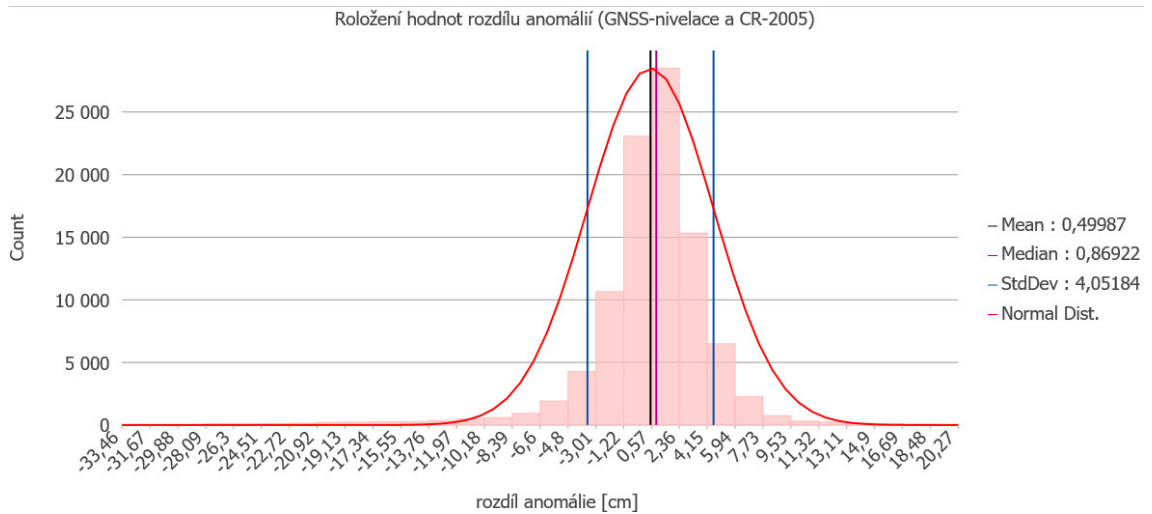
Tedy vidíme, že jde o srovnání výškových anomálií, protože člen odlehlosti se v rozdílů odečte. Dále budeme v této kapitole mluvit o rozdílů výškových anomálií, nikoli o rozdílů (diferenci) rozdílů výšek (pro vyšší srozumitelnost textu).

Srovnání výškových anomálií bylo realizováno jako rozdíl vytvořených rastrů. Při vyhodnocení rastru rozdílů výškových anomálií z GNSS-nivelace a z modelů kvazigeoidu dosahovala některá místa rastru velké velikosti (vyskytovalo se v něm několik hodnot výrazně odlehlých od ostatních). Každé takové místo bylo prozkoumáno, zda se v něm nachází bod GNSS-nivelace a jeho výškový rozdíl srovnán s rozdílem nejbližších bodů modelů kvazigeoidu. Bylo objeveno celkem 8 bodů GNSS-nivelace, kde se odlišovala hodnota výškového rozdílů o cca 40 cm a více. Tyto body GNSS-nivelace byly z výpočtů vyloučeny, neboť jde s největší pravděpodobností o chyby v datovém souboru GNSS-nivelace. Jednalo se o body číslo: 09100060, 09150030, 09230010, 16010190, 55010020, 21010240, 08130070, 24100090.

Dále bylo pozorováno, že v některých dalších místech se hodnoty také znatelně liší. S pomocí grafického znázornění a histogramu četností (obr. 6.4 a 6.5) rastru rozdílů výškových anomálií byly stanoveny hodnoty -10 cm a 10 cm jako hraniční. Oblasti s nižší (resp. vyšší) hodnotou rozdílů anomálie nebyly v porovnání uvažovány, neboť jak je patrné z obr. 6.6 (resp. 6.7), tyto oblasti nejsou pokryty daty GNSS-nivelace a podle výškových rozdílů na základě obou modelů kvazigeoidu v nich dochází k prudším změnám rozdílů výšek. Tyto důvody způsobí, že interpolované hodnoty výškových rozdílů na základě dat GNSS-nivelace v těchto oblastech nemohou dobře reprezentovat průběh výškových rozdílů.

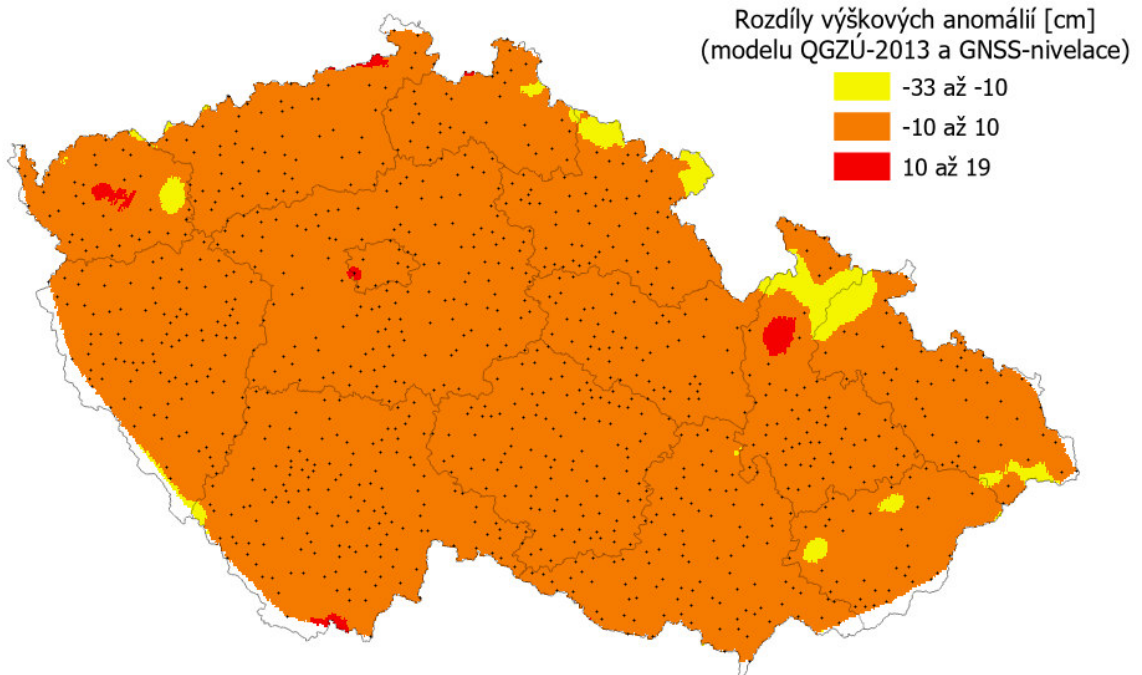


Obr. 6.4 Histogram četností rozdílů výškové anomálie (pro srovnání GNSS-nivelace a modelu QGZÚ-2013)

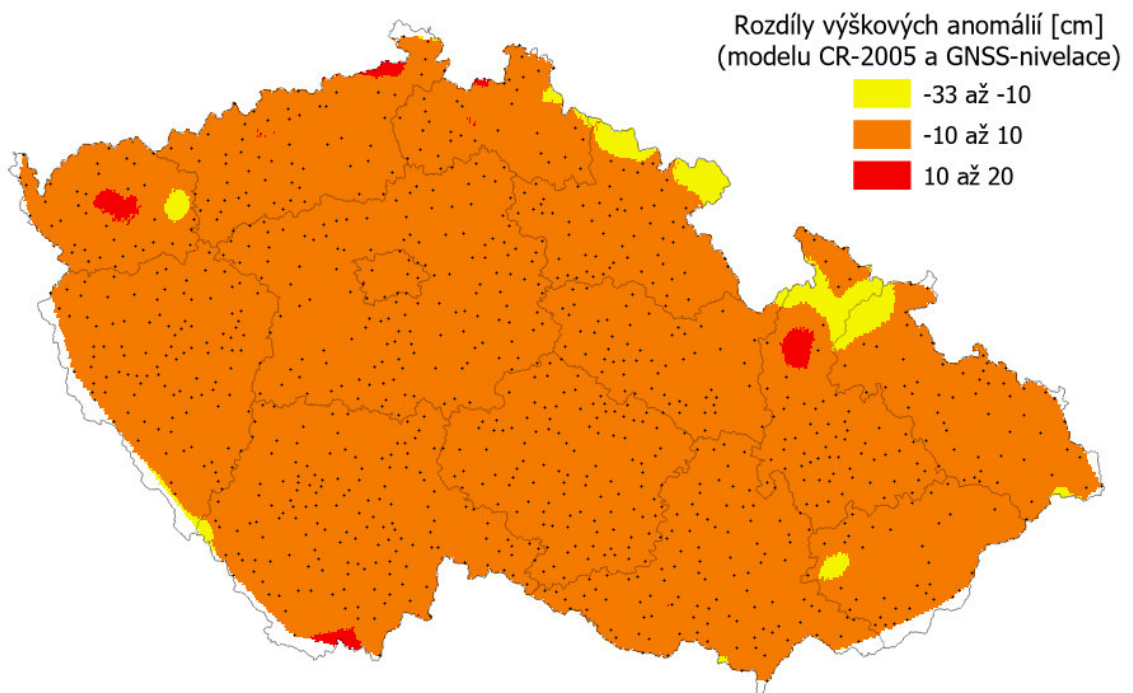


Obr. 6.5 Histogram četností rozdílů výškové anomálie (pro srovnání GNSS-nivelace a modelu CR-2005)





Obr. 6.6 Oblasti bez dat GNSS-nivelace, které nebyly uvažovány (žlutě a červeně) pro srovnání výškové anomálie modelu QGZÚ-2013 a GNSS-nivelace, bodové symboly značí pokrytí body GNSS-nivelace

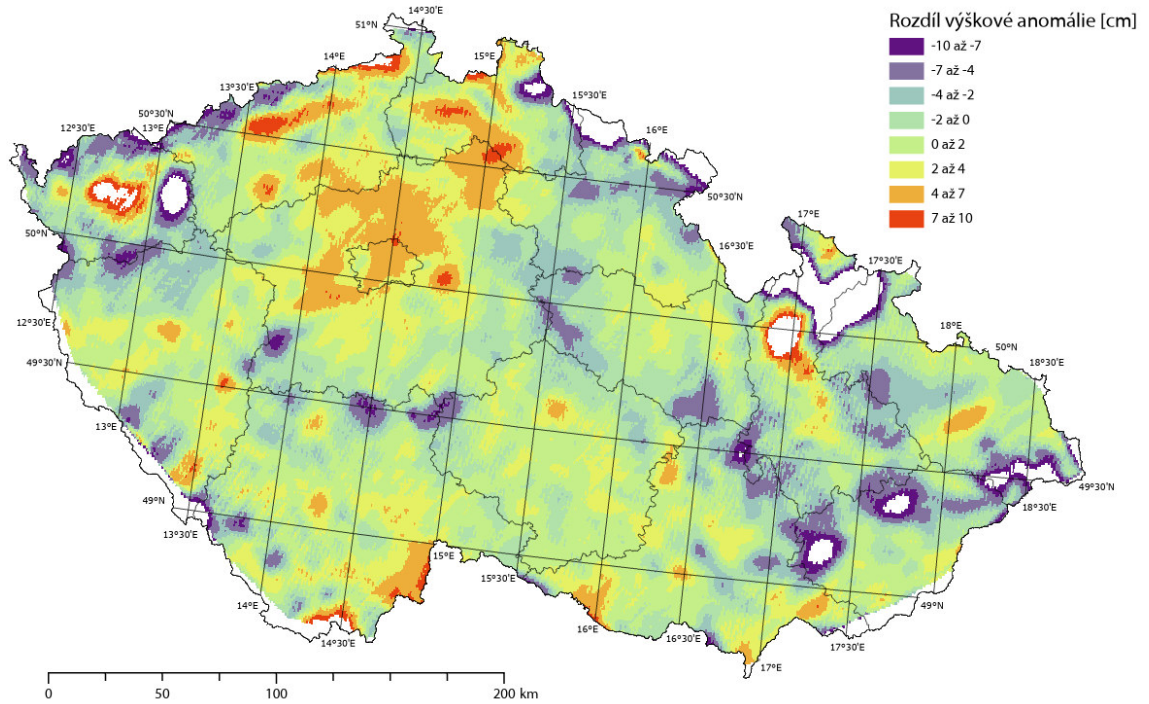


Obr. 6.7 Oblasti bez dat GNSS-nivelace, které nebyly uvažovány (žlutě a červeně) pro srovnání výškové anomálie modelu CR-2005 a GNSS-nivelace, bodové symboly značí pokrytí body GNSS-nivelace

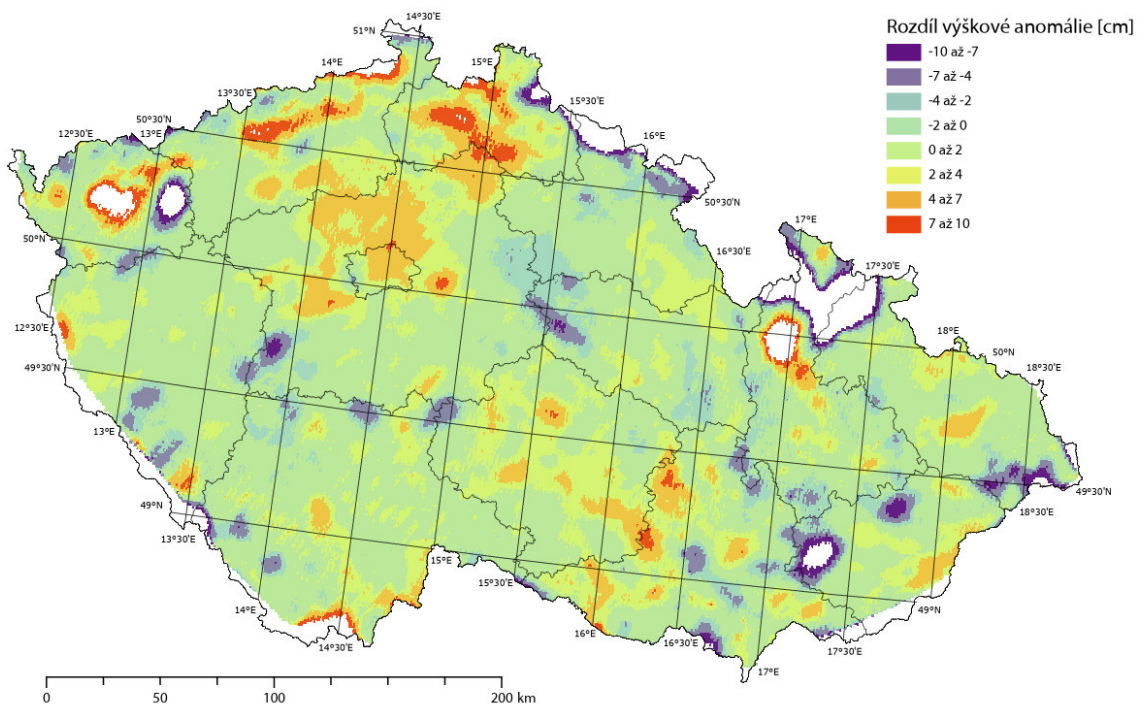
Při tomto postupu byl odhalen ještě jeden bod GNSS-nivelace, který se odchyloval od okolních bodů (je možno jej vidět v obr. 6.6 v červené plošce v oblasti

kraje Hlavní město Praha). Tento bod byl následně ze všech výpočtů vyloučen. Jde o bod číslo 13050410.

Výsledné znázornění rozdílů anomálií pro porovnání modelů kvazigeoidu s body GNSS-nivelace je prezentováno na následujících obrázcích (obr. 6.8 pro model QGZÚ-2013 a obr. 6.9 pro model CR-2005).



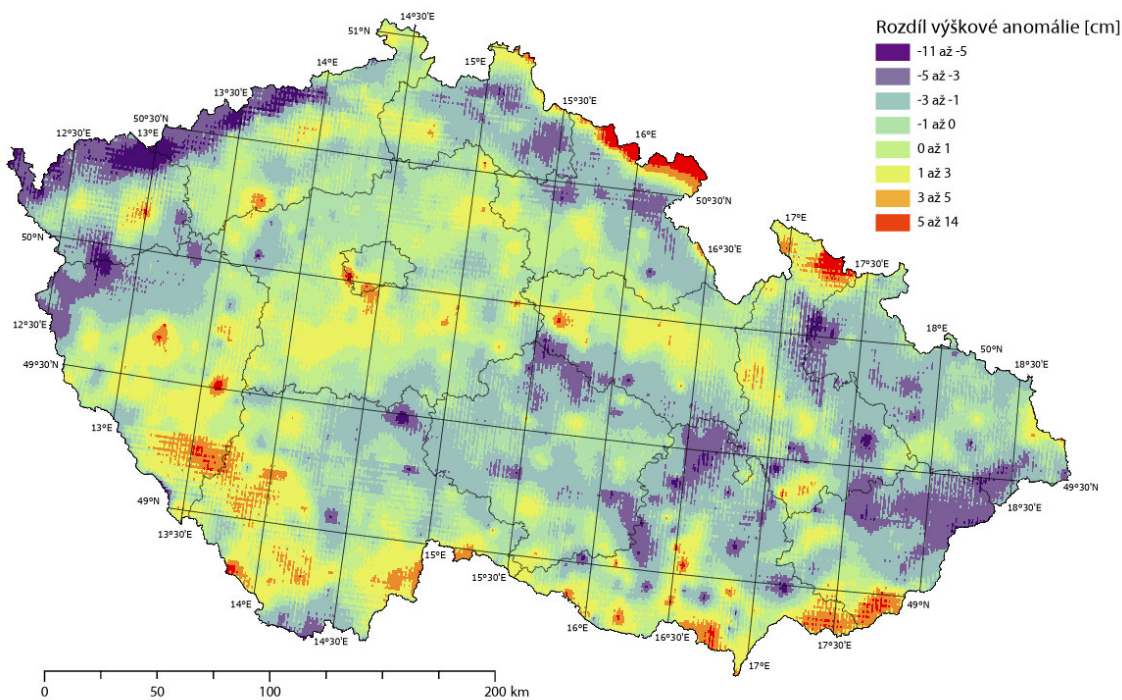
Obr. 6.8 Rozdíl výškové anomálie modelu QGZÚ-2013 a z dat GNSS-nivelace  
( $\zeta_{VYBUD} - \zeta_{QGZÚ2013}$ )



Obr. 6.9 Rozdíl výškové anomálie modelu CR-2005 a z dat GNSS-nivelace ( $\zeta_{VYBUD} - \zeta_{CR2005}$ )

Z obrázku 6.10 pak vidíme, jak se liší samotné modely kvazigeoidu mezi sebou, tedy výškové anomálie pro model QGZÚ-2013 a CR-2005.

Rozdíl výškové anomálie modelů QGZÚ-2013 a CR-2005



Obr. 6.10 Rozdíl výškové anomálie modelů QGZÚ-2013 a CZ-2005  
( $\zeta_{CR2005} - \zeta_{QGZÚ2013}$ )

Můžeme pozorovat, že obecně pro všechna porovnání jsou v pohraničních oblastech rozdíly výškové anomálie vyšší. To může být způsobeno hned několika vlivy. Nejprve zmiňme, že neuvažujeme vliv vypočtených odlehlostí modelu EGM96 na výslednou přesnost. A to proto, že jejich přesnost je mnohem vyšší než přesnost ostatních dat. I přes realizované řádkové průměry se hodnoty neliší více jak o 1 mm od hodnot vypočtených přesně. Odlehlost geoidu nemá výpočetně vliv na přesnost také z důvodu, že se při odečtení výškových rozdílů odečtou odlehlosti geoidu a ve vztahu zůstane pouze rozdíl výškových anomálií, jak již bylo uvedeno.

Jedním z důvodů je to, že oba modely kvazigeoidu mají na okrajích ČR nižší přesnost („Úplná střední chyba výškové anomálie zeta činí na území ČR 1 cm, v horském terénu a v přivraničních oblastech (do 10 km od státních hranic) může dosahovat hodnot vyšších, nejvýše však 3 cm.“ [16])

Dalším problémem může být ta skutečnost, že výškové anomálie modelu QGZÚ-2013 nejsou definovány mimo území ČR. Body GNSS-nivelace také nepřesahují hranice, tedy ani pro tato data vnější hodnoty výškových anomálií neznáme. Tedy interpolace hodnot v těchto oblastech nebude mít nejlepší výsledky, protože jsou pro ni použity hodnoty pouze z části okolí.

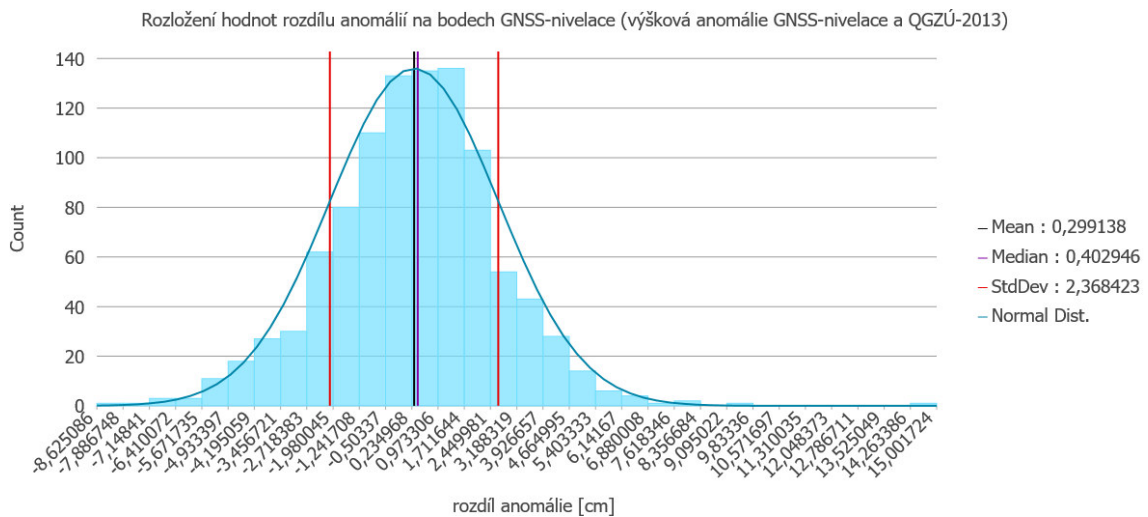
Vznik modelu CR-2005 je vázán na body GNSS-nivelace: „...model kvazigeoidu CR-2005, který byl odvozen navázáním modelu CR-2000 na síť 1024 bodů výběrové údržby, jejichž výška byla určena nivelací“ [14]. Oproti tomu model QGZÚ-2013 je vázán na jiná data, která s body uvažované GNSS-nivelace nesouvisí: „Model kvazigeoidu byl získán kombinovaným regionálním řešením lineární gravimetrické okrajové úlohy pro poruchový gravitační potenciál zemského tělesa, a to za významného přispění revidovaného kompletního souboru podrobných bodů gravimetrických mapování ČR zaměřených při geofyzikálním průzkumu mezi lety 1950 až 2010 a dalších dat.“ [16]

Dále bychom měli také přihlídnout k této informaci: „Kvazigeoid QGZÚ-2013 je určen k provádění místních transformací v jednotlivých lokalitách příslušných výdejních jednotkám. K převodu výšek v rámci zpřesněné globální transformace mezi ETRS89 a S-JTSK je určen kvazigeoid CR-2005“ [16]

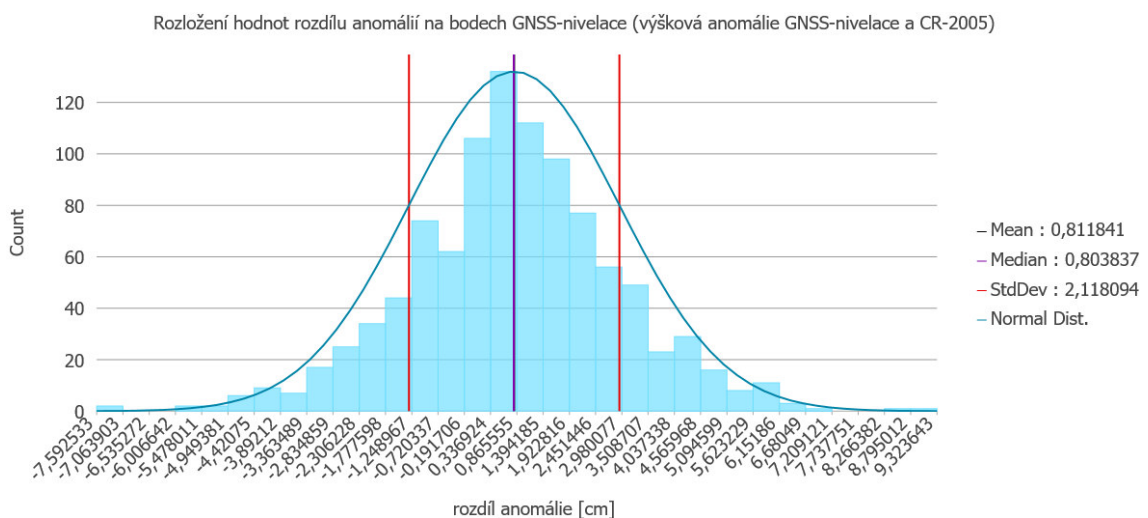
Pak můžeme usoudit, že rozdíl výškové anomálie získané z dat GNSS-nivelace a výškové anomálie staršího modelu CR-2005 může vycházet s menší směrodatnou odchylkou a blíže k nulovým hodnotám, než rozdíl získaný z výškové anomálie modelu QGZÚ-2013, protože model CR-2005 byl vytvořen navázáním předchozího modelu CR-2000 právě na body GNSS-nivelace.

S výše zmíněnou úvahou souhlasí také ten fakt, že i po vyřazení oblastí, kde nebylo pokrytí body GNSS-nivelace, dosahovala směrodatná odchylka rozdílu anomálie

modelu CR-2005 a GNSS-nivelace  $\sigma_{CR2005} = 2,83 \text{ cm}$  a směrodatná odchylka rozdílu anomálie modelu QGZÚ-2013 a z GNSS-nivelace  $\sigma_{QGZÚ2013} = 3,03 \text{ cm}$ . Obě hodnoty byly získány ze statistik rastru, tedy jsou samozřejmě ovlivněny interpolací. Pro výběrový rozdíl byla zpracována následující statistika (v obr. 6.11 a 6.12), kde jsou srovnány hodnoty rozdílu anomálie pouze v místě bodů GNSS-nivelace, tedy interpolací jsou ovlivněna jen data získaná z modelů kvazigeoidu. Výběrové směrodatné odchylky takového výběru byly  $s_{CR2005} = 2,12 \text{ cm}$  a  $s_{QGZÚ2013} = 2,37 \text{ cm}$ . Přímou na bodech byl tedy rozdíl v přesnosti nepatrně vyšší s tím, že na základě směrodatné odchylky bychom mohli považovat za lepší model CR-2005. Zatím ale nebyl zmíněn jeden důležitý fakt, že v provedených srovnáních má rozdíl výškové anomálie získané z dat GNSS-nivelace a výškové anomálie QGZÚ-2013 průměrnou a střední hodnotu výrazně bližší k nule.



Obr. 6.11 Histogram četností rozdílů výškové anomálie na výběrových datech pro body GNSS-nivelace (pro model QGZÚ-2013)



Obr. 6.12 Histogram četností rozdílů výškové anomálie na výběrových datech pro body GNSS-nivelace (pro model CR-2005)

Pro podrobný model výškových rozdílů byl nakonec vybrán model QGZÚ-2013.

Model QGZÚ-2013 je dle [16] pravidelně aktualizován a obsahuje podrobnější data. Podrobnost dat však není vždy výhodou, například pro účely globálního výpočtu jsou data až příliš podrobná. Tento model by se rozhodně více hodil pro výpočet rozdílů výšek pro menší oblasti, nikoli pro celou ČR, kde nemůže být využit celkový potenciál modelu vycházející z podrobnosti dat.

S přihlédnutím k výše uvedeným skutečnostem, byl nakonec vybrán model QGZÚ-2013, na jehož základě byla vyhotovena mapa výškových rozdílů, která je přiložena k této práci. Nelze ovšem říci, že by byl některý z modelů výrazně horší nebo lepší než jiný.

## 6.4 Výsledná mapa výškových rozdílů

V samém závěru práce byl vyhotoven soubor map výškových rozdílů. Tyto mapy umožňují rychlé porovnání výšek v systému Bpv a EGM96. Mapy byly vytvořeny na základě rozdílů modelu EGM96 a zvoleného modelu QGZÚ-2013. Původním záměrem bylo vyhotovit jednu, nejvýše dvě mapy většího formátu. Aby však bylo možno určit hodnoty zeměpisných souřadnic pro body výškových rozdílů, bylo nutno zobrazit podrobně zeměpisnou síť (po 2' pro zeměpisnou délku i šířku). Protože by čtení souřadnic ve velké mapě bylo nepraktické, bylo od původního záměru upuštěno a bylo vyhotoveno celkem 13 map formátu A3. Mapy jsou zobrazeny v souřadnicovém systému ETRS 1989, což sice není ideální pro tvar ČR, ale pro souřadnice bodů ve stejném systému ano, obzvláště pak pro odečtení jejich souřadnic z mapy.

Mapa zobrazuje body s popiskem výškového rozdílu v cm. Body jsou pro rychlejší orientační srovnání rozděleny do čtyř kategorií podle intervalu výšek, a každá kategorie má přiřazenou jinou barvu.

## 7 Závěr

Stanovený cíl práce, tedy určit výškové rozdíly systému EGM96 a Bpv pro území ČR na základě různých vstupních dat, byl splněn. Výsledky také byly porovnány mezi sebou a byl vybrán model QGZÚ-2013, na jehož základě byla vytvořena mapa výškových rozdílů, která umožní rychlý orientační převod výšek v jednotlivých systémech. Výsledky byly také prezentovány formou textového souboru obsahujícího síť bodů a odpovídajících rozdílů výšek, z něhož je možné pomocí interpolace vypočítat hodnoty pro body mimo síť. Pro získání mnohem přesnějších hodnot výškových rozdílů konkrétních bodů by bylo možno na výsledky práce navázat vytvořením výpočetní aplikace s využitím obdobných metod a modelů.

V průběhu cesty vedoucí k naplnění stanovených cílů se vyskytlo mnoho komplikací, které bylo nutno korektně vyřešit. Za zmínku stojí například výpočet průvodiče geoidu, kde se vyskytlo potíží nejvíce, a to zejména z důvodu výpočetní rychlosti a kapacity operační paměti výpočetního zařízení. Proto musela být využita metoda řádkových průměrů (podle [17]), díky které sice počítáme hodnoty přibližné, ale s dostatečnou přesností pro cílový výsledek (jak je vidět z tabulky 4.2, pro rozdělení na 10 pásů podle zeměpisné šířky nepřesahuje maximální odchylka 1 mm). Tento krok vedl k výraznému zvýšení výpočetní rychlosti, protože velikost průvodiče může být určena naráz pro velké množství bodů pomocí maticového násobení.

Další výraznou komplikací bylo příliš velké množství dat souborů pro model kvazigeoidu QGZÚ-2013. Data bohužel nemohla být využita všechna ze zřejmých výpočetních důvodů. Také pro realizaci výstupu by data byla příliš podrobná, proto byl problém vyřešen redukcí vstupních dat na méně podrobnou síť. Komplikovaný byl i výběr dat pro body z původního souboru, který byl nakonec realizován prostřednictvím výpočtu odlehlosti. Souřadnice bodů v řidší síti byly vypočteny od výchozí hodnoty ve stanoveném intervalu, pro takto určené body byly vypočteny hodnoty odlehlosti geoidu a následně byly do výsledku vypsány ty hodnoty výškových anomálií, které souřadnicemi odpovídaly bodům ve vstupních souborech.

Závěrečnou těžko řešitelnou problematikou bylo posouzení přesnosti a vybrání jednoho modelu kvazigeoidu pro výslednou mapu výškových rozdílů. Výsledky podle obou modelů totiž mají své klady i zápory, avšak žádné výrazné odlišnosti v přesnosti. Nakonec byl po pečlivém zvážení vybrán model QGZÚ-2013.

## Seznam použité literatury

- [1] ANTONÍN, Zeman. *Geofyzika: Geofyzika a geodynamika*. Dotisk. Praha: Ediční středisko Českého vysokého učení technického, 1988.
- [2] *TERMINOLOGICKÁ KOMISE ČÚZK: Terminologický slovník zeměměřictví a katastru nemovitostí* [online]. VÚGTK, c2005-2021 [cit. 2021-4-27]. Dostupné z: [https://www.vugtk.cz/slovník/index.php?jazykova\\_verze=cz](https://www.vugtk.cz/slovník/index.php?jazykova_verze=cz)
- [3] ANTONÍN, Zeman. *Fyzikální geodézie 10*. Praha: České vysoké učení technické, 1998. ISBN 80-01-01849-0.
- [4] ANTONÍN, Zeman. *Fyzikální geodézie 10: teorie výšek a výškové systémy : doplňkové skriptum*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-01-02733-3.
- [5] BLAŽEK, Radim a Zdeněk SKOŘEPA. *Geodézie 3. 2.*, přepr. vyd. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-01-03100-4.
- [6] MERVART, Leoš a Miloš CIMBÁLNÍK. *Vyšší geodézie 2*. Praha: ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01628-5.
- [7] MÜLLER, František. *Kompendium geodésie a sférické astronomie: Geodésie nižší, I. Díl: Všeobecný úvod. Metoda nejmenších čtverců. Obecná a speciální nauka o strojích měřických*. V Praze: Nákladem "Spolku architektů a inženýrů v království Českém" a "Spolku posluchačů inženýrství na c. k. české vysoké škole technické", 1894, s. 10. Dostupné také z: <https://kramerius-vs.techlib.cz/uuid/uuid:8e3e4475-f46c-11e7-ae40-001b63bd97ba>
- [8] CIMBÁLNÍK, Miloš, Antonín ZEMAN a Jan KOSTELECKÝ. *Základy vyšší a fyzikální geodézie*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03605-1.
- [9] KOSTELECKÝ, Jan, Jaroslav KLOKOČNÍK a Jakub KOSTELECKÝ. *Kosmická geodézie*. V Praze: České vysoké učení technické, 2008. ISBN 978-80-01-04059-1.
- [10] CIMBÁLNÍK, Miloš a Leoš MERVART. *Vyšší geodézie*. Vyd. 2. přeprac. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02527-6.
- [11] LEMOINE, F.G., S.C. KENYON, J.K. FACTOR, R.G. TRIMMER, N.K. PAVLIS, D.S. CHINN, C.M. COX, S.M. KLOSKO, S.B. LUTHCKE, M.H. TORRENCE, Y.M. WANG, R.G. WILLIAMSON, E.C. PAVLIS, R.H. RAPP a T.R. OLSON, *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96*. Greenbelt, Maryland: Goddard Space Flight Center, 1998. NASA/TP-1998-206861.
- [12] INCE, E. S., F. BARTHELMES, S. REISSLAND, K. ELGER, C. FÖRSTE, F. FLECHTNER a H. SCHUH, (2019): *ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services and future plans*. - Earth System Science Data, 11, pp. 647-674, DOI: <http://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>.



- [13] Nová realizace systému ETRS89 v ČR. ČÚZK [online]. Praha: ČÚZK, c 2021 [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: <https://www.cuzk.cz/Zememericivi/Geodeticke-zaklady-na-uzemi-CR/GNSS/Nova-realizace-systemu-ETRS89-v-CR.aspx>
- [14] KOSTELECKÝ, Jan, Jakub KOSTELECKÝ a Ivan PEŠEK. Metodika převodu mezi ETRF2000 a S-JTSK varianta 2. ČÚZK [online]. Praha: ČÚZK, c 2021 [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: [https://www.cuzk.cz/Zememericivi/Geodeticke-zaklady-na-uzemi-CR/GNSS/Nova-realizace-systemu-ETRS89-v-CR/Metodika-prevodu-ETRF2000-vs-S-JTSK-var2\(101208\).aspx](https://www.cuzk.cz/Zememericivi/Geodeticke-zaklady-na-uzemi-CR/GNSS/Nova-realizace-systemu-ETRS89-v-CR/Metodika-prevodu-ETRF2000-vs-S-JTSK-var2(101208).aspx)
- [15] E-shop. ČÚZK [online]. Praha: ČÚZK, c 2021 [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: [https://geoportal.cuzk.cz/\(S\(gbtfvm4tzlwnrkqtfj0y5xqo\)\)/Default.aspx?mode=eShop&head\\_tab=sekce-01-gp&menu=13](https://geoportal.cuzk.cz/(S(gbtfvm4tzlwnrkqtfj0y5xqo))/Default.aspx?mode=eShop&head_tab=sekce-01-gp&menu=13)
- [16] Podrobný kvazigeoid QGZÚ-2013. ČÚZK [online]. Praha: ČÚZK, c 2021 [cit. 2021-5-5]. Dostupné z: [https://geoportal.cuzk.cz/\(S\(svjpsfww4dgtdxwq5xardt0t\)\)/Default.aspx?mode=TextMeta&side=bodpole&metadataID=CZ-CUZK-QGZU&head\\_tab=sekce-02-gp&menu=275](https://geoportal.cuzk.cz/(S(svjpsfww4dgtdxwq5xardt0t))/Default.aspx?mode=TextMeta&side=bodpole&metadataID=CZ-CUZK-QGZU&head_tab=sekce-02-gp&menu=275)
- [17] HOLEŠOVSKÝ, J. *Vztah výšek v systémech Bpv a EGM96 na území ČR*. 2007. Diplomová práce. ČVUT, Fakulta stavební.
- [18] HOLEŠOVSKÝ, J. *Výpočet přidružených Legendreových funkcí* [online]. [cit. 2021-5-6]. Dostupné z: [ftp://athena.fsv.cvut.cz/VG/VYG2/web\\_data/SHS/Legendreovy\\_funkce.pdf](ftp://athena.fsv.cvut.cz/VG/VYG2/web_data/SHS/Legendreovy_funkce.pdf)
- [19] *Sphärisch harmonische Synthese – Programmierung in Matlab*. Podklad ke kurzu Höhe, Schwere, Geoid na TU München, no. 10-12, červen 2006. Bez uvedení autora. 6 stran.
- [20] SKOŘEPA, Zdeněk. *PrevodKrovakAtd* [online]. In: . s. 3 [cit. 2021-5-15]. Dostupné z: <https://k154.fsv.cvut.cz/~skorepa/PrevodKrovakAtd.pdf>

# Seznam příloh

## Tištěná i elektronická forma:

### T.1 \_Mapy\_rozdilu\_vysek\_QGZU2013\_EGM96.PDF

(Tištěná verze – Příloha T.1: Mapy rozdílů výšek v systému Bpv a EGM96 vytvořené na základě rozdílu modelu kvazigeoidu QGZÚ-2013 a modelu EGM96 pro území ČR)

Jedná se o soubor celkem 13 mapových listů formátu A3 pokrývajících celou ČR. Mapy zobrazují bodově hodnoty rozdílů výšek v cm pro pravidelnou síť bodů (zeměpisná šířka po 1' a zeměpisná délka po 1,5'). Výškové rozdíly pro mapy byly získány na základě modelů QGZÚ-2013 a EGM96. Obsahem souboru je i přehled kladu mapových listů.

## Elektronická forma:

### E.1\_Vyskove\_rozdily\_QGZU2013\_EGM96.TXT

Data na jednom řádku souboru odpovídají jednomu bodu a jsou uvedena v pořadí: zeměpisná šířka, zeměpisná délka, výšková anomálie modelu QGZÚ-2013, vypočtená odlehlost geoidu od elipsoidu WGS84, vypočtené rozdíly výšek systémů Bpv a EGM96 na základě dat modelů QGZÚ-2013 a EGM96 v cm. Hodnoty odpovídají vybraným souřadnicím modelu QGZÚ-2013 a tvoří pravidelnou síť. Soubor těchto bodů byl zpracován jako mapová příloha T.1.

### E.2\_Vyskove\_rozdily\_CR2005\_EGM96.TXT

Data na jednom řádku souboru odpovídají jednomu bodu a jsou uvedena v pořadí: zeměpisná šířka, zeměpisná délka, výšková anomálie modelu CR-2005, vypočtená odlehlost geoidu od elipsoidu WGS84, vypočtené rozdíly výšek systémů Bpv a EGM96 na základě dat modelů CR-2005 a EGM96 v cm. Hodnoty odpovídají souřadnicím modelu CR-2005 a tvoří pravidelnou síť.

### E.3\_Vyskove\_rozdily\_GNSS-niv\_EGM96.TXT

Data na jednom řádku souboru odpovídají jednomu bodu a jsou uvedena v pořadí: zeměpisná šířka, zeměpisná délka, výšková anomálie na základě GNSS-nivelace, vypočtená odlehlost geoidu od elipsoidu WGS84, vypočtené rozdíly výšek systémů Bpv a EGM96 na základě dat GNSS-nivelace a modelu EGM96 v cm. Souřadnice odpovídají souřadnicím bodů GNSS-nivelace a tvoří nepravidelnou síť.

## **E.4\_Vypocty\_MATLAB**

Složka s výpočetními kódy a soubory pro program Matlab. Soubory uvnitř složky jsou následující:

### ***coefficient\_C.XLS a coefficient\_S.XLS***

Jde o matice Stokesových koeficientů, které byly získány seříděním z výchozího souboru pomocí jednoduché operace v programu Matlab.

### ***calculate\_Legendre\_2\_0.m***

Funkce volaná ostatními výpočetními skripty sloužící k výpočtu normovaných přidružených Legendreových funkcí.

### ***calculate\_Geoid\_1\_2.m a calculate\_Geoid\_1\_2\_point.m***

Funkce, sloužící k výpočtu průvodiče geoidu. Ve verzi „point“ byla upravena pro výpočet „bod po bodu“ (tedy pro nepravidelnou síť, kterou byla v případě této práce síť bodů GNSS-nivelace).

### ***N\_2\_vector.m***

Funkce sloužící k seřazení výsledných odlehlostí geoidu z matice do vektoru. Použito pro skript Odlehlost\_CR\_2005.m.

### ***generate\_coordinates\_grid\_for\_QGZU\_2013.m***

Funkce generující body v pravidelné síti, použita ve výpočetním skriptu Odlehlost\_QGZU\_2013.m

### ***find\_QGZU.m***

Funkce, která je využita ve výpočtu Odlehlost\_QGZU\_2013.m, kde v závěru slouží k vyhledání hodnot v souborech s body (podle souřadnic) a vypsání všech potřebných hodnot do matice výsledku.

### ***Odlehlost\_CR\_2005.m, Odlehlost\_QGZU\_2013.m a Odlehlost\_GNSS.m***

Skripty určené pro závěrečný výpočet odlehlosti geoidu. Jsou vytvořeny pro vstupní body podle daného modelu (rozlišeno v názvu).