

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
FAKULTA STAVEBNÍ

STUDIJNÍ PROGRAM: GEODÉZIE A KARTOGRAFIE

STUDIJNÍ SPECIALIZACE: INŽENÝRSKÁ GEODÉZIE



DIPLOMOVÁ PRÁCE

ČASOVĚ PROMĚNNÝ GRAVITAČNÍ SIGNÁL Z DRUŽICOVÝCH DRAH  
PROSTOROVĚ LOKALIZOVANÝ POMOCÍ KALMANOVY FILTRACE

TIME-VARIABLE GRAVITY FIELD SIGNAL FROM SATELLITE ORBITS  
SPATIALLY LOCALIZED BY MEANS OF KALMAN FILTERING

Vedoucí práce: doc. Mgr. Aleš Bezděk, Ph.D.

Katedra geomatiky

2021

Jakub Vynikal

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

### I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Vynikal Jméno: Jakub Osobní číslo: 468527  
 Zadávající katedra: k155 - katedra geomatiky  
 Studijní program: (N36GK) Geodézie a kartografie  
 Studijní obor: (36T0GKIG) Inženýrská geodézie

### II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Časově proměnný gravitační signál z družicových drah prostorově lokalizovaný pomocí Kalmanovy filtrace  
 Název diplomové práce anglicky: Time-variable gravity field signal from satellite orbits spatially localized by means of Kalman filtering

#### Pokyny pro vypracování:

Cílem DP je provést inverzi sezónní složky časově proměnného gravitačního pole dané modelem EIGEN-6s na povrch Země rozdělený na elementární trojúhelníkové plochy. Modelový signál nejprve generuje poruchy dráhy družice měřené pomocí GNSS, z poloh (včetně šumu) numericky získaná zrychlení jsou vstupem do lineární inverzní procedury. Na výstupu jsou odhady hmotnostních variací na jednotlivých povrchových elementech (ekvivalentní výška vody). Při řešení je nutno vzít do úvahy korelovanost šumu. Diskutujte výsledky získané metodou nejmenších čtverců a pomocí Kálmánovy filtrace v závislosti na volitelných parametrech úlohy (počet trojúhelníků, množství dat a pokrytí povrchu subsatelitními body, velikost šumu v družicových polohách, parametry Kálmánova filtru).

#### Seznam doporučené literatury:

Bezděk, A., Sebera, J., Encarnaçao, J., Klokočník, J., 2016. Time-variable gravity fields derived from GPS tracking of Swarm. *Geophys. J. Int.* 205, 1665–1669.  
 Bezděk, A., Sebera, J., Klokočník, J., Kostecký, J., 2014. Gravity field models from kinematic orbits of CHAMP, GRACE and GOCE satellites. *Adv. Space Res.* 53, 412–429.  
 Mcgee, L. A., Schmidt, S. F., 1985. Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry. NASA Technical Memorandum 86847.  
 Reid, I., 2001. Estimation II, odst. 1-2, str. 1-28. Lecture notes, University of Oxford, UK.  
 Strang, G., 1986. Introduction to Applied Mathematics. Wellesley-Cambridge Press, USA (odst. 2.5, str. 137-152).  
 Vallado, D. A., 2007. Fundamentals of Astrodynamics and Applications, Springer, USA (odst. 10.6, str. 770–778).  
 Wahr, J., 2015. Time-Varying Gravity from Satellites. In Schubert, G. Treatise on Geophysics, Elsevier, 193–213.

Jméno vedoucího diplomové práce: doc. Mgr. Aleš Bezděk, Ph.D.

Datum zadání diplomové práce: 11. 2. 2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16. 5. 2021  
*Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku*

Podpis vedoucího práce

Podpis vedoucího katedry

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

*Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.*

11. 2. 2020

Datum převzetí zadání

Podpis studenta(ky)



## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a veškeré podklady, ze kterých jsem čerpal, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

.....

místo, datum

.....

Bc. Jakub Vynikal



## **Poděkování**

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu doc. Mgr. Aleši Bezděkovi, Ph.D. za jeho spolehlivé odborné vedení.

Dále děkuji všem, kteří mě v průběhu vysokoškolského studia provázeli, tedy rodině, spolužákům i vyučujícím.



## Abstrakt

Předmětem této diplomové práce je proměnné gravitační pole Země vizualizované na síti trojúhelníků v podobě ekvivalentní výšky vodního sloupce. Data pro výpočet měla simulovat reálné měření družicemi (GRACE, Swarm aj.), konkrétně jde o zrychlení numericky získané z jejich GNSS poloh. V prostředí Matlab byly vytvořeny různé metody výpočtu (včetně Kalmanova filtru) a byla analyzována jejich vhodnost na základě daných parametrů šumu, počtu trojúhelníků aj.

## Klíčová slova

Časově proměnné gravitační pole, ekvivalentní výška vodního sloupce, Kalmanův filtr, GRACE, Stokesovy sféricko-harmonické koeficienty, druhý Newtonův zákon

## Abstract

The subject of this diploma thesis is Earth's time-variable gravity field visualized on a triangular network of equivalent water heights. Computation data are supposed to simulate real-world satellite measurement (from GRACE, Swarm etc.), specifically accelerations numerically derived from the corresponding GNSS positions. In the Matlab environment, there were created several methods of computation (including the Kalman filter) whose performance was analyzed, depending on numerous parameters, for example the noise magnitude, number of triangles etc.

## Key words

Time-variable gravity field, equivalent water height, Kalman filter, GRACE, Stokes spherical-harmonics coefficients, second Newton law



## Obsah

1.	Úvod.....	8
2.	Měření gravitačního pole .....	9
2.1.	Družicové mise.....	9
2.1.1.	GRACE (KBR).....	9
2.1.2.	Jiné družice (GNSS) .....	11
2.2.	Popis gravitačního pole .....	12
2.2.1.	Geoid, gravitační potenciál .....	12
2.2.2.	EWH [7].....	13
2.2.3.	Gravitační pole v čase.....	14
3.	Metoda výpočtu ze zrychlení.....	16
3.1.	Lineární model .....	17
3.2.	Dekorelace reziduí .....	18
3.3.	Kolinearita.....	19
3.4.	Singulární rozklad .....	20
3.5.	Kalmanův filtr .....	20
3.5.1.	Volba počátečních podmínek.....	22
3.6.	Přesnost odhadů .....	23
4.	Výpočet.....	25
4.1.	Elementární plochy .....	25
4.2.	Modelová data.....	25
4.3.	Výpočet z dat bez šumu .....	26
4.3.1.	Délka sledovaného období.....	26
4.3.2.	Interval sběru dat .....	29
4.4.	Výpočet ze zašuměných dat .....	30
4.4.1.	Šum .....	30
4.4.2.	Dekorelace .....	31



4.4.3	Použití Kalmanova filtru.....	33
4.5	Výpočet pro 15 dní.....	36
4.6	Technické aspekty výpočtu.....	40
4.6.1	Operační paměť.....	40
4.6.2	Numerická stabilita.....	40
4.6.3	Rychlost výpočtu.....	40
5.	Výsledky.....	41
6.	Závěr.....	42
	Seznam použité literatury a zdrojů.....	43
	Seznam použitých zkratek.....	45
	Seznam tabulek.....	46
	Seznam obrázků.....	47
	Seznam příloh.....	49



# 1. Úvod

Během posledních dvou dekad došlo k bezprecedentnímu zpřesnění našich znalostí o gravitačním poli Země. Významný pokrok v tomto ohledu přinesly tři družicové mise: CHAMP (2000-2010), GRACE (2002-2017) a GOCE (2009-2013), z nichž především GRACE svými výsledky překonala očekávání a přinesla nejpodrobnější data.

Sledováno je statické i časově proměnné gravitační pole. Studium časově proměnného pole je užitečné pro zjištění přesunů hmoty na povrchu Země v průběhu času, což má význam v hydrologii, geologii, seismologii, glaciologii nebo při zkoumání klimatických změn.

Na základě poruch dráhy družic a jiných družicových měření se určují parametry gravitačního pole Země známé jako harmonické geopotenciální koeficienty. [1]

V této práci jsou analyzována simulovaná měření zrychlení působícího na družici a za užití druhého Newtonova zákona jsou spočítány příspěvky elementárních ploch na povrchu Země k působícímu zrychlení. Děje se tak při odečtení statické a trendové složky modelu EIGEN-6s, tedy je zkoumáno časově proměnné gravitační pole. Příspěvky ke zrychlení jsou dále přepočteny na EWH, tedy ekvivalentní výšku vodního sloupce, což je veličina snadno představitelná.

Účelem práce tedy není dosáhnout výsledku za použití reálných dat, ale prostřednictvím simulace stanovit a optimalizovat výpočetní postup, který může být poté na opravdovou situaci použit.

Nejdelší zkoumaný časový úsek je 15 dní, při měření každých 10 sekund získáváme velké množství dat. Lineární regresní model, kterým jsou parametry zjišťovány, musí být tedy vhodný pro tuto situaci. Náležitosti výpočtu popisuje kapitola 4.





## 2. Měření gravitačního pole

Parametry gravitačního pole lze určovat lokálně a globálně. Lokálními měřeními se rozumí například gravimetry. Přestože poskytují dobrý vhled do lokálního pole a jsou relativně přesné, nejsou dostatečně hustě rozmístěny po Zemi. Pro komplexní pohled na gravitační pole jsou vhodná družicová měření.

Poruchové síly působící odchylky dráhy skutečné družice od idealizované keplerovské elipsy jsou způsobeny především elipsoidickým tvarem Země a v detailech pak jemnou strukturou gravitačního pole (a dalších poruchových vlivů gravitačního i negravitačního původu). Pokud známe dráhu dostatečně přesně, je možno zpětně vypočítat parametry gravitačního pole. [1]

### 2.1. Družicové mise

V průběhu minulých dvaceti let byly vypuštěny na oběžnou dráhu mise CHAMP, GRACE a GOCE, které se na gravitační pole specializovaly. Kromě nich fungují družice určené především pro jiné účely, např. Swarm, která měří magnetické pole, ale subsidiárně může poskytovat data i pro pole gravitační. [4] Vzhledem k úspěchu mise GRACE bylo v roce 2018 navázáno misí GRACE-FO, která funguje na stejném principu.

Pro podrobnou znalost gravitačního pole Země je nutné, aby satelit operoval relativně nízko nad zemským povrchem, kde jsou poruchy dráhy citlivější na nerovnoměrnosti rozložení hmot na Zemi. Starší satelity (např. LAGEOS) létají okolo 6000 km nad zemským povrchem, aby je neovlivňoval odpor atmosféry. [7] Nová generace družic ale dokázala pracovat ve výšce stovek kilometrů, což vyústilo v mnohem přesnější výsledky.

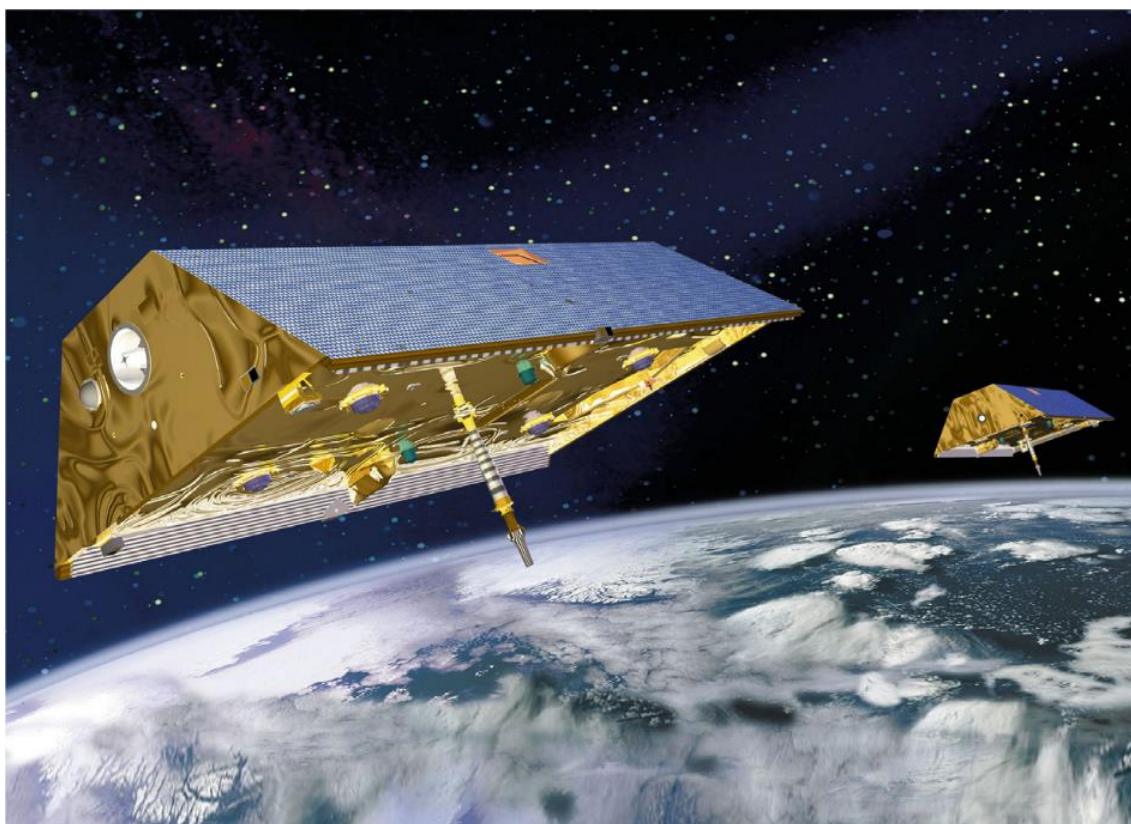
#### 2.1.1. GRACE (KBR)

Společná mise americké NASA a německé DLR započala v roce 2002 a pracovala až do roku 2017, tedy o deset let déle, než se očekávalo. GRACE se skládala ze dvou satelitů s počáteční výškou zhruba 500 km, s téměř polárním oběhem (sklon dráhy  $89^\circ$ ), přičemž jednotlivé družice od sebe byly vzdáleny 220 km ve směru dráhy.

Gravitace není měřena přímo aktivním senzorem, nýbrž zprostředkovaně velmi přesným kontinuálním měřením vzdálenosti mezi družicemi v řádu mikrometrů. V závislosti na nerovnoměrném přitahu dochází ke změně vzdálenosti, z čehož se počítá gravitační pole. Metoda se nazývá SST (*satellite-to-satellite tracking*), v tomto případě



jde o způsob low-low (družice jsou ve stejné výšce). Délka je měřena mikrovlnami (KBR).



Obrázek 1 - Ilustrace družic GRACE [5]

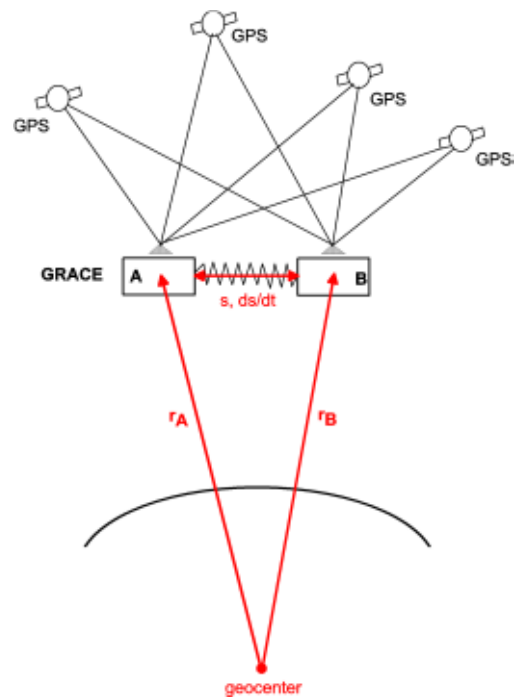
Negravitační zrychlení jsou zaznamenávána akcelerometrem a odečtena. Měřená data jsou procesována různými způsoby v různých výpočetních centrech, výsledkem jsou harmonické geopotenciální koeficienty. Zatímco mise GOCE poskytla nejvíce informací o statickém gravitačním poli, GRACE dosahuje ze všech metod nejpřesnějších výsledků a nejvyššího stupně koeficientů časově proměnného gravitačního pole (*TVG – time-variable gravity*). Rozlišení na povrchu země je 400-500 km. [5]



### 2.1.2. Jiné družice (GNSS)

Kromě SST low-low lze výpočet provést také způsobem high-low. Poloha družice je určována z GNSS družic, které jsou na oběžné dráze mnohem výš (~20 000 km). Šum, kterým je určení polohy družice zatíženo, se pohybuje v jednotkách centimetrů. Z kontinuálních poloh lze numericky spočítat zrychlení a dále gravitační model. Tato metoda nedosahuje tak přesvědčivých výsledků jako GRACE (je zhruba desetkrát méně přesná), ale lze ji s úspěchem použít na každou družici s přesným GNSS přijímačem. Přitom nevyžaduje linearizaci, takže aplikace lineární regrese je jednoduchá. Zároveň sloužila jako náhrada v mezičase, kdy družice GRACE nebyly na oběžné dráze. [2][3]

Touto metodou se budeme zabývat dále.



Obrázek 2 - SST low-low/high-low [6]



## 2.2 Popis gravitačního pole

### 2.2.1 Geoid, gravitační potenciál

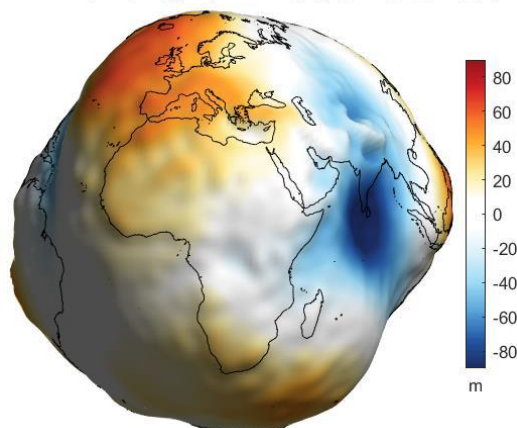
Plocha vytvořená střední hladinou světových oceánů se nazývá geoid. Je to plocha konstantního tíhového potenciálu, od které se měří nadmořské výšky. [1]

Model gravitačního pole je popisován pomocí sféricko-harmonických (Stokesových) koeficientů ( $C_{nm}, S_{nm}$ ), které prostřednictvím kulových funkcí vytvářejí matematicky definovaný kulový tvar s deformacemi, který aproximuje reálný geoid. Jde o zápis gravitačního potenciálu rozvojem:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_{nm}(\cos \theta) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda]. \quad (1)$$

$GM$  je geocentrická gravitační konstanta,  $R$  je rovníkový poloměr Země a  $P_{nm}$  je plně normovaná asociovaná Legendreova funkce stupně  $n$  a řádu  $m$ . Potenciál je vztažen k bodu s danými souřadnicemi (vzdálenost, zem. šířka, zem. délka) v konkrétním čase (epoše). [2] Čím větší stupeň a řád koeficientů známe, tím přesnější model geoidu získáme. Pokud položíme  $r = R$  a dosadíme šířku a délku s malým krokem, získáme model geoidu. Rozlišení kulových funkcí na povrchu Země je  $20\,000/n$  km.

Střední pole (n60; geoid; UTCSR5\_05yrs\_2004\_01\_2008\_12)



Obrázek 3 - Barevná ilustrace geoidu [1]

Geoid je tvar nepravidelný a pro mnoho účelů je vhodné jej nahradit jednodušším referenčním elipsoidem. Výškový rozdíl mezi geoidem a referenčním elipsoidem se nazývá odlehlost geoidu a značí se  $N$ . Počítá se Brunsovým teorémem:

$$N = \frac{V(r, \theta, \lambda) - U}{\gamma}, \quad (2)$$

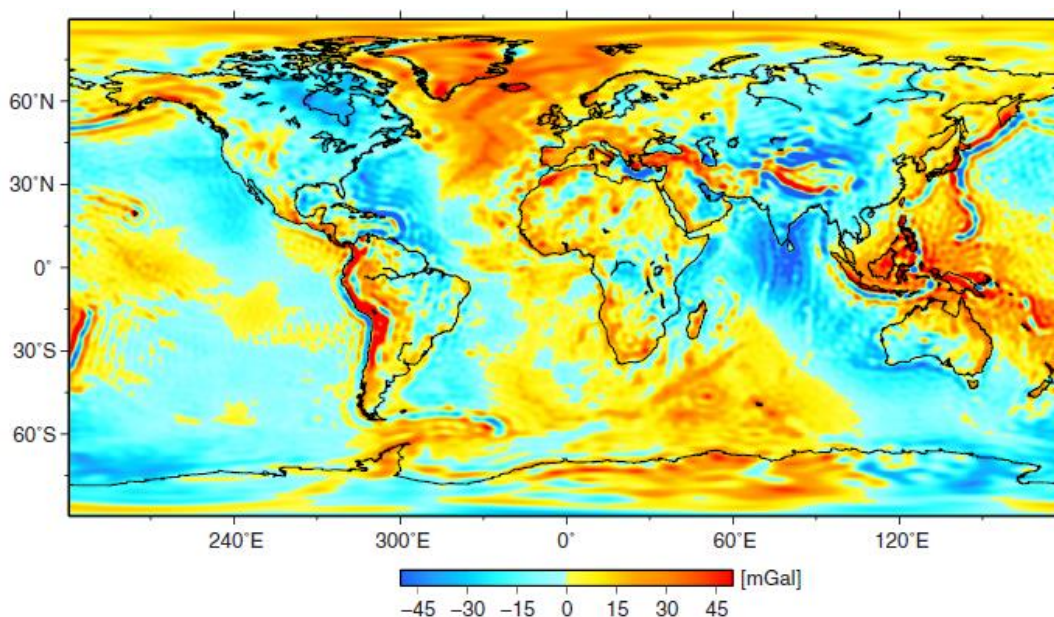
kde  $U$  je gravitační potenciál referenčního elipsoidu, rovný potenciálu na povrchu geoidu, a  $\gamma$  je normální gravitační zrychlení na povrchu elipsoidu. To může být dále aproximováno  $GM/R^2$ . Nakonec vzorec pro odlehlost zní:



$$N(\theta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos \theta) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda]. \quad (3)$$

Pro výpočet změny odlehlosti v čase ( $\Delta N(\theta, \lambda)$ ) stačí vyměnit  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  za jejich časové změny  $\Delta C_{nm}$ ,  $\Delta S_{nm}$ . Když odečteme od koeficientů v dané epoše jejich dlouhodobé průměry, získáme změnu gravitačního pole vůči referenčnímu geoidu (statickému poli).

Na obrázku 4 je znázorněna gravitační anomálie statického pole od normálního zrychlení referenčního elipsoidu způsobená nerovnoměrným rozložením hmoty na Zemi.



Obrázek 4 - Odchylka statického gravitačního pole od normálního daného referenčním elipsoidem [5]

### 2.2.2 EWH [7]

EWH, neboli ekvivalentní výška sloupce vody, je nejjednodušší popis změny gravitačního pole. Je podobná jako změna odlehlosti geoidu. Předpokládáme, že změny koeficientů  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  jsou způsobeny výhradně v tenké vrstvě o tloušťce  $H$  v blízkosti zemského povrchu, většinou hydrologickými jevy.  $H$  je v tomto případě dána hlavně tloušťkou atmosféry, čili činí maximálně 10 km. Předpokládejme, že

$$(n_{max} + 2) \cdot \frac{H}{R} \ll 1. \quad (4)$$

Pokud se  $R$  od  $r$  neliší o více než  $H$ , přičemž  $n_{max}$  je relativně malé, v konečném důsledku uvážení vrstvy výpočet potenciálu neovlivní, a můžeme člen  $\left(\frac{R}{r}\right)^n$  nahradit 1.



Nicméně předpoklad, že změnu gravitačního potenciálu ovlivňují pouze změny v povrchové vrstvě, není zcela správný. Jakákoli změna hmoty na povrchu Země určitým způsobem (tlakem) změni i rozložení hmoty v pevné Zemi, bývá to řádu jednotek procent. Tento jev je kvantifikován Loveovými zatěžovacími čísly  $k_l$ .

$$(\Delta C_{nm}, \Delta S_{nm})_{zeme} = k_l \cdot (\Delta C_{nm}, \Delta S_{nm})_{surf} \quad (5)$$

Změna plošné hustoty Země se obdobným rozvojem Legendreových funkcí dá zapsat

$$\Delta\sigma(\theta, \lambda) = \frac{R\rho_{ave}}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{1+k_l} P_{nm}(\cos\theta) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda], \quad (6)$$

kde  $\rho_{ave} = 5517 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  je průměrná hustota Země. Z plošné hustoty už je triviální výpočet ekvivalentní výšky vodního sloupce  $\Delta h$  vydělením hustotou vody  $\rho_w$ :

$$\Delta h(\theta, \lambda) = \frac{\Delta\sigma(\theta, \lambda)}{\rho_w}. \quad (7)$$

### 2.2.3 Gravitační pole v čase

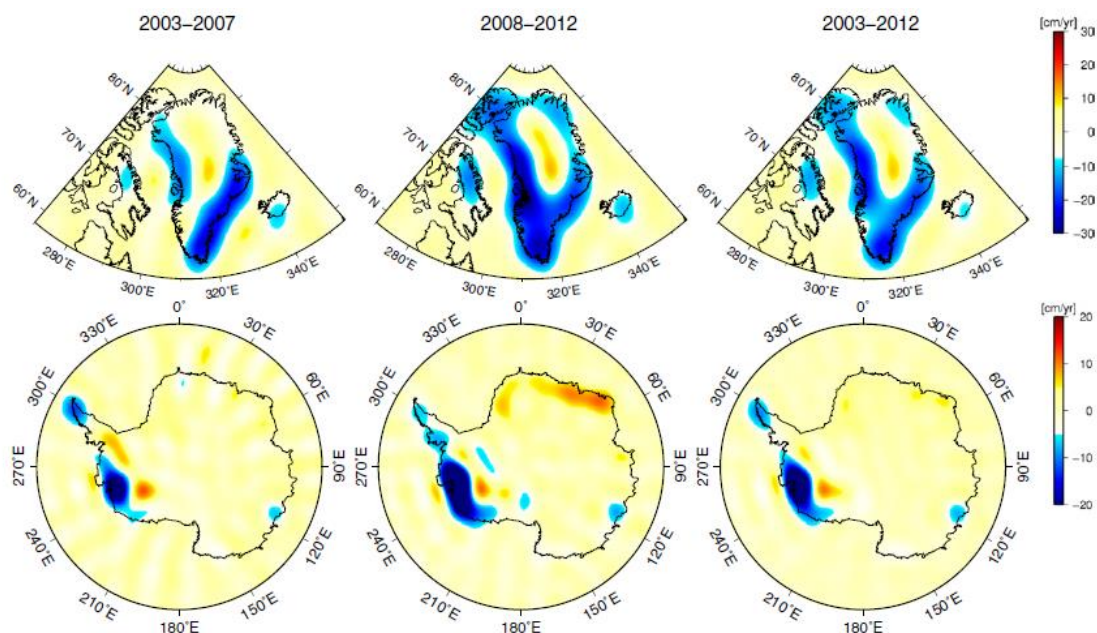
V průběhu času se Stokesovy koeficienty mění. Modely, jakým je třeba EIGEN-6s, používají pro průběh gravitačního pole časové řady.

$$Y(t) = a + bt + c \cos 2\pi ft + d \sin 2\pi ft \quad (8)$$

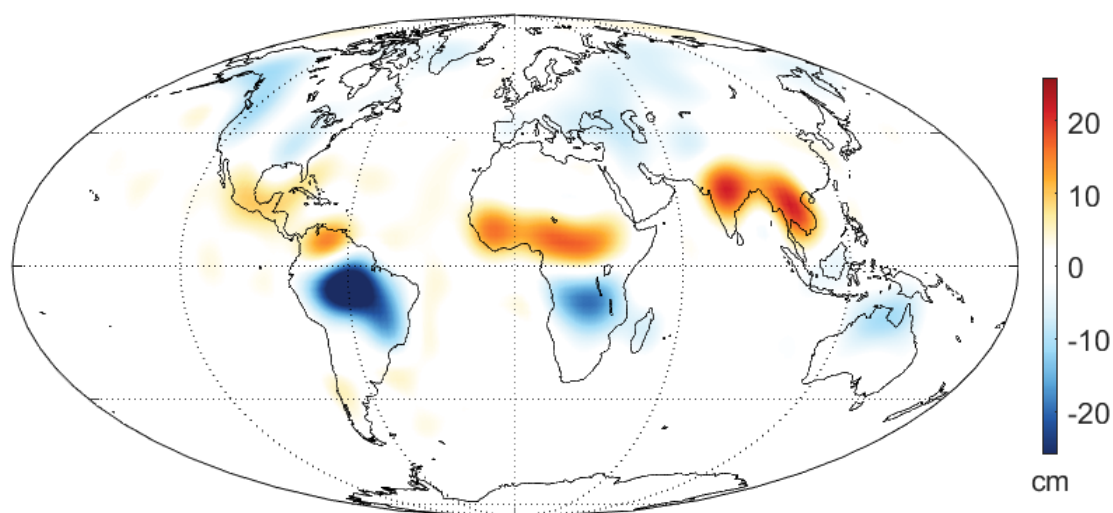
$a$  značí průměr (statické pole),  $b$  lineární trend a  $c$  a  $d$  jsou koeficienty sezónní složky. [4] Trendy jsou sekulární (nevratné) a zahrnují tání ledovců, tektonické posuny, či postglaciální zdvih. Sezónními činiteli je především hydrologie, tedy monzuny, změny ve spodní vodě apod.

Na obrázku 5 je možné vidět sekulární (trendové) změny hmoty v ledovcových oblastech, modrá značí úbytek. Obrázek 6 znázorňuje sezónní složku v konkrétní epoše spočtenou z modelu při  $n_{max} = 20$ . Tento obrázek bude dále v textu sloužit jako reference, protože v této práci porovnáváme právě sezónní složku získanou z modelu EIGEN-6s a vypočítanou ze simulovaných družicových drah.





Obrázek 5 - Příklad trendových změn v Grónsku a Antarktidě [5]



Obrázek 6 - Příklad výchylky sezónního gravitačního pole oproti statickému spočítanému z SHC ( $n_{max} = 20$ )



### 3. Metoda výpočtu ze zrychlení

Jak bylo naznačeno v předchozím textu, zde se budeme zabývat výpočtem gravitačního pole z měřených zrychlení na základě druhého Newtonova zákona. Pro tento účel ho uvedme v této podobě:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}_{grav} + \mathbf{a}_{LS} + \mathbf{a}_{TID} + \mathbf{a}_{REL} + \mathbf{a}_{NG}, \quad (9)$$

kde kromě hledaného  $\mathbf{a}_{grav}$  vystupují rušivé vlivy, jakými jsou slapové jevy  $\mathbf{a}_{TID}$ , lunisolární perturbace  $\mathbf{a}_{LS}$ , oprava z obecné teorie relativity  $\mathbf{a}_{REL}$  a negravitační síly  $\mathbf{a}_{NG}$ . Negravitační síly lze opravit pomocí akcelerometrů na družici, zbylá zrychlení je možné eliminovat na základě modelů.

Satelity určují svou polohu vždy po určitém časovém kroku (v dalších výpočtech je to 10 sekund), přičemž zrychlení se počítá numerickou diferenciací poloh satelitu. Souřadnice poloh jsou podrobeny polynomickému vyhlazení volitelného řádu (známému též jako Savitzky-Golay filtr) s volitelnou velikostí pohyblivého okna.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \approx \frac{d^2 Q(\mathbf{r}_{GPS})}{dt^2} \equiv F * \mathbf{r}_{GPS} \quad (10)$$

Parametry polynomického filtru jsou empiricky určeny v [2], jejich ideální volba závisí především na frekvenci polohových dat. V důsledku použití filtru přijdeme o několik rovnic z počátečních a koncových poloh, protože v závislosti na velikosti pohyblivého okna nemohou do výpočtu vstoupit.

Gradient gravitačního potenciálu popsaného výše se rovná gravitačnímu zrychlení

$$\mathbf{a}_{grav}(\mathbf{r}) = \nabla V(\mathbf{r}) = \sum_{n,m} [C_{nm} \cdot \nabla V_{nm}^{(c)} + S_{nm} \cdot \nabla V_{nm}^{(s)}]. \quad (11)$$

Vzorec pro potenciál je v této podobě zjednodušený, aby byla zřejmá jeho lineární závislost na Stokesových koeficientech. Nyní již lze zapsat lineární model pro jejich výpočet

$$\frac{d^2 Q(\mathbf{r}_{GPS})}{dt^2} - \mathbf{a}_{other} = \sum_{n,m} [C_{nm} \cdot \nabla V_{nm}^{(c)} + S_{nm} \cdot \nabla V_{nm}^{(s)}] + \varepsilon, \quad (12)$$

kde  $\mathbf{a}_{other}$  jsou všechna chybová zrychlení kromě  $\mathbf{a}_{grav}$  a  $\varepsilon$  je stochastická chyba polohy družice převedená na chybu ve zrychlení. Vzhledem k malé nejistotě oproti GNSS





polohám vektor  $\mathbf{a}_{other}$  považujeme za bezchybný. Jedna taková rovnice vzniká pro každou měřenou polohu satelitu. Vzhledem k linearitě vztahu není potřeba apriorní znalosti gravitačního pole či iterativního řešení, a parametry lze spočítat v jednom kroku pomocí metody nejmenších čtverců. [2]

Vektor zrychlení má tři složky (pro každý rozměr jednu). Oproti výpočtu z pouhé velikosti zrychlení (skaláru) dosahuje tento postup lepší přesnosti (až násobkem  $\sqrt{3}$ ). Souřadnicový systém může být dán terestrickým (TRF) rámcem, nebo lokálním (LRF). LRF se řídí dráhou družice, souřadnicové složky jsou podélná (A-T), příčná (C-T) a radiální (RAD). Vzhledem ke sklonu dráhy (téměř kolmému na rovník) je největší citlivost na zonální koeficienty ve směru dráhy a na sektorální v příčném směru. Ve výpočtu bude použit TRF vzhledem k náročnosti LRF transformace.

V této práci se ale nebudeme zabývat popisem gravitačního pole pomocí Stokesových koeficientů, nýbrž přímo působením hmotnostních variací jednotlivých povrchových elementů Země. Elementární plochy přispívají ke zrychlení družice v závislosti na vzdálenosti od družice, jejich příspěvek se dá popsat:

$$\mathbf{a}_i = \frac{\Delta m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i = \frac{\rho_w \cdot S_i \cdot \Delta h_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i, \quad (13)$$

kde  $S_i$  je plocha povrchového elementu a  $\mathbf{r}_i$  je vzdálenost od těžiště elementu ke družici. Suma těchto zrychlení (v každé souřadnici) se musí rovnat zrychlením  $\mathbf{a}_{grav}$  spočítaným z numerické diferenciace poloh družic. V rovnici výše tedy tento vztah nahradí pravou stranu, levá zůstává stejná:

$$\frac{d^2 Q(\mathbf{r}_{GPS})}{dt^2} - \mathbf{a}_{other} = \sum_i \frac{\rho_w \cdot S_i \cdot \Delta h_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i + \varepsilon. \quad (14)$$

### 3.1 Lineární model

Obecná rovnice lineární regrese zní

$$l = A \cdot x + \varepsilon, \quad (15)$$

ve které je v našem případě vektor  $x$  roven EWH ( $\Delta h$ ),  $l$  jsou měřená zrychlení a  $A$  je matice plánu, neboli matice parciálních derivací funkčního vztahu, jejíž rozměr je počet rovnic  $\times$  počet určovaných parametrů. Zrychlení jsou vždy ve třech souřadnicových složkách, tedy matice  $A$  a  $l$  mají třikrát více řádků, než jaký je počet GNSS poloh. Obecný prvek matice  $A$  vypadá takto:



$$A_{j,i} = \frac{\rho_w \cdot S_i \cdot G}{r_{ij}^3} \cdot (x_i - x_j), \quad (16)$$

kde  $G$  je gravitační konstanta ( $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ),  $x_i$  je souřadnice těžiště elementární plochy a  $x_j$  je jedna souřadnice družice. V zájmu toho, aby odhady nejistot byly korektní, přidáváme do matice plánu jako regresor konstantu, aby model nebyl nucen procházet počátkem [8]. Počet rovnic bude tedy o jednu větší.

Soustava je řešitelná standartní metodou nejmenších čtverců. Podmínkou pro řešení je minimalizace kvadrátu oprav:  $\varepsilon' \varepsilon = \min$ .

$$\hat{x} = (A' \cdot A)^{-1} A' \cdot l. \quad (17)$$

### 3.2 Dekorelace reziduí

Problém nastává, když se v důsledku numerické diferenciací znásobí velikost šumu, a především se šum stane autokorelovaným. V případě korelovaných reziduí nelze použít standardní metodu nejmenších čtverců (*OLS – ordinary least squares*), protože odhady neznámých mohou být vychýlené, nebo jejich variance nebude odpovídat skutečnosti (není splněn Gauss-Markovův teorém). [8]

Cílem je, aby kovarianční matice chybové složky byla diagonální ( $\sigma^2 V = \sigma^2 I$ ). Pokud tomu tak není, je nutné lineární transformací modelu toho docílit. Získáme zobecněnou metodu nejmenších čtverců (*GLS – generalised least squares*), podle které:

$$V = T T' \quad a \quad W = T^{-1}. \quad (18)$$

Náš lineární model se transformuje na

$$l^* = A^* \cdot x + \varepsilon^*, \quad (19)$$

ve kterém kovarianční matice dekorelovaných chyb je už jednotková diagonální.  $A^* = W A$  a  $l^* = W l$ .

Prvky kovarianční matice, které jsou mimo diagonálu, vznikly aplikací polynomičkého filtru, ve kterém je korelace nevyhnutelná. Čtvercová matice  $F$ , generovaná z koeficientů tohoto filtru, je inverzí hledané matice  $W$ . [2]

V reálném případě vzniká další korelace chyb, a to jako důsledek velmi podobných okolností během jednotlivých měření, konkrétně téměř identické konstelace GNSS satelitů. I tato měření bývá třeba dekorelovat, ale to není tématem této práce, jelikož zde se zabýváme simulovanými dráhami, které ovlivňuje pouze bílý (nekorelovaný) šum.



Konečný vzorec GLS tedy zní takto:

$$\hat{x} = (A' \cdot W' \cdot W \cdot A)^{-1} A' \cdot W \cdot W \cdot l = (A^{*'} \cdot A^*)^{-1} A^{*'} \cdot l^* \quad (20)$$

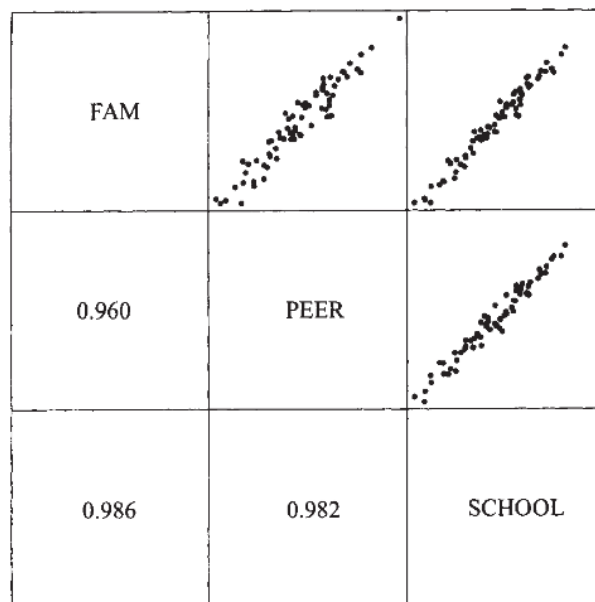
Aposteriorní jednotková chyba (též směrodatná odchylka) se určí takto:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon' \varepsilon}{3 \cdot N_x - N_t - 1}} \quad (21)$$

kde  $N_x$  je počet poloh a  $N_t$  počet elementárních ploch. Jeden regresor navíc je konstantní.

### 3.3 Kolinearita

V mnoha praktických případech s více regresory čelíme fenoménu kolinearity, kdy sousední sloupce matice plánu jsou si natolik podobné, že jsou téměř lineárně závislé. V důsledku toho se normální matice blíží singularitě a její inverze je numericky nestabilní. Není to chyba modelu (byť může být způsobena omylem), ale chyba deficientních dat. [8] Na obrázku 7 je příklad, ve kterém je zobrazena vzájemná závislost pozorovaných veličin, které jsou silně korelované. Může být i vhodné je sjednotit do jedné.



Obrázek 7 - Příklad významné korelace pozorovaných veličin, která vyústí v kolinearitu [7]

V případě družicových dat jsou důvodem velmi podobné vektory zrychlení, kterými působí jednotlivé plochy na družici. Největší citlivost na změny gravitačního pole má



družice ve směru kolmém na Zemi, ohledně okolních oblastí není poskytnuto dostatečné množství dat na odlišení signálu od sousedních elementárních ploch. Výsledné odhady parametrů GLS jsou sice ze statistického hlediska korektní, kvadrát oprav je minimalizován, mohou být přesto značně mylné. Zvláště se tak děje u ploch, o kterých není dostatek informací (družice neletěla přímo nad nimi). Pro zlepšení výsledků je nutné přidat více měření a pokrýt subsatelitními body co největší plochu.

Kolinearita představuje významnou překážku pro evaluaci regrese s více parametry. Metoda GLS zde sama o sobě nestačí a je chybová, možná řešení jsou popsána dále.

### 3.4 Singulární rozklad

Singulární rozklad (*SVD – singular value decomposition*) je metoda rozkladu matice  $A$  ( $m \times n$ ) na maticový součin  $U \cdot W \cdot V'$ , kde  $U$  je ortogonální matice o stejném rozměru jako  $A$ ,  $V$  je čtvercová unitární matice o straně  $n$ , a  $W$  je diagonální čtvercová matice o straně  $n$ , kterou tvoří takzvané singulární hodnoty.

Pokud se normální matice numericky blíží singularitě, na diagonále matice  $W$  budou hodnoty řádově se od sebe lišící. Provedme inverzi matice  $W$  a na místa, kde byly před inverzí prvky blížící se nule (teď jsou tam velké cifry), nyní vepíšme nuly. Označme výslednou matici  $W_x^{-1}$ . Nyní můžeme spočítat nové parametry regrese:

$$\hat{x} = V \cdot W_x^{-1} \cdot U' \cdot l. \quad (22)$$

Vynulování některých singulárních prvků znamená zřeknout se některých lineárních kombinací, které jsou velmi podobné jiným (jsou kolineární). Norma vektoru  $\hat{x}$  se poté zmenší. Zdá se to být paradoxem, že eliminace některých informací vede k lepším výsledkům, nicméně v těchto krajně singulárních případech může případná numerická nestabilita napáchat mnohem větší škodu. Stanovení meze pro vynulování prvku je tedy záležitostí proporcionality. [12]

SVD rozklad je ale velmi náročný a jeho složitost roste se třetí mocninou rozměru matic. Navíc pro takové množství dat, se kterým pracujeme, není místo v operační paměti běžného počítače. Alternativa je popsána v další kapitole.

### 3.5 Kalmanův filtr

Před výkladem Kalmanova filtru je dobré si nejprve ozřejmit, co je *rekurzivní metoda nejmenších čtverců* (RLS). V případech, kdy je třeba počítat regresi v reálném čase, přičemž stále přibývají nová data, která do ní vstupují, je nevhodné provádět výpočet



pokaždé celý znovu, včetně inverze neustále se zvětšující se matice plánu. Výhodné by bylo najít způsob, jak z předchozích vypočtených neznámých  $x_0$  za použití nových dat  $b_1$  získat zpřesněné odhady  $x_1$  spolu s jejich aktualizovanou kovarianční maticí  $P_1$ .

$$P_1^{-1} = A_0' C_0 A_0 + A_1' C_1 A_1 = P_0^{-1} + A_1' C_1 A_1, \quad (23)$$

kde  $A_1$  je dílčí matice plánu spočítaná z nových dat a  $P_0$  je kovarianční matice z předchozí iterace. Zde je názorné použít případ s maticemi vah  $C$ . Váhy přiřazují různou důležitost jednotlivým měřením.

Řešení  $x_1$ , které zahrnuje stará i nová data, pak zní:

$$x_1 = P_1(A_0' C_0 b_0 + A_1' C_1 b_1). \quad (24)$$

Nyní je cílem přepsat tuto rovnici, aby nezávisela na  $b_0$ , ale pouze na  $x_0$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= P_1(P_0^{-1}x_0 + A_1' C_1 b_1) = P_1(P_1^{-1}x_0 - A_1' C_1 A_1 x_0 + A_1' C_1 b_1) = \\ &= x_0 + K(b_1 - A_1 x_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Výrazu v závorce se říká inovace, nebo též chyba predikce. [9]  $K$  je takzvaná matice zisku (*Kalman gain matrix*), rovna:

$$K = P_1 A_1' R_1 \quad (26)$$

$R$  značí kovarianční matici šumu z měření, která je inverzí váhové matice  $C$ . Šum jsme ale de Korelovali a všem měřením dáváme stejnou váhu, tedy  $R = C = I$ . [10]

Pro reálné použití je ale použití tohoto postupu nevýhodné, protože je třeba v každé iteraci počítat znovu inverzi kovarianční matice  $P_0$ . Řešení nabízí Woodburyho formule, jejíž použití popisuje Vallado, výsledný vzorec zní: [11]

$$P_1 = P_0 - K A_1 P_0, \quad (27)$$

který se dá jinak zapsat:

$$P_1 = P_0 - K S K. \quad (28)$$

Nakonec vzorec pro Kalmanův zisk přejde na

$$\begin{aligned} K &= P_0 A_1' S^{-1}, \\ S &= A_1 P_0 A_1' + R_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Jak je z tohoto zápisu  $P_1$  zjevné, hodnota kovarianční matice se s přibývajícím daty snižuje, tedy výsledné parametry se zpřesňují. Inverzi  $P_0$  není již nutno počítat, pouze



inverzi  $S$ , jejíž složitost závisí na počtu přidávaných měření v iteraci. V případě jen jednoho nového měření jde pouze o inverzi skaláru, čímž se výpočet značně zjednoduší.

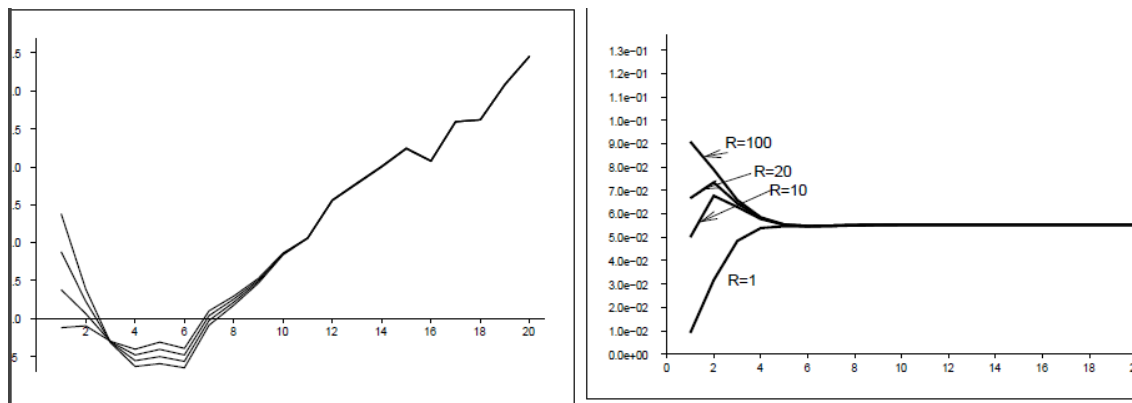
Pokud bychom měli mluvit o obecném Kalmanově filtru, jeho skutečný přínos je v dynamických systémech, které se v čase mění a měřené veličiny se vyvíjejí. V takovém matematickém aparátu je třeba uvažovat predikci danou dynamikou systému a následně ji porovnat s měřenými daty a spočítat inovaci. Vzhledem k tomu, že působící zrychlení považujeme za neměnné (v daném časovém úseku), náš systém je statický, predikce parametrů a kovarianční matice se rovná těm spočteným v minulé iteraci, a tedy je použita zjednodušená varianta Kalmanova filtru.

Objev Rudolfa Kalmana v šedesátých letech přinesl značný pokrok v kosmickém průmyslu a umožnil kupříkladu první let NASA na Měsíc. Použit byl pro navigační systémy v misích Apollo a Lockheed C-5A. S nápadem filtr upravit a použít pro navigaci nelineárních trajektorií přišel Stanley F. Schmidt (tzv. rozšířený KF). [15] Od té doby se Kalmanův filtr kromě navigace používá ve zpracování signálů, ekonometrii a dalších odvětvích s dynamickými systémy.

### 3.5.1 Volba počátečních podmínek

Protože Kalmanův filtr působí rekurzivně, je nutné předem stanovit apriorní  $x_{ini}$  a  $P_{ini}$ . Zatímco  $x_0$  jsou samotné parametry, které budeme dále zpřesňovat,  $P_0$  jako jejich kovarianční matice definuje jejich váhu.  $P_0 = P_{ini} \cdot I$ , a pokud nastavíme  $P_0$  (diagonální matice) velkým  $P_{ini}$ , přiřadíme počátečním podmínkám malou váhu.

Jak už bylo výše poznamenáno, v lineárních systémech v zásadě volba počátečních podmínek není podstatná, neboť zpřesňované hodnoty  $x_0$  a  $P_0$  relativně rychle konvergují ke svým finálním odhadům (viz obrázek 8).



Obrázek 8 - Rychlá konvergence v případě různých  $x_0$  (vlevo) a  $P_0$  (vpravo) [9]



V případě našeho výpočtu ale počítáme mnoho parametrů (až tisíce) a navíc čelíme kolinearitě, kvůli které potřebujeme značné množství pozorování. Může trvat velmi dlouho, než se odhady parametrů Kalmanovou filtrací ustálí na finálních hodnotách, ekvivalentních výsledkům z GLS. Proto volba počátečních podmínek bude pro výpočet stěžejní.  $x_0$  je vhodné položit rovno nule, jelikož ekvivalentní výšky vody se v průběhu roku okolo nuly pohybují. Pro  $P_{ini}$  byl stanoven vzorec: [8]

$$P_{ini} = \frac{x' \cdot x}{Var(x) \cdot (N_x + 1)} \quad (30)$$

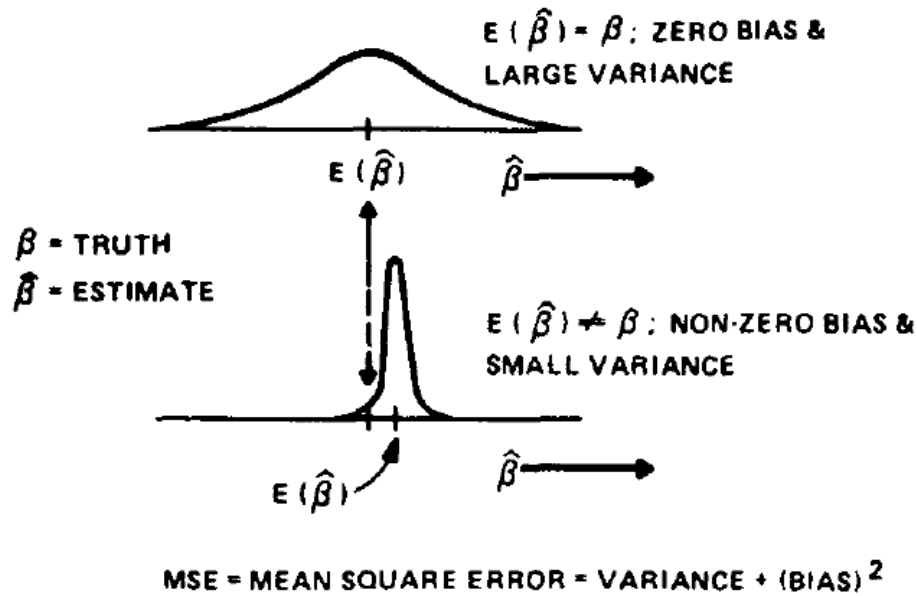
$Var(x)$  je charakteristika variance jednoho měření, zároveň kvadrát směrodatné odchylky ze vzorce (21).

### 3.6 Přesnost odhadů

Charakteristikou shody odhadů  $\hat{x}$  s předem danými  $x_t$  je *MSE* (*mean squared error*), neboli střední kvadratická chyba.

$$MSE = Var + Bias^2 \quad (31)$$

*Var* je charakteristika variance náhodné složky a *Bias* je vychýlenost odhadu oproti skutečné hodnotě, čili systematická chyba. Zpravidla je žádoucí, aby odhad vychýlen nebyl, protože systematickou chybu nelze odhalit, ani snížit větším počtem měření. Protože tady ale pracujeme se simulací, je možné porovnávat dosažené výsledky s apriorními EWH spočítaných z modelu EIGEN-6s. V případě konečného počtu měření může být někdy výhodné, v zájmu snížení celkového *MSE*, použít vychýlený odhad. [13]



Obrázek 9 - Srovnání (ne)vychýleného odhadu [14]

Metoda nejmenších čtverců se z definice snaží minimalizovat kvadrát oprav, tedy náhodnou složku chyby *Var* a limitně eliminuje *Bias*. Metoda singulárního rozkladu a Kalmanův filtr toto řešení pozměňují v zájmu dosažení odhadu více odpovídajícímu realitě. U KF je velikost vychýlení odhadu závislá na váze počáteční podmínky. Na obrázku 9 je příklad nevychýleného (GLS) a vychýleného (KF) odhadu. Je zřetelné, že dolní odhad i přes svůj hendikep (*Bias*  $\neq$  0) charakterizuje skutečnou hodnotu lépe. Vhodnost použitého odhadu lze posoudit právě celkovým *MSE*:

$$MSE = \frac{\sum_1^{N_x} (x_t - \hat{x})^2}{N_x} \quad (32)$$

Odmocnina z *MSE* je *RMSE* (*root-mean-square error*).

Praktické srovnání vhodnosti metod pro účely výpočtu je uvedeno v další kapitole.





## 4. Výpočet

V následující kapitole budou diskutovány konkrétní aspekty výpočtů, výsledky získané různými metodami a jejich závislost na různých proměnných – šumu, délce sledovaného období, intervalu sběru dat a počtu elementárních ploch. Cílem je přiblížit se výsledkem předem daným parametrům gravitačního pole, a to co nejefektivněji.

Veškeré výpočty byly prováděny v programovacím prostředí Matlab. [16] Dále pro vizualizaci zemské sféry byla použita knihovna M\_Map. [17]

### 4.1 Elementární plochy

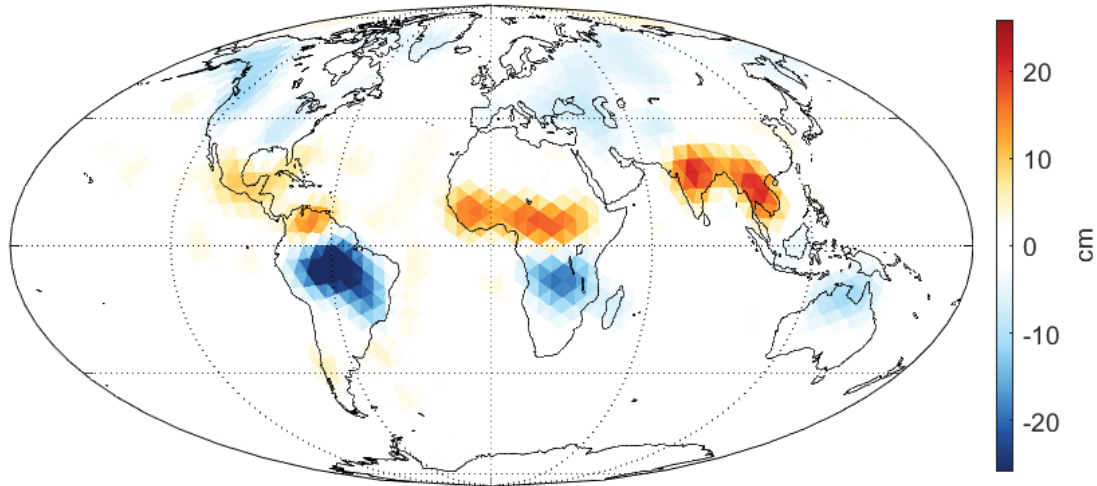
Použité elementární plochy jsou trojúhelníky, rovnoměrně rozmístěné po celé Zemi. Jejich plocha je proměnlivá, ale známá. EWH pro trojúhelníkovou plochu je spočítáno k jejímu těžišti. Systém tvorby trojúhelníků je popsán v článku [18]. Středů trojúhelníků je nutné pro výpočet vzdálenosti ke družici transformovat do kartézských souřadnic. Pro jednoduchost je zanedbána excentricita elipsoidu a přechod ze sférických souřadnic je realizován poloměrem Země  $R = 6378136.3 \text{ m}$ .

$$\begin{aligned}x_i &= R \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \\y_i &= R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda) \\z_i &= R \cdot \sin(\varphi)\end{aligned}\tag{33}$$

Rovněž u trojúhelníků zanedbáváme sférický exces a pokládáme je za rovinné, což se s jejich zvyšujícím počtem přibližuje pravdě. Pro malý počet trojúhelníků se může stát, že chyba v reprezentaci zemského povrchu způsobí značné zkreslení kvůli rozdílné ploše, a tedy špatnému přepočtu EWH. V takovém případě budou spočítaná EWH v absolutní hodnotě nižší než modelová.

### 4.2 Modelová data

Prvním krokem je si stanovit referenční data z modelu, kterých se budeme snažit experimentálním výpočtem dosáhnout. Z modelu EIGEN-6s byly vždy použity Stokesovy koeficienty až do stupně 20. Epocha TVG je ke dni 15. října 2005. Počet trojúhelníků je možné měnit, s jejich rostoucím počtem se zvyšuje i počet rovnic, a tedy i náročnost výpočtu a potřeba více dat. Níže je modelový obrázek 10 pro 3920 trojúhelníků.



Obrázek 10 - Ukázka modelového časově proměnného gravitačního pole zobrazeného na trojúhelníkových plochách (Mollweideovo zobrazení, 3920 trojúhelníků)

Z modelu se vždy spočtou koeficienty pro statické pole (dlouhodobý průměr), poté pro celkové pole pro danou epochu, a následně se odečtou, čímž vzniknou koeficienty pro časově proměnné pole (rovnice (8)).

Prvním krokem výpočtu je formulovat lineární model podle rovnice (15) a ověřit jeho platnost, tedy do vektoru pozorování dosadit sumu modelových zrychlení. Výsledné odhady  $\hat{x}$  (EWH) musí být totožné s modelovými  $x_t$ , tedy i výsledná mapa bude totožná s obrázkem.

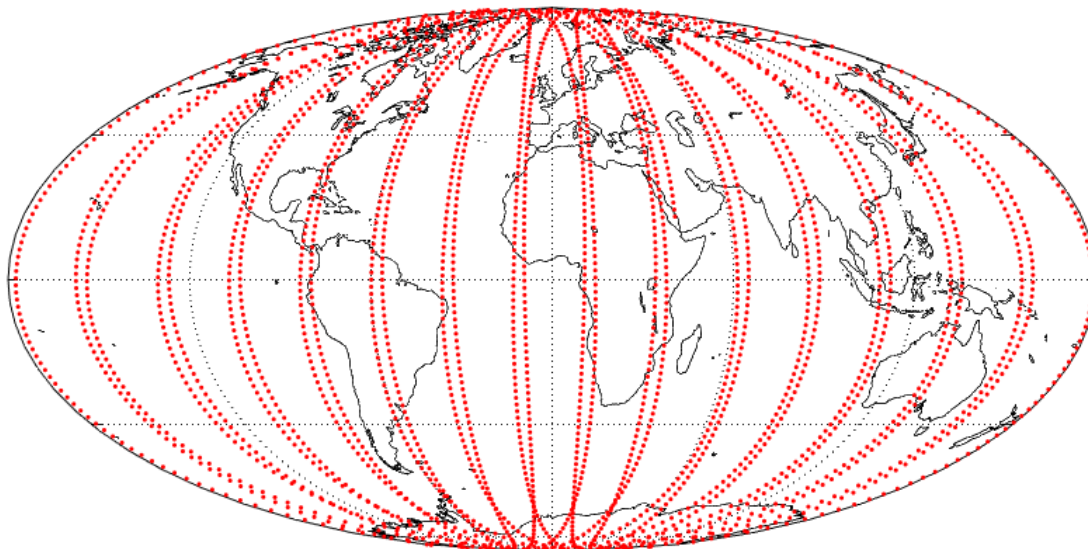
### 4.3 Výpočet z dat bez šumu

Druhým krokem je použít ověřený regresní model na testovacích datech bez přidaného šumu a sledovat jeho chování, popřípadě odstranit jeho nedostatky.

Simulované družicové dráhy vznikly právě na základě modelu EIGEN-6s pro stejný maximální stupeň koeficientů  $n_{max} = 20$ . Mají představovat dráhu družice Swarm A, ve výšce cca 450 km. Zároveň zrychlení zde zatím není spočítáno z poruch GNSS poloh, ale z modelových koeficientů, tedy z matice plánu  $y = A \cdot x_t$ .

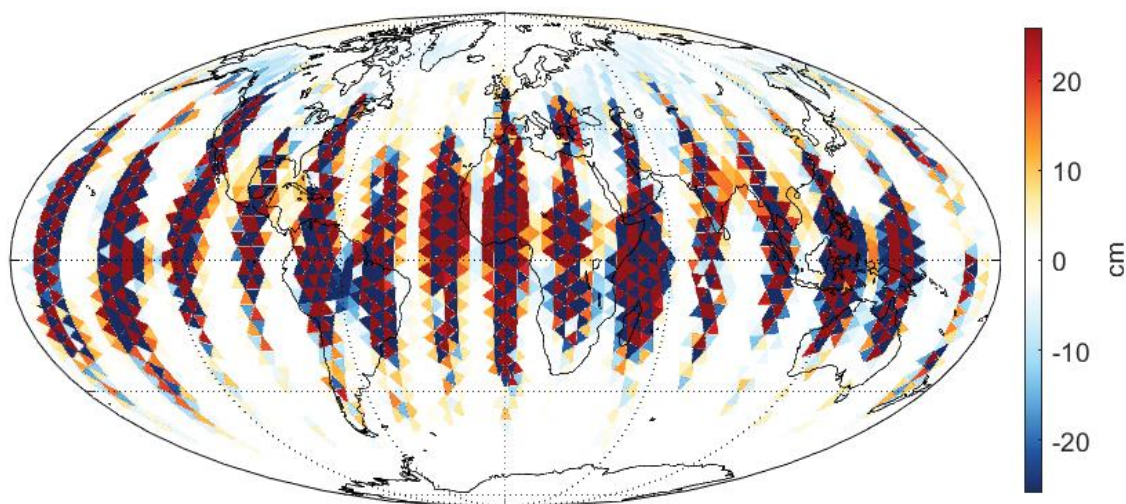
#### 4.3.1 Délka sledovaného období

Simulované polohy družic lze vizualizovat na mapu Země. Příklad na obrázku 11 uvádí subsatelitní body pro půlminutové intervaly v průběhu jednoho dne.



Obrázek 11 - Průběh satelitních bodů na povrch Země (30 sekund / 1 den)

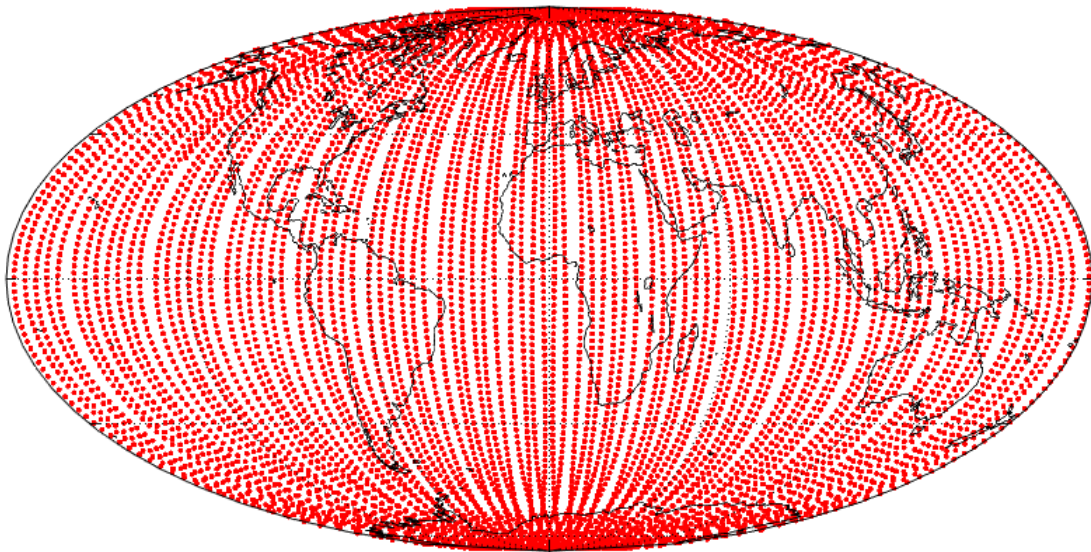
Problém je ale z obrázku zřejmý, v případě většího počtu trojúhelníků, a tudíž menších elementárních ploch, nestihne družice za jeden den pokrýt všechny tak, aby signál od ploch byl odlišitelný, některé zůstanou v mezerách mezi subsatelitními body. Názorně je to vidět na obrázku 12 s GLS odhadem, kde počet trojúhelníků je 3920. Tento jev může připomínat pruhování způsobené šumem a vyšší citlivostí družice GRACE ve směru letu oproti příčnému směru. [7] Zde ale není přítomen šum, takže toto vysvětlení není validní.



Obrázek 12 - Odhad EWH pro řídké dráhy (3920 trojúhelníků, 1 den)

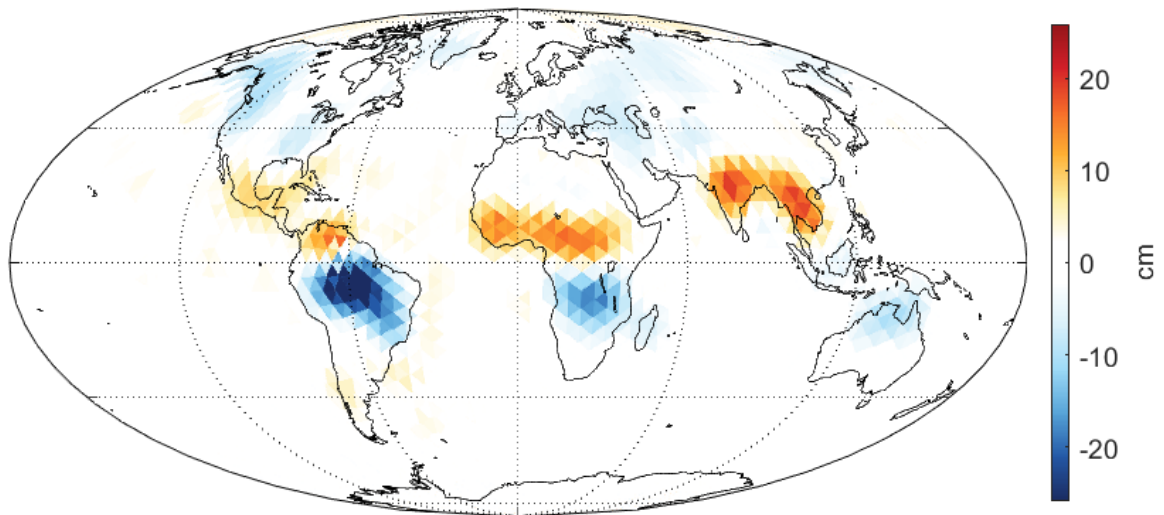
Jak popsáno v kapitole o kolinearitě, v důsledku nedostatku informací jsou sloupce matice plánu pro sousední trojúhelníky téměř lineárně závislé. Metoda nejmenších čtverců sice nalezne řešení s minimalizovanými opravami, ale toto řešení nemusí vůbec

odpovídat realitě. Poledníkové pásy nesmyslných EWH vzniknou právě v mezerách mezi dráhami. Z tohoto důvodu je nutné použít data za více dnů.



Obrázek 13 - Průmět satelitních bodů na povrch Země (30 sekund / 3 dny)

Na obrázku 13 jsou již dráhy družice za tři dny. Pokud výpočet spustíme pro toto množství dat, výsledek je zřetelně lepší a mnohem více se blíží referenčnímu modelovému obrázku.



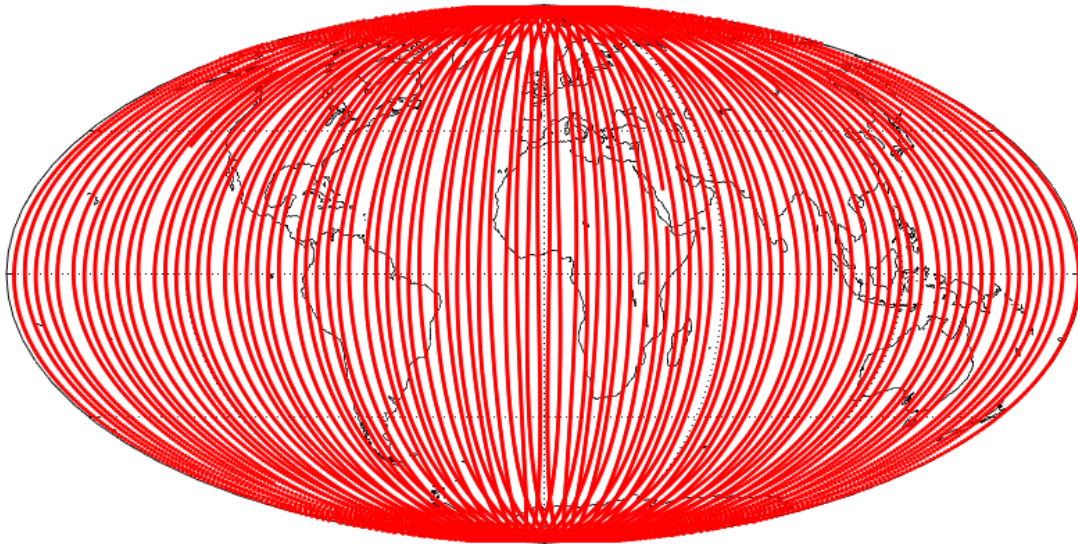
Obrázek 14 - Odhad EWH pro husté dráhy (3920 trojúhelníků, 3 dny)

Pokud bychom uvažovali evaluaci z dlouhodobého měření, výsledná EWH by měla nižší absolutní hodnotu, protože sezónní složka je cyklická v průběhu roku, a průměrováním by mapa „bledla“. GRACE nabízí měsíční řešení, která jsou určitým kompromisem mezi podrobností dat a jejich aktuálností.



### 4.3.2 Interval sběru dat

Časový interval mezi měřeními body můžeme zkrátit na 10 sekund. Mapa subsatelitních bodů (obrázek 15) se ještě více (trojnásobně) zahustí.



Obrázek 15 - Průmět satelitních bodů na povrch Země (10 sekund / 3 dny)

Nicméně v případě nezašuměných dat tento krok nezmění téměř nic. Výsledná mapa vypadá stejně jako na obrázku 14 (takže ani není uvedena). Charakteristiku shody odhadu se skutečností nám podle rovnice (32) udává *RMSE*:

$$RMSE(10s/1d) = 19,90 \text{ cm}$$

$$RMSE(30s/1d) = 25,31 \text{ cm}$$

$$RMSE(10s/3d) = 8,13 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

$$RMSE(30s/3d) = 8,14 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

Z těchto čísel je patrné, že zatímco prodloužení sledovaného období skutečně bylo nezbytné, zkrácení časového intervalu mezi polohami nepřináší žádný hmatatelný užitek pro shodu s  $x_t$ , zvláště ne v delších časových rámcích. V případě zašuměných dat (nekorelovaných) je předpoklad, že se s trojnásobkem pozorování přesnost odhadu zlepší násobkem  $\sqrt{3}$ .

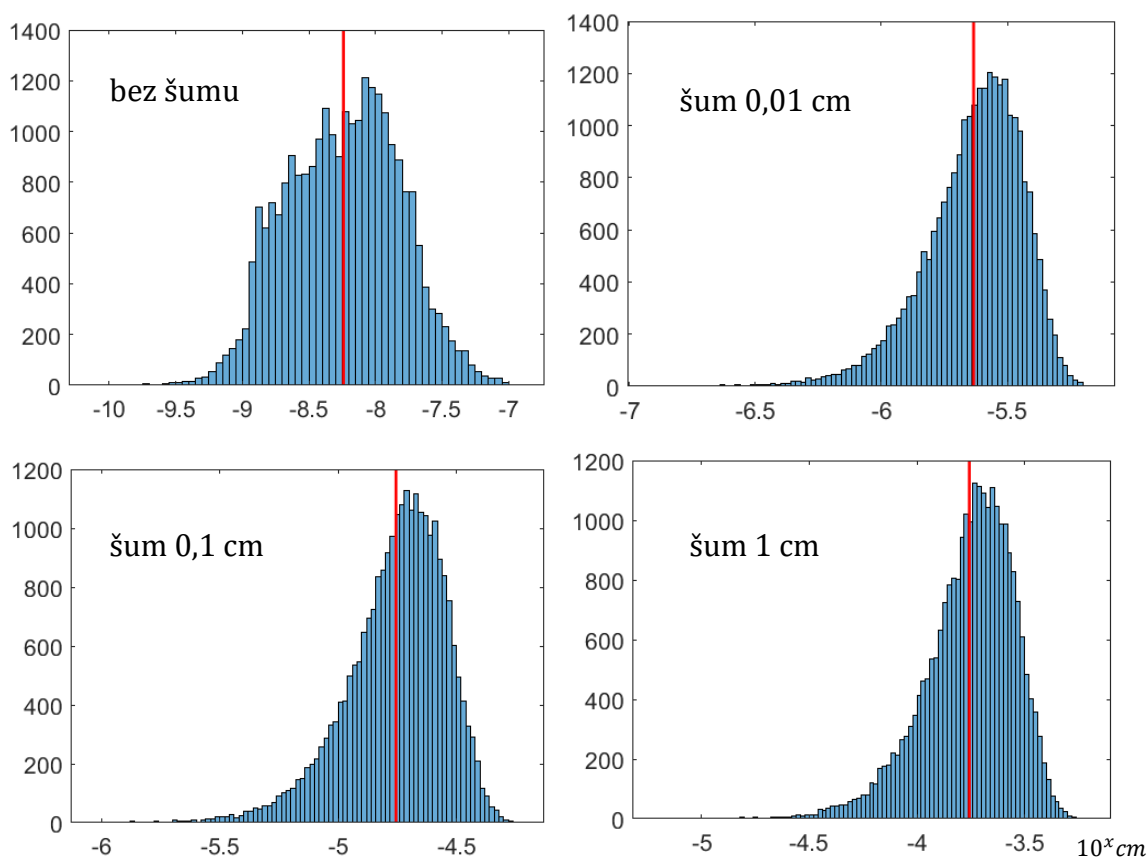
Je zřejmé, že u dat bez šumu dosáhneme uspokojivých výsledků, pokud dostatečně pokryjeme zeměkoulí body. To závisí na velikosti a počtu trojúhelníků.



## 4.4 Výpočet ze zašuměných dat

### 4.4.1 Šum

Šum, přidáný do souřadnic simulovaných poloh satelitu, je bílý (nekorelovaný) a je v řádech 0,01 – 1 cm. Jak již bylo řečeno, výpočtem zrychlení numerickou diferenciací poloh dojde ke znásobení a korelaci šumu. Tento šum v reálných případech dosahuje až stonásobku hledaného zrychlení. [2]



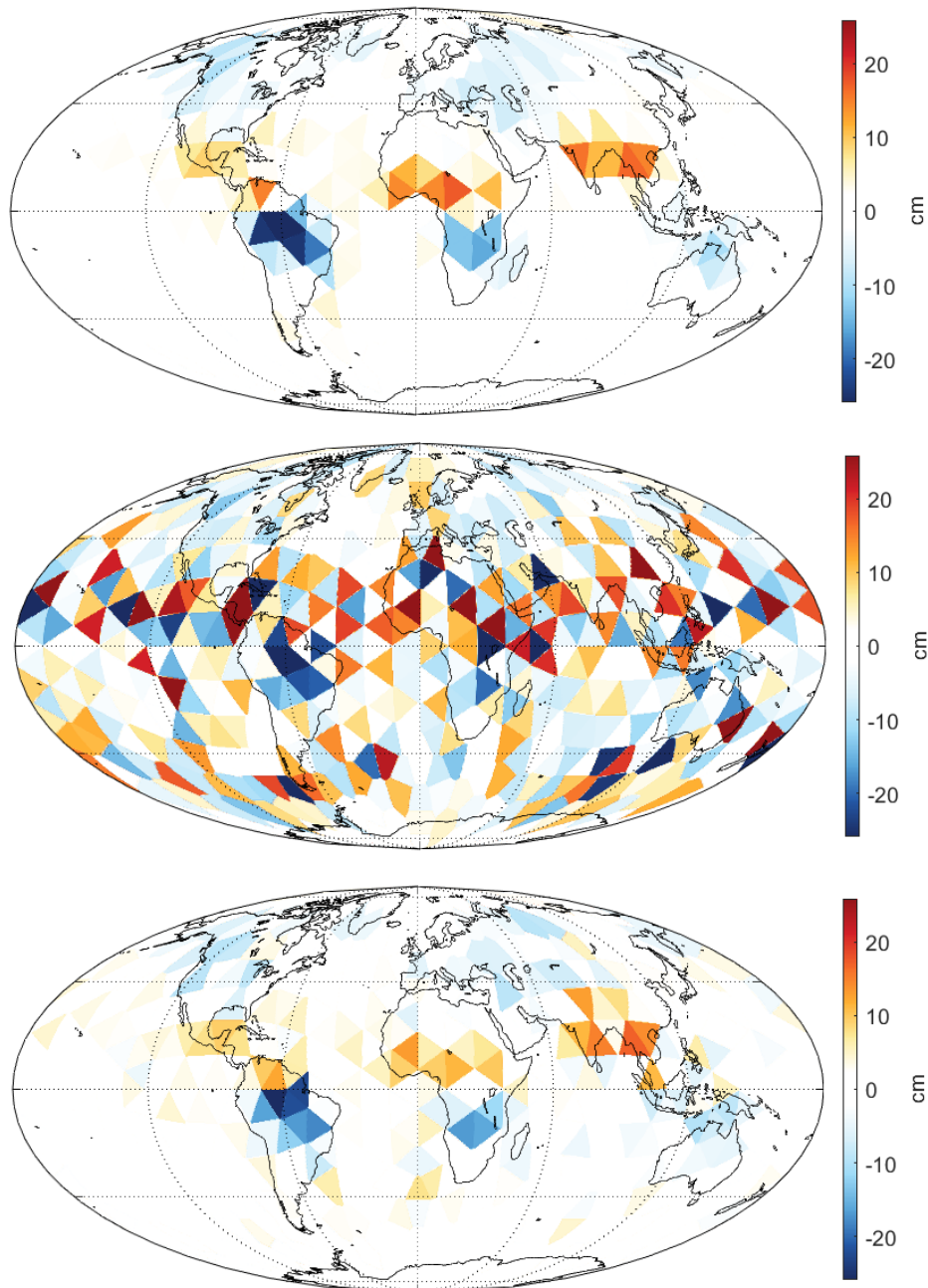
Obrázek 16 - Histogramy velikostí vektorů zrychlení s různým šumem (v centimetrech)

Grafy na obrázku 16 jsou v logaritmickém měřítku, červená linie značí průměrné zrychlení. V rámci simulace byla ve všech případech kromě náhodné chyby přidána i systematická složka – konstantní chyba  $10^{-6} m/s^2$ . Je zřejmé, že velikost šumu dalece přesahuje velikost působícího zrychlení. Pokud je ale šum dekorelovaný, v principu by to nemělo vadit, jelikož s dostatečným počtem pozorování by měla být metoda nejmenších čtverců schopna hledané zrychlení najít. Je však otázkou, zda dané množství dat na tento úkol stačí.



### 4.4.2 Dekorelace

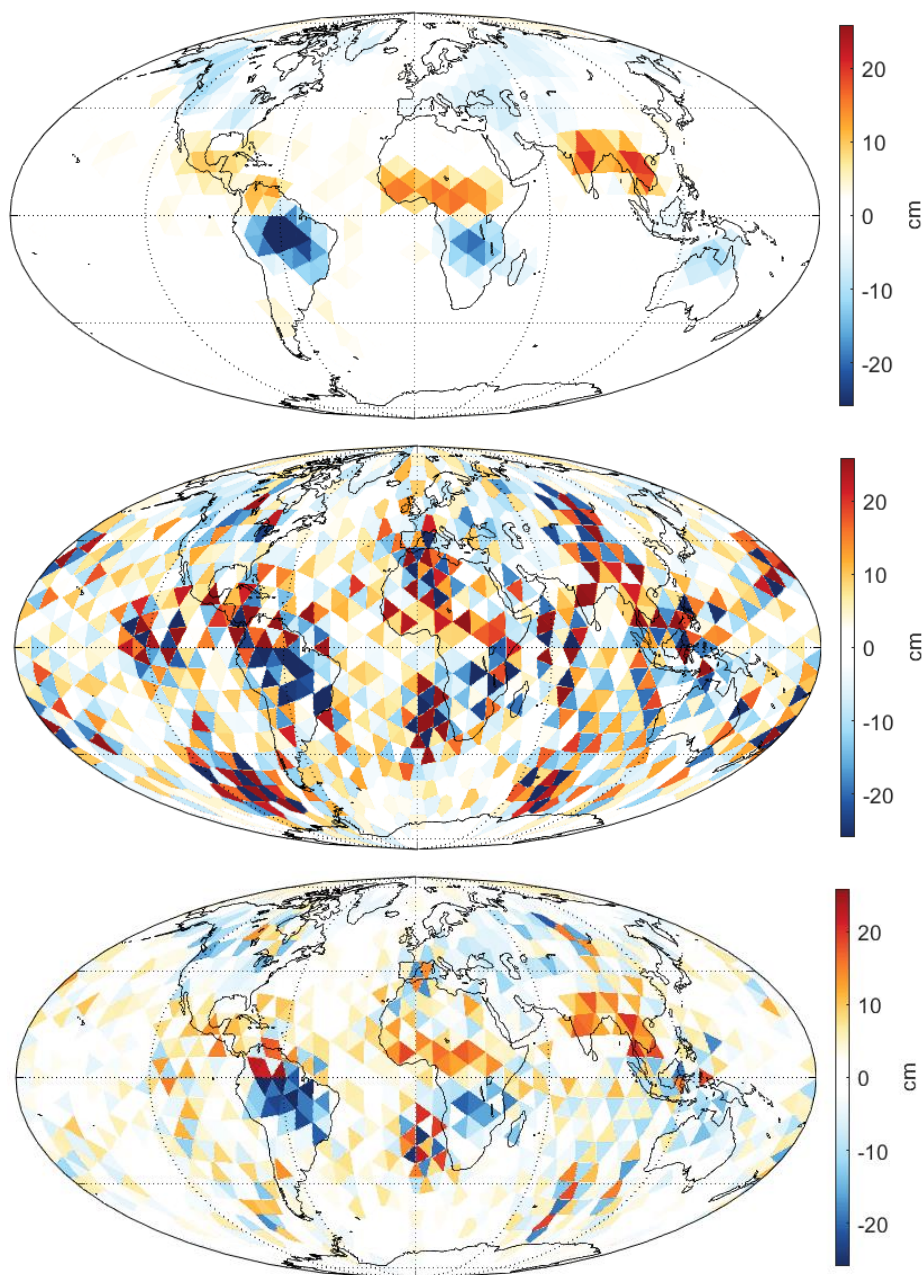
Pro začátek uvažujme soubor dat s nejmenším šumem – 0,01 centimetru, a porovnejme výsledky evaluace pro korelovaná a dekorelovaná měření.



Obrázek 17 - Porovnání výsledků ze surových a dekorelovaných dat (3 dny, 10 sekund, 500 troj)

Na prvním obrázku je referenční EWH pro 500 trojúhelníků. Na druhém je evaluace běžnou metodou nejmenších čtverců (OLS, rovnice (17)) a na třetím za použití dekorelačních matic  $W$  podle rovnice (20). Použitá data jsou za tři dny. Odhad GLS je znatelně lepší než OLS.

Problém ale nastane, když se pokusíme stejným způsobem spočítat EWH pro 1280 trojúhelníků.



Obrázek 18 - Porovnání referencie s výsledkem z dekorelovaných měření pro 3 a 15 dní (1280 trojúhelníků)

Přestože šum je stále mnohem menší než v reálném případě, GLS už na dostatečně přesnou evaluaci nestačí. Situace pro 15 dní je sice lepší, ale pořád ne uspokojivá.

Stejně jako před dekorelací čelíme kolinearitě, kterou tentokrát nelze eliminovat přidáním dalších měření, dráhy jsou již dostatečně husté. Je třeba se zříknout nevychýleného odhadu ve prospěch jiného, který bude blíže realitě, a bude minimalizovat nejen náhodnou složku chyby, nýbrž celkovou charakteristiku  $MSE$  spočítanou z porovnání s modelem.

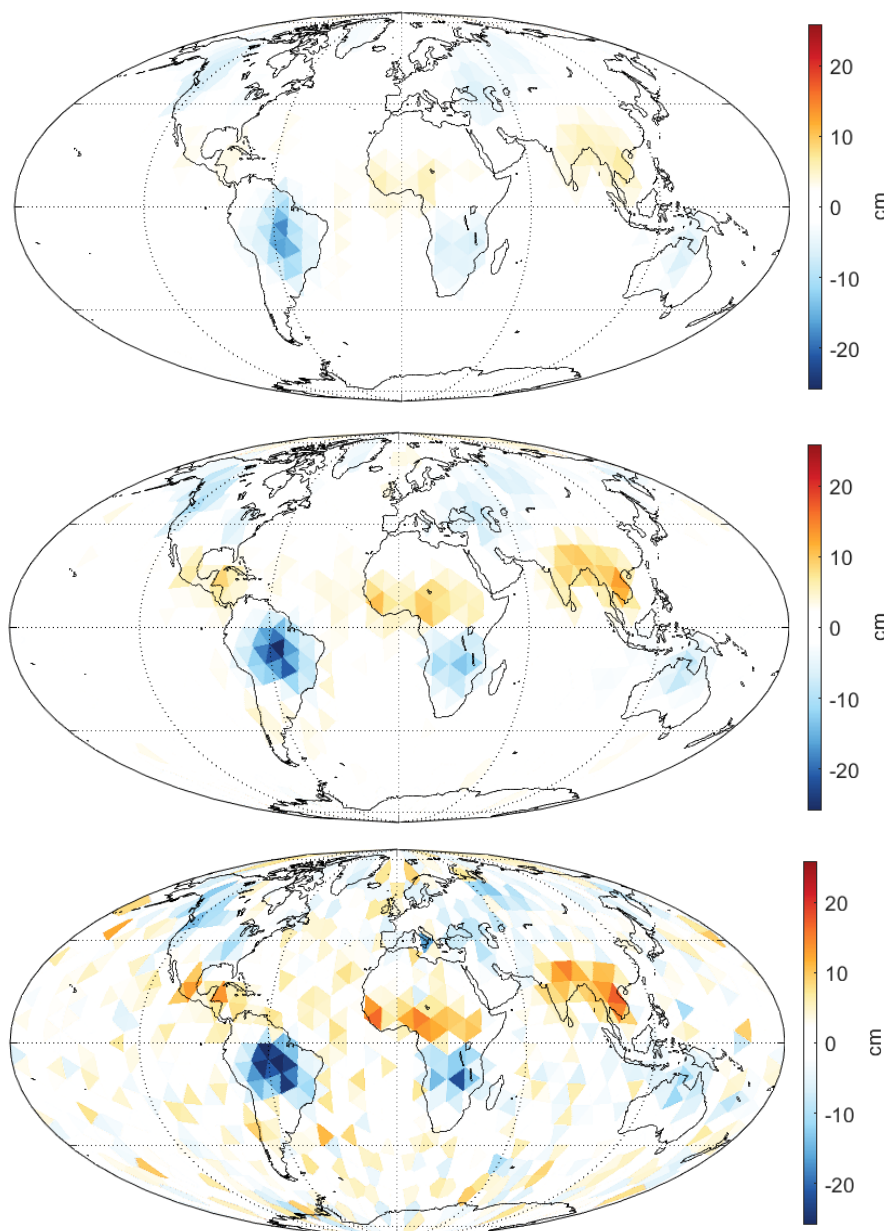




### 4.4.3 Použití Kalmanova filtru

Inovaci Kalmanova filtru lze počítat po libovolném intervalu. Je možné i přidávat pouhá jednotlivá měření (jednotlivé polohy družice), to s sebou nese výhodu jednoduché inverze, protože matice  $S$  z rovnice (28) je pouhý skalár. Reálně je ale tento způsob mnohem pomalejší než inovace větším blokem dat, algoritmus inverze matic v Matlabu je implementován s dostatečnou rychlostí. Data jsou vepsána v souborech zhruba po dvaceti minutách (77 souborů za den) společně s de Korelačními maticemi  $W$ , takže je výhodné počítat inovaci po nich.

Počáteční podmínka  $x_{ini}$  byla zvolena rovna nule, její váha  $P_{ini}$  byla nejprve zjišťována experimentálně.



Obrázek 19 - Výpočet Kalmanovým filtrem s různou vahou počáteční podmínky ( $1e4$ ,  $1e5$ ,  $1e6$ ), tři dny, 1280 troj



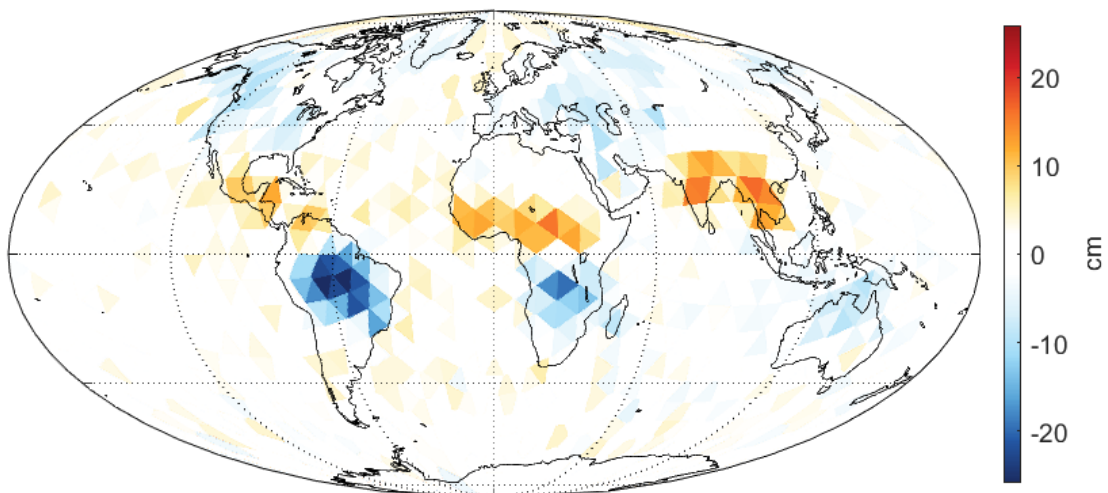
Na obrázku 19 je EWH spočítáno Kalmanovým filtrem s různou inicializační vahou. Je zřejmé, že při větší váze počáteční podmínky (horní mapa) se odhad EWH více drží počátečních nulových hodnot, jinak řečeno: odhad je vychýlen až příliš. Při menší váze (dolní mapa) se zase přibližuje k chaotickému odhadu metodou GLS. Prostřední mapa při váze  $10^5$  se nejvíce blíží racionálnímu odhadu.

Rovnice (30) nabízí jasný způsob odhadu  $P_{ini}$ . První problém je, že neznáme  $Var(x)$ . Řešením je spočítat nejprve odhad pomocí GLS, z něj získat rezidua a varianci spočítat. GLS navíc z definice zprostředkuje nejlepší (nejnižší) odhad variance.

Druhý problém je, že v reálném případě neznáme modelová  $x_t$ . Ta můžeme nahradit odhady  $\hat{x}$ , které budeme společně s  $P_{ini}$  dále postupně zpřesňovat. Výpočet se tedy stane iteračním, kritérium pro ukončení cyklu bude relativní změna  $P_{ini}$  ( $P_{ini0}$  je z minulé iterace):

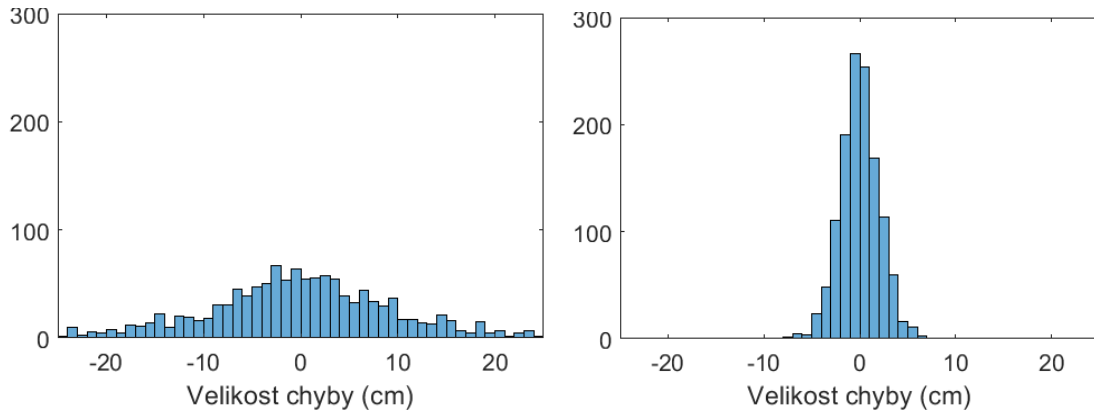
$$\left| \frac{P_{ini} - P_{ini0}}{P_{ini}} \right| < 0.01 \quad (34)$$

Schematicky tedy v prvním výpočtu GLS metodou získáme první odhady  $\hat{x}$ , ve druhém výpočtu pomocí nich spočítáme vyrovnaná pozorování a jejich opravy, z nichž získáme  $Var(x)$  a posléze první  $P_{ini}$ . Třetí výpočet už je Kalmanův filtr, který pokračuje, dokud není splněna podmínka (34).



Obrázek 20 - EWH spočítané pomocí Kalmanova filtru s iteračně určeným  $P_{ini}$  (tři dny, 1280 troj, šum 0.01 cm)

Výsledný obrázek je někde na půli cesty mezi druhou a třetí mapou z obrázku 19. Výsledné  $P_{ini} = 2,45 \cdot 10^5$  tomu odpovídá.



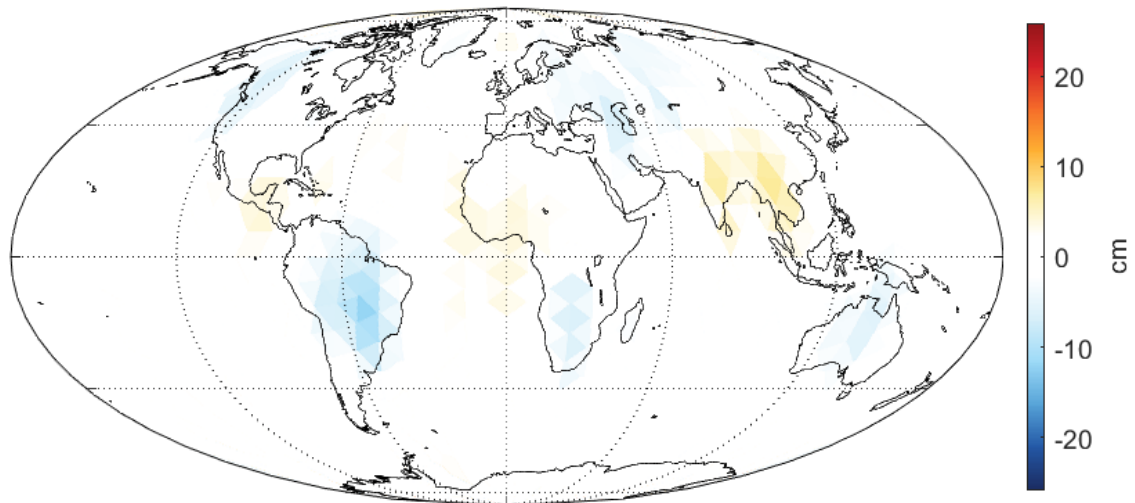
Obrázek 21 - Histogramy chyby odhadů vůči skutečným hodnotám pro tři dny (vlevo GLS, vpravo KF)

Obrázek 21 porovnává histogramy chyb  $x_t - \hat{x}$  ve výpočtech GLS a KF. Chyby mají v obou případech normální rozdělení, u Kalmanova filtru mají ale mnohem menší varianci. Matematicky můžeme porovnat odhady pomocí  $RMSE$ :

$$RMSE_{GLS} = 12,7 \text{ cm}$$

$$RMSE_{KF} = 2,1 \text{ cm}$$

Odhad iteračním Kalmanovým filtrem je tedy jednoznačně vhodnější, a to i přesto, že je vychýlený. Pokusme se nyní aplikovat stejný postup na data s větším šumem (0,1 cm), a přiblížit se reálné situaci.



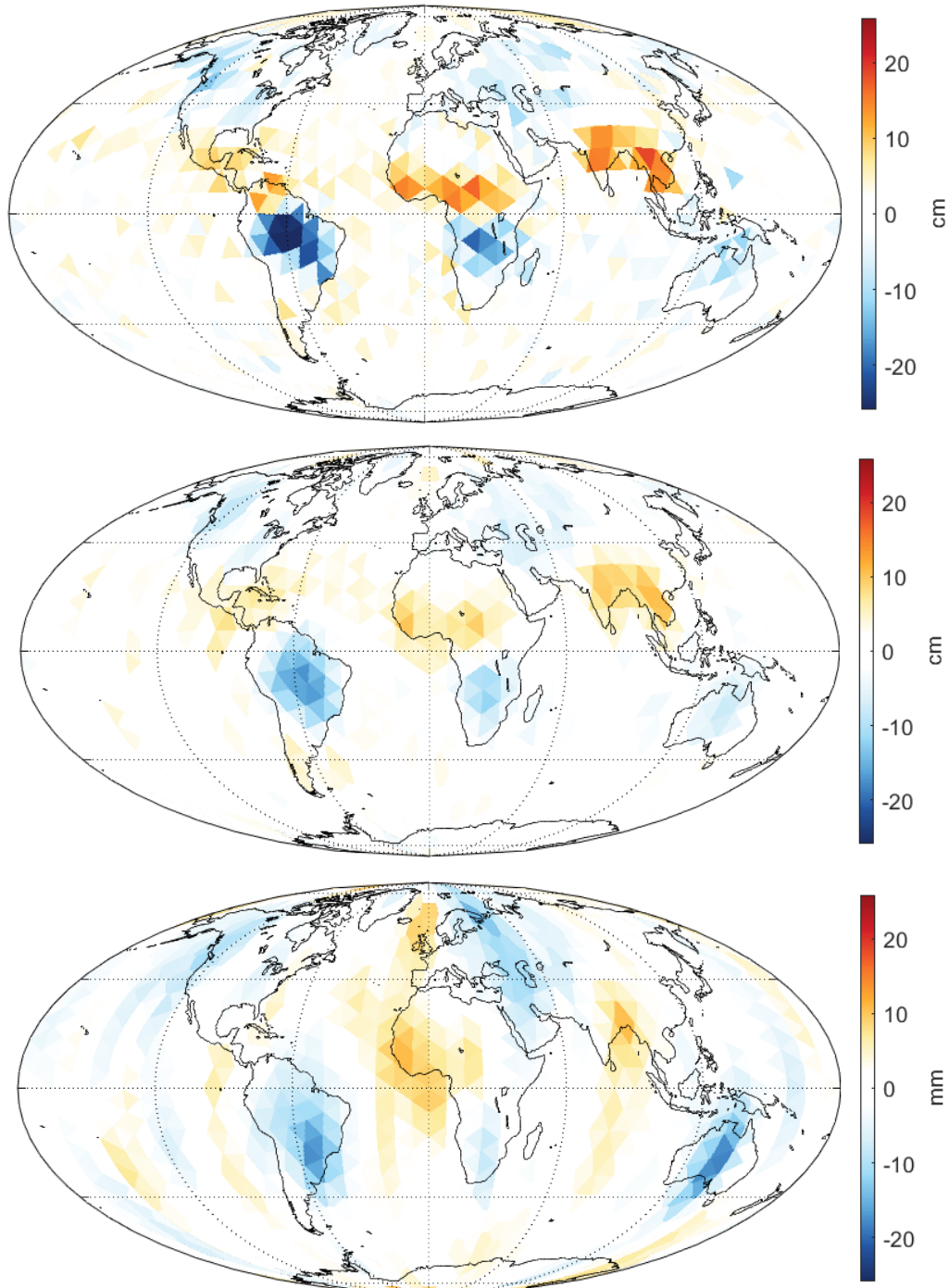
Obrázek 22 - EWH spočítané pomocí Kalmanova filtru s iteračně určeným  $P_{ini}$  (tři dny, 1280 troj, šum 0.1 cm)

S milimetrovým šumem jsou vidět jen náznaky a je zbytečné zkoušet výpočet provést s centimetrovým šumem, mapa by byla v dané škále celá bílá. Je potřeba více dat.



## 4.5 Výpočet pro 15 dní

Pokud použijeme data za delší časový úsek, zde pro 15 dní, měly by se výsledky zpřesnit. Barvy trojúhelníků mohou být oproti referenční mapě trochu bledší vzhledem ke snaze redukovat kolinearitu. V případě s opravdovými daty by mapa vybledla i z důvodu průměrování delšího časového úseku, ale simulovaná data jsou vygenerována z jedné epochy.



Obrázek 23 - Výsledek iteračního Kalmanova filtru pro 15 dní s různým šumem (1280 troj)

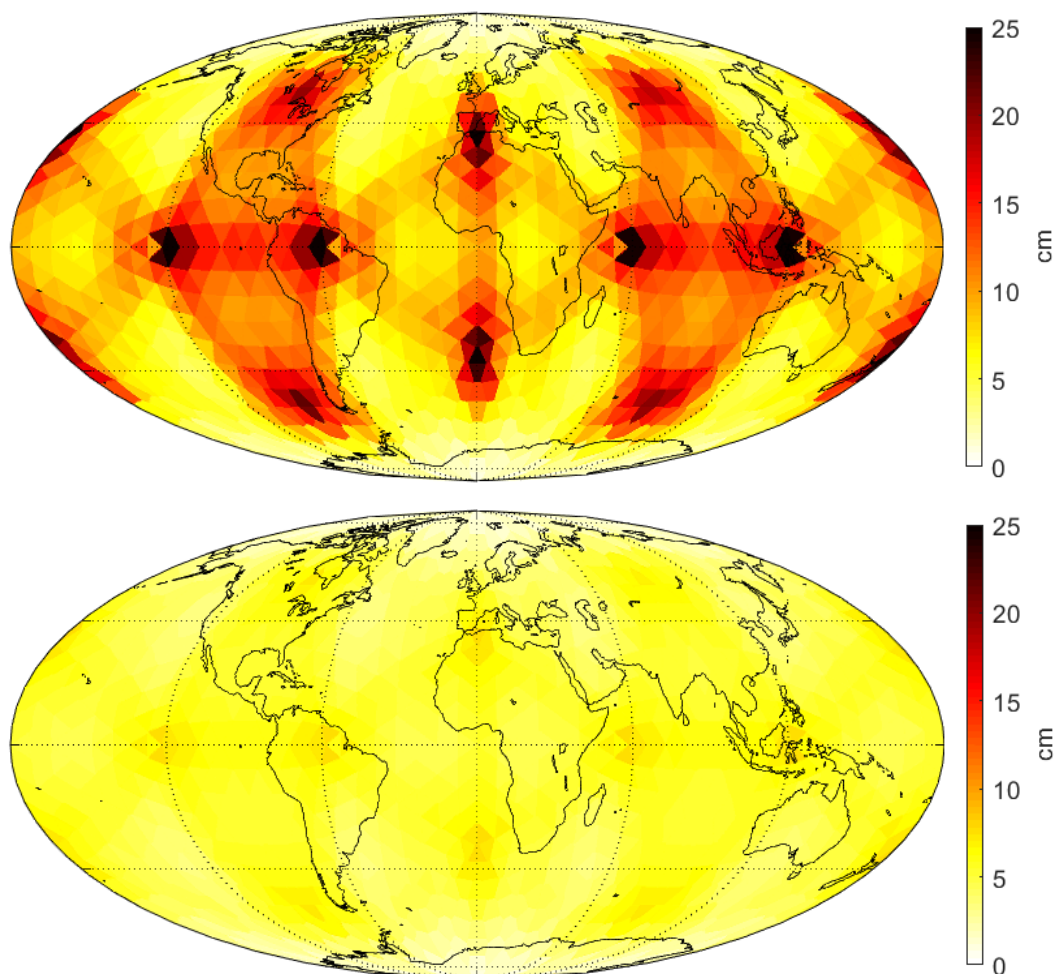


Výsledky pro nejmenší šum nejsou o mnoho lepší, spíš jen lehce jiné. Znatelného zlepšení doznala mapa s milimetrovým šumem, byť je stále relativně bledá. Třetí mapa s realistickým šumem je ale stále prakticky nepoužitelná, zobrazuje pouze náznaky hledaných EWH (měřítko barevné škály je tentokrát o řád větší), navíc je zřetelně ovlivněná pruhováním způsobeným geometrií dráhy družice popsáním v [7].

Nemá cenu prodlužovat časové okno sběru dat, protože výsledky z něj spočítané by přestaly být relevantní k danému okamžiku a mapa by nebyla vypovídající.

Můžeme ještě jednou porovnat výsledky GLS a KF. Pro každý prvek EWH můžeme spočítat směrodatnou odchylku. Variance jednotlivých prvků jsou na diagonále kovariančních matic, kterou je  $(A^*A^*)^{-1}$  u GLS a  $P$  u KF. Vzniklé směrodatné odchylky rozšíříme na mezní (95% interval spolehlivosti) jejich zdvojnásobením.

$$\sigma_{xM} = 2 \cdot \sqrt{\text{Var}(x) \cdot \text{diag}(\text{Cov})}$$



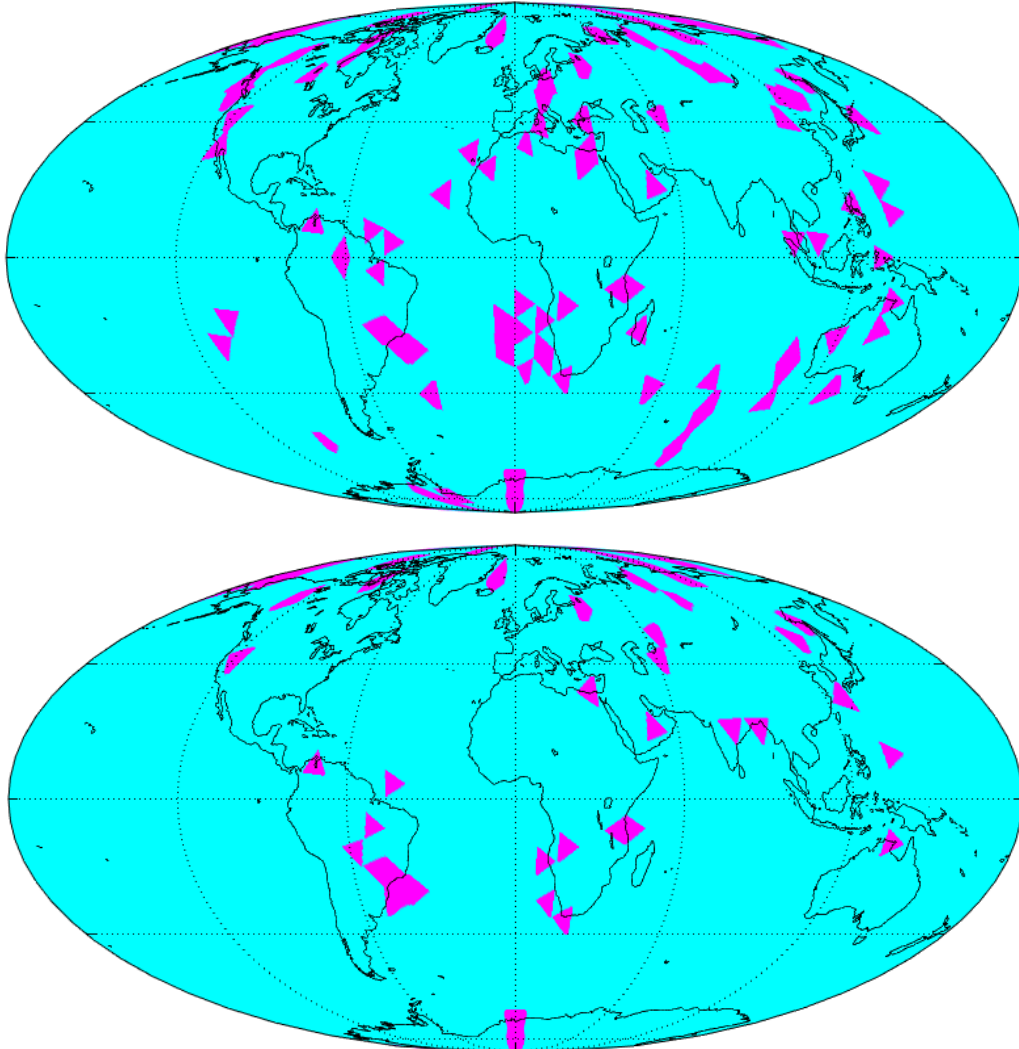
Obrázek 24 - Mezní směrodatné odchylky určení jednotlivých EWH (nahore GLS, dole KF, šum 0.01 cm)

Opět je zjevné, že náhodná složka chyby je u Kalmanova filtru mnohem nižší.





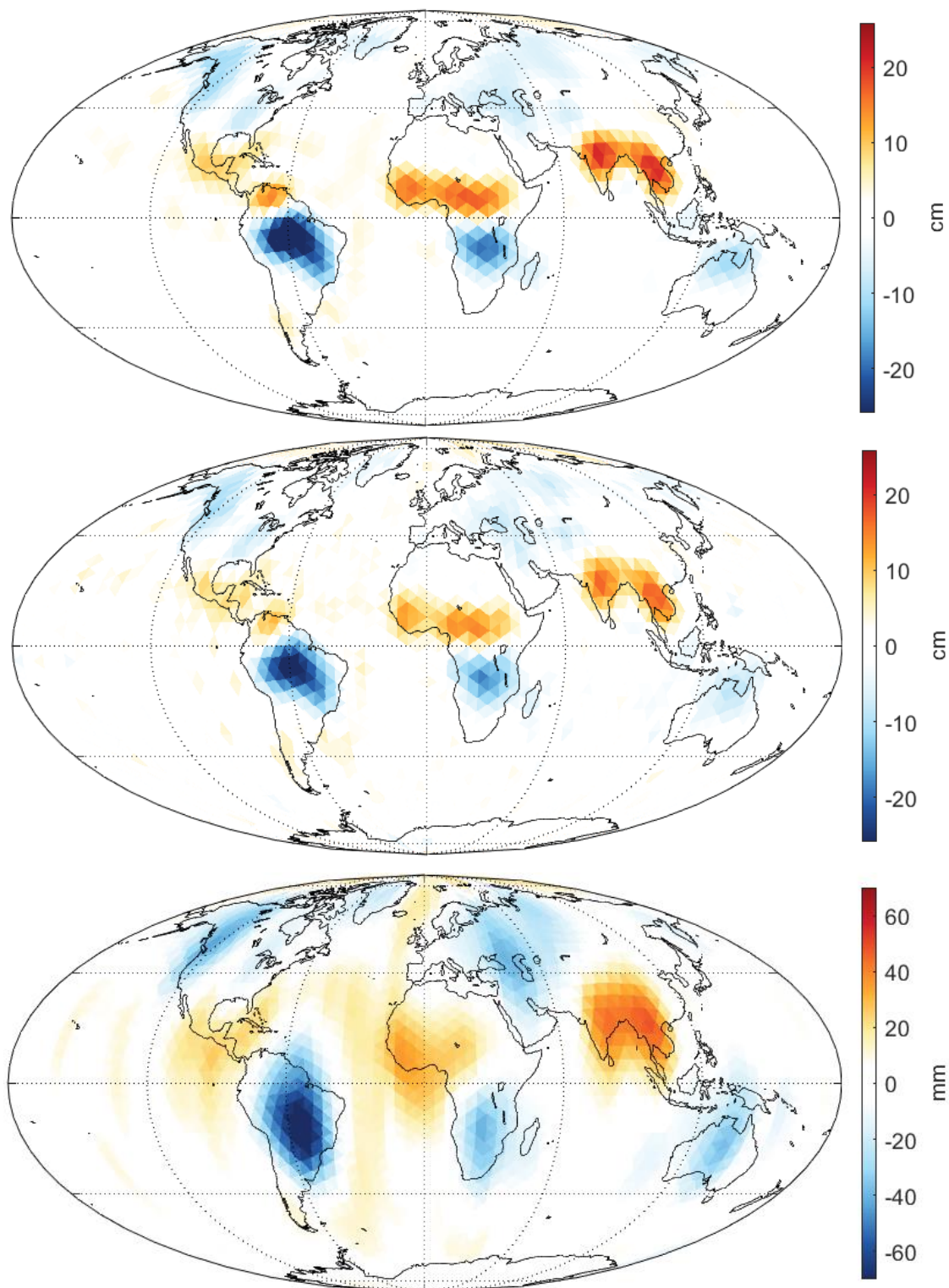
Ke stejným evaluacím můžeme experimentálně potvrdit tezi o 95% intervalu spolehlivosti, když zjistíme, kolik ze všech  $x_t$  doopravdy spadá do intervalu  $\hat{x} \pm \sigma_{xM}$ , a které to eventuálně jsou.



Obrázek 25 - Mapa EWH, které jsou mimo interval spolehlivosti odhadu danou metodou (nahore GLS, dole KF)

V případě GLS je korektních odhadů 92,6% a u KF je jich 96,4%, což statisticky vyhovuje. Při výpočtu pro větší šum by nesprávné odhady u KF byly soustředěny na místech s největšími skutečnými absolutními EWH, protože v důsledku pohlcení šumem by byly odhady blízké nule.

Nakonec se můžeme pokusit spočítat EWH pro maximální počet trojúhelníků (3920) a 15 dní. Tento výpočet má smysl pouze s nízkým šumem. Stejně tak výsledek GLS není třeba uvádět, v této fázi je již naprosto chaotický.



Obrázek 26 - Referenční mapa a výsledky iteračního Kalmanova filtru pro 15 dní (3920 troj, šum 0.01 a 0.1 cm)

Výsledek pro nejnižší šum je skutečně dobrý, je vidět jen drobné vyblednutí trojúhelníků z důvodu redukce kolinearit a zmenšení normy  $\hat{x}$ . U výsledku pro milimetrový šum bylo nutné opět upravit škálu, přesto je dost rozmazaný. Výpočet pro takovouto konfiguraci je už velmi náročný, na běžném desktopu zabere okolo čtyř hodin.



## 4.6 Technické aspekty výpočtu

V odvětví družicových pozorování je často potřeba zpracovávat velké množství dat, což klade značné nároky na výpočetní techniku.

### 4.6.1 Operační paměť

Pokud bychom chtěli sestavit celou matici plánu například pro 15 dní a 3920 trojúhelníků, jako tomu je v posledním výpočtu, její velikost by byla zhruba  $129600 \times 3920$ . Tato matice by se nevešla do operační paměti běžného počítače. Problém se dá vyřešit načítáním součinů dílčích matic  $A_p$ . Data jsou načítána po souborech se 112 observacemi. Matici  $A$  používáme ve výpočtu pouze v součinech  $A'A$  nebo  $A'l$ . Suma dílčích součinů je ekvivalentní součinu celkovému, takže když bude výpočet postupně procházet soubory, stačí pro každý z nich spočítat dílčí součiny  $A_p'A_p$  a  $A_p'l_p$  a před konečnou inverzí je sečíst.

### 4.6.2 Numerická stabilita

Je také nutné zachovat numerickou stabilitu výpočtu. Počítač začne nad určitou mezí zaokrouhlovat příliš velká/malá čísla a výsledek může být zcela jiný. Matice plánu musí být tedy správně škálována, aby mezi jednotlivými prvky nebyly velké řádové rozdíly a inverze byla numericky stabilní. V případě přidané konstanty jako regresoru je třeba, aby se řádově blížila měřeným zrychlením, byla zvolena  $10^{-6} \text{ m/s}^2$ . Gravitační konstanta byla z téhož důvodu umístěna do matice plánu, nikoli do vektoru měření.

### 4.6.3 Rychlost výpočtu

Finální výpočet byl značně pomalý, trval okolo čtyř hodin, z čehož vyvstává potřeba optimalizace. Předně je pro rychlost výpočtu nutné korektně prealokovat paměť do proměnných, aby se jejich velikost neměnila v každé fázi cyklu.

Jednou z možností, jak zrychlit výpočet, je jej tzv. paralelizovat. V základu totiž probíhá pouze na jednom jádře procesoru, zatímco ostatní jádra jsou nečinná. V případě metody nejmenších čtverců lze výpočet rozdělit na všechna jádra, aby každé souběžně počítalo část dat (třeba po dnech). Bohužel u Kalmanova filtru tento postup uplatnit nejde, protože každá část cyklu je závislá na výsledku té předchozí, to je princip rekurze a postupného zpřesňování výsledků.





## 5. Výsledky

Metoda	Počet dní	Počet trojúhelníků	Šum 0.01	Šum 0.1	Šum 1
GLS	3d	500	0,027	0,118	1,162
		1280	0,127	1,182	11,791
	15d	500	0,025	0,069	0,465
		1280	0,057	0,625	5,021
		3920	2,631	27,554	236,831
KF	3d	500	0,025	0,032	0,044
		1280	0,021	0,034	0,045
	15d	500	0,024	0,030	0,040
		1280	0,022	0,028	0,043
		3920	0,014	0,036	0,045

Tabulka 1 - Porovnání RMSE pro různé konfigurace výpočtu [m]

Pokud se pokusíme kvantifikovat vhodnost odhadu pomocí *RMSE* (tabulka 1), je nutné tuto veličinu správně interpretovat. *RMSE* porovnává shodu odhadu se skutečnými hodnotami EWH z modelu. Udává směrodatnou odchylku odhadu jednoho EWH na jednom trojúhelníku, zahrnující náhodnou i systematickou složku, zde je vypočítána v metrech. Metoda nejmenších čtverců pracuje s nevychýlenými odhady, *RMSE* u ní udává pouze náhodnou chybu, takže vhodnost odhadu je nepřímou úměrná velikosti *RMSE*.

U Kalmanova filtru je při pohledu na tabulku zřejmé, že *RMSE* se v různých konfiguracích výpočtu moc neliší, zůstává v jednotkách centimetrů. Přitom odhad se ale záhy stává nepoužitelným, protože zrychlení se z moře šumu zjistit nepodaří a mapa zůstává bílá. Protože odhady se blíží nule a většina skutečných hodnot se jí také nevzdaluje, *RMSE* zůstává nízké, takže není dobrou charakteristikou vhodnosti odhadu. Lepší volbou je poměr střední chyby odhadu a střední hodnoty skutečných EWH. Pokud se blíží jedné nebo je větší, odhad přestává být relevantní. Střední hodnota EWH je:

$$\bar{x}_t = \sqrt{\frac{\sum_1^{Nx} x_t^2}{Nx}} = 0,045 \text{ m.}$$

Při pohledu na výsledky pro KF v tabulce je vidět, že se této hodnotě blíží více vypočtených *RMSE*. Pro tyto konfigurace výpočtů, včetně všech s centimetrovým šumem, nebylo možné získat rozumné výsledky.



## 6. Závěr

Cílem diplomové práce bylo spočítat inverzi sezónní složky časově proměnného gravitačního pole na elementární trojúhelníkové plochy za použití numericky získaných zrychlení ze simulovaných poruch drah družic. Dále bylo úkolem porovnat získané výsledky v závislosti na parametrech a metodě výpočtu.

Bylo potvrzeno, že dekorelace šumu je pro relevantní výsledky stěžejní. Dále bylo zjištěno, že na časovém intervalu polohových dat příliš nezáleží, pokud je dostatečná část Země pokryta subsatelitními body. V tomto ohledu je tedy nutné zajistit přiměřený časový rámec sběru dat, v tomto konkrétním případě (družice Swarm, daný sklon dráhy a rychlost) alespoň tři dny. Velmi důležitá je velikost náhodného šumu, nad jeho určitou mez v něm zůstanou hledaná zrychlení utopena.

Jako vhodnější metoda odhadu byl stanoven iterační Kalmanův filtr, který i přes připuštění systematické chyby dosahuje stabilnějších výsledků než metoda nejmenších čtverců i v náročnějších konfiguracích výpočtu. Pro relevantní odhad je nutné správně určit váhu počáteční podmínky, proto je třeba výpočet iterovat.

Při submilimetrovém šumu lze pomocí Kalmanova filtru dosáhnout vynikajících výsledků i pro vysoký počet ploch (3920 trojúhelníků), bohužel reálná přesnost určení polohy družice je v řádu centimetrů. Ta by se ale mohla s postupujícím vývojem zlepšovat, například se zapojením dalších GNSS satelitů. Slibně v tomto ohledu vypadá odhad s milimetrovým šumem pro 1280 trojúhelníků (obrázek 23 uprostřed), který i přes charakteristické vyblednutí vykazuje zřejmou shodu s referenční mapou. V článkách [2] a [4] byla pro výpočet použita sebraná data o sezónní složce za několik let, což odhad zpřesnilo. Další možností je sledovat polohy více satelitů simultánně, mise Swarm koneckonců sestává ze tří družic.

Výsledky z GRACE a GRACE-FO metodou KBR jsou a budou přesnější, ale sledování poruch drah družic pomocí GNSS může poskytnout jejich ověření/doplnění a případnou náhradu.



## Seznam použité literatury a zdrojů

- [1] BEZDĚK, A., KOSTELECKÝ, J., KLOKOČNÍK, J., 2019. Družice GRACE a hydrologické aplikace. *Věk nerovnováhy*. Praha: Academia. ISBN 978-80-200-2930-0.
- [2] BEZDĚK, A., SEBERA, J., KLOKOČNÍK, J., KOSTELECKÝ, J., 2014. Gravity field models from kinematic orbits of CHAMP, GRACE and GOCE satellites. *ScienceDirect*. 2014(3), 412-429.
- [3] TEIXEIRA ENCARNACAO, J., VISSER, P., ARNOLD, D., BEZDEK, A., 2019. Description of the multi-approach gravity field models from Swarm GPS data. *Earth System Science Data*, DOI: 10.5194/essd-2019-158.
- [4] BEZDĚK, A., SEBERA, J., TEIXEIRA ENCARNACAO, J., KLOKOČNÍK, J., 2016. Time-variable gravity fields derived from GPS tracking of Swarm. *Geophysical Journal International*. 2016(205), 1665-1669.
- [5] WOUTERS, B., BONIN, J. A., CHAMBERS, D. P., RIVA, R. E. M., SASGEN, I., WAHR, J., 2014. GRACE, time-varying gravity, Earth system dynamics and climate change. *Reports on Progress in Physics* 77, 116801.
- [6] KOSTELECKÝ J, BEZDĚK A, KLOKOČNÍK J, 2013. Global and regional seasonal variations of the geoid detected by GRACE. *Acta Geodyn. Geomater.* 10, 285–291.
- [7] WAHR, J., 2015. Time-Variable Gravity from Satellites. In Schubert, G. *Treatise on Geophysics*, Elsevier, 193–213.
- [8] CHATTERJEE, S., HADI, A.S., 2006. Regression analysis by example. Wiley, Series in Probability and Statistics. Wiley.
- [9] STRANG, G., 1986. Introduction to Applied Mathematics. Wellesley-Cambridge Press, USA (odst. 2.5, str. 137-152).
- [10] REID, I., 2001. Estimation II, odst. 1-2, str. 1-28. Lecture notes, University of Oxford, UK.
- [11] VALLADO, D. A., 2007. Fundamentals of Astrodynamics and Applications, Springer, USA (odst. 10.6, str. 770–778).
- [12] PRESS W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P., 1992. Numerical Recipes in FORTRAN. 2nd ed. Cambridge: University Press.



- [13] RHEINFURT M.H., HOWELL L.H., 1998. "Probability and Statistics in Aerospace Engineering". NASA/TP—1998–207194.
- [14] KELLY, R.J., 1988. Reducing geometric dilution of precision using ridge regression signal processing, IEEE PLANS '88., Position Location and Navigation Symposium, Record. 'Navigation into the 21st Century'. Orlando, FL, USA, pp. 461-469, doi: 10.1109/PLANS.1988.195519.
- [15] MCGEE, L.A., SCHMIDT, S.F., 1985. Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry, Technical Memorandum 86847, National Aeronautics and Space Administration
- [16] Matlab. (2021). 9.10.0.1602886 (R2021a). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc.
- [17] PAWLOWICZ, R., 2020. "M\_Map: A mapping package for MATLAB", version 1.4m, [Computer software], available online at [www.eoas.ubc.ca/~rich/map.html](http://www.eoas.ubc.ca/~rich/map.html).
- [18] RAMILLIEN, G.; SEOANE, L.; SCHUMACHER, M.; FOROOTAN, E.; FRAPPART, F.; DARROZES, J., 2020. Recovery of Rapid Water Mass Changes (RWMC) by Kalman Filtering of GRACE Observations. *Remote Sens.* 2020, 12, 1299. <https://doi.org/10.3390/rs12081299>



## Seznam použitých zkratk

GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment
GNSS	Global Navigation Satellite System
CHAMP	Challenging Minisatellite Payload
GOCE	Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer
EWH	Equivalent water height
SST	Satellite-to satellite tracking
EIGEN	European Improved Gravity model of the Earth by New techniques
GRACE-FO	GRACE - Follow On
KBR	K-band ranging
LAGEOS	Laser Geometric Environmental Observation Survey
NASA	National Aeronautics and Space Administration
DLR	German Aerospace Center
TVG	Time-variable gravity
SHC	Spherical-harmonic coefficients
A-T	Along-track
C-T	Cross-track
RAD	Radial
TRF	Terrestrial reference frame
LRF	Local reference frame
OLS	Ordinary least squares
GLS	Generalized least squares
SVD	Singular value decomposition
RLS	Recursive least squares
KF	Kalmanův filtr
MSE	Mean squared error
RMSE	Root-mean-square error

## **Seznam tabulek**

Tabulka 1 - Porovnání RMSE pro různé konfigurace výpočtu [m].....	41
---	----

## Seznam obrázků

Obrázek 1 - Ilustrace družic GRACE [5].....	10
Obrázek 2 - SST low-low/high-low [5] .....	11
Obrázek 3 - Barevná ilustrace geoidu [1] .....	12
Obrázek 4 - Odchylna statického gravitačního pole od normálního daného referenčním elipsoidem [4] .....	13
Obrázek 5 - Příklad trendových změn v Grónsku a Antarktidě [4] .....	15
Obrázek 6 - Příklad výchylny sezónního gravitačního pole oproti statickému spočítanému z SHC ( $n_{max} = 20$ ) .....	15
Obrázek 7 - Příklad významné korelace pozorovaných veličin, která vyústí v kolinearitu [7].....	19
Obrázek 8 - Rychlá konvergence v případě různých $x_0$ (vlevo) a $P_0$ (vpravo) [9] .....	22
Obrázek 9 - Srovnání (ne)vychýleného odhadu [13].....	24
Obrázek 10 - Ukázka modelového časově proměnného gravitačního pole zobrazeného na trojúhelníkových plochách (Mollweideovo zobrazení, 3920 trojúhelníků).....	26
Obrázek 11 - Průmět satelitních bodů na povrch Země (30 sekund / 1 den).....	27
Obrázek 12 - Odhad EWH pro řídké dráhy (3920 trojúhelníků, 1 den) .....	27
Obrázek 13 - Průmět satelitních bodů na povrch Země (30 sekund / 3 dny) .....	28
Obrázek 14 - Odhad EWH pro husté dráhy (3920 trojúhelníků, 3 dny).....	28
Obrázek 15 - Průmět satelitních bodů na povrch Země (10 sekund / 3 dny) .....	29
Obrázek 16 - Histogramy velikostí vektorů zrychlení s různým šumem (v centimetrech) .....	30
Obrázek 17 - Porovnání výsledků ze surových a dekorelovaných dat (3 dny, 10 sekund, 500 troj).....	31
Obrázek 18 - Porovnání reference s výsledkem z dekorelovaných měření pro 3 a 15 dní (1280 trojúhelníků) .....	32
Obrázek 19 - Výpočet Kalmanovým filtrem s různou vahou počáteční podmínky ( $1e4$ , $1e5$ , $1e6$ ), tři dny, 1280 troj .....	33
Obrázek 20 - EWH spočítané pomocí Kalmanova filtru s iteračně určeným $P_0$ (tři dny, 1280 troj, šum 0.01 cm).....	34
Obrázek 21 - Histogramy chyby odhadů vůči skutečným hodnotám pro tři dny (vlevo GLS, vpravo KF) .....	35



Obrázek 22 - EWH spočítané pomocí Kalmanova filtru s iteračně určeným Pini (tři dny, 1280 troj, šum 0.1 cm).....	35
Obrázek 23 - Výsledek iteračního Kalmanova filtru pro 15 dní s různým šumem (1280 troj).....	36
Obrázek 24 - Mezní směrodatné odchylky určení jednotlivých EWH (nahore GLS, dole KF, šum 0.01 cm) .....	37
Obrázek 25 - Mapa EWH, které jsou mimo interval spolehlivosti odhadu danou metodou (nahore GLS, dole KF) .....	38
Obrázek 26 - Referenční mapa a výsledky iteračního Kalmanova filtru pro 15 dní (3920 troj, šum 0.01 a 0.1 cm) .....	39

## Seznam příloh

<i>vypocet.m</i>	Skript pro výpočet inverze s volbou požadovaných parametrů
<i>trojuhelniky.zip</i>	Datové soubory s trojúhelníkovou sítí (v různém počtu)
<i>noise.zip</i>	Vzorová data pro maximálně tři dny s nejnižším šumem
<i>bin.zip</i>	Funkce nutné pro správný výpočet v Matlabu a model Eigen-6s

Pro spuštění vzorového výpočtu je nutné archivy rozbalit do adresáře a přidat knihovnu M\_Map. Maximální počet dnů jsou tři (z důvodu velikosti dat), šum je submilimetrový.