

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní

Ústav technické matematiky
Strojní inženýrství - Matematické modelování v technice



Numerické řešení proudění
nenewtonské tekutiny

Numerical solution of
non-Newtonian fluid flow

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Vojtěch Škrle
Vedoucí práce: Ing. Vladimír Prokop Ph.D.
Rok: 2021

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Škrle** Jméno: **Vojtěch** Osobní číslo: **459854**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Numerické řešení proudění nenevtonské tekutiny

Název diplomové práce anglicky:

Numerical solution of non-Newtonian fluid flow

Pokyny pro vypracování:

Popište rovnice pro proudění vazké nestlačitelné tekutiny a vybrané modely nenevtonské tekutiny.
Popište metodu konečných objemů vhodnou pro řešení daného problému.
Sestavte a odlaďte program pro řešení proudění nenevtonské tekutiny metodou konečných objemů.
Pomocí výše uvedeného programu proveďte zadané numerické simulace a zpracujte získané výsledky.

Seznam doporučené literatury:

Blazek, Jiri. Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications, Elsevier, 2015
Galdi, G.P., Rannacher R., Robertson A. M., Turek S. Hemodynamical Flows, Modeling, Analysis and Simulation, Birkhäuser, 2008
Hirsch, Ch. Numerical Computation of Internal & External Flows (Second edition), Elsevier, 2007

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Vladimír Prokop, Ph.D., ústav technické matematiky FS

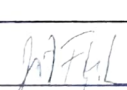
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **27.10.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **14.02.2021**

Platnost zadání diplomové práce: _____


Ing. Vladimír Prokop, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

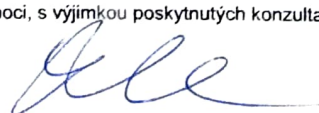

doc. Ing. Jíří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

30.10.2020
Datum převzetí zadání


Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

.....
Bc. Vojtěch Škrle

Poděkování

Děkuji svému školiteli, Ing. Vladimíru Prokopovi Ph.D., za odborné vedení během práce, cenné rady, věcné připomínky, trpělivost a ochotu.

Bc. Vojtěch Škrle

Název práce:

Numerické řešení proudění nenewtonské tekutiny

Autor: Bc. Vojtěch Škrle

Studijní program: Strojní inženýrství

Obor: Matematické modelování v technice

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Ing. Vladimír Prokop Ph.D.

Ústav technické matematiky, Fakulta strojní, České vysoké učení
technické v Praze

Abstrakt: Tématem této práce je vytvoření numerického modelu proudění nenewtonské tekutiny. Jsou zde uvedeny rovnice popisující proudění vazké nestlačitelné tekutiny a různé modely nenewtonské tekutiny. Dále jsou popsány způsoby řešení těchto rovnic - metoda umělé stlačitelnosti, metoda konečných objemů a iterační metody pro řešení vzniklé soustavy rovnic. Řešení vybraných úloh vlastním programem je srovnáno se známým řešením a odladěný program je použit pro řešení dalších úloh.

Klíčová slova: numerická simulace, nestlačitelné proudění, nenewtonská tekutina, metoda umělé stlačitelnosti, metoda konečných objemů

Title:

Numerical solution of non-Newtonian fluid flow

Author: Bc. Vojtěch Škrle

Abstract: The topic of this work is the creation of a numerical model of non-Newtonian fluid flow. Equations describing viscous incompressible fluid flow and various models of non-Newtonian fluid are presented. Furthermore, the methods of solving these equations are described - the method of artificial compressibility, the finite volume method and iterative methods for solving the resulting system of equations. The solution of selected tasks by in-house solver is compared with the known solution and the debugged program is then used for solving other tasks.

Key words: numerical simulation, incompressible flow, non-Newtonian fluid, artificial compressibility method, finite volume method

Obsah

Seznam symbolů	11
Úvod	13
1 Teorie mechaniky tekutin	15
1.1 Eulerův popis	15
1.2 Smykové napětí	15
1.3 Zobecněná newtonská tekutina	16
1.4 Mocninný model	16
2 Matematický model	19
2.1 Rovnice kontinuity	20
2.2 Pohybové rovnice	20
2.2.1 Navierovy-Stokesovy rovnice	21
2.2.2 Eulerovy rovnice	22
2.3 Výsledný systém rovnic	22
2.4 Bezrozměrný tvar rovnic	22
3 Numerické řešení	25
3.1 Metoda umělé stlačitelnosti	25
3.2 Metoda konečných objemů	26
3.3 Diskretizace toků	27
3.4 Umělá disipace	29
3.5 Jacobiho matice	30
3.6 Numerické schéma	30
3.6.1 Eulerova metoda	30
3.6.2 Rungeova-Kuttova metoda	30
3.7 MacCormackovo schéma	31
3.8 Definice okrajových podmínek	32
3.9 Časový krok	34
3.10 Kritérium konvergence	34
4 Numerické simulace	35
4.1 Rovný kanál	35
4.1.1 Newtonská tekutina	35
4.1.2 Nenewtonská tekutina	38
4.2 Čtvercová kavita	39
4.3 Symetrická stenóza	41

4.3.1	Newtonský model	41
4.3.2	Mocninný model	42
4.3.3	Modely krve	43
4.3.4	Smykové napětí na stěně	45
4.4	Kolmé větvení kanálu	47
4.5	Ostré větvení kanálu	51
Závěr		55
Bibliografie		57
Seznam obrázků		59
Seznam tabulek		61
A Neneutonský rychlostní profil		63
B Grafické znázornění numerických výsledků		65
B.1	Stenóza - mocninný model	65
B.2	Kolmé větvení kanálu	66
B.3	Ostré větvení kanálu	68

Seznam symbolů

a	parametr modelu viskozity
A, B	Jacobiho matice
CFL	Courantovo-Friedrichsovo-Lewyho číslo
D, d	člen umělé disipace
\mathbf{D}	tenzor rychlosti deformace
\mathcal{D}	diagonální matice soustavy
\mathcal{D}_β	diagonální matice soustavy s umělou stlačitelností
\vec{f}_e	vnější síly
\vec{F}	tok veličiny
\vec{F}_C	konvektivní tok veličiny
\vec{F}_v	vazký tok veličiny
F, G	konvektivní toky
H, h	charakteristický rozměr
II_D	druhý invariant tenzoru D
i, j	indexy buněk sítě
\mathbf{I}	jednotkový tenzor
$k^{(2)}, k^{(4)}$	koeficienty umělé vazkosti
K	index konzistence
L, l	charakteristický rozměr
m, n	rozměry výpočetní sítě
n	mocninný index (index toku)
p	tlak
$\vec{n} = (n_x, n_y)$	vnější normála
\vec{Q}_S	povrchový zdrojový člen
Q_V	objemový zdrojový člen
r	spektrální poloměr
Re	Reynoldsovo číslo
R, S	vazké toky
s	tlakový spínač umělé vazkosti
S	integrační plocha
\vec{S}_m	stěnový vektor
t	čas
U_∞	charakteristická rychlost
\dot{V}	objemový tok
$\vec{v} = (u, v)$	vektor rychlosti
w	charakteristický rozměr (šířka paralelních desek)

W	vektor neznámých
$\vec{x} = (x, y)$	vektor souřadnic
α, β	parametry Rungeovy-Kuttovy metody
β	umělá rychlost zvuku
$\dot{\gamma}$	smyková rychlost
δ	Kroneckerovo delta
δ	umělá stlačitelnost
ϵ	konstanta podmínky konvergence
$\epsilon^{(2)}, \epsilon^{(4)}$	koeficienty umělé vazkosti
η	zdánlivá viskozita
η_0	dolní mez viskozity
η_∞	horní mez viskozity
λ	parametr modelu viskozity
λ	objemová viskozita
μ	dynamická viskozita
ρ	hustota
τ	tenzor smykových napětí
Φ	bilancovaná veličina
Ω	kontrolní objem
$\Omega_{i,j}$	objem buňky i, j

Úvod

Cílem této diplomové práce je vytvoření modelu proudění vazké nestlačitelné tekutiny a dále vytvoření vlastního programu pro numerické řešení dané úlohy. Program je nejprve otestován na referenčních úlohách: simulaci 2-D proudění newtonské tekutiny zúžením průřezu, která byla provedena a validována experimentem v předchozí práci autora. [30] Dále je testován na úloze čtvercové kavity, kde jsou výsledky srovnány s [6]. Následně je provedena série simulací s různými modely viskozity a výsledky jsou porovnány.

CFD

CFD (Computational Fluid Dynamics) je odvětví mechaniky tekutin, které využívá numerické metody k řešení úloh zahrnujících proudění tekutin. Takové proudění je zpravidla popsáno systémem parciálních diferenciálních rovnic (PDR), které spolu s konstitutivními vztahy tvoří matematický model. Ten je následně řešen pomocí numerických metod. V této práci je použita metoda konečných objemů (MKO) a metoda umělé stlačitelnosti. Pro řešení vzniklých soustav PDR slouží iterační metody, v této práci je konkrétně použita Eulerova, Rungeova-Kuttova a MacCormackova metoda.

Struktura práce

Práce se zabývá modelováním proudění nestlačitelné vazké tekutiny se zaměřením na neneutonské kapaliny. Pojmem neneutonské tekutiny se nazývá skupina tekutin, pro které neplatí Newtonův zákon (více v 1.2), tedy smykové napětí v tekutině není přímo úměrné rychlosti deformace. Tato práce se blíže věnuje tekutinám pseudoplastickým, pro které platí, že viskozita se snižuje s rostoucí rychlostí deformace (např. polymery, barvy, krev).

V první kapitole jsou uvedeny použité modely pro výpočet zdánlivé viskozity neneutonské tekutiny. Druhá kapitola obsahuje souhrn matematických rovnic popisujících rovinné proudění. V třetí kapitole jsou uvedeny numerické metody pro modelování proudění nestlačitelné tekutiny. V poslední kapitole jsou uvedeny úlohy použité pro validování vytvořeného programu.

Kapitola 1

Teorie mechaniky tekutin

V této kapitole jsou uvedeny základní zákonitosti proudění tekutin.[3, 4, 12, 17, 29]

1.1 Eulerův popis

Jedním ze způsobů popisu pohybu kontinua je Eulerův popis, který pro proudění tekutin upřednostňujeme, neboť popisuje primárně rychlost tekutiny jako funkci polohy a času (naproti tomu Lagrangeův popis sleduje polohu jednotlivých částic jako funkci jejich počáteční polohy a času). [3] Tedy

$$\vec{v} = v(\vec{x}, t), \quad (1.1)$$

kde \vec{v} je vektor rychlosti $\vec{v} = (u, v, w)$ v 3-D, respektive $\vec{v} = (u, v)$ v 2-D, a \vec{x} je vektor polohy $\vec{x} = (x, y, z)$ v 3-D, respektive $\vec{x} = (x, y)$ v 2-D.

1.2 Smykové napětí

Tekutinu, pro kterou při proudění platí Newtonův zákon viskozity nazýváme newtonskou tekutinou. [17] Zákon lze vyjádřit například jako

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{du}{dy}, \quad (1.2)$$

kde τ_{xy} je tečné napětí a $\frac{du}{dy}$ gradient rychlosti. Newtonův zákon tedy říká, že tečné napětí v tekutině je přímo úměrné zápornému gradientu rychlosti. Konstanta úměrnosti μ se nazývá dynamická viskozita, jejíž jednotkou je *Pa s*. Jde o materiálovou vlastnost a pro newtonské tekutiny je uvažována konstantní. Newtonův zákon v tenzorovém tvaru lze také zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{D}, \quad (1.3)$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je tenzor napětí a \mathbf{D} tenzor rychlosti deformace (symetrická část gradientu rychlosti) [29]

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) . \quad (1.4)$$

1.3 Zobecněná newtonská tekutina

Tekutiny, pro které rovnice 1.3 neplatí, se nazývají nenewtonské, tedy napětí není přímo úměrné deformaci. Zobecněnou newtonskou tekutinou pak nazýváme model tekutiny, pro který 1.3 lze použít, ale parametr úměrnosti μ není konstantní. V takovém případě se mu říká zdánlivá viskozita (η) a závisí na tenzoru rychlosti deformace, respektive jeho druhém invariantu II_D [7]

$$\eta = \eta(\dot{\gamma}) = \eta(II_D) , \quad (1.5)$$

kde $\dot{\gamma}$ je smyková rychlost definovaná následovně

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2tr(\mathbf{D} : \mathbf{D})} = \sqrt{-4II_D} . \quad (1.6)$$

Ve 2-D má tenzor \mathbf{D} následující podobu

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} u_x & \frac{1}{2}(u_y + v_x) \\ \frac{1}{2}(v_x + u_y) & v_y \end{pmatrix} , \quad (1.7)$$

a stopa tenzoru $\mathbf{D} : \mathbf{D}$ je

$$tr(\mathbf{D} : \mathbf{D}) = u_x^2 + \frac{1}{2}(u_y + v_x)^2 + v_y^2 . \quad (1.8)$$

1.4 Mocninný model

Mocninný model (Power law) [29], který je pro svou jednoduchost nejčastěji používaný model viskozity, vypadá následovně

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{(n-1)} , \quad (1.9)$$

kde K je index konzistence a n mocninný index (index toku). Mocninný model zahrnuje i model newtonské tekutiny a to pro případ $n = 1$, kdy viskozita je konstantní. Tekutiny pro $n > 1$ se nazývají dilatantní (smykově houstnoucí) a pro $n < 1$ pseudoplastické (smykově řidnoucí). (Obr. 1.1)

Nezanedbatelnou nevýhodou mocninného modelu je jeho použitelnost pouze pro malý rozsah smykové rychlosti a predikce $\eta \rightarrow \infty$ pro $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, což odporuje experimentální zkušenosti, že se zdánlivá viskozita pro malé hodnoty rychlosti deformace

blíží konečné hodnotě η_0 . Tuto skutečnost už zahrnuje například tříkonstantový model (1.10), který pro velmi malé rychlosti deformace predikuje $\eta \rightarrow \eta_0$ a pro vysoké rychlosti deformace přechází v mocninný model [29]

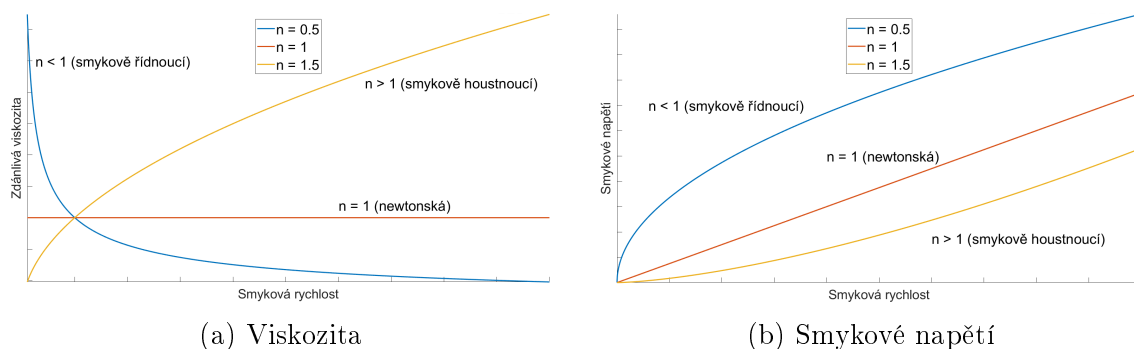
$$\eta = \frac{K\eta_0}{K + \eta_0\dot{\gamma}^{(1-n)}}. \quad (1.10)$$

Velká část dalších modelů viskozity zahrnuje nejen mez pro malé rychlosti deformace, ale také pro ty velké. Proto lze obecně takový model zapsat ve tvaru

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)f(\dot{\gamma}), \quad (1.11)$$

nebo v bezrozměrném tvaru jako

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = f(\dot{\gamma}). \quad (1.12)$$

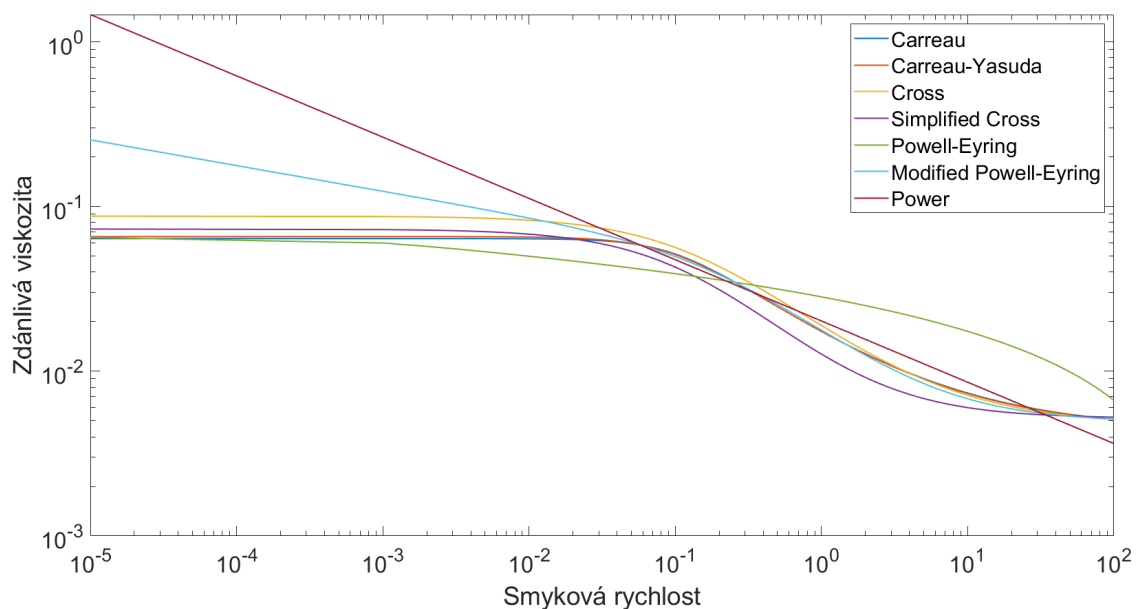


Obrázek 1.1: Viskozita a smykové napětí jako funkce smykové rychlosti pro mocninný model a tři hodnoty indexu toku n

V tabulce 1.1 jsou uvedeny příklady modelů viskozity a hodnoty parametrů pro model krve. Viskozita, kterou tyto modely predikují je pak zobrazena v grafu 1.2.

Model	$f(\dot{\gamma})$	Materiálové konstanty
Powell-Eyring	$\sinh^{-1}(\lambda\dot{\gamma})$	$\eta_0 = 60.2 \text{ mPa s}$ $\eta_\infty = 64.9 \text{ mPa s}$ $\lambda = 1206.5 \text{ s}$
Modified Powell-Eyring	$\frac{\ln(1+\lambda\dot{\gamma})}{(\lambda\dot{\gamma})^m}$	$\eta_0 = 57.46 \text{ mPa s}$ $\eta_\infty = 4.93 \text{ mPa s}$ $\lambda = 5.97 \text{ s}, m = 1.16$
Simplified Cross	$\frac{1}{1+\lambda\dot{\gamma}}$	$\eta_0 = 73.0 \text{ mPa s}$ $\eta_\infty = 5.18 \text{ mPa s}$ $\lambda = 4.84 \text{ s}$
Cross	$\frac{1}{1+(\lambda\dot{\gamma})^m}$	$\eta_0 = 87.5 \text{ mPa s}$ $\eta_\infty = 4.70 \text{ mPa s}$ $\lambda = 8 \text{ s}, m = 0.801$
Carreau	$\frac{1}{[1+(\lambda\dot{\gamma})^2]^{(1-n)/2}}$	$\eta_0 = 63.9 \text{ mPa s}$ $\eta_\infty = 4.45 \text{ mPa s}$ $\lambda = 10.3 \text{ s}, n = 0.35$
Carreau-Yasuda	$\frac{1}{[1+(\lambda\dot{\gamma})^a]^{(1-n)/a}}$	$\eta_0 = 65.7 \text{ mPa s}$ $\eta_\infty = 4.47 \text{ mPa s}$ $\lambda = 10.3 \text{ s}, n = 0.34$ $a = 1.76$

Tabulka 1.1: Modely viskozity krve zobecněné newtonské tekutiny (převzato z [7])



Obrázek 1.2: Průběh zdánlivé viskozity modelů z tabulky 1.1

Kapitola 2

Matematický model

V této kapitole je uvedeno odvození bilančních rovnic popisujících proudění tekutin. Obecně jsou rovnice uvažovány pro 3-D případ a následně zjednodušeny o jednu dimenzi. Není zde uvedena bilanční rovnice energie, neboť celá práce předpokládá isotermické proudění. [2, 3, 4, 7, 11, 20, 21]

Bilanční rovnici veličiny Φ lze obecně zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \Phi d\Omega = - \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \oint_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S}, \quad (2.1)$$

kde člen na levé straně vyjadřuje časovou změnu množství veličiny Φ v kontrolním objemu Ω . Tok veličiny hranicí objemu \vec{F} se zde vyskytuje se záporným znaménkem, jelikož předpokládáme kladný tok, který vstupuje do kontrolního objemu. Na pravé straně jsou zdrojové členy veličiny Φ , které můžeme rozdělit na objemové Q_V a povrchové \vec{Q}_S .

Tok \vec{F} je tvořen dvěma složkami, konvektivní a difúzní. Konvektivní složka vyjadřuje množství veličiny Φ vstupující skrze hranici do kontrolního objemu rychlostí \vec{v}

$$- \oint_S \vec{F}_C \cdot d\vec{S} = - \oint_S \Phi (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS. \quad (2.2)$$

Věta 1 (Gaussova-Ostrogradského věta [23])

Nechť vektorová funkce \vec{F} má spojité parciální derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$.

Nechť S je uzavřená po částech hladká plocha v D , orientovaná směrem vně a taková, že $\text{Int}S = \Omega \subset D$. Pak platí:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega. \quad (2.3)$$

Po aplikaci Gaussovy-Ostrogradského věty na druhý a čtvrtý člen v rovnici 2.1 dostáváme:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \Phi d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d\Omega = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S d\Omega. \quad (2.4)$$

Protože rovnice 2.4 má být platná pro libovolně zvolený kontrolní objem Ω , lze ji psát v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = Q_V + \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_S. \quad (2.5)$$

Rovnice 2.1 zůstává nadále platná i pro případ, kdy bilancovaná veličina je vektorová, avšak s tím rozdílem, že tok \vec{F} a plošný zdroj \vec{Q}_S se změní z vektorů v tenzory druhého řádu \mathbf{F} a \mathbf{S}_S .

2.1 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity formálně vyjadřuje zákon zachování hmotnosti. Protože hmota nemůže vznikat ani zanikat, uvažujeme v bilanci nulové zdrojové členy a bilanční rovnice se nám zjednoduší na součet konvekce skrz stěny kontrolního objemu a akumulaci hustoty [11]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.6)$$

nebo v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.7)$$

Pro speciální případ nestlačitelné tekutiny je hustota konstantní a tedy její derivace nulové. Rovnice kontinuity se zjednoduší na

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.8)$$

2.2 Pohybové rovnice

Pohybovými rovnicemi označujeme bilanční rovnice hybnosti. [3, 11] Principem odpovídají Newtonovu druhému pohybovému zákonu, který říká, že změna hybnosti tělesa je přímo úměrná velikosti sil na toto těleso působících. Hybnost je definována jako součin rychlosti a hmotnosti, respektive dělíme-li hybnost objemem, dostáváme tzv. měrnou hybnost. Dosazením $\Phi = \rho \vec{v}$ do rovnice 2.1 a 2.2 dostáváme obecnou pohybovou rovnici, v které je třeba ještě doplnit význam zdrojovým členům:

- *Objemové síly* jsou vyjádřeny intenzitou vnějšího silového pole a působí na hmotu v celém kontrolním objemu. To jsou například gravitační, vztlakové, Coriolisovy nebo odstředivé síly.
- *Povrchové síly* jsou tvořeny tlakem p a tečným napětím $\boldsymbol{\tau}$.

$$\mathbf{Q}_S = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.9)$$

kde \vec{I} je jednotkový tenzor. Po těchto úpravách má bilance následující tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\rho \vec{v}) d\Omega = - \oint_S (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_S p d\vec{S} + \oint_S \boldsymbol{\tau} \cdot d\vec{S}. \quad (2.10)$$

Po aplikaci Gaussovy-Ostrogradského věty ji lze také psát v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \vec{f}_e - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2.11)$$

Aplikujme na oba členy levé strany rovnice větu o derivaci součinu dvou funkcí, získáme tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{v} + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \vec{v} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{f}_e - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2.12)$$

První a třetí člen této rovnice odpovídají rovnici kontinuity vynásobené vektorem rychlosti \vec{v} . Předpokládáme-li splnění rovnice kontinuity, tyto členy na levé straně jsou rovny nule a zbude pouze materiálová derivace

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \equiv \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{f}_e - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2.13)$$

Uvažujeme-li proudění zobecněné newtonské tekutiny, můžeme prvky tenzoru napětí vyjádřit vztahem:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ij}, \quad (2.14)$$

kde μ je dynamické viskozita a λ objemová (druhá) viskozita. Kromě případů extrémně vysokých teplot platí pro viskózní parametry Stokesova hypotéza

$$3\lambda = 2\mu. \quad (2.15)$$

Pro nestlačitelné tekutiny (platí rovnice 2.8) je druhý člen rovný nule a smykové napětí se zjednoduší na 1.3.

2.2.1 Navierovy-Stokesovy rovnice

Vydělením rovnice 2.13 hustotou a následnou kombinací s 2.14 a 2.15 získáme systém rovnic popisujících proudění nestlačitelné newtonské tekutiny, který nazýváme

Navierovy-Stokesovy rovnice [3, 11, 29]. Pro 2-D je lze zapsat jako

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_y.\end{aligned}\tag{2.16}$$

2.2.2 Eulerovy rovnice

Zanedbáme-li navíc při proudění tekutiny efekt viskozity, zmizí z rovnic členy tečného napětí a získáme Eulerovy pohybové rovnice

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y.\end{aligned}\tag{2.17}$$

2.3 Výsledný systém rovnic

V této práci jsou řešeny případy proudění nestlačitelné newtonské i nenewtonské kapaliny, budeme tedy uvažovat systém rovnic tvořený 2.8 a 2.16, který lze zapsat v následujícím tvaru:

$$\mathcal{D}W_t + F_x + G_y - R_x - S_y = 0,\tag{2.18}$$

kde \mathcal{D} je diagonální matice, W je vektor neznámých, F a G jsou nevazké (konvektivní) toky, R a S jsou vazké toky (pozn. pro případ Eulerových rovnic budou vazké toky nulové).

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} p \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} u \\ u^2 + \bar{p} \\ uv \end{pmatrix}, \\ G &= \begin{pmatrix} v \\ uv \\ v^2 + \bar{p} \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

2.4 Bezrozměrný tvar rovnic

Systém rovnic 2.18 lze přepsat do bezrozměrného tvaru vydělením každé rozměrové veličiny vhodnou referenční (charakteristickou) hodnotou. [29] Pro prostorové veličiny se používá L (průměr trubice, vzdálenost paralelních desek apod.), pro rychlosti

rychlost volného proudu U_∞ . Bezrozměrné veličiny (označené *) pak získáme pomocí vztahů

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{U_\infty^2}, \quad t^* = \frac{U_\infty}{L}t. \quad (2.20)$$

Po dosazení do rovnice kontinuity

$$\frac{U_\infty}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{U_\infty}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.21)$$

lze celou rovnici vynásobit členem L/U_∞ a dostáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (2.22)$$

kteřá obsahuje pouze bezrozměrné veličiny, ale její tvar zůstal nezměněný. Proces lze zopakovat i pro pohybové rovnice, pro zjednodušení budeme uvažovat viskozitu konstantní

$$\begin{aligned} \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}(u^{*2}) + \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial}{\partial y^*}(u^*v^*) = \\ - \frac{U_\infty^2}{\rho L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{2\mu U_\infty}{\rho L^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\mu U_\infty}{\rho L^2} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right), \\ \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial}{\partial x^*}(u^*v^*) + \frac{U_\infty^2}{L} \frac{\partial}{\partial y^*}(v^{*2}) = \\ - \frac{U_\infty^2}{\rho L} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\mu U_\infty}{\rho L^2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + \frac{2\mu U_\infty}{\rho L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Celou rovnici lze vynásobit členem L/U_∞^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}(u^{*2}) + \frac{\partial}{\partial y^*}(u^*v^*) = \\ - \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x^*} + \frac{2\mu}{U_\infty L \rho} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\mu}{U_\infty L \rho} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right), \\ \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*}(u^*v^*) + \frac{\partial}{\partial y^*}(v^{*2}) = \\ - \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial y^*} + \frac{\mu}{U_\infty L \rho} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + \frac{2\mu}{U_\infty L \rho} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Kde $\bar{p}^* = p^*/\rho$ a člen před druhými derivacemi na pravé straně je převrácená hodnota Reynoldsova čísla [17]

$$Re = \frac{U_\infty L}{\mu} \rho. \quad (2.25)$$

Výsledný tvar rovnice 2.16 ve zkráceném tvaru

$$\begin{aligned}u_t + (u^2 + \bar{p})_x + (uv)_y &= \frac{2}{Re}u_{xx} + \frac{1}{Re}(u_y + v_x) \\v_t + (uv)_x + (v^2 + \bar{p})_y &= \frac{1}{Re}(v_x + u_y) + \frac{2}{Re}v_{yy}\end{aligned}\tag{2.26}$$

opět strukturou odpovídá původní rovnici. Z toho důvodu už není třeba explicitně označovat bezrozměrné veličiny *.

Kapitola 3

Numerické řešení

V této kapitole jsou popsány numerické metody použité pro řešení rovnic z předchozí kapitoly.

3.1 Metoda umělé stlačitelnosti

Rovnice proudění nestlačitelné tekutiny neobsahují časovou derivaci tlaku (hustoty) v rovnici kontinuity, což komplikuje jejich řešení. Jednou metodou řešení je zavedení umělé stlačitelnosti (více např. v [14, 20]). Rovnice kontinuity je rozšířena o časovou derivaci tlaku

$$\rho = p\delta = \frac{p}{\beta^2}, \quad (3.1)$$

kde δ je koeficient umělé stlačitelnosti a β umělá rychlost zvuku. Získáme rovnici kontinuity ve tvaru

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.2)$$

Systém rovnic pro nestlačitelné vazké proudění 2.18 se změní pouze záměnou matice \mathcal{D} za \mathcal{D}_β

$$\mathcal{D}_\beta W_t + F_x + G_y - R_x - S_y = 0, \quad (3.3)$$

kde

$$\mathcal{D}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

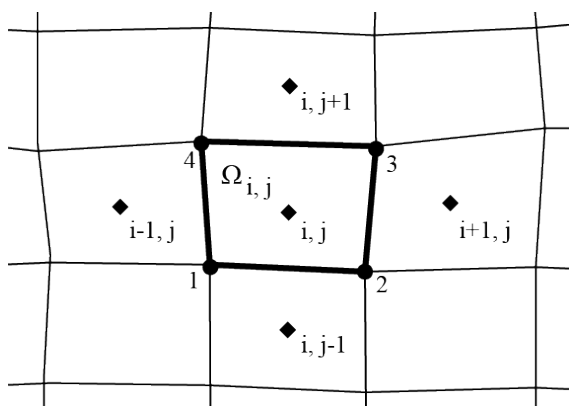
Velikost β je konstantní a je možné ji volit, ovlivňuje však rychlost výpočtu, neboť je součástí vlastních čísel Jacobiho matic konvektivních toků (více kapitola 3.9). Vhodnou volbou umělé rychlosti zvuku je předem odhadnutá maximální rychlost v oblasti řešení [20].

3.2 Metoda konečných objemů

Metoda konečných objemů (MKO) [2, 11, 20] je diskretizační metoda pro řešení bilančních rovnic 2.5. Oblast Ω , na které je systém rovnic řešen, je rozdělena na podoblasti, buňky $\Omega_{i,j}$, které vyplní celou oblast a zároveň se žádné dvě nepřekrývají. V každé buňce je řešení $W(\vec{x}, t)$ aproximováno jeho střední hodnotou

$$W_{i,j} \approx \frac{1}{\Omega_{i,j}} \int_{\Omega_{i,j}} W(\vec{x}, t) d\Omega, \quad (3.5)$$

kde $\Omega_{i,j}$ je objem dané buňky.



Obrázek 3.1: 2-D strukturovaná síť pro metodu konečných objemů

Rovnice 3.3 lze zapsat ve tvaru

$$W_t + \nabla \cdot F = 0, \quad (3.6)$$

kde F zahrnuje všechny vazké i nevazké toky F, G, R, S . Dále uvažujeme, že hodnoty neznámých veličin jsou situovány do středů buněk (cell-centered schéma). Systém konzervativních rovnic je řešen pro každou buňku samostatně a integrováním nabude tvaru

$$\int_{\Omega_{ij}} W_t d\Omega + \int_{\Omega_{ij}} F d\Omega = 0. \quad (3.7)$$

Aplikací Gaussovy věty (Věta 1) přejde objemový integrál v plošný

$$\int_{\Omega_{ij}} W_t d\Omega + \oint_{\partial\Omega_{ij}} F \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (3.8)$$

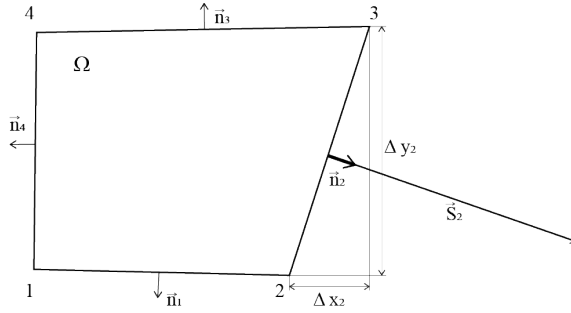
Protože Ω_{ij} nezávisí na čase, můžeme změnit pořadí integrace a derivace podle času v prvním členu. Dále nahrazením integrace druhého členu za součet středních hodnot na stěnách buňky získáme tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} W d\Omega + \sum_{k=1}^N F_{ijk} \cdot \vec{n}_{ijk} \Delta S_{ijk} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{ij} \Omega_{ij} + \sum_{k=1}^N F_{ijk} \cdot \vec{n}_{ijk} \Delta S_{ijk} = 0 , \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_{ij} = -\frac{1}{\Omega_{ij}} \sum_{k=1}^N F_{ijk} \cdot \vec{n}_{ijk} \Delta S_{ijk} = Res(W_{ij}) , \quad (3.11)$$

kde Ω_{ij} vyjadřuje objem dané buňky, n_{ijk} je vnější normála stěny a ΔS je plocha stěny (délka ve 2-D). Rovnice 3.11 vyjadřuje obecný systém obyčejných diferenciálních rovnic. Dále je potřeba vyřešit způsob výpočtu toků F_{ijk} a diskretizaci rovnic v čase.



Obrázek 3.2: Stěnové a normálové vektory buňky sítě

Při výpočtu rezidua (3.11) je třeba znát rozměry jednotlivých buněk sítě. Objem buňky ve 2-D lze definovat následovně

$$\Omega_{i,j} = \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) + (x_4 - x_2)(y_1 - y_3)] . \quad (3.12)$$

V rovnici 3.11 se dále vyskytuje součin plochy ΔS (délky stěny v 2-D) s normálovým vektorem \vec{n}

$$\vec{S}_m = \begin{pmatrix} S_{x,m} \\ S_{y,m} \end{pmatrix} = \vec{n}_m \Delta S_m . \quad (3.13)$$

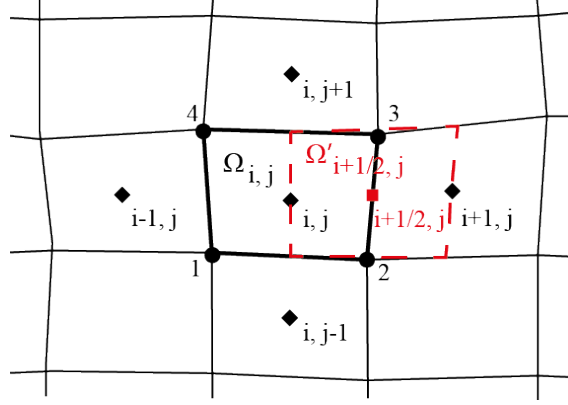
3.3 Diskretizace toků

Chceme-li vyčíslit rovnici 3.11, potřebujeme znát velikosti vazkých a konvektivních toků na stěnách buňky. Výpočet toků na stěně je možné provést průměrováním jejich hodnot ze středů sousedních buněk. Například pro stěnu $i + 1/2, j$ vypadá výpočet konvektivních toků následovně [2]

$$(F_c \Delta S)_{i,j} = \frac{1}{2} [F_c(W_{i,j}) + F_c(W_{i+1,j})] \Delta S_{i+1/2,j} . \quad (3.14)$$

Jinou variantou je průměrování hodnot proměnných na stěnu buňky a teprve poté výpočet toků. Tímto způsobem je proveden výpočet vazkých toků, neboť použití stejného postupu jako u konvektivních toků, vytváří šachovnicový efekt řešení. [2]

$$(F_v \Delta S)_{i,j} = F_v \left(\frac{1}{2} (W_{i,j} + W_{i+1,j}) \right) \Delta S_{i+1/2,j} . \quad (3.15)$$



Obrázek 3.3: Duální objem pro výpočet vazkých toků

Pro výpočet vazkých toků je tedy třeba nejdříve znát derivace rychlostí na stěnách buňky. K tomu je použito duálních sítí, které mají těžiště buněk situovány do středů stěn primární sítě.

Věta 2 (Greenova věta)

Nechť $\vec{f} = (U, V)$ je vektorová funkce v oblasti $O \subset \mathbb{E}_2$ a souřadnicové funkce U, V mají v O spojitě parciální derivace.

Nechť C je kladně orientovaná uzavřená křivka v O taková, že $\text{Int}C \subset O$. Pak platí:

$$\oint_S (Udx + Vdy) = \int_{\text{Int}C} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dxdy. \quad (3.16)$$

Integrací rychlosti přes duální kontrolní objem Ω' a využitím Greenovy věty (Věta 2) získáme výsledný vztah pro výpočet derivací

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega'} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega' = \frac{1}{\Omega'} \oint_{\Omega'} v dy \approx \frac{1}{\Omega'} \sum_{m=1}^4 v_m S'_{x,m}, \quad (3.17)$$

kde m je index stěny duální sítě, v_m je rychlost ve středu stěny duální sítě a $S'_{x,m}$ je složka stěnového vektoru. Hodnoty ve středech stěn U_m jsou rovnou hodnoty ve středech buněk primární sítě (pro m rovno 2 a 4), respektive hodnoty ve vrcholech primární sítě (pro m rovno 1 a 3), které jsou počítány průměrováním hodnot z okolních buněk

$$v_{i+1/2, j+1/2} = \frac{1}{\sum_{k=1}^4 \Omega_k} (v_{i,j} \Omega_{i,j} + v_{i+1,j} \Omega_{i+1,j} + v_{i,j+1} \Omega_{i,j+1} + v_{i+1,j+1} \Omega_{i+1,j+1}). \quad (3.18)$$

Výsledné vztahy pro výpočet prostorových derivací jsou

$$u_x \approx \frac{1}{\Omega'} \sum_{m=1}^4 u_m S_{x,m} \quad u_y \approx \frac{1}{\Omega'} \sum_{m=1}^4 u_m S_{y,m} \quad (3.19)$$

$$v_x \approx \frac{1}{\Omega'} \sum_{m=1}^4 v_m S_{x,m} \quad v_y \approx \frac{1}{\Omega'} \sum_{m=1}^4 v_m S_{y,m} . \quad (3.20)$$

3.4 Umělá disipace

Nevýhodou diskretizace konvektivních toků pomocí centrálního schématu je vytvoření šachovnicového efektu (odd-even decoupling), kdy vzniknou dvě různá řešení úlohy. Proto je třeba schéma rozšířit o umělou disipaci, která zlepší stabilitu řešení. Použitím disipace Jamesonova typu [15, 16] pro Eulerovy rovnice vznikne tzv. JST schéma (Jameson-Schmidt-Turkel), které je kombinací druhé a čtvrté diference. [26, 27, 28]

$$Res(W_{ij}) = \sum (F_{ck} \Delta S_k - D_k) \vec{n}_k , \quad (3.21)$$

kde D je přidáný člen umělé disipace definovaný následovně

$$\begin{aligned} D(W_{ij}) &= D_x(W_{ij}) + D_y(W_{ij}) \\ D_x(W_{ij}) &= d_{i+1/2,j} - d_{i-1/2,j} \\ D_y(W_{ij}) &= d_{i,j+1/2} - d_{i,j-1/2} \\ d_{i+1/2,j} &= \epsilon_{i+1/2}^{(2)} \Delta W_{i+1/2,j} \\ &\quad - \epsilon_{i+1/2}^{(4)} (\Delta W_{i+3/2,j} - 2\Delta W_{i+1/2,j} + \Delta W_{i-1/2,j}) \\ \Delta W_{i+1/2,j} &= W_{i+1,j} - W_{i,j} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Koeficienty $\epsilon_{i+1/2}^{(2)}$ a $\epsilon_{i+1/2}^{(4)}$ jsou vypínány a zapínány pomocí tlakového spínače

$$s_{i,j} = \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}} . \quad (3.23)$$

Hodnotu tlakového spínače $s_{i+1/2,j}$ a spektrálního poloměru $r_{i+1/2,j}$ na stěně můžeme definovat jako

$$s_{i+1/2,j} = \max(s_{i,j}, s_{i+1,j}), \quad r_{i+1/2,j} = \max(r_{i,j}, r_{i+1,j}) . \quad (3.24)$$

Pak koeficienty $\epsilon^{(2)}$ a $\epsilon^{(4)}$ jsou

$$\epsilon_{i+1/2}^{(2)} = k^{(2)} s_{i+1/2,j} r_{i+1/2,j} \quad (3.25)$$

$$\epsilon_{i+1/2}^{(4)} = \max(0, k^{(4)} r_{i+1/2,j} - \epsilon_{i+1/2}^{(2)}) . \quad (3.26)$$

Konstanty $k^{(2)}$ a $k^{(4)}$ je možno volit [15], jejich hodnota je zpravidla

$$\frac{1}{2} \leq k^{(2)} \leq 1, \quad \frac{1}{128} \leq k^{(4)} \leq \frac{1}{32} . \quad (3.27)$$

Při správně zvolených $k^{(2)}$ a $k^{(4)}$ tlakový spínač způsobí, že disipace druhého řádu je aktivní pouze v okolí rázových vln, kde zabraňuje oscilacím, a naopak je úplně vypnuta v případě aktivní disipace čtvrtého řádu.

3.5 Jacobiho matice

Jacobiho matice konvektivního toku reprezentuje gradient konvektivního toku vůči konzervativním neznámým

$$A_c = \frac{\partial F_c}{\partial W}, \quad A = \frac{\partial F}{\partial W}, \quad B = \frac{\partial G}{\partial W}, \quad (3.28)$$

kde

$$F_c = F n_x + G n_y. \quad (3.29)$$

Například vlastní čísla matice A jsou u , $u + \sqrt{u^2 + \beta^2}$ a $u - \sqrt{u^2 + \beta^2}$. Spektrální poloměr matice A je potom $r_A = |u| + \sqrt{u^2 + \beta^2}$.

3.6 Numerické schéma

V předchozích částech jsme definovali způsob, kterým je počítáno reziduum (pravá strana) soustavy ODR. Pro jejich diskretizaci v čase je třeba zvolit vhodnou numerickou metodu.

3.6.1 Eulerova metoda

Nejjednodušší způsob numerického řešení soustavy diferenciálních rovnic je explicitní Eulerova metoda [1, 2]. Jde o jednokrokovou metodu a pro rovnici 3.11 vypadá následovně

$$W_{i,j}^{n+1} = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} Res(W_{i,j}). \quad (3.30)$$

3.6.2 Rungeova-Kuttova metoda

Častěji používané jsou vícekrokové metody typu Runge-Kutty [2], lze je zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} W_{i,j}^{(0)} &= W_{i,j}^n \\ W_{i,j}^{(1)} &= W_{i,j}^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} Res_{i,j}^{(0)} \\ W_{i,j}^{(2)} &= W_{i,j}^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} Res_{i,j}^{(1)} \\ &\vdots \\ W_{i,j}^{n+1} &= W_{i,j}^{(m)} = W_{i,j}^{(0)} - \alpha_m \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} Res_{i,j}^{(m-1)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Obecněji se počítá poslední krok jako kombinace reziduí všech předchozích kroků. Ve tvaru 3.31 však stačí ukládat do paměti pouze předchozí krok. Horní index $Res^{(k)}$ vyjadřuje, že reziduum je vyčísleno z řešení k -tého kroku $W^{(k)}$.

Pro zkrácení výpočetního času je možné metodu upravit tak, že vazké toky a disipativní členy nejsou znovu vyčísleny v každém kroku metody. Takto upravené metody se nazývají hybridní vícekrokové metody [2] a při realizaci rozdělují prostorou diskretizaci na dvě části

$$Res_{i,j} = (Res_c)_{i,j} - (Res_d)_{i,j}. \quad (3.32)$$

První část $(Res_c)_{i,j}$ zahrnuje diskretizaci konvektivních toků (a případně zdrojové členy), Druhá část $(Res_d)_{i,j}$ je složena z vazkých toků a umělé disipace

$$Res_c = \sum F_c \Delta S \quad (3.33)$$

$$Res_d = \sum F_v \Delta S + D(W). \quad (3.34)$$

Schéma RK-5,3 pak můžeme formulovat ve tvaru

$$\begin{aligned} W_{i,j}^{(0)} &= W_{i,j}^n \\ W_{i,j}^{(1)} &= W_{i,j}^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} \left[Res_c^{(0)} - Res_d^{(0)} \right]_{i,j} \\ W_{i,j}^{(2)} &= W_{i,j}^{(0)} - \alpha_2 \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} \left[Res_c^{(1)} - Res_d^{(0)} \right]_{i,j} \\ W_{i,j}^{(3)} &= W_{i,j}^{(0)} - \alpha_3 \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} \left[Res_c^{(2)} - Res_d^{(2,0)} \right]_{i,j} \\ W_{i,j}^{(4)} &= W_{i,j}^{(0)} - \alpha_4 \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} \left[Res_c^{(3)} - Res_d^{(2,0)} \right]_{i,j} \\ W_{i,j}^{(5)} &= W_{i,j}^{(0)} - \alpha_5 \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} \left[Res_c^{(4)} - Res_d^{(4,2)} \right]_{i,j}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

kde

$$Res_d^{(2,0)} = \beta_3 Res_d^{(2)} + (1 - \beta_3) Res_d^{(0)} \quad (3.36)$$

$$Res_d^{(4,2)} = \beta_5 Res_d^{(4)} + (1 - \beta_5) Res_d^{(2,0)}. \quad (3.37)$$

Hodnoty parametrů α_k a β_k jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Krok	α	β
1	0.2500	1.00
2	0.1667	0.00
3	0.3750	0.56
4	0.5000	0.00
5	1.0000	0.44

Tabulka 3.1: Hodnoty koeficientů pro hybridní RK-5,3 metodu [2]

3.7 MacCormackovo schéma

MacCormackovo schéma je dvojkroková iterační metoda, která pracuje způsobem prediktor-korektor. V prvním kroku je spočten prediktor. Druhý krok vychází z hodnot prediktoru a zpřesňuje je - korektor. Nakonec jsou hodnoty prediktoru a korektoru zpřůměrovány a doplněny o umělou disipaci, čímž je získáno hodnot v nové

časové vrstvě. [13, 21, 22, 25]

Prediktor:

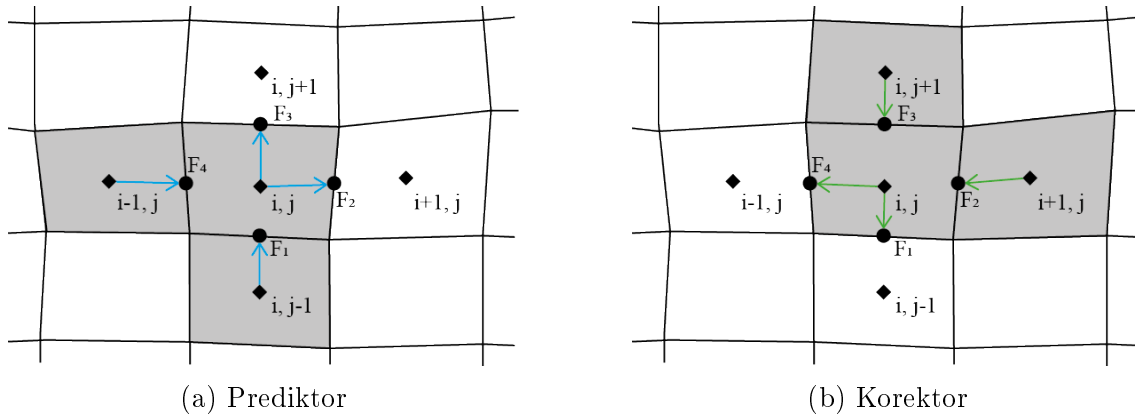
$$W_{i,j}^p = W_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} \sum_{k=1}^4 \left[(F_k^n - R_k^n) \Delta S_k n_{xk} + (G_k^n - S_k^n) \Delta S_k n_{yk} \right] \quad (3.38)$$

Korektor:

$$W_{i,j}^c = W_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\Omega_{i,j}} \sum_{k=1}^4 \left[(F_k^p - R_k^p) \Delta S_k n_{xk} + (G_k^p - S_k^p) \Delta S_k n_{yk} \right] \quad (3.39)$$

Následující časová vrstva:

$$W_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (W_{i,j}^p + W_{i,j}^c) + D(W_{i,j}^n) \quad (3.40)$$

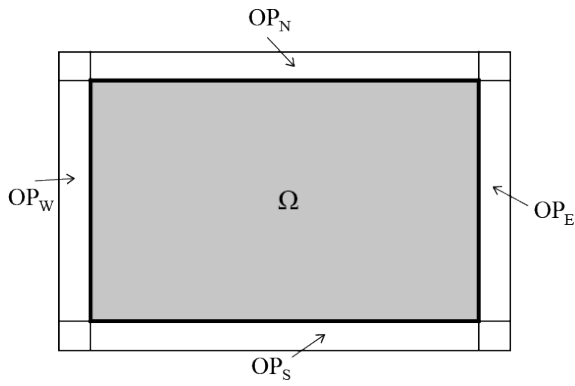


Obrázek 3.4: Výpočetní stencil pro prediktor a korektor MacCormackova schématu

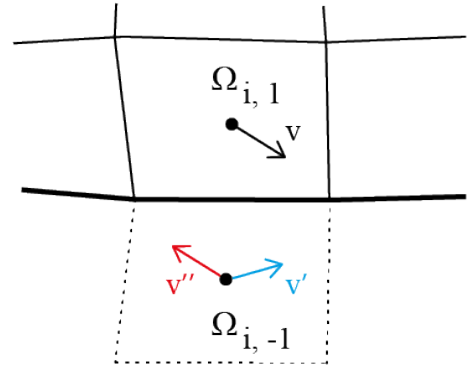
MacCormackovo schéma se od předchozích liší pouze výpočtem konvektivních toků. Jedna z možných variant výpočtu je zobrazena na 3.4. Pro prediktor jsou použity hodnoty toků z *upstream* buněk ($F_1 = F_{i,j-1}$, $F_4 = F_{i-1,j}$) a aktuální středové buňky ($F_2 = F_{i,j}$, $F_3 = F_{i,j}$). Pro korektor potom hodnoty toků z *downtream* buněk ($F_2 = F_{i+1,j}$, $F_3 = F_{i,j+1}$) a aktuální středové buňky ($F_1 = F_{i,j}$, $F_4 = F_{i,j}$). Vazké toky a umělá disipace odpovídají kapitole 3.3.

3.8 Definice okrajových podmínek

Pro numerické řešení proudění metodou konečných objemů je třeba vypořádat se s implementací okrajových podmínek. Pro jednoduchost dalších algoritmů výpočtu jsou realizovány přidáním 2 vrstev buněk, které jsou zahrnuty do výpočtu pouze příspěvkem do numerických toků a disipace. Dle funkce jsou zde použity *vstup*, *výstup* a *stěna*. Okrajová podmínka pro stěnu se bude lišit pro Eulerovy, respektive Navierovy-Stokesovy rovnice. Zatímco pro Eulerovy stačí, aby hmota netekla skrz stěnu (normálová rychlost nulová), u NS rovnic se předpokládá nulová rychlost



(a) Poloha okrajových podmínek



(b) Okrajová podmínka stěny pro nevázké (v'') a vázké (v') proudění

Obrázek 3.5: Okrajové podmínky

na stěně. (Pro přehlednost předpokládejme následující kombinaci OP: vstup vlevo ($i = 1$), výstup vpravo ($i = n$), stěna dole ($j = 1$) a nahoře ($j = m$).)

Vstup: předepisujeme rychlostní profil a extrapolujeme tlak ze sousedních buněk

$$W_{in1} = W_{-2,j} = \begin{pmatrix} 2p_{1,j} - p_{2,j} \\ u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix}, W_{in2} = W_{-1,j} = \begin{pmatrix} 3p_{1,j} - 2p_{2,j} \\ u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Výstup: předepisujeme tlak a extrapolujeme rychlost ze sousedních buněk

$$W_{out1} = W_{n+1,j} = \begin{pmatrix} p_\infty \\ 2u_{n,j} - u_{n-1,j} \\ 2v_{n,j} - v_{n-1,j} \end{pmatrix}, W_{out2} = W_{n+2,j} = \begin{pmatrix} p_\infty \\ 3u_{n,j} - 2u_{n-1,j} \\ 3v_{n,j} - 2v_{n-1,j} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Stěna: extrapolujeme rychlost a kopírujeme tlak ze sousedních buněk

$$W_{w1} = W_{i,-1} = \begin{pmatrix} p_{i,1} \\ u_{i,1} - 2(u_{i,1}n_x + v_{i,1}n_y)n_x \\ v_{i,1} - 2(u_{i,1}n_x + v_{i,1}n_y)n_y \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$W_{w2} = W_{i,-2} = \begin{pmatrix} p_{i,2} \\ u_{i,2} - 2(u_{i,2}n_x + v_{i,2}n_y)n_x \\ v_{i,2} - 2(u_{i,2}n_x + v_{i,2}n_y)n_y \end{pmatrix}$$

respektive pro Navierovy-Stokesovy rovnice

$$W_{w1} = W_{i,-1} = \begin{pmatrix} p_{i,1} \\ -u_{i,1} \\ -v_{i,1} \end{pmatrix}, W_{w2} = W_{i,-2} = \begin{pmatrix} p_{i,2} \\ -u_{i,2} \\ -v_{i,2} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Nejasnost při aplikování okrajových podmínek vznikne v místech, kde se dvě OP setkávají (v rozích na obrázku 3.5a). Hodnoty v těchto buňkách nejsou vyžadovány pro základní výpočet, pouze pro výpočet rychlostních gradientů. Jedním způsobem je průměrování hodnot ze sousedních buněk. Například [2] doporučuje u okrajových podmínek typu *stěna* rozšíření této podmínky až do krajů.

3.9 Časový krok

Stabilita explicitních numerických metod je vždy závislá na velikosti časového kroku. Pro Eulerovy rovnice je pro výpočet maximálního časového kroku použito vztahu uvedeného např. v [2]

$$\Delta t = \min_{i,j} \frac{\Omega_{i,j} CFL}{(r_A \Delta y)_{i,j} + (r_B \Delta x)_{i,j}}, \quad (3.45)$$

kde r_A a r_B jsou spektrální poloměry Jacobiho matic konvektivních toků a CFL je Courantovo-Friedrichsovo-Lewyho číslo, pro které daná numerická metoda splňuje podmínku stability. CFL pro metodu RK-5,3 je $CFL \leq 3,6$. Pro Eulerovu a MacCormackovu metodu je $CFL \leq 1$.

Přidáním vazkých členů do pohybových rovnic (NS rovnice) se výpočet časového kroku ztíží a může mít podobu

$$\Delta t = \min_{i,j} \frac{\Omega_{i,j} CFL}{(r_A \Delta y)_{i,j} + (r_B \Delta x)_{i,j} + \frac{\dot{\gamma}}{Re} \left(\frac{(\Delta x)_{i,j}^2 + (\Delta y)_{i,j}^2}{\Omega_{i,j}} \right)}. \quad (3.46)$$

3.10 Kritérium konvergence

Pro sledování konvergence je zavedena norma residua v následující formě

$$\|Res(W_{i,j})\| = \frac{1}{n m} \sqrt{\sum_{i,j} \frac{(W_{i,j}^{n+1} - W_{i,j}^n)^2}{\Delta t}}, \quad (3.47)$$

kde n, m jsou počty buněk výpočetní sítě ve směru x resp. y . Známkou konvergence je snížení velikosti residua o několik řádů. Numerický výpočet probíhá do splnění podmínky konvergence

$$\frac{\|Res(W_{i,j})\|_n}{\|Res(W_{i,j})\|_5} \leq \epsilon, \quad (3.48)$$

$$\|Res(W_{i,j})\|_5 = \max_{1 \leq n \leq 5} \|Res(W_{i,j})\|_n,$$

kde reziduum v konkrétní iteraci je dělené maximálním reziduem v prvních pěti iteracích a ϵ může být například vektor $\epsilon = (10^{-10}, 10^{-10}, 10^{-10})$.

Kapitola 4

Numerické simulace

V této kapitole jsou popsány samotné simulace a jejich výsledky.

4.1 Rovný kanál

Jako první testovací případ byla provedena simulace proudění Newtonské tekutiny rovným kanálem mezi dvěma paralelními deskami. Délka kanálu je rovna desetinásobku vzdálenosti desek.

4.1.1 Newtonská tekutina

Tato úloha je snadno exaktně řešitelná, budeme-li uvažovat rychlostní profil nezávislý na souřadnici x

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

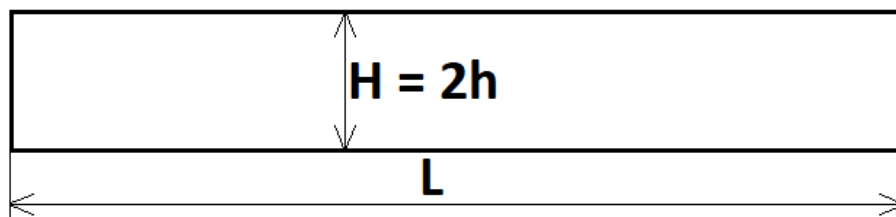
Pro nulové okrajové podmínky řešení nalezneme ve tvaru

$$u = \frac{\Delta p}{2\mu L}(y^2 - yH), \tag{4.2}$$

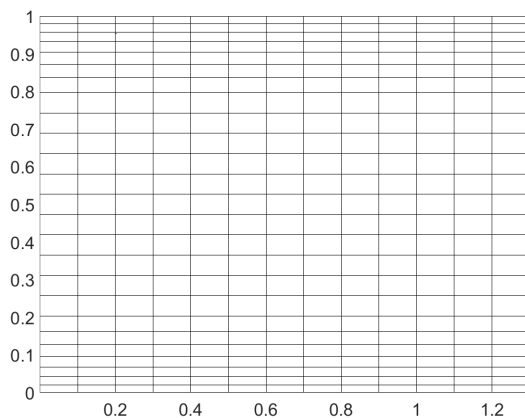
kde H a L jsou rozměry kanálu a Δp tlakový gradient, který dopočítáme z objemového toku

$$\dot{V} = -\frac{\Delta p H^3}{12\mu L}. \tag{4.3}$$

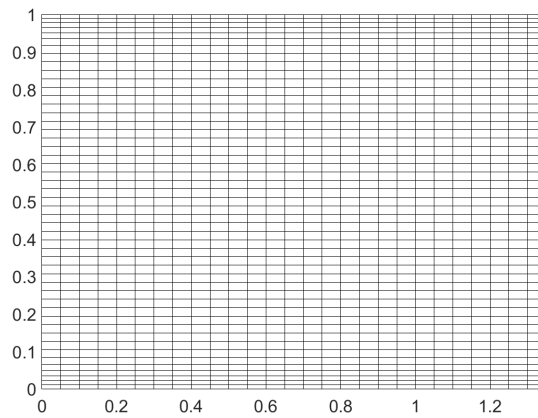
Vlastní simulace byla provedena nejprve na uniformní síti 100x20 buněk. Okrajová podmínka na vstupu do kanálu (vlevo) je zadána jako konstantní rychlostní profil $v_\infty = (0.05, 0) \text{ms}^{-1}$, tím je určen objemový tok, který musí být pro každý průřez kanálu konstantní.



(a) Geometrie



(b) 100x25 prvků



(c) 200x49 prvků

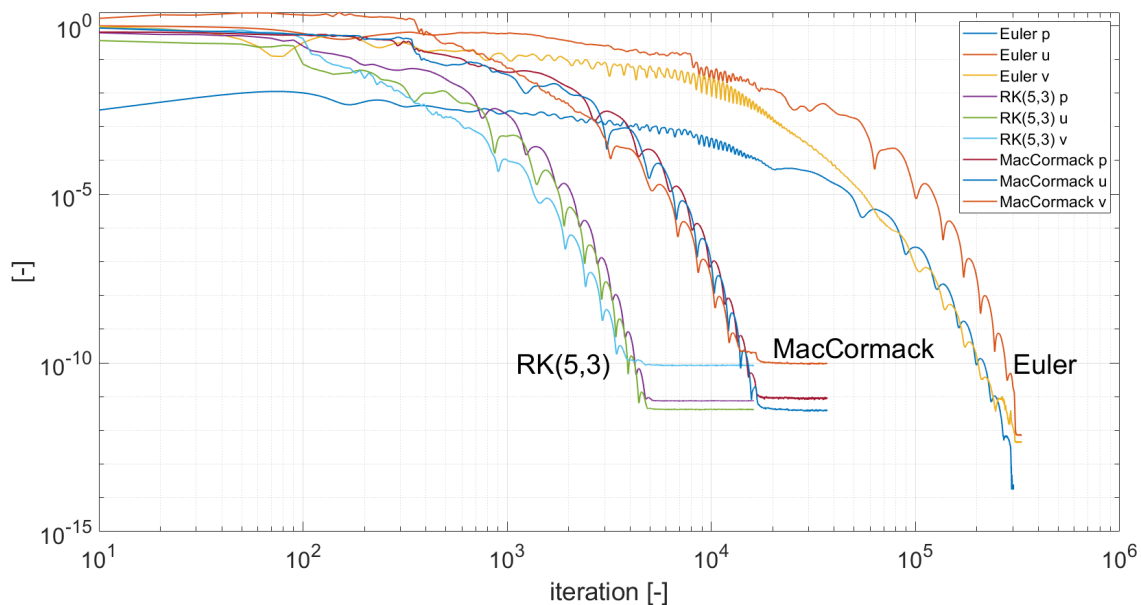
Obrázek 4.1: Geometrie a detail zjemněných sítí pro rovný kanál

Při nastavení kritéria konvergence $\epsilon = 10^{-10}$ se čas ukončení výpočtu značně liší zejména při použití Eulerovy metody.

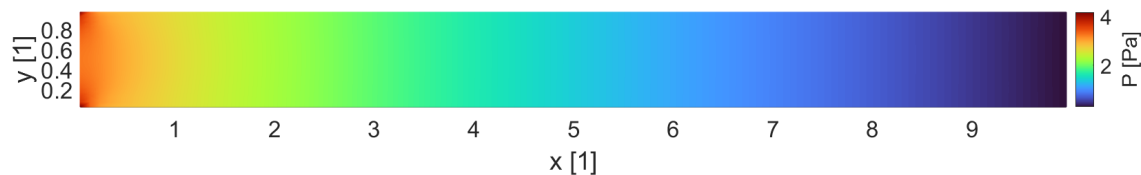
Metoda	čas [s]	iterace	iterace / s
Euler	7734.6	275 410	35,6
RK(5,3)	417.6	4 220	10,1
MacCormack	617.9	18 900	30,6

Tabulka 4.1: Délka výpočtu pro dosažení konvergence

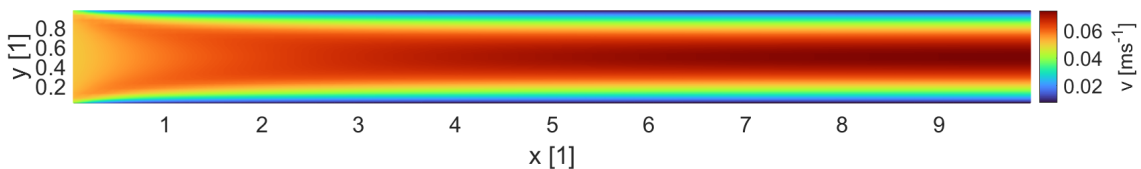
V grafu 4.4 a 4.5 je vidět, že ačkoliv je na vstupu zadán konstantní rychlostní profil, dojde k vyvinutí parabolického tvaru, který odpovídá analytickému řešení proudění mezi paralelními deskami.



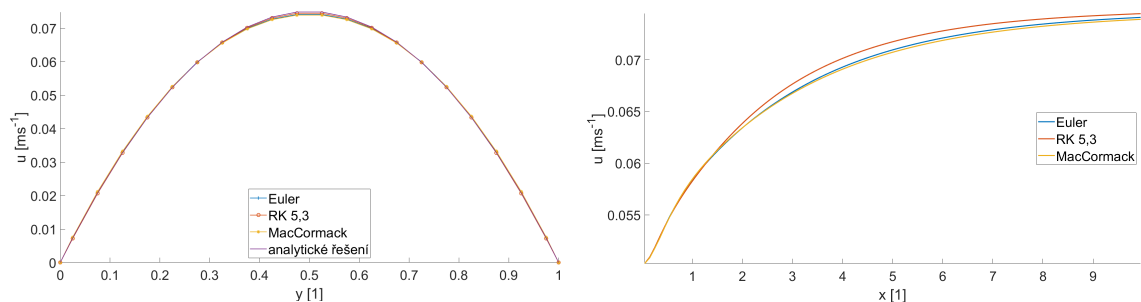
Obrázek 4.2: Průběh rezidua na síti 100x20



Obrázek 4.3: Průběh tlaku v přímém kanále (Newtonská tekutina)



Obrázek 4.4: Průběh rychlosti v přímém kanále (Newtonská tekutina)



(a) Rychlostní profil na výstupu

(b) Průběh rychlosti v ose kanálu

Obrázek 4.5: Srovnání rychlostních profilů na výstupu a v ose kanálu

4.1.2 Nenewtonská tekutina

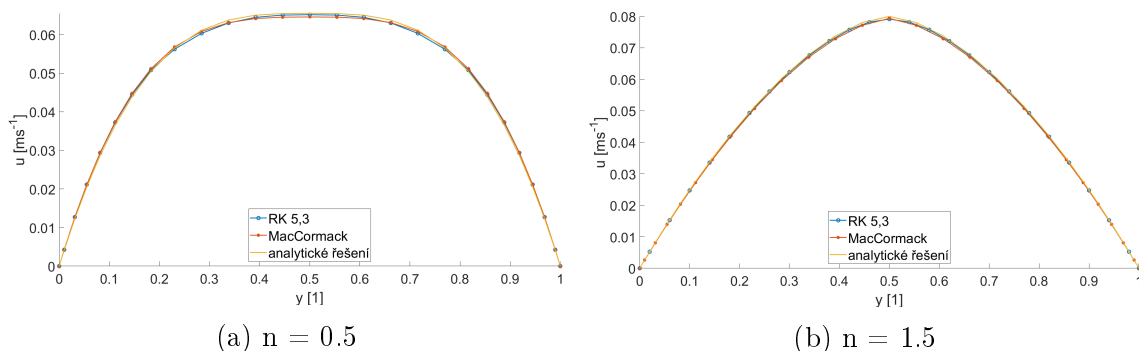
Při řešení úlohy proudění nenewtonské tekutiny vyjdeme opět z rovnic 4.1 a místo konstantní dynamické viskozity použijeme mocninný model 1.9.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) = 0. \quad (4.4)$$

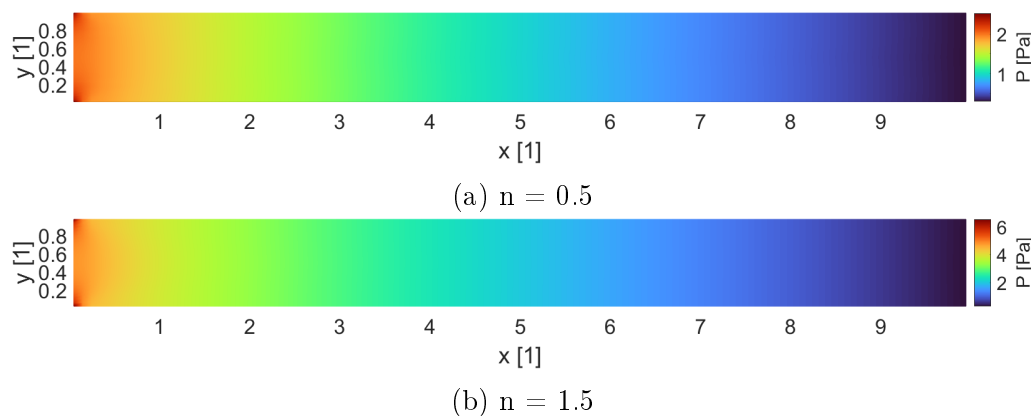
Integrací a dosazením nulových okrajových podmínek získáme předpis pro rychlostní profil a objemový tok v následujícím tvaru (výpočet v příloze A)

$$u = \left(\frac{\Delta p h}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{nh}{n+1} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right), \quad (4.5a)$$

$$\dot{V} = \left(\frac{\Delta p h}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{2nh^2}{2n+1}. \quad (4.5b)$$



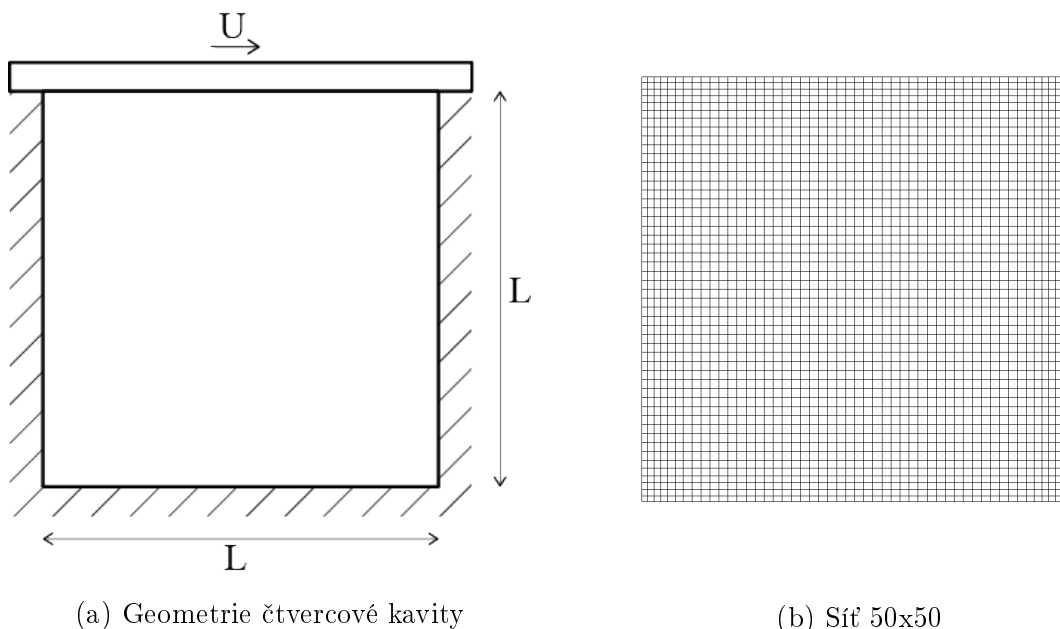
Obrázek 4.6: Rychlostní profil na výstupu při použití mocninného modelu viskozity



Obrázek 4.7: Průběh tlaku v přímém kanále (Mocninný model)

4.2 Čtvercová kavita

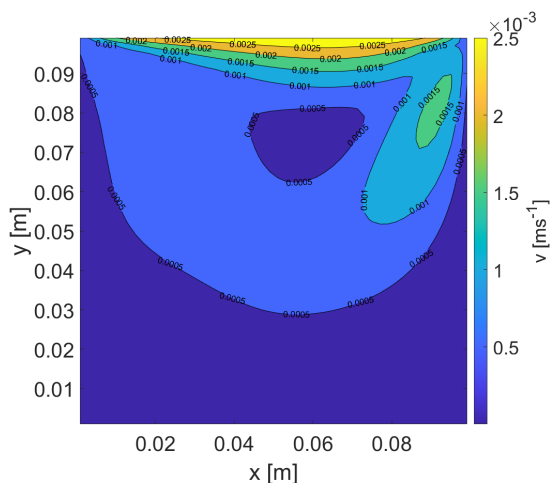
Čtvercová kavita je další běžnou úlohou používanou pro otestování numerických metod. Oblast, na které je problém definovaný, ohraničují tři pevné stěny a čtvrtá pohyblivá, která vnáší do tekutiny smykové napětí. Úloha je řešena pro newtonskou tekutinu a dvě různá Reynoldsova čísla 100 a 1000.



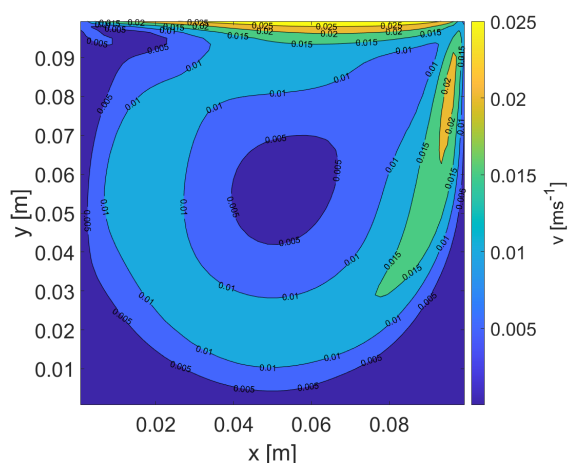
Obrázek 4.8: Geometrie a výpočetní síť pro čtvercovou kavitu

Úloha je řešena na oblasti o rozměrech $L = 0,1m$ a jako okrajová podmínka na horní stěně je dán vektor rychlosti $v = (U, 0)$, kde $U = \frac{1}{300}m s^{-1}$ pro $Re = 100$, respektive $U = \frac{1}{30}m s^{-1}$ pro $Re = 1000$. Protože se zde nevyskytují okrajové podmínky jiného typu než stěna, je třeba zadat tlak. Ten je pevně zadán v jedné rohové buňce.

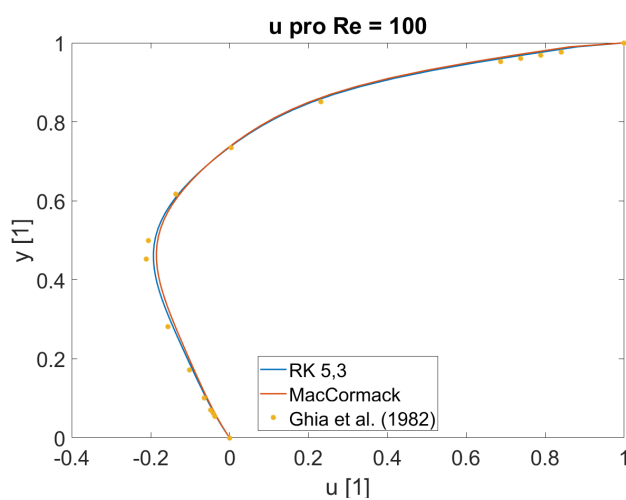
Srovnání rychlostních profilů v osách výpočetní oblasti ukazuje, že výsledky obou použitých metod se dobře shodují se známými výsledky publikovanými v [9].



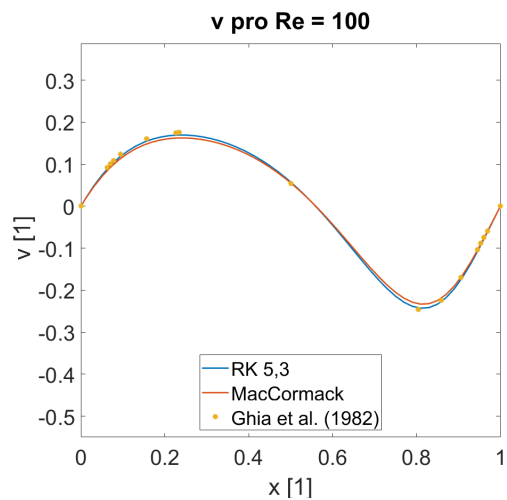
(a) Velikost rychlosti ($Re = 100$)



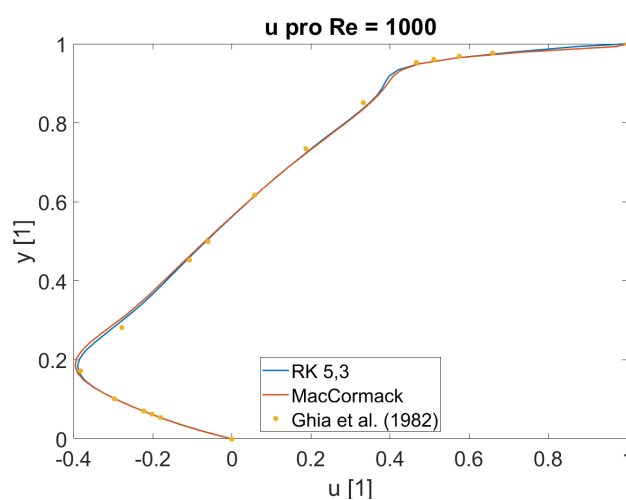
(b) Velikost rychlosti ($Re = 1000$)



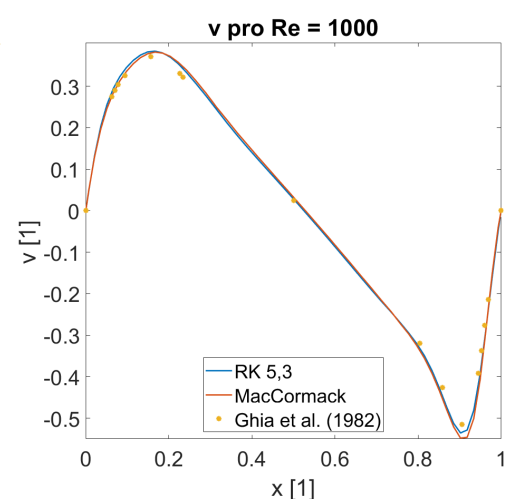
(c) Průběh u ($Re = 100$)



(d) Průběh v ($Re = 100$)



(e) Průběh u ($Re = 1000$)



(f) Průběh v ($Re = 1000$)

Obrázek 4.9: Rychlostní pole a rychlostní profily v řezech středem kavity

4.3 Symetrická stenóza

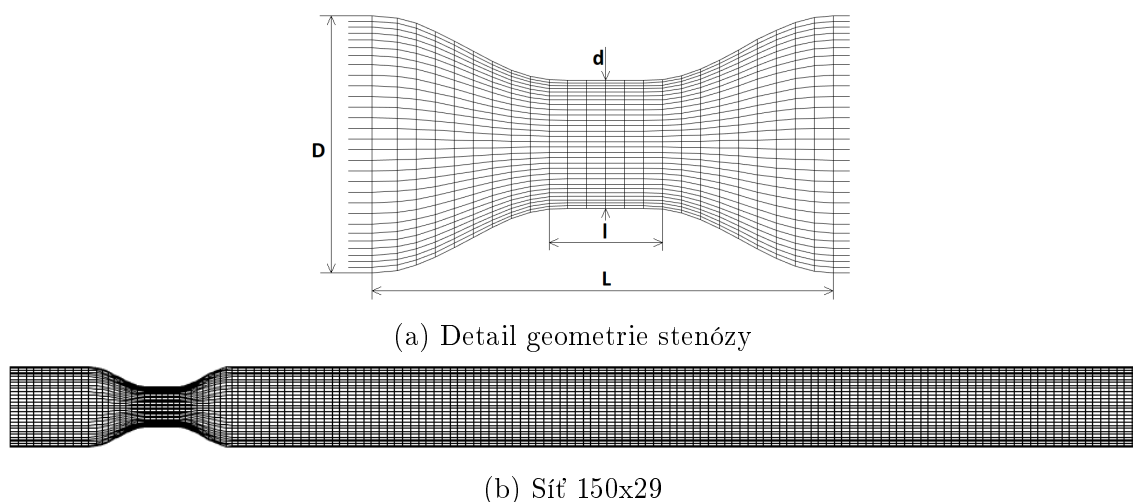
Proudění mezi dvěma paralelními deskami s zúžením napodobuje v minulosti [30] řešené proudění trubicí se symetrickou stenózou. Jde o případ, který se v srdečně-cévním oběhu často vyskytuje. Na obrázku 4.10a je detail základní výpočetní sítě v místě zúžení. Pro tuto úlohu jsou použité rozměry

$$D = 14 \text{ mm}, \quad d = \frac{1}{2}D, \quad L = \frac{5}{6}D, \quad l = \frac{1}{3}D. \quad (4.6)$$

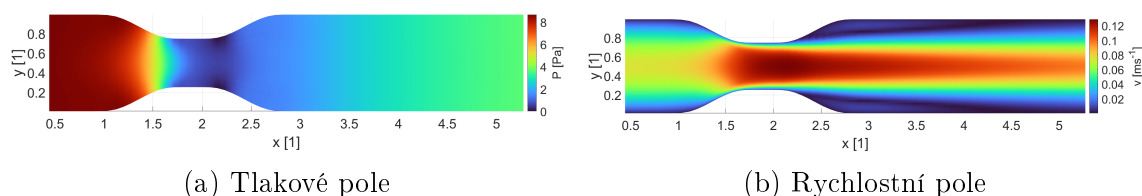
Okrajová podmínka na vstupu je volena ve tvaru parabolického profilu 4.2. Na výstupu opět konstantní tlak a extrapolace rychlosti.

4.3.1 Newtonský model

Nejprve je provedena simulace s newtonským modelem tekutiny. Použita dynamická viskozita shodná s mezní viskozitou cross modelu pro nekonečnou smykovou rychlost $\mu = \eta_{\infty}^{cross} = 0.0047 \text{ Pa s}$. Úloha je řešena metodou RK 5,3 i MacCormackovou, srovnání rychlostních profilů s řešením získaným pomocí Ansys Fluent (metoda SIMPLE) je na obr. 4.13.

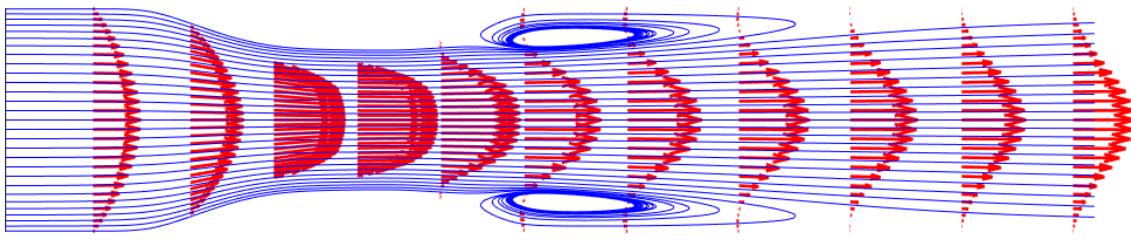


Obrázek 4.10: Geometrie a výpočetní síť stenózy

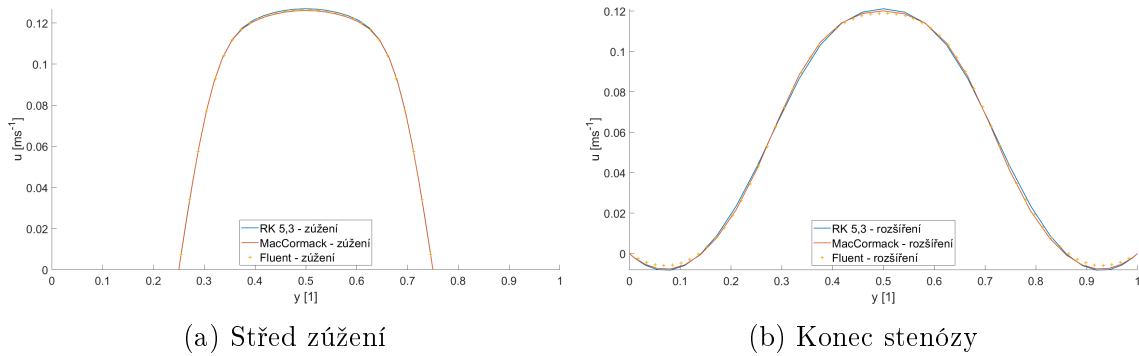


Obrázek 4.11: Tlakové a rychlostní pole v detailu zúžení

Z grafu 4.13 je patrné, že obě použité metody dávají rychlostní profily shodné s výsledky předchozí práce [30].



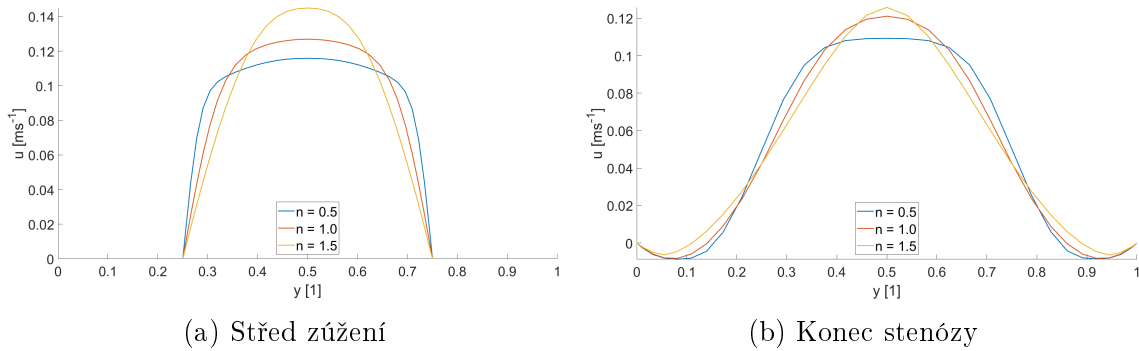
Obrázek 4.12: Rychlostní pole



Obrázek 4.13: Porovnání rychlostních profilů ve středu a za koncem stenózy

4.3.2 Mocninný model

Podobně jako v úloze 4.1.2 byla provedena simulace proudění s využitím mocninného modelu viskozity pro dvě různé hodnoty indexu toku $n = 0,5$ a $n = 1,5$.

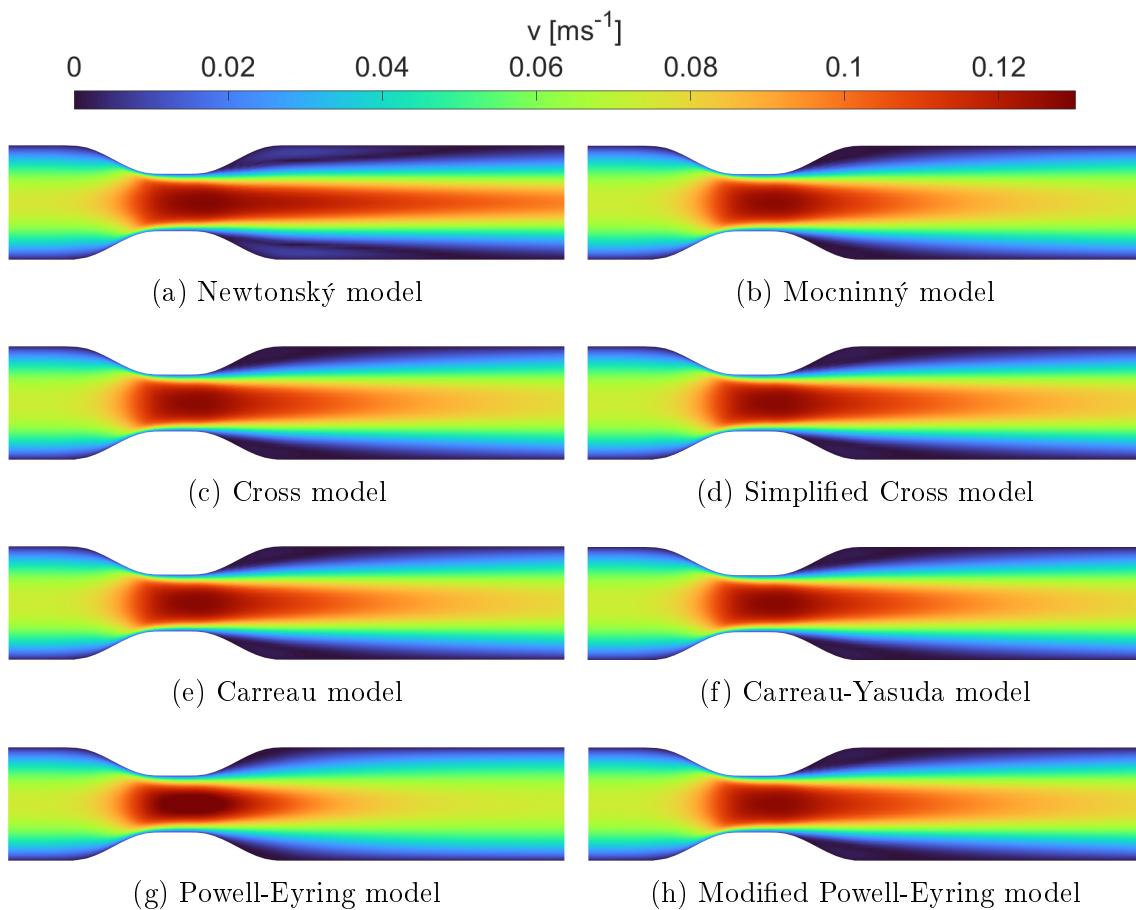


Obrázek 4.14: Rychlostní profily ve středu a za koncem stenózy

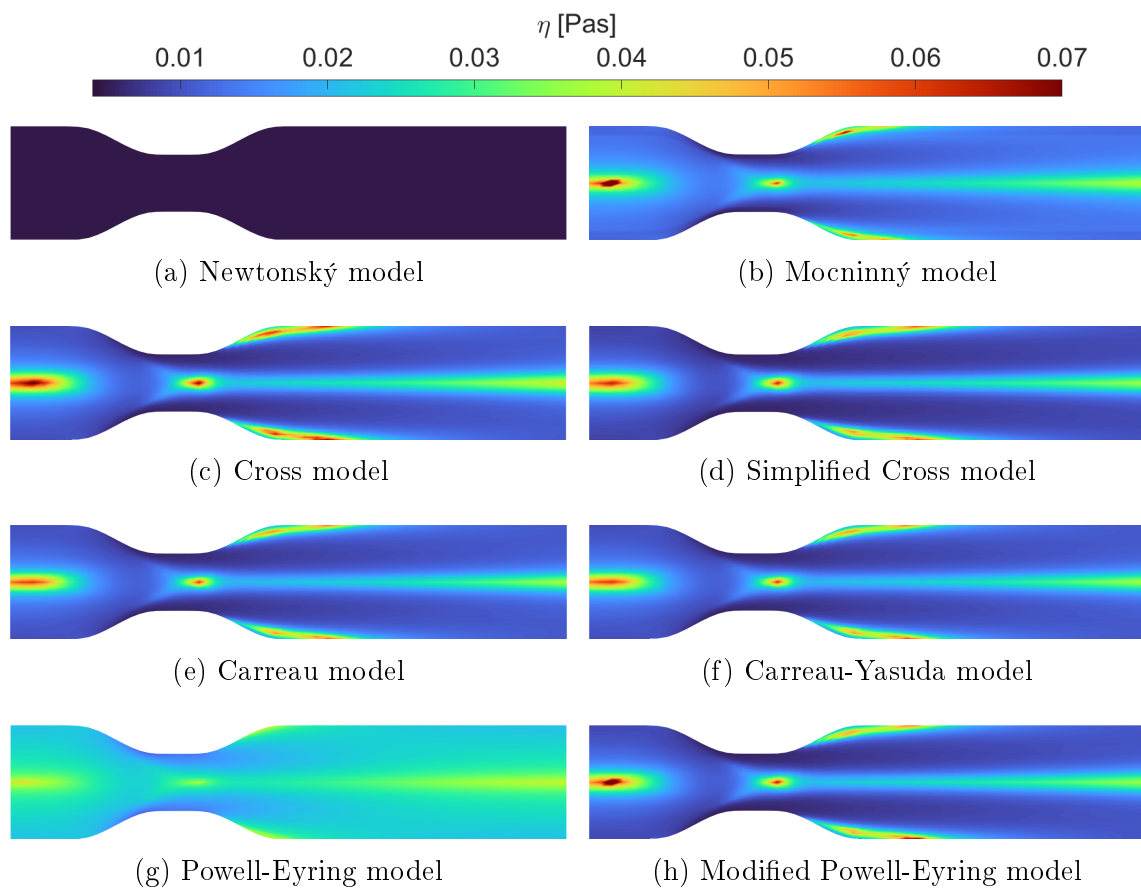
Srovnání rychlostních polí při použití různých indexů toku n je uvedeno v příloze B.1.

4.3.3 Modely krve

Pro modelování proudění krve stenózou je použito modelů viskozity již zmíněných v kapitole 1.1. Pro urychlení výpočtu je jako počáteční podmínka zvolen výsledek simulace proudění s newtonským modelem. Porovnání rychlostí a viskozity je zobrazeno na obr. 4.15. Simulace byly provedeny pro $Re = 200$.



Obrázek 4.15: Rozložení rychlosti v stenóze pro různé modely viskozity

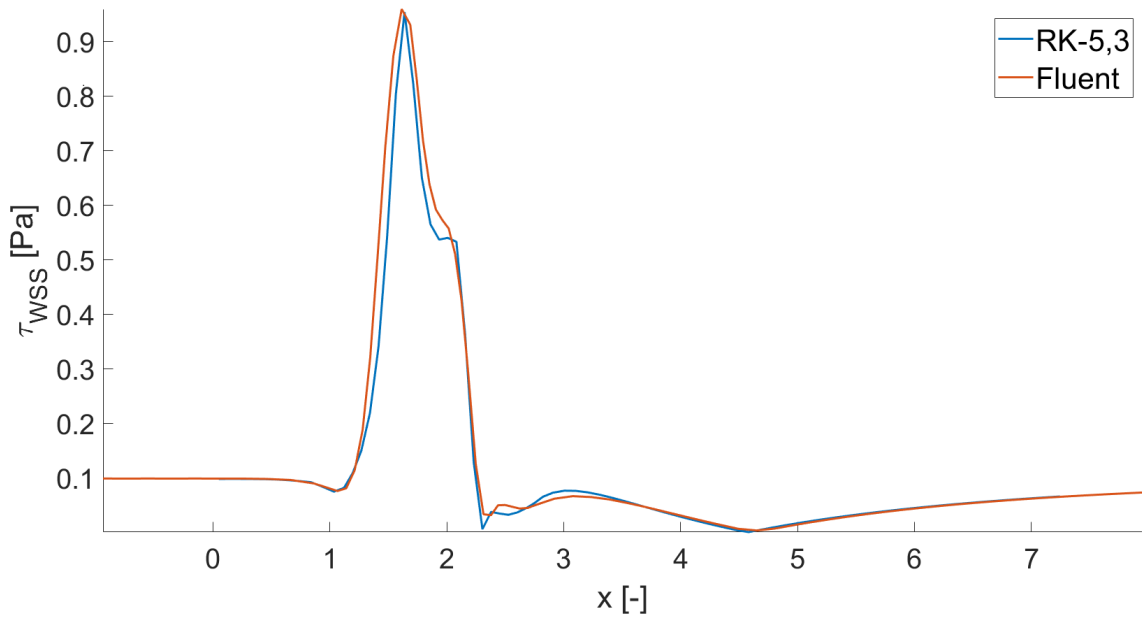


Obrázek 4.16: Rozložení viskozity v stenóze pro různé modely viskozity

Z grafického zobrazení je patrné, že Powell-Eyringův model pro tuto úlohu dává nižší hodnoty viskozity oproti ostatním modelům. To je zřejmé už z grafu 1.2, neboť se pro tuto úlohu nacházíme v oblasti smykových rychlostí $\dot{\gamma} \in (10^{-2}, 10^{-1})$, pro které daný model dosahuje nižších viskozit. Pro řešení úlohy v této oblasti je tedy možné bez rozdílu použít kterýkoliv z ostatních modelů.

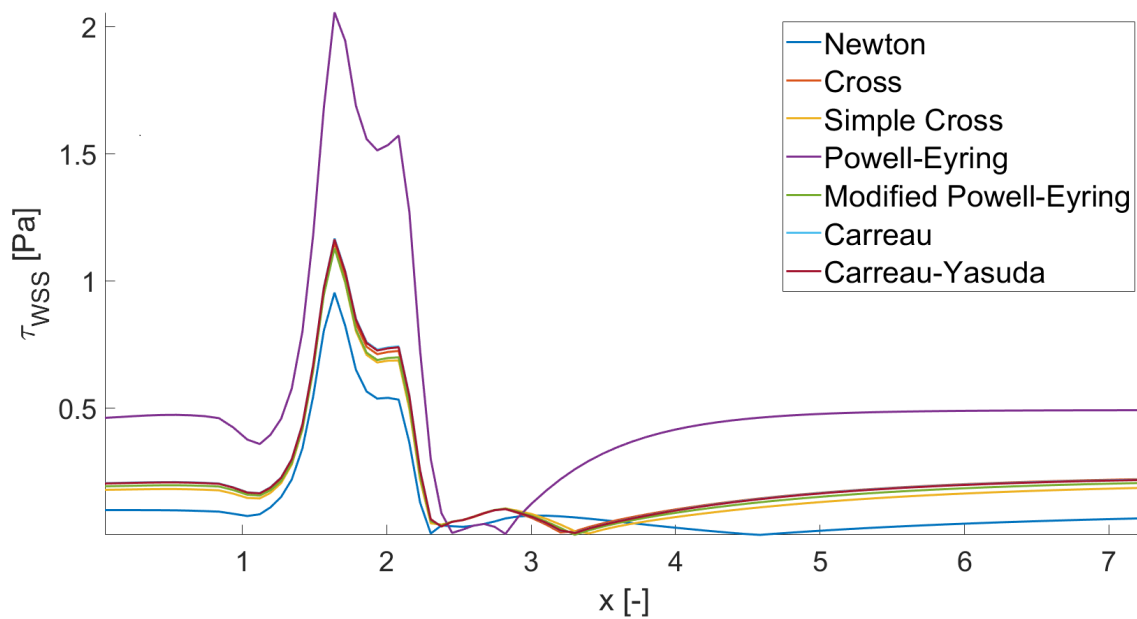
4.3.4 Smykové napětí na stěně

Pro některé aplikace je při vyhodnocování numerického výpočtu důležité smykové napětí na stěně. Např. u proudění krve má jeho hodnota vliv na pevnost cév [18].



Obrázek 4.17: Průběh smykového napětí na stěně stenózy pro newtonskou tekutinu

Na obr. 4.17 je porovnání napětí na stěně získaného z Fluentu a vlastním programem pro model newtonské tekutiny. Z tohoto je možné usuzovat, že výpočet napětí je správný a odchylky těchto dvou řešení jsou způsobeny pouze rozdílem v použité výpočetní síti (zatímco pro Fluent je použita geometrie přesně kopírující experimentální skleněnou trubici z [30], vlastní řešič používá geometrii definovanou funkcí sinus).

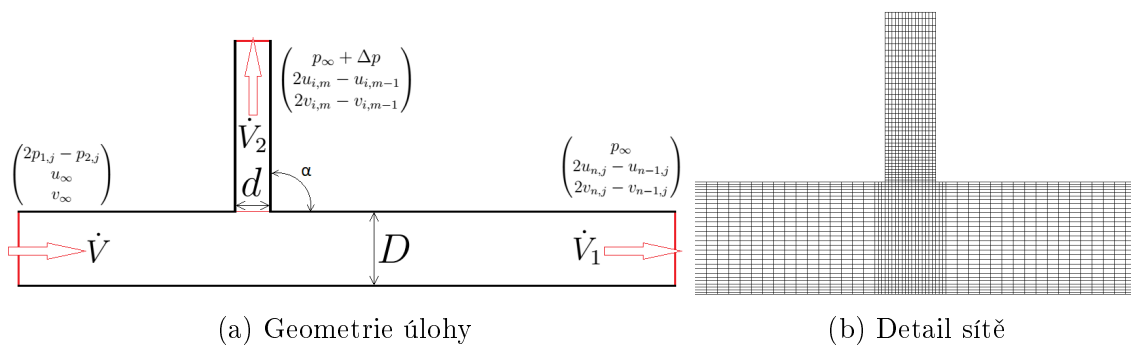


Obrázek 4.18: Srovnání smykového napětí na stěně pro neneutonskou tekutinu

Dle srovnání průběhu smykového napětí na stěně (obr. 4.18) se znovu potvrzuje shoda většiny použitých modelů viskozity. Vymyká se opět Powell-Eyringův model, který v blízkosti stěny predikuje vyšší hodnoty viskozity než ostatní modely (přestože z obr. 4.16 je zřejmé, že průměrná hodnota viskozity je oproti ostatním nižší). Zajímavým zjištěním je nižší hodnota napětí pro newtonský model. Tento výsledek naznačuje, že volba referenční viskozity pro newtonský model jako η_{∞} není vhodná a zřejmě by pro každou úlohu měla být určena individuálně.

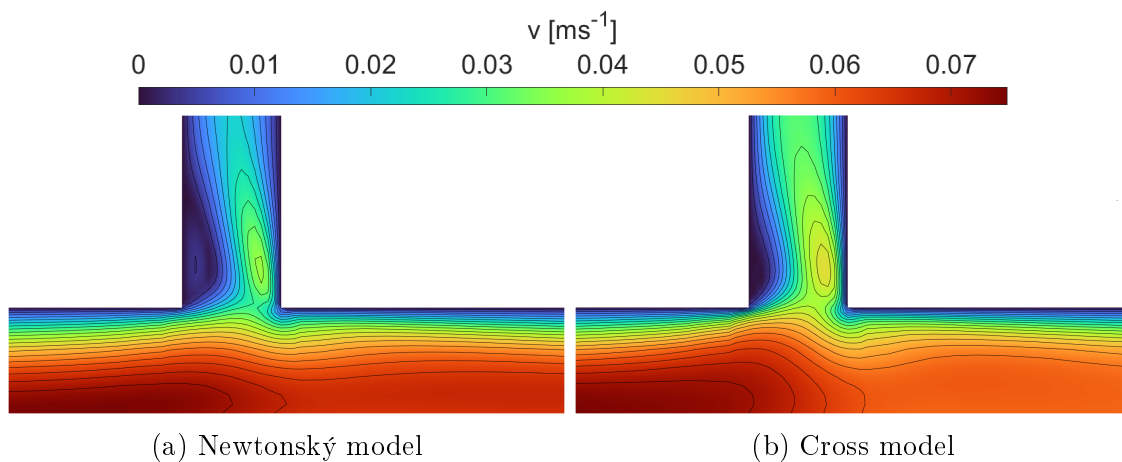
4.4 Kolmé větvení kanálu

Další řešenou úlohou je rozvětvení kanálu. Jako první případ je řešeno kolmé napojení sekundárního kanálu ($\alpha = 90^\circ$), který má šířku $d = 0.45D$. Pro takto zadanou úlohu je třeba definovat další okrajovou podmínku na výstupu sekundárního kanálu. Rychlost je extrapolována obdobně jako u předchozích úloh, ale hodnota tlaku může být různá a v praxi bude záviset i na délce a tvaru kanálu mimo řešenou oblast. Pro jednoduchost je užito rozdílu v tlakových OP $\Delta p = p_{out2} - p_{out1}$.

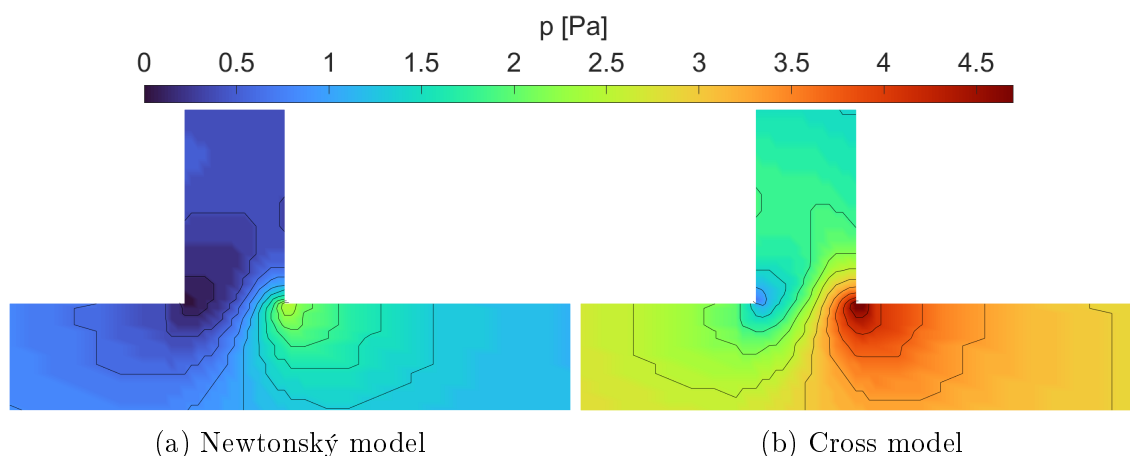


Obrázek 4.19: Geometrie a výpočetní síť úlohy kolmého rozvětvení

Na obr. 4.20 a 4.21 je detail rychlostního, respektive tlakového pole při použití newtonského modelu a cross modelu při $Re = 200$ a $\Delta p = 0$.



Obrázek 4.20: Rozložení rychlosti v kolmém rozvětvení kanálu



Obrázek 4.21: Rozložení tlaku v kolmém rozvětvení kanálu

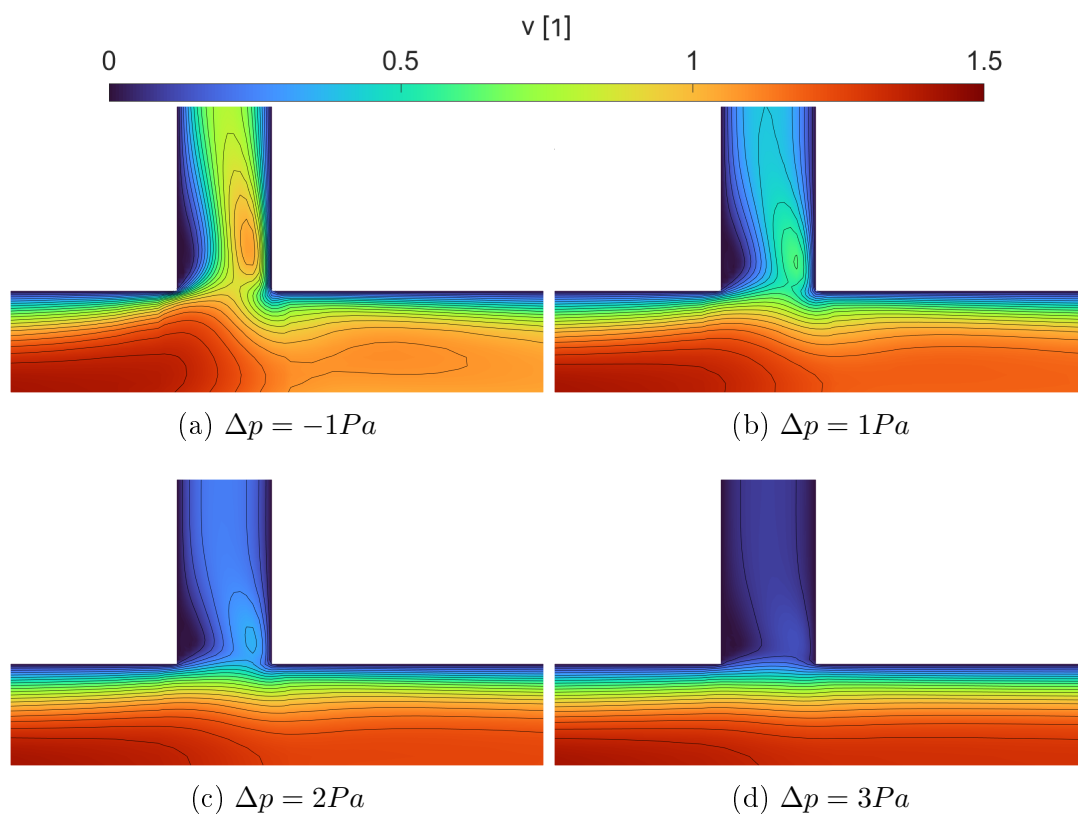
Následně byla provedena série simulací s různým tlakem na výstupu a dále s různou rychlostí na vstupu. Závislosti objemového toku sekundárním kanálem na tlakovém rozdílu Δp , respektive na Reynoldsově čísle, jsou uvedeny v tabulce 4.2 a 4.3. Odpovídající rychlostní pole je v příloze B.2.

Δp	-1	0	0.4	1	2	3
\dot{V}_2/\dot{V}	0.251	0.194	0.17	0.135	0.078	0.029

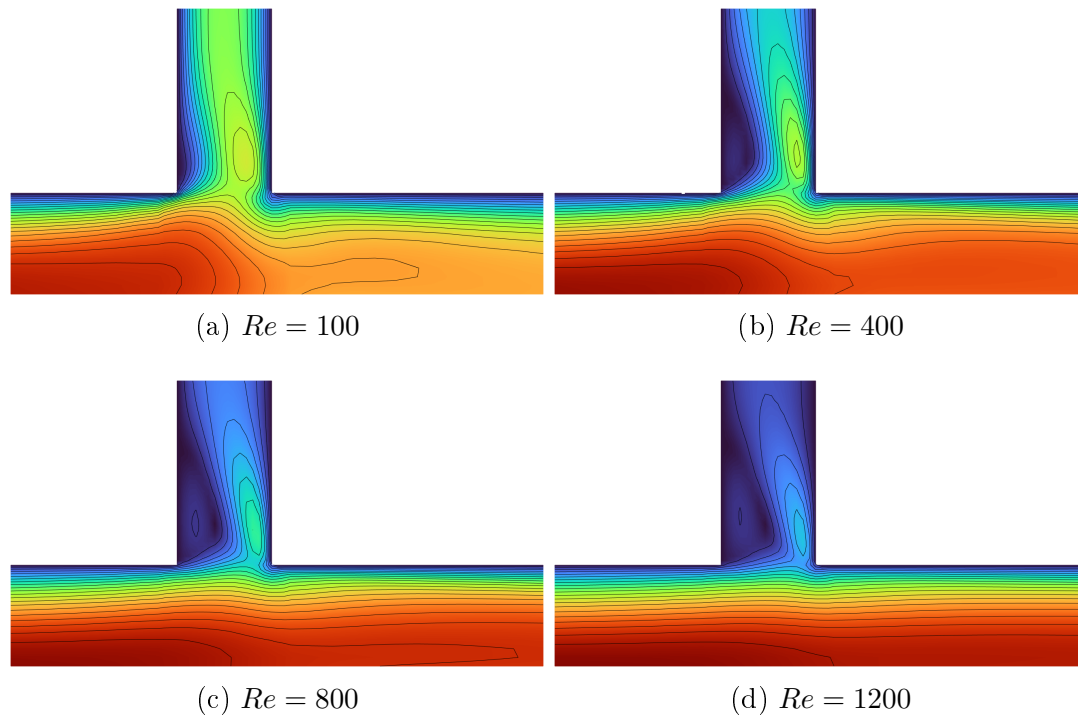
Tabulka 4.2: Průtok sekundárním kanálem v závislosti na Δp (Cross, $Re = 200$)

Re	100	200	400	800	1200
\dot{V}_2/\dot{V}	0.23	0.194	0.138	0.076	0.064

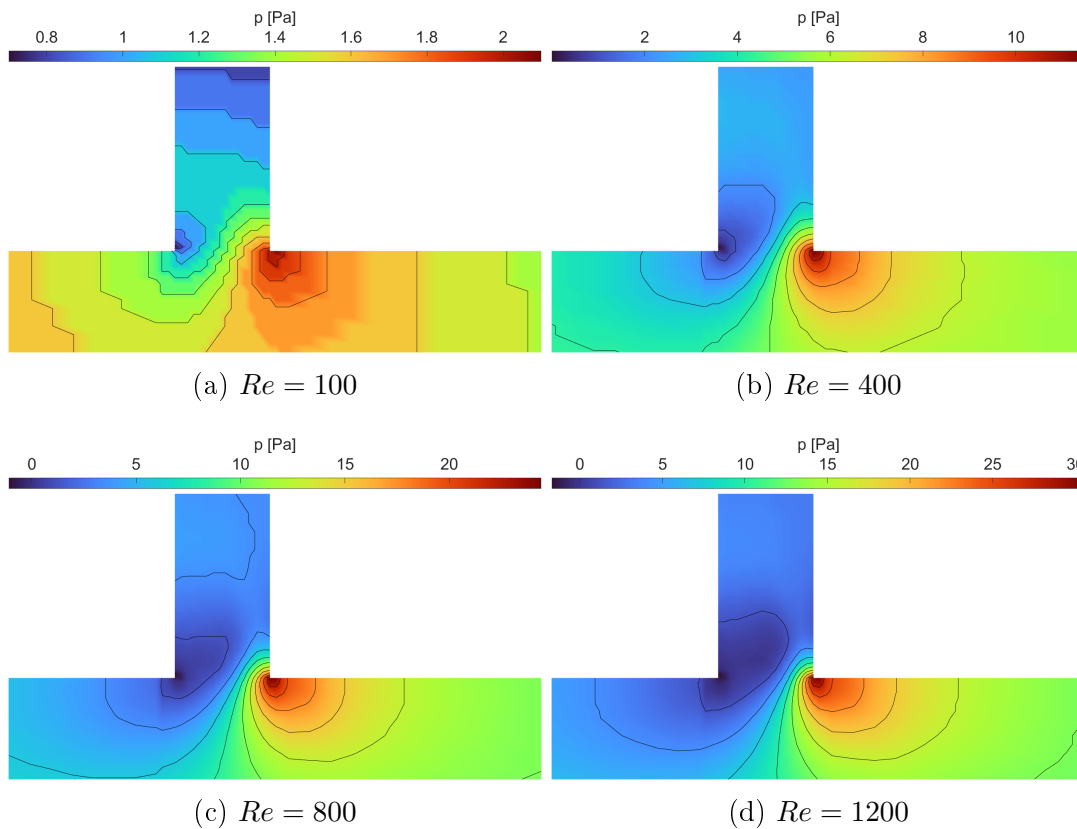
Tabulka 4.3: Průtok sekundárním kanálem v závislosti na Re (Cross, $\Delta p = 0$)



Obrázek 4.22: Rozložení bezrozměrné rychlosti v kolmém rozvětvení kanálu (Cross, $Re = 200$)



Obrázek 4.23: Rozložení bezrozměrné rychlosti v kolmém rozvětvení kanálu (Cross, $\Delta p = 0$)

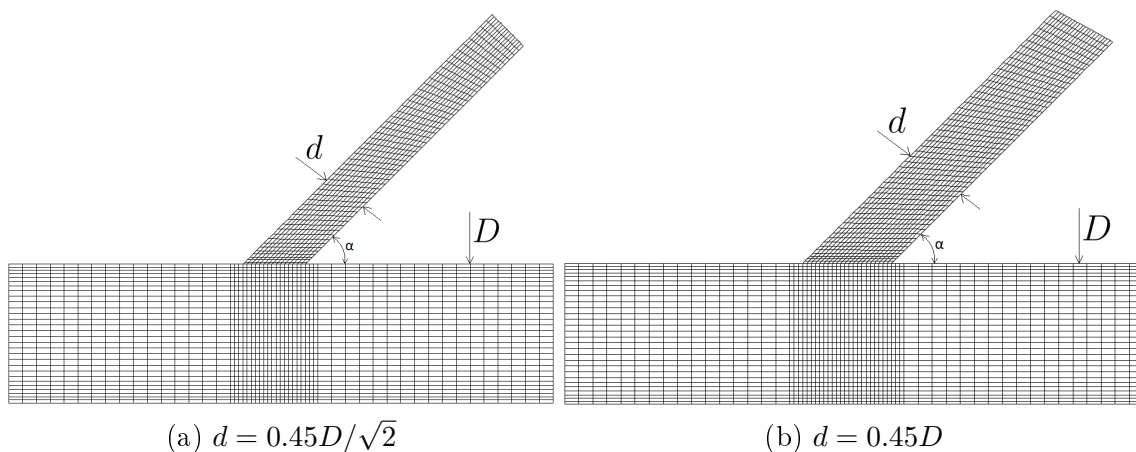


Obrázek 4.24: Rozložení tlaku v kolmém rozvětvení kanálu (Cross, $\Delta p = 0$)

Z výsledků zobrazených v tabulkách 4.2 a 4.3, respektive obrázcích 4.22, 4.23 a 4.24 je patrné, že se zvyšujícím se průtokem \dot{V} se snižuje relativní průtok sekundárním kanálem a větší část tekutiny pokračuje dál hlavním kanálem. Podobně průtok ovlivňuje výstupní okrajová podmínka, kdy pro vyšší rozdíl tlaku Δp bychom mohli pozorovat obrácený směr proudění v sekundárním kanálu.

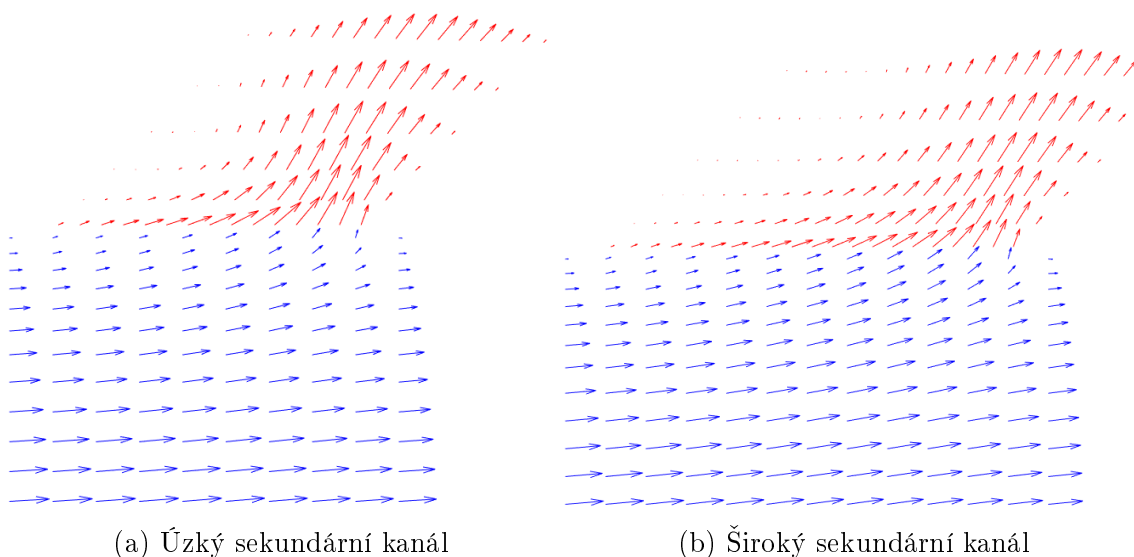
4.5 Ostré větvení kanálu

Rozdíl mezi touto a předchozí úlohou je pouze ve velikosti úhlu α mezi větvemi kanálu. V tomto případě budeme uvažovat ostrý úhel $\alpha = 45^\circ$. Pro srovnání s předchozí úlohou jsou použity dvě geometrie s rozdílným rozměrem sekundárního kanálu. Jedna pro $d = 0.45D/\sqrt{2}$ a druhá pro $d = 0.45D$.



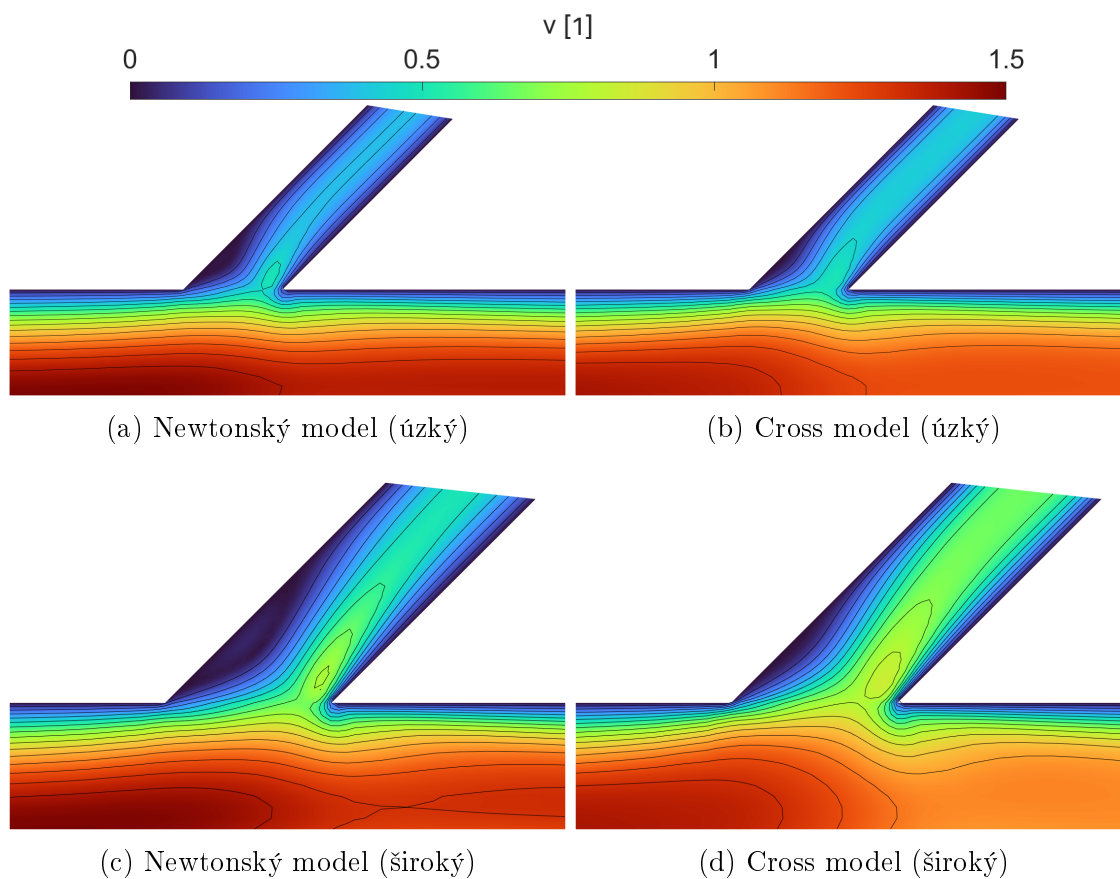
Obrázek 4.25: Detail výpočetní sítě ostrého větvení kanálu

Nejprve byla provedena simulace srovnávající newtonský model s nenewtonským cross modelem pro obě varianty geometrie ($Re = 200, \Delta p = 0$). Na obr. 4.26 jsou zobrazeny vektory rychlosti v detailu napojení kanálu pro obě varianty šířky kanálu (škálování vektorů není pro oba bloky stejné).



Obrázek 4.26: Detail rychlostního pole ostrého větvení (Newtonský model)

V tabulce relativních průtoků sekundárním kanálem (4.4) si lze povšimnout, že v širokém kanále se oproti úzkému zvýšil průtok přibližně na dvojnásobek.



Obrázek 4.27: Rozložení bezrozměrné rychlosti v ostrém rozvětvení kanálu

model	Newtonský	Cross
\dot{V}_2/\dot{V}	0.082	0.100

(a) Úzký kanál

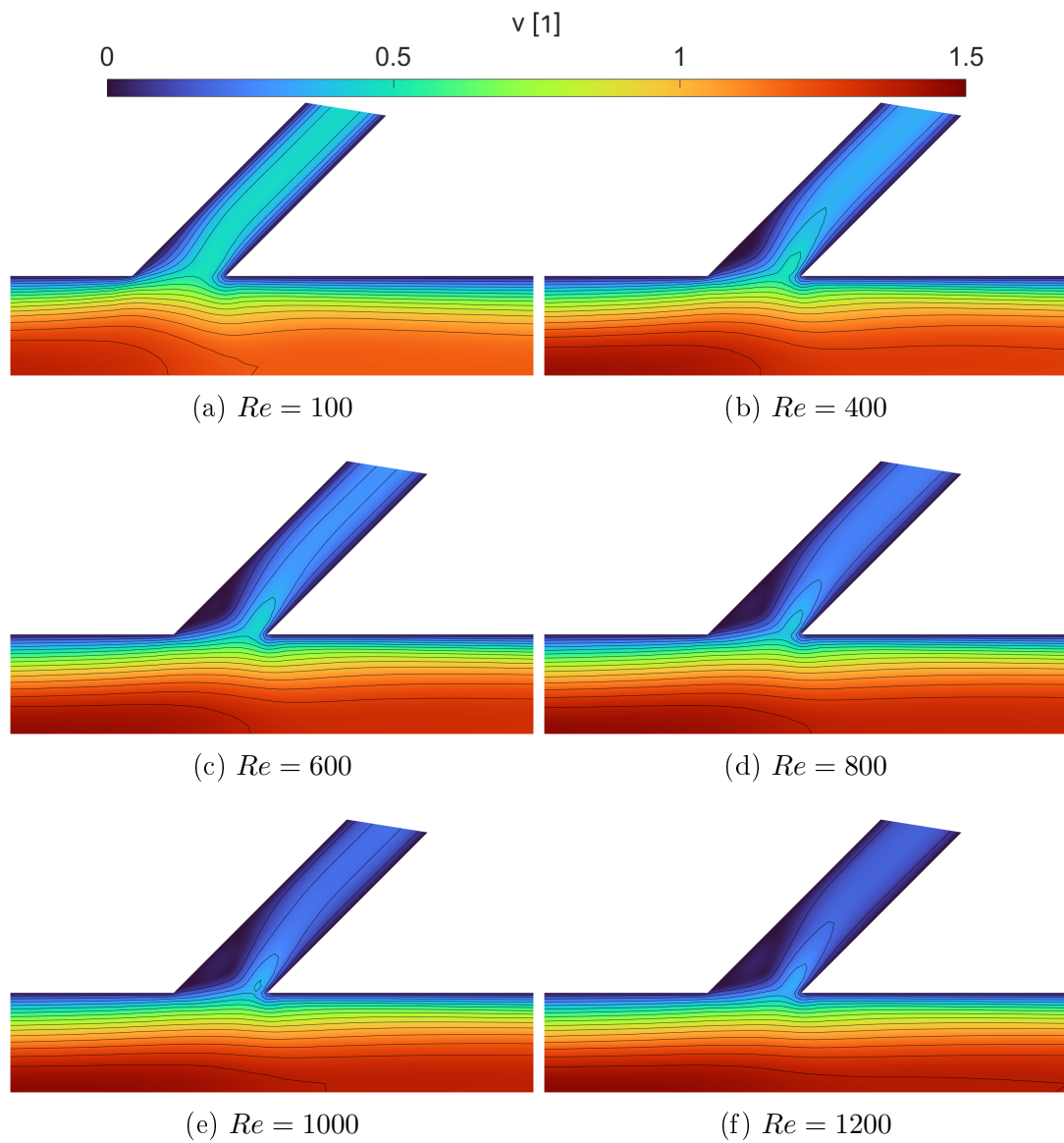
model	Newtonský	Cross
\dot{V}_2/\dot{V}	0.148	0.216

(b) Široký kanál

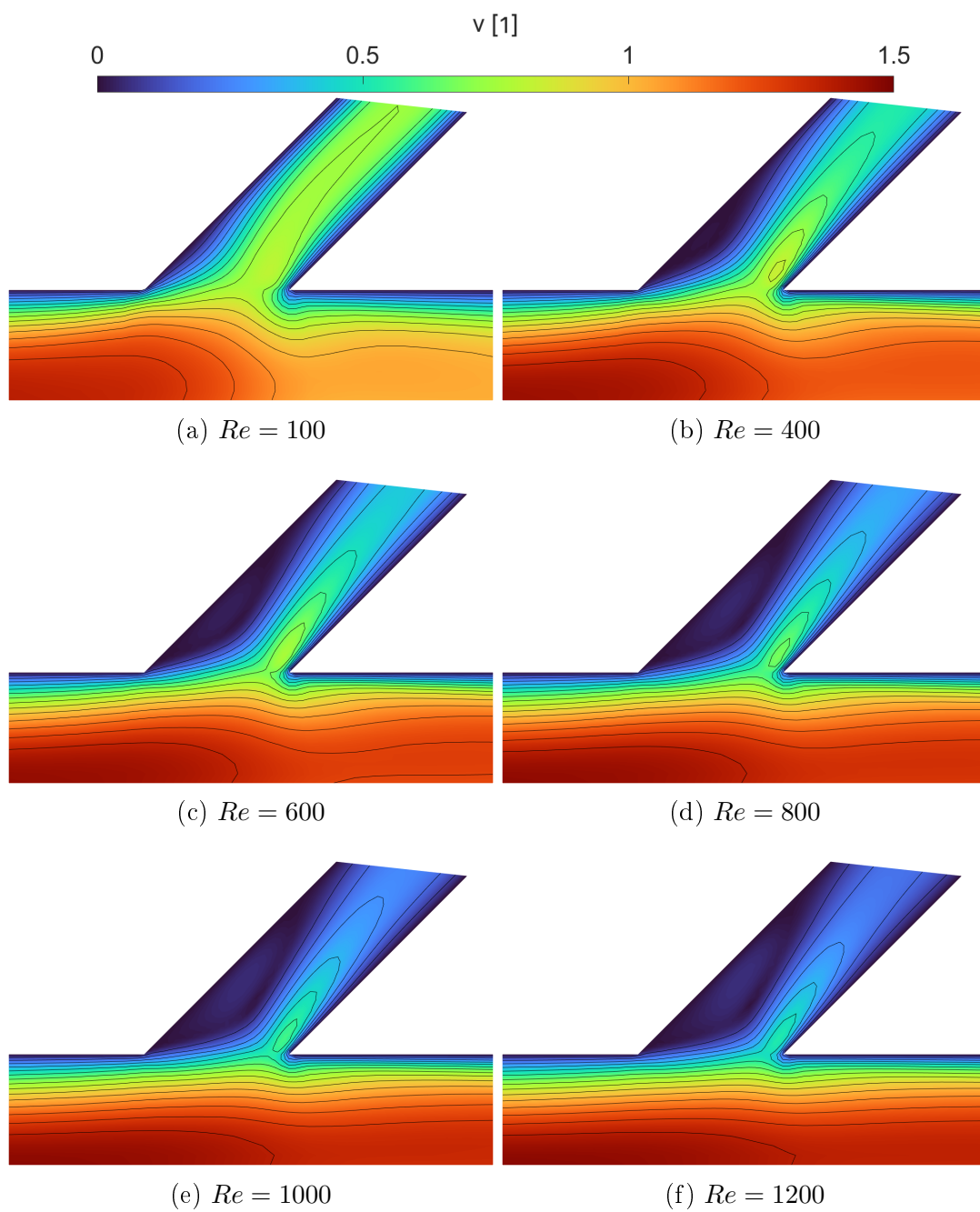
Tabulka 4.4: Průtok sekundárním kanálem

	Re	100	200	400	600	800	1000	1200
\dot{V}_2/\dot{V}	úzký	0.108	0.100	0.082	0.066	0.055	0.046	0.039
	široký	0.242	0.216	0.168	0.130	0.101	0.080	0.065

Tabulka 4.5: Průtok sekundárním kanálem v závislosti na Re (Cross, $\Delta p = 0$)



Obrázek 4.28: Rozložení bezrozměrné rychlosti v ostrém rozvětvení kanálu (úzký, cross, $\Delta p = 0$)



Obrázek 4.29: Rozložení bezrozměrné rychlosti v ostrém rozvětvení kanálu (široký, cross, $\Delta p = 0$)

Závěr

Cílem této práce bylo popsat proudění vazké nestlačitelné neneutonské tekutiny a vytvořit vlastní program pro řešení proudění metodou konečných objemů.

V kapitole 2 byl uveden matematický model vhodný pro popis 2D proudění. Následně v kapitole 3 byly popsány numerické metody použité pro řešení daného problému. Byla zde popsána metoda umělé stlačitelnosti, metoda konečných objemů a dále metody diskretizace: centrální schéma, Eulerova metoda, Rungeova-Kuttova metoda, MacCormackovo schéma.

V poslední kapitole byly prezentovány výsledky z vlastních numerických simulací. Nejprve úlohy použité pro otestování funkčnosti vytvořeného programu, které bylo možné srovnat s analytickým řešením (proudění mezi paralelními deskami pro newtonskou tekutinu a pro neneutonskou tekutinu s mocninným modelem viskozity) nebo s řešením známým z jiných publikací (proudění ve čtvercové kavitě, symetrická stenóza).

V kapitole 4.1 byla na úloze proudění newtonské tekutiny mezi paralelními deskami srovnána časová náročnost tří použitých metod. Z testu dle předpokladu nejlépe vyšla Rungeova-Kuttova 5,3 metoda (obr. 4.2). U této úlohy je zároveň možné pozorovat rozdíl v tlakovém gradientu při použití různých mocninných indexů, kdy s rostoucím n tlaková ztráta roste (obr. 4.3 a 4.7).

Úloha čtvercové kavity (kap. 4.2) ukázala validní numerické řešení pro proudění vyvolené pouze vazkými členy (srovnáno bylo řešení pomocí RK 5,3 i MacCormack). Rychlostní profily byly srovnány s [9].

V úloze symetrické stenózy (kap. 4.3) bylo provedeno srovnání modelů viskozity (kalibrované pro proudění krve), které ukázalo shodné výsledky pro většinu testovaných modelů. Z tohoto lze vyvozovat, že pro danou úlohu (a úlohy podobné) je možné použít kterýkoliv z nich. Dále zde bylo srovnáno smykové napětí na stěně známým z předchozí práce [30].

V kapitole 4.4 a 4.5 byly shrnuty simulace proudění ve víceblokové oblasti, rozvětvení kanálu. Simulace byly provedeny pro kolmé i ostré napojení s různými kombinacemi okrajových podmínek. Z grafického zobrazení tlakových polí (obr. 4.21, 4.24, B.6, B.8) lze usoudit, že pro nižší hodnoty Reynoldsova čísla by bylo vhodné lépe vyladit koeficienty umělé disipace pro dosažení hladšího řešení.

Všechny numerické simulace byly řešeny vlastním programem implementovaným v jazyce C++, pro postprocessing bylo užito programu Matlab.

Návrhy na zdokonalení

- Upravení programu pro řešení 3D úloh
- Upravení programu pro nestrukturované sítě
- Upravení programu pro implicitní metody

Bibliografie

- [1] J. Benda a R. Černá. *Numerická matematika. Doplnkové skriptum*. Vydavatelství ČVUT, 1991. ISBN: 978-80-01-04037-9.
- [2] J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. 2nd Edition. St Augustin, Germany: Elsevier, 2005. ISBN: 978-0-08-044506-9.
- [3] M. Brdička, L. Samek a B. Sopko. *Mechanika kontinua*. Vyd. 2., opr. Praha: Academia, 2000. ISBN: 80-200-0772-5.
- [4] C. T. Crowe. *Engineering fluid mechanics*. 9th ed. Hoboken, NJ: Wiley, c2009. ISBN: 978-0470-25977-1.
- [5] Y. Delorme et al. “A simple and efficient incompressible Navier–Stokes solver for unsteady complex geometry flows on truncated domains”. In: *Computers & Fluids* 150 (2017), s. 84–94. DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.03.030.
- [6] E. Erturk, T. Corke a C. Gokcol. “Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers.” In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 48.7 (2005), s. 747–774. DOI: 10.1002/flid.953.
- [7] G. P. Galdi et al. *Hemodynamical Flows. Modeling, Analysis and Simulation*. 1st edition. Basel – Boston – Berlin: Birkhäuser Verlag AG, 2008. ISBN: 978-3-7643-7805-9.
- [8] F. Ghalichi et al. “Low Reynolds number turbulence modeling of blood flow in arterial stenoses”. In: *Biorheology* 1998.35:4,5 (1998). ISSN: 1878-5034.
- [9] U. Ghia, K.N. Ghia a C.T. Shin. “High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method”. In: *Journal of Computational Physics* 48.3 (1982), s. 387–411. ISSN: 0021-9991. DOI: 10.1016/0021-9991(82)90058-4.
- [10] M. G. Hall. “A vertex-centroid scheme for improved finite-volume solution of the Navier-Stokes equations”. In: *AIAA Journal* (1991).
- [11] Ch. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows. The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. 2nd Edition. Oxford: Elsevier, 2007. ISBN: 978-0-7506-6594-0.
- [12] R.P. Chhabra a J.F. Richardson. *Non-Newtonian Flow in the Process Industries*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1999. ISBN: 978-0-7506-3770-1.
- [13] Chu Chia a Ming-Hseng Tseng. “Two-dimensional shallow water flows simulation using TVD-MacCormack Scheme”. In: *Journal of Hydraulic Research* 38 (2000), s. 123–131. DOI: 10.1080/00221680009498347.

- [14] A. J. Chorin. “A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems”. In: *Journal of Computational Physics* 135 (1997), s. 118–125.
- [15] A. Jameson. “Origins and Further Development of the Jameson–Schmidt–Turkel Scheme”. In: *AIAA Journal* 55 (2017), s. 1–23. DOI: 10.2514/1.J055493.
- [16] A. Jameson, W. Schmidt a E. Turkel. “Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes”. In: *AIAA Journal* (1981). DOI: 10.2514/6.1981-1259.
- [17] J. Ježek, B. Váradiová a J. Adamec. *Mechanika tekutin*. Vyd. 3. přepřac. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN: 80-010-1615-3.
- [18] D. Katritsis et al. “Wall Shear Stress. Theoretical Considerations and Methods of Measurement”. In: *Progress in Cardiovascular Diseases* 49.5 (2007), s. 307–329. ISSN: 0033-0620.
- [19] S. Konvičková a J. Valenta. *Biomechanika srdečně cévního systému člověka*. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2006, c1997. ISBN: 80-01-03425-9.
- [20] K Kozel et al. *Numerická simulace proudění II*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN: 80-01-03109-8.
- [21] K. Kozel a J. Fürst. *Numerické metody řešení problémů proudění I*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001. ISBN: 80-01-02384-2.
- [22] J. Machalinska-Murawska a M. Szydlowski. “Lax-Wendroff and McCormack Schemes for Numerical Simulation of Unsteady Gradually and Rapidly Varied Open Channel Flow”. In: *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics* 60 (2013), s. 51–62. DOI: 10.2478/heem-2013-0008.
- [23] J Neustupa. *Matematika II*. 3. vyd. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2015. ISBN: 9788001056844.
- [24] L. Nováková. “Analýza proudění krve ve stenózách”. Habilitační práce. Praha: Fakulta Strojní, ČVUT v Praze, 2016.
- [25] “Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer”. In: *Lecture Notes in Physics* (1971), s. 151–163. ISSN: 978-3-540-36533-4. DOI: 10.1007/3-540-05407-3_24.
- [26] R. C. Swanson, R. Radespiel a E. Turkel. “On Some Numerical Dissipation Schemes”. In: *Journal of Computational Physics* 147 (1998), s. 518–544.
- [27] R. C. Swanson a E. Turkel. “Artificial dissipation and central difference schemes for the Euler and Navier- Stokes equations”. In: *NASA* 1987 (). DOI: 10.2514/6.1987-1107.
- [28] R. C. Swanson a E. Turkel. “On Central-Difference and Upwind Schemes”. In: *Journal of Computational Physics* 101 (1992), s. 292–306.
- [29] J. Šesták a F. Rieger. *Přenos hybnosti, tepla a hmoty*. Vyd. 3. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN: 80-01-02933-6.
- [30] V. Škrle. “Numerický výpočet tlakové ztráty při významném zúžení průřezu”. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2018.

Seznam obrázků

1.1	Viskozita a smykové napětí jako funkce smykové rychlosti pro mocninný model a tři hodnoty indexu toku n	17
1.2	Průběh zdánlivé viskozity modelů z tabulky 1.1	18
3.1	2-D strukturovaná síť pro metodu konečných objemů	26
3.2	Stěnové a normálové vektory buňky sítě	27
3.3	Duální objem pro výpočet vazkých toků	28
3.4	Výpočetní stencil pro prediktor a korektor MacCormackova schématu	32
3.5	Okrajové podmínky	33
4.1	Geometrie a detail zjemněných sítí pro rovný kanál	36
4.2	Průběh rezidua na síti 100x20	37
4.3	Průběh tlaku v přímém kanále (Newtonská tekutina)	37
4.4	Průběh rychlosti v přímém kanále (Newtonská tekutina)	37
4.5	Srovnání rychlostních profilů na výstupu a v ose kanálu	37
4.6	Rychlostní profil na výstupu při použití mocninného modelu viskozity	38
4.7	Průběh tlaku v přímém kanále (Mocninný model)	38
4.8	Geometrie a výpočetní síť pro čtvercovou kavitu	39
4.9	Rychlostní pole a rychlostní profily v řezech středem kavity	40
4.10	Geometrie a výpočetní síť stenózy	41
4.11	Tlakové a rychlostní pole v detailu zúžení	41
4.12	Rychlostní pole	42
4.13	Porovnání rychlostních profilů ve středu a za koncem stenózy	42
4.14	Rychlostní profily ve středu a za koncem stenózy	42
4.15	Rozložení rychlosti v stenóze pro různé modely viskozity	43
4.16	Rozložení viskozity v stenóze pro různé modely viskozity	44

4.17	Průběh smykového napětí na stěně stenózy pro newtonskou tekutinu .	45
4.18	Srovnání smykového napětí na stěně pro neneutonskou tekutinu	46
4.19	Geometrie a výpočetní síť úlohy kolmého rozvětvení	47
4.20	Rozložení rychlosti v kolmém rozvětvení kanálu	47
4.21	Rozložení tlaku v kolmém rozvětvení kanálu	48
4.22	Rozložení bezrozměrné rychlosti v kolmém rozvětvení kanálu (Cross, $Re = 200$)	49
4.23	Rozložení bezrozměrné rychlosti v kolmém rozvětvení kanálu (Cross, $\Delta p = 0$)	49
4.24	Rozložení tlaku v kolmém rozvětvení kanálu (Cross, $\Delta p = 0$)	50
4.25	Detail výpočetní sítě ostrého větvení kanálu	51
4.26	Detail rychlostního pole ostrého větvení (Newtonský model)	51
4.27	Rozložení bezrozměrné rychlosti v ostrém rozvětvení kanálu	52
4.28	Rozložení bezrozměrné rychlosti v ostrém rozvětvení kanálu (úzký, cross, $\Delta p = 0$)	53
4.29	Rozložení bezrozměrné rychlosti v ostrém rozvětvení kanálu (široký, cross, $\Delta p = 0$)	54
B.1	Rychlostní pole s proudnicemi při použití mocninného modelu	65
B.2	Rychlostní pole s proudnicemi v kolmém rozvětvení kanálu	66
B.3	Rychlostní pole s proudnicemi v kolmém rozvětvení kanálu pro různé tlakové OP	66
B.4	Rychlostní pole s proudnicemi v kolmém rozvětvení kanálu pro různé Re	67
B.5	Rychlostní pole s proudnicemi v ostrém rozvětvení úzkého kanálu pro různé Re	68
B.6	Tlakové pole v ostrém rozvětvení úzkého kanálu pro různé Re	69
B.7	Rychlostní pole s proudnicemi v ostrém rozvětvení širokého kanálu pro různé Re	70
B.8	Tlakové pole v ostrém rozvětvení širokého kanálu pro různé Re	71

Seznam tabulek

1.1	Modely viskozity krve zobecněné newtonské tekutiny (převzato z [7])	18
3.1	Hodnoty koeficientů pro hybridní RK-5,3 metodu [2]	31
4.1	Délka výpočtu pro dosažení konvergence	36
4.2	Průtok sekundárním kanálem v závislosti na Δp (Cross, $Re = 200$)	48
4.3	Průtok sekundárním kanálem v závislosti na Re (Cross, $\Delta p = 0$)	48
4.4	Průtok sekundárním kanálem	52
4.5	Průtok sekundárním kanálem v závislosti na Re (Cross, $\Delta p = 0$)	52

Příloha A

Nenewtonský rychlostní profil

Uvažujeme proudění nestlačitelné vazké tekutiny mezi dvěma paralelními deskami o vzdálenosti $H = 2h$, délce L a šířce $w = 1$. Pro ustálené proudění odvodíme z NS rovnic

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Umístíme-li souřadnicovou osu do osy symetrie kanálu, můžeme uvažovat následující okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u(y = \pm h) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(y = 0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Uvažujme nyní mocninný model viskozity

$$\eta = K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \quad (\text{A.4})$$

a označme gradient tlaku $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}$. Rovnice A.1 má poté tvar

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \right) = -\frac{\Delta p}{L}, \quad (\text{A.5})$$

po integraci podle proměnné y dostáváme rovnici

$$K \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n = -\frac{\Delta p}{L} y + C_1. \quad (\text{A.6})$$

Dosazením okrajové podmínky $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ určíme integrační konstantu $C_1 = 0$.
Řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \left(\frac{\Delta p}{KL} y \right)^{1/n} \quad (\text{A.7})$$

nalezneme integrací ve tvaru

$$u = - \left(\frac{\Delta p}{KL} y \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} y + C_2. \quad (\text{A.8})$$

Dosazením okrajové podmínky $u(h) = 0$ určíme druhou integrační konstantu

$$C_2 = \left(\frac{\Delta p}{KL} h \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} h. \quad (\text{A.9})$$

A tedy řešení rychlostního profilu má tvar

$$u = \left(\frac{\Delta p h}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{nh}{n+1} \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right). \quad (\text{A.10})$$

Protože v numerické úloze zadáváme rychlostní profil na vstupu a ne tlakový rozdíl, musíme ještě vyřešit závislost gradientu tlaku na průtoku $\Delta p = f(\dot{V})$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= w \int_{-h}^h u(y) dy = 2 \int_0^h u(y) dy \\ &= 2 \left(\frac{\Delta p h}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{nh}{n+1} \int_0^h \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right) dy \\ &= 2 \left(\frac{\Delta p h}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{nh}{n+1} \left(y - \left(\frac{y}{h} \right)^{\frac{n+1}{n}} y \frac{n}{2n+1} \right) \Big|_{y=0}^{y=h} \\ &= 2 \left(\frac{\Delta p h}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{nh^2}{n+1} \left(1 - \frac{n}{2n+1} \right) \\ &= \left(\frac{\Delta p h}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{2nh^2}{n+1} \left(\frac{2n+1-n}{2n+1} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

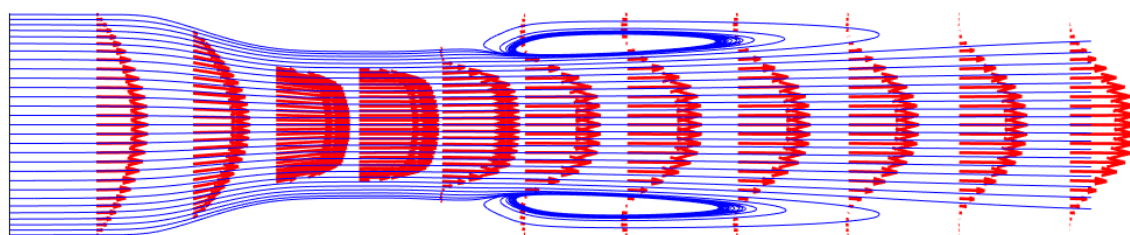
Tlakový rozdíl Δp je možné dopočítat z výsledného vztahu pro průtok

$$\dot{V} = \left(\frac{\Delta p h}{KL} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{2nh^2}{2n+1}. \quad (\text{A.12})$$

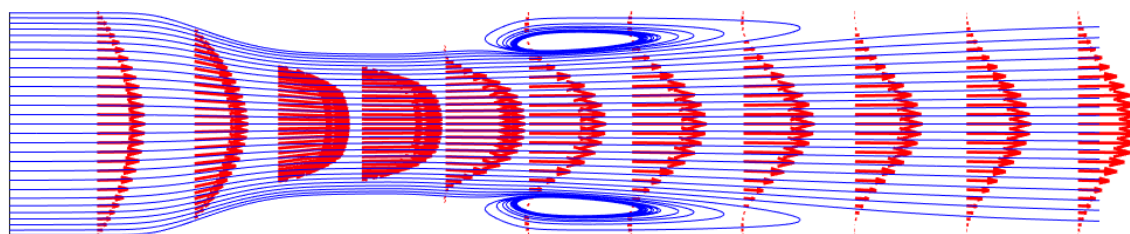
Příloha B

Grafické znázornění numerických výsledků

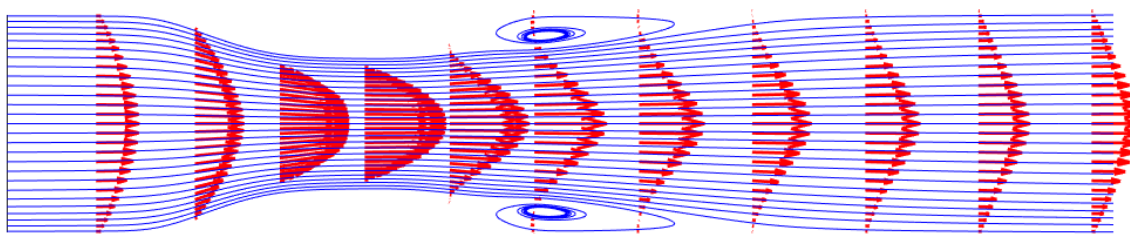
B.1 Stenóza - mocninný model



(a) $n = 0.5$



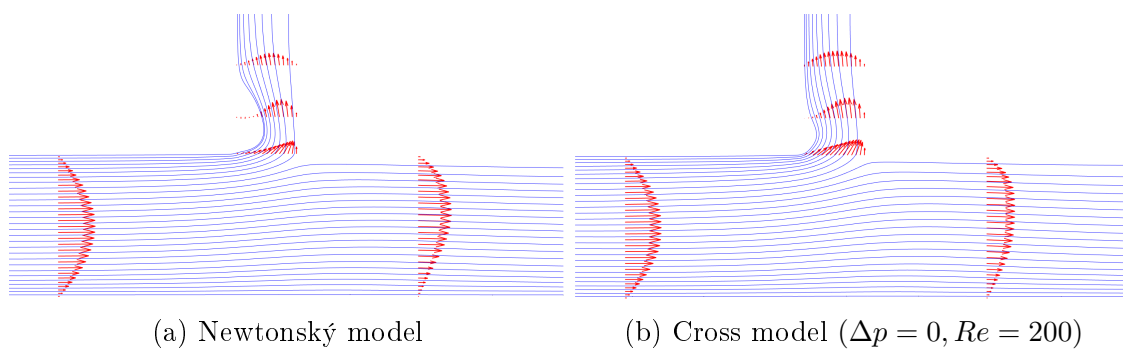
(b) $n = 1.0$



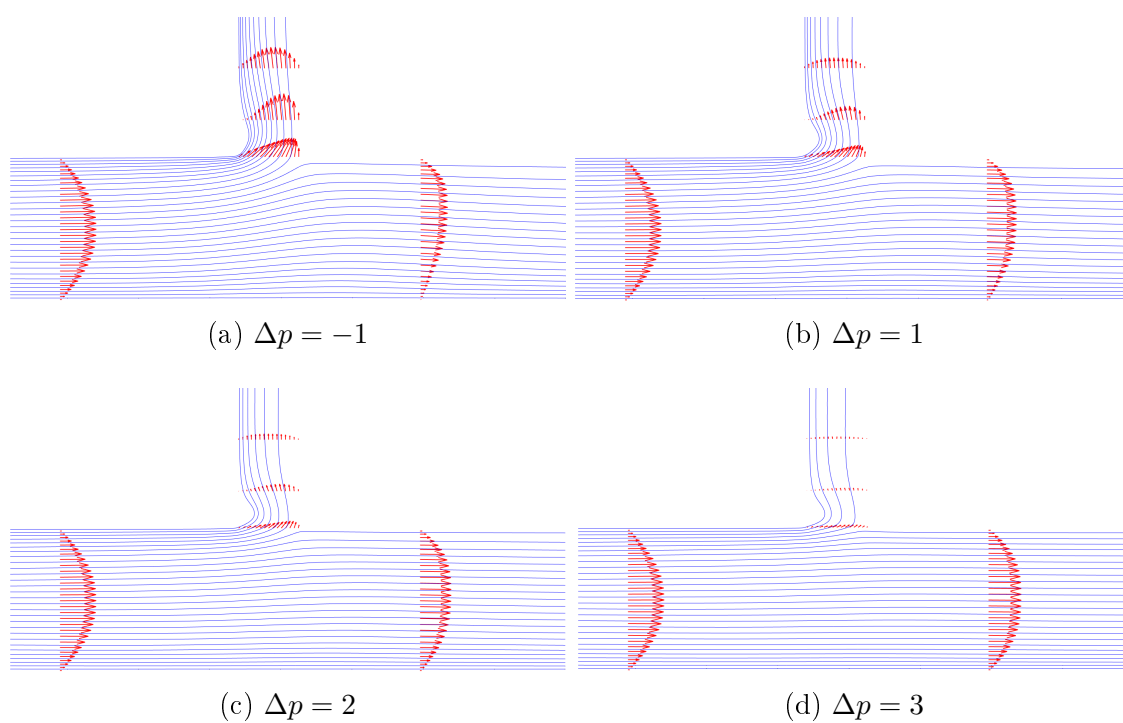
(c) $n = 1.5$

Obrázek B.1: Rychlostní pole s proudnicemi při použití mocninného modelu

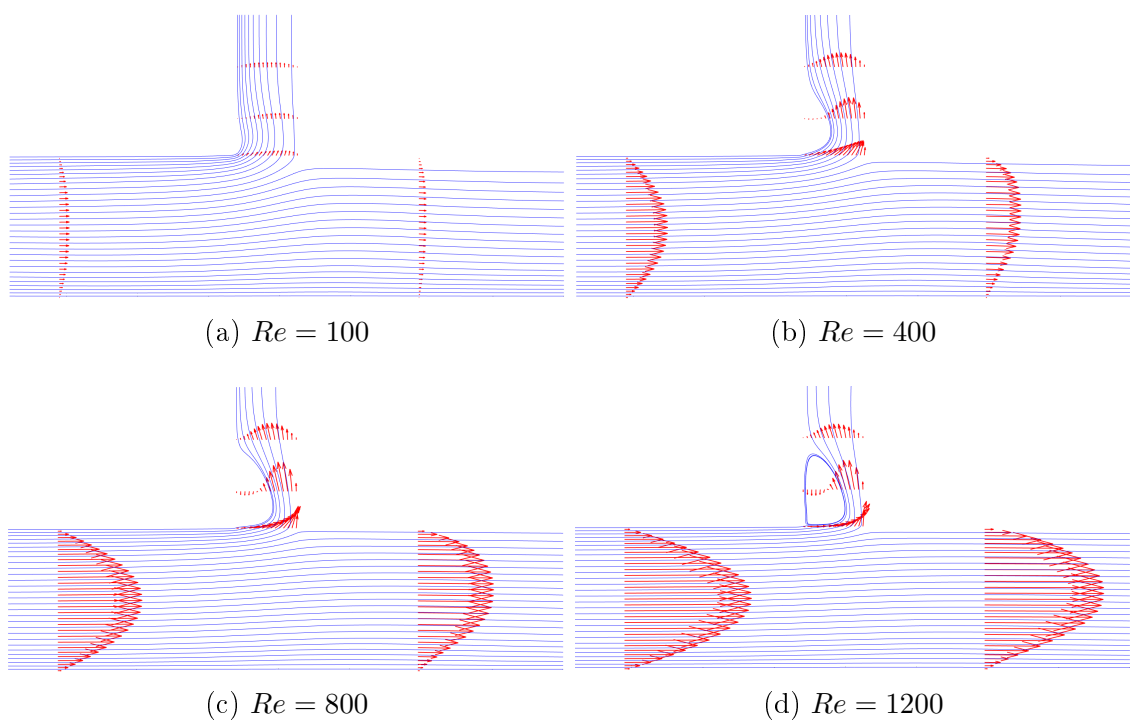
B.2 Kolmé větvení kanálu



Obrázek B.2: Rychlostní pole s proudnicemi v kolmém rozvětvení kanálu

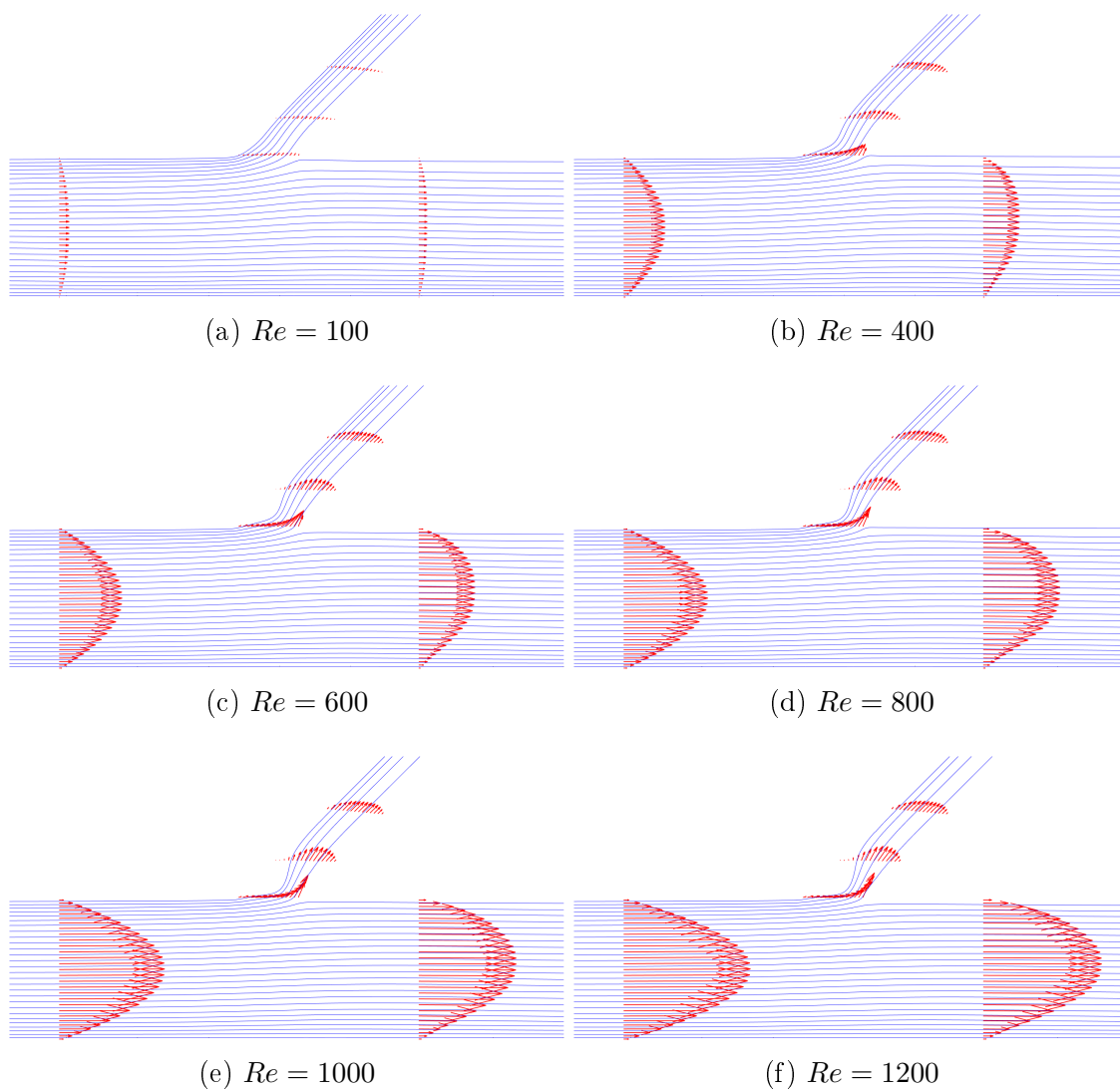


Obrázek B.3: Rychlostní pole s proudnicemi v kolmém rozvětvení kanálu pro různé tlakové OP

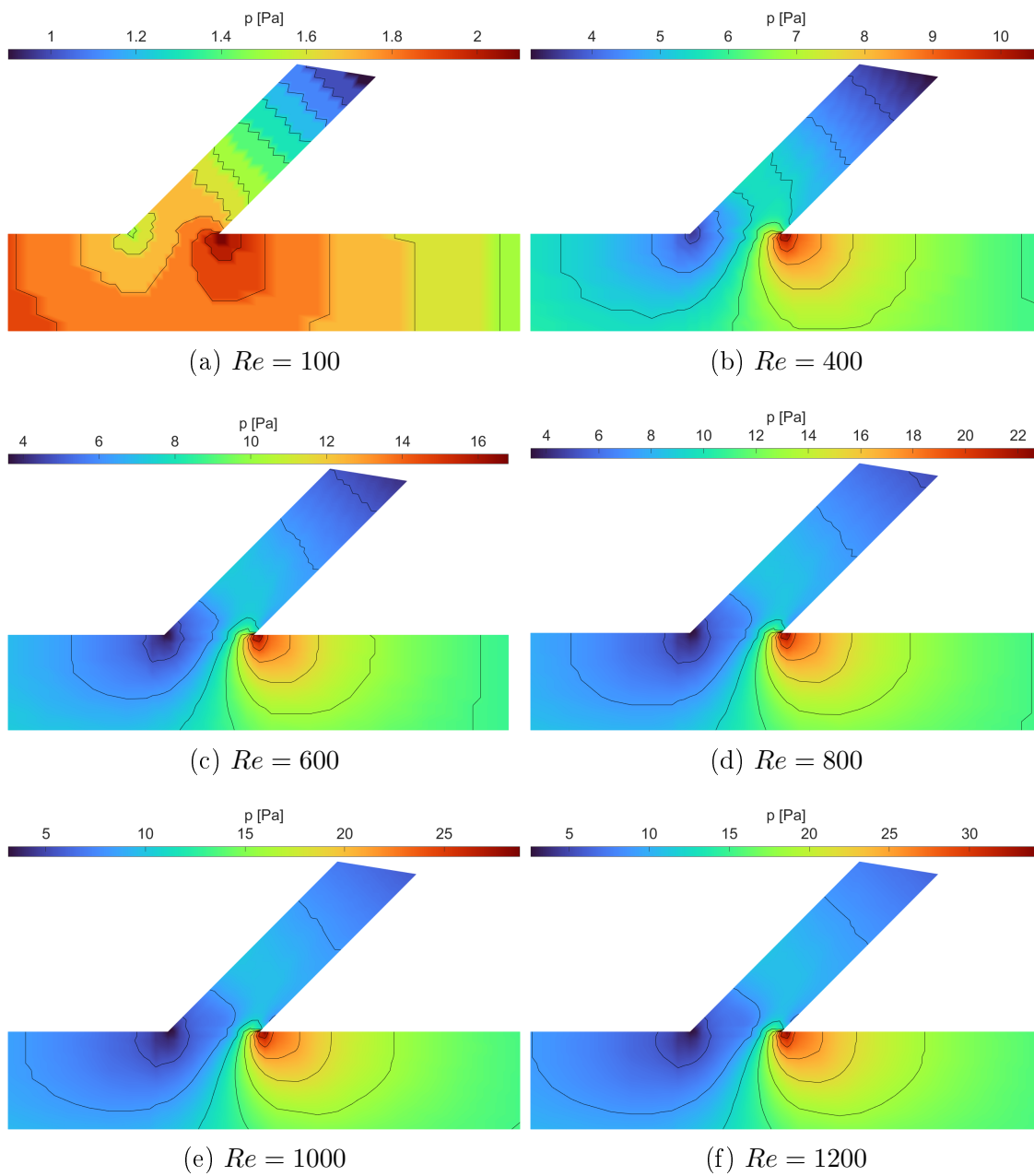


Obrázek B.4: Rychlostní pole s proudnicemi v kolmém rozvětvení kanálu pro různé Re

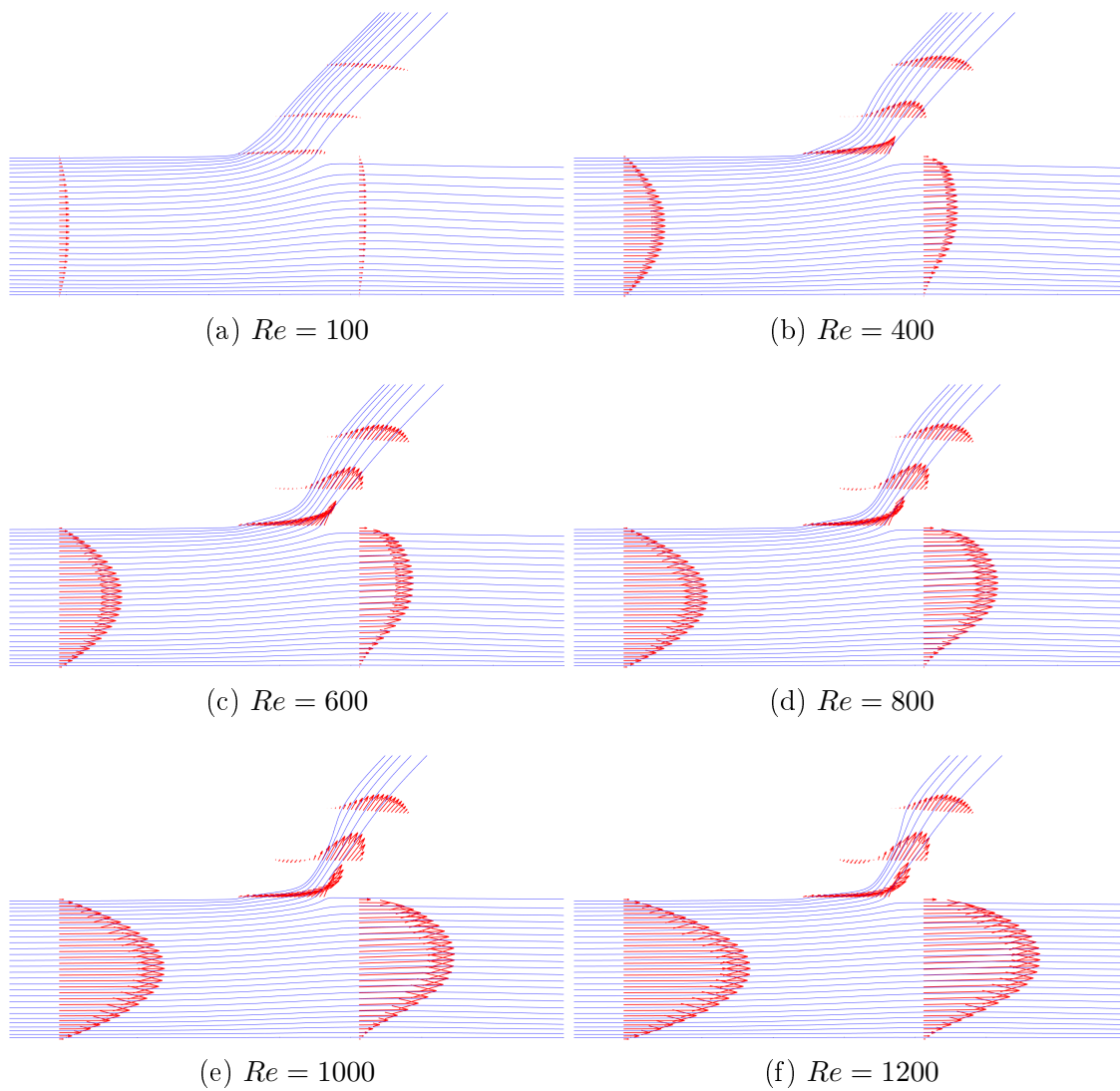
B.3 Ostré větvení kanálu



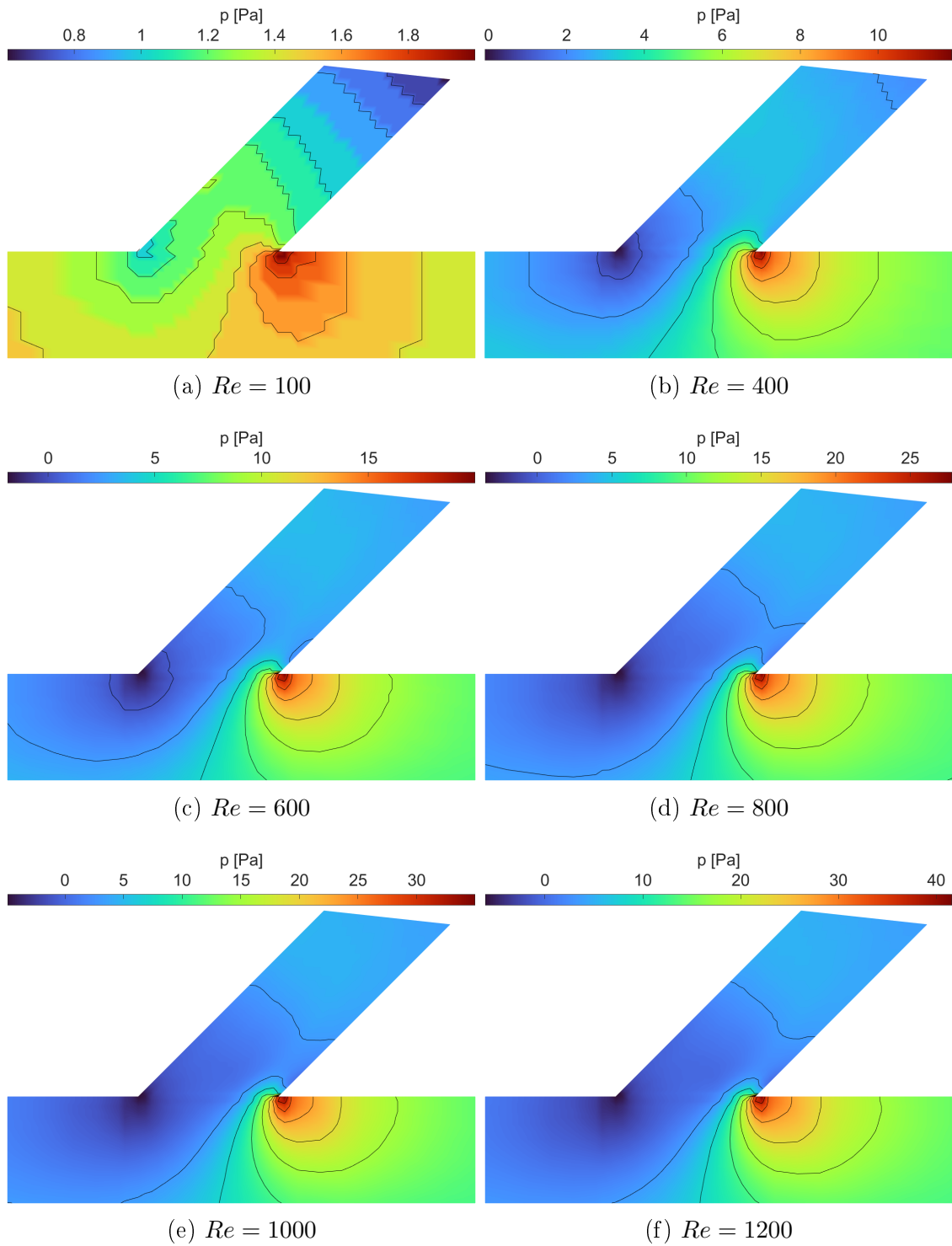
Obrázek B.5: Rychlostní pole s proudnicemi v ostrém rozvětvení úzkého kanálu pro různé Re



Obrázek B.6: Tlakové pole v ostrém rozvětvení úzkého kanálu pro různé Re



Obrázek B.7: Rychlostní pole s proudnicemi v ostrém rozvětvení širokého kanálu pro různé Re



Obrázek B.8: Tlakové pole v ostrém rozvětvení širokého kanálu pro různé Re