



**FAKULTA
STROJNÍ
ČVUT V PRAZE**

Bakalářská práce

Model záběru čelního evolventního ozubení pro dynamické simulace

Jan Uhlíř

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Vedoucí práce: Ing. Zdeněk Neusser, Ph.D.

23. května 2021

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Uhlíř** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **482404**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojního inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Model záběru čelního evolventního ozubení pro dynamické simulace

Název bakalářské práce anglicky:

Spur gear mesh model for dynamic simulations

Pokyny pro vypracování:

Seznamte se s problematikou modelování záběru ozubených kol
Vytvořte simulační model záběru čelního ozubení s přímými zuby založeného na znalosti geometrie kontaktu
Proveďte frekvenční analýzu ozubeného převodu
Zhodnoťte vytvořený model záběru ozubení

Seznam doporučené literatury:

Stejskal, V., Brousil, J. a Stejskal, S.: Mechanika III, Vyd. 2, ČVUT v Praze, 2001.
Z. Neusser, T. Vampola, and M. Valášek, 'Analytical gear mesh model using 3D gear geometry', Mechanika, vol. 23, no. 3, pp. 425–431, 2017.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Zdeněk Neusser, Ph.D., odbor mechaniky a mechatroniky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **28.04.2021**

Termín odevzdání bakalářské práce: **13.08.2021**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Zdeněk Neusser, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

V první řadě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Zdeňku Neusserovi, Ph.D. za ochotu, poskytnuté rady a celkovou spolupráci. Dále bych rád poděkoval své rodině a přítelkyni, které mě celou dobu podporovaly v psaní práce i v samotném studiu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů. V souladu s ust. § 2373 odst. 2 zákona č. 89/2012 Sb., občanský zákoník, ve znění pozdějších předpisů, tímto uděluji nevýhradní oprávnění (licenci) k užití této mojí práce, a to včetně všech počítačových programů, jež jsou její součástí či přílohou a veškeré jejich dokumentace (dále souhrnně jen „Dílo“), a to všem osobám, které si přejí Dílo užít. Tyto osoby jsou oprávněny Dílo užít jakýmkoli způsobem, který nesnižuje hodnotu Díla a za jakýmkoli účelem (včetně užití k výdělečným účelům). Toto oprávnění je časově, teritoriálně i množstevně neomezené. Každá osoba, která využije výše uvedenou licenci, se však zavazuje udělit ke každému dílu, které vznikne (byť jen zčásti) na základě Díla, úpravou Díla, spojením Díla s jiným dílem, zařazením Díla do díla souborného či zpracováním Díla (včetně překladu) licenci alespoň ve výše uvedeném rozsahu a zároveň zpřístupnit zdrojový kód takového díla alespoň srovnatelným způsobem a ve srovnatelném rozsahu, jako je zpřístupněn zdrojový kód Díla.

V Praze dne 23. května 2021

.....

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta strojní

© 2021 Jan Uhlíř. Všechna práva vyhrazena.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Českém vysokém učení technickém v Praze, Fakultě strojní. Práce je chráněna právními předpisy a mezinárodními úmluvami o právu autorském a právech souvisejících s právem autorským. K jejímu užití, s výjimkou bezúplatných zákonných licencí a nad rámec oprávnění uvedených v Prohlášení na předchozí straně, je nezbytný souhlas autora.

Odkaz na tuto práci

Uhlíř, Jan. *Model záběru čelního evolventního ozubení pro dynamické simulace*. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta strojní, 2021.

Abstrakt

Tato práce se zabývá modely záběru čelního evolventního ozubení pro dynamické simulace. Kromě shrnutí základních poznatků o ozubení a vybraných publikací zabývajících se danou problematikou prezentuje práce i dva vytvořené analytické modely a jejich výsledky. Vytvořený kontaktní analytický model pro přímé čelní evolventní ozubení poskytuje rychlou a poměrně přesnou dynamickou simulaci.

Klíčová slova evolventní ozubení, ozubené kolo, čelní ozubení, dynamická simulace, analytický model ozubení, Campbellův diagram, frekvenční analýza.

Abstract

This bachelor's thesis focuses on the modelling of the involute spur gear mesh process. First, the thesis summarizes the basic knowledge of gearing and selected articles on this topic. Second, it presents two created analytical models of the involute spur gearing. The proposed analytical contact model of the involute spur gearing allows for a relatively accurate and fast dynamic simulation.

Keywords involute gearing, gear, spur gearing, dynamic simulation, analytical model of gearing, Campbell diagram, frequency analysis.

Obsah

Úvod	1
1 Převody s ozubenými koly	3
1.1 Použití a historie ozubených převodů	3
1.2 Typy ozubených převodů	4
1.3 Geometrie evolventního ozubeného kola	6
2 Modely ozubení a dynamické simulace	7
2.1 Jednoduché modely	8
2.2 Kontaktní modely	13
2.2.1 Analytické modely	13
2.2.2 FEM modely	16
2.3 Komerční software	17
3 Praktická část	19
3.1 Jednoduchý model	19
3.2 Kontaktní model	23
3.2.1 Výpočet průniku zubů	23
3.2.2 Dynamická simulace	25
3.3 Výsledky modelů	27
3.3.1 Měření	27
3.3.2 Výsledky	29
Závěr	37

Literatura	39
A Seznam použitých zkratk	45
B Obsah přiloženého CD	47

Seznam obrázků

1.1	Typy ozubených převodů [1]	5
1.2	Evolventa jako trajektorie bodu K	6
2.1	Nejjednodušší dynamický model se dvěma stupni volnosti	9
2.2	Dynamický model se čtyřmi stupni volnosti	10
2.3	Dynamický model se šesti stupni volnosti	11
2.4	Schéma dvoustupňového převodu	12
2.5	Vůle [2]	13
2.6	Geometrická definice kontaktu dvou boků zubů [3]	14
2.7	Geometrie evolventního a mikrosegmentového kola [4]	16
3.1	Schéma jednoduchého modelu	20
3.2	Průnik zubů	24
3.3	Výpočet ρ_1 a ρ_2	25
3.4	Průběh úhlové rychlosti pastorku $\omega_1(t)$ v jednoduchém modelu při počáteční rychlosti $\omega_{1RPM} = 20\,000\text{ min}^{-1}$	30
3.5	Průběhy natočení pastorku $\varphi_1(t)$ a kola $\varphi_2(t)$ v jednoduchém modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 20\,000\text{ min}^{-1}$	30
3.6	Frekvenční charakteristika jednoduchého modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 20\,000\text{ min}^{-1}$	31
3.7	Campbellův diagram jednoduchého modelu pro počáteční rychlosti otáčení pastorku ω_{1RPM} od 0 do $20\,000\text{ min}^{-1}$	31
3.8	Průběh úhlové rychlosti pastorku $\omega_1(t)$ v kontaktním modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 6\,000\text{ min}^{-1}$	32

3.9	Průběhy natočení pastorku $\varphi_1(t)$ a kola $\varphi_2(t)$ v kontaktním modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 6\,000\text{ min}^{-1}$. . .	33
3.10	Frekvenční charakteristika kontaktního modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 6\,000\text{ min}^{-1}$	33
3.11	Campbellův diagram kontaktního modelu pro počáteční rychlosti otáčení pastorku ω_{1RPM} od 0 do $20\,000\text{ min}^{-1}$	34
3.12	Campbellův diagram kontaktního modelu pro počáteční rychlosti otáčení pastorku ω_{1RPM} od 0 do $20\,000\text{ min}^{-1}$ s vyznačenými vybranými významnými frekvencemi	34

Seznam tabulek

3.1	Parametry modelu	28
-----	----------------------------	----

Úvod

Lze jen těžko pochybovat o významu ozubených převodů. Jejich využití je napříč snad všemi oblastmi strojírenství - od hodinových strojků přes pohony dopravníků, automobilový a lodní průmysl, železnici, letectví, energetiku, zbrojní průmysl, robotiku až po výrobní a měřicí stroje a zařízení. Dnes je ozubené kolo vnímáno jako symbol techniky, zejména pak strojírenství. Za tisíce let používání se člověk posunul od využívání kol osazených jednoduchými dřevěnými kolíky k použití různých typů nejen evolventních kol s poměrně složitou geometrií jako jsou například spiroidní, dvojité šikmé či hypoidní.

Neustále rostoucí nároky na lepší výrobní přesnost, snižování hluku, výrobních nákladů, zvyšování životnosti a celkové zlepšení kvality si vyžádaly rozvoj modelů a simulací. Dynamické simulace slouží především k analýze vibrací převodových mechanismů, hluku, kmitání nebo třeba životnosti. Z dynamických analýz lze dále předpovídat namáhání převodů, předpovídat poruchy či určovat kritické provozní podmínky.

Tato práce se zabývá právě modely záběru čelních ozubení a jejich dynamickými simulacemi. V první kapitole jsou stručně shrnuty základní poznatky o ozubení, jeho historii, členění, využití a geometrii. Druhá kapitola shrnuje vybrané publikace zabývající se problematikou modelování ozubení a dynamických simulací ozubených převodů. Třetí kapitola pak představuje mnou vytvořené modely a jejich výsledky.

Převody s ozubenými koly

1.1 Použití a historie ozubených převodů

Ozubené převody jsou jednoznačně nejrozšířenějším převodovým mechanismem. Jejich uplatnění najdeme od hodinových strojků přes automobily, leteckou techniku až po měřicí či obráběcí stroje. Pracují na principu záběru s bezprostředním dotykem spoluzabírajících kol. Základní stavební jednotkou ozubeného převodu je dvojice ozubených kol - pastorku a kola. [1, 5]

Mezi výhody ozubených převodů patří relativně malé rozměry a kompaktnost, dobrá životnost, spolehlivost, účinnost, přesný převodový poměr, schopnost přenosu velkých zatížení (až 100 MW) při obvodových rychlostech až $150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, krátkodobá přetížitelnost, nízká náročnost na údržbu a možnost velkých převodových poměrů. Naproti tomu mají několik nevýhod. Výroba je poměrně složitá a drahá, převody je potřeba mazat a chladit, mohou být hlučné a mohou vyvolávat chvění celého stroje, tuhá vazba členů ztěžuje možnosti tlumení rázů a není možné dosáhnout libovolného převodového poměru. To je způsobeno nutností celočíselného počtu zubů. [1]

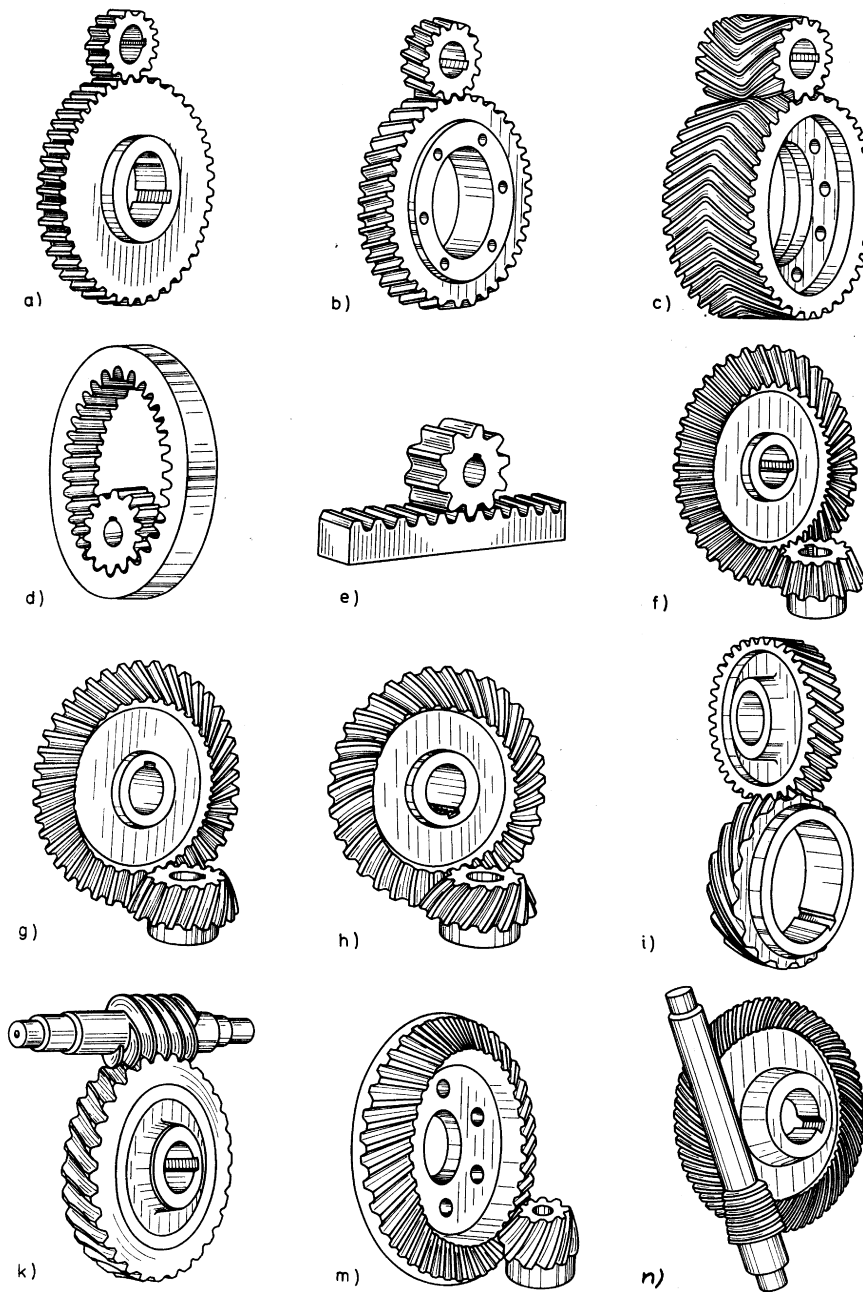
Ozubené převody využívá člověk po tisíce let. Kdy a kdo vynalezl první ozubený převod, není jisté a jednotlivé zdroje uvádějí různé informace. Dle některých spadá první použití již do starověké Číny někdy kolem roku 2 700 př. n. l. Většina zdrojů se však shoduje na zhruba 4. století př. n. l. a oblasti východního Středomoří, kde tamější národy používaly ozubení zejména v bojové technice. V té době byly zuby kol tvořeny jednoduchými dřevěnými

kolíky. První studie ozubení vznikly v 17. století v západní Evropě. Tehdy bylo přední využití v přístrojích pro astronomii. Velký rozvoj přineslo 18. století a průmyslová revoluce. Významné kroky ve vývoji ozubení přinesli například dánští astronomové Ole Romer a Philippe de La Hire, švýcarský matematik Leonhard Euler, britský technik a vynálezce Joseph Whitworth či německý průmyslník Herman Pfauter. [6, 7, 8, 9, 10]

1.2 Typy ozubených převodů

Existuje mnoho způsobů dělení ozubení. Nejjednodušším ozubeným převodem je pár čelních přímých ozubených kol s vnějším ozubením. Osy takové dvojice jsou rovnoběžné. Mimo to však existují i převody kuželové (různoběžné osy), hyperboloidní a globoidní (mimoběžné osy) nebo třeba šnekové (mimoběžné osy) atd. [1] Rozlišujeme kola s vnitřním a vnějším ozubením, rozdělujeme zuby na základě tvaru čelní profilové křivky na evolventní, cykloidní, smíšené, cévové, palečné, Novikovovy atd. Další možností je rozdělení podle tvaru boční čáry zubů na přímé, šikmé, dvojitě šikmé, zakřivené nebo šroubové. Speciálním případem je ozubený hřeben (obr. 1.1.2 e), který je částí ozubeného kola s nekonečným poloměrem. Je tedy přímý a pomocí něj převádíme pohyb rotační na pohyb lineární či opačně. Na obrázku 1.1 jsou zobrazeny některé typy ozubení [1] :

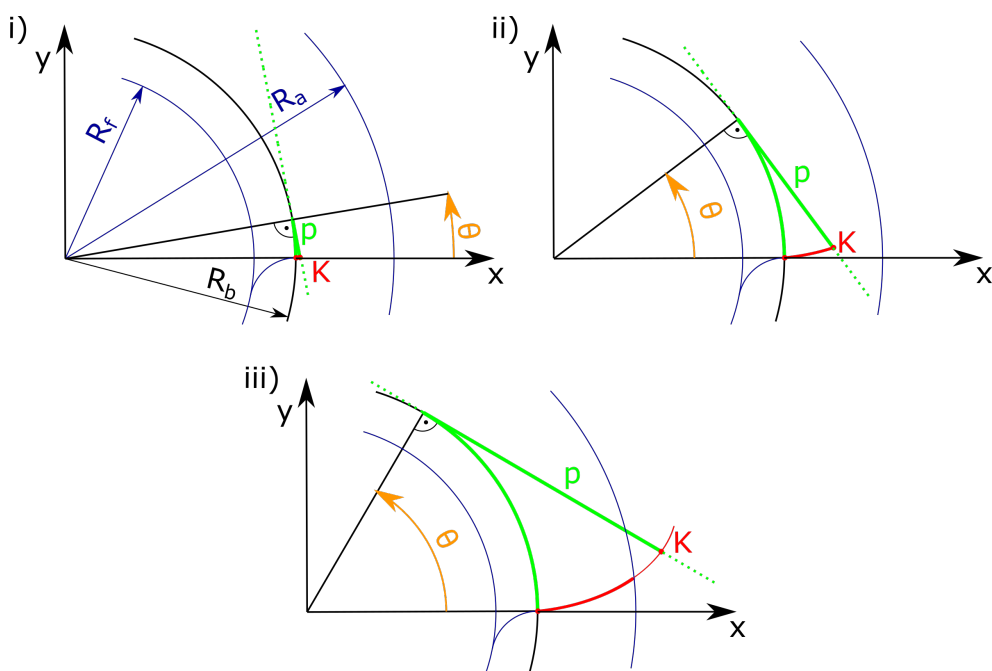
- 1.1 a) čelní (válcové) ozubení přímé
- 1.1 b) čelní (válcové) ozubení šikmé
- 1.1 c) čelní (válcové) ozubení dvojitě šikmé (šípové)
- 1.1 d) vnitřní ozubení přímé
- 1.1 e) přímé ozubení - ozubený hřeben
- 1.1 f) kuželové soukolí s přímými zuby
- 1.1 g) kuželové soukolí s šikmými zuby
- 1.1 h) soukolí se zakřivenými zuby
- 1.1 i) soukolí šroubové válcové
- 1.1 k) šnekové soukolí
- 1.1 m) hypoidní (šroubové kuželové) soukolí
- 1.1 n) spiroidní soukolí



Obrázek 1.1: Typy ozubených převodů [1]

1.3 Geometrie evolventního ozubeného kola

Nejrozšířenějším typem ozubení je ozubení evolventní. Tento typ ozubení má v průběhu záběru konstantní převodový poměr. Profil zubu evolventního kola je tvořen částí evolventy. Evolventa je křivka, která vznikne například jako trajektorie bodu K na přímce p odvalované po základní kružnici o poloměru R_b . Vznik evolventy je zobrazen na obrázku 1.2. [1]



Obrázek 1.2: Evolventa jako trajektorie bodu K

[10] Matematicky lze evolventu na dané základní kružnici popsat jako křivku danou polohovým úhlem θ :

$$\begin{aligned} x(\theta) &= R_b[\cos(\theta) + \theta \sin(\theta)], \\ y(\theta) &= R_b[\sin(\theta) - \theta \cos(\theta)]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Modely ozubení a dynamické simulace

Ozubené převody jsou stěžejními prvky strojů a mechanismů. Neustále rostoucí nároky na přesnost, účinnost, snižování nákladů, rychlost výroby a celkové zvýšení kvality a produktivity si vyžádalo zaměření pozornosti na modelování ozubení a jeho dynamické simulace. Různé modely obsahují dle svého předmětu modelování od jednoho zubu (geometrie zubu), přes ozubené soukolí (kontaktní tlaky) až po celé převodovky (hluk). Dynamické simulace se zabývají nejčastěji analýzou kontaktu a ohybového napětí, povrchovým opotřebením, efektivitou přenosu, hlukem, vibracemi, kmitáním, spolehlivostí a životností. Jiné studie popisují například vlivy mazání, teplotních změn, chyby tvaru zubu nebo třeba poškození zubů (trhliny, ulomená hlava zubu atd.). [11, 12, 13, 14, 15]

První matematické modely zabývající se ozubením ignorovaly tuhost a hmotnost hřídelů. Koncem 60. let 20. století však bylo zřejmé, že je potřeba modely rozšířit o pružnost hřídelů, kol a ložisek. Začaly tak vznikat modely se dvěma stupni volnosti a torzní tuhostí hřídelů. Dnes některé modely zohledňují i poddajnost jednotlivých zubů nebo třeba skutečné, nikoli ideální, profily zubů. [12, 15, 16, 17]

V této kapitole jsou představeny vybrané publikace zabývající se problematikou modelování čelního ozubení pro dynamické simulace.

2.1 Jednoduché modely

A Review of Dynamic Models Used in Simulation of Gear Transmissions [11]

Autoři: Zoltan Korka, Ion-Cornel Mituletu

Pracoviště: Babes-Bolyai University

V tomto článku jsou popsány nejjednodušší dynamické modely. V následujících podkapitolách jsou blíže popsány modely obsažené v tomto článku. Základem modelů je nahrazení ozubených kol dvojicí disků tečně spojených pružinou o tuhosti $c(t)$ a tlumičem s konstantou tlumení b . Dále modely zohledňují i chybu převodu $e(t)$. Chyba převodu se odvíjí od mnoha faktorů, jako je například deformace zubu při zatížení, teplotní roztažnost nebo geometrické a výrobní chyby ozubení. Model předpokládá zatížení obou kol vnějšími momenty. Následující podkapitoly představují modely popsané v tomto článku. [11]

Model se dvěma stupni volnosti

Nejjednodušší dynamický model se dvěma stupni volnosti je zobrazen na obrázku 2.1. Pohybové rovnice takového modelu jsou:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + R_{b1}c(t)[R_{b1}\varphi_1 - R_{b2}\varphi_2 + e(t)] + R_{b1}b[R_{b1}\dot{\varphi}_1 - R_{b2}\dot{\varphi}_2 + \dot{e}(t)] = M_1(t), \quad (2.1)$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 + R_{b2}c(t)[-R_{b1}\varphi_1 + R_{b2}\varphi_2 + e(t)] + R_{b2}b[-R_{b1}\dot{\varphi}_1 + R_{b2}\dot{\varphi}_2 + \dot{e}(t)] = M_2(t), \quad (2.2)$$

kde J_1 a J_2 jsou momenty setrvačnosti kol, φ_1 , φ_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$ jsou úhly natočení, úhlové rychlosti a úhlová zrychlení kol. $R_{b1,2}$ jsou poloměry základních kružnic.

Tuhost záběru $c(t)$ nelze přesně popsat. Nejjednodušší, avšak velmi nepřesné, je považovat tuhost za konstantu. Tuhost se však v průběhu záběru mění. Pro lepší popis skutečnosti lze tuhost reprezentovat například Fourierovou řadou,

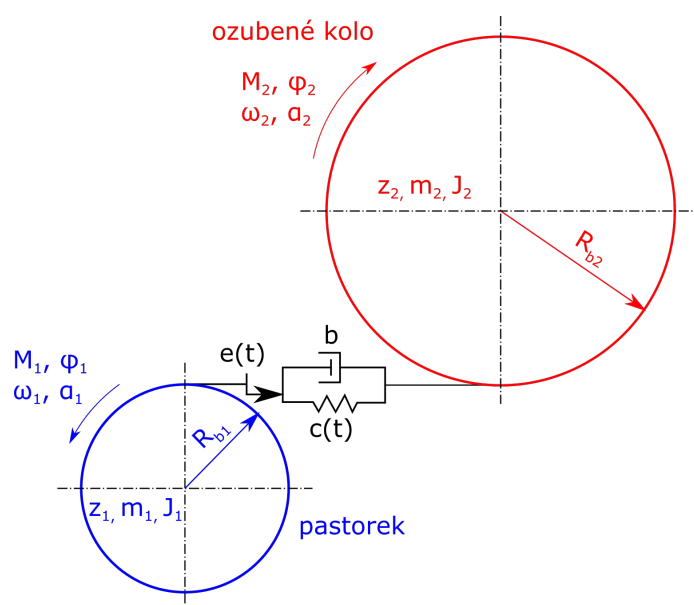
tabulkou hodnot, polynomiální funkcí atd. Tuhost záběru zapsaná Fourierovou řadou by měla předpis:

$$c(t) = c_0 + \sum_{j=1}^J c_j \cos(jf_\omega t + \gamma_j), \quad (2.3)$$

kde f_ω je první zubová frekvence, která se určí jako:

$$f_{\omega 1} = f_{pastorku} \cdot z_1, \quad (2.4)$$

kde $f_{pastorku}$ je úhlová frekvence pastorku a z_1 je počet zubů pastorku.



Obrázek 2.1: Nejjednodušší dynamický model se dvěma stupni volnosti

Chybu převodu $e(t)$ také nelze přesně určit. Ve skutečnosti bude pro každý zub jiná a bude se tedy periodicky opakovat pro každý zub, když bude v záběru. Za předpokladu, že chyba je pouze na zubech pastorku, lze ji také aproximovat Fourierovou řadou:

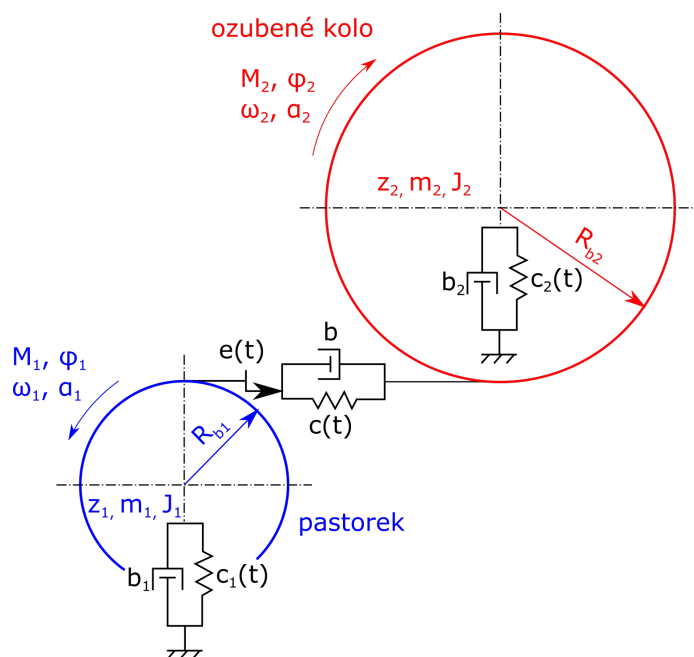
$$e(t) = e_0 + \sum_{m=1}^M e_m \cos(m\omega_p t + \alpha_m), \quad (2.5)$$

kde ω_p vyjadřuje úhlovou rychlost pastorku.

Většina ostatních modelů přistupuje ke stejnému nebo velmi podobnému nahrazení reálného převodu (dvěma disky pružně spojenými silovou vazbou s tlumením). Některé přidávají další stupně volnosti, velká část se však zabývá tím, jak namodelovat co nejpřesněji tuhost $c(t)$ a chybu převodu $e(t)$.

Model se čtyřmi stupni volnosti

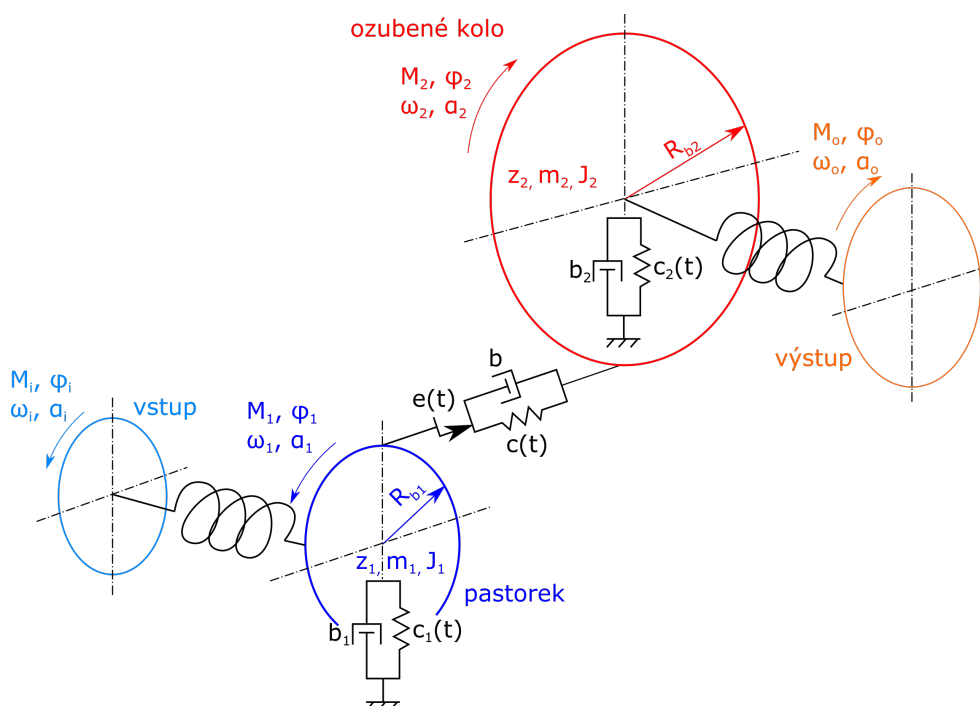
Pro zohlednění ložisek je třeba zavést další dva stupně volnosti. Základem modelu je předchozí model se dvěma stupni volnosti. Přidané stupně volnosti jsou posuvné. Silové vazby jsou modelovány pružinami a tlumiči v podporách (ložiskách) kol. Schéma takového modelu je vidět na obrázku 2.2. Tlumiče jsou charakterizovány koeficienty tlumení b_1 a b_2 , pružiny mají tuhosti $c_1(t)$ a $c_2(t)$.



Obrázek 2.2: Dynamický model se čtyřmi stupni volnosti

Model se šesti stupni volnosti

Model se šesti stupni volnosti je zobrazen na obrázku 2.3. Model zohledňuje i tuhost hřídelů a vlivy hnacích, resp. hnaných prvků. Stupně volnosti jsou



Obrázek 2.3: Dynamický model se šesti stupni volnosti

tedy natočení mezi rámem a vstupem (hřídelová spojka, motor, kolo atd.), pastorkem, kolem a výstupem (hřídelová spojka, motor, kolo atd.) a dále posuvy mezi rámem a pastorkem a rámem a kolem.

Pohybové rovnice lze zapsat v maticovém tvaru:

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{B}\dot{\Phi} + \mathbf{K}\Phi = \mathbf{F}, \quad (2.6)$$

kde \mathbf{M} je matice hmot, \mathbf{B} matice tlumení, \mathbf{K} matice tuhosti, Φ vektor souřadnic a \mathbf{F} vektor sil.

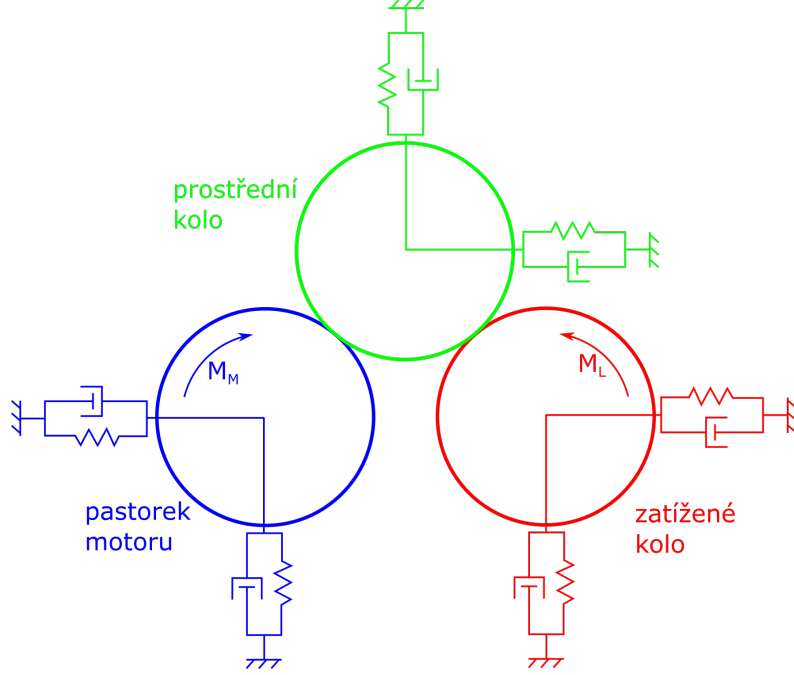
Dynamic Model and Identification of a Spur Gear System [2]

Autoři: S. Buechner, S. Zschaek, A. Amthor, C. Ament, M. Eichhorn

Pracoviště: Ilmenau University of Technology, IAV GmbH

Tento článek pojednává o nelineárním analytickém modelu dvoustupňového ozubeného převodu. Model popisuje ozubený převod jako dvojici odvalujících se hmotných válců se vzájemným třením. Tyto hmoty reprezentují hnací a

hnanou část a jsou spojeny nelineárním členem, který zachycuje tuhost kol, tlumení a vůli. Model má celkem devět stupňů volnosti a je znázorněn na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Schéma dvoustupňového převodu

Dvě hmoty s momenty setrvačností J_M (hnací - na straně motoru) a J_L (hnaná - na straně zátěže) jsou urychlovány součtem momentů na ně působících - moment od motoru M_M , zatěžovací moment M_L , třecí moment M_{Fi} a vazebné momenty K_i :

$$J_M \ddot{\varphi}_M = M_M - M_{FM} - K_M, \quad (2.7)$$

$$J_L \ddot{\varphi}_L = -M_L - M_{FL} + K_L. \quad (2.8)$$

Vazebné momenty K_i jsou popsány vztahy:

$$K_M = R_M \{e[c_K(R_M \varphi_M - R_L \varphi_L) + d_K(R_M \dot{\varphi}_M - R_L \dot{\varphi}_L)]\}, \quad (2.9)$$

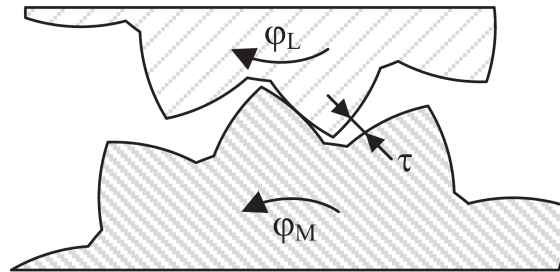
$$K_L = R_L \{e[c_K(R_M \varphi_M - R_L \varphi_L) + d_K(R_M \dot{\varphi}_M - R_L \dot{\varphi}_L)]\}, \quad (2.10)$$

kde R_i je poloměr ozubeného kola, resp. pastorku. Pružné chování je popsáno částí $c_K(R_M \varphi_M - R_L \varphi_L)$, tlumení pak $d_K(R_M \dot{\varphi}_M - R_L \dot{\varphi}_L)$ a zubová vůle je

popsána funkcí e , která je definována jako:

$$e = \begin{cases} 0, & -\frac{\tau}{2} < \Delta\varphi < \frac{\tau}{2}, \\ 1, & |\Delta\varphi| \geq \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (2.11)$$

Pokud je $\Delta\varphi$ v oblasti vůle τ , je vazebný moment nulový, je-li mimo vůli, jsou zuby v záběru a systém se pak chová jako pružina s tlumičem. Toto je znázorněno na obrázku 2.5. Autoři svůj model ověřili experimentem. Model velmi dobře popisoval skutečné chování soustavy.



Obrázek 2.5: Vůle [2]

2.2 Kontaktní modely

Chování dynamických soustav s ozubenými koly je silně nelineární. Proto bylo se zvyšujícími se nároky na přesnost modelů potřeba přijít s komplexnějším modelem. Někteří tak začali nahlížet na dynamiku ozubených převodů už nejen jako na dva rotující disky spojené pružinou a tlumičem, ale začali respektovat i tvar zubu, případně deformace zubů a kol.

V zásadě začaly vznikat dvě skupiny modelů - analytické a FEM (finite element method) modely. [3, 16, 18]

2.2.1 Analytické modely

Analytické modely vycházejí ze samotné geometrie zubu. Počítají různými metodami, jak se boky zubů, jakožto geometrické křivky (přímé ozubení) či plochy, protínají. Z těchto průniků pak počítají kontaktní síly, tlaky, resp. momenty.

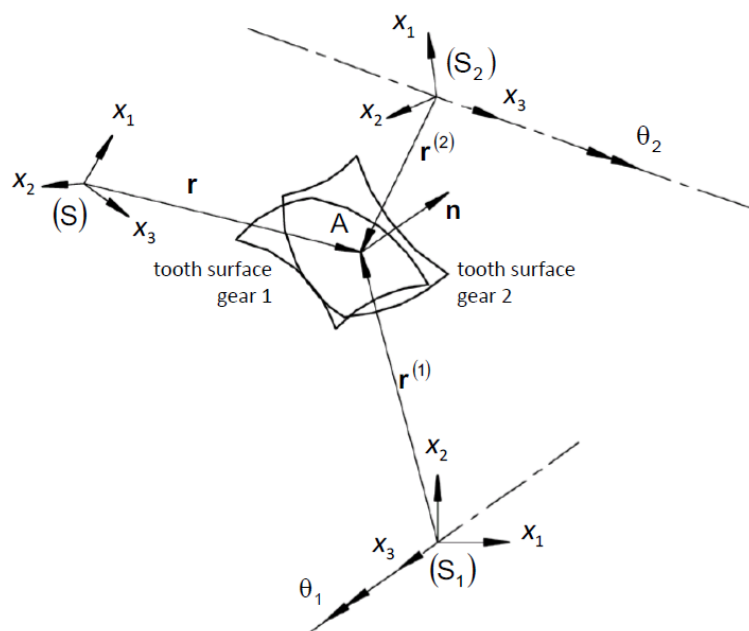
V této kapitole jsou představeny vybrané publikace popisující analytické kontaktní modely ozubení pro dynamické simulace.

Coupled multi-DOF dynamic contact analysis model for the simulation of intermittent gear tooth contacts, impacts and rattling considering backlash and variable torque [3]

Autoři: C. Spitas, V. Spitas

Pracoviště: Delft University of Technology, National Technical University of Athens

Autoři ukazují model kontaktu založený na analytickém výpočtu bodu dotyku při interakci dvou ploch v prostoru (viz obrázek 2.6).



Obrázek 2.6: Geometrická definice kontaktu dvou boků zubů [3]

Dynamic Model of Spur Gear Pair with Modulation Internal Excitation [19]

Autoři: Zhong Wang, Lei Zhang, Yuan-Qing Luo, Chang-Zheng Chen

Pracoviště: Liaoning Institute of Science and Technology, Shenyang University of Technology

V práci [19] autoři simulují a experimentálně ověřují fenomén side band frekvencí vzniklých modulací zubových frekvencí. V simulaci je použit jednoduchý model s proměnnou časově závislou tuhostí a proměnnou chybou převodu.

Tooth Dynamic Contact Simulation and Experimental Validation of Involute Spur Gear [18]

Autoři: Yanping Liu, Xiaohui He, Yongqiang Zhao, Ming Liu

Pracoviště: Harbin Institute of Technology

V článku Tooth Dynamic Contact Simulation and Experimental Validation of Involute Spur Gear je popsán model vytvořený pro řešič Adams. Model počítá průnik dvou zubů jako Hausdorffovu míru dvou křivek. Tato míra určuje minimální vzdálenost dvou křivek - v tomto případě boků zubů. Z tohoto průniku následně počítají kontaktní síly. Výsledky autoři porovnávají s daty získanými z experimentálního měření. Výsledky modelu se poměrně dobře shodovaly s naměřenými hodnotami.

Analytical Gear Mesh Model Using 3D Gear Geometry [16]

Autoři: Z. Neusser, T. Vampola, M. Valášek

Pracoviště: České vysoké učení technické v Praze

Autoři vytvořili model vycházející z prostorové geometrie ozubeného kola. Je určen i pro šikmá ozubení a umožňuje vnést i geometrii skutečného kola (s výrobními chybami atd.). Autoři výsledky modelu porovnávají s jednoduchým modelem podobným modelu popsáném v kapitole 2.1 - Model se dvěma stupni volnosti.

2.2.2 FEM modely

Tyto modely kombinují FEM (Finite Element Method) a MBS (Multibody Simulation) přístupy. Metodou konečných prvků lze velmi přesně modelovat chování ozubení, avšak tyto výpočty jsou velmi časově náročné. [2, 17]

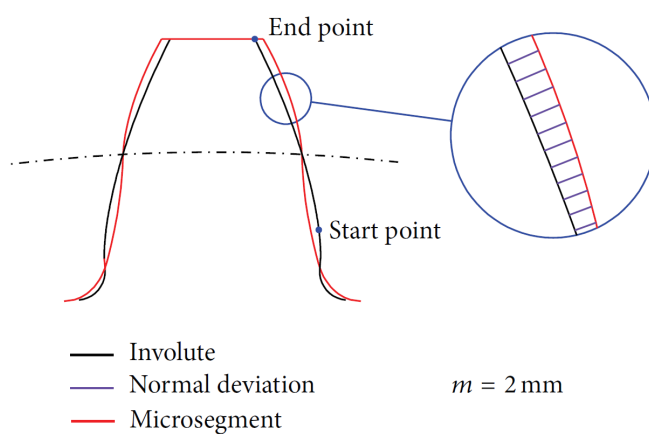
Tato kapitola ukazuje vybrané kontaktní FEM modely ozubení pro dynamické simulace.

Dynamic Modelling and Analysis of the Microsegment Gear [4]

Autoři: Yangshou Xiong, Kang Huang, Tao Wang, Qi Chen, Rui Xu

Pracoviště: Hefei University of Technology

V článku je popsán dynamický model mikrosegmentového kola založený na výpočtu deformace (resp. posunutí) boku zubu. Mikrosegmentový zub (viz obrázek 2.7) má širší kořen než zub evolventní, a proto je tužší.



Obrázek 2.7: Geometrie evolventního a mikrosegmentového kola [4]

Dynamic Modeling of Gear System Based on 3D Finite Element Model and Its Application in Spalling Fault Analysis [20]

Autoři: Zhiguo Wan, Yihua Dou, Yuan Guan, Qi Meng, Suobin Li

Pracoviště: Xi'an Shiyou University

Autoři vytvořili dynamický model na základě 3D FE modelu a CMS (component modal synthesis technique). Kolo, pastorek a hřídele namodelovali pomocí FEM a pomocí CMS vytvořili dynamický model soustavy. Výsledky simulace porovnávají s daty z experimentu. Výsledky ukazují, že model je navržen efektivně a lze ho použít například pro analýzu trhlin zubů.

Combining Finite Element and Multibody Modeling Techniques for Time-Efficient Simulation of Nonlinear Gear Dynamics [17]

Autoři: Jakub Korta, Antonio Palermo, Domenico Mundo, Shadi Shweiki

Pracoviště: University of Calabria

Vzhledem k velké časové náročnosti FEM modelů vytvořili autoři model kombinující FEM a MBS přístup. Pomocí FEM určili statickou chybu převodu, která pak byla vstupem do MBS. Touto kombinací se podařilo vytvořit model věrně zachycující skutečnost s řádově menší časovou náročností na výpočet než klasické FEM modely.

2.3 Komerční software

Při návrhu ozubených převodů lze v praxi použít některý z komerčních softwarů. Mezi ně patří například Siemens LMS Virtual Lab, Adams, Abaqus, KISSsoft, COMSOL Multiphysics nebo třeba FEV Virtual Gearbox. Zmíněné softwary kombinují FEM a MBS. Mimo to existují například i programy Matlab Simulink, MADYN 2000 a RecurDyn, které fungují jen jako MBS. [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]

Praktická část

Pro svou bakalářskou práci jsem vytvořil dva modely, které představuji v této kapitole. Oba mají dva stupně volnosti. První odpovídá nejjednoduššímu modelu, kterým lze dynamiku ozubeného převodu popsat. Druhý model je analytický kontaktní. Kontaktní model vychází z článku [16].

Oba modely jsou vytvořeny v programu MATLAB R2020b a jsou určeny pro čelní přímé nekorigované evolventní ozubení.

3.1 Jednoduchý model

Tento model se dvěma stupni volnosti nahrazuje ozubená kola dvojicí rotujících válců s momenty setrvačnosti J_1 a J_2 spojené pružinou o konstantní tuhosti k , tlumičem s konstantou tlumení b a zatížené vnějšími momenty M_1 a M_2 . Vstupy do modelu jsou kromě M_1, M_2, k a b ještě počty zubů kol z_1 a z_2 , jejich normálový modul m_n , úhel záběru α , šířka pastorku a kola T_1 a T_2 a hustoty materiálů ρ_1 a ρ_2 . Z těchto hodnot jsou počítány momenty setrvačnosti J_1 a J_2 dle rovnice 3.1:

$$J_j = \frac{1}{2} \cdot m_j \cdot R_j^2, \quad j \in [1, 2], \quad (3.1)$$

kde m_j je hmotnost pastorku, resp. kola a R_j je poloměr roztečné kružnice. Tyto hodnoty získáme ze vztahů:

$$R_j = \frac{z_j \cdot m_n}{2}, \quad j \in [1, 2], \quad (3.2)$$

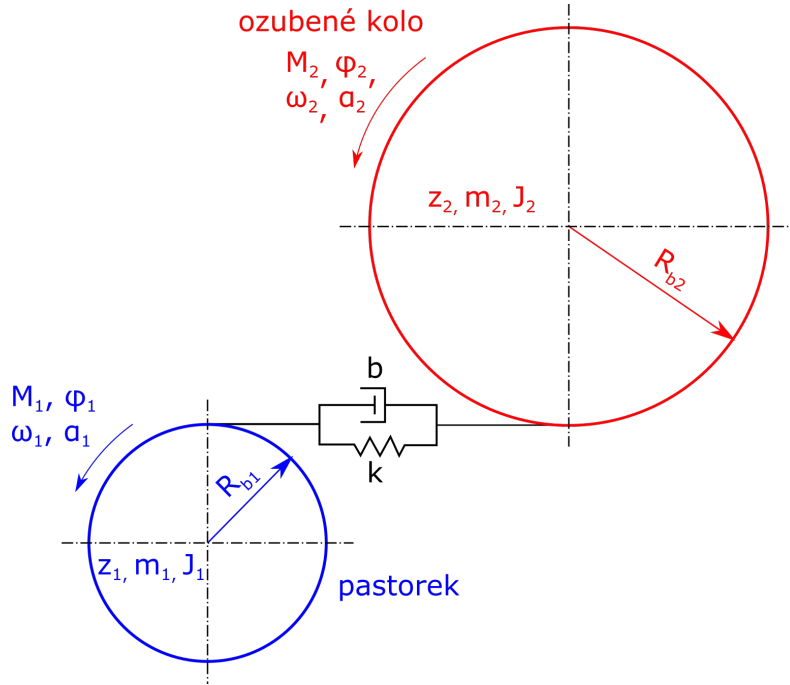
3. PRAKTICKÁ ČÁST

$$m_j = \pi \cdot R_j^2 \cdot T_j \cdot \rho_j, \quad j \in [1, 2]. \quad (3.3)$$

Kombinací těchto vztahů dostaneme:

$$J_j = \frac{1}{32} \cdot \pi \cdot (z_j \cdot m_n)^4 \cdot T_j \cdot \rho_j, \quad j \in [1, 2]. \quad (3.4)$$

Dále je potřeba zadat počáteční podmínky - počáteční rychlost otáčení pastorku $\omega_1(0)$, kola $\omega_2(0)$ a jejich počáteční natočení $\varphi_1(0)$ a $\varphi_2(0)$. Na obrázku 3.1 je schéma tohoto modelu.



Obrázek 3.1: Schéma jednoduchého modelu

Pohybové rovnice jsou:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + R_{b1} b (R_{b1} \dot{\varphi}_1 - R_{b2} \dot{\varphi}_2) + R_{b1} k (R_{b1} \varphi_1 - R_{b2} \varphi_2) = M_1, \quad (3.5)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + R_{b2} b (-R_{b1} \dot{\varphi}_1 + R_{b2} \dot{\varphi}_2) + R_{b2} k (-R_{b1} \varphi_1 + R_{b2} \varphi_2) = M_2, \quad (3.6)$$

kde $J_j \ddot{\varphi}_j$ reprezentuje setrvačné účinky hmot. Síla v kontaktu má dvě složky: $k(R_{bj}\varphi_j - R_{bk}\varphi_k)$ reflektující tuhost zátěhu a $b(R_{bj}\dot{\varphi}_j - R_{bk}\dot{\varphi}_k)$ zahrnuje tlumení materiálů. Dle publikace [31] lze pohybové rovnice zapsat v maticovém

tvaru:

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{B}\dot{\Phi} + \mathbf{K}\Phi = \mathbf{F}, \quad (3.7)$$

kde \mathbf{M} je matice hmot:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

Φ je vektor úhlů natočení kol a $\dot{\Phi}$, $\ddot{\Phi}$ jsou jeho první a druhá časová derivace, tedy vektor úhlových rychlostí a vektor úhlových zrychlení:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\Phi} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\Phi} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

\mathbf{B} je matice tlumení:

$$\mathbf{B} = b \cdot \mathbf{R}, \quad (3.10)$$

kde \mathbf{R} je distribuční matice:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{b1}^2 & -R_{b1}R_{b2} \\ -R_{b1}R_{b2} & R_{b2}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

\mathbf{K} je matice tuhosti:

$$\mathbf{K} = k \cdot \mathbf{R}, \quad (3.12)$$

\mathbf{F} je vektor vnějšího zatížení:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Po vytknutí matice \mathbf{R} z matic \mathbf{B} a \mathbf{K} lze zápis pohybových rovnic zjednodušit na:

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{R}(b\dot{\Phi} + k\Phi) = \mathbf{F}. \quad (3.14)$$

Maticový tvar pohybových rovnic je tedy:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{b1}^2 & -R_{b1}R_{b2} \\ -R_{b1}R_{b2} & R_{b2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b\dot{\varphi}_1 + k\varphi_1 \\ b\dot{\varphi}_2 + k\varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Je zřejmé, že se jedná o soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu. Vzhledem k řešení pomocí softwaru MATLAB je nutné převést soustavu na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu. Proto je potřeba z rovnice 3.14 vyjádřit vektor zrychlení:

$$\ddot{\Phi} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{R}(b\dot{\Phi} + k\Phi)), \quad (3.16)$$

3. PRAKTICKÁ ČÁST

což je možné zapsat jako:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{b1}^2 & -R_{b1}R_{b2} \\ -R_{b1}R_{b2} & R_{b2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b\dot{\varphi}_1 + k\varphi_1 \\ b\dot{\varphi}_2 + k\varphi_2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.17)$$

Nyní lze soustavu převést na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad (3.18)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2, \quad (3.19)$$

$$\dot{\omega}_1 = \alpha_1 = \frac{M_1 - [R_{b1}^2(b\omega_1 + k\varphi_1) - R_{b1}R_{b2}(b\omega_2 + k\varphi_2)]}{J_1}, \quad (3.20)$$

$$\dot{\omega}_2 = \alpha_2 = \frac{M_2 - [R_{b2}^2(b\omega_2 + k\varphi_2) - R_{b1}R_{b2}(b\omega_1 + k\varphi_1)]}{J_2}, \quad (3.21)$$

což se dá podle postupu v [32] přepsat pro větší přehlednost do maticového tvaru:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{Q}, \quad (3.22)$$

kde \mathbf{X} je vektor neznámých a $\dot{\mathbf{X}}$ je derivací tohoto vektoru, tedy vektor derivací neznámých:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

\mathbf{P} , \mathbf{Q} jsou matice a vektor popisující danou soustavu. Dosazením z rovnic 3.18-3.21 vznikne:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{kR_{b1}^2}{J_1} & \frac{kR_{b1}R_{b2}}{J_1} & -\frac{bR_{b1}^2}{J_1} & \frac{bR_{b1}R_{b2}}{J_1} \\ \frac{kR_{b1}R_{b2}}{J_2} & -\frac{kR_{b2}^2}{J_2} & \frac{bR_{b1}R_{b2}}{J_2} & -\frac{bR_{b2}^2}{J_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_1}{J_1} \\ \frac{M_2}{J_2} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Po dosazení dostaneme soustavu:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{kR_{b1}^2}{J_1} & \frac{kR_{b1}R_{b2}}{J_1} & -\frac{bR_{b1}^2}{J_1} & \frac{bR_{b1}R_{b2}}{J_1} \\ \frac{kR_{b1}R_{b2}}{J_2} & -\frac{kR_{b2}^2}{J_2} & \frac{bR_{b1}R_{b2}}{J_2} & -\frac{bR_{b2}^2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_1}{J_1} \\ \frac{M_2}{J_2} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme časové průběhy všech neznámých $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\omega_1(t)$ a $\omega_2(t)$.

3.2 Kontaktní model

Jako druhý model jsem vytvořil kontaktní model se dvěma stupni volnosti. Vycházím z modelu popsaného ve článku [16]. Model je určen pro přímé čelní ozubení. Kola jsou modelována jako dva hmotné válce. Momenty setrvačnosti J_1 a J_2 jsou převzaty z předchozího modelu, kola jsou zatížena vnějšími momenty M_1 a M_2 . Silová vazba mezi válci je realizována kontaktní silou $F(t)$ a tlumena tlumičem s konstantou tlumení b . Kontaktní síla $F(t)$ je počítána z průniku $\Delta_p(\varphi)$ zubů v rovině záběru:

$$F(t) = k \cdot \Delta_p(\varphi). \quad (3.26)$$

Vstupními veličinami modelu jsou kromě M_1, M_2, k a b ještě počty zubů kol z_1 a z_2 , jejich normálový modul m_n , úhel záběru α , šířka pastorku a kola T_1 a T_2 a hustoty materiálů ρ_1 a ρ_2 . Stejně jako v předchozím modelu jsou z těchto hodnot počítány momenty setrvačnosti J_1 a J_2 dle rovnice 3.1. Opět je potřeba zadat i počáteční podmínky - počáteční rychlost otáčení pastorku $\omega_1(0)$, kola $\omega_2(0)$ a jejich počáteční natočení $\varphi_1(0)$ a $\varphi_2(0)$.

3.2.1 Výpočet průniku zubů

Jak je vysvětleno v článku [16], průnik zubů vzniká v důsledku rozdílného natočení kol. Samotný průnik jednoho páru zubů $\Delta p_z(\varphi)$ určíme z obrázku 3.2 a získáme vztah 3.27:

$$\Delta p_z(\varphi) = \rho_1 + \rho_2 - L. \quad (3.27)$$

Průnik $\Delta p_z(\varphi)$ je vždy nulový nebo větší než nula. Pokud by vyšel záporný, znamená to, že je mezi zuby mezera a bere se jako nulový (viz 3.28).

$$\Delta p_z(\varphi) \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \Delta p_z(\varphi) = 0, \\ = 0 & \Rightarrow \Delta p_z(\varphi) = 0, \\ > 0 & \Rightarrow \Delta p_z(\varphi) = \Delta p_z(\varphi). \end{cases} \quad (3.28)$$

L je délka přímky záběru a ρ_1 a ρ_2 jsou dány vztahy:

$$\rho_1 = \Psi_1 R_{b1}, \quad (3.29)$$

3. PRAKTICKÁ ČÁST

$$\rho_2 = \Psi_2 R_{b2}, \quad (3.30)$$

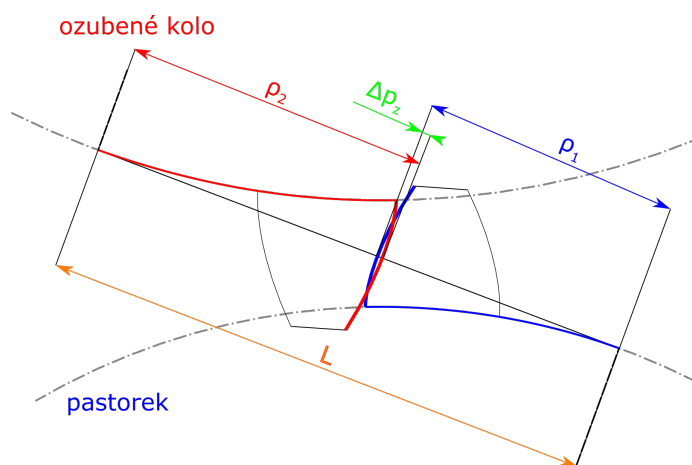
$$L = \sqrt{o_s^2 - (R_{b1} + R_{b2})^2}, \quad (3.31)$$

kde o_s je osová vzdálenost kol, Ψ_1 a Ψ_2 jsou úhly, které svírá daný konec přímky záběru s počátečním bodem boku zubu na základní kružnici, viz obrázek 3.3. Tyto dva úhly určíme ze vztahů:

$$\Psi_1 = (-90^\circ + \alpha + \varphi_{z1}(t)) \bmod (2\pi), \quad (3.32)$$

$$\Psi_2 = (90^\circ + \alpha + \varphi_{z2}(t)) \bmod (2\pi), \quad (3.33)$$

kde φ_{z1} a φ_{z2} jsou úhly počátků boků zubů (s respektováním natočení kol φ_1 a φ_2).

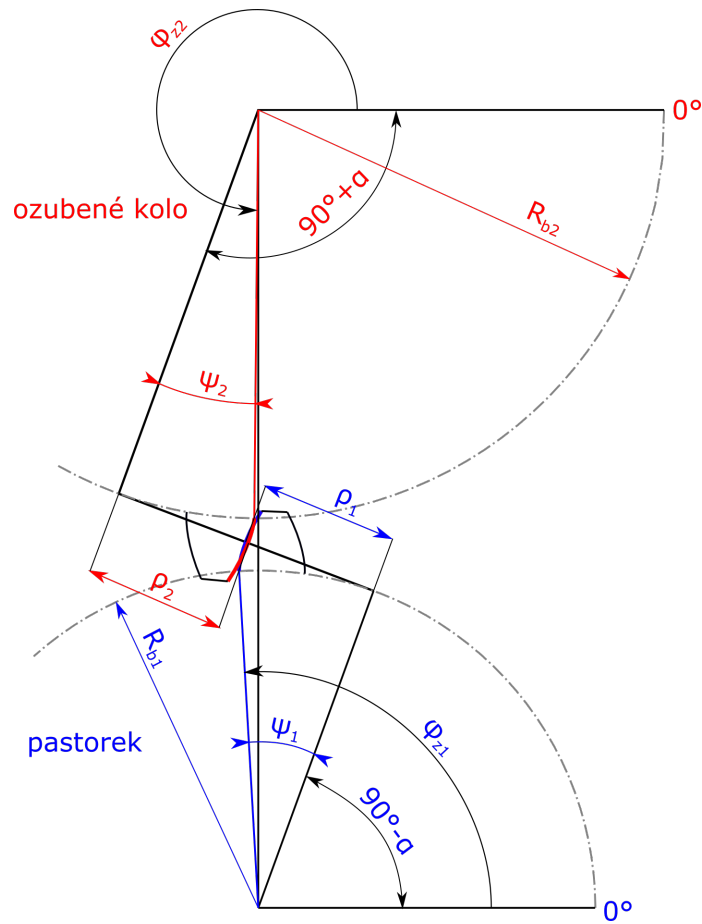


Obrázek 3.2: Průnik zubů

Takto vypočítáme průnik jednoho zubu. Při záběru však většinou zabírá víc než jeden pár zubů, proto je potřeba sečíst veškeré průniky právě zabírajících zubů:

$$\Delta_p(\varphi) = \sum_{z=1}^Z \Delta p_z(\varphi), \quad (3.34)$$

kde Z je počet zubů v záběru.

Obrázek 3.3: Výpočet ρ_1 a ρ_2

3.2.2 Dynamická simulace

Maticově lze dynamické rovnice popisující tento model zapsat rovnicí:

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{B}\dot{\Phi} + \mathbf{K}(\varphi) = \mathbf{F}, \quad (3.35)$$

kde \mathbf{M} je matice hmot:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

$\dot{\Phi}$, $\ddot{\Phi}$ jsou vektory úhlových rychlostí a vektor úhlových zrychlení:

$$\dot{\Phi} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\Phi} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

3. PRAKTICKÁ ČÁST

\mathbf{B} je matice tlumení:

$$\mathbf{B} = b \cdot \begin{bmatrix} R_{b1}^2 & -R_{b1}R_{b2} \\ -R_{b1}R_{b2} & R_{b2}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

$\mathbf{K}(\varphi)$ je vektor tuhosti:

$$\mathbf{K}(\varphi) = \begin{bmatrix} k\Delta_p(\varphi)R_{b1} \\ k\Delta_p(\varphi)R_{b2} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

\mathbf{F} je vektor vnějšího zatížení:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Pohybové rovnice zapsané v maticovém tvaru jsou tedy:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} R_{b1}^2 & -R_{b1}R_{b2} \\ -R_{b1}R_{b2} & R_{b2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k\Delta_p(\varphi)R_{b1} \\ k\Delta_p(\varphi)R_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Stejně jako v předchozím modelu se jedná o soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu, kterou je nyní nutné převést na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu. Proto je potřeba z pohybové rovnice 3.35 vyjádřit vektor zrychlení:

$$\ddot{\Phi} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{B}\dot{\Phi} - \mathbf{K}(\varphi)), \quad (3.42)$$

což lze zapsat jako:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} R_{b1}^2 & -R_{b1}R_{b2} \\ -R_{b1}R_{b2} & R_{b2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k\Delta_p(\varphi)R_{b1} \\ k\Delta_p(\varphi)R_{b2} \end{bmatrix} \right). \quad (3.43)$$

Nyní lze soustavu převést na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad (3.44)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \omega_2, \quad (3.45)$$

$$\dot{\omega}_1 = \alpha_1 = \frac{M_1 - k\Delta_p(\varphi)R_{b1} - b(\omega_1 R_{b1}^2 - R_{b1}R_{b2}\omega_2)}{J_1}, \quad (3.46)$$

$$\dot{\omega}_2 = \alpha_2 = \frac{M_2 - k\Delta_p(\varphi)R_{b2} + b(R_{b1}R_{b2}\omega_1 - \omega_2R_{b2}^2)}{J_2}. \quad (3.47)$$

Opět tyto rovnice můžeme dle postupu v [32] přepsat pro větší přehlednost do maticového tvaru:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{Q}(t, X), \quad (3.48)$$

kde \mathbf{X} je vektor neznámých a $\dot{\mathbf{X}}$ je derivací tohoto vektoru, tedy vektor derivací neznámých:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

\mathbf{P} , $\mathbf{Q}(t, X)$ jsou matice a vektor popisující danou soustavu. Po dosazení z rovnice 3.27 vznikne:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{bR_{b1}^2}{J_1} & \frac{bR_{b1}R_{b2}}{J_1} \\ 0 & 0 & \frac{bR_{b1}R_{b2}}{J_2} & -\frac{bR_{b1}^2}{J_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}(t, X) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_1 - k\Delta_p(\varphi)R_{b1}}{J_1} \\ \frac{M_2 - k\Delta_p(\varphi)R_{b2}}{J_2} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Dosazením do rovnice 3.48 dostáváme soustavu:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{bR_{b1}^2}{J_1} & \frac{bR_{b1}R_{b2}}{J_1} \\ 0 & 0 & \frac{bR_{b1}R_{b2}}{J_2} & -\frac{bR_{b1}^2}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_1 - k\Delta_p(\varphi)R_{b1}}{J_1} \\ \frac{M_2 - k\Delta_p(\varphi)R_{b2}}{J_2} \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Řešením takové soustavy jsou časové průběhy všech čtyř neznámých $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\omega_1(t)$ a $\omega_2(t)$.

3.3 Výsledky modelů

3.3.1 Měření

Testovací prostředí

Výpočty probíhaly na notebooku HP Pavillion 15 se čtyřjádrovým procesorem Intel® Core™ i5-7300HQ s frekvencí 2,50 GHz, 8 GB RAM a 64bitovým

3. PRAKTICKÁ ČÁST

operačním systémem Windows 10 Home.

Modely byly vytvořeny v programu MATLAB R2020b.

Parametry modelu

Počáteční podmínky pro simulaci byly rovnovážné, úhly natočení $\varphi_1(0)$ a $\varphi_2(0)$ byly nastaveny tak, aby se zuby právě dotýkaly, a úhlové rychlosti $\omega_1(0)$ a $\omega_2(0)$ byly nastaveny v poměru:

$$\frac{\omega_2(0)}{\omega_1(0)} = -\frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \omega_2(0) = -\omega_1(0) \cdot \frac{z_1}{z_2}, \quad (3.52)$$

$$\text{pro } \omega_1(0) = \frac{\omega_{1RPM} \cdot \pi}{30}, \quad (3.53)$$

pro ω_{1RPM} viz tabulka 3.1. Zatěžující momenty M_1 a M_2 byly nastaveny v poměru:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{M_2}{M_1} \Rightarrow M_2 = M_1 \cdot \frac{z_2}{z_1} \quad (3.54)$$

Při nastavení parametrů dle tabulky 3.1 trvalo testování jednoduchého modelu na výše zmíněném počítači zhruba minutu a půl. Oproti tomu výpočet kontaktního modelu trval se stejně nastavenými parametry necelých šestnáct hodin.

	Označení	Pastorek	Kolo	jednotky
Počet zubů	z	19	23	-
Úhel záběru	α	20		°
Normálový modul	m_n	1,75		mm
Šířka	T	20		mm
Vnější moment	M	10	12,105	N · m
Hustota materiálu	ρ	7 250		kg · m ⁻³
Tuhost	k	400 000		N · m ⁻¹
Konstanta tlumení	b	4		kg · s ⁻¹
Vzorkovací frekvence	F_s	200 000		Hz
Poč. rychlost otáčení ω_{1RPM}	ω_{1RPM}	0 až 20 000 po 500		min ⁻¹
Délka simulace	t	t= 1		s

Tabulka 3.1: Parametry modelu

Výstupy modelů

Výstupy z modelů jsou časové průběhy natočení pastorku a kola $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ a jejich derivace - úhlové rychlosti $\omega_1(t)$ a $\omega_2(t)$. Z kontaktního modelu je samozřejmě možné dostat i časové průběhy průniku $\Delta_p(t)$ a kontaktní síly $F(t)$. Fourierovou transformací těchto průběhů lze získat frekvenční charakteristiky modelu pro jednotlivé budící frekvence a složením těchto charakteristik dostat frekvenční spektrum modelu (Campbellův diagram).

3.3.2 Výsledky

Výsledky jednoduchého modelu

Na obrázku 3.4 je zobrazen časový průběh úhlové rychlosti pastorku. Ta kmitá ve velmi malém rozsahu kolem střední hodnoty, ke které se vlivem tlumení neustále přibližuje. Časové průběhy natočení kol a pastorku jsou zobrazeny na obrázku 3.5. Průběhy se jeví jako lineární, avšak stejně jako rychlost budou kmitat s velmi malou výchylkou.

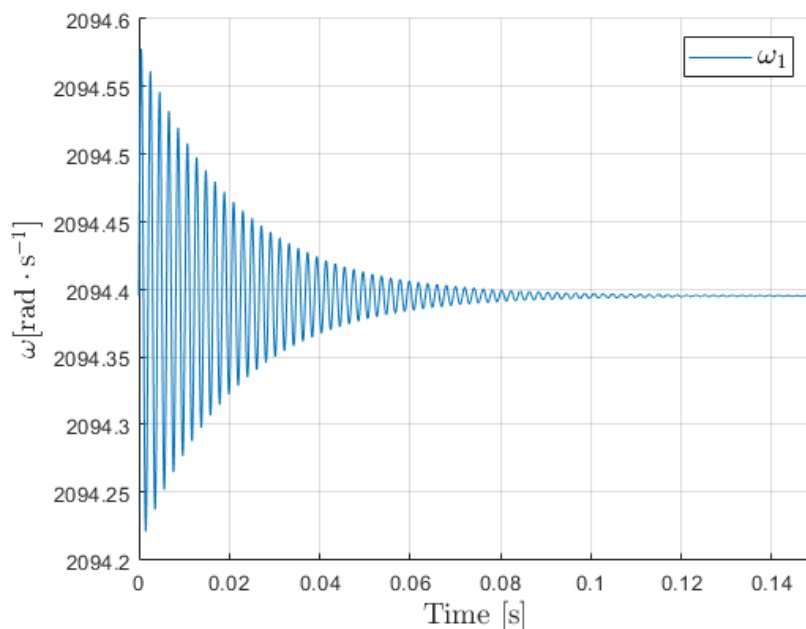
Fourierovou transformací průběhu $\omega_1(t)$ jsem získal frekvenční charakteristiku, viz obrázek 3.6. Spojením frekvenčních charakteristik pro více různých rychlostí ω_1 jsem byl schopen vytvořit Campbellův diagram 3.7. V obou diagramech 3.6 i 3.7 je výrazná jediná frekvence - vlastní frekvence soustavy. Ta má hodnotu $f = 489$ Hz.

Výsledky kontaktního modelu

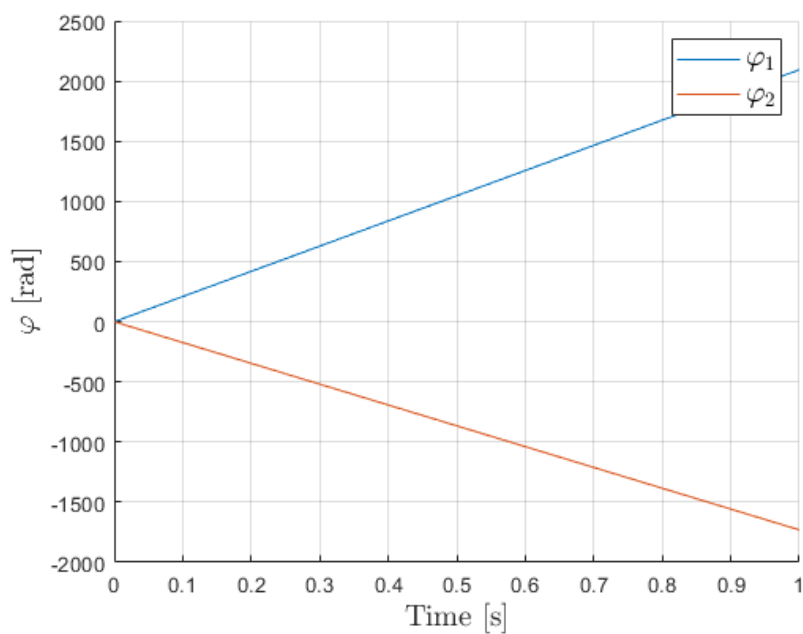
Jak je popsáno v kapitole 3.2, kontaktní síla je počítána z průniku zubů Δ_p , který se určí vztahem 3.34. Pro výpočet průniku zubů je potřeba znát polohu jednotlivých zubů a vědět, které zuby jsou právě v kontaktu. Počet zubů v kontaktu je proměnný. Průběh rychlosti otáčení pastorku ω_1 a průběhy natočení φ_1 , φ_2 jsou zobrazeny v grafech 3.8 a 3.9.

Na obrázku 3.10 je pak frekvenční charakteristika při počáteční rychlosti pastorku $\omega_{1RPM} = 6\,000 \text{ min}^{-1}$. Na tomto grafu je dobře vidět, že model zachycuje kromě vlastní frekvence i frekvence zubové. Vlastní frekvence tohoto modelu je $f = 302$ Hz. Při rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 1000 \text{ min}^{-1}$ je první

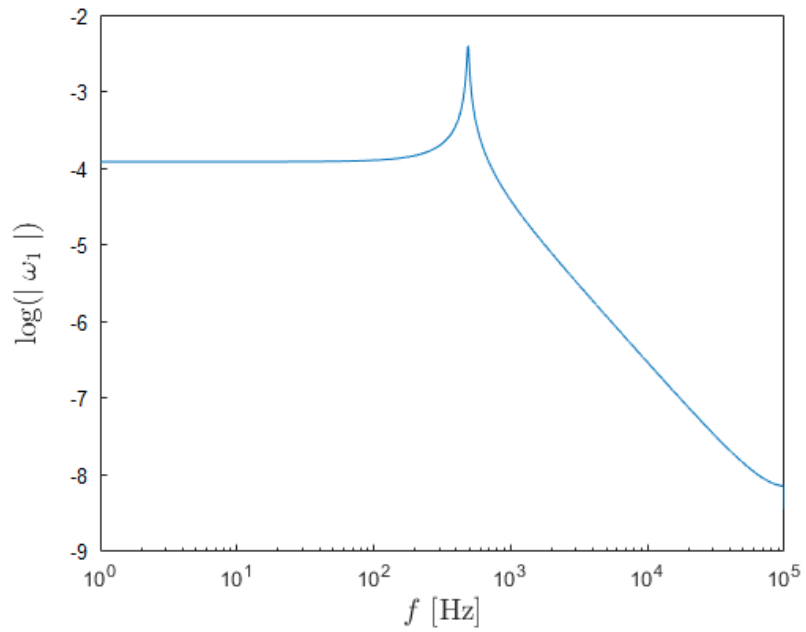
3. PRAKTICKÁ ČÁST



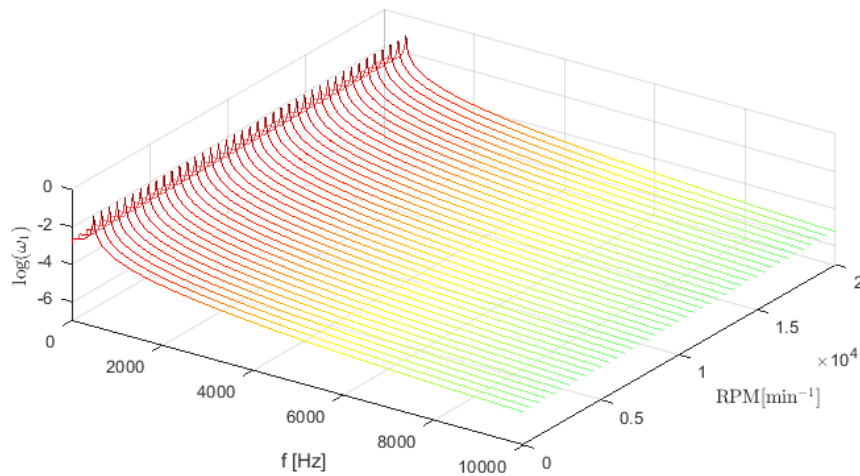
Obrázek 3.4: Průběh úhlové rychlosti pastorku $\omega_1(t)$ v jednoduchém modelu při počáteční rychlosti $\omega_{1RPM} = 20\,000 \text{ min}^{-1}$



Obrázek 3.5: Průběhy natočení pastorku $\varphi_1(t)$ a kola $\varphi_2(t)$ v jednoduchém modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 20\,000 \text{ min}^{-1}$



Obrázek 3.6: Frekvenční charakteristika jednoduchého modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 20\,000 \text{ min}^{-1}$



Obrázek 3.7: Campbellův diagram jednoduchého modelu pro počáteční rychlosti otáčení pastorku ω_{1RPM} od 0 do $20\,000 \text{ min}^{-1}$

3. PRAKTICKÁ ČÁST

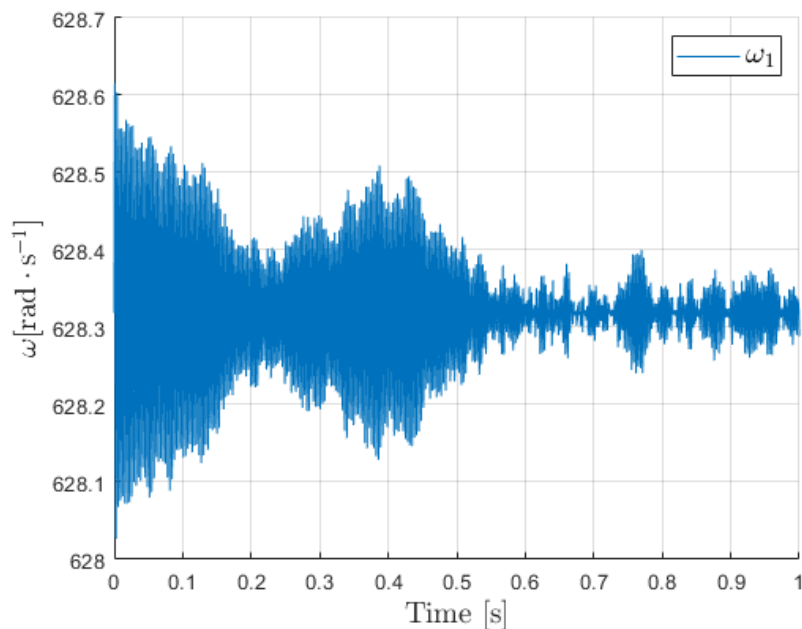
($i = 1$) zubová frekvence rovna:

$$f_{1z} = i \cdot \frac{\omega_{1RPM} \cdot z_1}{60}, \quad (3.55)$$

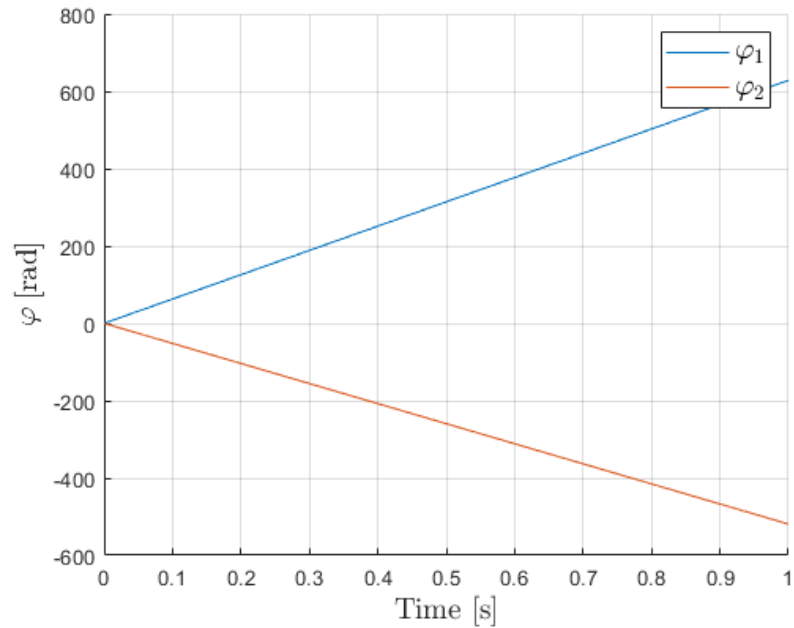
$$f_{1z1} = 1 \cdot \frac{1\,000 \cdot 19}{60} \approx 316,67 \text{ Hz}. \quad (3.56)$$

Jelikož jsou tyto dvě frekvence velmi blízko sebe, dojde k výraznému rozkmitání soustavy. Tento jev je dobře vidět v Campbellově diagramu 3.11.

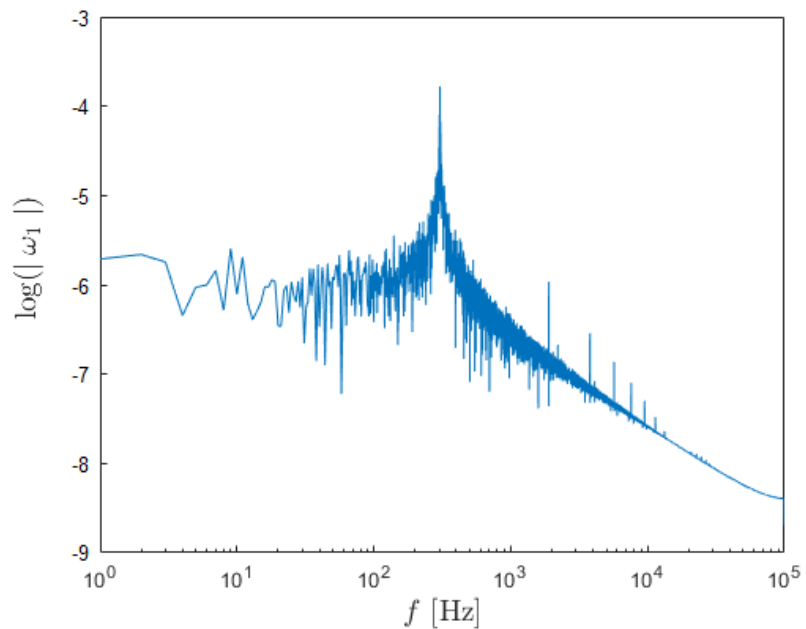
V Campbellově diagramu 3.12 jsou zvýrazněny některé důležité frekvence - vlastní (*eig*) a prvních sedm zubových (1, 2, ..., 7). Tyto frekvence lze u tohoto systému snadno určit ze vztahu 3.55. Pokud by byl model rozšířen o další členy, například ložiska, další převody, hřídele atd., vznikaly by i další výrazné frekvence. [16]



Obrázek 3.8: Průběh úhlové rychlosti pastorku $\omega_1(t)$ v kontaktním modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 6\,000 \text{ min}^{-1}$

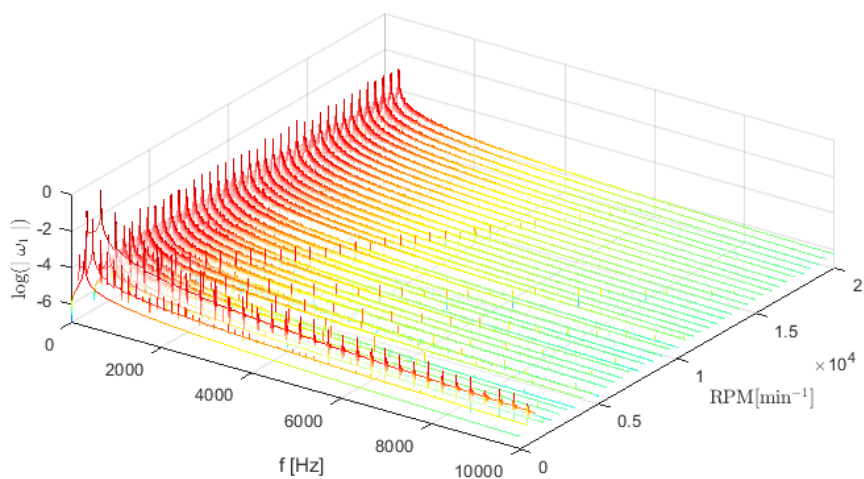


Obrázek 3.9: Průběhy natočení pastorku $\varphi_1(t)$ a kola $\varphi_2(t)$ v kontaktním modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 6\,000\text{ min}^{-1}$

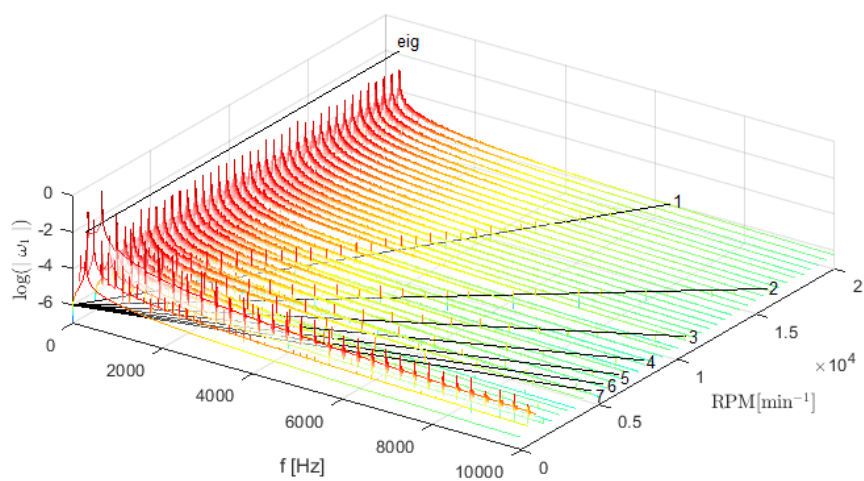


Obrázek 3.10: Frekvenční charakteristika kontaktního modelu při počáteční rychlosti otáčení pastorku $\omega_{1RPM} = 6\,000\text{ min}^{-1}$

3. PRAKTICKÁ ČÁST



Obrázek 3.11: Campbellův diagram kontaktního modelu pro počáteční rychlosti otáčení pastorku ω_{1RPM} od 0 do 20 000 min^{-1}



Obrázek 3.12: Campbellův diagram kontaktního modelu pro počáteční rychlosti otáčení pastorku ω_{1RPM} od 0 do 20 000 min^{-1} s vyznačenými vybranými významnými frekvencemi

Porovnání modelů

Každý model přistupuje k popisu problému ozubeného převodu zcela odlišným způsobem. Zatímco jednoduchý model bere ozubený převod z dynamického pohledu nejjednodušším možným způsobem, přístup kontaktního modelu je mnohem komplexnější a zohledňuje geometrii zubů a převod jako kontaktní děj. Dostáváme tak dva úplně různé výsledky. Jednoduchý model je sice výrazně rychlejší (výpočet kontaktního modelu trvá zhruba $150\times$ až $500\times$ déle), ale kromě vlastní frekvence z něj nezískáme prakticky žádné další užitečné informace. Kontaktní model je časově výrazně náročnější na výpočet, ale oproti jednoduchému modelu více odpovídá skutečnosti. Kromě vlastní frekvence zachycuje i rezonanci a zubové frekvence.

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo seznámit se s problematikou modelování záběru ozubených kol, vytvoření simulačního modelu záběru čelního ozubení s přímými zuby založeného na znalosti geometrie kontaktu, provedení frekvenční analýzy ozubeného převodu a zhodnocení vytvořeného modelu záběru ozubení.

V první části jsem se zabýval problematikou ozubení, kde jsem stručně popsal historii ozubení, využití, typy a geometrii evolventního zubu. Následně jsem se seznámil s publikacemi zabývajícími se tématem dynamických simulací ozubení a krátce tyto práce představil. V poslední části jsem pak popsal a zhodnotil dva modely, které jsem vytvořil pro tuto práci. Tím považuji cíle mé bakalářské práce za naplněné.

Vytvořené modely se od sebe zásadně liší. Jednoduchý model nahlíží na dynamiku ozubeného převodu nejjednodušším způsobem, kontaktní model respektuje komplikovanost kinematiky kontaktu dvou evolventních profilů. Vytvořený kontaktní model měl za cíl poskytnout relativně rychlý způsob výpočtu dynamického chování ozubeného převodu, který bude co nejpřesněji popisovat skutečnost. Tento model kromě vlastní frekvence zachycuje i zubové frekvence a rezonanci. Čas potřebný pro výpočet je oproti jednoduchému modelu výrazně vyšší (zhruba $150\times$ až $500\times$, dle nastavených parametrů). Lze očekávat, že FEM model by byl na čas výpočtu ještě výrazně náročnější a přitom by nepřinesl žádné další významné informace. Proto mohu mnou vytvořený kontaktní model považovat za rychlý.

Charaktery výsledků obou vytvořených modelů odpovídají očekávání a jsou velmi podobné výsledkům, které jsou popsány v článku [33], kde měli autoři k dispozici i naměřená data.

V budoucnu by bylo možné kontaktní model 3.2 dále poměrně snadno upravit i pro jiné typy ozubení (šikmé, vnitřní atd.), vnést do něj skutečný tvar zubu, rozšířit o výpočet kontaktní tuhosti, poddajnosti zubů atd. Model by mohl být využit pro komplexnější analytické modely převodových mechanismů.

Literatura

- [1] BOLEK, Alfréd a Josef KOCHMAN. *Části strojů. 2. svazek*. 5. přeprac. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1990. Česká matice technická, č. spisu 432, roč. 95 (1990). ISBN 80-03-00426-8.
- [2] BÜCHNER, Steffen, ZSCHAECK, S., AMTHOR, Arvid, AMENT, Christoph a EICHHORN, M. Dynamic Model and Identification of a Spur Gear System. In *15th IASTED International Conference on Control and Applications*, 2013. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/259894893_Dynamic_Model_and_Identification_of_a_Spur_Gear_System
- [3] SPITAS, Vasilios, SPITAS, Christos. Coupled multi-DOF dynamic contact analysis model for the simulation of intermittent gear tooth contacts, impacts and rattling considering backlash and variable torque. *Journal of Mechanical Engineering Science*. 2015, 1022-1047. ISSN: 2058-3389. Dostupné z: <https://doi.org/10.1177/0954406215596696>
- [4] XIONG, Yangshou, HUANG, Kang, WANG, Tao, CHEN, Qi a XU, Rui. Dynamic Modelling and Analysis of the Microsegment Gear. *Shock and Vibration*. 2016, 1-13. ISSN: 1875-9203. Dostupné z: <https://doi.org/10.1155/2016/9691647>
- [5] RONQUILOLLO, Romina. Understanding Gears. In: *Thomasnet* [online]. [cit. 7.5.2021]. Dostupné z: <https://www.thomasnet.com/articles/machinery-tools-supplies/understanding-gears/>

- [6] A Brief History of Gears. *Gear Technology*. Elk Grove Village: American Gear Manufacturers Association, 1999, July/August, 64. ISSN 0743-6858. Dostupné z: <https://www.geartechnology.com/issues/0799x/gt0799.pdf>
- [7] Federal Gear. A Short History of Gears and Where Gear Manufacturing is Today. In: *Federal Gear* [online]. Ohio: Federal Gear, 6.12.2016 [cit. 7.5.2021]. Dostupné z: <https://www.federalgear.com/blog/a-short-history-of-gears-and-where-gear-manufacturing-is-today>
- [8] Apex Dynamics. Gear History - where do gearboxes originate?. *Apex Dynamics* [online]. Helmond. 11.6.2015 [cit. 7.5.2021]. Dostupné z: <https://www.apexdyna.nl/en/gear-history>
- [9] DUBETS, Alexander. History of Gears. In: *ugears.online* [online]. London: UGEARS. 4.8.2017 [cit. 7.5.2021]. Dostupné z: <https://ugears.online/blogs/news/history-of-gears>
- [10] MOZIMTEC. Involute Gears. In: *MOZIMTEC* [online]. Puebla: MOZIMTEC. 12.1.2017 [cit. 7.5.2021]. Dostupné z: <http://www.mozimtec.de/a1.html>
- [11] KORKA, Zoltan-Iosif a Ion-Cornel MITULETU. *A Review of Dynamic Models Used in Simulation of Gear Transmissions*. Cluj-Napoca, 2014. Článek. Babeş-Bolyai University. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/263784285_A_Review_of_Dynamic_Models_Used_in_Simulation_of_Gear_Transmissions
- [12] KORKA, Zoltan. *An Overview of Mathematical Models Used in Gear Dynamics*. Cluj-Napoca, 11.6.2007. Článek. Babeş-Bolyai University. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/256547191_An_Overview_of_Mathematical_Models_Used_in_Gear_Dynamics
- [13] XIAO, Zeliang, ZHOU, Changjiang, CHEN, Siyu, LI, Zuodong. Effects of oil film stiffness and damping on spur gear dynamics. *Non-linear Dynamics*, 96, 145–159. ISSN: 0924-09096. Dostupné z: <https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11071-019-04780-6>

-
- [14] SHENGXIANG, Jia, HOWARD Ian a WANG Jiande. The Dynamic Modelling of a Spur Gear in Mesh Including Friction and Crack. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2001, 15, 831-853. ISSN: 0888-3270. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/222373817_The_dynamic_modelling_of_a_spur_gear_in_mesh_including_friction_and_a_crack
- [15] SHENGXIANG, Jia, HOWARD Ian a WANG Jiande. The Dynamic Modeling of Multiple Pairs of Spur Gears in Mesh, Including Friction and Geometrical Errors. *International Journal of Rotating Machinery*, Bentley, 2003, 9, 437-442. ISSN: 1023-6219. Dostupné z: <https://downloads.hindawi.com/journals/ijrm/2003/127595.pdf>
- [16] NEUSSER, Zdeněk, VAMPOLA, Tomáš a VALÁŠEK, Michael. Analytical gear mesh model using 3D gear geometry. *MECHANIKA*. 2017, 3, 425-431. ISSN: 1392-1207. Dostupné z: <https://mechanika.ktu.lt/index.php/Mech/article/view/14325>
- [17] KORTA, Jakub, PALERMO, Antonio, MUNDO, Domenico a SHWEIKI, Shadi. Combining Finite Element and Multibody Modelig Techniques for Time-Efficient Simulation of Nonlinear Gear Dynamics. Rende, 2015. Článek. University of Calabria. Dostupné z: https://www.thinkmind.org/articles/simul_2015_5_20_50061.pdf
- [18] LIU, Yanping, HE, Xiaohui, ZHAO, Yongqiang a LIU, Ming. Tooth Dynamic Contact Simulation and Experimental Validation of Involute Spur Gear. In *2019 2nd World Conference on Mechanical Engineering and Intelligent Manufacturing*, Shanghai: IEEE, 2019. Dostupné z: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9004136/references#references>
- [19] ZHANG, Lei, LUO, Yuan-Qing a CHEN, Chang-Zheng. Dynamic Model of Spur Gear Pair. *International Journal of Rotating Machinery*, 2017, 1-8. ISSN: 1023-6219. Dostupné z: <https://doi.org/10.1155/2017/1264904>
- [20] DOU, Yihua, GUAN, Yuan, MENG, Qi a LI, Suobin. Dynamic Modeling of Gear System Based on 3D Finite Element Model and Its Application in Spalling Fault Analysis. *Mathematical Problems in Engineering*.

- 2020, 1-10. ISSN: 1563-5147. Dostupné z: <https://doi.org/10.1155/2020/2859310>
- [21] Siemens AG: *3D Simulation Acoustics and Vibration - Powertrain*. 2.4.2015 [cit. 5.7.2021]. Dostupné z: https://www.plm.automation.siemens.com/ko_kr/Images/3-2.%20K0%20Solutions%20for%20Powertrain_Siemens%20Koen_tcm72-236915.pdf
- [22] Adams Machinery Gear Advanced 3D Contact: Simulating the Dynamics of High Fidelity Gears. *MSC Software Corporation* [online]. 2016 [cit. 8.5.2021]. Dostupné z: https://www.mssoftware.com/sites/default/files/sb_adamsmach-gear_ltr_w.pdf
- [23] STOYANOV, Svetlin, DOBREV Vasko a DOBREVA Antoaneta. Finite Elements Contact Modelling of Planetary Gear Trains. *Materials Science and Engineering*. 2017, 252. ISSN: 0928-4931. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/252/1/012034/pdf>
- [24] *KISSsoft AG* [online]. Bubikon: KISSsoft, 2021 [cit.8.5.2021]. Dostupné z: <https://www.kisssoft.com/en>
- [25] SOAMI, Pawan. An Introduction to Gear Modeling in COMSOL Multiphysics. In: *COMSOL* [online]. 7.7.2016 [cit. 8.5.2021]. Dostupné z: <https://www.comsol.com/blogs/an-introduction-to-gear-modeling-in-comsol-multiphysics/>
- [26] *Virtual Dynamics - FEV Software and testing Solutions GmbH* [online]. Aachen: FEV STS GmbH [cit. 8.5.2021]. Dostupné z: <https://virtualdynamics.fev.com>
- [27] Gears: MATLAB & Simulink. *MathWorks: Makers of MATLAB and Simulink* [online]. The Mathworks, 2021 [cit. 8.5.2021]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/physmod/sdl/gears.html>
- [28] Assemble a Gear Model: MATLAB & Simulink. *MathWorks: Makers of MATLAB and Simulink* [online]. The Mathworks, 2021 [cit. 8.5.2021]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/physmod/sm/ug/satisfying-gear-assembly-requirements.html>

-
- [29] MADYN 2000 for Rotordynamics. *DELTA JS AG: machine dynamics, rotor dynamics, MADYN 2000* [online]. DELTA JS, 2021 [cit. 8.5.2021]. Dostupné z: <https://www.delta-js.ch/en/software/madyn-2000-for-rotordynamics/>
- [30] RecurDyn Gear Toolkit: Gear Simulation. *FunctionBay Technical Support Site* [online]. FunctionBay [cit. 8.5.2021]. Dostupné z: <https://support.functionbay.com/en/page/single/36/recurdyn-gear-toolkit>
- [31] STEJSKAL, Vladimír, Jaromír BROUSIL a Stanislav STEJSKAL. *Mechanika III*. Vyd. 2. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02388-5.
- [32] HERRMANN, Leopold. *OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE - ŘADY. Komentované přednášky pro předmět Matematika III*. Vyd. 1. Praha: Vydavatelství ČVUT 2004, 163 strany, ISBN 80-01-03041-5.
- [33] NEUSSER, Zdeněk, SOPOUCH, Martin, SCHAFFNER, Thomas a PRIEBSCH, Hans-Herwig. Multi-body Dynamics Based Gear Mesh Models for Prediction of Gear Dynamics and Transmission Error. *SAE Technical Paper 2010-01-0897*. 2010. ISSN: 0148-7191. Dostupné z: <https://doi.org/10.4271/2010-01-0897>

Seznam použitých zkratek

CMS Component Modal Synthesis Technique

FE Finite Element

FEM Finite Element Method

MBS Multibody Simulation

Obsah přiloženého CD

LaTeX.....	zdrojová forma práce ve formátu L ^A T _E X
MATLAB.....	složka se zdrojovými kódy pro MATLAB
— CampbellPlotFinal.m.....	skript pro vytvoření Campbellových diagramů
— Computations.m.....	výpočty proměnných kontaktního modelu
— Contact_ode45.m.....	kontaktní model
— data_contact.mat... ..	výsledky kontaktního modelu (pro Campbelovy diagramy)
— data_simple.mat	výsledky jednoduchého modelu (pro Campbelovy diagramy)
— FFT.m.....	rychlá Fourierova transformace
— Final.m.....	dynamická simulace pro zadaný rozsah otáček
— GearParam.m.....	nastavení parametrů modelu
— grafy.m.....	skript pro vytvoření grafů průběhů $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\omega_1(t)$ a $\omega_2(t)$
— Simple_ode45.m.....	jednoduchý model
— Variables.m.....	nastavení proměnných kontaktního modelu
BP_Uh1irJan_2021.pdf.....	text práce v PDF
— readme.txt.....	stručný popis obsahu CD