

Diplomová práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická

Ubíhající elektronky

Radek Sochor

Vedoucí práce: prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
Květen 2021

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Sochor** Jméno: **Radek** Osobní číslo: **465971**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávací katedra/ústav: **Katedra fyziky**
Studijní program: **Elektronika a komunikace**
Specializace: **Elektronika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Ubíhající elektrony

Název diplomové práce anglicky:

Runaway electrons

Pokyny pro vypracování:

Urychlování elektronů elektrickým polem nemusí být za určitých podmínek kompenzováno srážkami. Elektron se dostane do tzv. ubíhajícího režimu, v němž získá značnou energii a může poškodit různá zařízení.

- 1) Seznamte se s současným stavem znalostí ubíhajících elektronů
- 2) Analyzujte podmínky ukončení ubíhajícího režimu různými zářivými procesy
- 3) Proveďte numerickou simulaci záření elektronu na trajektoriích odpovídajících různým zařízením.
- 4) Zhodnoťte dosažené výsledky

Seznam doporučené literatury:

1. Carnevale, D., et al.: Runaway electron beam control. Plasma Phys. Control. Fusion 61 (2019)
2. O. Ficker et al.: Runaway electron beam scenarios, control and decay in COMPASS Nuclear Fusion 59, 2019
3. P. Kulhánek: Vybrané kapitoly z teoretické fyziky III (Teorie plazmatu, Numerické simulace); AGA 2020, ISBN: 978-80-906638-4-8

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc., katedra fyziky FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **29.09.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **21.05.2021**

Platnost zadání diplomové práce: **30.09.2022**

prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
podpis vedoucí(ho) práce

podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

Děkuji Petru Kulhánkovi za vše co mě naučil o fyzice a dále za to, že i když to neměl jednoduché vždy rychle odpisoval. Dále děkuji ČVUT za grant, který mi byl poskytnut v rámci projektu SGS19/167/OHK3/3T/13.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 19. května 2021.

Abstrakt

Ubíhající elektrony jsou jedním z problémů dnešní fyziky okolo tokamaků. Tato práce se zabývá studiem ukončení ubíhajícího režimu záření. Je zde rozebrána situace, kdy záření nemůže ukončit ubíhající režim při přítomnosti elektrického pole. Dále jsou zde uvedeny ztráty energie elektronu zářením a s tím spojené síly, kterými elektron působí sám na sebe. Jako poslední jsou vypočteny celkové vyzařené výkony letícího elektronu při brzděném a synchrotroním záření. A k nim uvedeny směrové závislosti. Následně je vše diskutováno a uvedeny možnosti dalšího navázání na tuto práci.

Klíčová slova: ubíhající elektrony, radiační reakce, ztráty energie, synchrotroní záření, brzděné záření, ukončení RE režimu, disrupce plazmatu

Vedoucí práce: prof. RNDr. Petr Kulhánek, CSc.
Technická 1902/2
166 27 Praha 6

Abstract

Runaway electrons are one of the issues around plasma physics and tokamaks. This diploma thesis focus is on the end of the runaway regime. There are discussed problem with radiation loss, when particle cannot escape the runaway regime when electric field is still present. Furthermore, there are calculated energy losses due to radiation and corresponding radiation force by which electron slows down itself. At last, there are visible directional characteristics of the radiation power and calculated total radiated power through braking radiation and synchrotron radiation. At the are discussed results and possible continuation.

Keywords: runaway electrons, radiation reaction, energy loss, synchrotron radiation, braking radiation, ending RE regime, plasma disruption

Title translation: Runaway electrons

Obsah

1 Úvod	1
2 Fyzikální pozadí	3
2.1 Elektron	3
2.2 Plazma	3
2.3 Pohybová rovnice	4
2.3.1 Lorentzova síla	5
2.3.2 Relativistický Lagrangián a Hamiltonián	6
2.3.3 Relativistická driftová rovnice	6
2.3.4 Drifty	7
2.4 Efekt torodiální geometrie	9
2.5 Betatronové equilibrium	9
2.6 Statistická fyzika a kinetický přístup	9
2.6.1 Fokkerova-Planckova rovnice	10
3 Fyzika ubíhajících elektronů	13
3.1 Generace ubíhajících elektronů .	13
3.1.1 Primární generace	13
3.1.2 Hot-tail generace	16
3.2 Sekundární způsoby generace . . .	18
3.3 Zářivá reakce částice	19
3.3.1 Pohybová rovnice zářící částice	19
3.3.2 Pauliho zápis radiační reakce	21
3.3.3 Vyzářený výkon	22
3.3.4 Relativistické brzdné a synchrotronní záření	24
4 Ukončení ubíhajícího režimu a výpočty záření elektronů v plazmatu	25
4.1 Problém s ukončením ubíhajícího režimu zářením	25
4.2 Ztráty energie elektronu	28
4.3 Zářivé síly působící na elektron .	30
4.4 Vyzařovaný výkon	32
5 Závěr	35
Literatura	37
Přílohy	39

Obrázky

1.1 Torodiální geometrie s vyobrazením helikálního pole [1]	1	4.10 Vyzařovaný výkon elektronu při brzdném záření ($v = 0.6c$)	33
1.2 Škody způsobené ubíhajícími elektrony na stěnách tokamaku JET při jeho disrupci v roce 2015 [2]	2	4.11 Vyzařovaný výkon elektronu při synchrotroním záření ($v = 0.001c$)	34
2.1 Gradient B drift [2]	8	4.12 Vyzařovaný výkon elektronu při synchrotroním záření ($v = 0.6c$)	34
2.2 Schématické znázornění betatronu [7]	10		
3.1 Průběh srážkové síly v plazmatu	17		
3.2 Ilustrace vzniku populací ubíhajících elektronů. Nahoře jsou zobrazeny primární způsoby generace. Dole je zobrazen sekundární lavinový efekt. [3]	18		
4.1 Průběhy srážkové a elektrické síly pro $E = \text{const.}$, kde modrý průběh je srážková síla a černý je elektrická síla	26		
4.2 Síly působící na letící elektron (pouze elektrická síla) [2]	27		
4.3 Ztráta energie elektronu při urychlování pouze elektrickým polem, $E = 70\text{V/m}$, $v_0 = 0.5c$	29		
4.4 Ztráta energie elektronu při urychlování pouze elektrickým polem detail pro krátký časový úsek, $E =$ 70V/m , $v_0 = 0.5c$	29		
4.5 Ztráta energie elektronu při pohybu v konstantním magnetickém poli, energie elektronu $\mathcal{E}_0 = 100\text{keV}$	30		
4.6 Radiační síla při urychlování pouze elektrickým polem, $E = 70\text{V/m}$, $v_0 = 0.5c$	31		
4.7 Radiační síla působící na elektron při urychlování pouze elektrickým polem detail pro krátký časový úsek, $E = 70\text{V/m}$, $v_0 = 0.5c$	31		
4.8 Radiační síla působící na elektron při pohybu v konstantním magnetickém poli, energie elektronu $\mathcal{E}_0 = 100\text{keV}$	32		
4.9 Vyzařovaný výkon elektronu při brzdném záření ($v = 0.001c$)	33		

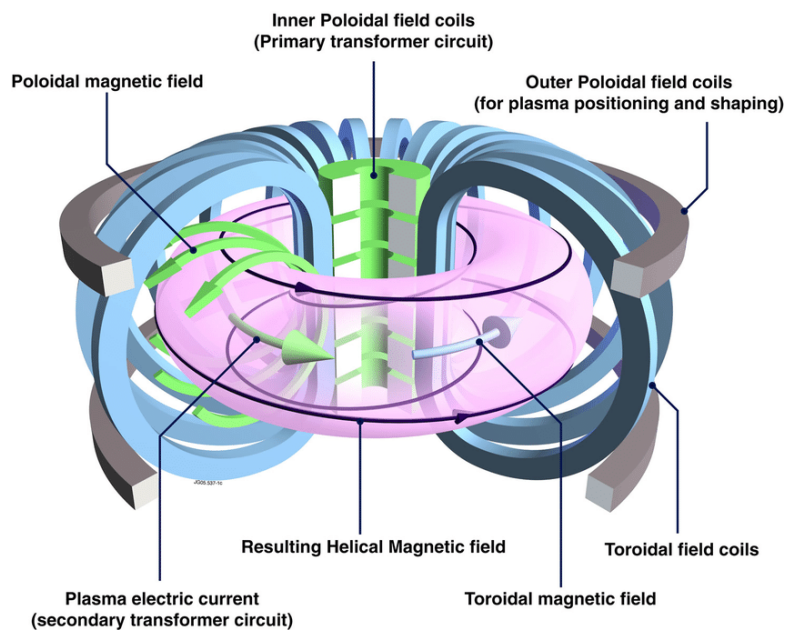
Tabulky

4.1 Celkové vyzařované výkony letícím elektronem	32
---	----

Kapitola 1

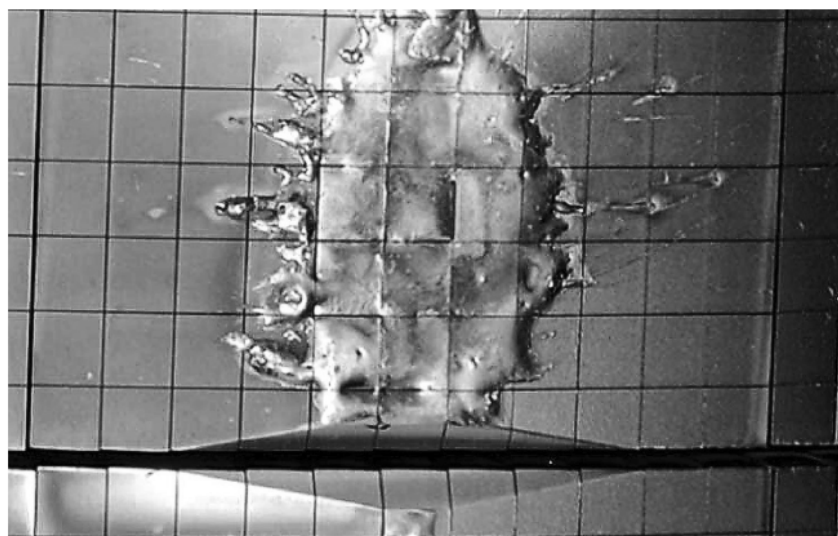
Úvod

V dnešní době je velká poptávka po zdrojích energie. Hlavní parametry, které jsou požadované je velký výkon, ekologický dopad a dostupnost. Jedna z velkých nadějí na vyřešení energetické krize je sestavit zařízení, které bude generovat energii na základě fúze. Fúzní reakce probíhá za vysokých teplot a tlaků uvnitř hvězd. Prakticky se jedná o slučování atomů vodíku na hélium a dále na vyšší prvky až po železo. Momentálně se lidstvo snaží tento zdroj energie vytvořit na zemi. Pro uchování plazmatu v takto vysokých teplotách a malých objemech se používá zařízení zvané tokamak nebo steralátor. Prakticky se jedná od magnetickou past ve tvaru torusu. Torodiální geometrie je zobrazena na Obr.1.1. Zatím se žádnému z fyzikálních týmů okolo velkých tokamaků ,jako je např. ITER nebo JET, nepodařilo zprovoznit funkční zařízení, které by poskytovalo větší energii než je do něj vložena. Z tohoto důvodu je nutné udělat další výzkumy okolo fyziky plazmatu a fyziky v torodiálních konfiguracích.



Obrázek 1.1: Torodiální geometrie s vyobrazením helikálního pole [1]

Další z problémů, které vyvstávají s provozem těchto velkých zařízení je jejich náročnost na provoz. Zatím není možné vytvořit kontinuální provoz a proto musíme zvolit pulzní provoz. Problémem je, že každý výboj má konec při kterém klesá proud. Tento pokles proudu způsobí pokles magnetického pole a tento pokles vygeneruje silné elektrické pole. Pokles proudu plazmatem nazýváme disrupcí. Při disrupci vzniká mnoho jevů, které zatím nejsou plně pochopeny. Např. v tokamaku JET při disrupci ubíhající elektrony způsobily velké škody na stěnách tokamaku. Tyto škody jsou zobrazeny na Obr.1.2. Kvůli těmto problémům se v této práci budu zabývat studiem ubíhajících elektronů a mechanismy jak tyto elektrony ztrácí energii.



Obrázek 1.2: Škody způsobené ubíhajícími elektrony na stěnách tokamaku JET při jeho disrupci v roce 2015 [2]

Kapitola 2

Fyzikální pozadí

2.1 Elektron

Elektron je subatomární částice se záporným nábojem, tvoří základní stavební jednotku atomu. S okolím interaguje pouze elektromagnetickou a slabou interakcí. Jeho spin je roven $1/2$, proto se jedná o fermion, a proto se řídí Fermi-Diracovou statistickou fyzikou. Některé další vlastnosti jsou uvedeny v seznamu dole.

- Klidová hmotnost: $m_0 = 9,109 \times 10^{-31}$ kg
- Elektrický náboj: $e = -1,602 \times 10^{-19}$ C
- Magnetický dipolový moment: $\mu = -928,5 \times 10^{-26}$ JT⁻¹
- Střední doba života: $\tau > 4,6 \times 10^{26}$ let (jedná se o stabilní částici)
- Antičástice: pozitron

Pro účely této práce budeme elektron považovat za bodový náboj letící ve volném prostoru, kde na něj působí vnější síly a pole. Tyto vnější síly a pole ovlivňují jeho výslednou dráhu a energii.

2.2 Plazma

Palivo pro termonukleární fúzi je složeno z plazmatu. Definice plazmatu je quasi-neutrální systém nabitých částic, které se chovají kolektivně. Quasi-neutralita znamená, že elektrický náboj každého makroskopického objemu je nula. Kolektivní chování je možné díky daleko-dosahové columbické interakce mezi částicemi. Plazma interaguje s externím elektromagnetickým poli a částice jsou ovlivněny poli generovanými okolními částicemi. Plasma je konzistentní systém a je velice složité najít numerická řešení různých problémů v něm [3].

Jedněmi z nejdůležitějších parametrů plazmatu je elektronová hustota n_e , elektronová teplota T_e a stejné parametry pro ionty (n_i, T_i). Dále, pro plazma v tokamaku je důležitá intenzita magnetického pole B a plazmový proud

I_p . Hodnoty těchto parametrů určují časový a prostorový rozměr plazmových procesů. Tři nejdůležitější charakteristické frekvence magnetizovaného plazmatu jsou,

$$\omega_{p\alpha}^2 = \frac{Q_\alpha^2 n_\alpha}{\epsilon_0 m_\alpha}, \quad \omega_{c\alpha} = \frac{Q_\alpha B}{m_\alpha}, \quad \nu_{\alpha\beta} = \frac{n_e Q_\alpha^2 Q_\beta^2 \ln \lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 c^3}. \quad (2.1)$$

Tyto frekvence korespondují plazmovým frekvencím (frekvence plazmových oscilací), cyklotronní frekvenci (gyrace kolem magnetických indukčních čar) a srážkové frekvenci. α a β označuje typ částice v plazmatu (elektron, iont nebo částice nečistoty). Q je náboj částice, m je hmotnost částice a ϵ_0 je permitivita vakua. Komplementárně k těmto frekvencím jsou definované délky,

$$\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 m_\alpha}{\sum_\alpha Q_\alpha^2 n_\alpha / T_\alpha}, \quad r_{L\alpha} = \frac{m_\alpha v_\perp}{Q_\alpha B}, \quad \lambda_\alpha = \frac{v_{T\alpha}}{\nu_{\alpha\beta}}, \quad (2.2)$$

první vztah je tzv. Debyeova délka (stínící délka nabitě částice v plazmatu), dále Larmorův poloměr (poloměr gyrující částice s kolmou složkou rychlosti v_\perp kolem čar magnetické indukce) a poslední je střední volná dráha částice, která je funkcí tepelné rychlosti $v_{T\alpha}$. Střední volná dráha v plazmatu je definována jako délka kdy částice změni svojí dráhu o 90° . Částice v plazmatu interagují s mnoha částicemi najednou, z toho důvodu nelze uvažovat tradiční kolizní frekvenci. Avšak, ubíhající elektrony nemohou být analyzovány jako plazma na jejich pozadí [3]. Elektrony překračují mnohonásobně svojí klidovou hmotnost a jejich srážky a interakce s pozadím jsou velice slabé. Z tohoto důvodu bychom měli začít popisem trajektorie částice pomocí pohybových rovnic s externími elektrickými a magnetickými poli.

2.3 Pohybová rovnice

Pro určení trajektorie, rychlosti a zrychlení částice se používá pohybová rovnice. Pohybovou rovnicí můžeme zapsat jako,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2.3)$$

kde \mathbf{p} je hybnost a \mathbf{F} je síla působící na popisovaný objekt. Tato rovnice je platná i pro relativistický objekt a p je definována jako,

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.4)$$

kde c je rychlost světla (299 792 458 m/s), m_0 je klidová hmotnost objektu a \mathbf{v} je rychlost objektu. γ je tzv. Lorentzův faktor podle kterého se dá poznat jak moc se částice chová relativisticky. Tzn. pokud se $\gamma \rightarrow 1$ tak se částice pohybuje malými rychlostmi a blíží se klasickému popisu. Pokud se $\gamma \rightarrow +\infty$ tak je částice v silném relativistickém režimu a pohybuje se v rychlostech blížících se c . Při řešení relativistického problému je dobré znát také energii \mathcal{E} definovanou jako

$$\mathcal{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}. \quad (2.5)$$

Z energie se poté dají počítat ztráty energie dané částice jako $\frac{dE}{dt}$.

2.3.1 Lorentzova síla

Lorentzova síla je odvozena z reakce nabité částice na přítomná elektromagnetická pole. Je jedním ze vztahů, který spojuje polní teorii elektromagnetického pole a pohyby částic. Tuto sílu definujeme jako

$$\mathbf{F}_{el} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.6)$$

kde q je náboj částice \mathbf{E} intenzita elektrického pole a \mathbf{B} magnetická indukce. Pro daná pole, která se hledají za pomoci Maxwellových rovnic (2.7), se dopočítávají trajektorie částic.

$$\mathbf{F}_{,\nu}^{\mu\nu} = \mu_0 \mathbf{J}^\mu, \quad (2.7)$$

kde $\mathbf{F}^{\mu\nu}$ je tenzor elektromagnetického pole, který v sobě zahrnuje složky pole \mathbf{E} a \mathbf{B} . \mathbf{J}^μ je čtyřvektor zdrojových členů jako je ρ_0 hustota elektrického náboje a \mathbf{j} proudová hustota. Tento proces lze obrátit a ze známé trajektorie částice dopočítat působící pole. Průběh elektrické síly je silně závislý na tvaru polí \mathbf{E} a \mathbf{B} . Nechme ubíhající elektron se pohybovat podél rovnoběžných elektrických a magnetických polí. Tato situace lze vyřešit analyticky a poslouží jako jednoduchý model ubíhající částice v tokamaku. V tomto modelu nejsou uvažovány efekty torodiálních geometrií tokamaku ani vliv srážkové síly. V tomto případě by šlo také použít přesný numerický algoritmus (Boris-Buneman), který byl vyvinut speciálně pro výpočty relativistických pohybů částic v elektrických a magnetických polích. Zadání tohoto problému pro konstantní magnetické pole $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ a konstantní elektrické pole $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ je,

$$\frac{dp_x}{dt} = ev_y B, \quad \frac{dp_y}{dt} = -ev_x B, \quad \frac{dp_z}{dt} = eE \quad (2.8)$$

Detailnější řešení tohoto problému naleznete v edukačních materiálech jako [4] nebo [5]. Pro malá elektrická pole a za předpokladu, že kolmá složka \mathbf{p} je konstantní, jde vypočítat následující trajektorie,

$$x(\theta) = r_L - r_L \cos \theta \quad (2.9)$$

$$y(\theta) = r_L \sin \theta \quad (2.10)$$

$$z(\theta) = \frac{\mathcal{E}_i}{eE} \left[\cosh \left(\frac{E\theta}{cB} \right) - 1 \right], \quad (2.11)$$

kde r_L je Larmorův poloměr, \mathcal{E}_i je počáteční energie částice a θ je úhel související s relativistickou cyklotronní frekvencí. Jediný relativistický efekt v tomto výpočtu je nárůst cyklotronní frekvence. Tento výpočet je však platný pouze pro malé změny Lorentzova faktoru. Pro velké rychlosti by tato rovnice měla být nahrazena Lorentz-Diracovou rovnicí, která zahrnuje také záření částice a self-konzistentní reakci na elektromagnetické pole.

2.3.2 Relativistický Lagrangián a Hamiltonián

V případech kdy nelze použít přímo výpočet pomocí pohybových rovnice (2.3) musíme použít přístup pomocí Lagrangeovy nebo Hamiltonovy funkce. Oba tyto přístupy vedou na stejné výsledky. Pro tvorbu těchto funkcí používáme skalární potenciál φ a vektorový potenciál \mathbf{A} definované jako,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (2.12)$$

Při použití těchto potenciálů, se relativistický lagrangián částice zapíše jako,

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - Q\varphi + Q\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (2.13)$$

a relativistický hamiltonián jako,

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = c^2\sqrt{m_0^2c^2 + (\mathbf{p} - Q\mathbf{A})^2} + Q\varphi. \quad (2.14)$$

Pro tyto funkce je nutné poté složit korespondující rovnice s korespondujícími funkcemi. Tyto rovnice vychází z minimalizace integrálu akce.

2.3.3 Relativistická driftová rovnice

Pro malé poloměry gyračního oběhu (milimetry) a velké frekvence (THz) oběhu, které probíhají při ubíhajícím režimu není nutné mít celý popis trajektorie částice. U relativistických částic je tento popis někdy nemožný v delších časových úsecích. Prvním zjednodušením je zanedbání gyračního pohybu částice a sledování pouze pohyb gyračního středu. Toto zanedbání můžeme udělat pouze za těchto podmínek,

$$\left| \frac{\partial B_k}{\partial x_j} \right| \ll \frac{B}{r_L}, \quad \left| \frac{\partial B_k}{\partial t} \right| \ll \omega_C B. \quad (2.15)$$

Tyto udávají podmínky na změny magnetického pole v čase prostoru. V nejlepším případě by se magnetické pole nemělo měnit vůbec v čase ani prostoru. Pro využití v relativistické driftové rovnici (RDE - relativistic drift equation) musíme uvést základní vztahy jako pozici částice \mathbf{r} , pozici gyračního středu \mathbf{R} a poloměr oběhu částice ρ ,

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho(\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta), \quad (2.16)$$

kde $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ definuje ortonormální bázi definovanou směrem magnetického pole $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Dále předpokládáme $\dot{\mathbf{R}} = (\hat{z} \cdot \dot{\mathbf{R}})\hat{z}$ potom rychlost je, [3]

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} + \rho\dot{\theta}(-\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta) \quad (2.17)$$

Pro sestavení rovnice pro gyrační střed potřebujeme dále odhadnout vektorový potenciál jako,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{R}) + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \sin \theta \right). \quad (2.18)$$

Ze znalosti těchto vztahů lze složit Lagrangeovu funkci a dosadit do známé rovnice,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} \quad (2.19)$$

Po dosazení a úpravách dostaneme celkovou rovnici pohybu (2.20) a rovnice pro podélnou (2.21) a kolmou (2.22) složku pohybu gyračního středu.

$$\frac{d(m\gamma v_{\parallel})}{dt} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}) - \mu m v_{\perp}^2 (\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{z}}) \quad (2.20)$$

$$\frac{d(m\gamma v_{\parallel})}{dt} = e\mathbf{E}_{\parallel} - \mu(\nabla_{\parallel} B) \quad (2.21)$$

$$\frac{d\mathbf{R}_{\perp}}{dt} = \frac{\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{z}}}{B} + \frac{\mu}{eB} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla B + \frac{m\gamma v_{\perp}^2}{eB} \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{z}}) \quad (2.22)$$

Tyto tři rovnice jsou důležité pro popis driftů pro stacionární plazma v tokamaku. Tento popis naleznete v další části dole.

2.3.4 Drifty

Drifty jsou pohyby gyračního středu podél čar magnetického pole. Tento pohyb je dominantní v systému s ubíhajícími elektrony, protože srážky s okolím jsou minimální a elektron se pohybuje volně okolo čar magnetického pole. Všimněte si, že v porovnání s cyklotroní frekvencí je tato frekvence malá.

E × B drift

Tyto drifty jsou velmi zastoupeny v tokamakovém plazmatu. Tento drift je nezávislý na náboji částice. Z této vlastnosti je zřejmé, že je stejný pro elektrony i ionty a vede na proudění plazmatu. Pro tento typ driftu je jeho rychlost,

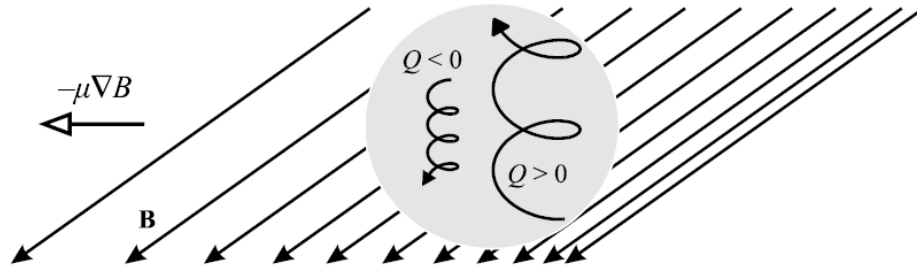
$$v_{E \times B} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.23)$$

Tento drift vede k expanzi plazmatu v torusu tokamaku v případě vertikálního rozdělení nábojů (vytvoření elektrického pole) a torodiálního tvaru magnetického pole. Aby byl tokamak odolný vůči tomuto driftu je nutné zavést polodiální magnetické pole. Avšak, polodiální magnetické pole v kombinaci s torodiálním elektrickým polem může vyvolat E × B drift, který je velmi důležitý pro ubíhající elektrony. [3]

Gradient B drift a drift zakřivení

Gradient B drift je způsoben změnou velikosti magnetického pole. Ilustrace tohoto driftu je uvedena na Obr.2.1. Příslušná driftová rychlost má velikost

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{-\mu \nabla B \times \mathbf{B}}{QB^2} = \frac{mv_{\perp}^2}{2Q} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} \quad (2.24)$$



Obrázek 2.1: Gradient B drift [2]

Grad B drift závisí na kolmé složce rychlosti, hmotnosti a náboji částic. Vede k různému driftování elektronů a iontů a ke vzniku elektrického proudu v plazmatu. Drift následně vede k separaci nábojů, která způsobí sekundární $E \times B$ drift.

Při pohybu kolem zakřivené indukční čáry bude na částice působit odstředivá síla která povede na rychlost driftu

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{QB^2} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2}, \quad (2.25)$$

kde \mathbf{R}_k je poloměr indukční čáry. Drift zakřivení závisí (na rozdíl od grad B driftu) na podélné složce rychlosti. Opět povede ke vzniku proudu a separaci nábojů. [2]

■ Ostatní driftы

V tíhovém poli a magnetickém poli dochází k tzn. gravitačnímu driftu s driftovou rychlostí

$$\mathbf{v}_g = \frac{m\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{QB^2}. \quad (2.26)$$

Tento drift je kolmý ke gravitačnímu i magnetickému poli. Jeho směr závisí na náboji částic a vede k separaci nábojů a sekundární generaci $E \times B$ driftu. Další z driftů je polarizační drift. Bude-li se velikost elektrického pole pomalu měnit v čase, bude se také měnit driftová rychlost gyračního středu. To povede ke vzniku inerciální driftu odpovídající inerciální síle

$$-m\ddot{\mathbf{R}} = -m \frac{d\mathbf{E}/dt \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.27)$$

a polarizačnímu driftu

$$\mathbf{v}_P = \frac{m}{QB^4} [\mathbf{B} \times (d\mathbf{E}/dt \times \mathbf{B})] \quad (2.28)$$

který je opět původcem vzniku proudu v plazmatu. Drift vede k separaci náboje, která opět vede na vznik sekundárního $E \times B$ driftu. [2]

Díky gradientu tlaku v plazmatu vzniká virtuální diamagnetický drift. Toto

není pohyb gyračního středu částice, ale spíše dominantní rychlost v referenční ploše která se objevuje v magnetohydrodynamickém popisu. Rychlost se vypočítá jako [6]

$$\mathbf{v}_D = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{enB^2} \quad (2.29)$$

Z těchto vztahů lze vidět, že často je jeden primární drift příčinou dalších sekundárních driftů.

2.4 Efekt torodiální geometrie

V sekci o driftech jsme popsali nejdůležitější driftы pro torodiální konfiguraci. Avšak, v systému s podélnou rychlostí se vyskytují další zajímavé efekty. Např. v rovnici (2.22) oba členy na pravé straně mají rozdílné znaménko což značí, že by se zde mohl vyskytovat bod s konstantní podélnou rychlostí. Dokonce je možné aby se částice kompletně zastavila nebo otočila směr pohybu. Pro částice s kolmou složkou může nastat efekt magnetického zrcadla. Pokud mají velkou kolmou rychlost tak se částice pohybují kolem celého polodiálního řezu s kruhovou dráhou lehce odchýlenou driftы.

2.5 Betatronové equilibrium

Ubíhající režim se podobá betatronové operaci. Klasické betatrony jsou charakterizovány měnícím se vertikálním pole, které je zodpovědné za akceleraci i stabilní orbity. Schématické znázornění betatronu naleznete na Obr.2.2. Akcelerující pole je určeno Faradayovým zákonem a stabilní orbity jsou equilibria magnetické části Lorentzovy síly a odstředivé síly. Tyto dva vztahy vedou na betatronovou podmínku

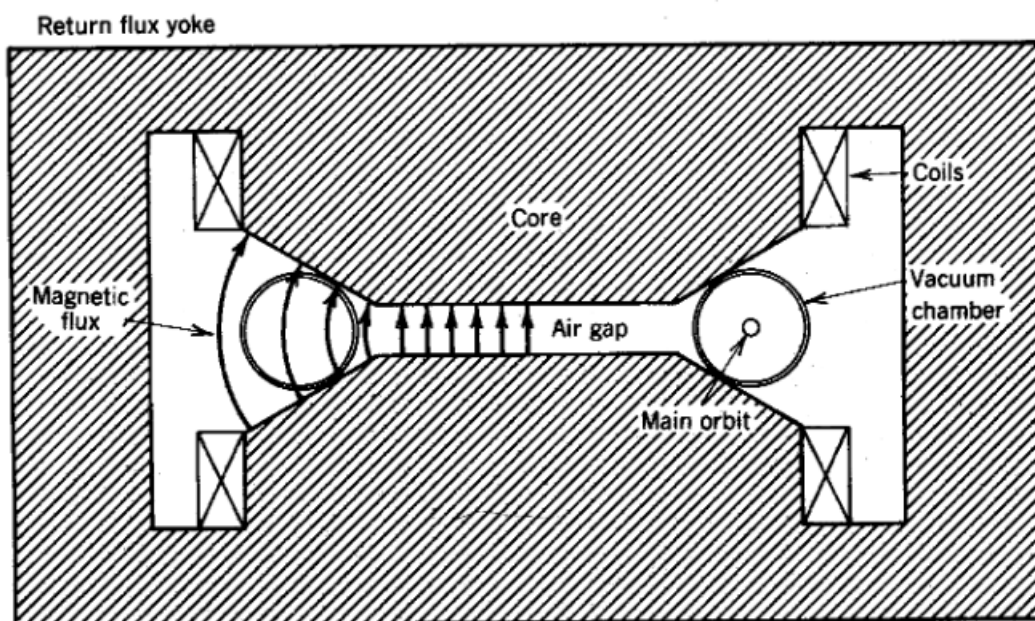
$$B(r_0) = \frac{\Delta\phi}{2\pi r_0^2}, \quad (2.30)$$

tato podmínka na magnetické pole na poloměru r_0 je rovna změně magnetického toku $\Delta\phi$ děleno plochou kruhu o poloměru r_0 . Tato podmínka by mohla být použita při stabilizaci a potlačení paprsku ubíhajících elektronů. [7]

2.6 Statistická fyzika a kinetický přístup

Pokud nás nebudou zajímat trajektorie jedné částice, ale kolektivní chování plazmatu, musíme použít obecnější postup pro výpočty. Statistický přístup je velmi vhodný pro popis plazmatu a hlavně pro popis chování velkého množství ubíhajících elektronů. Definujeme hustotu pravděpodobnosti ($f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$) pro jednotlivé typy částic a pravděpodobnost nalezení částice dN_α v elementu fázového prostoru ($d\mathbf{x}, d\mathbf{v}$). Tento vztah se dá vyjádřit následovně

$$dN_\alpha = f_\alpha(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}, \quad (2.31)$$



Obrázek 2.2: Schématické znázornění betatronu [7]

kde α označuje typ částice. Integrací vztahu (2.31) přes celý fázový prostor dostaneme počet částic v systému a integrací přes rychlostní část hustotu částic n_α . Celý vývoj systému je primárně popsán Liouvillovým teorémem. Odvození tohoto teorému najdete v učebnicích statistické fyziky jako např. v [4]. Časový vývoj distribuční funkce jednotlivých částic je popsán Boltzmanovou transportní rovnicí (2.32).

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_x) f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} (\mathbf{F}_\alpha \cdot \nabla_v) f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col} + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_s \quad (2.32)$$

Člen s indexem s je zodpovědný za ztráty částic díky stěnám, plynům, nečistotám a mnoha dalšími procesy, které nahradíme přibližnými modely. Procesy jako ionizace nebo rekombinace jsou zahrnuty také do tohoto členu. Druhý člen je srážkový člen, který lze nahradit srážkovým integrálem. V přibližném modelu lze tento integrál nahradit jako $\nu_C(f^\alpha - f_{LE})$. Kde f_{LE} je lokální extrém distribuční funkce a ν_C je frekvence srážek.

2.6.1 Fokkerova-Planckova rovnice

Pokud chceme odhadnout srážky v plazmatu tak musíme zvolit správnou aproximaci pro srážkový člen v Boltzmannově transportní rovnici (2.32). Jako velmi přesný model pro fyziku plazmatu se osvědčil Fokker-Planckův srážkový člen. Pro sestavení této rovnice uvažujeme pouze působení Lorentzovy síly, každá částice je zpomalena mnoha menšími srážkami a změna rychlosti je malá za malý časový okamžik Δt . Další předpoklady jsou, že všechny srážky jsou elastické, uvažujeme pouze pole v Debyeově vzdálenosti, neuvažujeme velké odrazové úhly a srážky splňují Markovovy podmínky (proces nemá

paměť předchozích srážek). Při provedení všech odvození dostaneme rovnice ve finální podobě jako,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla_x) f_\alpha + \frac{Q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}_\alpha) \cdot \nabla_v f_\alpha &= S_{\alpha\beta}, \\ S_{\alpha\beta} &= K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \left[-\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \nabla_v \cdot (f_\alpha \nabla_v H_{\alpha\beta}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} (\nabla_v \nabla_v) : (f_\alpha \nabla_v \nabla_v G_{\alpha\beta}) \right], \quad (2.33) \\ H_{\alpha\beta} &= \int \frac{1}{g} f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta, \quad G_{\alpha\beta} = \int g f_\beta d^3 \mathbf{v}_\beta, \quad K_{\alpha\beta} = 4\pi \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi \epsilon_0 m_\alpha} \right) \\ \ln \Lambda &= \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right), \quad b_0 = \left(\frac{Q_\alpha Q_\beta}{4\pi \epsilon_0 \mu g^2} \right), \end{aligned}$$

kde $g = |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$, $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$ jsou Rusenbluthovy potenciály. Pro složitost tohoto odvození zde uvádím pouze výsledné vztahy. Rovnice v tomto tvaru je vhodná pro ubíhající elektrony nebo popis kinetických nestabilit.

Kapitola 3

Fyzika ubíhajících elektronů

Ubíhající elektrony jsou elektrony s dostatečnou rychlostí, pro které je zanedbatelná srážková síla s okolními částicemi. To znamená, že pokud na elektron působí Lorentzova síla (2.6), je dále urychlován na vysoké rychlosti a energie. Srážková síla bude popsána dále v této kapitole.

3.1 Generace ubíhajících elektronů

Generaci ubíhajících elektronů v tokamaku lze rozdělit na primární a sekundární. Primární generace nastává pokud je přítomno elektrické pole a srážková síla je menší než elektrická síla. Z tohoto důvodu je částice stále urychlována elektrickým polem a počet elektronů roste, protože více elektronů se dostane do ubíhajícího režimu pomocí hot tail mechanismu. Hot tail mechanismus se velmi uplatňuje u tzn. disrupce plazmatu, kdy klesá teplota plazmatu a díky Maxwellovu rozdělení se více elektronů dostane do ubíhajícího režimu. Tyto mechanismy patří do primárních. Sekundárními mechanismy jsou lokální výskyty populací ubíhajících elektronů. Tyto populace vznikají lokálními náhodnými srážkami. Většina ubíhajících elektronů je vytvořena pomocí primárních efektů a mohou být znásobeny sekundárními efekty. Dalšími minoritními efekty může být vznik pomocí β rozpadu, kosmického záření, Comptonově rozptylu a mnoho dalších.

3.1.1 Primární generace

Primární efekty generace jsou efekty, které se vyskytují při přítomnosti elektrického pole. V následujícím textu budeme popisovat nerelativistické částice a bez přítomnosti magnetického pole. Silné magnetické pole by změnilo symetrii daného problému. Relativistické efekty na elektron budou uvedeny dále dole. Detailní odvození, které se nachází dále najdete v [2]. První odvození této problematiky bylo uvedeno v článku od Harryho Dreicera z roku 1959 [8]. Odvození srážkové síly je založeno na řešení rovnice (2.33). Volíme hustoty pravděpodobnosti jako,

$$f_\alpha = n_\alpha \delta(\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}(t)), \quad f_\beta = n_\beta \left(\frac{m_\beta}{2\pi k_B T_\beta} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_\beta v_\beta^2}{2\pi k_B T_\beta}}. \quad (3.1)$$

První distribuci f_α volíme jako svazek s jednou energií, což odpovídá jedné částici v tomto kontextu a f_β volíme jako Maxwellovo rozdělení. Z toho vychází, že je nutno dodefinovat pouze potenciál $H_{\alpha\beta}$ s použitím vztahu $v_{T\beta} = \sqrt{2k_B T_\beta / m_\beta}$.

$$H(\mathbf{v}_\alpha) = \frac{n_\beta}{\pi^{3/2} v_{T\beta}^3} \int \frac{1}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} e^{-\frac{v_\beta^2}{v_{T\beta}^2}} d\mathbf{v}_\beta^3 \quad (3.2)$$

Tento integrál se řeší rozvinutím exponentu za použití Legendrovým polynomů. Dosazením a úpravami dostaneme řešení ve formě dvou integrálů,

$$H(\mathbf{v}_\alpha) = \frac{4n_\beta}{v_{T\beta}\sqrt{\pi}x^2} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi + \frac{4n_\beta}{v_{T\beta}\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \xi e^{-\xi^2} d\xi, \quad (3.3)$$

kde $\xi = v_\beta/v_{T\beta}$ a $x = v_\alpha/v_{T\beta}$. Druhý integrál lze vyřešit substitucí. První je definicí Chandrasekharovy funkce,

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}x^2} \int_0^x \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi. \quad (3.4)$$

$$\psi(x) = \frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{2x^2}, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (3.5)$$

Za použití vztahů mezi Chandrasekharovou funkcí a chybovou funkcí (3.5) se výsledný potenciál dá zapsat jako,

$$H_{v_\alpha} = \frac{n_\beta}{v_{T\beta}} \left[2x\psi(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}e^{-x^2}} \right] = \frac{n_\beta}{v_{T\beta}} \frac{\Phi(x)}{x} \quad (3.6)$$

Pro odvození potenciál v Fokker-Planckově rovnici musíme dosadit distribuci f_α . Tato distribuce je jedno energetický paprsek. Takto definovaná distribuce je jednodušší při odvození. Pro distribuci jsme mohli zvolit např. Maxwellovo distribuci a dostali bychom stejný výsledek, ale výpočet by byl složitější. Pro odvození použijeme první moment rovnice (2.33). Druhý člen nezávisí na pozici x a proto bude nulový. Výsledný tvar rovnice bude,

$$\int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \mathbf{v}_\alpha \nabla_v (f_\alpha \nabla_v H) d^3 \mathbf{v}_\alpha \quad (3.7)$$

Do této rovnice dosadíme Diracovu distribuci f_α a provedeme středování přes rychlost nalétávající částice. Levá strana rovnice se upraví následovně,

$$\mathbf{L}\mathbf{S} = \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = n_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial \delta(\mathbf{v}_\alpha - v(t))}{\partial t} = n_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Zbývá upravit pravá strana pomocí per partes integrace,

$$\mathbf{P}\mathbf{S} = -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \int \mathbf{v}_\alpha \nabla_v (f_\alpha \nabla_v H) d^3 \mathbf{v}_\alpha = n_\alpha K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial H(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.9)$$

Pokud provedeme derivaci H na pravé straně dostaneme výslednou rovnici z které odečteme srážkovou frekvenci,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} 2n_{\beta} \frac{1}{v_{0\beta}^2} \frac{\psi(v/v_{0\beta})}{v} \mathbf{v} \quad (3.10)$$

Tato rovnice je záměrně upravena do podoby $\partial v/\partial t = -\nu_{\alpha\beta} v$. Z tohoto tvaru lze jasně odečíst frekvence srážek jako,

$$\nu_{\alpha\beta} \equiv K_{\alpha\beta} \ln \Lambda_{\alpha\beta} 2n_{\beta} \frac{1}{v_{0\beta}^2} \frac{\psi(v/v_{0\beta})}{v} \quad (3.11)$$

Výsledná síla bude dána srážkovými frekvencemi (ν_{ee} , ν_{ei}) vztahem,

$$\mathbf{F}_{col} = -m_e \mathbf{v}_e (\nu_{ee} + \nu_{ei}). \quad (3.12)$$

Označení ν_{ee} je pro frekvenci srážek s elektron-elektron a ν_{ei} pro srážky elektron-iont. Po dosazení za srážkové frekvence dostaneme výsledný tvar srážkové síly,

$$\mathbf{F}_{col} = -\frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 m_e} \left(\frac{Z_{eff}}{v_{Ti}^2} \psi(v/v_{Ti}) + \frac{2}{v_{Te}^2} \psi(v/v_{Te}) \right) \frac{\mathbf{v}}{v}. \quad (3.13)$$

Abychom zahrnuli oba druhy částic musíme zavést efektivní iontový náboj jako,

$$Z_{eff} = \frac{\sum Z_i^2 n_i}{n_e}, \quad (3.14)$$

kde Z_i je ionizace daného typu iontu a n_i je jeho hustota. Ze vztahu (3.13) lze vidět velice silnou závislost na rychlosti letícího elektronu. Průběh této síly je znázorněn na Obr. 3.1. Tato síla je přímo úměrná Chandrasekandově funkci. Tvar této funkce určuje hlavní vlastnosti srážek v plazmatu. Při nízkých rychlostech lze srážkovou sílu nahradit lineární závislostí a pro vysoké se chová jako $1/x^2$. Pro tuto funkci platí $\lim_{v \rightarrow +\infty} \psi = 0$, z tohoto lze vidět rychlý pokles síly pro vysoké rychlosti. Právě tato vlastnost vede na vznik populace ubíhajících elektronů, které již mají velmi malou frekvenci srážek a mohou být dále urychleny na vysoké rychlosti. Pokud zjednodušíme rovnici (3.10) a specifikujeme směr elektrického pole tak přejde do tvaru,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{eE}{m_e} - \frac{2e}{m_e} E_D \psi(v/v_{T\beta}), \quad (3.15)$$

kde E_D je Dreicerovo pole, označované jako kritické pole z originálního článku [8]. Vztah pro toto pole je,

$$E_D = \frac{n_e e^3 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e v^2} Z_{eff}. \quad (3.16)$$

Pokud elektrické pole dosáhne hodnoty větší než $E_D \psi(1)$ tak jsou podle [8] všechny elektrony uvedeny do ubíhajícího režimu, což vede k urychlení na relativistické rychlosti. Toto pole odpovídá velikosti maxima srážkové

síly. V teoretických člancích se často používá zápis v CGS jednotkách jako např. v [9]. Pro pole E_D lze odvodit kritická rychlost pro kterou je elektron automaticky urychlen do ubíhajícího režimu pokud letí podél čar elektrického pole. Tato rychlost je odhadnuta z limitního vztahu pro vysoké rychlosti ($\psi(x) \approx 1/x^2$) a je rovna,

$$v_c = \sqrt{\frac{ne^3(1 + Z_{eff}/2)}{4\pi\epsilon_0^2 m_e E} \ln \Lambda}. \quad (3.17)$$

Tato rychlost slouží k odhadu počtu ubíhajících elektronů (n_{RE}) pomocí Maxwellovi distribuce. Tento odhad se dá zapsat jako,

$$n_{RE} = \int_{v_c}^c n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right) e^{-\frac{m_e v^2}{2k_B T_e}} dv \quad (3.18)$$

Tento odhad je však stále nerelativisticky a pro malá pole je stále o hodně řádů menší oproti reálné situaci. Tento odhad je dobré brát jako pouze podmínku pro vznik populace ubíhajících elektronů. Pokud kritické elektrické pole přetrvává tak populace elektronů nelineárně roste. Pro odhad růstu se používá Fokker-Plankova rovnice (2.33) transformovaná do tohoto tvaru,

$$\frac{eE_{\parallel}}{m_e} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1 - \xi^2}{v} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = \nu_{ee} v_T^3 \left[\frac{1 + Z_{eff}}{2v^3} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(f + \frac{T_e}{m_e v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \quad (3.19)$$

Tento tvar lépe reflektuje symetrii torodiální geometrie problému. [10] Tato rovnice byla vyřešena v článku [11]. Toto řešení sice vylepšilo výsledky od Dreicera, ale stále bylo nerelativistické a pouze pro malou část rychlostního prostoru. Na tyto řešení navázaly práce dalších autorů jako Lebedev a poté Kruskal a Bernstein. Poslední úpravu provedli Connor a Hastie v článku [9], kteří našli relativistické korekce pro práci Kruskala-Bernsteina. Nerelativistická část řešení je dána rovnicí.

$$S_{KB} = C \nu_{ee} \left(\frac{m_e c^2}{2T_e} \right)^{3/2} \left(\frac{E_D}{E_{\parallel}} \right)^{3/16(Z_{eff}+1)} e^{-\frac{E_D}{4E_{\parallel}} - \sqrt{\frac{(Z_{eff}+1)E_D}{E_{\parallel}}}}. \quad (3.20)$$

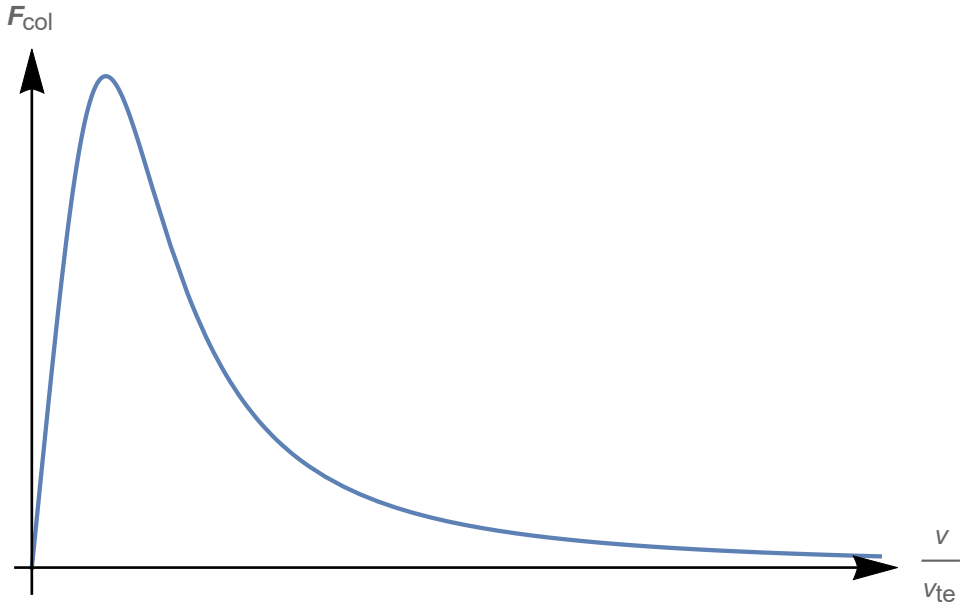
Kde relativistická korekce vypadá jako,

$$S_R = S_{NRe} e^{-\frac{k_B T_e}{m_e c^2} \left[\frac{1}{8} \left(\frac{E_D}{E} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{E_D}{E} \right)^{3/2} \sqrt{Z_{eff}+1} \right]} \quad (3.21)$$

Tento vztah je používám pro modelování jako zdrojový člen ubíhajících elektronů. Ilustraci Dreicerova mechanismu naleznete na Obr.3.2.

■ 3.1.2 Hot-tail generace

Hot-tail generace je silně spjatá s disrupcí plazmatu. Disrupce jako rychlá změna proudů v plazmatu vede ke vzniku řady jevů. Nejdůležitější jev pro tvorbu ubíhajících elektronů je radiční disrupce, kde rostoucí vznik



Obrázek 3.1: Průběh srážkové síly v plazmatu

nečistot způsobí rychlou změnu teploty a ztrátu vodivosti plazmatu. Tento jev je často způsoben uvolněním částí pláště tokamaku. Tato disrupce může být vyvolána záměrně injektováním plynů nebo peletek do plazmatu. Tento způsob disrupce může předcházet mnohem nebezpečnějším typům jako je např. rychlá ideální MHD disrupce.[3] Největším problémem je, že rychlé elektrony v porovnání s termální rychlostí mají malou srážkovou sílu. Z tohoto důvodu rychlé elektrony nejsou brzděny stejně jako pomalé. Můžeme použít jednoduchý model exponenciálního úbytku teploty,

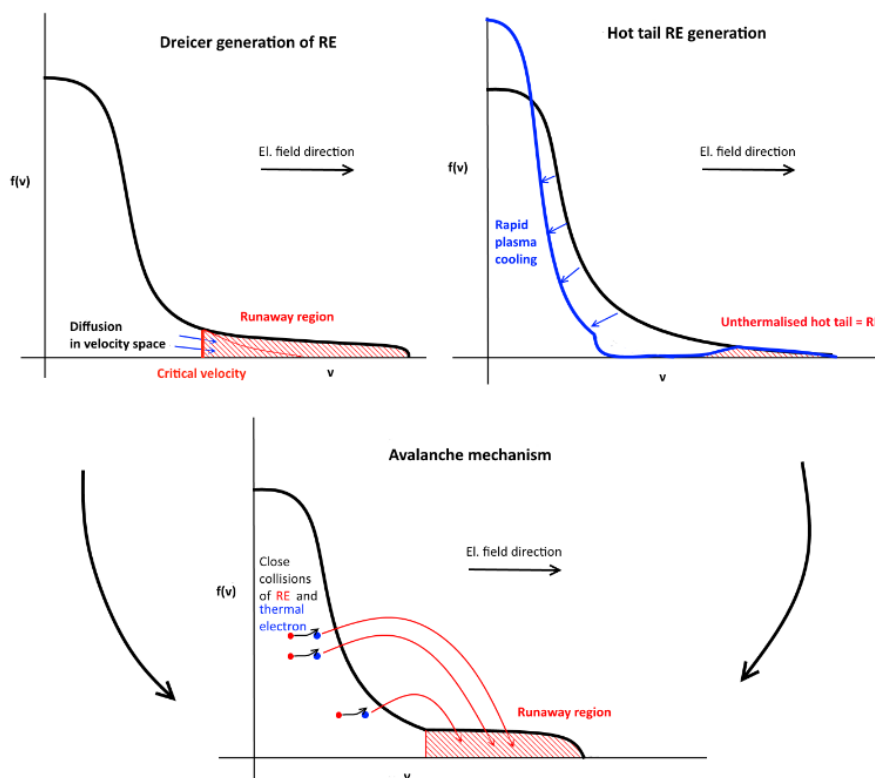
$$T(t) = T_f + (T_0 - T_f)e^{-\frac{t}{t_0}}, \quad (3.22)$$

kde T_f je teplota po narušení a T_0 je teplota před disrupcí. [12] Tyto rychlé elektrony se ocitnou v ubíhajícím režimu a jsou dále akcelerovány v důsledku změn elektrického pole při rychlé disrupci. Při této disrupci se také roste hodnota Dreicerova pole, což je způsobeno rychlými změnami parametrů plazmatu. Z tohoto lze vidět, že jsou urychleny pouze elektrony s předchozí velkou rychlostí. Z tohoto fakt vznikl název hot tail, protože jsou urychleny pouze předem rychlé elektrony. Pro odhad počtu těchto elektronů je použit vztah (3.23) z článku [12].

$$\frac{n_{ht}}{n_e} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{v_c}^{\infty} \left(1 - \frac{(u_c^3 - 3\tau)^2/3}{(u^3 - 3\tau)^2/3} \right) e^{-u^2} u^2 du, \quad (3.23)$$

kde $u = v/v_{T0} + 3\tau$ a $u_c = v_c/v_{T0} + 3\tau$ a τ je kolizní čas získaný z řešení diferenciální rovnice obsahující srážkovou frekvenci ν . Tato diferenciální rovnice je ve tvaru,

$$\tau(t) = (t - t_0) \frac{\nu c^3}{v_{T0}^3}. \quad (3.24)$$



Obrázek 3.2: Ilustrace vzniku populací ubíhajících elektronů. Nahoře jsou zobrazeny primární způsoby generace. Dole je zobrazen sekundární lavinový efekt. [3]

Schéma hot-tail generace je znázorněné na Obr.3.2.

3.2 Sekundární způsoby generace

Sekundární způsoby generace jsou lokální efekty, které vedou ke vzniku populací ubíhajících elektronů. Tyto efekty jsou důležité pro velké tokamaky jako je např. ITER. Tyto generace potřebují malou populaci ubíhajících elektronů k tomu, aby mohli začít fungovat, proto se jsou jako sekundární. Mechanizmy tohoto jevu bylo poprvé popsány v článku [13]. Ubíhající elektrony v mnoha zařízeních jako je ITER vznikají Dreicerovým mechanismem velice málo. Avšak, sekundární lavinové efekty vedou k znásobení těchto malých populací. Z tohoto lze vidět, že většina ubíhajících elektronů vzniká právě tímto efektem nikoli primárními efekty. Lavinový efekt je kumulativní efekt, kde jeden ubíhající elektron může udělit několika okolním elektronům dostatek energie, aby přešli do ubíhajícího režimu a přitom on sám zůstane také jako ubíhající.

V článku [13] je odhad vypočten z relativistického průměru srážek jako,

$$\frac{dn_r}{dt} = \frac{n_r}{\tau \ln(\lambda)} (E_r - 1) \sqrt{\frac{\pi\Gamma}{3(Z_{eff} + 5)}} \left(1 - E_r + \frac{4\pi(Z_{eff} + 1)^2}{3\Gamma(Z_{eff} + 5)(E_r^2 + 4/\Gamma^2 - 1)} \right)^{-1/2} \quad (3.25)$$

, kde $E_r = \frac{|E_{\parallel}|}{E_C}$ je relativní síla elektrického pole, $\tau = \frac{m_0 c}{e E_C}$ a Γ je funkce která zohledňuje torodiální geometrii problému a je zadána jako,

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{3}{4} \int \frac{2\pi\lambda d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda b(\theta)}} d\theta \approx (1 + 1.46\sqrt{\varepsilon} + 1.72\varepsilon)^{-1} \quad (3.26)$$

Opět ilustraci této generace naleznete na Obr.3.2.

3.3 Zářivá reakce částice

Ubíhající režim je z hlediska klasické mechaniky proces, který bude elektrony urychlovat nade všechny meze. Toto však nemůže být pravda kvůli rovnicím speciální teorie relativity. Částice se za prvé nemůže pohybovat větší rychlostí než c (299 792 458 m/s) a pokud má částice nenulovou hmotnost bude se k této rychlosti jen limitně blížit. Tento fakt značí že musí existovat jevy, které zbavují částici její energie dodané při urychlování. Jedním z takovýchto jevů je záření částice, neboli reakce na vlastní vyzářené pole.

3.3.1 Pohybová rovnice zářící částice

Všechna následující odvození naleznete např. v [2] nebo dalších učebnicích elektromagnetického pole. Při odvození pohybové rovnice vyjdeme z retardovaných a advanceovaných potenciálů ve tvaru,

$$A_{\pm}^{\alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J^{\alpha}(t', \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \quad t' = t \pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}, \quad (3.27)$$

tyto potenciálu jsou zapsány v jedné rovnici. V okolí částice se dá předpokládat, že rozdíl času pozorovatele a signálu bude malý, a proto provedeme Taylorův rozvoj v argumentu Δt a dosadíme za retardovaný čas,

$$A_{\pm}^{\alpha} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(\pm 1)^k}{c^k k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{k-1} J^{\alpha}(t, \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \right]. \quad (3.28)$$

Tento vztah rozložíme na sudou a lichou část. Pro sudou část vyjdou síly symetricky vůči částici a proto jejich výslednice je nulová a neuplatní se u záření. Lichá část není symetrická a má rozdílné znaménko pro retardovanou a advanceovanou část. Z toho plyne, že tato část je zodpovědná za záření částice. fyzikálním řešením je retardovaný potenciál, který rozložíme na symetrickou a antisymetrickou část.

$$A^{\alpha} = A_{ret}^{\alpha} = \frac{1}{2}(A_{ret}^{\alpha} + A_{adv}^{\alpha}) + \frac{1}{2}(A_{ret}^{\alpha} - A_{adv}^{\alpha}) \quad (3.29)$$

Po provedení těchto úprav zjistíme, že pohyb lze řešit v lokální souřadnicové soustavě částice tzn. nemusíme provádět relativistický výpočet a postačí nám vzít první nenulový člen rozvoje. U skalárního potenciálu je první nenulový člen $k=3$,

$$\phi = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \rho_Q(t, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (3.30)$$

První nenulový člen vektorového potenciálu je pro $k=1$,

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j}_Q(t, \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (3.31)$$

Pro bodovou částici se světočárou $x_0^\alpha(\tau)$ budou výsledné potenciály vypadat jako,

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\mu_0 Q}{24} \frac{\partial^3}{\partial t^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))^2 \\ \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 Q}{4\pi c} \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

■ Abraham-Lorentzova rovnice

Odpovídající pole k těmto potenciálům (3.32) jsou,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot} \mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 Q}{6\pi c} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Síla od této reakce na vlastní pole je dána vztahem,

$$\mathbf{F}_{rad} = Q\mathbf{E} = \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c} \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (3.34)$$

V lokální soustavě není nutné rozlišovat klidovou a pohybovou hmotnost a proto lze pohybová rovnice zářící částice zapsat jako,

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{ext} + m_0 \tau_0 \ddot{\dot{\mathbf{r}}}, \quad \tau_0 \equiv \frac{\mu_0 Q^2}{6\pi c m_0}. \quad (3.35)$$

Tato rovnice má hned tři zásadní problémy:

1. Třetí derivace vyžaduje nejasnou počáteční podmínku

V klasické mechanice pro popis jakéhokoliv systému je nutné zadat počáteční polohu a počáteční rychlost (hybnost). Tyto podmínky umožní získat celý vývoj systému v čase. Třetí derivace, která se vyskytuje v rovnici (3.35), vytváří další počáteční podmínku, která se z pohledu klasické mechaniky zdá nadbytečná a její původ je značně nejasný.

2. Při nulové externí síle existují nefyzikální řešení rostoucí exponenciálně s časem

Jedno takové řešení lze nalézt velice snad a to pokud zvolíme externí

sílu nulovou a první a druhou integrační konstantu zvolíme rovnou nule. Nalezené řešení rovnice je ve tvaru:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}_0 e^{t/\tau_0} + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2. \quad (3.36)$$

Z prvního členu řešení lze vidět, že částice bude urychlována exponenciálně i pokud je nulová externí síla.

3. Rovnice poskytuje řešení, která porušují kauzalitu

Pro sílu, která je nenulová v čase t_0 , závisí řešení v čase $t < t_0$ na hodnotě síly v budoucnosti, což je z hlediska kauzality nepřijatelné. Takováto nekauzální řešení existují i pro jakoukoli externí sílu, která je funkcí času. Jedno z takových řešení rovnice je např.

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m_0 \tau_0} \int_t^\infty \mathbf{F}_{ext}(t') e^{-\frac{(t'-t)}{\tau_0}} dt'. \quad (3.37)$$

Pokud tento vztah dosadíme do AL rovnice zjistíme, že je jejím řešením. Hodnoty síly v čase t se počítají z času budoucího, což je porušení kauzality.

■ Lorentzova-Diracova pohybová rovnice

Pokud nebudeme v Lorentzově souřadnicové soustavě lokálně spojené s částicí, je přímé kovariantní zobecnění pohybové rovnice 3.35 na libovolnou soustavu

$$m_0 \frac{dU^\alpha}{d\tau} = F_{ext}^\alpha + m_0 \tau_0 \left(\frac{da^\alpha}{d\tau} - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha \right); \quad a^2 = a^\beta a_\beta. \quad (3.38)$$

U^α je čtyřvektor zrychlení. Druhý člen v závorce zajišťuje kovariantnost rovnice. Rovnici odvodil Paul A. M. Dirac za pomoci úvah o zachování čtyřhybnosti soustavy pole a částice v roce 1938 v článku [14].

■ 3.3.2 Pauliho zápis radiační reakce

V obecné Lorentzově Diracově rovnici (3.38) má radiační reakce na částici tvar

$$F_{rad}^\alpha = m_0 \tau_0 \left(\frac{da^\alpha}{d\tau} - \frac{a^2}{c^2} U^\alpha \right) \quad (3.39)$$

od vlastního času nyní přejdeme k souřadnicovému času, pro přechod využijeme vyjádření intervalu ve vlastní soustavě částice a v laboratorní soustavě:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.40)$$

$$d\tau^2 = dt^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (3.41)$$

Nejprve určíme časovou změnu Lorentzova faktoru γ :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(1 - v^2/c^2 \right)^{-1/2} = \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}. \quad (3.42)$$

Teď si musíme určit všechny zbylé členy do radiační síly,

$$x^\alpha = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$U^\alpha = \gamma c \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$a^\alpha = c \begin{pmatrix} \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \\ \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + \gamma^2 \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Lze si povšimnout, že vztah má opravdu rozměr zrychlení. Poslední člen, který se vyskytuje v radiační reakci je $da^\alpha/d\tau$ výpočet tohoto členu je zdlouhavý a přímočarý,

$$\frac{da^\alpha}{d\tau} = c \begin{pmatrix} 4\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^5 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}^2) \\ 4\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^5 [(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \boldsymbol{\beta}] + \gamma^3 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Pokud zkombinujeme všechny tyto vztahy dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = F_{ext}^\alpha + m_0 c \tau_0 \begin{pmatrix} 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^5 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \\ 3\gamma^7 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + [(\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + 3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}}] + \gamma^3 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Po převedení levé strany rovnice do souřadnicového času dostaneme vztahy pro radiační sílu a ztrátu energie,

$$\frac{dE_{rad}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \left[3\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 + \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \right] \quad (3.48)$$

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \left[3\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + 3\gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^2 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \right]. \quad (3.49)$$

Tyto výrazy poprvé odvodil Wolfgang Pauli v roce 1958 v knize [15]. Tyto vztahy jsou důležité pro ubíhající elektrony, protože popisují záření částice při velkých rychlostech. Tyto síly a ztráty energie mohou vést k ukončení ubíhajícího režimu nebo k němu alespoň signifikantně přispět.

3.3.3 Vyzářený výkon

Dalším důležitým parametrem je výkon který částice vyzáří při zářivé reakci. Odvození naleznete v [4]. Opět vyjdeme z retardovaných potenciálů (3.27). Z těchto potenciálů dostaneme vztahy,

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_Q(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (3.50)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_Q(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (3.51)$$

Pro bodovou částici jsou zdrojové členy

$$\rho_Q = Q\sigma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{j}_Q = Q\mathbf{v}(t')\sigma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \quad (3.52)$$

Pokud dosadíme do potenciálů vypočtených předtím, musíme zintegrovat přes prostorovou distribuci a poté přes časovou. Pokud toto provedeme dostaneme výsledné potenciály ve tvaru,

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})} \quad (3.54)$$

, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor pozice od středu souřadného systému. Veškeré argumenty související s částicí jsou brány v retardovaném čase. Tyto potenciály se jmenují Liénardovy-Wiechertovy potenciály podle jejich objevitelů. Jsou plně relativistické a nebyly v nich učiněny žádné zjednodušení nebo rozvoje. Přímým výpočtem stejně jako v rovnici (3.33) nalezneme elektrické a magnetické pole,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{c} \quad (3.56)$$

Výsledkem pole je Feynmannova formule pro elektrické pole. První část je zobecněné columbické pole, druhá část je obecné zářivé pole. Z těchto vztahů lze přímo spočítat Poyntingův vektor a jeho integrací zjistit vyzářený výkon. Pokud nás zajímá pouze zářivý člen tak první columbickou část zanedbáme a dostaneme,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c R} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3} \quad (3.57)$$

Pomocí tohoto pole určíme Poyntingův vektor,

$$\mathcal{S} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0 c} \boldsymbol{\mathcal{E}} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\boldsymbol{\mathcal{E}}^2 \mathbf{n} - (\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\mathcal{E}}] \quad (3.58)$$

Druhý člen je nulový, protože z rovnice (3.57) vyplývá, že pole je kolmé na jednotkový vektor \mathbf{n} . Nyní vypočteme normálovou složku Poyntingova vektoru.

$$\mathcal{S}_n = \mathcal{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}^2}{\mu_0 c} \Rightarrow \quad (3.59)$$

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c R} \right)^2 \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^6} \quad (3.60)$$

Celý vztah je funkcí retardovaného času a proto energie vyzářená do prostorového úhlu bude dána vztahem,

$$d\mathcal{W} = \mathcal{S}_n dt R^2 d\Omega \quad (3.61)$$

a vyzářený výkon bude,

$$d\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{W}}{dt'} = \mathcal{S}_n \frac{\partial t}{\partial t'} R^2 d\Omega \quad (3.62)$$

Pokud dosadíme za Poyntingův vektor a za časovou derivaci dostaneme výsledný vztah,

$$d\mathcal{P} = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]^2}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})^5} d\Omega \quad (3.63)$$

3.3.4 Relativistické brzdné a synchrotronní záření

Nyní si rozebereme dva speciální případy pro rovnici (3.63). Za prvé brzdné záření, kde je částice urychlována nebo bržděna ve směru pohybu tzn. $\boldsymbol{\beta} \parallel d\boldsymbol{\beta}/dt$. Po úpravě formule pro podélnou složku dostaneme,

$$d\mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})^5} d\Omega \quad (3.64)$$

Pro částici urychlovanou ve směru jejího pohybu platí,

$$\theta = \angle(\dot{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{n}) = \angle((\boldsymbol{\beta}, \mathbf{n})) \quad (3.65)$$

proto bude úhlová závislost vyzařovaného výkonu dána vztahem,

$$d\mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d\Omega. \quad (3.66)$$

Po integrování přes prostorový úhel $d\Omega$ dostaneme celkový výkon, který částice vyzáří jako,

$$\mathcal{P}_{\parallel} = \frac{Q^2}{6\pi^2\epsilon_0 c} \gamma^6 \dot{v}^2 \quad (3.67)$$

V případě synchrotronního záření je situace o něco složitější. Jde o částici, kde její zrychlení je kolmé na její rychlost (platí $\boldsymbol{\beta} \perp d\boldsymbol{\beta}/dt$). Volme okamžitou souřadnicovou soustavu v níž osa z míří ve směru pohybu částice a osa x ve směru zrychlení (při kruhové trajektorii míří do středu). Pro odvození zavedeme sférické souřadnice,

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = \beta \cos \vartheta; \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\beta} \sin \vartheta \cos \varphi; \quad (3.68)$$

Po stejných úpravách jako u brzdného záření dostaneme výsledný vztah pro vyzařovaný výkon do okolí v případě kolmého zrychlení,

$$d\mathcal{P}_{\perp} = \frac{Q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 + (\sin \vartheta \cos \varphi)^2 (\beta^2 - 1)}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \dot{\beta}^2 d\Omega. \quad (3.69)$$

Opět provedeme integraci přes prostorový úhel a získáváme vztah pro celkový výkon jako,

$$\mathcal{P}_{\perp} = \frac{Q^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \gamma^4 \dot{v}^2 \quad (3.70)$$

Pro tyto případy jsou vykresleny směrové charakteristiky v další kapitole a dále rozebrány jednotlivé případy. Pokud bychom chtěli odvodit tyto rovnice pro obecný případ pohybu byl by celkový vyzařovaný výkon prostým součtem těchto dvou případů. Ostatní křížové členy se při integraci odečtou.

Kapitola 4

Ukončení ubíhajícího režimu a výpočty záření elektronů v plazmatu

V této části se budu věnovat ukončení ubíhajícího režimu pomocí záření. Naleznete zde diskuzi k mechanismu tohoto ukončení, vykreslení a odhady ztrát energií, zářivých sil působících na elektron v plazmatu a 3D zobrazení tvaru vyzařovaného výkonu do okolí. Všechna data a rovnice byli zpracovány v programu Wolfram Mathematica.

4.1 Problém s ukončením ubíhajícího režimu zářením

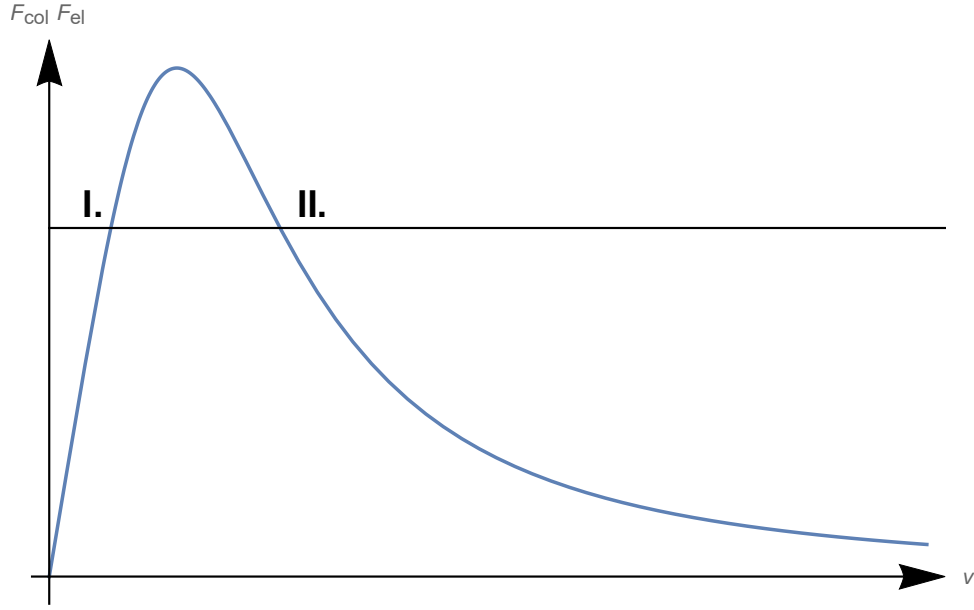
Při ukončení ubíhajícího režimu se musí energie elektronu disipovat do okolí různými procesy. Jedním z procesů je záření elektronu do okolí. Nejjednodušším případem je pokud je elektron urychlován pouze konstantním elektrickým polem. Při malých rychlostech a malých polích je elektron držen v tzn. ohmickém režimu. V ohmickém režimu není částice urychlována, ale je držena na konstantní rychlosti. Aby tento stav nastal tak musí platit tato rovnováha sil,

$$F_{el} = F_{col} \quad (4.1)$$

Tyto síly jsou zadány vztahy (2.6) a (3.13). Tato rovnováha je stabilní a proto se částice ustálí v tomto režimu. Situace, kdy je částice v ohmickém režimu se dá popsat pomocí průběhu elektrické síly a srážkové v rychlostním prostoru. Stabilní bod pro tyto síly je zobrazen na Obr.4.1 a odpovídá bodu I. Rychlost odpovídající tomuto bodu je dána vztahem,

$$v_I = \frac{\pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_e E}{n_e e^3 \ln \Lambda} \frac{1}{\frac{Z_{eff}}{v_{Ti}^3} + \frac{2}{v_{Te}^3}} \quad (4.2)$$

Do tohoto vztahu byla použita aproximace Chandrasekharovy funkce pro malé rychlosti, kde $\psi(x) \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}}x$. Prakticky se jedná o nahrazení lineární funkcí, což odpovídá ohmickému režimu. Do tohoto bodu budou směřovat všechny částice, které jsou v intervalu od nulové rychlosti po rychlost danou bodem II. Tzn. pokud má částice menší rychlost než v_I , je urychlena elektrickým polem na rychlost v_I . Pokud má částice větší rychlost než v_I , a zároveň

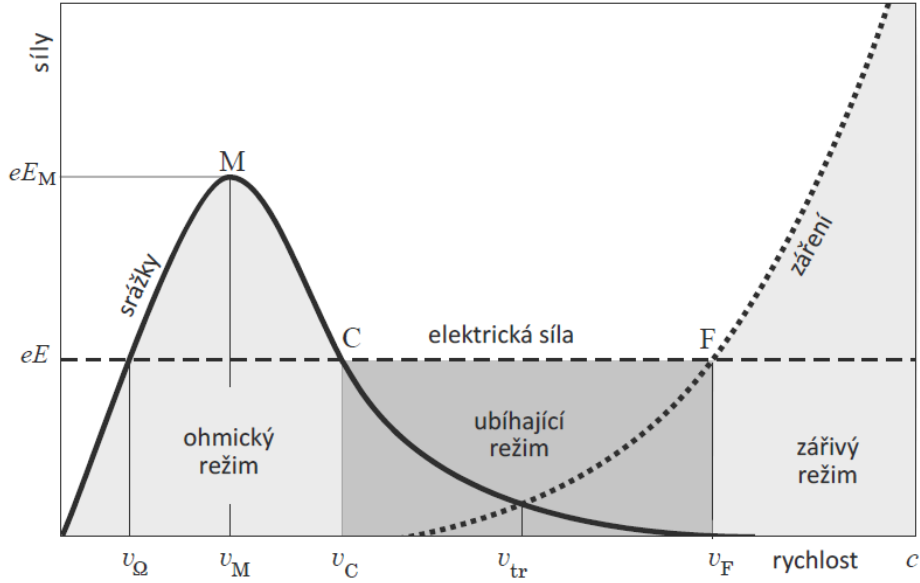


Obrázek 4.1: Průběhy srážkové a elektrické síly pro $E=\text{const.}$, kde modrý průběh je srážková síla a černý je elektrická síla

menší než v_{II} . je zpomalena pomocí srážek do bodu I. Avšak, částice může získat dostatečnou energii a rychlost pro to aby se dostala do regionu za bod II. a přejde do ubíhajícího režimu. Pokud se částice ocitne v této oblasti je nekontrolovaně urychlována elektrickým polem a s přibývajícím rychlostí srážková síla prudce klesá a začíná být zanedbatelná vůči elektrické. Rychlost, kterou je nutné překročit, je dána vztahem,

$$v_{II} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \sqrt{\frac{n_e \ln \Lambda e^3}{\pi m_e E} (Z_{eff} + 2)} \quad (4.3)$$

Opět je použita aproximace pro průběh Chandrasekharovy funkce, kde pro velké rychlosti se chová jako $\psi(x) \approx \frac{1}{2x^2}$. V tomto bodě se nachází nestabilní rovnováha, proto se částice vždy dostane buď do ohmického režimu nebo přejde do ubíhajícího režimu. Mechanizmy přechodu do ubíhajícího režimu je několik, např. překročení Dreicerova pole (odpovídá maximu srážkové síly) popsaného rovnicí (3.16), nebo hot-tail mechanismem. Tyto primární mechanismy vedou k zvětšení populace ubíhajících elektronů pomocí sekundární mechanismů, jako jsou lokální srážky. Procesy vedoucí ke vzniku ubíhajících elektronů jsou detailněji popsány nahoře. Pro vysoké rychlosti je srážková síla zanedbatelná vůči elektrické síle a elektron je dále urychlován. Podle tohoto modelu by elektron velice rychle překročil rychlost světla a pokračoval dále. Toto by vytvořilo nefyzikální chování, proto elektron musí ztratit energii pomocí jiných procesů. Jeden z procesů je záření částice. Podle [2] je průběh zářivé síly exponenciální a existuje bod F, kde se tyto síly vyrovnají. Celou situaci naleznete na Obr.4.2. Pokud by platil tento stav tak by bod F měl být stabilní, protože kdyby se částice dostala na menší rychlost než v_F , tak



Obrázek 4.2: Síly působící na letící elektron (pouze elektrická síla) [2]

by byla urychlena k bodu a F a pokud by byla rychlejší byla by zářením zpomalena na zpět v_F . Tento bod by měl tedy odpovídat relaci,

$$F_{el} = F_{rad}. \quad (4.4)$$

Tzn. musíme rozepsat sílu F_{rad} a vyjádřit v rámci bezrozměrné rychlosti částice β . Celá situace lze popsat vztahem,

$$eE = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \left[3\gamma^6 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \boldsymbol{\beta} + \gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\beta}}) \boldsymbol{\beta} + 3\gamma^4 (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \dot{\boldsymbol{\beta}} + \gamma^2 \ddot{\boldsymbol{\beta}} \right] \quad (4.5)$$

Povšimněme si, že každý člen této rovnice je úměrný $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ nebo $\ddot{\boldsymbol{\beta}}$. Z tohoto vztahu tedy musíme rozepsat následující rovnosti,

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}), \quad \ddot{\boldsymbol{\beta}} = \ddot{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}) \quad (4.6)$$

Tyto vztahy budeme vyjadřovat pro pohyby v elektrickém poli jako je urychlování pouze elektrickým polem, Larmorovy rotace v magnetickém poli a pohyb po šroubovici (gyrace částice). Pokud se pokusíme vyjádřit tyto rovnosti pro pohyby v elektrickém poli zjistíme, že tyto výrazy se rovnají nule nebo divergují. Toto chování je podezřelé a nefyzikální. Pokud se podíváme na celou situaci, tak pokud každý člen radiační síly splňuje,

$$F_{rad} \sim \dot{\boldsymbol{\beta}} \vee F_{rad} \sim \ddot{\boldsymbol{\beta}}, \quad (4.7)$$

tak se radiační síla v rovnováze obou sil musí rovnat nule, ale elektrická síla nebude nulová. Toto tvrzení je ve sporu s předpokladem, že jsou síly v rovnováze a rovnají se. Pokud toto převedeme na situaci danou obrázkem 4.2, tak bod F nemůže nikdy existovat. Částice v elektrickém poli bude dále

urychlována s klesajícím zrychlením než při působení pouze elektrického pole bez uvážení záření. Z těchto relací vyplývá, že samotné záření při přítomnosti elektrického pole částici nezastaví, ale způsobí pouze ztráty energie. Záření může ukončit tento režim pouze při nulovém elektrickém poli, což by odpovídalo opuštění regionu v kterém se nachází elektrické pole.

4.2 Ztráty energie elektronu

Ztráty energie elektronu při záření jsou důležitou složkou při ukončení ubíhajícího režimu. Jak je popsáno nahoře samotné záření nemůže ukončit tento režim, ale bude značně přispívat. Hlavně na vysokých rychlostech. Pokud budeme uvažovat elektron urychlovaný pouze elektrickým polem s pohybem zadaným rovnicemi,

$$x = \frac{\pi_0 c}{QE} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{QEt}{\pi_0} \right)^2} - 1 \right) \quad (4.8)$$

$$y = \frac{p_0 c}{QE} \operatorname{argsh} \left(\frac{QEt}{\pi_0} \right) \quad (4.9)$$

$$\pi_0 = \sqrt{m_0^2 c^2 + p_0^2}, \quad p_0 = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (4.10)$$

Pokud bychom vyjádřili všechny členy potřebné pro výpočet ztráty energie podle rovnice (3.48), vyjde celkem složitý a dlouhý vztah. Z tohoto důvodu ho zde neuvádím. Na Obr.4.3 naleznete průběh této ztráty energie v čase. Z tohoto dlouhodobého průběhu lze vidět, že ztráta energie klesá. Tento pokles je způsoben menším zrychlením částice, která se blíží k rychlosti světla. Pokles zrychlení je způsoben relativistickými efekty, kdy roste pohybová hmotnost částice. Elektrické pole, kterému se elektron vystaven, je odhadnut z dat od disrupce tokamaku JET. Tato hodnota se rovná unášivému poli a je převzata z [16]. Na Obr.4.4, lze vidět vývoj v krátkém časovém intervalu, kde je zrychlení částice stále vysoké a částice intenzivně září.

Pokud budeme uvažovat zadání pohybu částice jako Larmorovu rotaci v konstantním magnetickém poli. Dostaneme pohyb v souřadnicích jako,

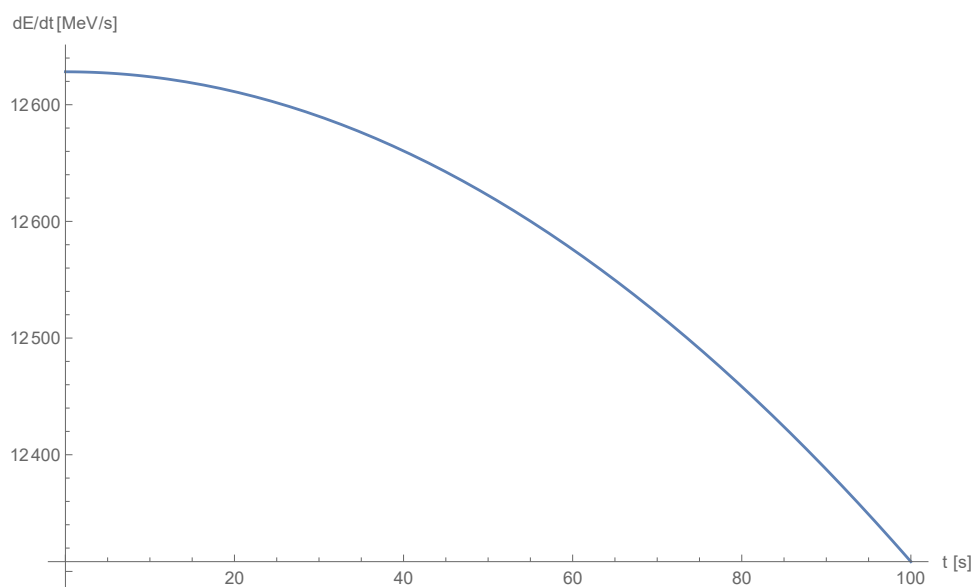
$$x = R_L - R_L \cos(\omega_c t) \quad (4.11)$$

$$y = R_L \sin(\omega_c t) \quad (4.12)$$

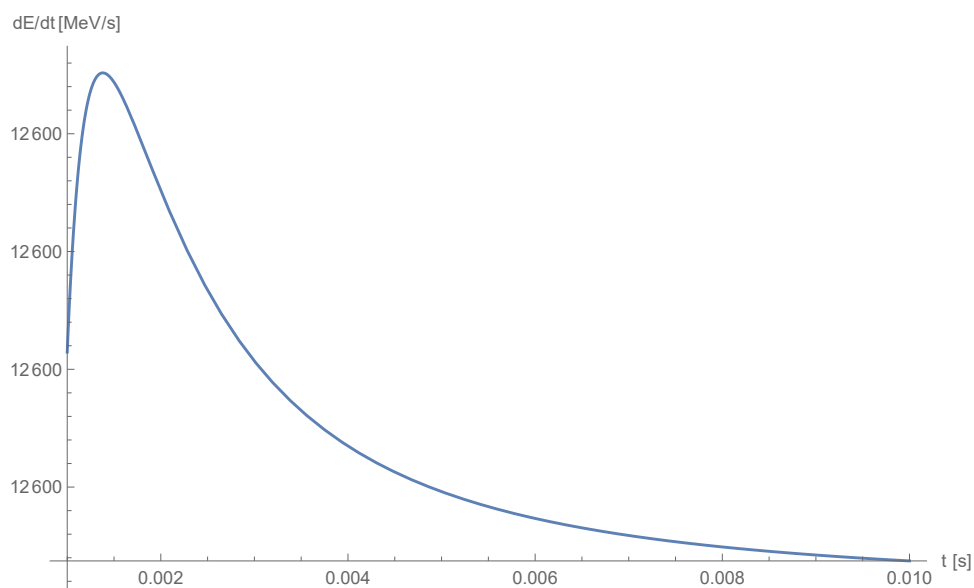
Opět vyjádříme ztrátu energie,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{ec}{6\pi\epsilon_0} \frac{R_L^2 \omega_c^4}{(c^2 - R_L^2 \omega_c^2)} \quad (4.13)$$

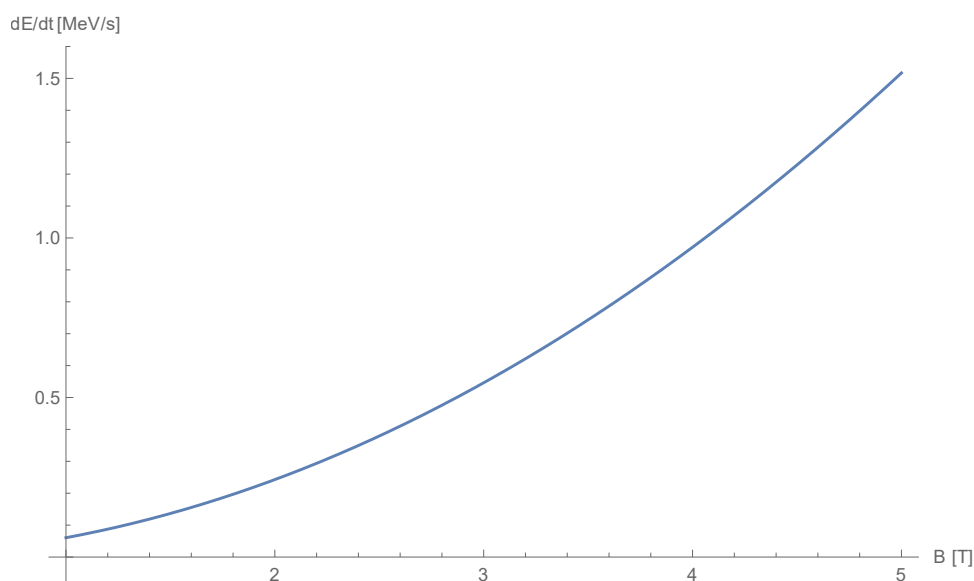
Z tohoto vztahu lze vidět, že ztráta energie je v tomto případě nezávislá na čase. Závisí pouze na Larmorovu poloměru a frekvenci, což odpovídá amplitudě magnetického pole. Pokud bude částice v konstantním magnetickém poli bude zářit stejnou energií. Ve velkých tokamacích jako je ITER nebo JET je magnetické pole $B \approx 1 - 5\text{T}$ tyto hodnoty byli získány na základě [17]. Ztráty energií pro tyto hodnoty polí jsou vyobrazeny na Obr. 4.5.



Obrázek 4.3: Ztráta energie elektronu při urychlování pouze elektrickým polem, $E = 70\text{V/m}$, $v_0=0.5c$



Obrázek 4.4: Ztráta energie elektronu při urychlování pouze elektrickým polem detail pro krátký časový úsek, $E = 70\text{V/m}$, $v_0=0.5c$



Obrázek 4.5: Ztráta energie elektronu při pohybu v konstantním magnetickém poli, energie elektronu $\mathcal{E}_0 = 100$ keV

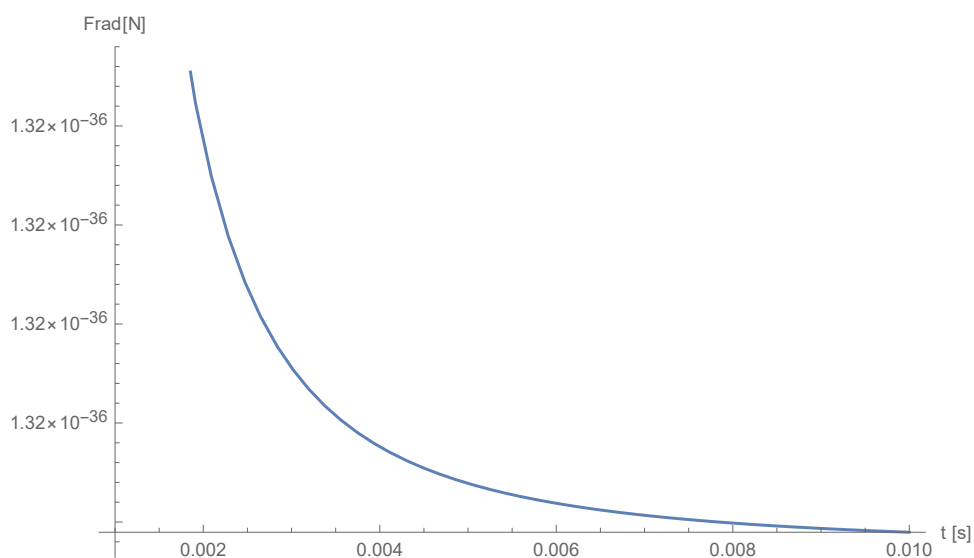
4.3 Zářivé síly působící na elektron

Dalšími důležitými výpočty jsou síly působící na částici, která září. Tato síla je zadána Pauliho vztahem (3.49). Tento vztah je silně závislý na zrychlení částice. Průběhy radiační síly pro pohyb zadaný rovnicemi (4.8), (4.9) je zobrazen na Obr. 4.6 a její detail pro krátký čas na Obr. 4.7. Za prvé je dobré si všimnout jak malé síly působí na elektron. Tuto hodnotu však musíme porovnávat s hmotností elektronu, pro kterou již tato síla nebude zanedbatelná. V radiační síle je opět vidět nárůst v malých časech a poté rychlý pokles způsobený relativistickými efekty.

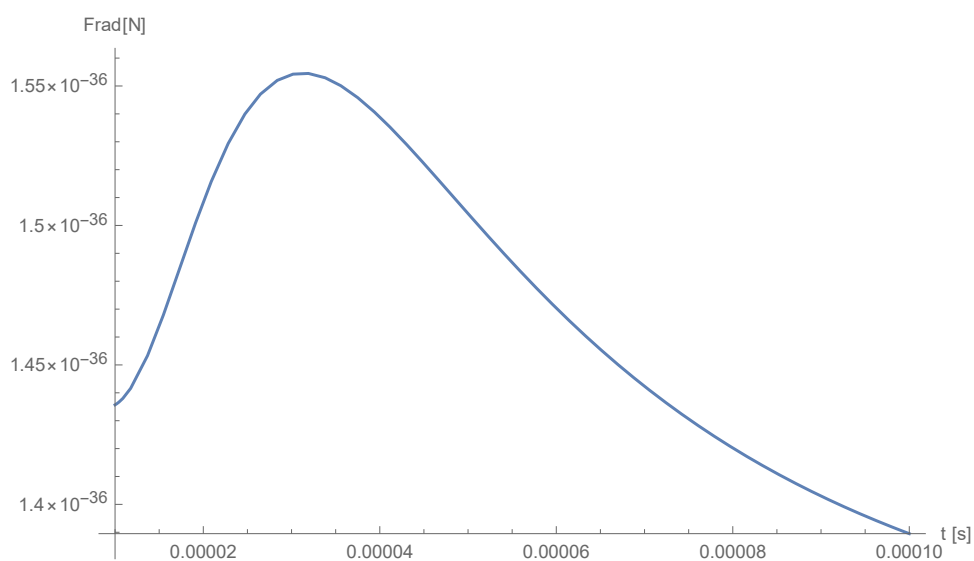
Opět provede ten samý výpočet pro kruhovou trajektorii v magnetickém poli. Velikost výsledné síly bude nezávislá na čase a celá síla je zadána vztahem,

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} \omega_c^2 \boldsymbol{\beta}. \quad (4.14)$$

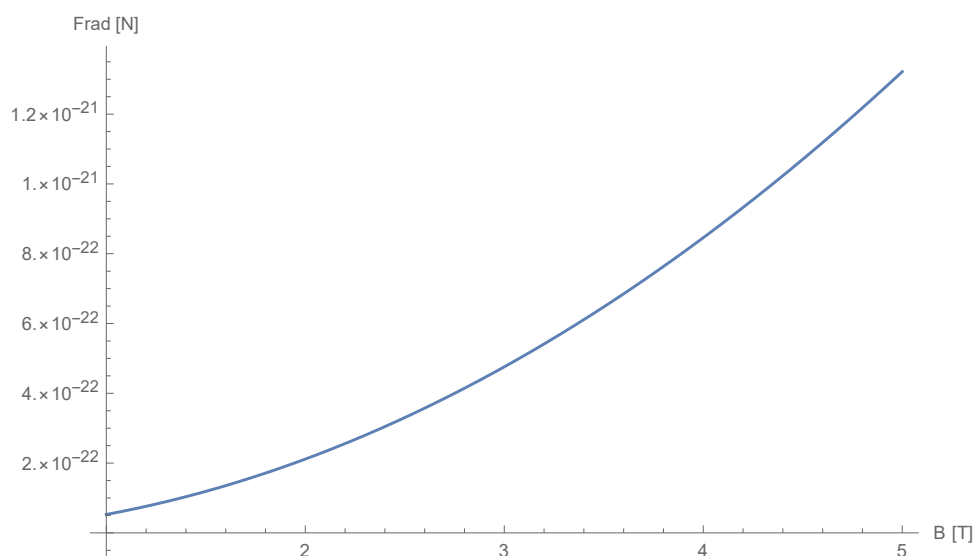
Další zajímavou vlastností těchto charakteristik jako je radiační síla a ztráta energie pro gyrační pohyb je úměrnost vůči B . Konkrétně platí $F_{rad} \sim B^2$ a $dE/dt \sim B^2$. Dále provedeme zobrazení závislosti radiační síly na magnetické indukci B na Obr. 4.8.



Obrázek 4.6: Radiační síla při urychlování pouze elektrický polem, $E = 70\text{V/m}$, $v_0=0.5c$



Obrázek 4.7: Radiační síla působící na elektron při urychlování pouze elektrickým polem detail pro krátký časový úsek, $E = 70\text{V/m}$, $v_0=0.5c$



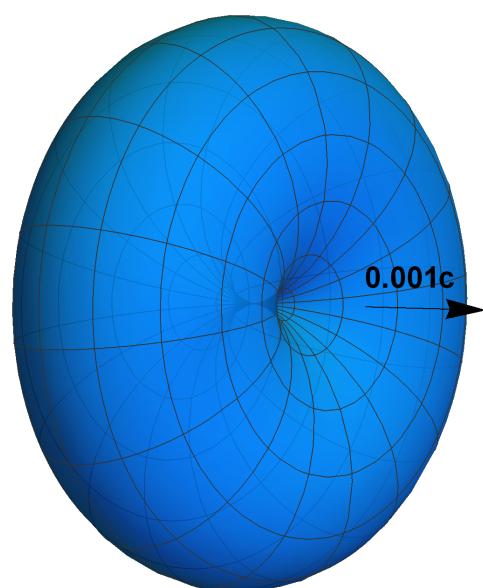
Obrázek 4.8: Radiační síla působící na elektron při pohybu v konstantním magnetickém poli, energie elektronu $\mathcal{E}_0 = 100$ keV

4.4 Vyzařovaný výkon

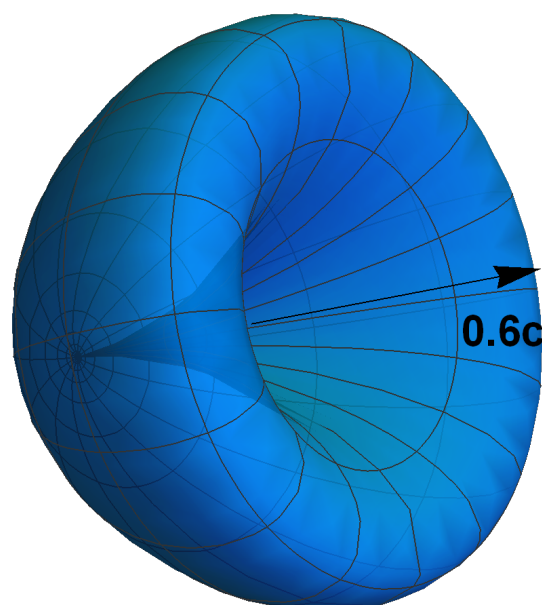
Vyzařovaný výkon je důležitým ukazatelem pro porozumění směrových závislostí. Elektron letící v elektrických a magnetických polích generuje záření určitého tvaru. Tvar tohoto záření může být rozhodující při návrhu zařízení, která tato pole měří nebo se snaží tyto elektrony zachytit a ukončit stavy s vysokými energiemi. Např. při problematice ubíhajících elektronů v tokamaku se podle vyzářených polí dá predikovat, kde elektrony budou dopadat na stěny a způsobovat škody a zařízení. V této části jsou uvedeny ilustrace těchto závislostí na prostorovém úhlu $d\Omega$. Tyto charakteristiky jsou odvozeny ze vztahů (3.66) a (3.69). Pro lepší pochopení jsou zde uvedeny případy pomalé částice ($v=0.001c$) na Obr. 4.9 a Obr. 4.11 a rychlé částice ($0.6c$) na Obr. 4.10 a Obr. 4.12. Pokud částice koná dva pohyby a to urychlený v elektrickém poli a rotační v magnetickém poli tak jejich výsledné pole je součtem těchto případů. Další důležitý parametr je celkový vyzařovaný výkon do okolí celkové výkony jsou spočteny pomocí rovnic (3.67) pro brzdné záření a podle (3.70). Vypočtené výkony jsou uvedeny v Tab. 4.1.

v [m/s]	Brzdné záření [eV/s]	Synchrotroní záření [eV/s]* 10^{-18}
0.001c	0.0331416	2.81741
0.6c	0.126425	6.87842

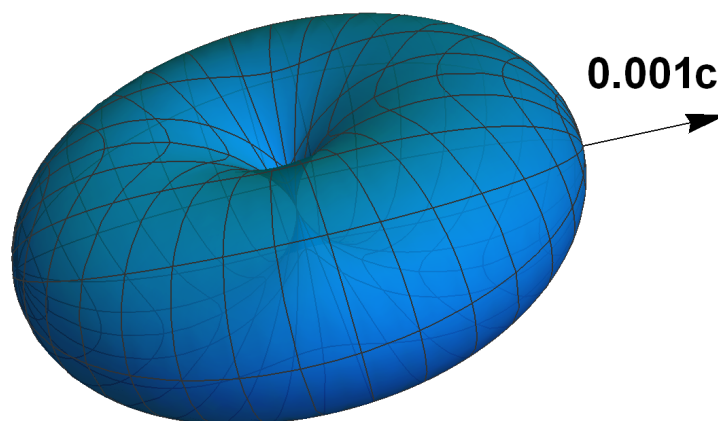
Tabulka 4.1: Celkové vyzařované výkony letícím elektronem



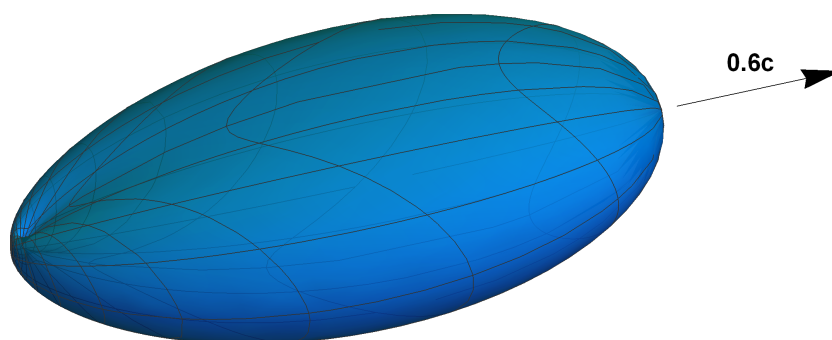
Obrázek 4.9: Vyzařovaný výkon elektronu při brzděném záření ($v = 0.001c$)



Obrázek 4.10: Vyzařovaný výkon elektronu při brzděném záření ($v = 0.6c$)



Obrázek 4.11: Vyzařovaný výkon elektronu při synchrotroním záření ($v = 0.001c$)



Obrázek 4.12: Vyzařovaný výkon elektronu při synchrotroním záření ($v = 0.6c$)

Kapitola 5

Závěr

V této práci jsem shrnul teorii, která se týká ubíhajících elektronů v plazmatu a v torodiálních symetriích. Hlavním cílem bylo lepší pochopení ukončení ubíhajícího režimu pomocí záření a výpočty ztrát energií a tvarů vyzářovaného výkonu. Jeden z hlavních výsledků je reformulace ukončení ubíhajícího režimu zářením, kde záření nemůže samo o sobě ukončit daný režim kvůli úměrnosti k zrychlení částice. Celý systém se chová tak, že pokud by měla nastat rovnováha mezi elektrickou silou a zářivou silou tak by rychlost byla konstantní a zrychlení nulové. Pokud bude ale zrychlení nulové tak celá zářivá síla bude rovna nule, což je ve sporu s tím, že síly jsou v rovnováze. Lépe je tento fakt popsán úměrnostmi (4.7). Tato stejná situace platí i pro ztráty energie, kde částice s nulovým zrychlením nebude ztrácet žádnou energii pomocí záření. Prakticky to znamená, že záření přispěje k ukončení, ale část ztráty energie musí zajistit jiné procesy. Jako jsou např. krece a anihilace párů nebo ionizace okolního prostředí a mnoho dalších. Pokud by nedošlo ke ztrátě energie jinými procesy nikdy by částice neukončila ubíhající režim a byla dále urychlována elektrickým polem. Dalším důležitým výsledkem jsou průběhy ztrát energií a radiačních sil pro jednotlivé nejjednodušší případy pohybu. Z jednotlivých průběhů lze vidět zmenšení zářivých ztrát při větších rychlostech z důvodu klesajícího zrychlení. Klesající zrychlení částice je způsobeno relativistickými efekty, které působí na částici. Např. na Obr. 4.3 je dlouhodobý vývoj vyzářené energie, kde rychlost částice stále roste, ale ztráta energie pomocí záření klesá. Dále na Obr. 4.4 je krátkodobý vývoj, kde lze vidět že existuje maximum ztráty energie. Toto maximum odpovídá maximu zrychlení částice. Jako další byl zkoumán vyzářovaný výkon do okolí letící částice. Z průběhů lze vidět jeho směrová závislost. V obou relativistických případech (Obr. 4.10 a Obr. 4.12) částice září silně před sebe ve směru pohybu. V nerelativistickém případě (Obr. 4.9 a Obr. 4.11) září obě částice do všech směrů stejně. Z velikosti celkového vyzářovaného výkonu lze usuzovat, že brzdné záření bude efektivnější při ztrátách energie a bude se více uplatňovat. Jako pokračování této práce bych navrhl studium dalších ztrát energie částice a doplnil bych tak pohled na ukončení ubíhajícího režimu. Mezi významné bych navrhl kreci a anihilaci párů.



Literatura

- [1] Christian Theiler. *Basic Investigation of Turbulent Structures and Blobs of Relevance for Magnetic Fusion Plasmas*. PhD thesis, 12 2011.
- [2] Petr Kulhánek. *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky III*. AGA, vydání: druhé, aktualizované a změněné edition, 2020.
- [3] Ficker Ondřej. *Generace, ztráty a diagnostika ubíhajících elektronů v tokamacích [online]* Dostupné z: https://physics.fjfi.cvut.cz/publications/FTTF/DP_Ondrej_Ficker.pdf. Doc. RNDr. Jan Mlynář, Ph.D., ČVUT Praha, 2015.
- [4] Petr Kulhánek. *Vybrané kapitoly z teoretické fyziky II*. AGA, vydání: druhé, aktualizované a změněné edition, 2020.
- [5] A. DIGHE. *Lectures - Electrodynamics National Programme on Technology Enhanced Learning, India*.
- [6] Xiaoyin Guan, Hong Qin, and Nathaniel J Fisch. Phase-space dynamics of runaway electrons in tokamaks. *Physics of Plasmas*, 17(9):092502, 2010.
- [7] S. HUMPRIES. *Principles of charged particle acceleration*. University of New Mexico, first edition, 1998.
- [8] H. Dreicer. Electron and ion runaway in a fully ionized gas. i. *Phys. Rev.*, 115:238–249, Jul 1959.
- [9] J.W. Connor and R.J. Hastie. Relativistic limitations on runaway electrons. *Nuclear Fusion*, 15(3):415–424, jun 1975.
- [10] J Rydén. Monte carlo simulation of runaway electrons, 2012.
- [11] A V Gurevich. On the theory of runaway electrons. *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.*
- [12] H. M. Smith and E. Verwichte. Hot tail runaway electron generation in tokamak disruptions. *Physics of Plasmas*, 15(7):072502, 2008.

- [13] M.N Rosenbluth and S.V Putvinski. Theory for avalanche of runaway electrons in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 37(10):1355–1362, oct 1997.
- [14] P. A. M. Dirac. Classical theory of radiating electrons. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 167(929):148–169, 1938.
- [15] Wolfgang Pauli. *Theory of Relativity*. New York: Pergamon Press, 1958.
- [16] Cristian Sommariva, Eric Nardon, Peter Beyer, Matthias Hoelzl, and Guido Huijsman. Electron acceleration in a jet disruption simulation. 05 2018.
- [17] D. E. Post, K. Borrass, and J. D. Callen. Iter physics. Technical report, International Atomic Energy Agency (IAEA), 1991. INIS-mf-12895.



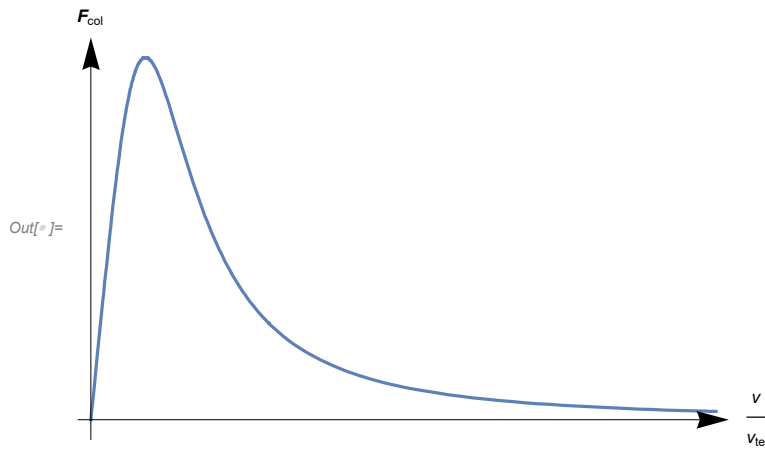
Přílohy

Na následující stranách naleznete přiložené dokumenty k této práci. Jedná se o skripty napsané v programu Wolfram Mathematica, pomocí kterých byli provedeny výpočty nahoře. Jedná se celkem o tři skripty s názvy Prubehy_sil.nb, Vyzareny_vykon.nb, Ztraty_energie_radiacni_sily.nb.

```

In[ ]:= c = 3 * 10^8;
q = -1.602 * 10^(-19);
ne = 10^6;
m0 = 9.1 * 10^(-31); (*9,109 383 7015(28)×10-31*)
eps0 = 8.859 * 10^(-12);
lnA = 10;
Zeff = 10;
vti = 10;
vte = 1 * 10;
Econst = 1;
(*Fcol = ((ne*q^4*lnA) / (2*Pi*eps0^2*m0)) * ((Zeff/vti^2) * ((2*v) / (3*Sqrt[Pi] + 4*v^3)) +
(Zeff/vte^2) * ((2*v) / (3*Sqrt[Pi] + 4*v^3)))));*)
Fcol = 10^3 * (1 * ((2 * v) / (3 * Sqrt[Pi] + 4 * v^3)) +
1 * ((2 * v) / (3 * Sqrt[Pi] + 4 * v^3)));
Plot[Fcol, {v, 0, 10}, AxesLabel -> {v / Subscript[v, te],
Subscript[Style[F, Bold], col]}, Ticks -> None, AxesStyle -> Arrowheads[{{0.0, 0.05}}]]

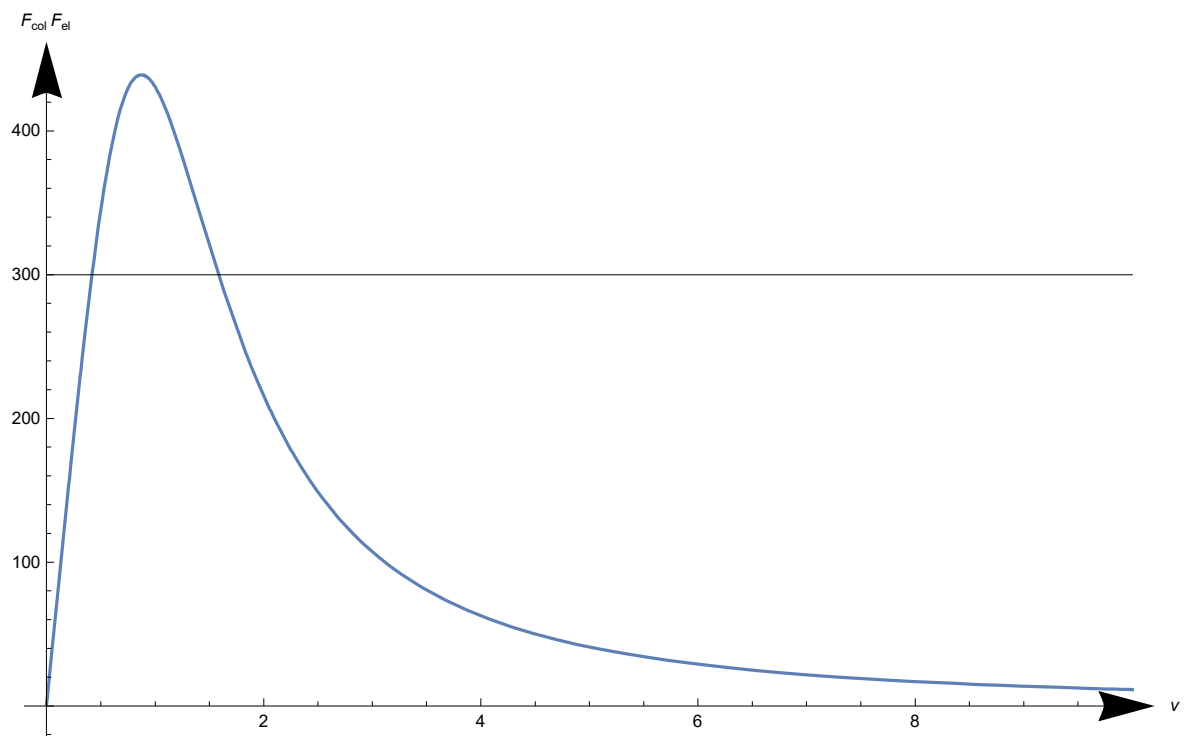
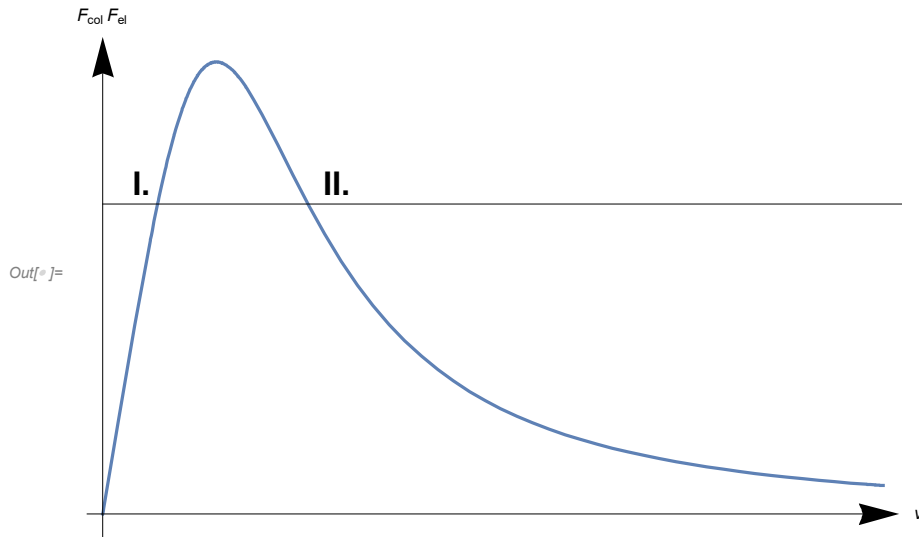
```



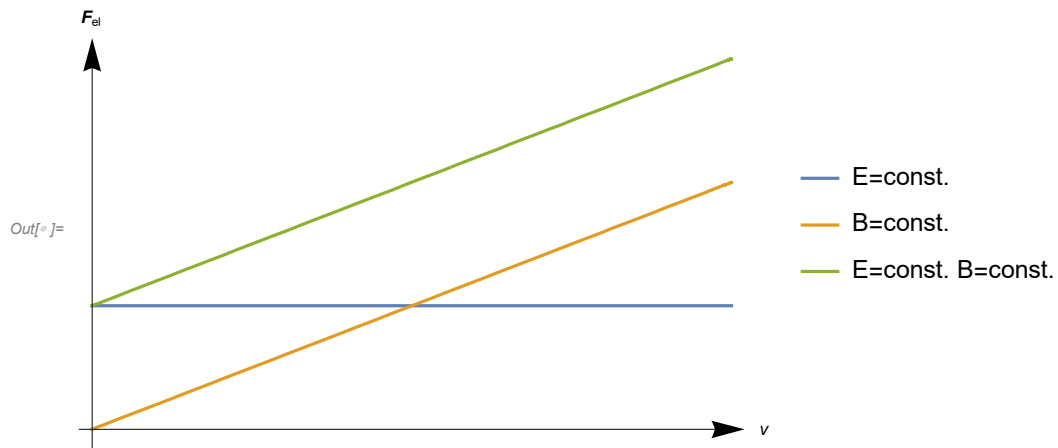
```

In[ ]:= Eline = Line[{{0, 300}, {10, 300}}];
text1 = Graphics[Text[
  Style["I.", FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial", FontWeight -> Bold], {0.3, 320}]];
text2 = Graphics[Text[Style["II.", FontSize -> 17, FontFamily -> "Arial",
  FontWeight -> Bold], {1.8, 320}]];
plot = Plot[Fcol, {v, 0, 6}, AxesLabel -> {v, Subscript[F, col] × Subscript[F, el]},
  Ticks -> None, AxesStyle -> Arrowheads[{0.0, 0.05}], Epilog -> {Eline}];
Show[plot, text1, text2]

```



```
In[ ]:= Fe1 = 1;  
Fe2 = v * 1;  
Fe3 = 1 + v * 1;  
Plot[{Fe1, Fe2, Fe3}, {v, 0, 2}, AxesLabel -> {v, Subscript[Style[F, Bold], e1]},  
  Ticks -> None, PlotLegends -> {"E=const.", "B=const.", "E=const. B=const."},  
  AxesStyle -> Arrowheads[{0.0, 0.05}]]
```

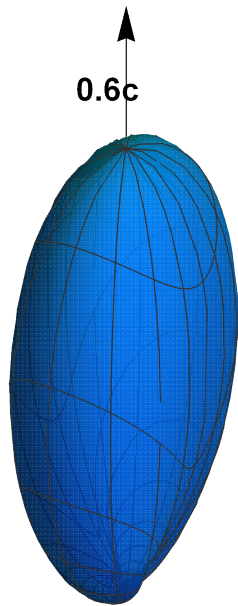


```

beta = 0.6;
beta1 = 1;
dPs = (((1 - beta * Cos[theta]) ^ 2 + (Sin[theta] * Cos[phi]) ^ 2 * (beta ^ 2 - 1)) /
(1 - beta * Cos[theta]) ^ 5) * beta1;
power = SphericalPlot3D[dPs, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi},
PlotStyle -> Directive[Hue[0.57], Opacity[0.8]], Boxed -> False];
arrow = Graphics3D[Arrow[{{0, 0, 16}, {0, 0, 20}}], Boxed -> False];
text = Graphics3D[Text[Style["0.6c", FontSize -> 17,
FontFamily -> "Arial", FontWeight -> Bold], {0, -1, 18}], Boxed -> False];
Show[arrow, power, text]

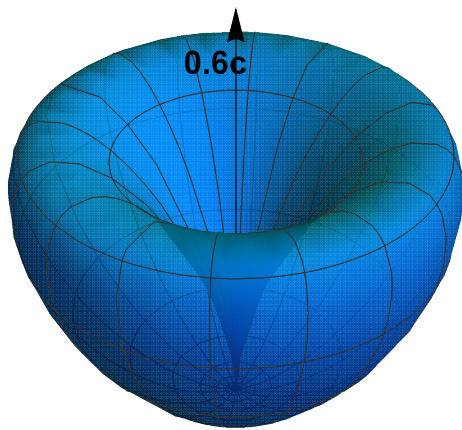
```

Out[]=



```
In[ ]:= dPb = (beta1 * Sin[theta]^2) / (1 - beta * Cos[theta])^5;  
power = SphericalPlot3D[dPb, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi},  
  PlotStyle -> Directive[Hue[0.57], Opacity[0.8]], Boxed -> False];  
arrow = Graphics3D [Arrow[{{0, 0, 5}, {0, 0, 12}}], Boxed -> False];  
text = Graphics3D[Text[Style["0.6c", FontSize -> 17,  
  FontFamily -> "Arial", FontWeight -> Bold], {0, -1, 11}], Boxed -> False];  
Show[arrow, power, text]
```

Out[]:=

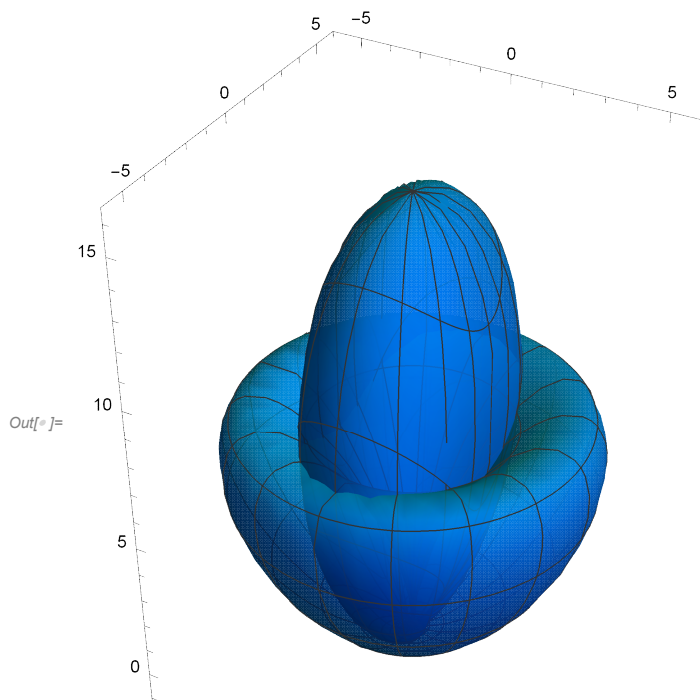


In[]:=

```

power = SphericalPlot3D[dPb, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi},
  PlotStyle -> Directive[Hue[0.57], Opacity[0.8]], Boxed -> False];
power2 = SphericalPlot3D[dPs, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi},
  PlotStyle -> Directive[Hue[0.57], Opacity[0.8]], Boxed -> False];
arrow = Graphics3D [Arrow[{{0, 0, 16}, {0, 0, 22}}]], Boxed -> False];
text = Graphics3D[Text[Style["0.6c", FontSize -> 17,
  FontFamily -> "Arial", FontWeight -> Bold], {0, -1, 18}], Boxed -> False];
Show[power, power2] (*nedáva smysl pohyby se musí konat kolmo na sebe!!!!*)

```



In[]:=

In[]:=

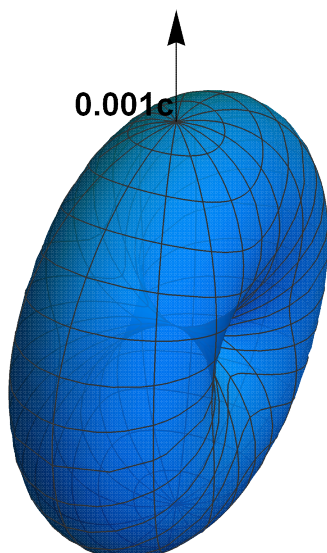


```

In[ ]:= beta = 0.001;
beta1 = 1;
dPs = (((1 - beta * Cos[theta]) ^ 2 + (Sin[theta] * Cos[phi]) ^ 2 * (beta ^ 2 - 1)) /
(1 - beta * Cos[theta]) ^ 5) * beta1;
power = SphericalPlot3D[dPs, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi},
PlotStyle -> Directive[Hue[0.57], Opacity[0.8]], Boxed -> False];
arrow = Graphics3D [Arrow[{{0, 0, 1}, {0, 0, 1.5}}], Boxed -> False];
text = Graphics3D[Text[Style["0.001c", FontSize -> 17,
FontFamily -> "Arial", FontWeight -> Bold], {0, -0.4, 1.3}], Boxed -> False];
Show[
arrow,
power,
text]

```

Out[]:=

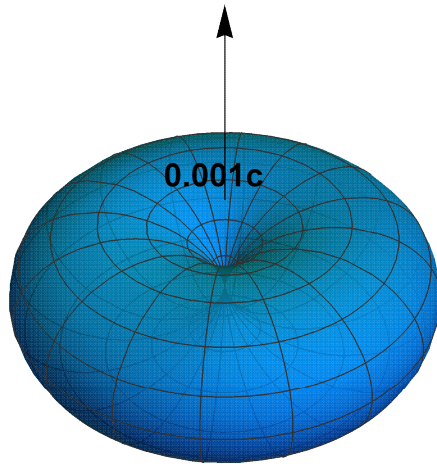



```

In[ ]:= dPb = (beta1 * Sin[theta]^2) / (1 - beta * Cos[theta])^5;
power = SphericalPlot3D[dPb, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi},
  PlotStyle -> Directive[Hue[0.57], Opacity[0.8]], Boxed -> False];
arrow = Graphics3D [Arrow[{{0, 0, 0.5}, {0, 0, 1.5}}], Boxed -> False];
text = Graphics3D[Text[Style["0.001c", FontSize -> 17,
  FontFamily -> "Arial", FontWeight -> Bold], {0, -0.1, 0.7}], Boxed -> False];
Show[arrow, power, text]

```

Out[]:=

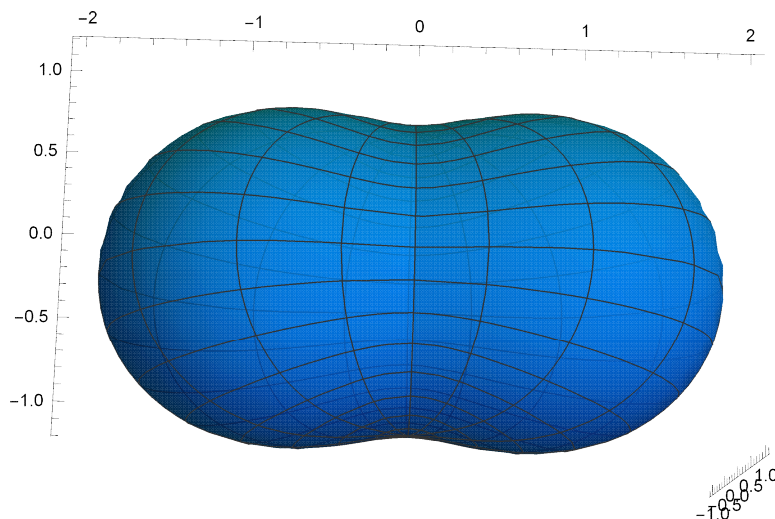


```

In[ ]:= power = SphericalPlot3D[dPb + dPs, {theta, 0, Pi}, {phi, 0, 2 Pi},
  PlotStyle -> Directive[Hue[0.57], Opacity[0.8]], Boxed -> False];
arrow = Graphics3D [Arrow[{{0, 0, 16}, {0, 0, 22}}], Boxed -> False];
text = Graphics3D[Text[Style["0.6c", FontSize -> 17,
  FontFamily -> "Arial", FontWeight -> Bold], {0, -1, 18}], Boxed -> False];
Show[power] (*nedáva smysl pohyby se musí konat kolmo na sebe!!!!*)

```

Out[]:=



```
In[*]:= (*Celkovy vykon*)
c = 299 × 792 × 458;
q = 1.602176634 * 10^(-19);
ε = 8.8541878128 * 10^(-12);
beta = 0.6;
gamma = 1 / (Sqrt[1 - beta^2]);
Pbrz = ((q^2) / (6 * Pi^2 * ε * c)) * gamma^6 * (c * beta1)^2 * 6.24150913 * 10^18
Psyn = ((q^2) / (6 * Pi^2 * ε * c^3)) * gamma^4 * (c * beta1)^2 * 6.24150913 * 10^18
beta = 0.001;
gamma = 1 / (Sqrt[1 - beta^2]);
Pbrz = ((q^2) / (6 * Pi^2 * ε * c)) * gamma^6 * (c * beta1)^2 * 6.24150913 * 10^18
Psyn = ((q^2) / (6 * Pi^2 * ε * c^3)) * gamma^4 * (c * beta1)^2 * 6.24150913 * 10^18

Out[*]= 0.126425

Out[*]= 6.87842 × 10-18

Out[*]= 0.0331416

Out[*]= 2.81741 × 10-18
```

```

In[ ]:= c = 3 * 10^8;
q = 1.602176634 * 10^(-19);
E1 = 70;
m0 = 9.1093837015 * 10^(-31);
v0 = 0.5 * c;
e = 8.8541878128 * 10^(-12);
p0 = (m0 * v0) / (Sqrt[(1 - (v0^2 / c^2))]);

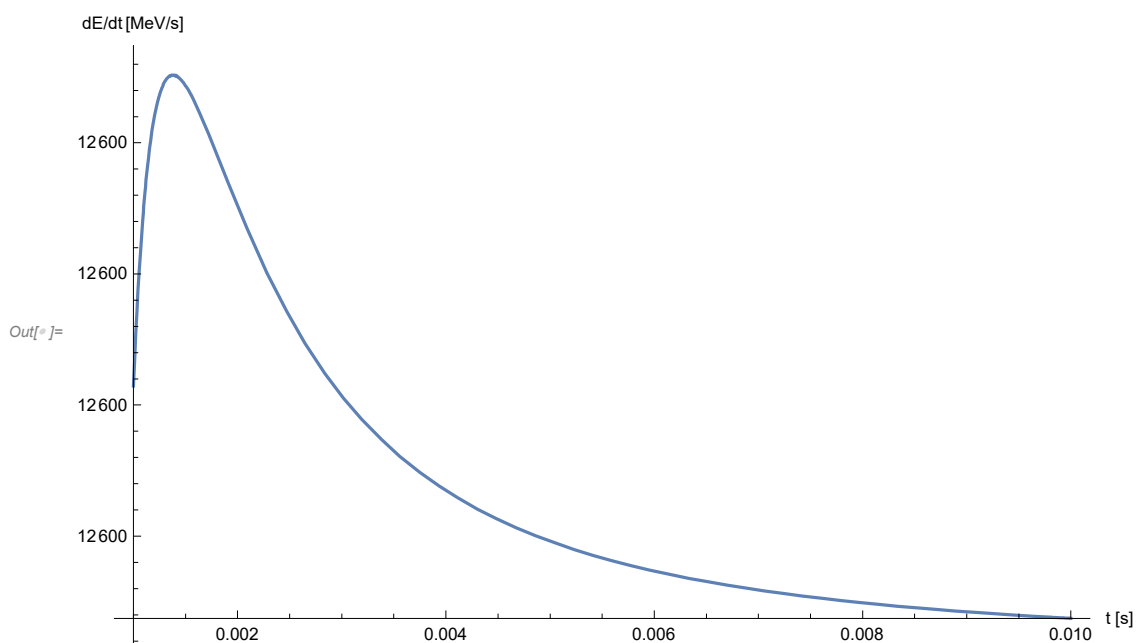
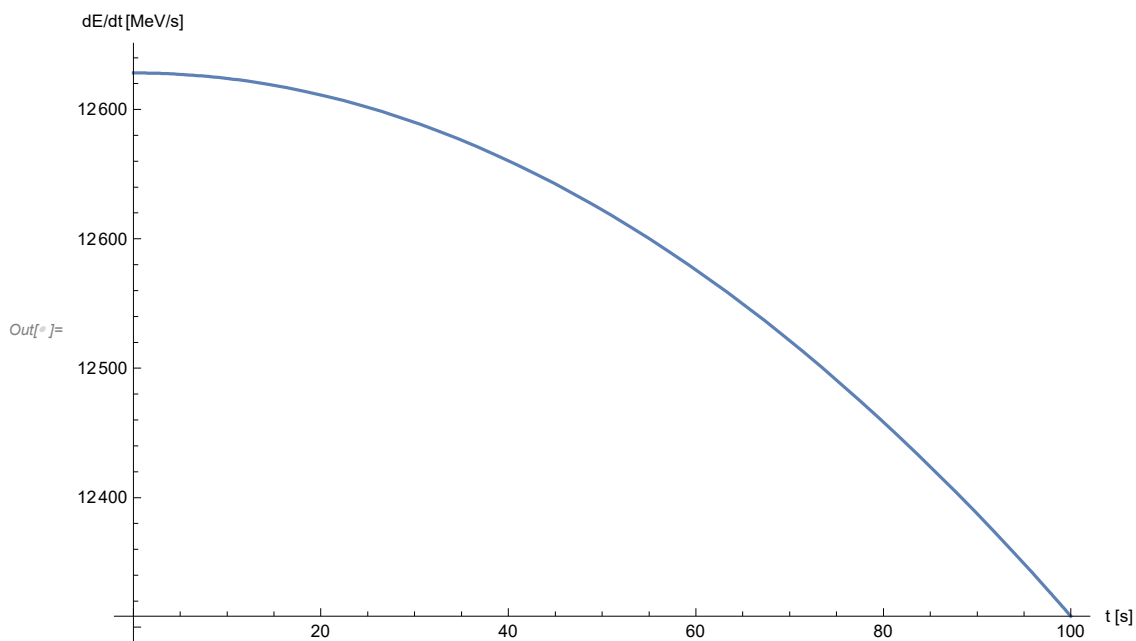
In[ ]:= pi0 = Sqrt[m0^2 * c^2 + p0^2];
x = ((pi0 * c) / (q * E1)) * (Sqrt[1 + ((q * E1 * t) / pi0)^2] - 1);
y = ((p0 * c) / (q * E1)) * ArcSinh[(q * E1 * t) / pi0];
(*x=1-Cos[t];
y=Sin[t];*)
vx = D[x, t];
vy = D[y, t];
v = {vx, vy};

```

```

In[ ]:= beta = Simplify[v / c];
beta1 = Simplify[D[beta, t]];
beta2 = Simplify[D[beta1, t]];
gama = 1 / (Sqrt[1 - Dot[beta, beta]^2]);
betabeta1 = Simplify[Dot[beta, beta1]];
betabeta2 = Simplify[Dot[beta, beta2]];
dEdt = Simplify[q / (6 * pi * e * c) * (3 * gama^6 * (betabeta1)^2 + gama * (betabeta2))];
(*Plot[Norm[beta], {t, 0, 5}];
Plot[Norm[beta1], {t, 0, 5}];
Plot[Norm[beta2], {t, 0, 5}];*)
Plot[dEdt * 6.241509 * 10^(18) * 10^(-6), {t, 0.01, 100},
BaseStyle -> {PrintPrecision -> 3}, AxesLabel -> {"t [s]", "dE/dt" "[MeV/s]"}]
Plot[dEdt * 6.241509 * 10^(18) * 10^(-6), {t, 0.001, 0.01},
BaseStyle -> {PrintPrecision -> 3}, AxesLabel -> {"t [s]", "dE/dt" "[MeV/s]"}]

```



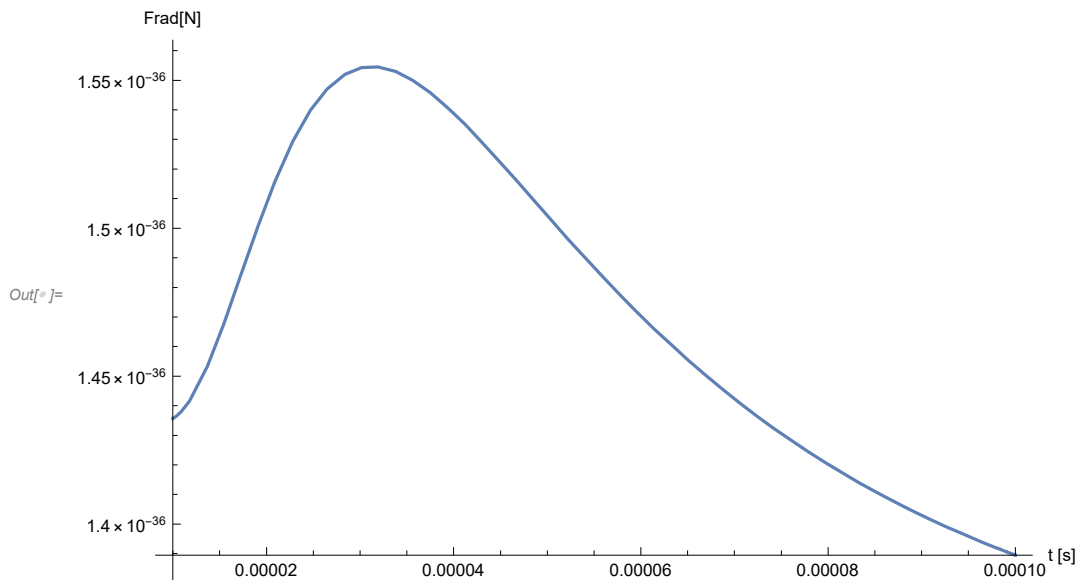
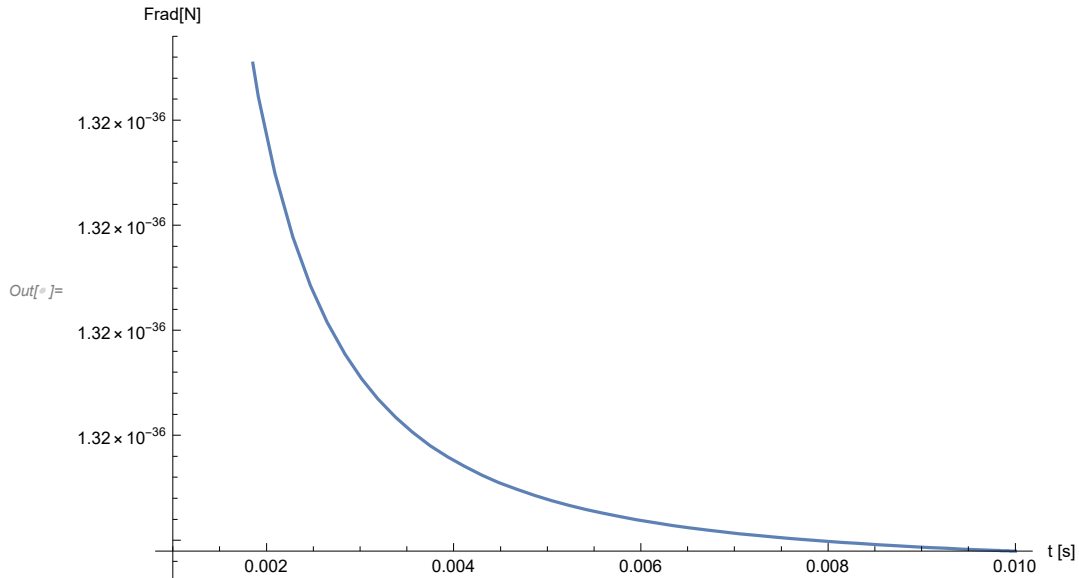
In[]:=

In[]:=

```

Frad = ((q^2) / (6 * Pi * ε * c^2)) *
  (3 * gama^6 * Dot[beta, beta1]^2 * beta + gama^4 * Dot[beta, beta2] * beta +
  3 * gama^4 * Dot[beta, beta1] * beta1 + gama^2 * beta2);
Plot[Norm[Frad], {t, 0.001, 0.01}, BaseStyle -> {PrintPrecision -> 3},
  AxesLabel -> {"t [s]", "Frad[N]"}]
Plot[Norm[Frad], {t, 10^-5, 10^-4}, BaseStyle -> {PrintPrecision -> 3},
  AxesLabel -> {"t [s]", "Frad[N]"}]

```

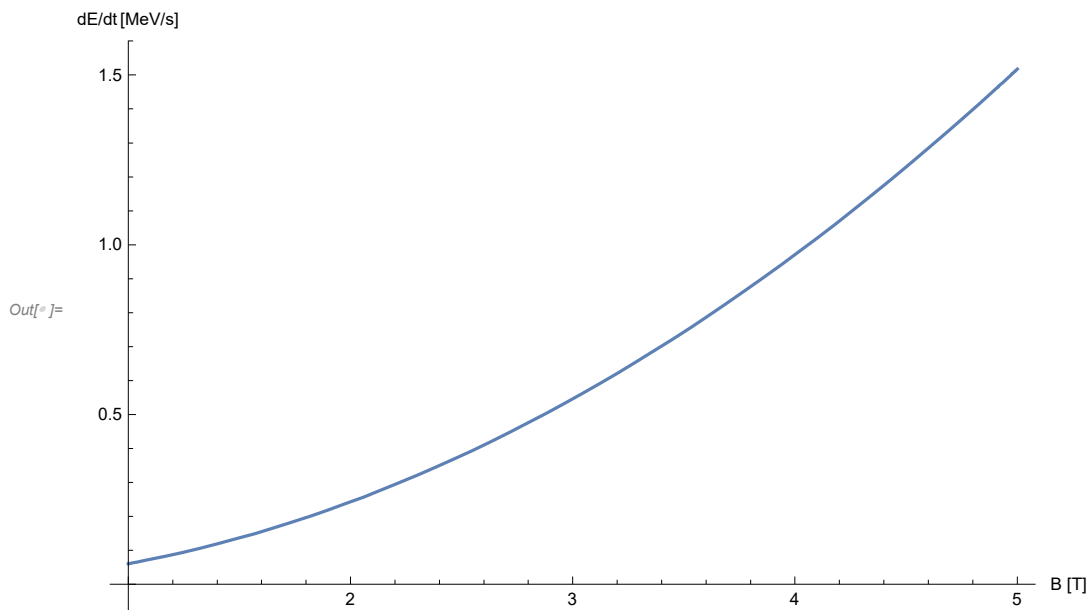


```

In[ ]:= (*B=1;*)
En = 100 * 10^3 * 1.602 * 10^(-19);
vperp = Sqrt[1 - (m0^2 * c^4) / (En + m0 * c^2)^2];
RL = (m0 * vperp * c) / (q * B);
ω = (q * B) / m0;
x = RL - RL * Cos[ω * t];
y = RL * Sin[ω * t];
vx = D[x, t];
vy = D[y, t];
v = {vx, vy};
beta = Simplify[v / c];
dEdt = (((q * c) / (6 * Pi * ε)) * (RL^2 ω^4) / (c^2 - RL^2 ω^2)^2) * 10^-6
Plot[dEdt, {B, 1, 5}, BaseStyle -> {PrintPrecision -> 3},
  AxesLabel -> {"B [T]", "dE/dt" "[MeV/s]"}]
Frad = ((q^2) / (6 * Pi * ε * c^2)) * ω^2
Plot[Norm[Frad], {B, 1, 5},
  BaseStyle -> {PrintPrecision -> 3}, AxesLabel -> {"B [T]", "Frad" "[N]"}]

```

Out[]:= 0.0606814 B²



Out[]:= $5.28654 \times 10^{-23} B^2$

