

**ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

**FAKULTA
STAVEBNÍ**



BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2021

MARŠÁL JAKUB

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Katedra betonových a zděných konstrukcí

Metody navrhování výztuže deskových konstrukcí

Vypracoval: Jakub Maršál
Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Petr Bílý, Ph.D.
Studijní obor: Konstrukce pozemních staveb

Praha 2021



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: <u>Maršál</u>	Jméno: <u>Jakub</u>	Osobní číslo: <u>477153</u>
Zadávající katedra: <u>Katedra betonových a zděných konstrukcí</u>		
Studijní program: <u>Stavební inženýrství</u>		
Studijní obor: <u>Konstrukce pozemních staveb</u>		

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce: <u>Metody navrhování výztuže deskových konstrukcí</u>	
Název bakalářské práce anglicky: <u>Reinforcement design methods for plate structures</u>	
Pokyny pro vypracování: - Přehled teorií využívaných pro návrh deskových konstrukcí - Rešerše konkrétních metod návrhu výztuže - Zhodnocení jednotlivých metod - Porovnání postupu výpočtu a výsledků návrhu na příkladech	
Seznam doporučené literatury: - Nilson, A.H. et al: Design of Concrete Structures. 14th ed. McGraw Hill, 2010. Kapitoly 13 a 14. - Baumann, T.: Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken. Der Bauingenier 47 (1972), s. 367-377 - Bílý, P.: Návrh stropní desky v programu SCIA Engineer. Studijní text pro předmět Navrhování betonových konstrukcí na počítači. Praha, 2020. - Quintas, V.: Two Main Methods for Yield Line Analysis of Slabs. J. Eng. Mech. 129 (2003), s. 223-231. - He, L. et al: Automatic Yield-Line Analysis of Practical Slab Configurations via Discontinuity Layout Optimization. J. Struct. Eng. 143 (2017), no. 04017036.	
Jméno vedoucího bakalářské práce: <u>Ing. Petr Bílý, Ph.D.</u>	
Datum zadání bakalářské práce: <u>17.2.2021</u>	Termín odevzdání bakalářské práce: <u>16.5.2021</u> <i>Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku</i>
Podpis vedoucího práce	Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použitých literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v bakalářské práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.

<u>19.2.2021</u> Datum převzetí zadání	Podpis studenta(ky)
---	---------------------

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně pod odborným dohledem doc. Ing. Petra Bílého, Ph.D. Všechny použité prameny jsou uvedeny v seznamu citované literatury na konci této práce.

Jsem si vědom a plně respektuji, že se na mou práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., ve znění zákona č.81/2005 Sb. (autorský zákon).

V Praze dne

.....

Maršál Jakub

Poděkování

Předně bych chtěl poděkovat vedoucímu bakalářské práce doc. Ing. Petrovi Bílému, Ph.D. za jeho ochotu, trpělivost, věcné poznámky a připomínky, hlavně však za čas, který byl ochotný mým potřebám vynaložit. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Davidu Krybusovi, Ph.D. ze společnosti RIB Engineering GmbH za jeho věcné připomínky, poskytnuté materiály a čas, který byl ochotný mě a mé práci věnovat. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat každému, kdo mě byl schopný po dobu mých dosavadních studií rozptýlit a přivést na jiné myšlenky.

Abstrakt

Hlavním cílem této bakalářské práce je představení existujících metod výpočtu pro návrh výztuže v deskách, jejich porovnání a vyhodnocení vhodnosti metod pro jednotlivé příklady. Konkrétně se práce zabývá metodami návrhu podle Baumanna, Capra Maury, Wood-Armera a Johansena. Prostor je v práci věnován také metodám výpočtu vnitřních sil, které jsou důležitým vstupním prvkem pro jednotlivé metody dimenzování výztuže. Cílem této části práce je zmapovat a popsat všechny možnosti výpočtu vnitřních sil na desce a přiblížit je čtenáři.

Klíčová slova

Železobeton, výztuž, deska, dimenzování výztuže, vnitřní síly

Abstract

The main objective of this bachelor thesis is to introduce existing calculation methods for the design of reinforcement in slabs, their comparison and evaluation of suitability for individual examples. Specifically, the thesis deals with design methods according to Baumann, Capra Maury, Wood-Armer and Johansen. The thesis is also devoted to methods of calculating internal forces, which are an important input element for individual methods of reinforcement design. The aim of this part of the thesis is to map and describe all the possibilities of calculating the internal forces of slabs and to introduce them to the reader.

Key words

Reinforced concrete, reinforcement, dimensioning of reinforcement, internal forces

Obsah

1	Úvod a motivace práce.....	10
2	Základní charakteristika desek.....	11
2.1	Definice desky.....	11
2.2	Výztuž v deskách.....	11
2.3	Základní členění.....	11
2.3.1	Dle pnutí.....	11
2.3.2	Dle podepření.....	13
2.3.3	Dle tloušťky.....	14
2.4	Neznámé veličiny na desce.....	15
2.5	Fyzikální rovnice na desce.....	16
2.6	Vnitřní síly na desce.....	16
3	Metody výpočtu vnitřních sil.....	18
3.1	Dělení.....	18
3.2	Elastická teorie desek.....	18
3.2.1	Desková rovnice – Řešení diferenciální rovnicí.....	19
3.2.2	Přibližná řešení energetickými metodami.....	19
3.2.3	Variační metody.....	29
3.2.4	Zjednodušené metody pro praktické navrhování.....	31
3.3	Plastická teorie desek.....	43
3.3.1	Statická metoda teorie plasticity.....	44
3.3.2	Kinematická metoda teorie plasticity.....	50
4	Metody dimenzování výztuže.....	53
4.1	Baumannova metoda.....	53
4.1.1	Souhrn.....	53
4.1.2	Názvosloví.....	53
4.1.3	Praktické dimenzování výztuže.....	55
4.1.4	Únosnost ortogonální výztuže.....	59
4.2	Metoda Capra Maury.....	68
4.2.1	Postup výpočtu.....	68
4.3	Wood-Armerova metoda.....	70
4.3.1	Postup výpočtu.....	71
4.4	Johansenova metoda.....	72

4.4.1	Princip lomových mechanismů	72
4.4.2	Zápis a předpoklady	73
4.4.3	Princip normality lomových momentů, pravé a nepravé lomové čáry.....	73
4.4.4	Křížení lomových čar	74
4.4.5	Hrany	76
4.4.6	Podmínky rovnováhy, metoda normálních momentů, metoda šikmých momentů.....	78
4.4.7	Uspořádání pravých lomových čar	79
4.4.8	Nepravé uspořádání lomových čar	79
4.4.9	Princip maxima a pracovní metoda.....	79
4.4.10	Závěry	80
5	Porovnání metod na příkladech	81
5.1	Teoretický příklad	81
5.1.1	Zadání	81
5.1.2	Vnitřní síly.....	82
5.1.3	Postup výpočtu.....	85
5.1.4	Vstupy a výsledky	88
5.1.5	Závěr a vyhodnocení	88
5.2	Reálná deska	89
5.2.1	Zadání	89
5.2.2	Zatížení	90
5.2.3	Vnitřní síly.....	91
5.2.4	Vstupy a výsledky	94
5.2.5	Vyhodnocení druhého příkladu.....	95
6	Závěr	96
7	Zdroje	97
8	Seznam obrázků	100
9	Seznam tabulek	102

1 Úvod a motivace práce

Pomocí kompozitu betonu a betonářské oceli jsme schopní vytvořit jedinečný stavební materiál určitých vlastností, které můžeme velmi rozmanitě přizpůsobovat potřebám daného prvku a následně i celé stavby jako takové. Výztuž je nutné správně aplikovat, aby došlo ke náležitému fungování jednotlivých průřezů, prvku i stavby jako celku. Jsou dána jasná pravidla, která použití oceli vymezují. Jsou limitovány průhyby prvků či například trhliny v betonové části kompozitu. Samotný výpočet je však na uživateli nebo projektantovi. Podrobný ruční výpočet složitých prvků by byl velice náročný, dojít k úplné optimalizaci by bylo prakticky nemožné a zjednodušený návrh či výpočet slouží spíše ke kontrole než k přesnému řešení. Kroucení navíc ve výpočtech často nebývá vůbec zohledněno, což pak může mít zásadní vliv na správnost návrhu. V dnešní době projektantovi v této části návrhu výrazně usnadňují práci výpočetní programy.

Statické programy spočítají obvykle pomocí metody konečných prvků za pomoci vstupních dat vnitřní síly, součástí návrhu a výstupu z programu obvykle bývá i návrh výztuže pro řešení prvku. Každý výpočetní statický program funguje na základě určité metody dimenzování výztuže. Program je schopný vypočítat v závislosti na náročnosti konstrukce a ostatních vstupních datech obrovské množství dat za relativně krátký čas. Samotné metody zejména pro dimenzování výztuže však nejsou širší veřejnosti příliš známy. Někteří možná znají některá jména autorů zmiňovaných metod, avšak neví, jak samotné metody v programech fungují.

Jak správně navrhnout výztuž pomocí počítače se začalo řešit zejména ve 2. polovině 20. století. V letech 1960-1975 se objevují první metody, které se dočkaly většího rozšíření. Od té doby se tyto metody v principu nemění. Vznik metod souvisí s rozvojem počítačů a elektrotechniky v dané době, a tudíž i možností výpočtu obrovského množství dat naráz.

Cílem této práce je tedy provést rešerši a popis metod návrhu výztuže, najít případné rozdíly a popsat je na příkladech. Snahou bude nalézt rozdíly v aplikovatelnosti jednotlivých metod, případně odhalit jejich nedostatky a nedokonalosti pro některé případy. Je však třeba řešit i vstupní data pro dimenzování výztuže, k jednotlivým vnitřním silám lze dojít mnoha způsoby. Seznámení s alespoň některými možnými způsoby, jak lze k vnitřním silám dospět, musí být tudíž nedílnou součástí práce.

Podnět k řešení tohoto tématu vzešel od společnosti RIB Engineering GmbH, konkrétně pana Ing. Davida Krybuse, Ph.D. Společnost se dlouhodobě zabývá vývojem softwarových řešení pro železobetonové konstrukce. V daném případě měla zájem zjistit, zda neexistují i novější a efektivnější metody dimenzování desek než běžně používaná metoda Baumannova. Motivací pro výběr tématu ze strany autora byl zájem o postupy navrhování železobetonových konstrukcí a příležitost spolupracovat s odborníky z praxe v této oblasti.

2 Základní charakteristika desek

2.1 Definice desky

Následující texty byly čerpány ze zdrojů [1], [2].

Deska je plošný prvek, kde převažují dva rozměry nad třetím, kterým je v tomto případě tloušťka prvku. V konstrukci budovy se obvykle nachází dva typy podobných plošných konstrukcí – desky a stěny. Liší se zejména prostorovým uspořádáním v konstrukci a s tím spojeným hlavním namáháním konstrukce. Dominantní rozměry u desky jsou v horizontálním směru a hlavní namáhání u desky je ohybové namáhání a v některých případech smykové namáhání. U stěny převažují rozměry ve vertikálním směru, naopak horizontální rozměr je mnohem menší. Stěny jsou namáhány zejména normálovou silou. Souhrn bodů půlících tloušťku konstrukce vytváří tzv. střednicovou rovinu. Střednicová rovina spolu s tloušťkou konstrukce jednoznačně definuje geometrický tvar desky. Deska se zakřivenou střednicovou plochou se nazývá skořepina.

Vodorovné konstrukce jsou tvořeny zejména stropními a střešními deskami. Člení budovu po výšce na jednotlivá patra a vytváří rovné a využitelné povrchy. Vodorovné konstrukce jsou důležitým prvkem pro využívání budovy, hrají také velkou roli ve ztužení objektu. V ideálním případě tvoří tuhou stropní tabuli, která roznáší zatížení od větru do jednotlivých stěn. Zatížení větrem se roznáší v závislosti na tuhosti jednotlivých svislých prvků.

2.2 Výztuž v deskách

Následující text byl čerpán ze zdroje [3].

Výztužná ocel je většinou rovnoběžná s povrchy desky, většinou je rovná, ale dříve byla ohýbána, aby čelila záporným momentům nad podporami. Velké stejnoměrně vyztužené plochy (pravidelné stropní desky, letištní ranveje, v některých zemích cementobetonové vozovky) lze vyztužovat svařovanými sítěmi pro urychlení práce při armování. Výztuž také může být předpjatá, čímž do desky vnese tlakovou rezervu. Je nutno uvažovat i se smršťováním a dotvarováním betonu, na něj se navrhuje speciální minimální výztuž dle konstrukčních zásad. S přihlédnutím k efektivní výšce průřezu d můžeme říct, že pro pruty uložené dále od povrchu desky je d menší. Pro desky pnuté křížem vychází obvykle větší momenty v kratším směru pnutí, je tudíž výhodnější výztuž na kratší směr pnutí dávat níže při spodním povrchu, aby pro ni vycházela větší efektivní výška průřezu d . U obousměrně pnuté desky je nutno navrhnout i výztuž proti kroucení.

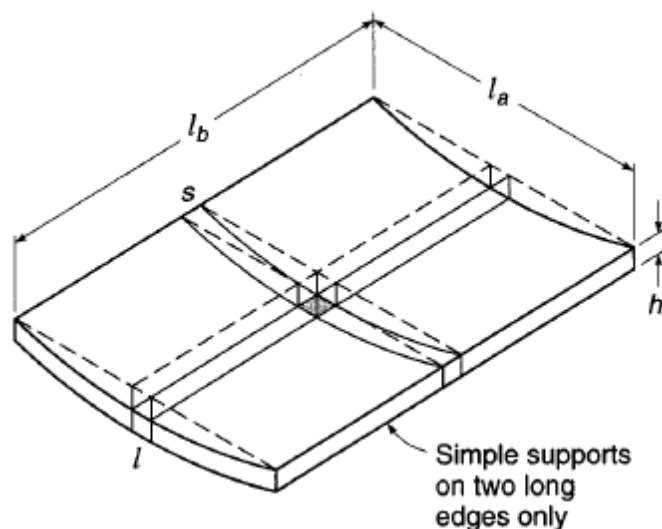
2.3 Základní členění

2.3.1 Dle pnutí

Následující text byl čerpán ze zdrojů [1], [2].

Železobetonové desky se dají dělit dle pnutí na jednosměrně pnuté a obousměrně pnuté neboli pnuté křížem. Pnutí se odvíjí od rozměrů jednotlivých stran desky, rozmístění podepření a jeho tuhosti.

Pokud je jeden z horizontálních rozměrů alespoň 2x větší než rozměr druhý, jedná se o desku pnutou jednosměrně. Pnutí je ve směru kratšího rozměru desky. Pnutí v jednom směru nastává i v případě, že je deska podepřena pouze na dvou protilehlých stranách. Při zatížení se deska prohýbá pouze s křivostí ve směru pnutí, v druhém směru je deformace lineární (viz obrázek 1. Povrch zhruba odpovídá zakřivené části povrchu válce. U jednosměrně pnuté desky je předpokládáno, že veškeré zatížení je přenášeno pouze v tomto jednom směru. V případě jednosměrně pnutých desek bývá rozhodující kritérium ohybový moment. U jednosměrně pnutých desek se dají rozeznávat dva základní typy – deska nosníková a deska konzolová.



Obrázek 1 Průhyb na jednosměrně pnuté desce [3]

Obousměrně pnutá deska je charakteristická podepřením, které vyvolává obecné přetvoření desky. Při zatížení se deska prohýbá s dvojitou křivostí. Obecný předpoklad pro obousměrně pnutou desku je, že žádná ze dvou stran není dvakrát větší než druhá. Další podmínkou je podepření alespoň ze tří stran. Varianta obousměrně pnuté desky je staticky výhodnější. Pro tuto variantu jsou charakteristická dvě možná podepření – podepření po obvodu a podepření lokálně. Zjednodušeně jdou pro obousměrně pnutou kloubově uloženou desku ohybové momenty v jednotlivých směrech vypočítat pomocí rovnice (1.01), vyjadřující rovnost průhybů v jednotlivých směrech:

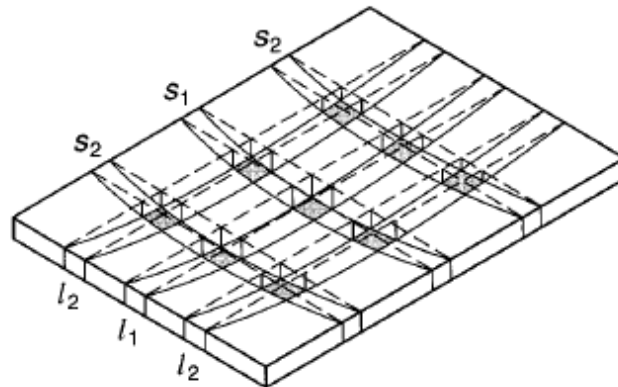
$$\frac{5q_a l_a^4}{384EI} = \frac{5q_b l_b^4}{384EI} \quad (1.01)$$

Z toho lze vyčíst, že pro stejné podepření v obou směrech platí:

$$\frac{q_a}{q_b} = \frac{l_a^4}{l_b^4} \quad (1.02)$$

Dá se tedy usoudit, že větší část zatížení jde za kratším rozponem. Tato rovnice však platí pouze pro desky, u kterých není zabráněno zvedání rohů. V obecném případě toto zjednodušení není úplně přesné, protože z následujícího obrázku (Obrázek 2) je vidět, že okrajové proužky (s_2 a

l2) jsou ovlivněny nejen ohybovým momentem, ale jsou zároveň pootočený. Z čehož plyne, že zatížení na desce není přenášeno pouze ohybovým momentem ale také krouticími momenty.



Obrázek 2 Průhyby na obousměrně pnuté desce [3]

Největší ohybové momenty vycházejí pro proužky na středu rozpětí. Pokud by dle výpočtu navržená výztuž nevyhověla a daný pruh byl izolovaný trám, došlo by ke kolapsu. U desky je tomu však jinak. Důvodem je spolupůsobení okolních částí desky, kde nevychází tak velké momenty. Deska působí jako celek. Okolní části pomohou nejzatíženější střední části a předchází havárii tím, že přebírají nadměrná zatížení, která střední pruh již neunes. Dochází takto k neelastické redistribuci momentů do doby, dokud není větší část středu desky za hranicí únosnosti a dojde ke kolapsu. Tato neelastická redistribuce může redukovat ohybový moment ve středu desky až o 25 %.

2.3.2 Dle podepření

Desky mohou být podepřeny železobetonovými trámy, zděnými či železobetonovými stěnami, ocelovými profily, přímo sloupy, či spojitě zemí. [3]

2.3.2.1 Po obvodě podepřená

Po obvodě podepřená desky jsou takové, které jsou podepřené alespoň podél dvou na sebe kolmých stran. Toto podepření může být prosté (poddajné) či vetknuté (zcela nepoddajné). Poddajná podepření jsou realizována méně tuhými trámy či zesilujícími nosníky, v praxi však nejsou příliš obvyklá. Nepoddajné podepření tvoří nosné stěny či dostatečně tuhé trámy. Dají se řešit metodou konečných prvků a za splnění podmínek (obdélníková deska, bez větších otvorů, rovnoměrná intenzita plošného zatížení) i deskovou rovnicí v základním tvaru. Poddajně podepřená desky se dají řešit metodou náhradních nosníků. [4]

2.3.2.2 Lokálně podepřená

Následující text je čerpán ze zdrojů [1], [3].

Železobetonové desky mohou být podepřeny přímo sloupy bez použití trámů či průvlaků. Takové desky se využívají v případech, kdy rozpětí desek nedosahuje velkých rozměrů a na desku nepůsobí velká zatížení. Jejich hlavní výhodou je jednoduchost provedení a variabilita vnitřní dispozice. Sloupy mohou mít rozšířenou hlavu pro redukci smykového napětí a zamezení protlačení. Může být zesílena i tzv. zesilující deskou v oblasti podpor. Na

podobném principu funguje i kazetový strop, u kterého dochází ke snížení zatížení vlastní tíhou díky dutinám při spodním povrchu, vytvořeným pomocí kovových či laminátových forem. Dochází ke vzniku žebér v obou směrech desky. V okolí sloupů je vylehčení vynecháno, aby deska byla schopná přenést veškeré ohybové momenty a smykové síly.

2.3.3 Dle tloušťky

Nosné desky se dají dělit dle poměru délky a tloušťky.

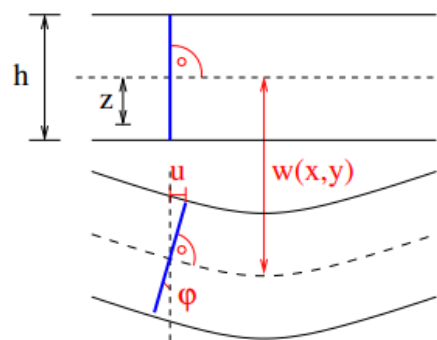
Dělí se takto na:

- Membrány $h/l < 1/80$
- Velmi tenké desky $h/l = 1/50-1/80$
- Tenké desky $h/l = 1/10-1/50$
- Hrubé desky $h/l = 1/5-1/10$
- Prostorová tělesa $h/l < 1/5$

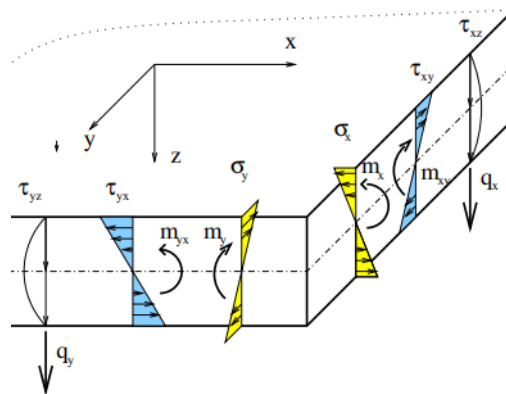
[5]

V závislosti na tloušťce desky existují dvě metody řešení. Kirchhoffova teorie tenkých desek (špendlíková hypotéza) a Mindlinova teorie tlustých desek, která zahrnuje vliv smyku na zkosení desky.

Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek vychází z podobných předpokladů jako Bernoulliho – Navierova teorie ohybu nosníků. Předpokládá, že jednotlivé vrstvy desky na sebe netlačí – není vyvoláno napětí σ_z . Normálové napětí v tomto směru je v porovnání s napětími σ_x a σ_y zanedbatelné a poměrná deformace ϵ_z je nulová – deska je příčně nestlačitelná. Dále předpokládá, že normálová napětí ve střednicové rovině jsou nulová za předpokladu čistého ohybu a body ve střednicové rovině se mohou přemísťovat pouze ve směru osy z . Normály střednicové roviny zůstávají i po deformaci přímé a kolmé k této rovině, normála zůstává i po deformaci normálou střednicové roviny. [6]



Obrázek 3 Předpoklad o normálách [6]



Obrázek 4 Napětí a vnitřní síly na desce [6]

Se vzrůstající tloušťkou desky narůstá nesouhlas mezi teorií tenkých desek a skutečností. Tato skutečnost nastává v případech, kdy tloušťka desky přesahuje desetinu půdorysného rozměru desky. Kirchhoffův předpoklad o zachování kolmosti normál je narušen smykovými deformacemi. Hodnoty smykové deformace již nelze zanedbat. Byl zaveden Mindlinův předpoklad, který říká, že body vytvářející normálu střednicové roviny leží po deformaci na přímce, která však již obecně není normálou střednicové plochy. [7]

2.4 Neznámé veličiny na desce

Následující text je čerpán ze zdroje [6].

Neznámé veličiny budeme brát z předpokladů Kirchhoffovy metody, tudíž uvažujeme tenkou desku. Dle Kirchhoffovy teorie se body ve střednicové rovině mohou pohybovat jen ve svislém směru w – tedy směru kolmém k nezdeformované střednicové ploše. Také se zde musí počítat s pootočeními φ zdeformované střednicové plochy.

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varphi_y &= \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{1.03}$$

Ve střednicové ploše desky je nenulové pouze posunutí w ve směru osy z (svislé). Mimo střednicovou plochu jsou nenulová i zbývající dvě vodorovná posunutí u a v . Za předpokladu malých pootočení, přibližně platí $\text{tg}(\varphi) = \varphi$, takže se dá obecně konstatovat:

$$\begin{aligned}u &= -z\varphi_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -z\varphi_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{1.04}$$

K získání výrazu pro poměrné deformace můžeme využít geometricko-deformační vztahy teorie pružnosti a dosadit do nich za u a v výrazy pro vodorovné posuny:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (1.05)$$

Pro úlohy rovinné napjatosti v rovině xy se využívají podmínky kompatibility, ze kterých plyne, že jednotlivé poměrné deformace nejsou vzájemně zcela nezávislé. Charakterizují je tzv. rovnice kompatibility. Jedná se o 6 rovnic, které se redukují na tvar:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.\quad (1.06)$$

2.5 Fyzikální rovnice na desce

Následující text je čerpán ze zdroje [6].

Za předpokladu, že se deska skládá z izotropního a homogenního materiálu s lineárně pružným chováním, pro který platí Hookeův zákon, můžeme vyjít ze vztahů pro pružné těleso. Do nich následně dosadíme výrazy pro poměrné deformace:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{Ez}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= G\gamma = -\frac{E}{2(1+\nu)} 2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (1.07)$$

Kde E je modul pružnosti v tahu (tzv. Youngův modul), G je modul pružnosti ve smyku a ν je Poissonovo číslo.

Problémem je určení vztahů pro smyková napětí $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ a $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Dochází totiž k rozporu s Kirchhoffovou teorií. Normálová napětí σ_x a σ_y odpovídají ohybovým účinkům, zatímco napětí τ_{yz} a τ_{xz} účinkům smykovým. Veličina $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ odpovídá krouticím účinkům.

2.6 Vnitřní síly na desce

Následující text je čerpán ze zdroje [6].

Pro praktické využití není vyjádření výsledků ve formě jednotlivých složek vektoru napětí úplně vhodné. Bylo by výhodnější mít k dispozici integrální veličiny. Je nutné definovat vnitřní síly na jednotku šířky řezu desky. Jedná se tedy o měrné vnitřní síly. Tato šířka se musí projevit i v jednotkách, kdy se kN (v případě momentu kNm) dělí ještě metrem. Vztahy pro výpočet měrných momentů se dají zapsat jako:

$$\begin{aligned}
m_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \, dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
m_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \, dz = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
m_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{1.08}$$

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)},$$

kde D [Nm] je desková tuhost, t je tloušťka desky.

Stejným způsobem se dají zapsat i měrné posouvající síly:

$$\begin{aligned}
q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \, dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\
q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \, dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right).
\end{aligned} \tag{1.09}$$

Dané rovnice platí pro lineárně pružný a izotropní materiál. Pokud by šlo o materiál ortotropní, bylo by nutno odvodit znovu rovnice pro smyková napětí a měrné vnitřní síly. Nemá smysl definovat ani deskovou tuhost, protože parametry tuhosti různé pro různé směry.

3 Metody výpočtu vnitřních sil

Pro efektivní a funkční návrh desky musíme znát její vnitřní síly a napětí. K vyřešení tohoto problému je známo mnoho přístupů a variant výpočtů od jednoduchých rovnic, přes soustavy, matice až po složitá řešení počítačovými programy, které dnes postupně převládají nad ostatními. V následující části textu se pokusím některé z možných postupů blíže vysvětlit a alespoň nastínit základní principy výpočtu.

3.1 Dělení

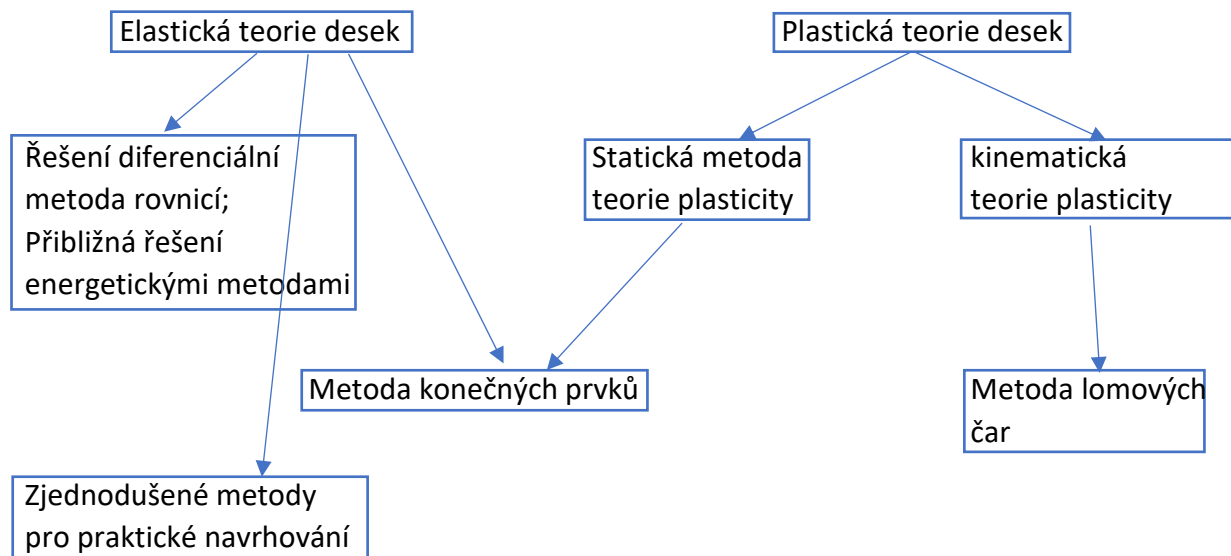


Schéma převzato s úpravou z [28].

3.2 Elastická teorie desek

Elastické teorie desek jsou takové, které předpokládají, že se desky deformují pod zatížením tak, že pod odtížením se navrací do původního stavu. Jedná se o vratné – elastické deformace. Pro elastické deformace se dá využít Hookův zákon, pouze však za předpokladu, že závislost mezi napětím a deformací je lineární. Elastické deformace jsou v železobetonu takové, když výztuž nepřekročí mez kluzu a zároveň nedojde k drcení betonu v tlaku. V průběhu deformace koná externí síla působící na těleso práci, která se celá, či jen její část, přemění na potenciální energii přetvoření. Tento fakt je důležitým předpokladem pro mnohé z dále představených metod.

Řešení elastických teorií desek je řešením Lagrangeovy biharmonické rovnice za specifických okrajových podmínek, kde nalezneme asymetrická zatížení, geometrii nebo podepření. Další možná řešení jsou přibližná, jako například variační metody (Ritzova, metoda konečných prvků, Galerkinova) či řešení okrajové úlohy speciálními metodami (metoda konečných diferencí, relaxační metoda atd.). [8]

Mezi hlavní elastické metody řešení desky patří řešení diferenciální rovnicí a princip virtuálních prací. Za určitých podmínek sem spadá také metoda konečných prvků.

3.2.1 Desková rovnice – Řešení diferenciálních rovnic

Následující text je čerpán ze zdroje [9].

Je nutno zachovat předpoklad pro tenké desky ($(\frac{1}{100} \div \frac{1}{80}) \leq \frac{h}{l} \leq (\frac{1}{8} \div \frac{1}{5})$), kde h je tloušťka desky a l je kratší ze zbývajících rozměrů, aby byla zachována podmínka pro Kirchhoffovu teorii tenkých desek. Průřez zůstane po deformaci kolmý na střednicovou rovinu a vliv smykových sil se může zanedbat. Přesné řešení podle matematické teorie pružnosti je velmi složité, je tudíž nutné pro praktické výpočty zavést určitá zjednodušení, která plynou z Kirchhoffovy teorie pro tenké desky:

- Průřez desky zůstává po deformaci kolmý na střednicovou rovinu desky.
- Podélné vrstvy desky na sebe nepůsobí ($\sigma_z = 0$), poměrné přetvoření ve směru osy z je nulové.
- Všechna napětí ve střednicové rovině desky jsou po její deformaci nulová ($\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$).
- Průhyby desky $w(x,y)$ jsou ve srovnání s její tloušťkou malé (max 1/5 této tloušťky)
- Půdorys desky se průhybem nemění – všechny body střednicové roviny desky se posouvají svisle dolů.

Matematický popis chování deskové konstrukce s pnutím křížem je dán diferenciální rovnicí, tzv. deskovou rovnicí:

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = \frac{f(x,y)}{D}, \quad (2.01)$$

kde w je průhyb desky a f je vnější zatížení desky.

Jde tedy o diferenciální rovnici 4. řádu, vycházející z rovnosti průhybů v libovolném bodě. Rovnice je stejná pro libovolný typ desky. Jednotlivé desky se liší v okrajových podmínkách. Obecně platí, že jednodušší okrajové podmínky má deska po obvodě podepřená než deska podepřená lokálně.

I přes uvedená zjednodušení může být řešení diferenciální rovnice náročné. Často se tedy převádí na rovnice integrální, které je možné řešit numericky, například metodou konečných prvků.

3.2.2 Přibližná řešení energetickými metodami

Do této kategorie spadají následující metody:

- Deformační (přetvárná) práce vnitřních/vnějších sil
- Využívající princip virtuální práce
- Využívající potenciální energii

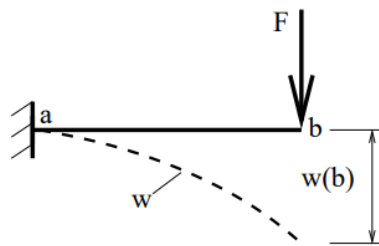
3.2.2.1 Přetvárná práce vnějších sil

Následující text čerpá ze zdrojů [10], [11].

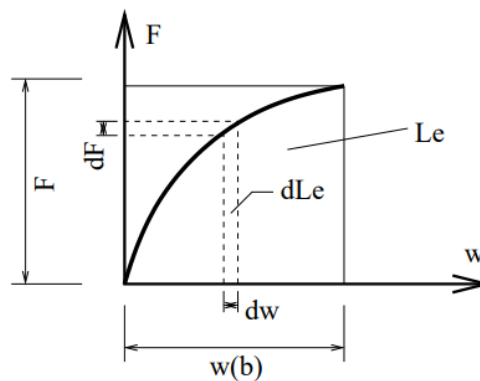
Vnější síly konají na poddajném tělese práci. Mechanická práce L_e se dá vypočítat jako součin síly a dráhy, na které síla působí. V případě poddajných těles vzniká v závislosti na velikosti síly F určitá deformace – u desek většinou průhyb w .

Obecně pro přetvárnou práci vnějších sil platí:

$$\begin{aligned} dL_e &= F(w)dw, \\ L_e &= \int_0^w F(w) dw. \end{aligned} \quad (2.02)$$



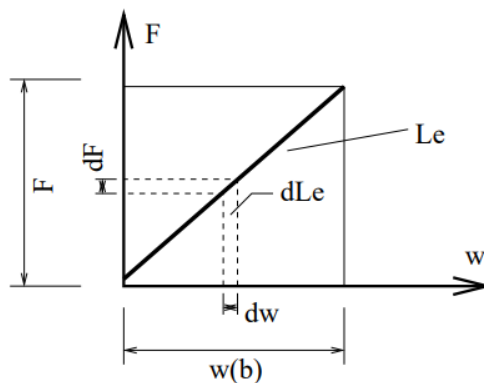
Obrázek 5 Grafické znázornění přetvárné práce vnějších sil [11]



Obrázek 6 Graf závislosti velikosti síly na průhybu pro nelineárně pružný materiál [11]

Pro lineárně pružný materiál konstrukce se dá aplikovat zjednodušení tzv. Clapeyronova věta:

$$L_e = \frac{1}{2} F w. \quad (2.03)$$



Obrázek 7 Graf závislosti velikosti síly na průhybu pro lineárně pružný materiál [11]

Tato metoda se dá představit na příkladu postupného zatěžování desky. Postupně zatěžujeme konstantními přírůstky síly. Za předpokladu čtyř stejných zatěžovacích kroků lze vyjádřit první zatěžovací krok jako:

$$L_{e1} = F_1 * w_1 = \frac{1}{4} F * \frac{1}{4} w = \frac{1}{16} Fw,$$

kde F a w jsou konečné hodnoty působící síly a posunu.

Pro druhý krok analogicky:

$$L_{e2} = F_1 * w_1 + (F_1 + F_2) * w_2 = \frac{1}{4} F * \frac{1}{4} w + \frac{2}{4} F * \frac{1}{4} w = \frac{3}{16} Fw.$$

Pro třetí zatěžovací stav obdobně:

$$L_{e3} = F_1 * w_1 + (F_1 + F_2) * w_2 + (F_1 + F_2 + F_3) * w_3 = \frac{1}{4} F * \frac{1}{4} w + \frac{2}{4} F * \frac{1}{4} w + \frac{3}{4} F * \frac{1}{4} w = \frac{3}{8} Fw.$$

Pro čtvrtý a poslední stav:

$$L_{e4} = F_1 * w_1 + (F_1 + F_2) * w_2 + (F_1 + F_2 + F_3) * w_3 + (F_1 + F_2 + F_3 + F_4) * w_4 = \frac{1}{4} F * \frac{1}{4} w + \frac{2}{4} F * \frac{1}{4} w + \frac{3}{4} F * \frac{1}{4} w + \frac{4}{4} F * \frac{1}{4} w = 0,625 Fw.$$

Obecně se může zapsat pro zatěžovací proces rozdělený na n částí:

$$L_{e,n} = \sum_{i=1}^n i F u = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} F u,$$

pro proces rozdělený na 100 částí (n=100) vychází:

$$L_{e,100} = 0,505 Fw,$$

pro n=1000 pak:

$$L_{e,1000} = 0,5005 Fw$$

A konečně pro n=∞ vychází již zmiňovaná Clapeyronova věta (2.03):

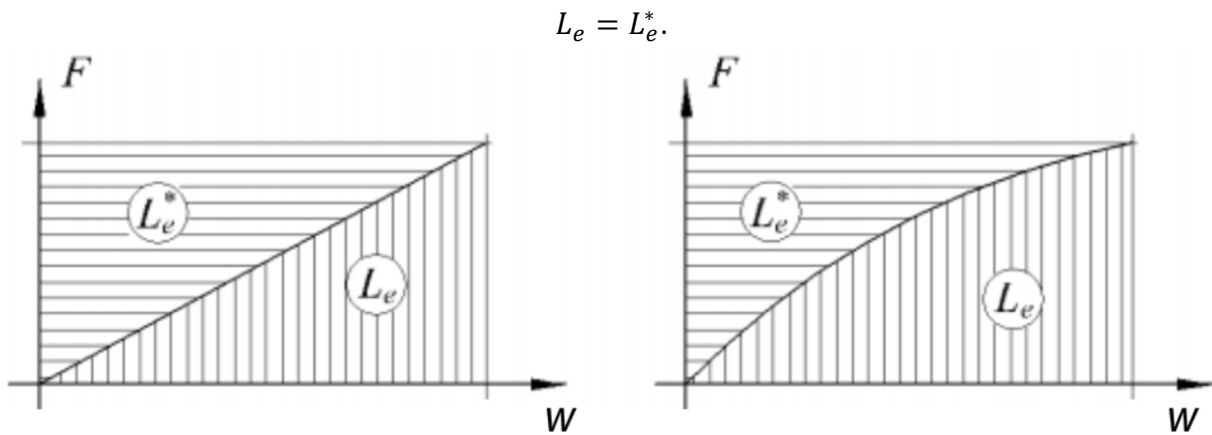
$$L_e = \frac{1}{2} F w.$$

Práce vnějších sil vykonaná v průběhu zatěžování však není jediná, která se zde nachází. Při zpětném vyjádření práce, která se musí vykonat při zatěžovacím procesu při posunu, vykonáme při posunu prvního závaží nulovou práci, protože celé zatížení bylo přisouzeno desce. Je tedy nutno výraz doplnit tzv. komplementární přetvárnou prací vnějších sil L_e^* . To je práce nutná k tomu, aby působení síly F na dráze w mělo statický charakter – vykonává práci brzdící síly působící proti F na dráze w. Jedná se o práci nutnou k navrácení konstrukce do nedeformované polohy.

Výsledný výraz je tedy:

$$L_e + L_e^* = Fw. \quad (2.04)$$

Pro lineárně pružný materiál platí:

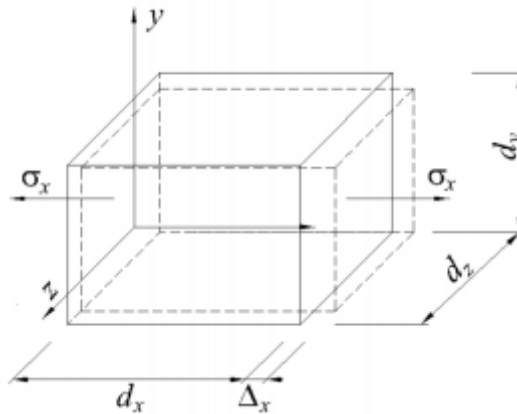


Obrázek 8 Přetvárná práce vnějších sil pro lineárně pružný a nepružný materiál [10]

3.2.2.2 Deformační (přetvárná) práce napětí

Následující text čerpá ze zdroje [10].

Budeme vycházet z infinitezimálního elementu tělesa podle obrázku (obr. 9).



Obrázek 9 Deformační práce napětí [10]

Pro zjednodušení byl zaveden předpoklad, že element je zatížen pouze normálovým napětím σ_x . V předchozí části bylo odvozeno, že přetvárná práce se v případě pružného materiálu vypočte jako polovina součinu konečné působící síly a posunu (2.03). V případě vnitřních sil je přetvárná práce záporná, protože reprezentuje práci „uskladněnou“ v tělese.

Diferenciální část práce bude:

$$dL_i = -\frac{1}{2}dN_x * \Delta_x, \quad (2.05)$$

kde sílu N_x můžeme vyjádřit jako součin napětí a diferenciální plochy:

$$dN_x = \sigma_x * dy * dz. \quad (2.06)$$

Změnu délky elementu vyjádříme z Hookeova zákona jako:

$$\Delta_x = \varepsilon_x dx. \quad (2.07)$$

Následným dosazením do vzorce pro práci vnitřních sil dostaneme:

$$dL_i = -\frac{1}{2} \sigma_x * dy * dz * \varepsilon_x dx, \quad (2.08)$$

což se dá vyjádřit jako

$$dL_i = -\frac{1}{2} \sigma_x * \varepsilon_x dV, \quad (2.09)$$

kde dV je diferenciální objem. Po následné integraci přes objem získáme celkovou práci:

$$L_i = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV. \quad (2.10)$$

Pro ostatní napětí by se dostaly analogické vztahy. Po seřazení jednotlivých složek napětí do vektorů, dostaneme obecný vztah pro přetvárnou práci napětí:

$$L_i = -\frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV, \quad (2.11)$$

kde ε je vektor poměrných přetvoření:

$$\varepsilon = \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}^T \quad (2.12)$$

a kde σ je vektor napětí:

$$\sigma = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}^T. \quad (2.13)$$

Deformační práci můžeme pro případy prutů, stěn, desek a deskostěn vyjádřit i pomocí vnitřních sil.

3.2.2.3 Deformační práce soustavy

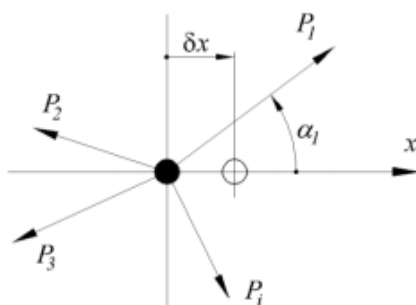
Soustava se skládá z tělesa a jeho vnějších sil. Tyto části tvoří systém, pro který platí zákon o zachování mechanické energie. Celková energie v izolovaném mechanickém systému při mechanickém ději zůstává konstantní. Soustavu, tvořící těleso a zatížení, můžeme považovat za izolovaný mechanický systém. To však platí pouze za předpokladu, že nedojde k přeměně mechanické energie na plastické tváření materiálu. Tudíž se jedná o ideální lineárně pružné chování materiálu. Na základě toho můžeme konstatovat, že součet práce vnějších a práce vnitřních sil musí být nulový. [10]

$$L_i + L_e = 0 \quad (2.14)$$

3.2.2.4 Virtuální práce

Následující text byl čerpán ze zdroje [10].

Máme-li částici, na kterou působí soustava rovnovážných sil P_i , jejichž úhlová odchylka od osy x je Θ , částice se posune ve směru osy x o δu .



Obrázek 10 Virtuální posun částice [10]

Vykonaná práce soustavou sil bude:

$$\delta L_e = P_1 \cos \theta_1 * \delta u + P_2 \cos \theta_2 * \delta u + \dots + P_n \cos \theta_n * \delta u = \sum P_{ix} \delta u = \delta u \sum P_{ix} \quad (2.15)$$

což je podmínka rovnováhy vynásobená posunem δu . Výhodou takového vyjádření podmínky rovnováhy může být, že reakce v pevných podporách konají nulovou práci, protože u nich nedojde k posunu. Rovnice představuje virtuální práci, kde jsou síly skutečné a posun virtuální – myšlený, avšak možný. Tento virtuální posun se tedy vysvětluje jako infinitezimální, který není v rozporu s vazbami soustavy a nezávisí na silách soustavy.

Tělesem s virtuálním přemístěním δu se obecně rozumí libovolný infinitezimální deformační stav, který plní podmínky spojitosti uvnitř tělesa a deformační (kinematické) okrajové podmínky na jeho hranici S_p . Proměnná δu je v obecném případě vektor funkcí.

Obdobně jako u deformační práce můžeme rozlišit virtuální práci vnějších sil a virtuální práci vnitřních sil.

Pro virtuální práci vnějších sil tělesa platí:

$$\delta L_e = \int_V \delta u^T X dV + \int_{S_p} \delta u^T \bar{p} dS. \quad (2.16)$$

kde vektor X reprezentuje objemové změny (vznikající například změnou teploty, reologií, vl. tíhou) a vektor \bar{p} je vektor zatížení na hranici tělesa S_p .

Pro virtuální práci vnitřních sil tělesa platí:

$$\delta L_i = - \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV, \quad (2.17)$$

kde vektor $\delta \varepsilon$ představuje pole poměrných přetvoření v tělese a vektor σ reprezentuje pole napětí. Vektory v rovnici obsahují funkce proměnných x, y, z .

Pro obecnou úlohu platí, že součet virtuálních prací vnějších a vnitřních je roven nule. Byl tudíž odvozen zápis Lagrangeova principu virtuálních přemístění, též zvaný obecný princip rovnováhy:

$$\delta L_e + \delta L_i = \int_V \delta u^T X dV + \int_{S_p} \delta u^T \bar{p} dS - \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = 0 \quad (2.18)$$

Říká, že při libovolném virtuálním přetvoření pružného tělesa nacházejícího se v rovnovážném stavu (jako celek i každá jeho část), je součet virtuálních prací všech vnějších a vnitřních sil (skutečných) na virtuálních posunech a deformacích roven nule. Tento princip vede na deformační varianty výpočetních metod.

Virtuální práci lze také definovat jako součin virtuální síly a skutečného posunu. Příslušnou práci vnějších sil potom nazveme komplementární a označíme δL_e^* a pro práci vnitřních sil δL_i^* .

Virtuální síly představují možný – myslitelný silový stav tělesa, který je definovaný vnějšími virtuálními silami δp na povrchu tělesa, to znamená na hranici tělesa S_p , nebo objemovými δX uvnitř tělesa (změna teploty, objemové změny betonu) a vnitřními silami danými polem napětí $\delta \sigma$. Tyto myšlené síly nemusí odpovídat žádnému reálnému stavu tělesa, musí však splňovat podmínky rovnováhy v každém bodě tělesa a tedy i tělesa jako celku.

Doplňková práce vnějších sil bude:

$$\delta L_e^* = \int_V u^T \delta X dV + \int_{S_p} u^T \delta \bar{p} dS \quad (2.19)$$

a doplňková virtuální práce vnitřních sil je:

$$\delta L_i^* = - \int_V \varepsilon^T \delta \sigma dV. \quad (2.20)$$

Víme, že součet virtuálních prací musí být nulový, tudíž:

$$\delta L_e^* + \delta L_i^* = \int_V u^T \delta X dV + \int_{S_p} u^T \delta \bar{p} dS - \int_V \varepsilon^T \delta \sigma dV = 0. \quad (2.21)$$

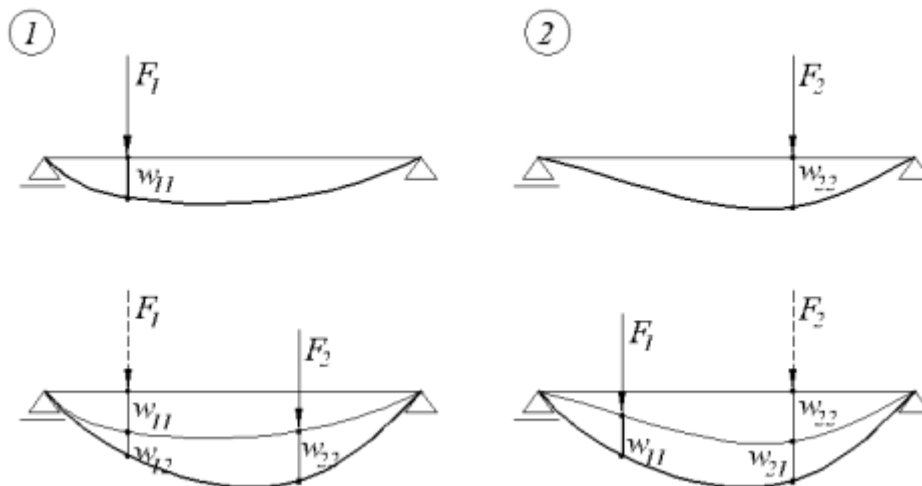
Dostaneme matematický zápis Castiglianova principu virtuálních sil. Ten říká, že ze všech myslitelných, staticky přípustných stavů napjatosti tělesa nastane právě ten, při němž je komplementární (doplňková) energie systému minimální. Tento princip vede na silové varianty výpočetních metod. Castiglianův princip se též nazývá obecným principem spojitosti tělesa.

Princip virtuálních podmínek předpokládá splnění podmínek kompatibility a vede na podmínky rovnováhy. Princip doplňkové virtuální práce (virtuálních sil) předpokládá platnost podmínek rovnováhy a vede na podmínky kompatibility.

3.2.2.5 Princip superpozice mechanické práce

Tento text byl čerpán ze zdroje [10].

Princip superpozice mechanické práce je analogií se superpozicí silových účinků v oblasti lineární mechaniky. Dá se vysvětlit postupným zatěžováním prvků. Pokud prvek zatížíme bodovou silou F_1 , dosáhneme průhybu w_{11} . Po přidání druhé síly F_2 se průhyb zvětší na $w_1 + w_2$. Stejného výsledku by se dosáhlo i při opačném postupu zatěžování. Pokud princip superpozice existuje pro zatížení a přemístění, pak musí existovat také pro mechanickou práci.



Obrázek 11 Superpozice mechanické práce [10]

Po vyjádření mechanické energie dle zatěžovacího postupu č. 1 na obr. 11:

$$L_{e,1} = \frac{1}{2} F_1 w_{11} + \frac{1}{2} F_2 w_{22} + F_1 w_{12}. \quad (2.22)$$

První dva sčítance představují tzv. vlastní práci sil – síla pracuje na průhybu, který sama vyvolala. Proto jsou první dva sčítance přenásobené jednou polovinou. Třetí ze sčítanců představuje virtuální práci – jedná se o práci síly na posunu, který sama nezpůsobila.

Pro mechanickou práci dle zatěžovacího postupu č. 2 platí:

$$L_{e,2} = \frac{1}{2}F_2w_{22} + \frac{1}{2}F_1w_{11} + F_2w_{21}. \quad (2.23)$$

Celkové práce vnějších sil se musí rovnat, proto také platí:

$$\begin{aligned} L_{e,1} &= L_{e,2} \\ F_1w_{12} &= F_2w_{21}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

což je zápis Bettiho věty (1872).

Bettiho věta říká: Virtuální práce jedné soustavy vnějších sil na posunutích vyvolaných druhou soustavou sil je rovna virtuální práci druhé soustavy vyvolaných sil první soustavou sil.

Pro upřesnění význam indexů u posunů w – první index označuje sílu, v jejímž místě a směru je měřeno přemístění, druhý index označuje sílu, jež přemístění vyvolala.

Pokud uvažujeme rovnost sil $F_1 = F_2$, pak také platí rovnost průhybu $w_{12} = w_{21}$. Což je matematické vyjádření Maxwellovy věty. Přemístění vyvolané jednou silou v místě a směru síly druhé, je za předpokladu stejně velkých sil stejné, jako přemístění vyvolané druhou silou v místě první.

Bettiho i Maxwellova věta platí i pro momentové zatížení, kdy přemístěním jsou rotace. Dají se aplikovat i na kombinaci momentového a silového zatížení.

3.2.2.6 Potenciální energie

Následující text je čerpán ze zdrojů [10], [11].

Energie je měřitelná pouze množstvím dodané práce na změnu energetického stavu tělesa. Potenciální energie se dá popsat jako rozdíl mezi potenciální energií na konci zatěžovacího a deformačního procesu a toutéž energií na jeho počátku. Pokud je zatížení již v kontaktu s konstrukcí, ale zatím nevyvolalo žádnou deformaci, dá se takovou konfiguraci nazvat nulovým stavem.

Celková hodnota potenciální energie je dána součtem potenciální energie vnějších sil (zatížení) Π_e a potenciální energie vnitřních sil Π_i .

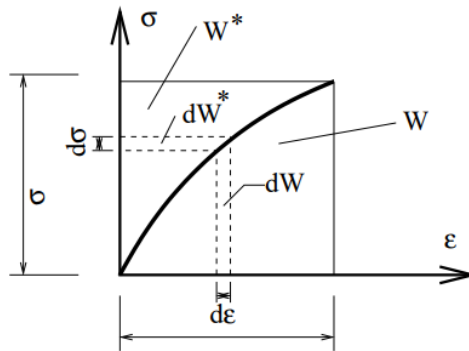
3.2.2.7 Potenciální energie vnitřních sil

Potenciální energie vnitřních sil (deformační energie) je energie akumulovaná v systému během zatěžování. Dokonale pružné těleso plně akumuluje energii, odpovídající vykonané přetvárné práci. Platí:

$$\Pi_i = -L_i = L_e. \quad (2.25)$$

Do této deformační energie přispívají normálová a smyková napětí:

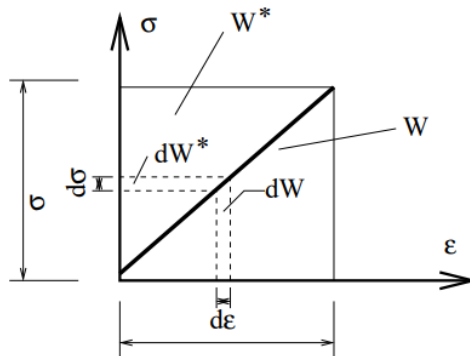
$$\begin{aligned} W_\sigma &= \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, & W_\tau &= \int_0^\gamma \tau(\gamma) d\gamma, \\ W_\sigma^* &= \int_0^\sigma \sigma(\varepsilon) d\sigma. & W_\tau^* &= \int_0^\tau \tau(\gamma) d\tau. \end{aligned} \quad (2.26)$$



Obrázek 12 Deformační energie z příspěvku normálového napětí [11]

Pro lineárně pružný materiál jsou příspěvky a graf následující:

$$W_\sigma = W_\sigma^* = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad W_\tau = W_\tau^* = \frac{1}{2} \tau \gamma$$



Obrázek 13 Deformační energie pro lineárně pružný materiál [11]

Potenciální energie vnitřních sil pro lineárně pružný materiál je tedy:

$$\Pi_i = \Pi_i^* = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV. \quad (2.27)$$

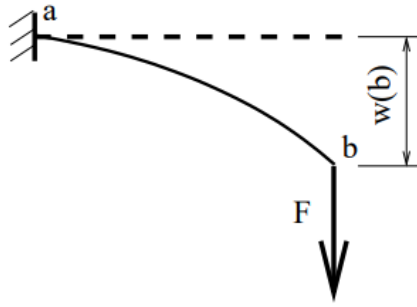
3.2.2.8 Potenciální energie vnějších sil

Odpovídá úbytku polohové potenciální energie zatížení, vyvolaného posunem působišť zatěžovacích sil, v případě působení momentu rotací. Potenciální energie vnějších sil je tedy záporná. Na rozdíl od přetvárné práce se uplatní součiny sil a jejich působišť plnou hodnotou bez přenásobení polovinou. Matematický zápis:

$$\Pi_e = -(L_e + L_e^*). \quad (2.28)$$

Pro obecné zatížení platí:

$$\Pi_e = \sum_{i=1}^n F_i u_i - \sum_{j=1}^n M_j \varphi_j - \int_c^d q(x) w(x) dx. \quad (2.29)$$



Obrázek 14 Průhyb na konzole způsoben vnějším zatížením [11]

3.2.2.9 Potenciální energie systému

Systémem se rozumí mechanický systém, který tvoří konstrukce a zatížení. Potenciální energie tohoto systému je součtem potenciální energie vnějších a vnitřních sil. Po dosažení platí:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -(L_e + L_e^*) + L_e = -L_e^*. \quad (2.30)$$

Celková potenciální energie systému je tedy rovna záporné komplementární přetvárné práci vnějších sil. Pro těleso v rovnováze je záporná, či rovná nule, úbytek polohové energie je tedy vždy větší než energie akumulovaná v konstrukci. Komplementární práce se dá představit jako práce, spotřebovaná na zpomalení procesu zatěžování tak, aby bylo dosaženo statického zatěžování. Tato část energie se v tělese neakumuluje a uniká mimo systém. Může se také přeměnit na jiný druh energie.

Potenciální energie konstrukce, která je v rovnovážném stavu, má vlastnost extrému. Platí Lagrangeův princip minima celkové potenciální energie:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = \min. [J] \quad (2.31)$$

Ze všech možných deformačních stavů tělesa (které neporušují jeho spojitost a respektují okrajové podmínky) nastane právě ten, při kterém je potenciální energie systému minimální.

Věta se dá vysvětlit následovně. Konstrukci, která je v rovnovážném stavu, udělíme infinitezimální změnu – variaci. Jedná se o změnu celé deformační křivky δu (v případě prutů) a funkcí poměrných přetvoření $\delta \epsilon$. Tyto změny jsou vlastně posuny či přetvoření. Je-li konstrukce v rovnováze, potenciální energie dosahuje extrémní hodnoty, pak nedojde při „dostatečně malé“ variaci ke změně potenciální energie systému. Při aplikaci Lagrangeova principu virtuálních přemístění tak zároveň platí, že práce vnějších a vnitřních sil skutečných na udělených virtuálních posunech a deformacích je rovna nule, pokud se konstrukce nachází v rovnováze. Oba principy (princip minima potenciální energie a princip virtuálních přemístění) jsou tudíž rovnocenné. Pro potenciální energii můžeme psát:

$$\delta_u \Pi = 0. \quad (2.32)$$

Index u u znaku variace znamená, že virtuální změně byla podrobena přemístění u . Daná rovnice je podmínkou pro extrém potenciální energie soustavy. V případě extrému nabývá potenciální energie stacionární hodnotu, v případě stabilní rovnováhy se jedná o zmiňované minimum z Lagrangeova principu minima celkové potenciální energie.

Pro přímý prut platí:

$$N = (EA) \frac{du}{dx},$$
$$M = -(EI_y) \frac{d^2w}{dx^2}, \quad (2.33)$$

pak potenciální energie vnitřních sil (bez vlivu smyku):

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_0^L EAu'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EIw''^2 dx. \quad (2.34)$$

3.2.3 Variační metody

Následující text čerpá ze zdrojů [10], [11].

Tato práce se zabývá následujícími metodami, které do této kategorie spadají:

- Ritzova metoda
- Metoda konečných prvků (MKP)

V obecných případech nejsou funkce přemístění předem známy, což je jeden z charakteristických rysů variační úlohy.

- Nehledá se konkrétní hodnota, hledá se křivka popřípadě funkce, která jí popisuje.
- Hledaná křivka musí splňovat určité okrajové nebo počáteční podmínky.
- Hledaná funkce musí splňovat podmínku extrému určité veličiny – tzv. funkcionál. Například extrém potenciální energie – minimum.

Funkcionál je číslo, které závisí na celém průběhu křivky. Obvykle je integrálem z nějakého operátoru nad funkcí $y = f(x)$ a jejími derivacemi

$$F = \int_{x_0}^{x_{kon}} L(y, y', y'', \dots, y^n) dx. \quad (2.35)$$

Ve variační úloze tedy hledáme křivku, která udělí funkcionálu extrém. V našem případě minimum pro potenciální energii. Taková křivka se nazývá extrémála. Hodnota funkcionálu potenciální energie vyčíslená pro jakoukoliv jinou křivku bude větší než pro extrémálu. Variací funkce $y = f(x)$ se rozumí infinitezimální přírůstek nejen jedné hodnoty funkce, ale celé funkce. Jedná se o rozdíl dvou blízkých funkcí.

Existují dvě skupiny metod pro řešení variačních úloh. Nepřímé metody variační úlohu převedou na řešení diferenciální rovnice (Eulerovy), která je k dané úloze jednoznačně přiřazena. Tímto postupem obdržíme diferenciální rovnici desky (nebo třeba prutu, tělesa). Přímé metody hledají řešení extrému funkcionálu pomocí náhradních funkcí jejich lineární kombinací.

3.2.3.1 Ritzova metoda

Hledáme tedy extrém určité křivky. V místě extrému funkce platí:

$$\partial\Pi = 0, \quad (2.36)$$

čehož Ritzova metoda využívá.

Hledaná funkce, která udělí funkcionálu extrém, se aproximuje ve tvaru:

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \quad (2.37)$$

Kde a_i jsou neznámé konstanty a φ_i jsou aproximační funkce, které splňují okrajové podmínky.

Příslušný funkcionál se vyjádří pomocí náhradní funkce $w_n(x)$. Tato funkce i funkcionál F závisí na koeficientech a_i . Hodnotu funkcionálu F teď může měnit pouze změna koeficientů. Podmínka extrému teď přechází do podmínky extrému funkce o n proměnných. Dostáváme soustavu n rovnic ve tvaru:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.38)$$

Hledáme neznámé koeficienty a_i , které získáme vyřešením soustavy rovnic. Ty se následně dosadí do hledané funkce. Kvalita řešení závisí na „vhodnosti“ zvolených básových funkcí φ_i a na počtu členů, které vezmeme v úvahu.

3.2.3.2 Metoda konečných prvků

Tato metoda je velmi komplexní a bude zde rozvedena jen v pár stručných bodech.

Nevýhoda klasických variačních metod (např. Ritzova) je obtížná volba aproximačních funkcí φ na složitějších oblastech. Někdy nemusí být ani možná. Tento problém se dá vyřešit rozdělením konstrukce n jednotlivých malých podoblastí a volbou aproximačních funkcí φ_j na nich. Dojde tedy k rozdělení konstrukce na malé části – konečné prvky, na kterých se následně řeší básové koeficienty φ . Oproti Ritzově metodě mají v MKP i konkrétní fyzikální význam uzlových přemístění – posunů nebo pootočení. Právě hodnoty v uzlech jsou předmětem řešení soustavy rovnic. Metoda konečných prvků předpokládá počítačové zpracování kvůli velkému počtu rovnic.

Protože Π je skalární veličina, lze napsat:

$$\Pi_{approx.} = \sum_{j=1}^n \Pi_{e,j}, \quad (2.39)$$

kde $\Pi_{e,j}$ je potenciální energie j -té podoblasti („konečného prvku“).

Další postup je analogický s klasickými variačními metodami – řeší se soustava n lineárních rovnic:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.40)$$

Rozlišujeme tři základní varianty MKP

- Deformační (Lagrangeův variační princip) – neznámá jsou pootočení, tato metoda je nejčastější.
- Silová (např. Castiglianův variační princip) – neznámé jsou silové veličiny.
- Smíšená (např. variační princip Hu-Washitsu).

Jak již název varianty napovídá, u deformační varianty MKP hledáme deformační veličiny či jejich derivace. U stěn to jsou například rovinná napětí a deformace v jejich rovině, u desky průhyb w a pootočení φ_x , φ_y , u prostorových úloh pak posun ve všech směrech. Aproximační funkce se volí zásadně ve tvaru polynomů.

Po úpravě rovnice potenciální energie soustavy a následném aplikování Lagrangeova variačního principu ($\vartheta\Pi = \min.$) dostáváme:

$$K r = F, \quad (2.41)$$

kde K je matice tuhosti konečného prvku, F je zatěžovací vektor konečného prvku a r jsou neznámé konstanty (posunutí).

Z K_e , r_e a F_e jednotlivých prvků, kde e je číslo prvku, sestavíme K , r a F celé konstrukce a neznámé určíme řešením soustavy rovnic. Sestavení matice tuhosti a zatěžovacího vektoru je zcela shodné s postupem v obecné deformační metodě.

Zatížení se zavádí výhradně v uzlech konečných prvků a má silový charakter. Síly pracují na posunutích, momenty pracují na pootočeních.

Okrajové podmínky úlohy tvoří podepření konstrukce. V případě pružných podpor se přidá odpovídající tuhost na diagonálu matice tuhosti. V případě pevných podpor (posunutí, pootočení) známe hodnotu (0,0) neznámého posunutí/pootočení, upravíme tedy systém rovnic. V případě popuštění podpor známe nenulovou hodnotu neznámého posunutí/pootočení, opět můžeme upravit systém rovnic.

U obecného případu výpočtu můžeme rozeznávat několik vstupních rovnic. Geometrické rovnice popisující přetvoření, podmínka rovnováhy a fyzikální rovnici. Každá z nich má svůj maticový zápis.

3.2.4 Zjednodušené metody pro praktické navrhování

3.2.4.1 Metoda součtových momentů

Následující text čerpá ze zdrojů [9], [15], [16].

Metoda součtových momentů je jednou ze zjednodušených metod, pomocí které se často řeší lokálně podepřené desky. Jedná se o přibližnou metodu výpočtu desek působících ve dvou směrech. Je založena na principu vyjmutí deskového segmentu z konstrukce. Konkrétně jde o pás desky, příslušející jedné řadě sloupů, který v liniovém pojetí představuje spojitý nosník. Ten je následně rozdělen na dílčí segmenty, z nichž každý představuje jedno deskové pole. Jednotlivé segmenty jsou následně řešeny nezávisle na sobě. Použitím metody

součtových momentů vyloučíme z výpočtu svislé nosné konstrukce. Předpokládáme, že přeberou rozdíly v napjatosti koncových průřezů sousedních segmentů.



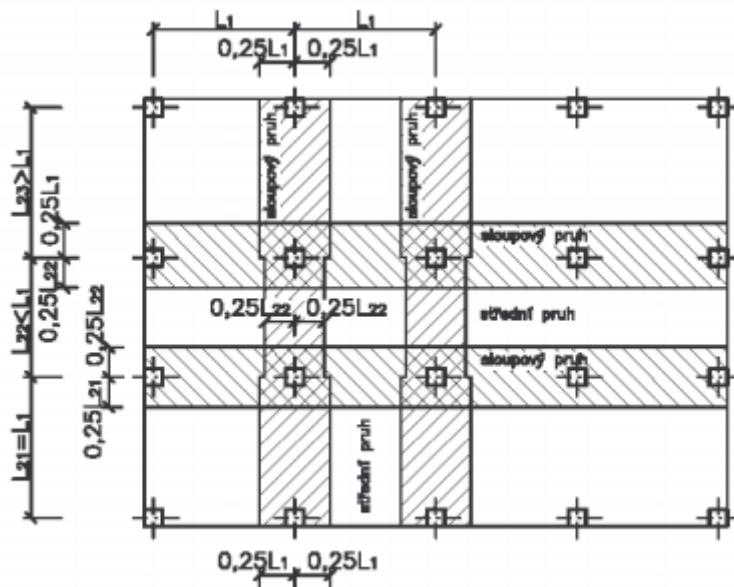
Obrázek 15 Model konstrukce pro metodu součtových momentů [9]

Použití metody je vázáno na splnění řady omezujících podmínek:

- Desková konstrukce je v celém svém rozsahu železobetonová, pouze eventuelně s ocelovými nebo předpjatými hlavicemi.
- V obou hlavních směrech jsou alespoň 3 desková pole.
- Obdélníková pole mají poměr delší strany ke kratší menší než 2,0.
- Rozpětí deskových polí v hlavním směru se neliší o více než 1/3 rozpětí kratšího pole.
- Sloupy nejsou odchýleny od osového systému o více než 10% vzdálenosti os kolmých na směr vychýlení.
- Konstrukce je zatížena pouze svislým zatížením, rovnoměrně rozděleným po celém deskovém poli.
- Užité zatížení $q_k \leq 2,2 \cdot g_k$, kde g_k je zatížení stálé.
- Tloušťka desky by měla být dostatečně velká na to, aby neohrožily nadměrné deformace.
- Silové účinky zatížení stanovené metodou součtových momentů nelze dále upravovat (např. redistribucí).
- Konstrukce se vyšetřuje ve dvou vzájemně kolmo křížujících sloupových směrech.

Metoda součtových momentů představuje výpočetně nejjednodušší variantu přibližných metod. Vzhledem k zjednodušeným modelům a idealizacím spolu s omezujícími podmínkami je však používána převážně k výpočtům pravidelných skeletů bez komplikovanějších konstrukčních detailů.

Desková stropní konstrukce se nejprve rozdělí půdorysně na vnitřní a krajní deskové pruhy šířky b se směru obou hlavních os. Šířka b je vymezena střednicemi přilehlých deskových polí nebo okrajem desky. Způsoby dělení jsou uvedeny na obrázku:

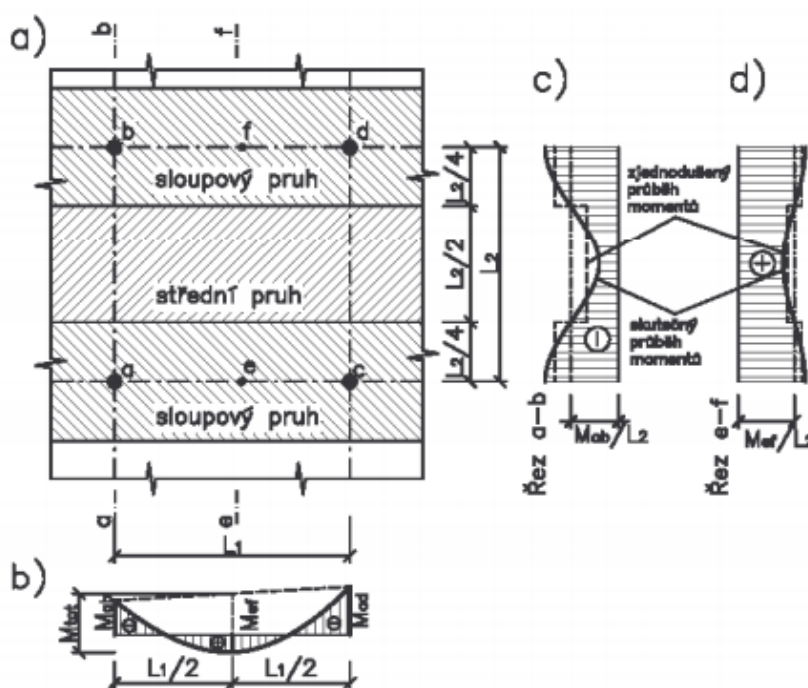


Obrázek 16 Určení sloupových a středních pruhů [15]

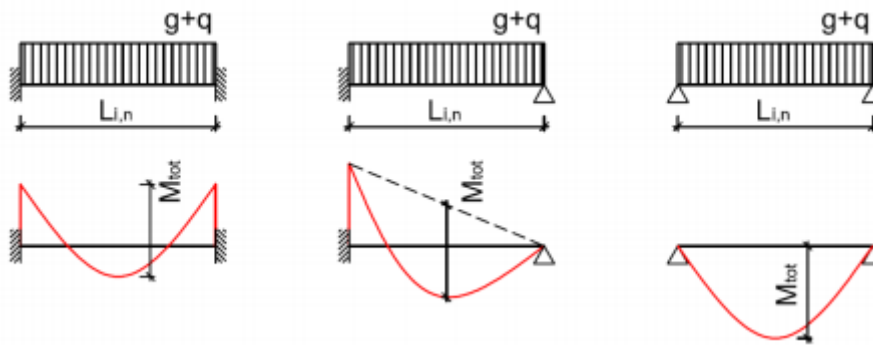
V každém deskovém pruhu se stanoví světlá rozpětí deskových polí $L_{in} = L_i - c_i$, kde c_i je šíře podpory. Při výpočtu vycházíme z celkového součtového momentu pole:

$$M_{tot} = \frac{1}{8} (\sum g_d + \sum q_d) * b * L_{in}^2 \quad (2.42)$$

kde $\sum g_d + \sum q_d$ značí součet návrhových hodnot všech rovnoměrných stálých a proměnných zatížení desky, která se mohou současně vyskytnout, b je šířka pásu desky a L_{in} je světlá vzdálenost podpor ve vyšetřovaném směru. Na obrázku 17 je vyznačeno, jak se rozdělí celkový součtový moment M_{tot} na celkové záporné momenty v podporách a kladný moment v poli ve středních polích deskového pruhu. Platí i pro krajní vetknutí desky.

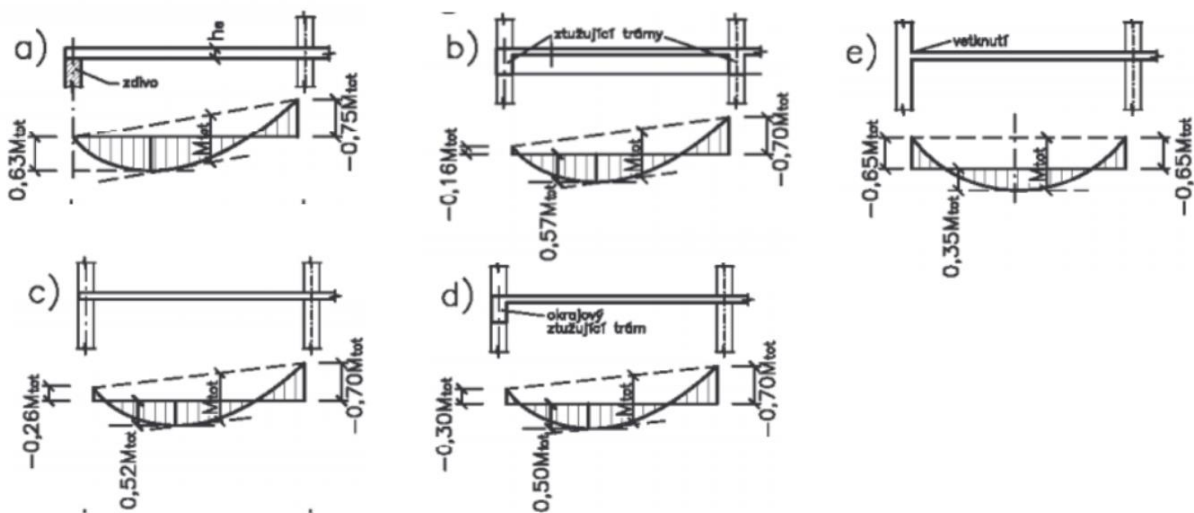


Obrázek 17 Skutečné a zjednodušené rozdělení součtového momentu pole v příčných řezech [15]



Obrázek 18 Stanovení hodnoty celkového součtového momentu [9]

V okrajových polích deskového pruhu je rozdělení celkového součtového momentu M_{tot} ovlivněno tuhostí upnutí v krajní první vnitřní podpoře deskového pruhu. Na obrázku 19 je vyznačeno několik případů rozdělení M_{tot} v případech, kdy deskový pruh není konzolově vyložen před krajní podporu ve směru určovaných momentů.



Obrázek 19 Rozdělení součtového momentu M_{tot} v krajním poli [15]

Při prostém uložení desky na obvodovém zdivu se podporový moment neuvažuje, ale světlé rozpětí L_n se určí za předpokladu, že teoretická podpora se nachází alespoň 40 mm, nejméně však $0,5 h_s$ za lícem zdiva (h_s je tloušťka desky). V ostatních případech se podle obrázku 19 určí součtový M_{tot} dle uvedené rovnice pro světlé rozpětí L_n . Jeho rozdělení na celkové záporné a kladný moment je ovlivněno tuhostí spojení s krajní a první vnitřní podporou, případně i přítomností příčného ztužujícího trámu. Je-li dle obr. 19 e) okrajové pole desky vetknuto do tuhé obvodové stěny, rozděluje se M_{tot} stejně jako ve vnitřních polích deskového pruhu.

Deskový pás však může být ve směru určovaných momentů konzolově vyložen před krajní podporu tak, že v jejím líci vyvodí při šířce b záporný ohybový moment M_c . Nyní záleží na poměru velikosti konzolového momentu M_c k součtovému momentu M_{tot} okrajového pole deskového pásu. Jeli $|M_c| > 0,65 M_{tot}$, nelze použít metody součtových momentů a desková konstrukce se řeší např. metodou náhradních rámců. Při $|M_c| = 0,65 M_{tot}$, se chová krajní podpora jako při plném vetknutí a součtový moment se rozdělí podle obr. 19 e). Hodnotě $M_c=0$

odpovídá podle způsobu podepření některý z případů na obr. 19 a) až d). Vzhledem ke zjednodušené metodě považují se kladné mezipodporové momenty za maximální, i když odpovídají hodnotám pro střed pole. Pro mezilehlé hodnoty M_c lze stanovit moment v krajní podpoře lineární interpolací mezi uvedenými případy.

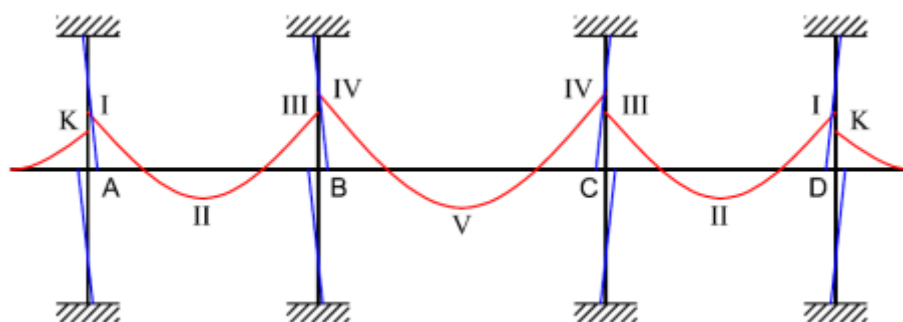
Z obrázku 19 b) až e) je zřejmé, že celkový záporný moment v krajní podpoře (levé) musí při $M_c = 0$ přenést tuze připojený podporující prvek pod deskou a s výjimkou desek horního patra rámy u podporující prvek nad deskou. Podle teorie rámových konstrukcí bychom měli „nerozdělný“ styčnický moment, např. dle obrázku 19 b) $M_{1L} = -0,16M_{tot}$, rozdělit do všech tří prutů krajního styčnicku v poměru jejich prutových ohybových tuhostí K . V přibližné metodě součtových momentů však můžeme předpokládat, že moment M_{1L} již zahrnuje podíl nerozdělného momentu, připadající na deskový příčel, včetně případného ztužujícího trámu. Pak určíme ohybový moment v hlavě spodního sloupu jednoduše:

$$M_{cd} = -K_{cd} * \frac{M_{1L}}{K_{cd} + K_{ch}} \quad (2.43)$$

a v patě horního sloupu:

$$M_{ch} = -K_{ch} * \frac{M_{1L}}{K_{cd} + K_{ch}}, \quad (2.44)$$

kde K_{cd} je prutová ohybová tuhost spodního sloupu a K_{ch} je horního sloupu.



Obrázek 20 Rozdělení ohybových momentů na rámové konstrukci [9]

Vnitřní podpory musí přenést největší možný rozdíl celkových podporových momentů tuze připojených polí deskového pásu, který je dovoleno stanovit pomocí vztahu:

$$M_{sup} = 0,07[(\sum g_{d,ln} + \sum q_{d,ln}) * b_{ln} * L_{ln}^2 - \sum g_{d,sh} * b_{sh} * L_{sh}^2], \quad (2.45)$$

kde členy s indexem „ln“ značí veličiny, určené pro delší z přilehlých polí a členy s indexem „sh“ pro kratší z polí, přilehlých k vyšetřované podpoře. Nepočítá-li se přesněji, lze rozdělit moment M_{sup} podle vztahu výše do horní i dolní podpory v poměru jejich tuhostí jako v předchozím případě. Smysl ohybových momentů rozdělených do krajních sloupů lze určit nejspolehlivěji vykreslením pootočení styčnicku. U vnitřních sloupů se obvykle navrhuje souměrná výztuž na mimostředný tlak s rozděleným styčnickým momentem M_{sup} .

Při výpočtu metodou součtových momentů se obvykle postupuje následovně:

- Provedení výseku konstrukce.
- Výpočet celkového součtového momentu.
- Rozdělení celkového součtového momentu na momenty v podporách a v poli.
- Rozdělení momentů v příčném směru do sloupového a středních pruhů.
- Přepočet momentů na běžný metr šířky desky.
- Dimenzování.

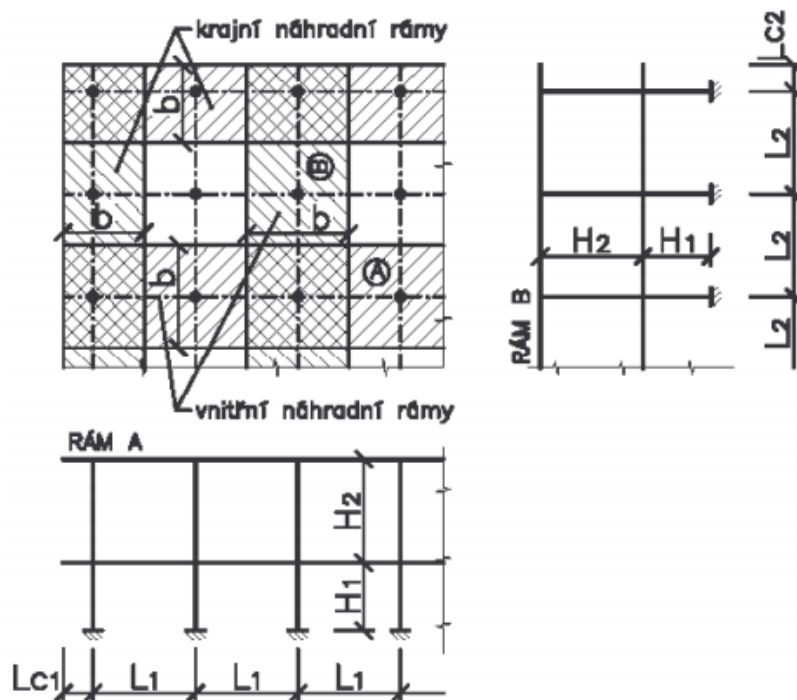
Poslední 3 body budou popsány v kapitole 3.2.4.3. - Rozdělení momentů v příčném směru, společně pro metodu součtových momentů a metodu náhradních rámuů.

3.2.4.2 Metoda náhradních rámuů

Následující text je čerpán ze zdrojů [9], [15].

Metoda náhradních rámuů je další obvyklou metodou statického vyšetřování lokálně podepřených desek. Díky obecnějšímu pojetí má tato metoda méně omezujících podmínek použití.

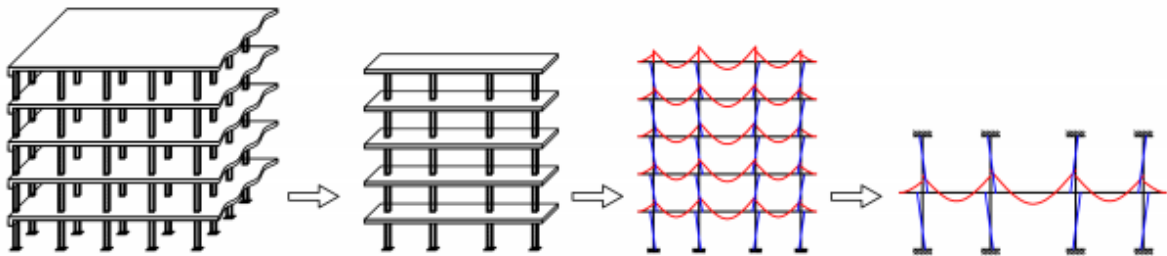
U konstrukcí, kde je deska spojena s podporujícími prvky tak, že toto spojení je schopno přenášet ohybové momenty, se metodou náhradních rámuů vyšetřují krajní a střední náhradní rámy probíhající ve směrech sloupových řad a tvořící dva vzájemně se kolmo křížící systémy náhradních rámuů. Jestliže spojení desky s podporujícími prvky není zajištěno, vyšetřují se místo náhradních rámuů náhradní spojitě nosníky.



Obrázek 21 Krajní a vnitřní náhradní rámy [15]

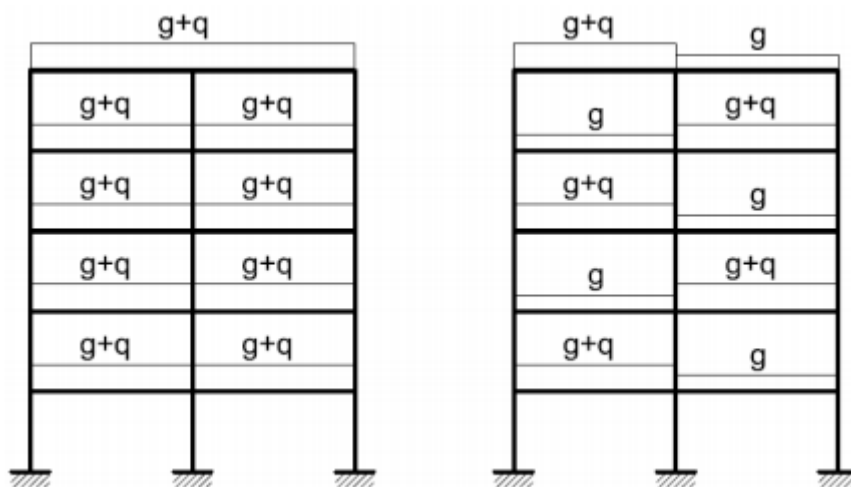
Každý náhradní rám nebo náhradní spojitě nosník se vyšetřuje jako celek, nejlépe pomocí programů pro řešení prutových konstrukcí, které dovolují vyjádřit proměnnou tuhost

prutů. Dá se vyšetřit jako celek (po celé výšce objektu), pokud je zatížen pouze svislým zatížením – vodorovné zatížení ztěžuje dimenzování náhradních rámu zejména po obvodě kritického průřezu v protlačení, proto zde navrhujeme příčné nebo i podélné ztužující stěny a jádra, která přenesou zmíněné vodorovné zatížení od větru. Pak lze vyšetřovat každé podlaží v rámovém výseku odděleně. V takovém případě je rámový výsek tvořen deskovou příčlím a přilehlými podporujícími prvky nad a pod deskovou příčlím, dokonale vetknutými v úrovních podlaží.



Obrázek 22 Možnosti zjednodušení výpočetního modelu [9]

Metoda náhradních rámu umožňuje zavedení vlivu střídavého proměnného zatížení (šachovnicové uspořádání užitného zatížení), čímž se přibližuje více reálnému chování konstrukce.



Obrázek 23 Symetrická a nesymetrická kombinace zatěžovacích stavů [9]

Při vyšetřování průběhu vnitřních sil na náhradním rámu je nutné respektovat vliv proměnné hodnoty momentů setrvačnosti deskové příčle a podporujících prvků po své délce a také vliv připojených kroucených prvků. Za kroucené prvky v tomto smyslu lze považovat prvky připojené k podporujícím prvkům v rovině stropní konstrukce, kolmo ke směru vyšetřovaných ohybových momentů a zasahující až ke střednicím pásů deskových polí přilehlých ke spojnici podpor. Desková konstrukce namáhá tyto prvky kroucením.

Metoda náhradních rámu se používá především pro přibližný výpočet pravidelných konstrukcí, jež nesplňují doplňující požadavky pro méně pracnou metodu součtových momentů. Na rozdíl od metody součtových momentů zohledňuje tuhosti jednotlivých podpůrných prvků. Při nedostatečném vodorovném ztužení objektu a použití patrového

rámového výseku však může docházet vlivem chybně předepsaných okrajových podmínek sloupů k nepřesnostem ve výpočtu. V tomto případě značným podceněním ohybových momentů v krajních sloupech a tím i v krajních polích desky.

Při výpočtu metodou náhradních rámců se obvykle postupuje následovně:

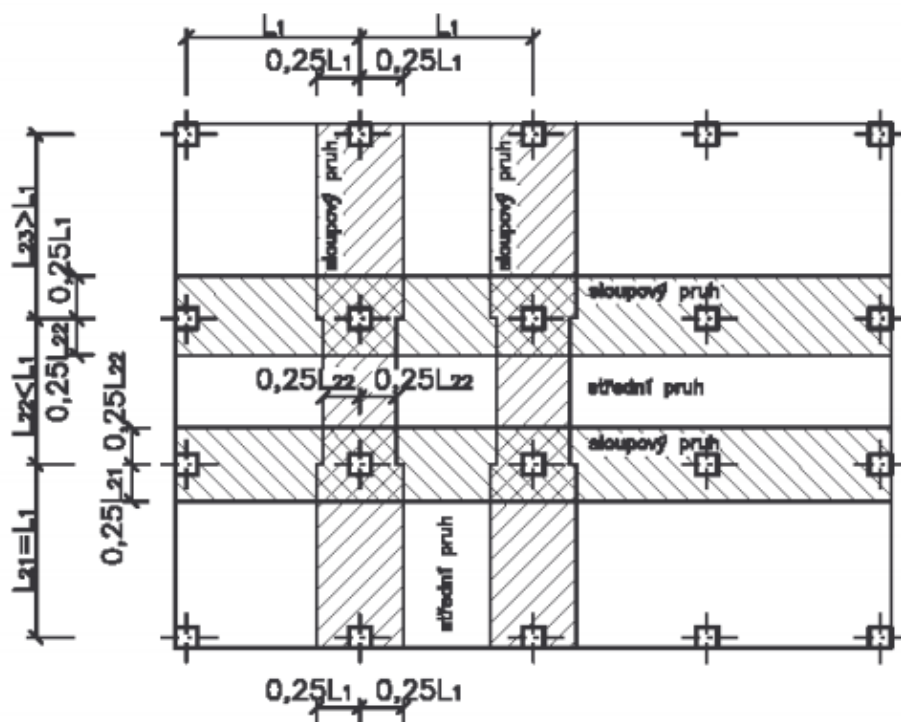
- Provedení výseku konstrukce.
- Výpočet průběhu momentů na rámové konstrukci
- Rozdělení v příčném směru do sloupového a středních pruhů.
- Přepočet momentů na běžný metr šířky desky.
- Dimenzování.

Poslední 3 body budou popsány v kapitole 3.2.4.3. - Rozdělení momentů v příčném směru, společně pro metodu součtových momentů a metodu náhradních rámců.

3.2.4.3 Rozdělení momentů v příčném směru

Následující text je čerpán ze zdrojů [9], [15].

Typickým znakem chování lokálně podepřených desek je skutečnost, že celkové kladné i záporné ohybové momenty v deskových pruzích šířky b nejsou rozděleny v příčném směru rovnoměrně. Celkové ohybové momenty v podporách a polích, stanovené metodou součtových momentů nebo metodou náhradních rámců je proto třeba v zájmu správného rozložení výztuže rozdělit do sloupových a středních pruhů. Toto dělení probíhá na základě ohybové tuhosti jednotlivých částí deskové konstrukce. Části desky ležící v okolí spojnic sloupů mají větší ohybovou tuhost než zbývající části konstrukce.



Obrázek 24 Určení sloupových a středních pruhů [15]

Více namáhaný sloupový pruh má po každé straně spojnice lokálních podpor šířku rovnou čtvrtině kratšího z obou rozpětí L_1, L_2 pro případ metody součtových momentů. U metody náhradních rámu je roven čtvrtině rozpětí příslušného směru. V případě metody součtových momentů se může šířka sloupového pruhu i při konstantní vzdálenosti sloupů měnit v závislosti na poměru rozpětí L_1/L_2 . Střední pruhy jsou ve skutečnosti rozděleny na dvě části střednicemi deskových polí. Z praktického hlediska však může připadat na každou část středního pruhu jiný podíl celkového momentu. Na sloupový pruh připadá ω -násobek rozdělovaného celkového momentu. Hodnoty součinitele ω jsou uvedeny v tabulce. Sloupový pruh bude přenášet díky větší ohybové tuhosti také větší ohybové momenty. Tuhost pruhů je však po vyšetřované délce proměnná.

$$\begin{aligned} M_{sloup} &= \omega * M_{h,d} \\ M_{stř} &= (1 - \omega) * M_{h,d} \end{aligned} \quad (2.46)$$

V tabulce pro součinitel ω jsou uvedeny součinitele α a β_t . Součinitel α představuje součinitel ztužení a charakterizuje spolupůsobení případného ztužujícího trámu (rovnoběžného s vyšetřovaným směrem) a deskou. U desek bez ztužujících trámů je $\alpha = 0$, u desek se ztužujícím trámem platí:

$$\alpha = \frac{E_{cb} * I_b}{E_{cs} * I_s}, \quad (2.47)$$

kde E_{cb} je modul pružnosti betonu ztužujícího trámu, E_{cs} je modul pružnosti betonu desky, I_b je moment setrvačnosti účinného průřezu ztužujícího trámu a I_s je moment setrvačnosti desky o šířce rovné šířce řešeného pruhu.

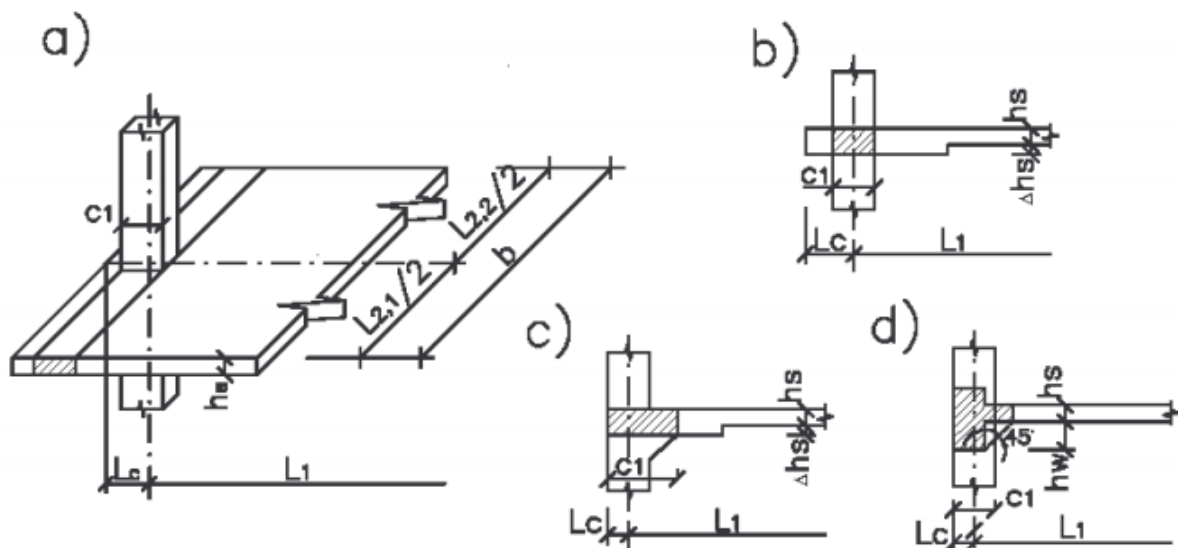
V krajní podpoře deskového pole je závislé rozdělení celkového záporného momentu do sloupového a mezisloupového pruhu na možnosti torzního pootočení okrajového krouceného prvku, který leží kolmo k rovině vyšetřovaných ohybových momentů. Ten charakterizuje součinitel kroucení β_t a je dán vztahem:

$$\beta_t = \frac{G_{cb} * I_t}{E_{cs} * I_s}, \quad (2.48)$$

kde G_{cb} je smykový modul pružnosti betonu okrajového krouceného prvku, E_{cs} je modul pružnosti betonu desky, I_t je moment tuhosti průřezu v kroucení okrajového krouceného prvku a I_s je moment setrvačnosti průřezu desky o šířce rovné rozpětí okrajového krouceného prvku ležícího kolmo k rovině vyšetřovaných momentů. V tomto vztahu se uvažuje hodnota $G_{cb} = 0,42 E_{cs}$, připouští se ovšem i $G_{cb} = 0,5 E_{cs}$.

V případech dle obrázku pro výpočet β_t rozhodují vyšrafované průřezy. Moment tuhosti v kroucení I_t libovolného průřezu lze určit přibližně rozdělením na dílčí obdélníky (jejichž kratší strany označíme x_i a delší strany y_i) tak, aby hodnota I_t vyšla největší:

$$I_t = \sum_{i=1}^n (1 - 0,63 \frac{x_i}{y_i}) * \frac{x_i^3 * y_i}{3}. \quad (2.49)$$



Obrázek 25 Účinný průřez v kroucení pro výpočet součinitele β_i [15]

Účinný průřez v kroucení pro výpočet momentu tuhosti v kroucení okrajového prvku I_t se považuje za konstantní po celé jeho délce. Je rovný největšímu z těchto průřezů:

- Průřez části desky rovné šířce sloupu nebo hlavice ve směru určovaných momentů.
- Průřez části desky rovné šířce sloupu nebo hlavice ve směru určovaných momentů včetně částí průřezu nad a pod deskou.
- Účinný průřez ztužujícího trámu.

a) Dimenzování konzoly ve směru určovaných momentů

Jestliže je okraj desky vykonzolován ve směru určovaných momentů přes krajní řadu podpor na vzdálenost $L_K \geq 0,15 \cdot L_2$ a není opatřen ztužující okrajovou obrubou, dimenzuje se sloupový pruh konzoly na 100% celkového konzolového momentu a střední pruh:

- a) na ohybový moment $0,65 \cdot m_K$, pokud v řadě podpor není ztužující trám
- b) na ohybový moment m_K , pokud je krajní řada podpor ztužena ztužujícím trámem

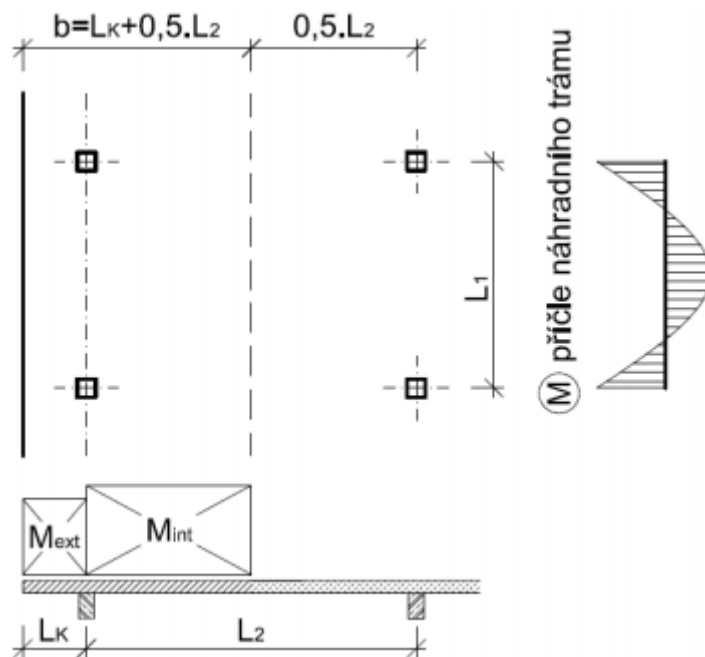
kde m_K je moment na konzole šířky 1m.

b) Dimenzování krajního deskového pásu s konzolou ve směru kolmém k ose pásu

Celkové kladné a záporné momenty $M_{h,d}$ krajního deskového pásu bez ztužujících trámů, ztužující obvodové obruby a s konzolou kolmou k ose vyšetřovaného pásu s vyložení $L_K \geq 0,15 \cdot L_2$ se rozdělí na moment M_{ext} přenášený částí krajního deskového pásu o šířce rovné vyložení konzoly a na moment M_{int} přenášený zbytkem krajního deskového pásu. Rozdělení se provádí dle vztahů:

$$M_{ext} = \frac{M}{4} * \left(1 + \frac{2 \cdot L_K}{b}\right)$$

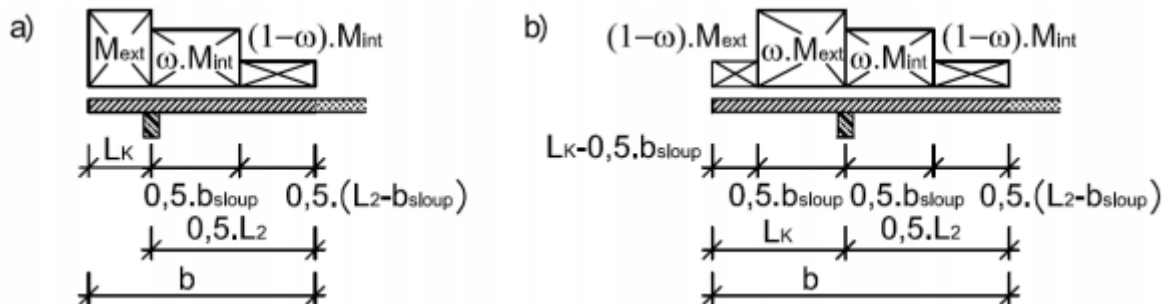
$$M_{int} = M - M_{ext} \tag{2.50}$$



Obrázek 26 Krajní deskový pás [9]

Rozdělení momentu M_{ext} po šířce L_K závisí na poměru vyložení konzoly L_K k šířce sloupového pruhu b_{sloup} , která je rovna polovině kratšího rozpětí deskového pole:

- jestliže $\frac{L_K}{b_{sloup}} \leq \frac{2}{3}$, rozdělí se moment M_{ext} po šířce L_K rovnoměrně (obr. 27 a))
- jestliže $\frac{L_K}{b_{sloup}} > \frac{2}{3}$, přisoudí se sloupovému pruhu o šířce $0,5 * b_{sloup}$ část momentu $\omega * M_{ext}$ a zbývající část momentu přenesou zbytek pruhu (obr. 27 b))



Obrázek 27 Rozdělení celkových momentů do sloupových a středních pruhů u krajního deskového pásu s konzolou [9]

Moment M_{int} se rozdělí do sloupového a středního pruhu klasicky podle součinitelů ω .

c) Dimenzování desky v okolí nosné železobetonové stěny

Jsou-li podporující prvky tvořeny sloupy nebo stěnami rozloženými po délce rovné nebo větší než $\frac{3}{4}$ šířky desky b , rozdělí se záporný moment ve směru kolmém na rovinu stěny rovnoměrně podél šířky b . Střední pruh pásu podélně podporovaného stěnou se dimenzuje jako střední pruh pásu sousedního.

d) Dimenzování sloupového pruhu se ztužujícím trámem

U sloupového pruhu se ztužujícím trámem se předpokládá, že v trámu působí:

- 0,85 -násobek momentů sloupového pruhu, jestliže $\alpha_1 * \frac{L_2}{L_1} \geq 1$

b) $0,85 * \alpha_1 * \frac{L_2}{L_1}$ -násobek momentů sloupového pruhu, jestliže $0 \leq \alpha_1 * \frac{L_2}{L_1} < 1$.

Zbytek momentů působí v desce sloupového pruhu, která není součástí trámu. Kromě toho musí trámy přenést momenty vyvolané jejich přímým zatížením (vl. tíha, tíha příček přímo podporovaných trámy, apod.)

Takto spočítané a rozdělené momenty je vhodné ještě přepočítat na 1m šířky pruhu a můžeme přistoupit k ohybovému dimenzování desky.

$$m_{sloup} = \frac{M_{sloup}}{b_{sloup}}, \quad m_{stř} = \frac{M_{stř}}{b_{stř}}. \quad (2.51)$$

3.2.4.4 Proužkové metody

Následující text je čerpán ze zdrojů [2], [17], [18].

Proužková metoda je rychlá a jednoduchá, vhodná i pro ruční výpočet po obvodě podepřených desek. Uvažuje však nulové krouticí momenty. Vypočítané ohybové momenty jsou tedy větší. Tím, že uvažujeme nulové krouticí momenty, jsou výsledky blízké variantě, kdy není zabráněno zvedání rohů desky, čili metodě náhradních nosníků. Metoda vychází z faktu, že průhyb desky v obou směrech musí být stejný – $w_x = w_y$.

Při neuvážení krouticích momentů m_{xy} vychází ohybové momenty v poli nadhodnocené. Ve skutečnosti u desek se zabráněním zvedání rohů budou hodnoty menší. Naopak u těchto desek nelze vyčíslit přídavné momenty v rozích desky u horního a dolního povrchu. Na přenosu zatížení se podílejí tedy pouze ohybové momenty, což je značné zjednodušení výpočtu. Dá se napsat rovnicí:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -f, \quad (2.52)$$

kde f je celkové plošné zatížení desky, které můžeme rozložit na složku přenášenou ohybem ve směru x a na složku přenášenou ohybem ve směru y .

$$f = f_x + f_y \quad (2.53)$$

Po dosažení za f do původní rovnice můžeme danou rovnici rozdělit na dvě a konstrukci dál řešit jako dvě jednosměrně pnuté desky, které jsou na sobě vzájemně nezávislé:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} &= -f_x \\ \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} &= -f_y. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Deska se chová, jako kdyby byla složena z „proužků“ ve směru x a y , které spolu nijak nespolutpůsobí.

Nejdříve je tedy nutné vypočítat celkové zatížení a rozdělit jej do jednotlivých směrů. Nejčastěji se uvažuje rovnoměrné zatížení všech proužků a rozdělení vychází z předpokladu rovnosti průhybu v polovinách rozpětí ve směrech x a y . Průhyb rovnoměrně zatíženého proužku v polovině rozpětí můžeme vypočítat pomocí vztahu:

$$w = k \frac{f l^4}{EI}, \quad (2.55)$$

kde k je součinitel podle typu uložení, roven:

- a) $\frac{1}{384}$ pro uložení typu vetknutí-vetknutí,
- b) $\frac{2}{384}$ pro uložení typu vetknutí-kloub,
- c) $\frac{5}{384}$ pro uložení typu kloub-kloub.

Z rovnosti průhybu následně dostáváme rovnici:

$$k_x \frac{f_x l_x^4}{EI} = k_y \frac{f_y l_y^4}{EI}, \quad (2.56)$$

ze které můžeme vyjádřit vztah mezi f_x a f_y a následně dosadit do původní rovnice (2.53).

Po vypočítání zatížení v jednotlivých směrech jsme schopni vypočítat momenty na proužcích v jednotlivých směrech pomocí běžných vztahů pro výpočet momentů. S ohledem na velkou míru zjednodušení se daná metoda hodí spíše jen pro hrubou kontrolu výpočtu přesnějšími metodami.

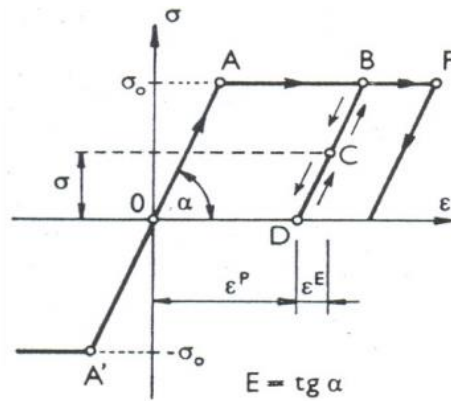
3.3 Plastická teorie desek

Následující text je čerpán ze zdrojů [12], [13].

Plastický stav je charakterizován vznikem nepružných (nevratných) deformací. Některé látky se chovají elasticky až téměř do svého porušení bez předchozího vzniku trvalých deformací. Toto se může vyskytnout i u oceli (např. kolejnice), záleží na jejím chemickém složení a stavových podmínkách.

V případě železobetonu většinou před porušením prvku dochází k trvalé deformaci při překročení meze kluzu ve výztuži. V místech největších momentů pak vznikají plastické klouby. Pod zatížením dochází k deformaci prvku a po následném odtížení se prvek již nevrací do původního stavu. Je tedy nutno kontrolovat přetvárné možnosti jednotlivých průřezů. Plastické teorie desek se mohou aplikovat pouze pro výpočet mezního stavu únosnosti (MSÚ). Je tudíž nutno zpětně ověřit mezní stavy použitelnosti (MSP).

V ideálním případě se pružně-plastický materiál chová až do mezní hodnoty napětí podle Hookova zákona – je v pružném stavu. Po dosažení zmíněné hodnoty je ve stavu plastickém. Mohou vznikat libovolné přírůstky plastických deformací, musí mít ale stejný smysl jako působící napětí. Odlehčení následně probíhá pružně.



Obrázek 28 Schéma pracovního diagramu pro pružně plastický materiál [13]

Speciálním případem je tuhoplastický materiál. Je to limitní případ ideálně pružně-plastického materiálu, u kterého je pružná část deformace nulová, či jen velmi malá a zanedbává se. Modelově se modul pružnosti E blíží nekonečnu.

Přechod z pružného stavu do plastického definují tzv. podmínky plasticity. Nejběžnější z nich je Huber-Mises-Henckyho podmínka plasticity: *Při obecném stavu napjatosti dochází k plastickému přetvoření v okolí bodu tělesa v případě, když měrná hodnota potenciální energie odpovídající změně tvaru dosáhne stálé hodnoty, která se rovná hodnotě měrné potenciální energie při prostém tahu na mezi kluzu.* Dalšími podmínkami jsou např. Tresca-Saint Venantova podmínka, Kritérium Mohr-Coulomb a další. Pro beton se často využívají podmínky Willama-Warnkeho, Menétrey-Willamova či Chen-Chenova podmínka. Ty již nepředpokládají ideálně pružnoplastické chování, ale zohledňují reálný tvar přechodu z pružné do plastické větve a berou v úvahu zpevnění či změkčení materiálu v plastické větvi.

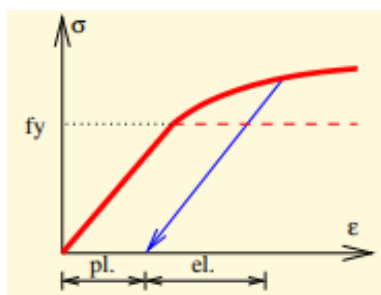
3.3.1 Statická metoda teorie plasticity

U statického řešení se hledá největší hodnota zatížení $P_s < P_m$ (kde P_m je mezní zatížení), která vyvolává staticky možný průběh momentů a splňuje podmínky vnitřní a vnější rovnováhy konstrukce, při němž se v žádném průřezu nepřekročí velikost mezního ohybového momentu. Při statickém řešení se výpočtem přibližujeme statické hodnotě mezního zatížení „zdola“, přičemž se stanoví dolní mez únosnosti konstrukce. [13]

3.3.1.1 Metoda konečných prvků v teorii plasticity

Následující text je čerpán ze zdroje [14].

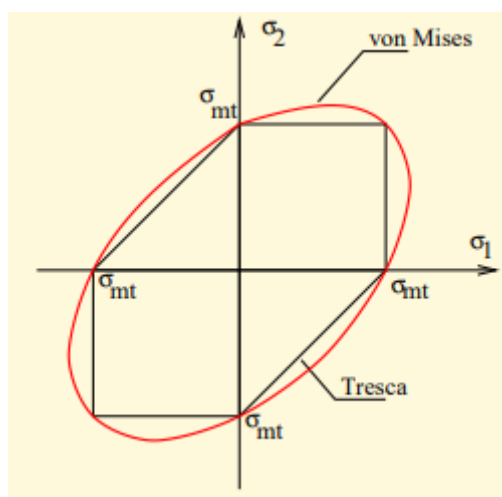
Plasticita materiálu způsobuje nelinearitu materiálu. Není možné aplikovat obvyklé vztahy lineární pružnosti, ani dosud uvedené postupy metody konečných prvků. Pro materiály jako je beton, zdivo, či třeba zeminy je hojně využíván zjednodušující předpoklad o pružnoplastickém chování materiálu, protože skutečné chování takového materiálu je velice složité. Pro výpočty je nejvhodnější pružnoplastický materiál se zpevněním, který po přechodu do plastického stavu vykazuje stále určitou tuhost (zpevnění), ta je ovšem podstatně nižší než tuhost v pružném stavu.



Obrázek 29 Pružnoplastický materiál se zpevněním [14]

Materiál se na začátku zatěžování uvažuje pružný – řídí se Hookovým zákonem, poté, co napjatost v materiálu dosáhne podmínky plasticity, materiál přejde do plastického stavu. V plastickém stavu se při nárůstu napětí dále zvětšují deformace. Po odlehčení se materiál odlehčuje lineárně pružně, i po úplném odlehčení na materiálu zůstávají trvalé – plastické deformace.

I algoritmizace MKP vychází z již zmíněné Misesovy podmínky. Pro rovinnou napjatost pro ni platí, že je definována jako funkce několika napětí, kterou bude možné zobrazit jako křivku v rovině hlavních napětí.



Obrázek 30 Misesova podmínka plasticity [14]

Misesovu podmínku je možné zapsat jako funkci hlavních napětí σ_1 , σ_2 a σ_3 . Z hlediska algoritmizace však tento zápis není vhodný, přepisuje se tedy, aby v ní vystupovala napětí k souřadnicovým osám x , y a z .

Chen-Chenova podmínka byla vyvinuta pro modelování betonových konstrukcí. Skládá se ze dvou funkcí, z nichž jedna popisuje chování materiálu v tlaku (oblast tlak-tlak) a druhá při všech ostatních případech namáhání (oblast tah-tlak).

Po sestavení podmínky plasticity se přistoupí k popisu chování materiálu v plastickém stavu. K tomuto účelu byla vytvořena řada teorií a postupů. Například teorie plastických deformací, či teorie plastického tečení.

Jako teorii plastických deformací označujeme postup, který využívá vztahů popisujících vztahy mezi konečnými hodnotami složek vektorů napětí a deformace:

$$\sigma = D^{EP} \varepsilon. \quad (2.57)$$

Pokud se takové vztahy povede sestavit, pak řešení nezávisí na zatěžovací dráze. Prakticky se však tento postup aplikuje jen velmi zřídka.

Proti tomu stojí metoda plastického tečení. Popisuje vztahy mezi přírůstkami napětí a deformace:

$$\dot{\sigma} = D_{ep} \dot{\varepsilon}. \quad (2.58)$$

Často se používá pojem „rychlost napětí a deformace“, ze kterého vyplývá i obvykle používané označení veličiny tečkou. Nejedná se však o rychlost ve fyzikálním smyslu, ale o přírůstky jednotlivých veličin během zatěžovacího kroku. Uvedené přírůstky napětí a deformace odpovídají přírůstku zatížení v konkrétní části zatěžovací dráhy. V jiné části dráhy mohou být i při stejném přírůstku zatížení hodnoty přírůstků napětí a deformace podstatně odlišné.

K vyřešení metody plastického tečení se definuje tzv. pružnoplastická matice tuhosti materiálu D_{ep} . Která po různých úpravách vypadá takto:

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T D_e}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} \sqrt{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}}. \quad (2.59)$$

Z této rovnice vyplývá, že vliv plastické deformace je vyjádřen členem:

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p} \sqrt{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}}, \quad (2.60)$$

který se nazývá parametr zpevnění a pro každý materiál musí být stanoven experimentálně. Pokud je roven nule, pak materiál vykazuje ideálně pružnoplastické chování. Pokud bude nenulový (kladný), pak se materiál chová jako pružnoplastický materiál se zpevněním. Pro konkrétní hodnotu parametru se dá stanovit konkrétní hladinu plastického potenciálu, nebo následnou podmínku plasticity, která poslouží k popisu chování materiálu v plastickém stavu.

Rozlišuje se několik typů zpevnění. V případě kinematického zpevnění následné podmínky plasticity nemění svou velikost a tvar, mění však svou polohu v prostoru hlavních napětí. Dále rozlišujeme zpevnění izotropní, při kterém podmínky plasticity nemění polohu, ale proporcionálně se zvětšují. Nejblíže popisuje reálné chování materiálů zpevnění kombinované, které slučuje oba předchozí typy.

Zkráceně lze parametr zpevnění napsat jako:

$$\psi = Q * H, \quad (2.61)$$

kde parametr H vyjadřuje derivaci funkce závislosti napětí na ekvivalentní plastické deformaci. Je možné ho relativně snadno získat ze zkoušek příslušného materiálu. V návaznosti na to se zavádí veličina σ_e , nazvaná ekvivalentní napětí a je ve vztahu s ekvivalentní plastickou deformací ε_e . Za předpokladu, že se materiál řídí von Misesovými vztahy (např. ocel), pak σ_e odpovídá von Misesovu napětí.

Parametr H se dá stanovit jednoduše – např. tahovou zkoušku na ocelové tyči, ale u některých materiálů není jeho stanovení tak snadné. Pro jeho popis není dostatek experimentálních dat, využívá se proto aproximace. Jednou z takových aproximací je například aproximace Rambergovou-Osgoodovou funkcí. K popisu funkce zpevnění u betonu je potřeba využít více parametrů, aby bylo vystiženo rozdílné chování betonu při různých způsobech namáhání. Pro beton se využívá zpevnění dle Ohtaniho a Chena. Funkce zpevnění je zde funkcí tří parametrů – ekvivalentních napětí při jednoosém tlaku, dvojosém tlaku a jednoosém tahu. Zkráceně lze napsat:

$$\psi = \alpha_1 Q_1 H_c + \alpha_2 Q_2 H_{bc} + \alpha_3 Q_3 H_t, \quad (2.62)$$

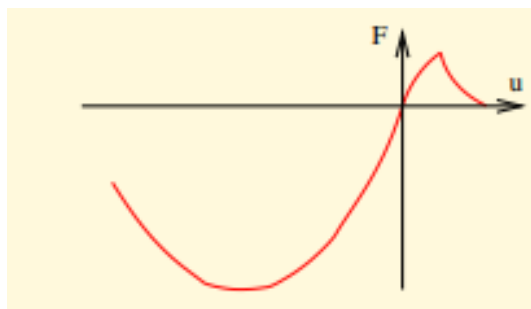
kde H jsou jednotlivé parametry zpevnění a Q jsou parametry pro jednotlivé oblasti.

Skutečný materiál se po dosažení určité úrovně zatížení začne porušovat – trhat či drtit. Tuto skutečnost je třeba zohlednit ve výpočtu, zavádí se proto podmínka porušení. Ta má obvykle stejný tvar jako podmínka plasticity, ale místo napětí na mezi pružnosti se do ní dosazuje napětí na mezi únosnosti (pevnosti) materiálu.

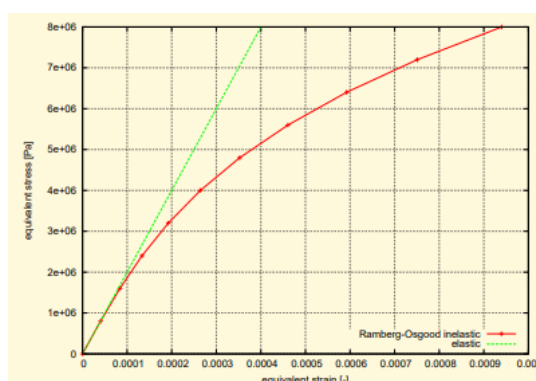
U oceli a dalších kovů můžeme jako podmínku porušení využít von Misesovu podmínku. U betonu se využije např. podmínka porušení dle Chen-Chena, která zohledňuje výše zmíněné tři parametry a jednotlivé pevnosti betonů pro příslušné namáhání.

Pro beton je možné použít i další podmínky. Kupfer [29] na základě svého experimentálního výzkumu sestavil podmínku porušení pro stav rovinné napjatosti, která je navržena tak, aby přímo využívala některá data ze standardních zkoušek betonu – pracuje s válcovou pevností. Willam a Warnke [30] sestavili na základě převážně těch samých experimentálních dat podmínku porušení a plasticity. Tato podmínka je definována pro 3D a je k dispozici v komerčním software ANSYS. Její tvar je blízký Chen-Chenově podmínce.

Beton se podobně jako zdívo nechová pružnoplasticky. Dochází v něm k nevratnému porušování – vzniku trhlin. Tento jev má odlišný charakter od plastického tečení. Pružnoplastický model poskytuje ve většině praktických úloh dostatečně přesné výsledky a jen obtížně lze popsat stav, kdy je beton porušen velkým množstvím trhlin a jeho únosnost podstatně klesá. Toto je potřebné v úlohách, kde se vyšetřuje zbytková únosnost a životnost havarovaných či těžce poškozených konstrukcí, nebo odolnost konstrukcí vystavených extrémním účinkům. Při porovnání pracovního diagramu betonu (Obr. 31) s pracovními diagramy, které popisují předchozí postupy (viz výše), je jasné, že uvedené pružnoplastické modely neposkytují možnost popsat chování materiálu po vzniku trhlin. Vznikne-li v betonu trhlinka, pak v tomto místě začne klesat únosnost materiálu, zatímco u výše zmíněných pružnoplastických materiálů se zpevněním stále narůstá.

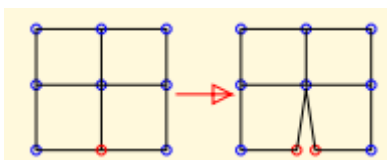


Obrázek 31 Jednorozměrný pracovní diagram betonu [14]



Obrázek 32 Aproximace Rambergovou-Osgoodovou funkcí [14]

Toto lze částečně ošetřit tzv. diskretními modely. Ty jsou založeny na předpokladu, že je potřebné modelovat šíření jednotlivých trhlin. Dochází k úpravě sítě konečných prvků.



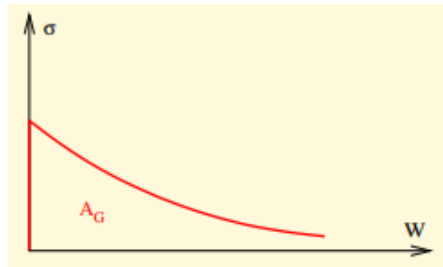
Obrázek 33 Princip diskretního modelu betonu [14]

V případě, že je v některém z uzlů sítě překročena tahová pevnost materiálu, dojde k oddělení prvků – dosud společný uzel je nahrazen dvěma samostatnými uzly patřícími různým konečným prvkům. Další výpočet probíhá ve změněné síti. Nevýhodou tohoto modelu je nutnost úpravy sítě během výpočtu a nemožnost zachytit všechny trhliny. Výsledek závisí na velikosti sítě, je tudíž nutná dostatečná podrobnost.

Další z možností je model rozetřených trhlin, který je založená na nelineární lomové mechanice. Podobně jako modely pružnoplustické spadá do skupiny kontinuálních modelů. Vliv trhlin na mechanické vlastnosti materiálu je v takovém modelu simulován prostřednictvím úpravy hodnot materiálových parametrů, přičemž spojitost materiálu zůstává zachována. V průběhu simulace rozvoje trhlin model nevyžaduje žádné změny tvaru sítě konečných prvků. Pokud v materiálu vzniká hustá síť drobných trhlinek, je daný předpoklad o poklesu hodnot mechanických vlastností velice výhodný. Pokud však v materiálu vznikají jednotlivé trhliny velkých rozměrů, nelze dosáhnout výstižných výsledků.

Mechanické vlastnosti u potrhaneho materiálu budou ve směru kolmém na trhlinu odlišné oproti vlastnostem ve směru rovnoběžném s trhlinou. Kolmo na trhlinu budou mechanické vlastnosti převážně nižší – především modul přetvárnosti.

Jednu z variant, jak otevření trhliny zavést do výpočtu, lze vyčíst z následujícího grafu, který popisuje závislost mezi otevřením trhliny a zbytkovým napětím, které je materiál schopen přenést:



Obrázek 34 Závislost mezi otevřením trhliny a napětím [14]

Jednoosý vztah mezi napětím a deformací pro popis chování betonu v tahu vede k nevýstižným výsledkům, jelikož se beton poruší obvykle v relativně úzkých oblastech – zónách lokalizace. Tento fakt nelze takto dostatečně vystihnout. Pro dosažení výsledků, které jsou v lepší shodě s chováním skutečného materiálu, se používá řada postupů. Například model pásu trhlin, který předpokládá, že energii uvolněnou při úplném otevření trhliny je možné považovat za vlastnost materiálu. Pro takovou energii se obvykle používá název lomová energie.

Doposud se řešila nelinearita materiálová, známe však ještě jednu – nelinearitu geometrickou. V teorii pružnosti obvykle pracujeme se zjednodušenými geometrickými vztahy ve tvaru:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x'}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y'}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z'}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial y'}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial x'}.\end{aligned}\tag{2.63}$$

Toto odvození je založeno na podstatných zjednodušeních. V případech, které odpovídají předpokladům o malých deformacích konstrukcí, poskytuje dostatečně přesné řešení. Pokud jsou deformace značné (např. průhyb nosníku se blíží 0,1 jeho rozpětí), pak dané vztahy již nemusí vyhovovat. Je potřeba geometrické vztahy odvodit přesněji.

Výsledné složky napětí pak vychází takto:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right], \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right], \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Vynecháním smíšených derivací a mocnin derivací je možné tyto vztahy upravit na vztahy, které se využívají běžně v lineární teorii pružnosti. Nové uvedené výrazy však popisují deformace přesněji. Můžeme tedy odstoupit od požadavků malých deformací studované konstrukce. Využití těchto vztahů vede na řešení soustavy nelineárních rovnic. Takovým úlohám se říká geometricky nelineární.

Případ, že deformace konstrukce jsou ve srovnání s jejími rozměry nezanedbatelné, je výjimečný případ, kterému by se projektant měl u obvyklých konstrukcí vyhnout. Případ, kdy jsou velká jak posunutí a pootočení, tak i poměrné deformace je u stavebních konstrukcí velmi neobvyklý. Vyskytuje se spíše v některých speciálních úlohách hornické mechaniky či ve strojírenství.

Při řešení geometricky nelineárních úloh metodou konečných prvků se využívá soustava rovnic ve tvaru:

$$(K + K_G)r = F, \tag{2.65}$$

kde matice K_G obsahuje členy vzniklé z „nelineárních“ prvků a označuje se jako „matice počátečních napětí“, „geometrická matice“, či „stabilitní matice“. Závisí na aktuální napjatosti, nelze ji tedy stanovit předem. Tuto rovnici můžeme využít při řešení úloh lineární stability. Použitím matice K_G zajistíme zahrnutí vlivu deformace konstrukce do výpočtu. Jedná se tedy o obdobu Eulerova řešení na prutu. Cílem je najít kritické zatížení pro ztrátu stability:

$$(K + \lambda K_G)r = 0, \tag{2.66}$$

což je jistá analogie s $M = Fu$ z Eulerova řešení. Problém $(K + \lambda K_G)r = 0$ je úloha o vlastních číslech matice, λ je potom násobitel kritického zatížení.

3.3.2 Kinematická metoda teorie plasticity

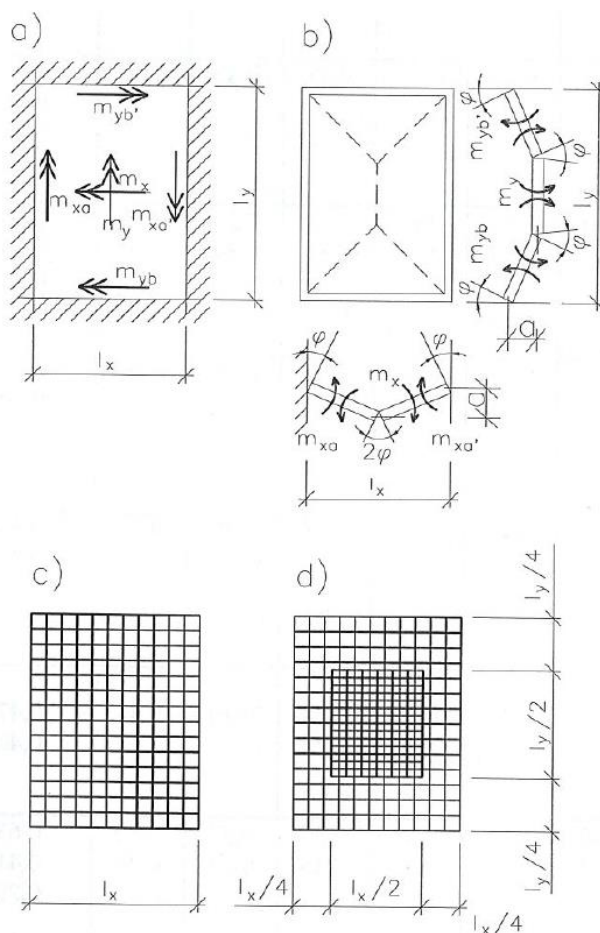
Při kinematickém řešení se provádí rozbor kinematicky přípustných mechanismů a hledá se nejmenší hodnota zatížení $P_k \geq P_m$ (P_m je mezní hodnota zatížení), při němž se v žádném průřezu nepřekročí velikost mezního ohybového momentu. Kinematický přípustný mechanismus, vyvolaný zatížením P_k , musí obsahovat takový počet plastických kloubů, aby byl umožněn virtuální pohyb celé konstrukce nebo její části. Virtuální práce vnějších sil musí být kladná. Při kinematickém řešení se výpočtem přibližujeme skutečné hodnotě mezního zatížení „shora“, přičemž se stanoví horní mez únosnosti konstrukce. [13]

3.3.2.1 Metoda lomových čar

Následující text je čerpán ze zdroje [19].

V mezním stavu únosnosti železobetonové stropní desky lze uvažovat vznik plastických kloubů. Místa s plastickými klouby se zobrazují lomovými čarami. V deskách s plastickými klouby dochází k výrazné redistribuci ohybových momentů a kritické zatížení tak může být výrazně vyšší nežli při uvážení pružného chování konstrukce.

V mezním stavu se uvažuje deska rozdělená na jednotlivé tuhé části, které jsou spojeny v lomových čarách plastickými klouby. Hodnota návrhového momentu závisí na ploše tahové výztuže. U obdélníkové desky upnuté po obvodě označíme momenty únosnosti v poli m_x a m_y a ve vetknutí po obvodě m_{xa} , m_{xa}' a m_{yb} , m_{yb}' .



Obrázek 35 Lomové čáry na obdélníkové desce upnuté po obvodě [19]

Při vyšetřování se předpokládá, že práce sil vnějších (zatížení) je rovna práci sil vnitřních (momentů). Pro desku na obrázku musí při rovnoměrném rozložení výztuže při spodním povrchu (obr. 35 c)) platit:

$$\frac{(g_d + q_d) * a * l_x * (3l_y - l_x)}{6} = (2\varphi m_x + \varphi m_{xa} + \varphi m_{xa}')l_y + (2\varphi m_y + \varphi m_{yb} + \varphi m_{yb}')l_x,$$

dosadíme-li $\varphi \cong tg\varphi = \frac{2a}{l_x}$, dostaneme:

$$\frac{(g_d + q_d)l_x^2 * (3l_y - l_x)}{12} = (2m_x + m_{xa} + m'_{xa})l_y + (2m_y + m_{yb} + m'_{yb})l_x.$$

Při zeslabení výztuže při spodním povrchu u podpor v pásmu $l_x/4$ na polovinu (obr. 35 d)) musí platit:

$$\frac{(g_d + q_d)l_x^2 * (3l_y - l_y)}{12} = (2m_x + m_{xa} + m'_{xb})l_y + \left(\frac{3}{2}m_y - \frac{1}{2}m_x + m_{yb} + m'_{yb}\right)l_x.$$

V rovnici se vyskytuje šest momentů. Máme-li navrhnout výztuž, zavedeme poměry momentů v mezích doporučených v tabulce. Dále volíme poměry mezi podporovými momenty a momenty v poli. Dostaneme rovnici pro moment m_x . Na základě zvolených poměrů pak určíme i ostatní momenty.

Tabulka 1 Doporučený poměr m_y/m_x pro desky po obvodě nepoddajně podepřené

l_y/l_x		1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
m_y/m_x	od	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4	0,35	0,20
	do	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,2	0,15

U oboustranně vetknutých desek je optimální poměr mezi momentem nad podporou a momentem v poli kolem 2,0. Změna tohoto poměru v poměrně širokém rozmezí má za následek pouze malou změnu spotřeby oceli. Nedoporučuje se volit tento poměr menší než 1,7 a ne větší než 2,5.

Optimální poměr mezi momenty m_y a m_x je větší než odpovídá teorii pružnosti. Optimální mezní momenty v delším směru jsou velmi malé a je obvykle nutno se zřetelem na určité minimální vyztužení desky volit hodnoty větší než optimální. Aby bylo možné dimenzovat konstrukci na momenty stanovené s využitím plasticity, je nutné zajistit dostatečnou duktilitu konstrukce, zejména v průřezích předpokládaných plastických kloubů. Početní průkaz schopnosti pootáčení průřezů v plastických oblastech podle ČSN EN 1992-1-1 není nutno provádět, pokud je použita vyztuž s vysokou tažností (tř. B, C). V kritických průřezích (plastických kloubech) je nutno dodržet poměr výšky tlačené části průřezu x ke staticky účinné výšce d $\xi = \frac{x}{d} \leq 0,25$ a poměr extrémního momentu v poli a podporového momentu v rozmezí 0,5 až 2,0.

Podobně lze postupovat i při jiných způsobech podepření. U jednostranně vetknuté desky se obvykle volí poměr mezi momentem ve vetknutí a v poli hodnotou 1,7 až 1,8. Nutná plocha výztuže je poměrně málo citlivá na zvolený poměr momentů. Obrazce lomových čar při jiných způsobech uložení jsou uvedeny v četné literatuře (např. [31]).

4 Metody dimenzování výztuže

Kromě výpočtu vnitřních sil lze výpočtem navrhnout přímo i výztuž. Problematika dimenzování výztuže je řešena už poměrně dlouho. Nejpoužívanější metody se začaly rozvíjet v 60. a 70. letech minulého století. K těmto metodám patří metoda Baumannova, metoda Wood-Armerova, metoda Capra Maury a v neposlední řadě metoda dle EN-1992-2. Tato metoda dle EC je prakticky totožná s metodou Baumanna, proto zde nebude více rozebírána. Baumannova metoda dělí síly na dvě ohybové zóny, jedna leží v horní a druhá ve spodní části desky. Tyto zóny jsou následně navrženy za použití reálného směru vyztužení. Na použití ramene vnitřních sil se využijí 4 jednoosé návrhy pro směry hlavní normálové síly a hlavního ohybového momentu. Poté jsou síly transformovány na vrchní a spodní zónu. a navrženy dle Baumanna se zahrnutím „tlačené vzpěry“. [24]

4.1 Baumannova metoda

Následující kapitoly jsou čerpány ze zdroje [20].

4.1.1 Souhrn

U rovinných konstrukcí ze železobetonu musí být hlavní tahová napětí přenesena sítí výztužných prutů, které se zpravidla odchyľují od hlavních směrů napětí. Předpokladem pro dimenzování takové výztužné sítě je znalost stavu vnitřních sil, který je stanoven pro dané velikosti průřezu ve stěně nebo deskovém prvku porušeném trhlinami. Stanovení tohoto stavu sil je všeobecně staticky neurčitou úlohou. Při uplatnění myšlenky, kterou poprvé představil Kupfer, lze využít principu minima deformačních prací. Velikost smykové síly, která má být absorbována betonem, se stanoví podobným způsobem. Kromě tuhosti výztuže a betonu se bere v úvahu také tzv. hmoždinkový efekt a účinek zaklínění zrn kameniva. Teoretické přístupy jsou porovnány s výsledky experimentů provedených Lenschowem a Peterem na deskách a stěnách ze železobetonu. Nejprve však budou popsány výsledky, které vyvstanou pro praktické dimenzování ortogonálních sítí v libovolném směru.

4.1.2 Názvosloví

Názvosloví a značení je převzato z původního Baumannova článku a je mnohdy odlišné od současných zvyklostí. Důvodem je snaha zachovat pochopitelnost převzatých schémat z původního Baumannova článku.

d	Tloušťka desky
h_x, h_y, h_z	staticky účinné výšky vyztužených desek
z_x, z_y, z_z	délka ramen vnitřních sil vyztužených desek
h_m	$= (h_x+h_y)/2$
z_m	$= (z_x+z_y)/2$

Síly na jednotku délky:

$N_1, N_2 = k \cdot N_1$	Hlavní tahové síly působící na vyšetřovaný deskový (stěnový) element (při kladných tahových silách), ve kterém: $N_1 > N_2$; $N_1 > 0$; $N_2 \neq 0$
Z_x, Z_y, Z_z	Tahové síly ve výztuži (x), (y), (z), při kladných tahových silách
D_b	Tlaková síla v betonu, působící rovnoběžně s trhlinami, při kladných tlakových silách
H	Smyková síla, která má být absorbována betonem, která musí být přenesena trhlinou prostřednictvím hmoždinkového efektu a tření v trhlině.

Momenty na jednotku délky:

$M_1, M_2 = k \cdot M_1$	Hlavní momenty na vyšetřovaném prvku desky, ve kterém $ M_1 > M_2 $; $M_1 > 0$; $M_2 \neq 0$
--------------------------	---

Ocelové profily na jednotku délky kolmo na příslušný směr výztuže:

f_x, f_y, f_z	plochy výztuže ve směrech výztuže (x), (y), (z)
f_1	$= N_1 / f_{yd}$; průřezová plocha výztuže potřebná pro směr vyztužení ve směru hlavní síly N_1

Napětí:

$\sigma_1, \sigma_2 = k \cdot \sigma_1$	Větší a menší hlavní napětí působící na vyšetřovaný prvek stěny
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Napětí ve výztuži v jednotlivých směrech (x), (y), (z)
σ_b	Tlakové napětí v betonu působící paralelně s trhlinami
τ	Smykové napětí, které má být absorbováno betonem
σ_1	Hlavní tahové napětí vyplývající ze σ_b a τ v betonových pásech vymezených sousedními trhlinami

Úhel:

α, β, γ	Úhel mezi výztužnými pruty ve směru (x), (y), (z) a směrem většího tahového napětí N_1
φ	Úhel mezi výztuží ve směru (y) a předpokládaným směrem vzniku trhlin
φ_1	Směr trhlin, za předpokladu elastického namáhání výztuže
φ_2	Směr trhliny, za předpokladu plastického namáhání výztuže

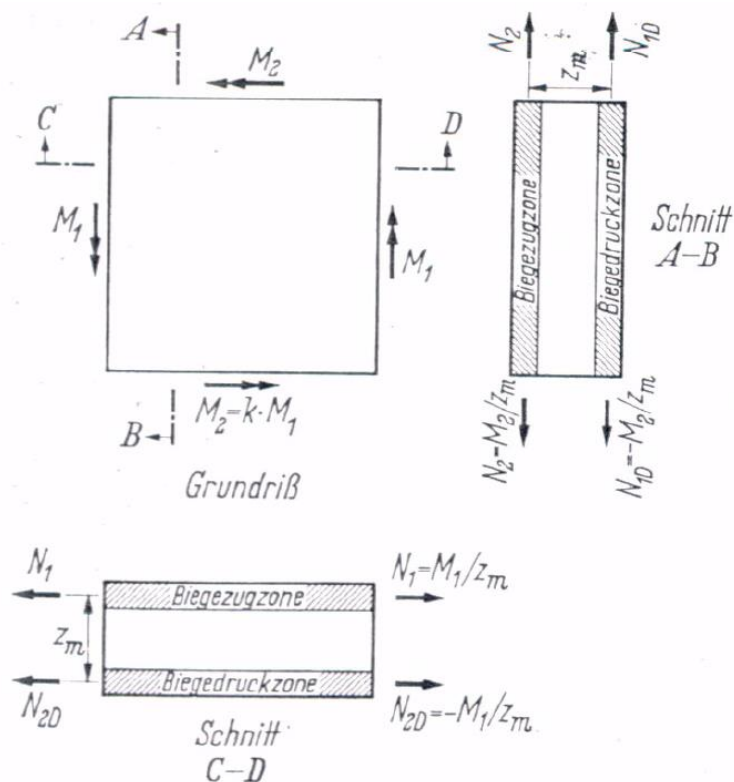
4.1.3 Praktické dimenzování výztuže

4.1.3.1 Všeobecně

Výztuž rovinných konstrukcí je třeba dimenzovat tak, aby při návrhovém zatížení nedošlo k překročení přípustného napětí v oceli f_{yd} . Při návrhu železobetonových konstrukcí zanedbáváme tahová napětí v betonu, mimo jiné, protože nesilová zatížení, například smršťování nebo teplotní namáhání, mohou způsobit lokální trhliny v libovolném směru a tahovou únosnost betonu tak nelze zaručit. Tahové síly musí přenést výztuž. Naopak v případě smykových napětí předpokládáme přenos betonem a při návrhu výztuže je zanedbáváme.

Pro účel dalšího výkladu definujeme pojem „ohybová zóna“. Jedná se o idealizované oblasti na okrajích betonového průřezu přenášející tahovou či tlakovou sílu vznikající při ohybu železobetonového průřezu, viz obrázek níže.

Vnitřní síly přenesené ohybovou zónou jsou popsány níže hlavními tahovými silami N_1 a $N_2 = k \cdot N_1 \leq N_1$. Ohybové napětí deskového prvku v důsledku hlavních momentů M_1 a $M_2 = k \cdot M_1$ může být zastoupeno normálovými silami $N_1 = M_1/z_m$, $N_2 = M_2/z_m$ v ohybové tahové zóně a $N_{1,D} = -M_2/z_m$, $N_{2,D} = -M_1/z_m$ v ohybové tlakové zóně, jak je znázorněno na obrázku.



Obrázek 36 Působení vnitřních sil a znázornění ohybových zón [20]. Příklad: Biegedruckzone – ohybová tlaková zóna; Biegezugzone – ohybová tahová zóna; Schnitt – řez.

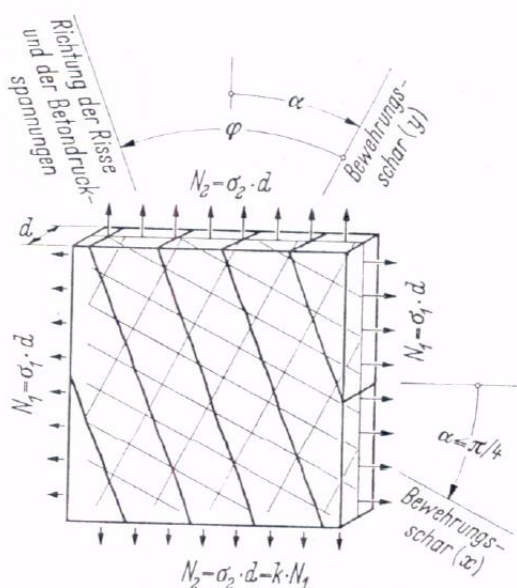
Moment M_1 by měl být vždy kladný a měl by mít větší hodnotu. Moment M_2 může být kladný i záporný. V případě desek platí: $-1 \leq k \leq +1$. Díky kladným momentům M_1 a M_2 jsou v ohybové tahové zóně generována tahová napětí, v ohybové tlakové zóně jsou generována napětí tlaková. Pro záporné hodnoty momentu M_2 ($k < 0$) je i v ohybové tlakové zóně potřeba tahová výztuž.

Vnitřní síly rovinných konstrukcí se obecně počítají podle elastické teorie s tuhostí odpovídající stavu před vznikem trhlin. Aby se zabránilo větším přeskupením vnitřních sil po vzniku trhlin, je nutné dodržet konstrukční zásady pro vyztužení ohýbaných prvků.

Pokud je splněna tato podmínka, výztuž je dimenzována podle následujících vztahů a může se odchýlit od hlavních směrů napětí až o 45 °.

4.1.3.2 Ortogonální výztuž

Na obrázku 37 je vidět potrháný stěnový prvek s ortogonální výztuží. Jsou stanoveny hlavní tahové síly N_1 , $N_2 = k \cdot N_1$. Směrovou odchylku výztuže od hlavních směrů napětí, kterou popisuje úhel α , lze zvolit libovolně. Označení výztuže v jednotlivých směrech (x), (y) by mělo být provedeno tak, aby úhel mezi směry (x), (y) a směrem hlavní síly N_1 byl $\alpha \leq 45^\circ$. Pokud je to nutné, je možné úhly oproti obrázku otočit. Hledáme tahové síly Z_x a Z_y v obou směrech výztuže a tlakovou sílu v betonu D_b .



Obrázek 37 Vnitřní síly, ortogonální výztuž a trhliny na ohybové zóně [20]. Překlad: Richtung der Risse und der Betondruckspannungen – Směr trhlin a tlakového napětí betonu; Bewehrungsschar – Směr výztuže

Při zanedbání tahových sil v betonu jsou hledané síly výsledkem rovnovážných podmínek v závislosti na předpokládaném směru trhlin φ a směru tlakových napětí v betonu. V závislosti na velikosti $k = N_2/N_1$ nabyde součet tahových sil, které mají být pokryty výztuží, a průřezová plocha výztuže, která je k tomu potřebná, minima pro $\varphi = 45^\circ$ nebo pro $\varphi = \varphi_{0y}$. Příslušné síly ve výztuži a betonu jsou stanovené následujícími rovnicemi:

Pro $k = N_2/N_1 \geq -\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ) \cdot \operatorname{tg}\alpha$:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \begin{cases} Z_x = N_1 + \frac{N_1 - N_2}{2} * \sin(2\alpha) * (1 - \operatorname{tg}(\alpha)) \\ Z_y = N_2 + \frac{N_1 - N_2}{2} * \sin(2\alpha) * (1 + \operatorname{tg}(\alpha)) \\ D_b = (N_1 - N_2) * \sin(2\alpha) \end{cases} \quad (3.01)$$

Pro $k = N_2/N_1 < -\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ) \cdot \operatorname{tg}\alpha$:

$$\varphi = \varphi_{0y} \left\{ \begin{array}{l} Z_x = \frac{N_2}{\sin^2 \alpha + k \cdot \cos^2 \alpha} \\ Z_y = 0 \\ D_b = (N_1 - N_2) \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(2\varphi_{0y})} \end{array} \right\}, \quad (3.02)$$

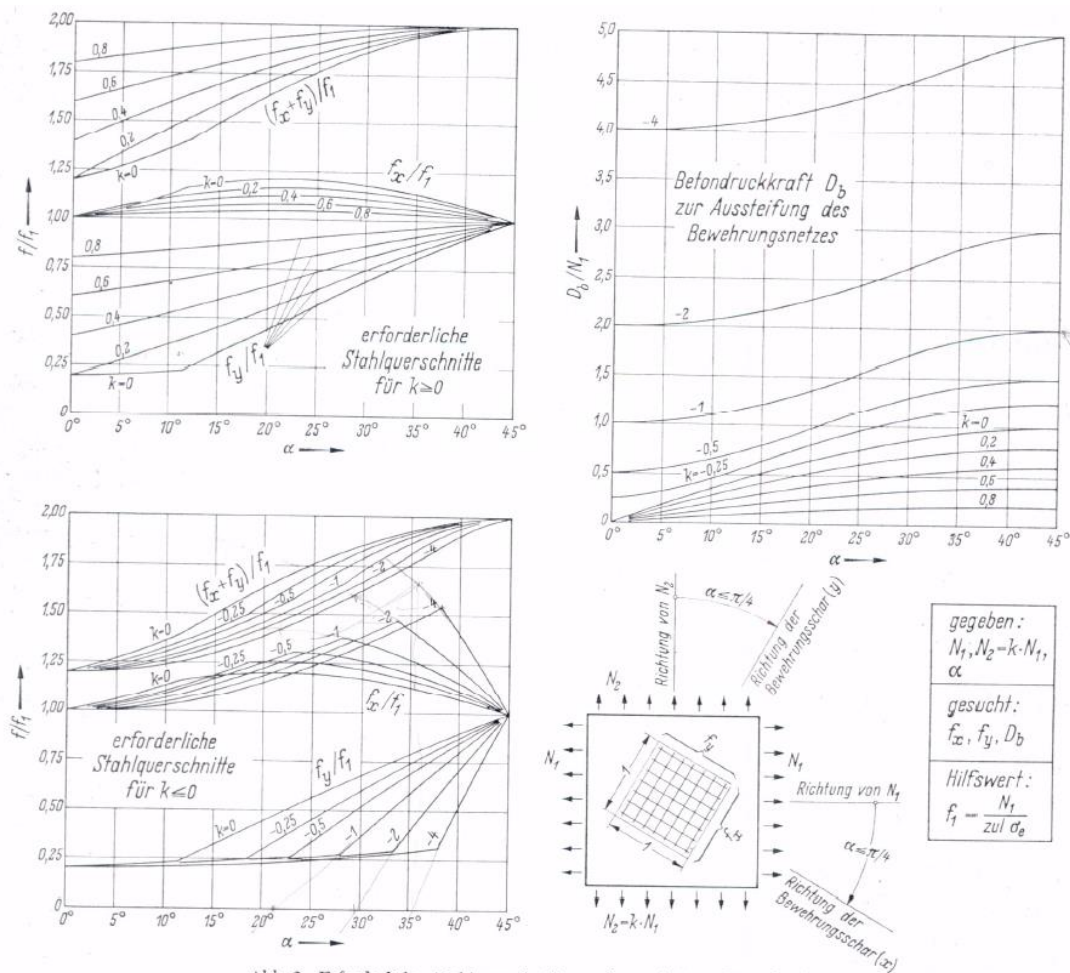
$$\text{kde } \cotg \varphi_{0y} = \frac{\text{tg} \alpha + k \cdot \cotg \alpha}{k-1}.$$

Rovnici, která platí pro všechny hodnoty k :

$$Z_x + Z_y = N_1 + N_2 + D_b, \quad (3.03)$$

můžeme použít ke kontrole výpočtu.

Požadované plochy výztuže se získají ze sil Z_x a Z_y určených podle předchozích rovnic. Pro $f_x = Z_x/f_{yd}$ a pro $f_y = Z_y/f_{yd}$. Aby byly splněny podmínky kompatibility, musí být v obou směrech použita výztuž se stejnou pevností f_{yd} .



Obrázek 38 Požadovaná plocha výztuže a tlaková síla v betonu pro ortogonální vyztužení [20]. Příklad: erforderliche Stahlquerschnitte – Požadovaná plocha výztuže; Betondruckkraft zur Aussteifung des Bewehrungsnetzes – Tlaková síla v betonu; gegeben – Dáno; gesucht – hledané; Hilfswert – pomůcka

Na obr.38 je vidět grafické znázornění vztahů mezi potřebnými plochami výztuže a tlakovou silou v betonu pro ortogonální způsob vyztužení. Jsou zde vyneseny požadované plochy výztuže jako funkce $k = N_2/N_1$ a α . Jsou uvedeny relativně vzhledem k ploše výztuže

$f_1 = N_1/f_{yd}$ požadované pro hlavní směr $\alpha = 0$. Je také uvedena příslušná tlaková síla betonu. Pro $k \leq 0$ a malý úhel α bude graf od rovnice mírně odchýlen. Je vybráno $\varphi < \varphi_{0y}$ tak, aby poměr f_y/f_x staticky požadovaných ploch výztuže nebyl menší než 0,2.

Ohybová výztuž desky se při výpočtu pomocí grafů získá ze vztahů:

$$f_x = \frac{M_1}{z_x * f_{yd}} * \frac{f_x}{f_1}, \quad f_y = \frac{M_1}{z_y * f_{yd}} * \frac{f_y}{f_1}. \quad (3.04)$$

Poměr mezi rameny vnitřních sil a staticky účinnými výškami ($\frac{z_x}{h_x} \approx \frac{z_y}{h_y} \approx \frac{z_m}{h_m}$) lze předpokládat mezi 0,8 a 0,9. Odolnost proti porušení tlakové zóny v ohybu je dostatečná, pokud je splněna podmínka $k_h \geq \bar{k}_h$. Hodnoty \bar{k}_h jsou v následující tabulce dané jako funkce z_m/h_m , f_{yd} a pevnostní třídy betonu.

Tabulka 2 Tabulka hodnot \bar{k}_h , používaná dříve v Německu

Tabelle 1. Werte \bar{k}_h

	$z_x/h_x = z_y/h_y$ $= z_m/h_m$	zul σ_e [kp/cm ²]	\bar{k}_h für			
			Bn 250	Bn 350	Bn 450	Bn 550
Für $k = M_2/M_1 \geq 0$ $k_h = h_m/\sqrt{M_1}$ 1)	$\leq 0,8$	2400	5,7	5,0	4,6	4,4
		2800	5,9	5,2	4,8	4,5
$\max \sigma_{bu} \leq \beta_R$	$\leq 0,9$	2400	8,4	7,3	6,7	6,4
		2800	8,1	7,1	6,5	6,2
Für $M_2/M_1 < 0$ $k_h = h_m/\sqrt{M_1 - M_2}$ 1)	$\leq 0,8$	2400	6,4	5,6	5,2	4,9
		2800	6,6	5,8	5,3	5,0
$\max \sigma_{bu} \leq 0,8 \beta_R$	$\leq 0,9$	2400	9,4	8,2	7,6	7,5
		2800	9,1	7,9	7,3	6,9

1) h_m in cm; M_1 und M_2 in Mpm/m.

Pro $k = M_2/M_1 \geq 0$ je $k_h = \frac{h_m}{\sqrt{M_1}}$, pro $k < 0$ je naproti tomu $k_h = \frac{h_m}{\sqrt{M_1 - M_2}}$. Pro $k < 0$ musí ohybová tlaková zóna kromě síly M_1/z_m přenést další tlakovou sílu – maximálně M_2/z_m , která představuje tlakové namáhání zóny ve druhém hlavním směru.

4.1.3.3 Vyztužení ve dvou nebo třech směrech s obecnou orientací

Vnitřní síly N_1 , N_2 působící na ohybové zóny mohou být přenášeny třemi libovolně orientovanými směry, pokud jsou zanedbána tahová napětí v betonu. V případě dvousměrné výztuže jsou pro rovnováhu potřebné tahové síly ve dvou směrech výztuže a tlaková síla v tláčeném betonu. Pro $k > 0$ může být tlaková síla v betonu také nahrazena třetím směrem výztuže, pokud jsou vhodně zvoleny směry výztuže. Získáváme tímto třísměrnou výztužnou síť.

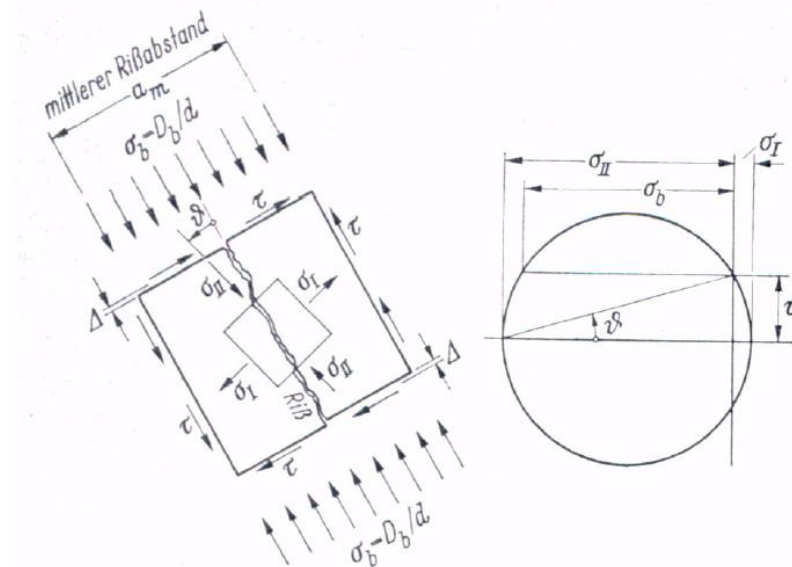
Tento speciální případ v bakalářské práci nebude blíže rozebírán, lze jej podrobněji nastudovat v původní Baumannově práci.

4.1.4 Únosnost ortogonální výztuže

4.1.4.1 Účinek smykových sil v betonu

V místě potrhání prvku může beton zpočátku přenášet tlaková napětí $\sigma_b = D_b/d$ působící paralelně s trhlinami (obr. 39). Tlaková napětí lze nahradit smykovými napětími $\tau = H/d$, která musí být přenesena přes trhlinu hmoždinkovým účinkem výztuže a třením v trhlíně. To zahrnuje vzájemné souběžné posunutí povrchu trhlín o hodnotu Δ . Předpokládá se přitom, že trhliny se opakují v rozteči a_m . Pro popis vztahu mezi τ a Δ je zaveden smykový modul E_v , který je definován takovým způsobem, že pro střední úhel smykové deformace platí:

$$\frac{\Delta}{a_m} = \frac{\tau}{E_v}. \quad (3.05)$$

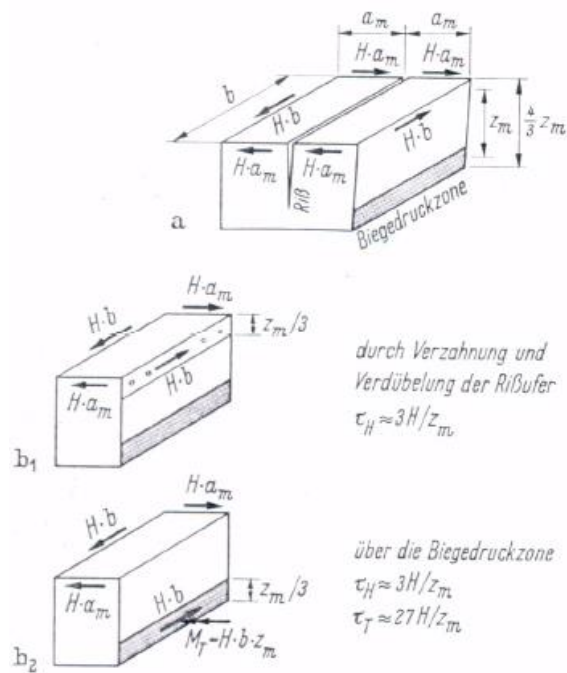


Obrázek 39 Možná napětí v betonu porušené ohybové zóny a související Mohrova napěťová kružnice [20]. Překlad: Mittlerer Rissabstand – střední rozteč trhlín; Riss – Trhlina

Na obrázku jsou vyznačena možná napětí v betonu potrháné ohybové zóny a související Mohrova kružnice napětí.

Možná velikost E_v bude řešena dále v textu. Superpozice smykového napětí τ s tlakovým napětím σ_b vždy vede k tomu, že hlavní tahové napětí σ_1 bude absorbováno betonem, jak je znázorněno na obrázku výše.

Pokud se berou v úvahu smykové síly H v ohybové tahové zóně desky narušené trhlinami (obr. 40, část A), lze je přenášet ohybovou trhlinou prostřednictvím hmoždinkového účinku a tření mezi povrchy trhlíny. Tření může vznikát též v důsledku kroucení, kdy se pak krouticí moment dá stanovit jako $\frac{M_T}{b} = H * z_m$.



Obrázek 40 Možný přenos smykových sil ohybovými trhlinami v desce [20]. Příklad: durch Verzahnung und Verdübelung der Rißufer – Prostřednictvím hmoždinkového efektu a třením v trhlině; über die Biegedruckzone – Nad ohybovou zónou tlakovou

Druhý způsob vyžaduje kromě existence smykových napětí τ_H způsobených H také relativně velká torzní napětí τ_T v ohybové tlakové zóně, což může značně snížit torzní tuhost ohybové tlakové zóny tvorbou mikrotrhlin. Smyková síla H je poté primárně přenášena způsobem uvedeným na obr. B1, což odpovídá smykovému namáhání betonu zobrazeného na obrázku předchozím.

4.1.4.2 Rovnováha mezi vnitřními silami v průřezu a silami ve výztuži a betonu

V případě prvku s trhlinami s danými vnitřními silami jsou tři rovnovážné podmínky na 5 neznámých, konkrétně tahová síly ve výztuži (Z_x, Z_y), tlakové a smykové síly v betonu (D_b, H), směr trhlin a tlakové síly v betonu (φ). V následujícím textu jsou φ a H vybrány jako staticky neurčité. Pokud nejsou zohledněna tahová napětí v betonu porušeném trhlinami ($\sigma_L=0, \tau=0, H=0$), zůstane staticky neurčitá pouze orientace trhlin (φ). Rovnováha mezi vnitřními silami působícími podél trhliny a silami ve výztuži a betonu je znázorněna na následujícím obrázku v části A. Platí rovnice:

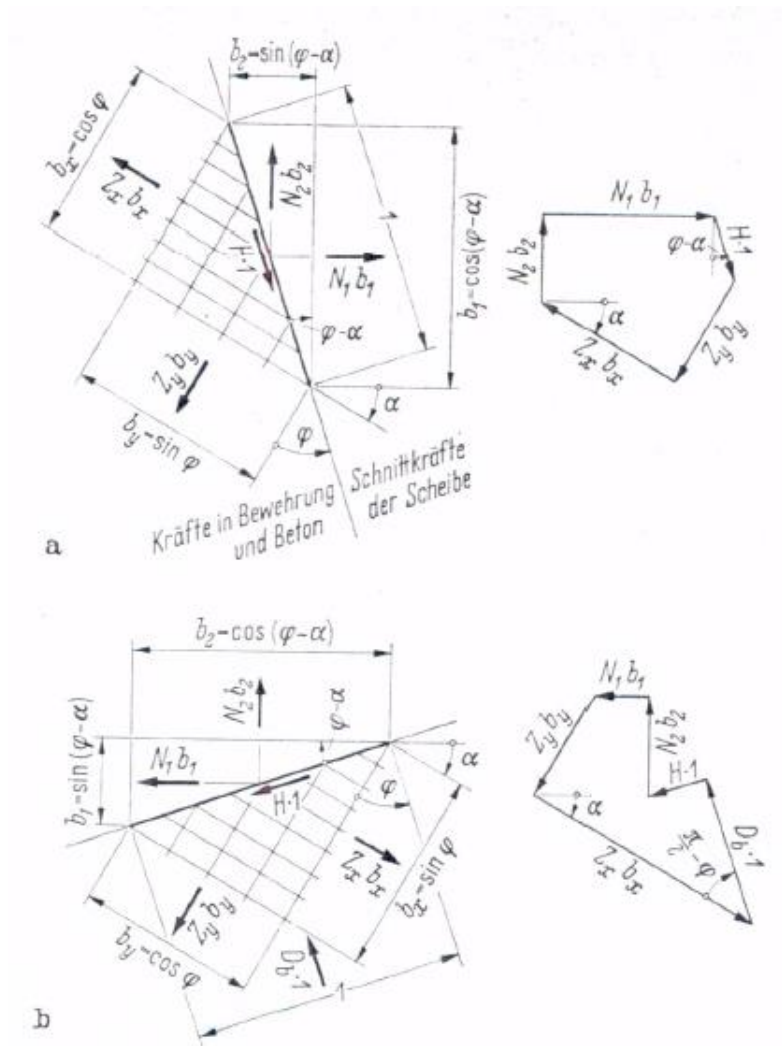
$$Z_x = N_1 * \cos^2 \alpha * (1 + \operatorname{tg} \alpha * \operatorname{tg} \varphi) + N_2 * \sin^2 \alpha * (1 - \operatorname{cotg} \alpha * \operatorname{tg} \varphi) + H * \operatorname{tg} \varphi$$

$$Z_y = N_1 * \sin^2 \alpha * (1 + \operatorname{cotg} \alpha * \operatorname{cotg} \varphi) + N_2 * \cos^2 \alpha * (1 - \operatorname{tg} \alpha * \operatorname{cotg} \varphi) + H * \operatorname{cotg} \varphi.$$

(3.06)

Rovnováha v řezu kolmém na trhlinu vyplývá z následujícího obrázku v části B, zároveň platí:

$$D_b = (N_1 - N_2) * \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\varphi} - 2 * H * \operatorname{cotg} 2\varphi. \quad (3.07)$$



Obrázek 41 Rovnováha mezi vnitřními silami ohybové zóny a silami ve výztuži a betonu pro ortogonální výztuž [20]. Příklad: Kräfte in Bewehrung und Beton – Síly ve výztuži a betonu; Schnittkräfte der Scheibe – Vnitřní síly ohybové zóny

4.1.4.3 Podmínky rovnováhy pro výztuž s elastickým přetvořením a beton

Při stanovení podmínek rovnováhy se bere v úvahu protažení obou směrů výztuže $\epsilon_x = \sigma_x/E_e$ a $\epsilon_y = \sigma_y/E_e$, stlačení betonu $\epsilon_b = \sigma_b/E_b$ a vzájemné paralelní posunutí povrchů trhlín na základě průměrné vzdálenosti trhlín $\frac{\Delta}{a_m} = \frac{\tau}{E_v}$. Deformace v kotevních oblastech výztuže v ohybové zóně, možné snížení napětí v oceli procházející trhlinou v důsledku zbytkové soudržnosti mezi povrchy trhliny a příčná deformace tlačného betonu jsou zanedbány, protože se předpokládá výrazný rozvoj trhlín před dosažením mezní únosnosti. Deformace v důsledku protažení výztuže, vzájemného paralelního posunutí povrchů trhlín a stlačení betonu rovnoběžně s trhlinami pak převažují nad ostatními složkami deformace. S hodnotami poměrů:

$$\lambda = \frac{f_x}{f_y}; \nu = \frac{f_x \cdot E_e}{d \cdot E_b}; \kappa = \frac{f_x \cdot E_e}{d \cdot E_v} \quad (3.08)$$

je práce na změně tvaru prováděná vnitřními silami ve výztuži a betonu pro část panelu o tloušťce d a ploše l :

$$A = \frac{Z_x^2 + \lambda * Z_y^2 + v * D_b^2 + \kappa * H^2}{2 * E_e * f_x} \quad (3.09)$$

Pro daný směr trhlin φ lze nyní z podmínky určit statickou neurčitou smykovou sílu H tak, aby deformační práce A byla minimální. Platí tedy:

$$\frac{\partial A}{\partial H} = 0. \quad (3.10)$$

Vložení hodnot Z_x , Z_y , D_b a jejich derivací podle H do rovnice

$$2Z_x * \frac{\partial Z_x}{\partial H} + \lambda * 2Z_y * \frac{\partial Z_y}{\partial H} + v * 2D_b * \frac{\partial D_b}{\partial H} + \kappa * 2H = 0 \quad (3.11)$$

dostáváme

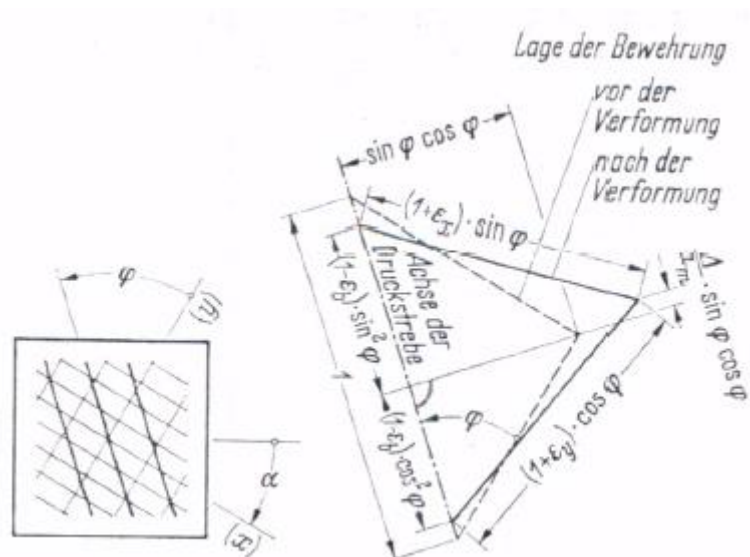
$$H = N_1 * \frac{\lambda * \cotg\varphi * [\sin^2\alpha * (1 + \cotg\alpha * \cotg\varphi) + k * \cos^2\alpha * (1 - \tg\alpha * \cotg\varphi)] - \tg\varphi * [\cos^2\alpha * (1 + \tg\alpha * \tg\varphi) + k * \sin^2\alpha * (1 - \cotg\alpha * \tg\varphi) + v * 2 * \cotg2\varphi * (1 - k) * \frac{\sin2\alpha}{\sin2\varphi}}{\tg^2\varphi + \lambda * \cotg^2\varphi + v * 4 * \cotg^22\varphi + \kappa}. \quad (3.12)$$

Rozložení podle $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \lambda * \frac{Z_y}{Z_x}$ pak přináší:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \tg^2\varphi * \left[1 + \kappa * \frac{H}{Z_x} * \cotg\varphi + v * \frac{D_b}{Z_x} * (1 - \cotg^2\varphi) \right]. \quad (3.13)$$

Tato rovnice rovněž vyplývá přímo z deformací v trhlíně podle obrázku dále, s přihlédnutím k následujícím vztahům:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} &= \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \\ \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_b} &= \frac{Z_x}{v * D_b}, \\ \frac{\frac{\Delta}{a_m}}{\varepsilon_x} &= \frac{\frac{H}{d} * \frac{1}{E_v}}{\frac{Z_x}{f_x * E_e}} = \frac{H}{Z_x} * \kappa. \end{aligned} \quad (3.14)$$



Obrázek 42 Kompatibilita mezi deformacemi ϵ_x , ϵ_y , ϵ_b a Δ/a_m v ortogonální výztuži [20]. Překlad: Lage der Bewehrung – Poloha výztuže; vor der Verformung – před deformací; nach der Verformung – po deformaci; Achse der Druckstrebe – Osa vzpěry.

Z předchozích rovnic plyne, že velikost smyku H bude pro daný směr φ o to větší, čím menší je κ (stlačení betonu rovnoběžně s trhlinami), tj. čím větší je vliv tření na povrchu trhlin ve vztahu k tuhosti výztuže. Pokud trhliny probíhají kolmo na směr síly N_1 , získá se pro $v = \kappa = 0$ horní mezní hodnota H plynoucí z předchozích rovnic jako:

$$H = N_1 * \cotg \alpha * \frac{\lambda * \cotg^2 \alpha - 1}{1 + \lambda * \cotg^4 \alpha}. \quad (3.15)$$

Bez ohledu na velikost κ se smyková a hlavní tahová napětí absorbovaná betonem stanou nulovými, pokud trhliny probíhají v určitém směru φ . Pokud nedochází k vzájemnému paralelnímu posunu povrchů trhlin, hlavní deformace průřezu probíhá kolmo k trhlinám. Platí tedy:

$$\frac{\Delta}{a_m} = \frac{\tau}{E_v} = 0. \quad (3.16)$$

Následující rovnice určuje hodnotu φ vedoucí k $H = 0$ (tj. de facto určuje hlavní směry napětí):

$$\cotg^4 \varphi_1 + \cotg^3 \varphi_1 * \frac{\tg \alpha + k * \cotg \alpha}{1 - k} - \cotg \varphi_1 * \frac{\cotg \alpha + k * \tg \alpha}{\lambda * (1 - k)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{v}{\lambda} * (1 - \cotg^4 \varphi_1). \quad (3.17)$$

Pokud se dopředu předpokládá, že ohybové zóny nepřenáší žádné smykové nebo tahové napětí, a pokud se odpovídajícím způsobem nastaví dle dřívějších rovnic, aby $H = 0$, pak předchozí rovnice také vyplývá z podmínky $\frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0$. Pro tyto rovnice se obecně předpokládá $\varphi_1 \neq \alpha$. Při úplném zanedbání pevnosti betonu v tahu, směr tlakové síly betonu, která splňuje podmínky rovnováhy, obecně neodpovídá směru prvních trhlin probíhajících kolmo na N_1 (tj. ve směru $\varphi = \alpha$). Ve směru φ_1 proto vznikají další trhliny. Betonová tlaková síla působící paralelně s těmito trhlinami potlačuje trhliny, které se objevily jako první. Podobné jevy lze pozorovat také při smykových zkouškách na železobetonových nosnících a lze je podle Kupfera vysvětlit také na principu minima deformačních prací.

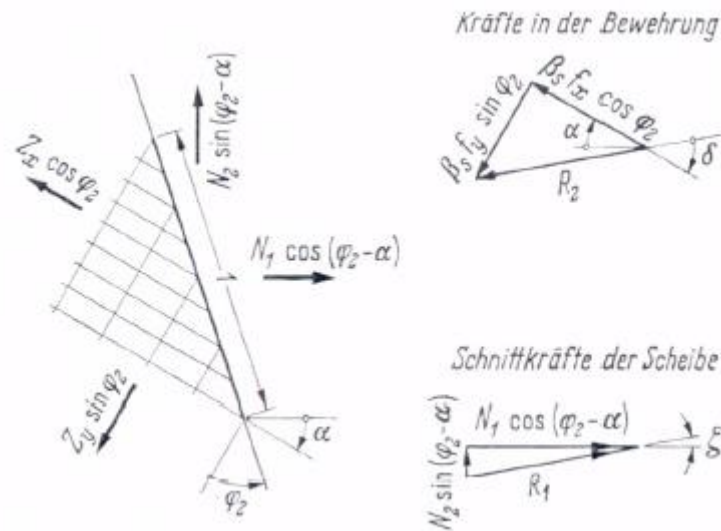
U desek je tuhost směru výztuže charakterizována nejen plochou výztuže, ale také odpovídajícím ramenem vnitřních sil. Proto se zde definuje:

$$\lambda = \frac{f_x \cdot z_x}{f_y \cdot z_y} \cong \frac{f_x \cdot h_x}{f_y \cdot h_y}. \quad (3.18)$$

Při určování hodnot poměru ν a κ lze u desek předpokládat přibližně $d \approx z_x/3$.

4.1.4.4 Směr lomových trhlin

Po dosažení meze kluzu β_s v obou směrech výztuže jsou příslušné tahové síly specifikovány pomocí $Z_x = f_x \cdot \beta_s$ a $Z_y = f_y \cdot \beta_s$. Pokud beton nepřenáší žádné tahové nebo smykové napětí, musí být směr vznikajících trhlin, označený jako φ_2 , upraven tak, aby odpovídal výslednici vnitřních sil R_1 působících podél trhliny a tahových sil ve výztuži R_2 z hlediska velikosti a směru. Tento směr je znázorněn na obrázku.



Obrázek 43 Určení směru φ_2 z podmínky, že napětí oceli v obou sadách výztuže dosáhne meze kluzu β_s a beton je vystaven pouze tlaku [20]. Příklad: Kräfte in der Bewehrung – Síly ve výztuži; Schnittkräfte der Scheibe – Vnitřní síly ohybové zóny.

Dá se popsat jako:

$$\delta - \alpha = \zeta. \quad (3.19)$$

Pomocí rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{Z_y \cdot \sin \varphi_2}{Z_x \cdot \cos \varphi_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\lambda} \\ \operatorname{tg} \zeta &= \frac{N_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \alpha)}{N_1 \cdot \cos(\varphi_2 - \alpha)} = k \cdot \operatorname{tg}(\varphi_2 - \alpha) \end{aligned} \quad (3.20)$$

se získá rovnice pro φ_2 :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -C + \sqrt{C^2 + \lambda}, \quad (3.21)$$

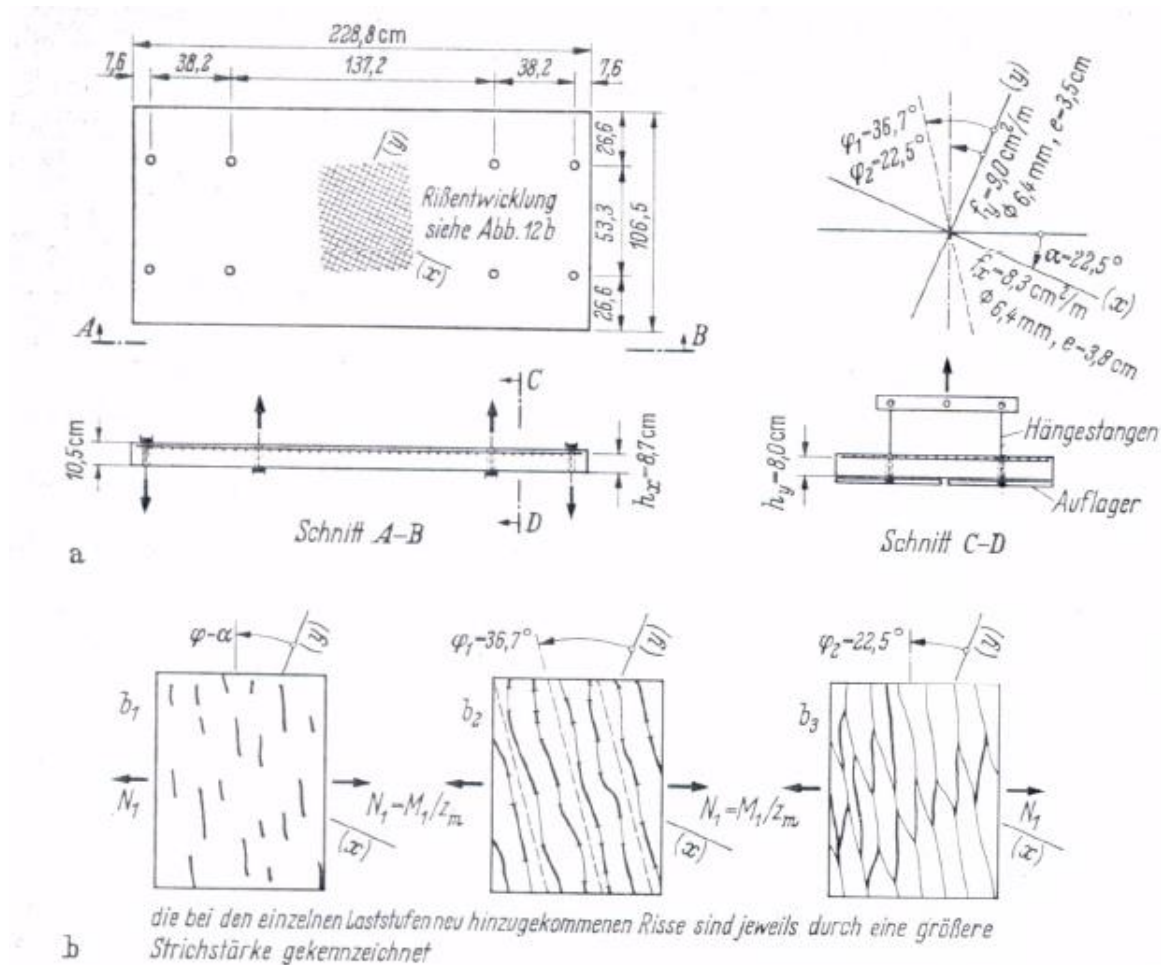
kde

$$C = \frac{1 + tg^2 \alpha * (k - \lambda) - k * \lambda}{2tg\alpha * (1 - k)} \quad (3.22)$$

Rovnice pro směr trhlin uvedené dříve jsou analogií této rovnice. Při dosazení $\lambda = 0$ dostaneme pro všechny hodnoty k $\varphi_2 = \alpha$.

4.1.4.5 Srovnání s výsledky zkoušek

Správnost svých odvozených vztahů ověřil Baumann srovnáním s několika experimenty. V prvním byl zkoumán vývoj trhlin v jednosměrně prutém panelu Lenschowem [21].



Obrázek 44 Deska B8 z práce Lenschow-Sozena [21]. Překlad: Rissentwicklung siehe Abb 12b – rozvoj trhlin na tomto obrázku; Hängestangen – závěsné tyče; Auflager – podpěra; Schnitt – řez; die bei den einzelnen laststufen neu hinzugekommenen Risse sind jeweils durch eine grössere Strichstärke gekennzeichnet – Postupně trhání je znázorněno silnější čarou

Pro tento panel je dáno zadání $k = M_2/M_1 = 0$; $\alpha = 22,5^\circ$; $\lambda = \frac{f_x * h_x}{f_y * h_y} = 1$.

První trhliny se objevují kolmo na hlavní tahová napětí ($\varphi = \alpha$, obr. 21 část b1). V případě malých šířek trhlin smykové síly působící podél trhlin v ohybové tahové zóně zhruba odpovídají hodnotě uvedené v rovnici dříve (3.15). Pokud se zatížení dále zvyšuje, vznikají trhliny ve směru $\varphi_1 = 36,7^\circ$ (obr. 21 část B2) daném rovnicí (3.17). Po dosažení meze kluzu ve

směru výztuže (x) se objeví další trhliny ve směru $\varphi_2=22,5^\circ$ (obr. č. 21 B3) daném rovnicí (3.21 a 3.22). Vypočítaný moment únosnosti:

$$M_{1U} = N_{1U} * z_m = f_x * \beta_s * z_x = f_y * \beta_s * z_y \quad (3.23)$$

pro $\lambda = 1$ a $\varphi_2 = \alpha$ odpovídá hodnotě dosažené v testu.

Pokud se ve směru φ_1 vytvořily trhliny podle (3.17) a beton již nepřenáší smykové síly, je poměr napětí ve výztuži v obou směrech:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \operatorname{tg}^2 \varphi_1, \quad (3.24)$$

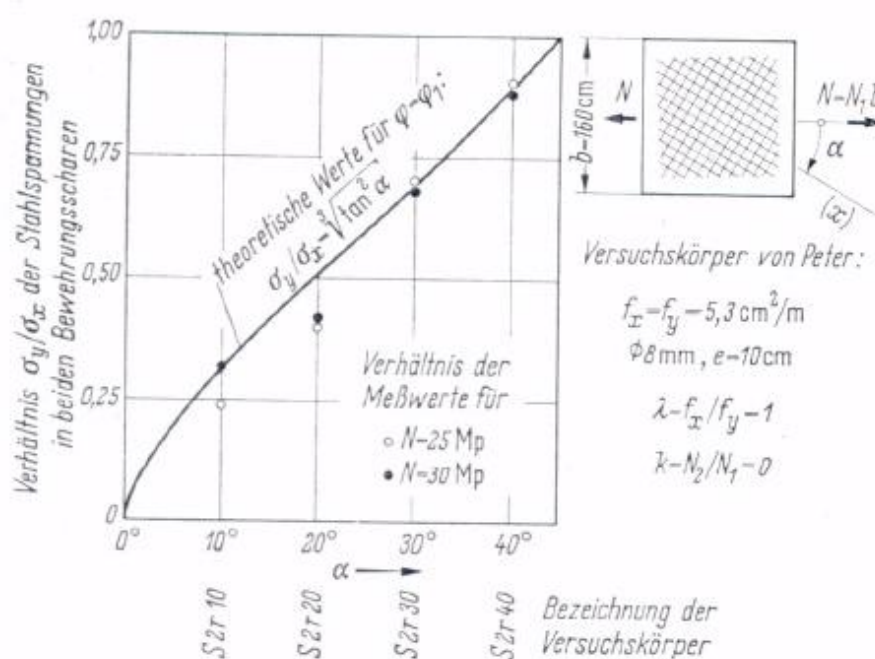
pokud je zanedbáno stlačení betonu. Pro $\lambda = f_x/f_y = 1$, $k = N_2/N_1 = 0$ a $v = 0$, vychází z (3.17)

$$\operatorname{cotg} \varphi_1 = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (3.25)$$

Tímto dostáváme

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (3.26)$$

Na následujícím obrázku jsou tyto hodnoty, které lze podle teorie očekávat, vyneseny do grafu a porovnány s poměrem napětí v oceli naměřeným Peterem [22] v první sérii testů.

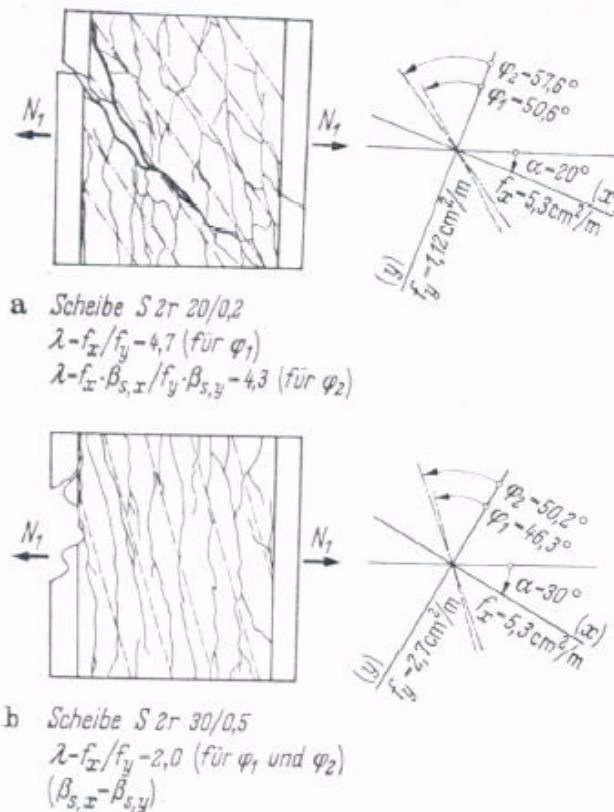


Obrázek 45 Porovnání teoreticky očekávaných hodnot σ_y/σ_x pro $\varphi = \varphi_1$ s poměrem ocelových napětí naměřených Peterem [22] v první sérii testů. Příklad: Verhältniss der Messwerte – Poměr naměřených hodnot; Versuchskörper – Testované těleso; Bezeichnung der Versuchskörper – Označení testovaného tělesa; theoretische Werte – Teoretické hodnoty; Verhältniss der Stahlspannungen – poměr napětí v oceli; in beiden Bewehrungsscharen – v obou směrech výztuže.

Jedná se o stěnové prvky, které podléhají jednoosému tahovému zatížení, ve kterých byla směrová odchylka ortogonální výztuže měněna v krocích po 10° . Shoda mezi hodnotami poměru, které lze očekávat pro $\varphi = \varphi_1$ podle rovnice, a hodnotami pozorovanými v experimentu se jeví jako dobrá. Trhliny na stěnách zkoumaných Peterem také naznačují, že

tlaková síla v betonu probíhala ve směru φ_1 (podle 3.17): kromě prvních trhlin kolmých na N_1 se trhliny vždy objevovaly ve směru φ_1 . Absolutní hodnoty největších naměřených napětí ve výztuži se pohybovaly kolem 80 % hodnot, které lze u $\varphi=\varphi_1$ očekávat, kvůli dobré vazbě použité žebírkové oceli a kvůli někdy relativně silnému přídavnému vyztužení okrajů desek. V první Peterově sérii testů lomové trhliny proběhly podle očekávání ve směru $\varphi_2=\alpha$ náležitě hodnotě $\lambda=1$.

Ve druhé sérii zkoušek, která se skládala ze dvou stěn, měla výztuž různé síly ve směrech (x) a (y). To znamená $\lambda \neq 1$ a $\varphi_2 \neq \alpha$. Na jedné ze stěn zobrazených na následujícím obr.46 (část A) probíhala lomová trhlina téměř přesně ve směru $\varphi_2 = 57,6^\circ$ označeném čerchovanými čarami. První trhliny kolmé na N_1 byly potlačeny účinkem tlakové síly vznikající v betonu při vyšších úrovních zatížení. Druhý panel obr.46 (část B) předčasně selhal na okraji v oblasti zavedení síly do konstrukce. Trhliny, které se objevily dříve, do značné míry sledovaly směr $\varphi_1 = 46,3^\circ$ a jsou znázorněny přerušovanými čarami.



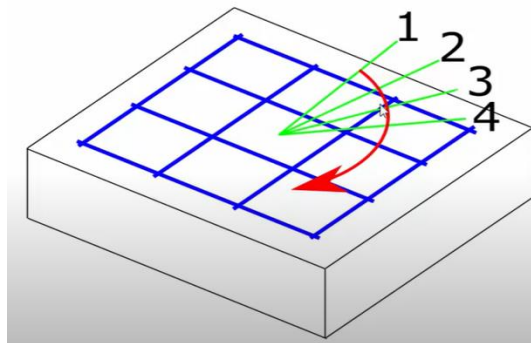
Obrázek 46 Porušení prvku v druhé sérii experimentů Petera [22]

Celkově lze ze zkoušek vyvodit, že vztahy Baumannovy teorie dobře odpovídají skutečnému chování prvků. Odpovídající trhliny probíhají v elastické oblasti výztuže ve směru φ_1 podle rovnice (3.17), ve stavu lomu ve směru φ_2 podle rovnice (3.21) a (3.22).

4.2 Metoda Capra Maury

Následující text je čerpán ze zdrojů [23], [24], [27].

Jedná se o analytickou metodu výpočtu desek a skořepin. Je založena na konceptu prezentovaném v článku od A. Capry a J-F. Mauryho s francouzským jménem „Calcul automatique du ferrailage optimal des plaques et coques en beton arme“. Metoda se využívá zejména ve Francii. Byla představena v prosinci 1978. Metoda využívá jednoosý návrh ve směrech každých 5° či 10°. Síly se transformují do jednotlivých směrů a potřebné vyztužení se také transformuje do směrů vyztužení. Má nevýhodu v tom, že nezahrnuje tlakovou vzpěru.



Obrázek 47 Metoda zkoumá různé úhly pro nejekonomičtější návrh [23]

4.2.1 Postup výpočtu

Jsou-li uvedeny hodnoty potřebných ploch výztuže A_x a A_y (odpovídající dvěma kolmým směrům x a y), můžeme vypočítat ekvivalentní výztuž v jakémkoli jiném směru (n) podle vzorce:

$$A_n = A_x * \cos^2 \alpha + A_y * \sin^2 \alpha, \quad (3.27)$$

kde α je úhel mezi směrem x a směrem n .

Hodnoty průřezových sil M_n a N_n mohou být určeny dle následujících rovnic:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x * \cos^2 \alpha + M_y * \sin^2 \alpha - M_{xy} * \sin(2\alpha), \\ N_n &= N_x * \cos^2 \alpha + N_y * \sin^2 \alpha - N_{xy} * \sin(2\alpha). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Níže uvedená nerovnice tedy uvádí podmínku správného vyztužení, aby bylo schopné přenést vnitřní síly v libovolném směru:

$$A_x * \cos^2 \alpha + A_y * \sin^2 \alpha = A_n \geq \Phi(M_n, N_n), \quad (3.29)$$

kde $\Phi(M_n, N_n)$ odkazuje na potřebné množství výztuže schopné přenést síly vypočítané pro daný směr „ n “ – M_n a N_n .

Nerovnice určuje v rovině (A_x, A_y) plochu „přípustných“ hodnot ploch výztuže A_x, A_y . Pokud je taková plocha určena pro dostatečně „hustou síť“ směrů n , získá se oblast přípustných hodnot A_x, A_y . Použije se taková plocha výztuže, která pro kterou je součet ploch $A_x + A_y$ minimální.

Metoda funguje na principu kombinace ohybu a normálového namáhání. Je možné stanovit spodní tahové síly $\phi(\alpha)$ a vrchní $\phi'(\alpha)$ kolmé k řezu, které musí být vyváženy spodní a horní vrstvou výztuže. Potřebné únosnosti ϕ'^* ve směru α obou vrstev lze získat pomocí následujících výrazů:

$$\Phi^*(\alpha) = (a_{XD} * \cos^2\alpha + a_{YD} * \sin^2\alpha) * \sigma_y \quad (3.30)$$

pro spodní vrstvu výztuže a

$$\Phi'^*(\alpha) = (a_{XH} * \cos^2\alpha + a_{YH} * \sin^2\alpha) * \sigma_y \quad (3.31)$$

pro výztuž horní, kde σ_y je maximální povolené napětí ve výztuži (stejně pro oba směry).

Únosnosti $\Phi^*(\alpha)$ a $\Phi'^*(\alpha)$ musí být větší než působící síly $\phi(\alpha)$ a $\phi'(\alpha)$. Optimální vyztužení tedy odpovídá minimu:

$$(a_{XH} + a_{YH}) \text{ pro horní vrstvu,}$$

$$(a_{XD} + a_{YD}) \text{ pro spodní vrstvu.}$$

Problém se dá řešit numericky pomocí ověření únosnosti desky v konečném množství n směrů např. každých 5° či 10° . Vypočtené hodnoty ohybového momentu se provádějí typickým způsobem a pro výpočet horní výztuže musíme vyřešit:

$$\text{minimum: } (a_{XD} + a_{YD}), \quad (3.32)$$

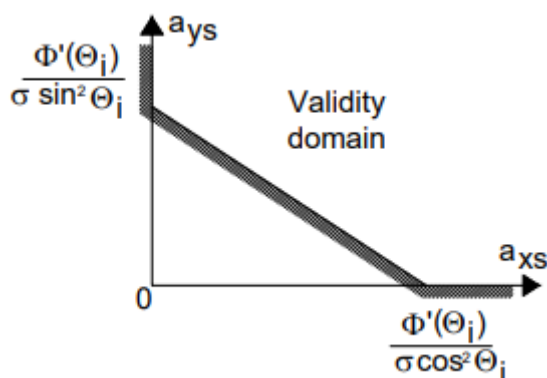
pro které platí:

$$a_{XD} * \cos\alpha + a_{YD} * \sin\alpha \geq \frac{\Phi'(\alpha_i)}{\sigma},$$

$$a_{XD} \geq 0,$$

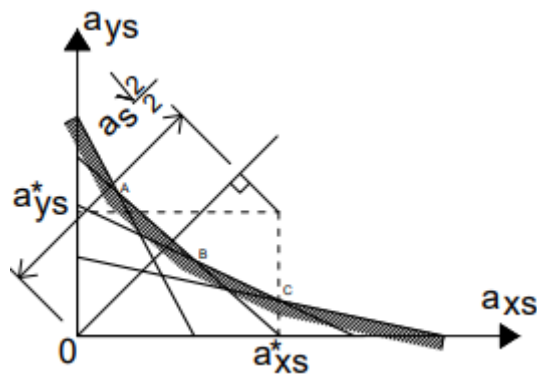
$$a_{YD} \geq 0. \quad (3.33)$$

Grafické znázornění předchozích nerovností (3.33) dává hodnoty na následujícím obrázku. Získáváme definovanou požadovanou plochu výztuží ve směrech X a Y (a_{XD} a a_{YD}), nerovnosti uvedené v rovnicích 3.33 definují poloprostor proveditelného návrhu.



Obrázek 48 Možná plocha výztuže [27]

Při zkoumání různých hodnot θ , je možné bližší stanovení hodnot:



Obrázek 49 Vhodná oblast vyztužení pro různé hodnoty θ [27]

Metoda Capra-Maury předpokládá, že stlačení betonu je přijatelné a že výztuže jsou namáhány na limitní namáhání σ_y (f_{yd}). Ověření těchto hypotéz provedením pečlivého nebo zjednodušeného výpočtu v kombinaci tlaku a ohybu je pak nezbytné. Maximální hodnota tlakových napětí v betonu je pak omezena:

$$\sigma_{c,max} = \frac{|M|}{I} y - \frac{N}{A}. \quad (3.34)$$

U příčné výztuže vychází navrhovaný výpočet z ekvivalentního smykového napětí vyjádřeného jako:

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{T_{xz}^2 + T_{yz}^2}, \quad (3.35)$$

kde T_{zx} a T_{zy} jsou smyková napětí. Tudíž část příčné výztuže se získá dělením tohoto omezení přijatelným mezním napětím v oceli f_{yd} .

Výztuž konstrukce se stanoví v závislosti na typu konstrukce z následujících vnitřních sil:

- Momenty M_n . Desková konstrukce nebo skořepinová konstrukce namáhaná výhradně ohybem.
- Normálové síly N_n . Konstrukce namáhaná rovinnou napjatostí nebo skořepinová konstrukce namáhaná normálovou silou.
- Síly M_n i N_n . Skořepinová konstrukce namáhaná kombinací normálové síly a ohybu.

Ve výpočtech jednosměrné výztuže je analytická metoda omezena na výpočet výztuže pouze pro hlavní směr výztuže. Není tedy rozdělena do „n“ směrů. Deska je tudíž navržena pouze na síly M_{xx} a N_{xx} .

4.3 Wood-Armerova metoda

Následující kapitola čerpá ze zdrojů [23], [25].

Metoda používaná zejména v Anglii. Metoda stanovuje ekvivalentní moment. Autory jsou Wood a Armer a poprvé byla představena v roce 1968 v článku od R.H. Wooda jménem

„The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments“. Využívá jednoosého návrhu ve 2 směrech. Ohybový moment m_{xx} je zvětšen o krouticí moment m_{xy} . Metoda poskytuje analogický postup i pro návrh skořepinových konstrukcí, ten však v této práci nebude rozebírán.

4.3.1 Postup výpočtu

Při výpočtu výztuže deskové konstrukce se počítají návrhové momenty podle metody Wooda a Armera. Pro vybrané směry x a y se berou v úvahu dva typy návrhových momentů M – spodní (záporné, způsobující napětí ve spodní části desky) a horní (kladné, způsobující napětí v horní části desky). Obecný postup bývá následující:

- Určení spodních momentů M_{xd}^* a M_{yd}^* :

$$\begin{aligned} M_{xd}^* &= M_x + |M_{xy}|, \\ M_{yd}^* &= M_y + |M_{xy}|. \end{aligned} \quad (3.36)$$

- Pokud však platí, že $M_x < -|M_{xy}|$ například, když vypočítaný $M_{xd}^* < 0$, pak platí:

$$\begin{aligned} M_{xd}^* &= 0 \\ M_{yd}^* &= M_y + \left| M_{xy} * \frac{M_{xy}}{M_x} \right|. \end{aligned} \quad (3.37)$$

- Obdobně při $M_y < -|M_{xy}|$ například, když vypočítaný $M_{yd}^* < 0 \rightarrow (*)$:

$$\begin{aligned} M_{xd}^* &= M_x + \left| M_{xy} * \frac{M_{xy}}{M_y} \right| \rightarrow (*) \\ M_{yd}^* &= 0 \rightarrow (*). \end{aligned} \quad (3.38)$$

- Pokud je některý ze získaných momentů M_{xd}^* a M_{yd}^* menší než 0, předpokládá se, že má hodnotu 0. Takové momenty by navrhovaly vrchní vyztužení, které bude navrženo dále.

- Určení vrchních momentů M_{xg}^* a M_{yg}^* :

$$\begin{aligned} M_{xg}^* &= M_x - |M_{xy}|, \\ M_{yg}^* &= M_y - |M_{xy}|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

- Pokud však platí, že $M_x > |M_{xy}|$ například, když vypočítaný $M_{xg}^* > 0 \rightarrow (*)$, pak platí:

$$\begin{aligned} M_{xg}^* &= 0 \rightarrow (*), \\ M_{yg}^* &= M_y - \left| M_{xy} * \frac{M_{xy}}{M_x} \right| \rightarrow (*). \end{aligned} \quad (3.40)$$

- Obdobně při $M_y > |M_{xy}|$ například, když vypočítaný $M_{yg}^* > 0$:

$$M_{xg}^* = M_x - \left| M_{xy} * \frac{M_{xy}}{M_y} \right|,$$

$$M_{yg}^* = 0. \quad (3.41)$$

- Pokud je některý ze získaných momentů M_{xg}^* a M_{yg}^* větší než 0, předpokládá se, že má hodnotu 0. Takové momenty by navrhovaly spodní vyztužení, které je již navrženo dříve.

Podle analogických vzorců lze spočítat také návrhové síly pro konstrukci vystavenou zatížení v rovině (např. taženou či tlačenu skořepinu). Tyto vztahy v práci nebudou reprodukovány, lze je případně najít ve zdrojové publikaci.

U složitěji namáhaných konstrukcí (např. skořepiny navrhované na ohyb + tlak/tah) s ohybovými momenty (M_{xx} , M_{xy} , M_{yy}) a normálovými silami (N_{xx} , N_{xy} , N_{yy}) působícími současně není možné využít žádný zjednodušený algoritmus. Jelikož se často stává, že modelované skořepiny se chovají téměř stejně jako desky (s působením mírných normálových sil), stále zůstává možnost vypočítat momenty M_{xd}^* a M_{yd}^* dle této metody. Tyto návrhové momenty jsou posléze nahrazeny podélnými silami N_{xx} a N_{yy} .

4.4 Johansenova metoda

Následující kapitola čerpá ze zdroje [26].

Metodou lomových čar se poprvé zabýval Ingerslev [32]. Metoda analýzy lomovými čarami od Johansena byla vyvinuta již před dlouhou dobou, v roce 1943. Má sloužit jako nástroj pro odhad maximální možné únosnosti a zatížení vyztužené desky. Aby však byla metoda správně využita, musí být uživatel seznámen s pravidly pro volbu správného uspořádání lomových čar. Tato pravidla se dají zapamatovat a jejich aplikace na jednodušší problémy může být rychlá a jednoduchá. Často však může být problém správně identifikovat kritický vzor lomových čar, zejména při neobvyklé geometrii desky, zvláštním uspořádání vyztuže, či při zvláštním způsobu zatěžování. Metoda lomových čar je metoda „horní meze“ věty o plasticitě, což znamená, že nesprávně zvolený vzor lomové čáry může vést k nebezpečnému odhadu únosnosti desky.

Ingerslev ve své verzi analýzy metodou lomových čar předpokládal, že na lomové čáře je rovnováha pouze mezi zatížením a jen ohybovými momenty samotnými. Tato metoda je přirozeným přístupem k analýze metodou lomových čar, protože, jak sám Johansen poznal, na skutečných lomových čarách působí pouze největší hlavní moment. Jakmile však aplikoval princip virtuálních sil, na mechanismu lomových čar byly znatelné nesrovnalosti. Správně odvodil, že dané nepřesnosti jsou důsledkem smykových sil a kroutících momentů působících na lomových čarách. Takovým lomovým čarám se říká „nepravé“. Johansen tedy omezil použití původní metody a sám zavedl tzv. „teorii uzlových sil“ či „rovnovážnou metodu“.

4.4.1 Princip lomových mechanismů

Lomové čáry musí dělit desku takovým způsobem, že se z ní stává mechanismus. Johansen omezil tuto teorii pouze na rovné lomové čáry. Avšak jak se následně ukázalo, lomové čáry jsou velmi často zakřivené. Existence zakřivených lomových čar je velmi důležitá,

protože „pravé“ a reálné lomové čáry musí nutně být zakřivené. Později bylo dokázáno [33], že většina Johansenových klasických řešení byly pouze přibližné aproximace.

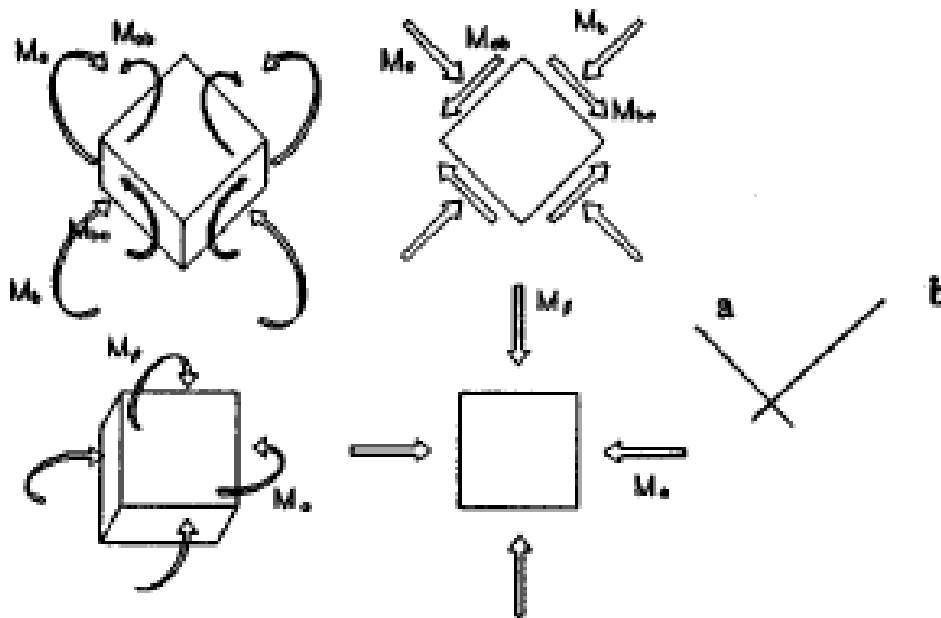
4.4.2 Zápis a předpoklady

Za použití Mohrovy kružnice se výpočet ohybových a krouticích momentů stává jednodušším, když ohybové a krouticí momenty nahradíme vektory se stejným směrem jako je směr namáhání momenty. Dva ohybové momenty působící v bodě desky budou označeny jako M_a a M_b . Krouticí momenty se označí jako M_{ab} , respektive M_{ba} , či se může obecně psát M_{ab} , jelikož se oba krouticí momenty rovnají. Dva hlavní ohybové momenty se označí jako M_α a M_β . Smyková síla působící na lomové čáře se označí jako T_a . Lomová kladná čára bude na obrázcích reprezentována jako plná čára, lomová záporná čára jako dvojitá plná čára.

Je předpokládáno, že se deska může zlomit v jakémkoliv bodě a jakémkoliv směru s kladným ohybovým momentem M_p^+ a záporným ohybovým momentem M_p^- , kde M_p je předpokládaný kritický lomový moment.

4.4.3 Princip normality lomových momentů, pravé a nepravé lomové čáry

Pravá lomová čára se nachází ve směru kolmém na největší hlavní ohybový moment. V důsledku toho je lomová čára vystavena pouze ohybovému momentu kolmému k směru lomové čáry a v některých případech smykovým silám. Maximum všech vnitřních působících momentů v daném bodě musí být hlavní ohybový moment M_α , a proto se lomové čáry musí objevit ve směru kolmém k tomuto momentu ve chvíli, kdy M_α dosáhne hodnoty M_p . Toto však znamená, že podél skutečných (nebo „prvých“) lomových čar musí být krouticí momenty rovny nule.



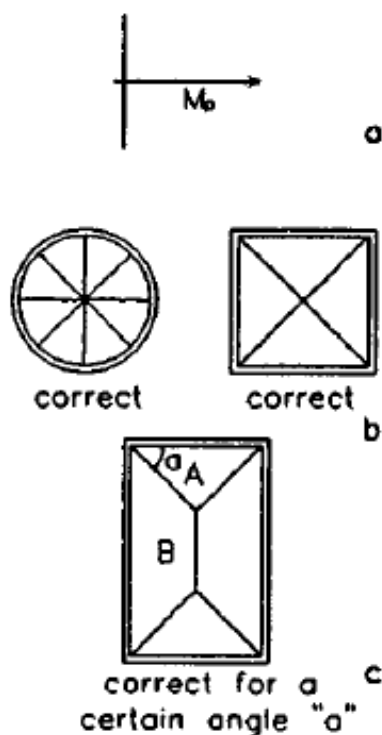
Obrázek 50 Znáznornění ohybových momentů [26]

Pokud je M_p lokální maximum (předpokládaný „kritický“ lomový moment), pak smykové síly kolem lomové čáry musí být 0. M_a může dosáhnout požadované hodnoty M_p i

bez toho, aby se jednalo o lokální maximum. V takovém případě má smyková síla T_a určitou nenulovou hodnotu, zatímco krouticí momenty jsou nadále 0. Smyková síla jako taková by nikdy neměla být příčinou vzniku lomu a porušení. Lomová čára, která potřebuje k vyrovnání zatížení pomoc krouticích momentů, bude označována jako „virtuální“ či „nepravá“, protože v každém bodě lomové čáry existuje ohybový moment větší než předpokládaný „kritický“ lomový moment M_p , jedná se o hlavní ohybový moment M_α .

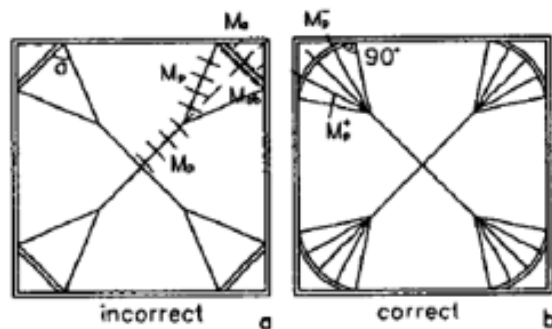
4.4.4 Křížení lomových čar

Ve vnitřních částech desky se dá říct, že křížení lomových čar se stejným znaménkem je vždy možné a tím pádem správné. Takové křížovatky reprezentují případ, kde $M_a = M_\alpha = M_b = M_\beta = M_p$ a $M_{ab} = 0$. To se shoduje s Johansenovou metodou. Nicméně „správné křížení“ může nastat pouze tehdy, kdy mají lomové čáry axiální či dvojitou symetrii, nebo pouze pro konkrétní sklon, kdy jsou lomové čáry oproštěny od krouticích momentů, a to z jednoduchých důvodů rovnováhy. V některých případech je potřeba využít kroucení k naplnění okrajových podmínek.



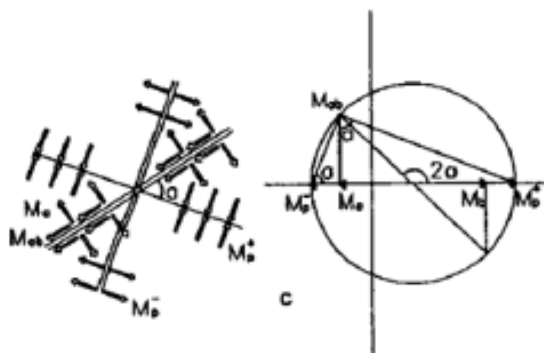
Obrázek 51 Právě křížení lomových čar se stejným znaménkem [26]

Křížení lomových čar s různými znaménky je možné pouze v případě, že jsou pouze dvě a protínají se v pravém úhlu. Toto odpovídá případu, kdy $M_a = M_\alpha = M_p^+$; $M_b = M_\beta = M_p^-$ a $M_{ab} = 0$. Na následujícím obrázku jsou vidět nesprávné uspořádání lomových čar (obr. 52 část a) v rohu a naopak správné (obr. 52 část b), kde kladné lomové čáry protínají záporné zakřivené lomové čáry v pravém úhlu.



Obrázek 52 Lomové čáry v rozích prostě podepřené desky [26]

Lze předpokládat dva možné rovnovážné stavy pro nepravé lomové čáry. V jednom se předpokládá, že jedna z lomových čar je pravá a tím pádem je podrobena lomovému ohybovému momentu M_p . Ostatní lomové čáry jsou nepravé a působí na nich kromě ohybového momentu M_a také kroutící momenty M_{ab} . Vztah mezi ohybovým momentem M_a , kroutícím momentem M_{ab} a lomovými momenty M_p^+ a M_p^- je vztah momentů v jakémkoli směru s hlavními ohybovými momenty, a lze jej také odvodit z Mohrovy kružnice (obr. 53).



Obrázek 53 Mohrova kružnice popisující vztahy mezi jednotlivými momenty [26]

Platí:

$$\begin{aligned} (M_a - M_p^-) * \operatorname{tga} &= M_{ab}, \\ M_{ab} &= \frac{M_p^+ - M_p^-}{2} * \sin 2a, \\ M_a &= M_p^+ * \cos^2 a + M_p^- * \sin^2 a, \end{aligned} \quad (3.42)$$

kde a je úhel pod kterým nepravá lomová čára protíná jeden z hlavních směrů nebo pravou lomovou čáru.

V případě b se předpokládá, že všechny lomové čáry jsou nepravé a tím pádem na nich působí kroutící momenty M_{ab1} , M_{ab2} spolu s ohybovými momenty M_{a1} , M_{a2} , které jsou nižší než hlavní ohybový moment M_p . Platí, že $M_{a1}=M_a$, $M_{ab1}=M_{ab}$ a $M_{a2}=M_a$, $M_{ab2}=M_{ab}$.

Vztah mezi vnitřními silami na dvou nepravých lomových čarách může být také popsán Mohrovou kružnicí, nebo eliminací M_p^+ a M_p^- z rovnic dříve:

$$M_{ab1} + M_{ab2} = (M_{a2} - M_{a1}) * \cot b, \quad (3.43)$$

kde b je úhel křížení mezi jednotlivými lomovými čarami. Je to stejná rovnice, kterou využívá Johansen ve své metodě uzlových sil v izotropních deskách.

4.4.5 Hrany

Na hranách desky mohou být stanoveny následující podmínky:

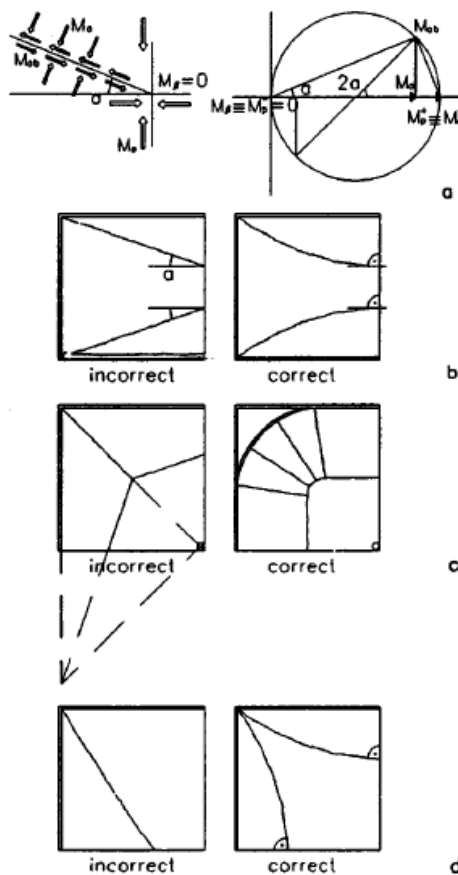
4.4.5.1 Lomové čáry jsou kolmé k volnému okraji

Jak je známo, je-li okrajová podmínka $M_a = 0$, $M_{ab} = 0$, hlavní směry musí být rovnoběžné a kolmé k hranám a hlavní ohybový moment kolmý k hraně musí být nula. Platí Mohrova kružnice s úhlem $\alpha = 90^\circ$. Toto pravidlo znamená, že mnoho pravých lomových čar musí být určitým způsobem zakřivených. Pokud tedy lomová čára narazí na volnou hranu desky pod úhlem jiným než 90° , pak je nepravá. Musí platit:

$$\begin{aligned} M_a &= M_p * \cos^2 a, \\ M_{ab} &= M_p * \sin a * \cos a, \end{aligned} \quad (3.44)$$

mezi nimiž platí:

$$M_{ab} = M_a * \operatorname{tga}.$$



Obrázek 54 Příklady lomových čar na volných koncích [26]

Toto popisují uzlové síly od Johansena, ve kterých platí $Q_1 = M_{ab}$, $\alpha = 90^\circ - a$, $M_p^- = 0$ a $M_p^+ = M_a$. Na nepravých lomových čarách je častým jevem, že hlavní moment M_α je větší než M_a a působí v jiném směru. M_α se tedy dá určit následovně:

$$M_\alpha = \frac{M_a}{\cos^2 a} = M_a * (1 + \operatorname{tg}^2 a). \quad (3.45)$$

Hodnotu M_p skutečného ohybového momentu lomové čáry lze tedy omezit, pokud považujeme M_a za horní mez řešení a M_α za dolní mez řešení:

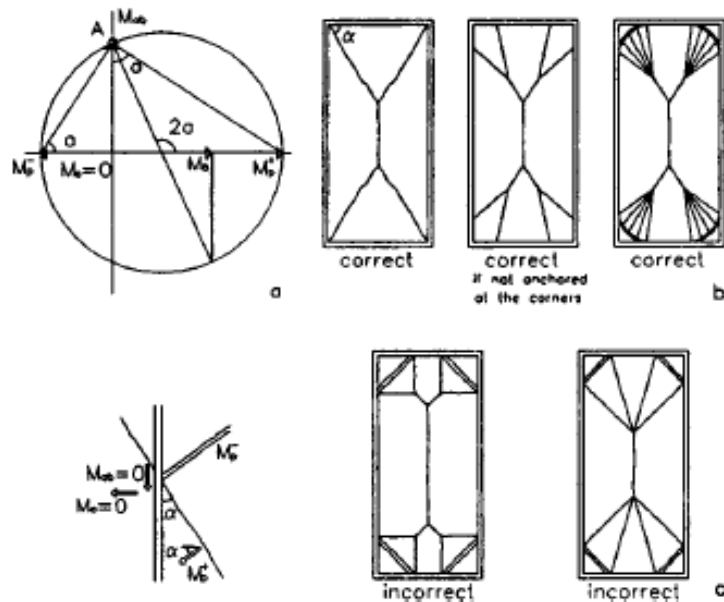
$$M_a * (1 + \operatorname{tg}^2 a) > M_p > M_a. \quad (3.46)$$

4.4.5.2 Lomové čáry mohou dojít k prostě podepřenému okraji pod jakýmkoliv úhlem

Pro prostě podepřený konec, s předpokladem platnosti Kirchhoffovy hypotézy, jsou okrajové podmínky $M_a = 0$, $M_{ab} \neq 0$. Pro tuto podmínku je možno nalézt nekonečné množství Mohrových kružnic, proto ji splňuje také nekonečné množství úhlů a . Dva hlavní ohybové momenty musí být s opačným znaménkem. Musí být však zahrnut nenulový krouticí moment M_{ab} . Vztah pro tento moment a hlavní ohybové momenty $M_\alpha = M_p^+$, a $M_\beta = M_p^-$ je pak $M_{ab} = M_p^+ * \cot a = M_p^- * \operatorname{tg} a$ a podmínka:

$$\operatorname{tg}^2 a = \frac{M_p^+}{M_p^-} = \frac{1}{j}. \quad (3.47)$$

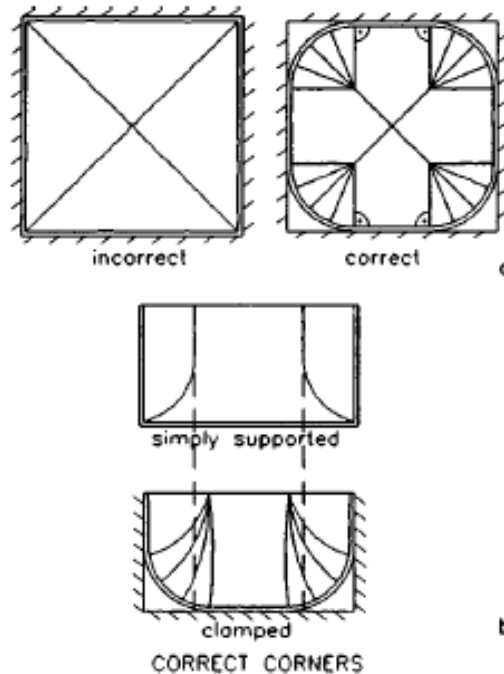
Tento zákon říká, že lomová čára není nikdy nepravá, pokud dojde k prostě podepřenému okraji samotná. Pokud však dojdou k prostě podepřenému okraji 2 lomové čáry zároveň, jediná správná varianta je taková, kdy jsou lomové čáry opačného znaménka a působí v na sebe kolmém směru.



Obrázek 55 Lomové čáry na prostě podepřených deskách [26]

4.4.5.3 Lomové čáry mohou přijít k vetknutému okraji pod jakýmkoliv úhlem

Ohybový a krouticí moment zde je různý od 0. Pokud by se vetknutý konec měl stát lomovou čarou, kladné lomové čáry by byly kolmé na okraj. Tuto podmínku není možné naplnit v rozích, proto se před takovými rohy štěpí.



Obrázek 56 Lomové čáry v rozích na vetknutých hranách [26]

4.4.6 Podmínky rovnováhy, metoda normálních momentů, metoda šikmých momentů

Při procesu navrhování desky je obvykle známa hodnota maximálního mezního zatížení p , proto je cílem mezní analýzy nalézt mezní (lomové) ohybové momenty M_p^+ a M_p^- , které se objeví při kolapsu desky. Daných momentů lze dosáhnout pomocí následujících dvou podmínek rovnováhy:

- V každé oblasti mezního mechanismu únosnosti desky musí vnitřní síly působící na lomových čarách vyvažovat zatížení a reakce.
- Vnitřní síly musí být v rovnováze na každé ze stran lomové čáry.

Dané dvě podmínky mohou být dosaženy přímo rovnovážnými rovnicemi, nebo případně aplikací principu virtuálních sil na celý mechanismus desky s předpokladem, že vnitřní síly na každé straně lomové čáry si jsou rovny. Výsledky musí být shodné, protože princip virtuálních sil je jedinou možností použití rovnovážných rovnic.

Touto cestou můžeme vždy dosáhnout vztahu mezi vnitřními silami a geometrickými parametry uspořádání lomových čar desky. Dalším krokem je nalezení hodnot parametrů těchto uspořádání, aby bylo dosaženo nejlepšího možného reálného uspořádání lomových

čar. Je možné použít dvě základní metody – metoda normálních momentů a metoda šikmých momentů.

V metodě normálních momentů se předpokládá, že na lomové čáře působí jediný konstantní moment M_a , plus smykové síly T_a , pokud M_a není lokálním maximem. V metodě šikmých momentů působí na lomové čáře konstantní ohybový moment M_a a konstantní krouticí moment M_{ab} , plus smykové síly, pokud jsou relevantní.

4.4.7 Uspořádání pravých lomových čar

Pokud je v normálové momentové metodě použijeme uspořádání složené z pravých lomových čar, získáme nejdříve vztah mezi ohybovým momentem M_a , působícím na lomových čarách (a smykovými silami T_a , pokud jsou relevantní) a zatíženími na desce. Protože byl neznámý moment M_{ab} eliminován, dostaneme geometrii uspořádání pravých lomových čar přímo z rovnováhy momentů na každé ze stran lomové čáry. Ohybový moment, který náleží danému uspořádání, je pak mezním ohybovým momentem M_p .

V metodě šikmých momentů musíme v mechanismu splnit dvě podmínky rovnováhy, abychom dostali vztah mezi vnitřními silami a geometrickými parametry uspořádání. Dané geometrické parametry, charakterizující pravé uspořádání, dosáhneme položením všech krouticích momentů na každé vnitřní lomové čáře rovno nule. Alternativně lze výsledku dosáhnout také užitím principu maxima, který bude řešen dále.

4.4.8 Nepravé uspořádání lomových čar

V mnoha případech lze dosáhnout pravého uspořádání lomových čar pouze pomocí zakřivených lomových čar. I když je na křivé lomové čáry možné aplikovat metodu normálních momentů, výpočty jsou většinou jednodušší, když se křivé čáry nahradí rovnými i přes to, že se z pravého uspořádání lomových čar stává nepravé.

Pokud je toto uspořádání nepravé, není možné sestavit rovnováhu bez použití krouticích momentů na lomových čarách. Uspořádání, které nejlépe kopíruje reálné uspořádání lomových čar, je pak takové, které splňuje zákony principu kolmosti mezních momentů. Pro nepravé uspořádání lomových čar je to takové, které je přinejmenším v rovnováze – tzv. vyvážené uspořádání. Proto pro nepravé uspořádání lomových čar zákony principu kolmosti mezních momentů nahrazují podmínku nulových krouticích momentů. Vyváženého uspořádání lomových čar může být také dosaženo za pomoci metody principu maxima.

V některých případech normálová momentová metoda může být využita. Například pokud jsou lomové čáry vstupující do rovnovážných rovnic pravé, nesmí se v rovnicích objevit krouticí momenty. Vyváženého uspořádání může být dosaženo obdobně jako pravého uspořádání lomových čar – porovnáním ohybových momentů.

4.4.9 Princip maxima a pracovní metoda

Princip maxima Johansen popisuje jako „reálné uspořádání lomových čar, korespondující maximální absolutní hodnotě konečného ohybového momentu M_p “. Tento

princip je pouze důsledkem horní hranice teorie mezní analýzy, když je aplikován na mechanismus izolované desky. Má dvě aplikace: jako kritérium, aby bylo možné zjistit, které je reálné uspořádání lomových čar nebo které se nejlépe blíží reálnému vzoru; a jako metoda analýzy mezních ohybových momentů, tzv. pracovní metoda.

Jelikož je „vyvážené“ uspořádání lomových čar vždy v rovnováze, pokud použijeme metodu šikmých momentů a dostaneme výraz pro normální ohybový moment M_a , uspořádání lomových čar, jež se nejvíce blíží reálnému uspořádání, je to, které odpovídá maximu M_a a zároveň to, které je v rovnováze. To umožňuje získat hodnotu M_a , aniž by bylo nutné využít $M_{ab}=0$ ve správných uspořádáních, nebo bez definování hodnot krouticích momentů a smykových sil na lomové čáře v nesprávných uspořádáních. Moment M_a lze tedy získat pomocí rovnováhy nebo alternativně pomocí pracovních rovnic. Název „pracovní metoda“ tedy není úplně přesný, lépe odpovídá popis „princip maxima aplikovaný na metodu šikmých momentů“.

4.4.10 Závěry

Uspořádání lomových čar mohou být rozdělena na dva typy – „právé uspořádání lomových čar“, které odpovídá možným lomovým čarám a „nepravé uspořádání lomových čar“, které odpovídá virtuálním lomovým čarám.

Jsou pouze dvě hlavní metody v mezní analýze desek – „metoda normálových momentů“, ve které působí na lomové čáře pouze ohybové momenty (a smykové síly, pokud jsou relevantní), a „metoda šikmých momentů“, kde na lomové čáře působí ohybové ale i krouticí momenty. Problém se dá vyřešit pomocí pracovních rovnic, či rovnovážnými rovnicemi.

Metoda normálových momentů odpovídá pravým vzorům lomových čar, složeným ze zakřivených či rovných lomových čar.

Metoda šikmých momentů může být aplikována na nepravé uspořádání lomových čar s využitím podmínky nulových krouticích momentů.

Metoda šikmých momentů může být aplikována na nepravé uspořádání lomových čar, pokud jsou na lomové čáře přidány vnitřní síly pro dosažení rovnovážných podmínek v desce. Konkrétním příkladem těchto vnitřních sil jsou Johansenovy „uzlové síly“.

Pracovní metoda je pouze aplikací principu maxima na metodu šikmých momentů.

5 Porovnání metod na příkladech

Pro lepší pochopení problematiky jednotlivých metod si je představíme na dvou příkladech. Prvním příkladem je obdélníková deska 6x7 m po obvodě kloubově podepřená. Jelikož se jedná spíše o teoretický příklad, bude dalším předmětem řešení také deska z projektu bytové domy Na Špici Chrudim, která byla řešena samostatně v předchozích dobách studia. Vnitřní síly byly vypočítány pomocí programu SCIA Engineer. jednotlivé desky budou řešeny v několika reprezentativních bodech. Výztuž bude navrhována metodami Baumanna, Capra Maury a Wood-Armer.

5.1 Teoretický příklad

5.1.1 Zadání

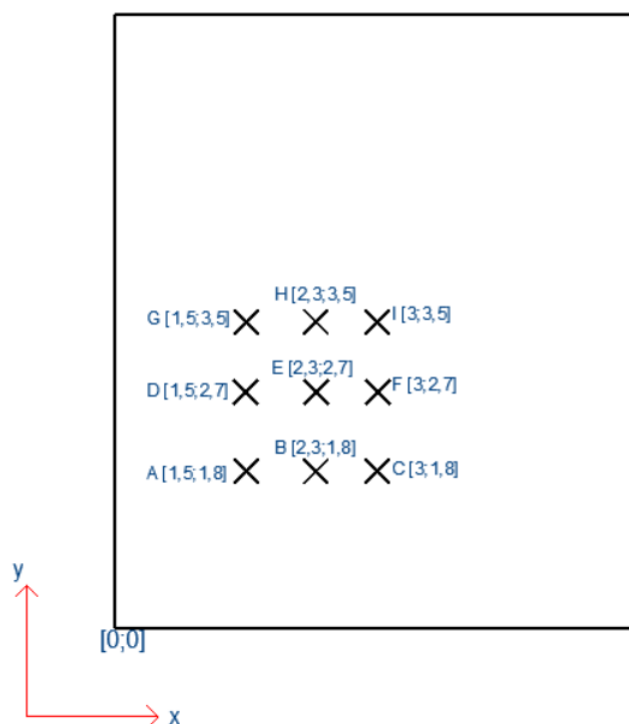
Začneme jednoduchou deskou o rozpětí 6x7 m prostě podepřenou po obvodě. Empiricky byla stanovena tloušťka desky na 200 mm pomocí vzorce:

$$h_s = 1,1 * \frac{l_1+l_2}{75} = 1,1 * \frac{6000+7000}{75} = 191 \approx 200 \text{ mm.} \quad (5.01)$$

Kromě vlastní tíhy je deska zatížena ještě užitným zatížením pro administrativní budovy, které je dle ČSN EN 1991-1-1 $q_k=2,5 \text{ kN/m}^2$. Ostatní stálé zatížení není uvažováno ve výpočtu, jelikož se jedná o teoretický příklad. Jde zde pouze o pochopení principu.

Předpokládaný průměr ocelových prutů je $\Phi = 10 \text{ mm}$, bylo zvoleno krytí výztuže $c = 20 \text{ mm}$. Délka ramen vnitřních sil je předpokládána jako $z = 0,9*d$. Předpokládá se použití betonu C30/37 a betonářské oceli B500B.

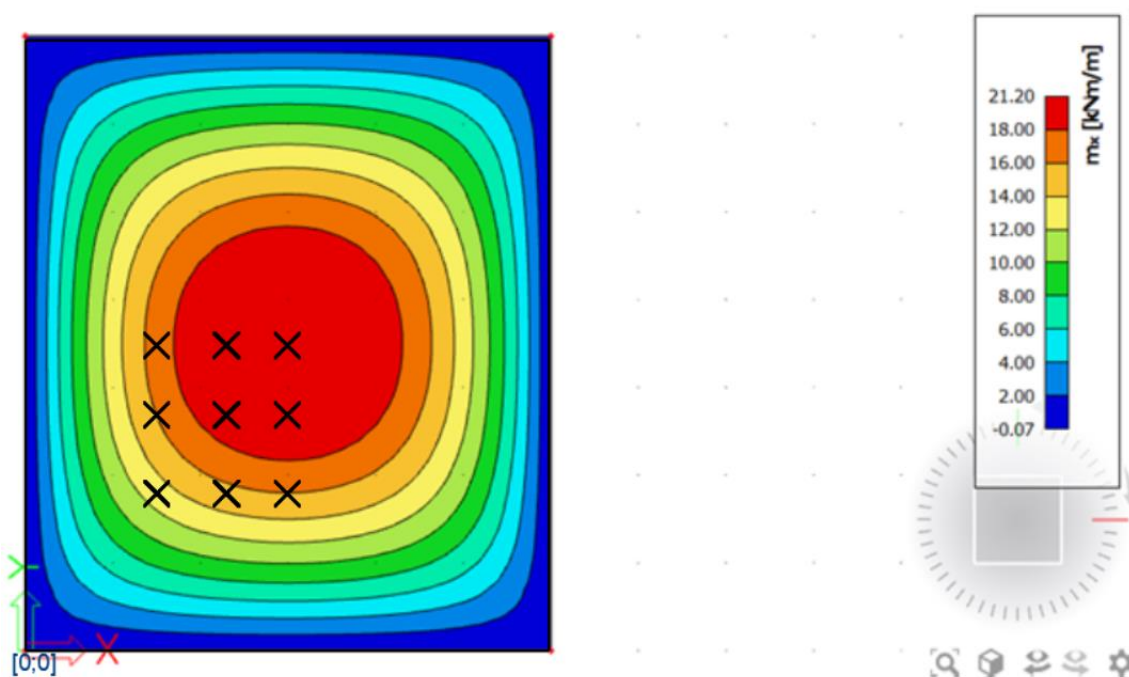
Zkoumané body byly zvoleny s přihlédnutím k symetrii desky a jsou vyznačeny na obr.5.



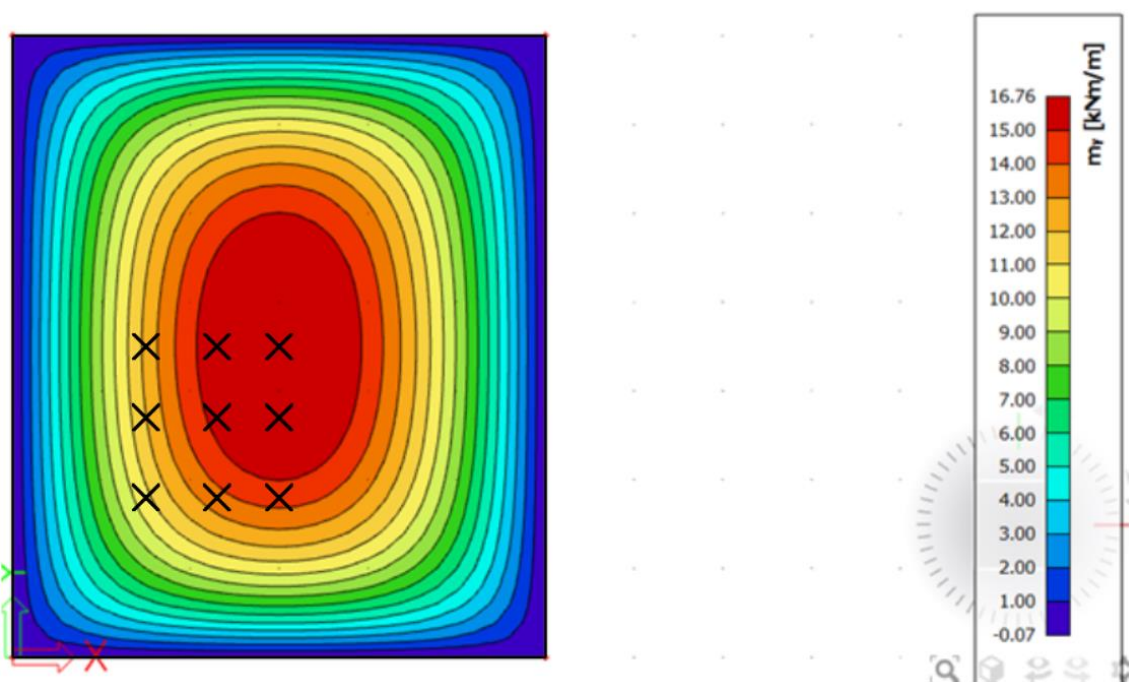
Obrázek 57 Řešené body pro první příklad

5.1.2 Vnitřní síly

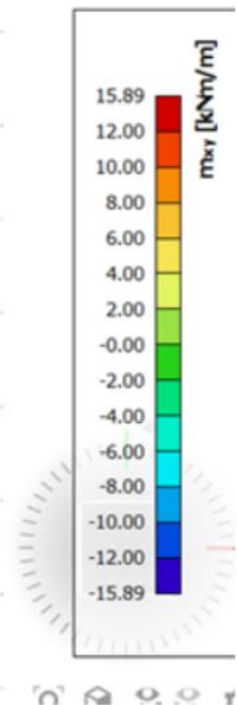
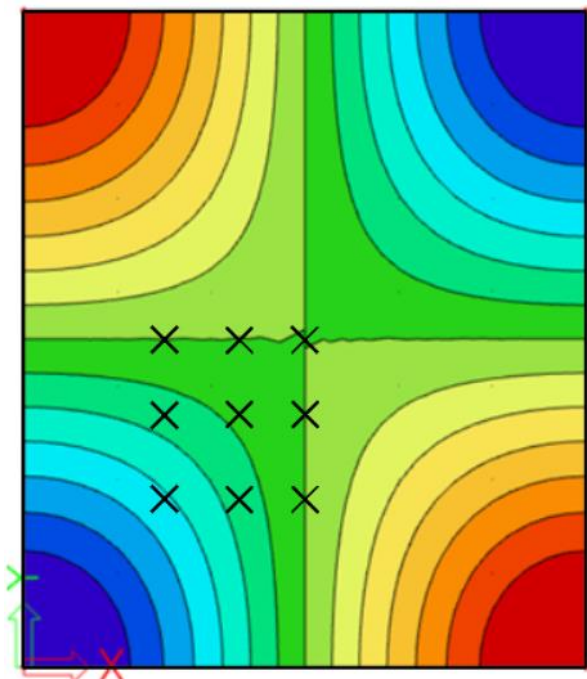
Pro jednotlivé metody dimenzování výztuže potřebujeme určit vnitřní síly na desce. Musíme tedy zjistit hlavní momenty m_1 a m_2 , úhel α , což je úhel mezi výztužnými pruty ve směru (x) a větším tahovým napětím N_1 pro Baumannovu metodu. Pro metody Capra Maury a Wood-Armer potřebujeme zjistit momenty v jednotlivých osách m_x a m_y , pak také kroučící moment m_{xy} .



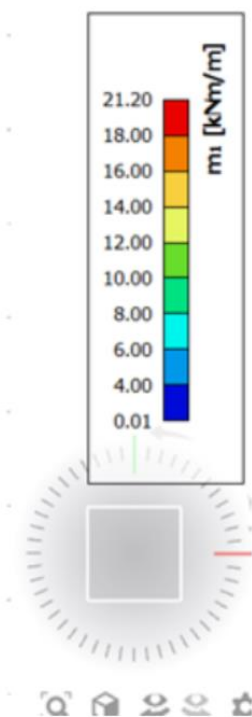
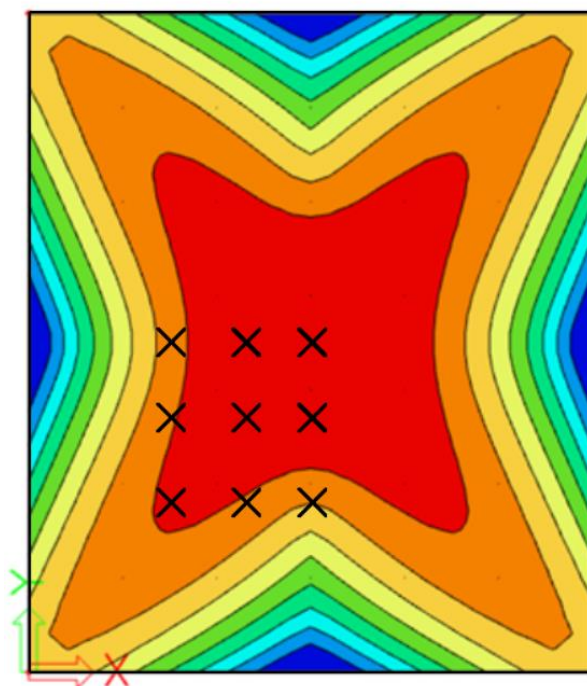
Obrázek 58 Ohybový moment m_x



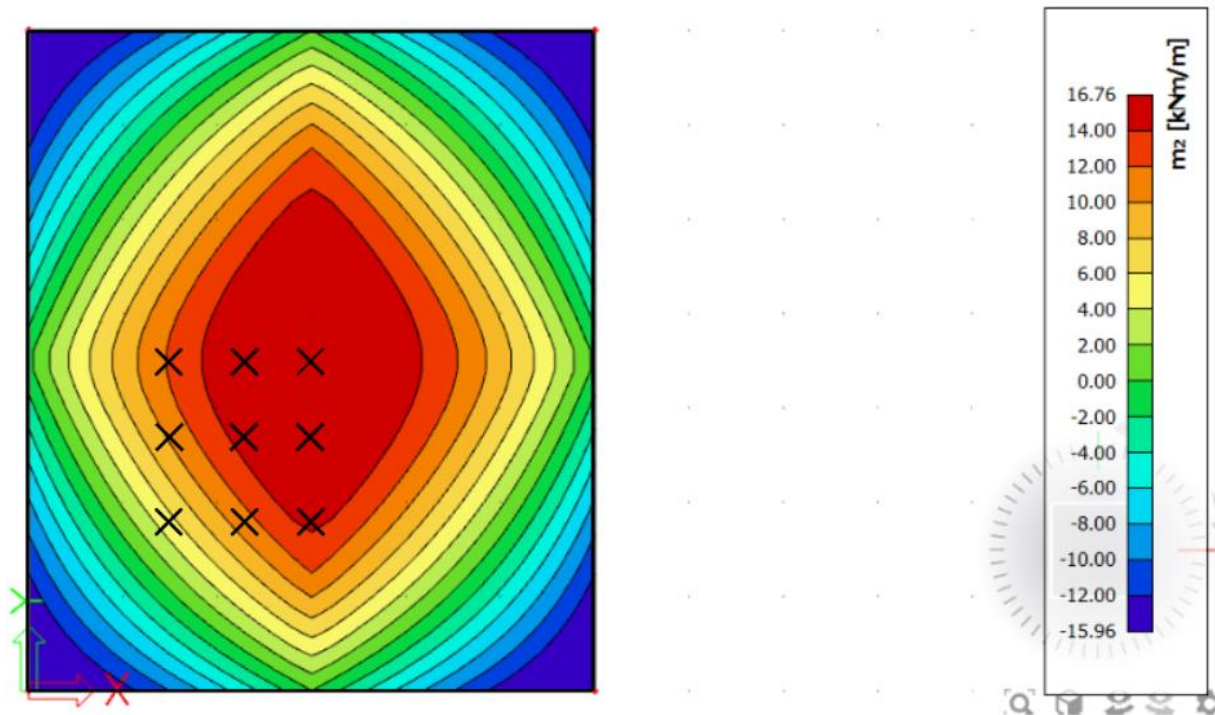
Obrázek 59 Ohybový moment m_y



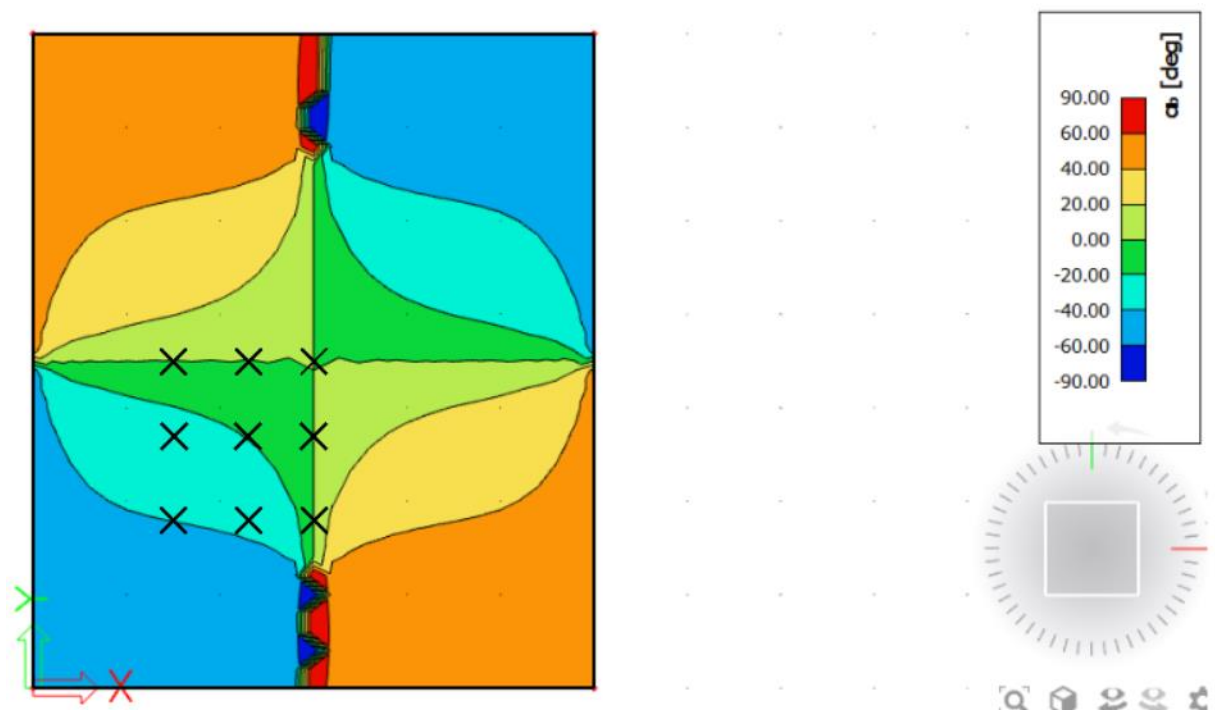
Obrázek 60 Kroutící moment m_{xy}



Obrázek 61 Hlavní moment m_1



Obrázek 62 Hlavní moment m_2



Obrázek 63 Úhel α

Vykreslení ostatních sil není pro náš návrh podstatné, neboť se ve výpočtu nijak neuplatní. Kdyby normálová síla byla nenulová, pak bychom využili i normálovou sílu. Pro tento případ a v této práci celkově se však zabýváme především čistě ohýbanými prvky.

5.1.3 Postup výpočtu

Pro ujasnění si ukážeme postup výpočtu návrhu výztuže pro jeden bod pro jednotlivé metody. Výpočet byl proveden v programu MS Office Excel. S přihlédnutím k průběhu momentu se budou řešit pouze výztuže při spodním povrchu. Konstruktivní zásady pro výpočet nebudou brány v úvahu, aby vyniklo řešení danými metodami a jejich rozdíly. Výpočet si ukážeme na bodu A = [1,5;1,8], aby v bodě bylo kroucení.

5.1.3.1 Baumannova metoda

Pro Baumannovu metodu potřebujeme jako vstup hlavní momenty m_1 , m_2 a úhel α . Z výpočtu v programu SCIA Engineer dostáváme následující hodnoty:

$$m_1 = 18,28 \frac{kNm}{m},$$

$$m_2 = 5,49 \frac{kNm}{m},$$

$$\alpha = 39,86^\circ.$$

Dále musíme zjistit hlavní tahové síly N_1 a N_2 působící na daný deskový element. Ty získáme pomocí vzorců:

$$N_1 = \frac{m_1}{z_m} = \frac{18,28 * 10^6}{0,9 * (200 - 20 - 10)} = 119\,477,12\,N,$$

$$N_2 = \frac{m_2}{z_m} = \frac{5,49 * 10^6}{0,9 * (200 - 20 - 10)} = 35\,882,35\,N.$$

Nyní musíme zjistit poměr hlavních tahových sil $k = \frac{N_2}{N_1}$, abychom zjistili, jakou sadu vzorců pro výpočet tahových sil ve výztuži a tlakových sil v betonu využít. Pro tento případ vychází $k = 0,3$, zatímco zkoumaná tangenta vychází $-9,28$. Pro tento bod tedy využijeme vzorce (3.01).

Pro $k = N_2/N_1 \geq -\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ) * \operatorname{tg}\alpha$:

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \left\{ \begin{array}{l} Z_x = N_1 + \frac{N_1 - N_2}{2} * \sin(2\alpha) * (1 - \operatorname{tg}(\alpha)) \\ Z_y = N_2 + \frac{N_1 - N_2}{2} * \sin(2\alpha) * (1 + \operatorname{tg}(\alpha)) \\ D_b = (N_1 - N_2) * \sin(2\alpha) \end{array} \right\}.$$

Nás budou v tomto případě zajímat zejména tahové síly ve výztuži Z_x a Z_y . Po dosazení hodnot získáváme:

$$Z_x = 126\,265,28\,N,$$

$$Z_y = 111\,347,06\,N.$$

Tyto síly můžeme využít pro výpočet potřebné plochy výztuže pro jednotlivé směry pomocí vzorců:

$$f_x = \frac{Z_x}{f_{yd}} = \frac{126\,265,28}{434,78} = 290,41 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}},$$

$$f_y = \frac{Z_y}{f_{yd}} = \frac{111\,347,06}{434,78} = 256,1 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}.$$

Dostali jsme potřebnou plochu výztuže pro jednotlivé směry. Předpokládaný profil výztuže je 10 mm. Můžeme tedy spočítat, kolik prutů výztuže je potřeba na 1 metr běžný desky pomocí vzorce:

$$n = \frac{f_x}{A_{s,1}},$$

kde $A_{s,1}$ je plocha jednoho prutu výztuže. Po dosazení získáváme následující výsledky pro jednotlivé směry:

$$n_x = 3,698,$$

$$n_y = 3,261.$$

5.1.3.2 Capra Maury

Pro tuto metodu potřebujeme vstupní hodnoty ohybových momentů v jednotlivých osách m_x a m_y a také krouticí moment m_{xy} . Z výpočtu v programu SCIA Engineer dostáváme hodnoty:

$$m_x = 13,03 \frac{\text{kNm}}{\text{m}},$$

$$m_y = 10,74 \frac{\text{kNm}}{\text{m}},$$

$$m_{xy} = -6,29 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}.$$

Krouticí moment m_{xy} sice působí i na vrchní straně desky, potřebuje však pouze minimální vyztužení. Pokud by konstrukce byla namáhána kombinací tlaku a ohybu, vypočítali bychom hodnoty průřezových sil momentu a normálové síly. V našem případě postačí vypočítat hodnotu průřezové síly m_n pomocí vzorce (3.28):

$$M_n = M_x * \cos^2\alpha + M_y * \sin^2\alpha - M_{xy} * \sin(2\alpha).$$

Úhel α zde představuje něco jiného než u metody Baumanna. Tato metoda zkoumá momenty v jednotlivých úhlech. Konkrétně si to můžeme představit, že se otáčí o každých 5°. Tudíž za α dosahujeme jednotlivé úhly po 5°. Hledáme nejnižší hodnotu. Ta vychází ve směru jednotlivých os, tudíž ve směrech x a y. Není zde vliv normálové síly a metoda pro základní směry x a y nešikovně zanedbává vliv krouticích momentů. Využijeme vzorce:

$$a_{d,req} = \frac{m_n}{f_{yd} * z'}$$

kde m_n je moment v daném směru. Pro jednotlivé směry dostáváme:

$$a_{xd} = \frac{13,03 * 10^6}{153 * 434,78} = 195,876 \frac{mm^2}{m},$$
$$a_{yd} = \frac{10,74 * 10^6}{153 * 434,78} = 161,451 \frac{mm^2}{m}.$$

Po přepočítání na pruty v jednotlivých směrech dostáváme:

$$n_x = 2,494,$$

$$n_y = 2,056.$$

5.1.3.3 Metoda Wood-Armer

Vstupem pro tuto metodu jsou obdobně jako u metody Capra Maury ohybové momenty ve směrech jednotlivých os m_x , m_y a kroutící moment m_{xy} .

$$m_x = 13,03 \frac{kNm}{m},$$
$$m_y = 10,74 \frac{kNm}{m},$$
$$m_{xy} = -6,29 \frac{kNm}{m}.$$

Jelikož neplatí ani jedna z podmínek $m_x < -|m_{xy}|$ a $m_y < -|m_{xy}|$, využijeme pro výpočet momentů na spodním povrchu vzorce (3.36). Dostáváme:

$$m_{xd} = m_x + |m_{xy}| = 13,03 + |-6,29| = 19,32 \frac{kNm}{m},$$
$$m_{yd} = m_y + |m_{xy}| = 10,74 + |-6,29| = 17,03 \frac{kNm}{m}.$$

Horní momenty pro návrh výztuže vychází nulové. Pro výpočet potřebné plochy výztuže využijeme vzorce:

$$a_{xd,req} = \frac{m_{xd}}{f_{yd} * z} = \frac{19,32 * 10^6}{153 * 434,78} = 290,43 \frac{mm^2}{m},$$
$$a_{yd,req} = \frac{m_{yd}}{f_{yd} * z} = \frac{17,03 * 10^6}{153 * 434,78} = 256,00 \frac{mm^2}{m}.$$

Po přepočítání na pruty v jednotlivých směrech dostáváme:

$$n_x = 3,670,$$

$$n_y = 3,260.$$

5.1.4 Vstupy a výsledky

5.1.4.1 Vstupy

Před zahájením výpočtu je nutné přizpůsobit vstupy pro Baumannovu metodu. V tomto případě stačí úprava úhlu α , který musí ležet v intervalu $(0;45^\circ)$.

	m_x [kNm/m]	m_y [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	m_1 [kNm/m]	m_2 [kNm/m]	α [°]
Bod A	13,03	10,74	-6,29	18,28	5,49	39,86
Bod B	15,42	13,63	-3,11	17,77	11,29	36,99
Bod C	16,03	14,44	0	16,03	14,44	0
Bod D	16,09	12,01	-3,05	17,72	10,38	28,12
Bod E	19,26	15,38	-1,52	19,78	14,85	19,06
Bod F	20,07	16,33	0	20,07	16,33	0
Bod G	16,94	12,30	0	16,94	12,30	0
Bod H	20,35	15,78	0	20,35	15,78	0
Bod I	21,22	16,77	0	21,22	16,77	0

Tabulka 3 Vstupy do prvního příkladu

5.1.4.2 Výsledky

	Baumann	Capra Maury	Wood-Armer
A – směr x	3,698	2,494	3,698
A – směr y	3,261	2,056	3,260
B – směr x	3,548	2,951	3,547
B – směr y	3,206	2,609	3,204
C – směr x	3,068	3,068	3,068
C – směr y	2,764	2,764	2,764
D – směr x	3,664	3,080	3,652
D – směr y	2,883	2,299	2,883
E – směr x	3,977	3,686	3,977
E – směr y	3,234	2,944	3,235
F – směr x	3,841	3,841	3,841
F – směr y	3,126	3,126	3,126
G – směr x	3,242	3,242	3,242
G – směr y	2,354	2,354	2,354
H – směr x	3,895	3,895	3,895
H – směr y	3,020	3,020	3,020
I – směr x	4,062	4,062	4,062
I – směr y	3,210	3,210	3,210

Tabulka 4 Výsledky prvního příkladu pro jednotlivé metody

5.1.5 Závěr a vyhodnocení

Z výsledků je patrné, že metody Baumanna a Wood-Armer vychází skoro stejně. Tudíž se dá předpokládat jejich správnost.

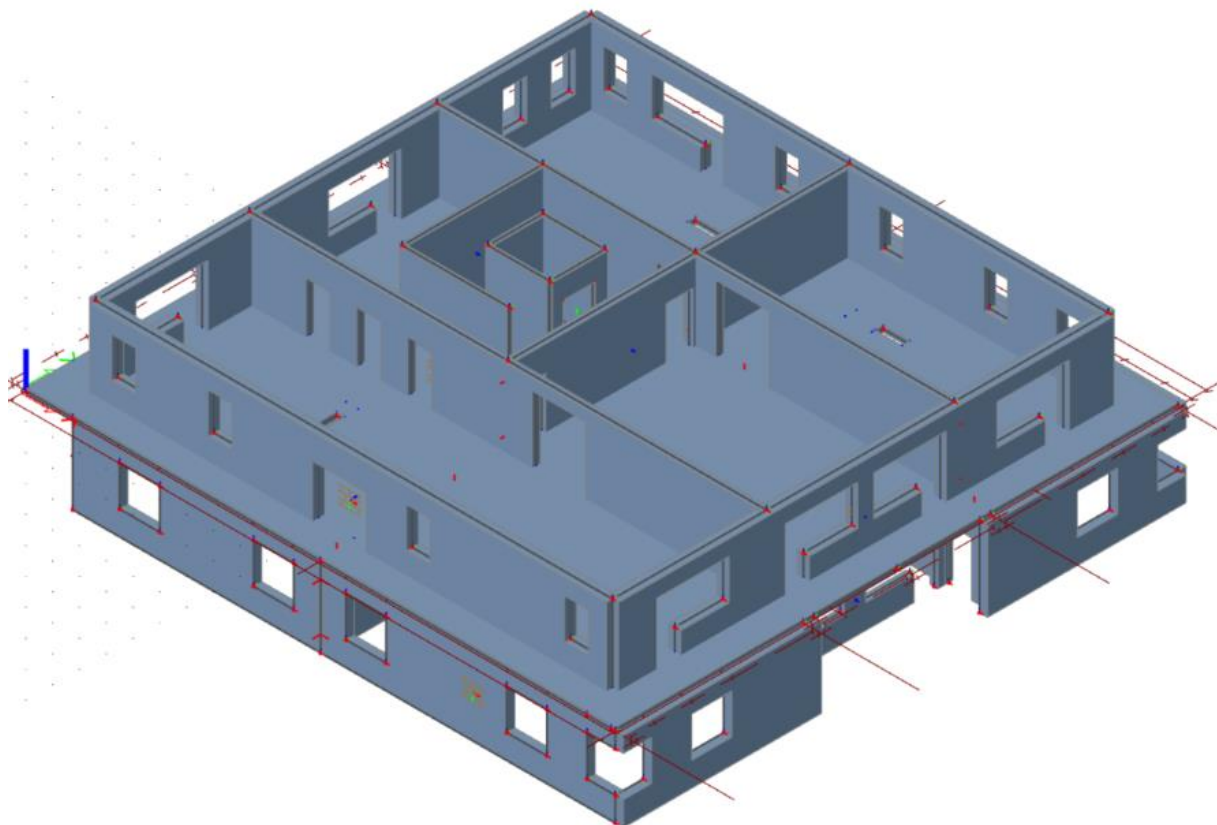
Metoda Capra Maury špatně zahrnuje vliv kroucení, je proto pro místa s kroucením nevhodná. Může však sloužit jako doplňková například k metodě Wood-Armer, protože umí převádět již zjištěnou výztuž do různých směrů. Pro místa bez kroucení je taktéž vhodná, protože udává obdobné výsledky jako předchozí metody.

V práci nebyly zkoumány prvky namáhané kombinací normálové síly (tah, tlak) a ohybu. Proto správnost využití jednotlivých metod pro kombinované namáhání nelze na základě této práce určit.

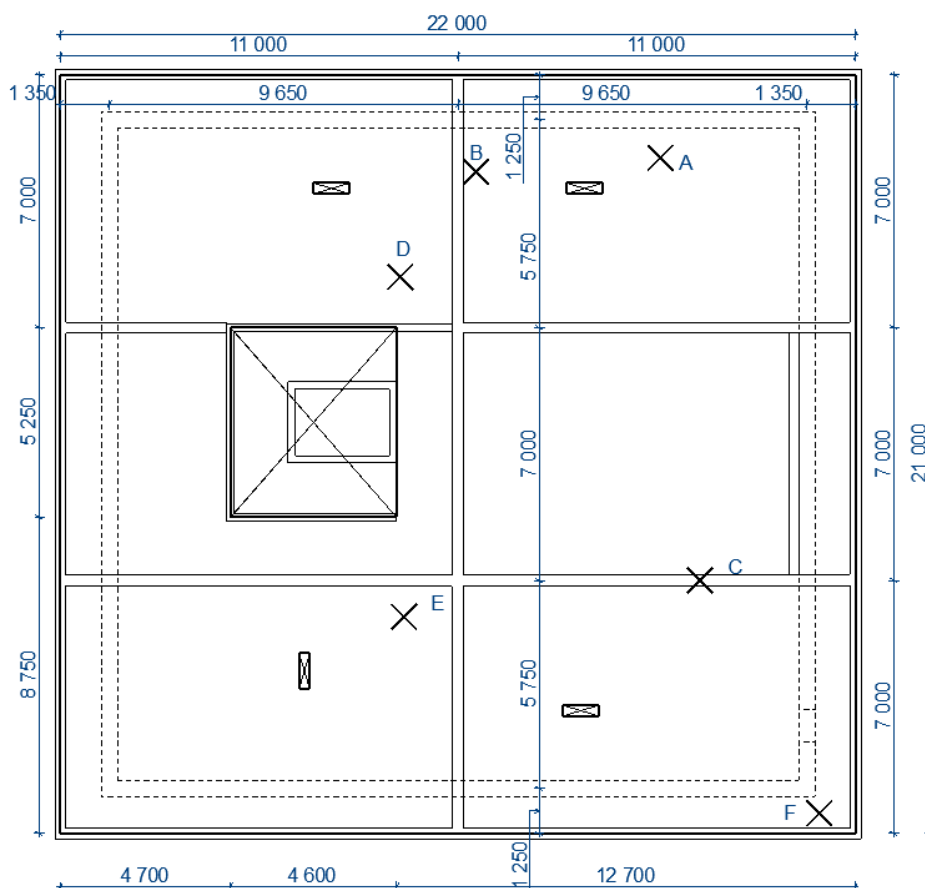
5.2 Reálná deska

5.2.1 Zadání

Další příklad je deska z bytových domů Na Špici. Jedná se o desku v 5.NP pod uskočeným podlažím. Deska je monolitická na obdélníkovém půdorysu 22x21 m o tl. 230 mm. Konstrukční systém je stěnový. Nosné stěny jsou z keramického zdiva tl. 300 mm. Stěny uskočeného podlaží 5. NP jsou z pórobetonu. Pro potřeby zjištění vnitřních sil na stropní desce byl v programu SCIA Engineer vymodelován patrový výsek. Model obsahuje nosné stěny podlaží pod deskou a nosné stěny podlaží nad deskou. Ostatní zatížení bylo modelováno pomocí liniových, respektive plošných zatížení v místě jejich působení.



Obrázek 64 Výsek podlaží v programu SCIA Engineer



Obrázek 65 Půdorys desky s řešenými body.

5.2.2 Zatížení

Pro výpočet v programu SCIA Engineer byly uvažovány následující materiály:

- Beton C30/37 XC1 (CZ) – CI 0,2 – D_{\max} 16 – S3
- Ocel B500B
- PTH 30, $\rho = 670 \text{ kg/m}^3$
- YTONG 45, $\rho = 300 \text{ kg/m}^3$

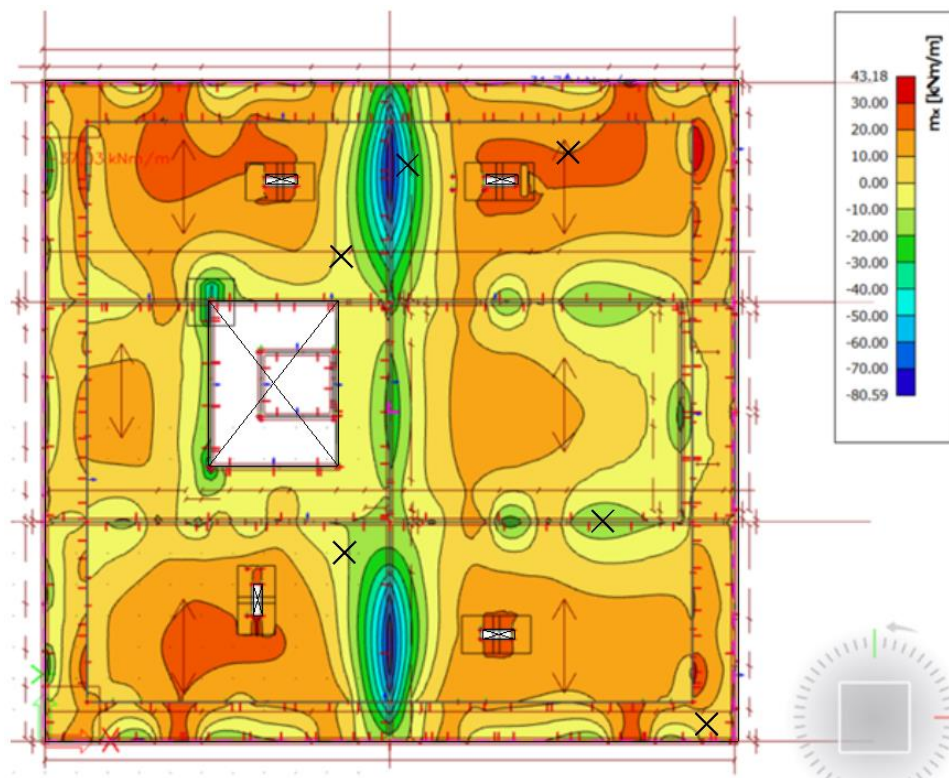
Dále bylo uvažováno následující zatížení (pozn. hodnoty jsou bez nosných konstrukcí), uvedeny jsou návrhové hodnoty zatížení:

Podlaha v obytných místnostech	1,42 kN/m ²
Podlaha na chodbách a v koupelnách	1,80 kN/m ²
Souvrství střechy	0,39 kN/m ²
Souvrství pochozí střechy (balkon)	1,28 kN/m ²
Obvodový plášť na YTONG	0,66 kN/m ²
Souvrství vnitřní nosné stěny	0,66 kN/m ²
Užitné NP	3,00 kN/m ²
Sníh	0,84 kN/m ²
Užitné zatížení balkon	4,50 kN/m ²
Užitné balkón - liniové	3,00 kN/m
Příčky, přepočítány na liniové	5,01 kN/m

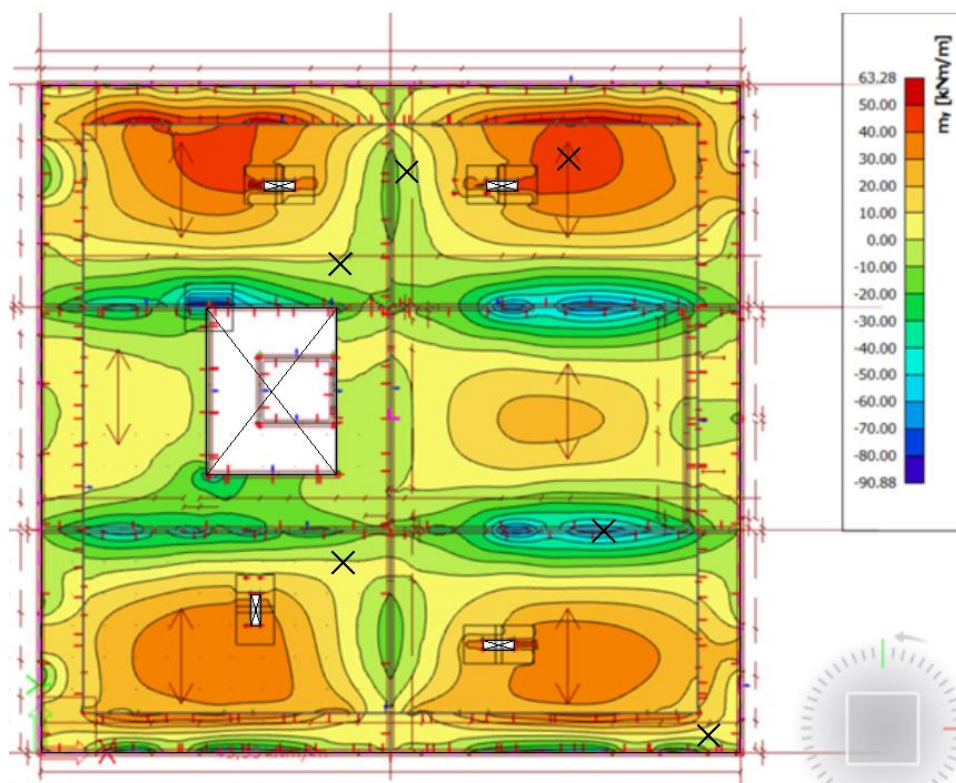
Tabulka 5 Přehled zatížení pro reálný příklad

5.2.3 Vnitřní síly

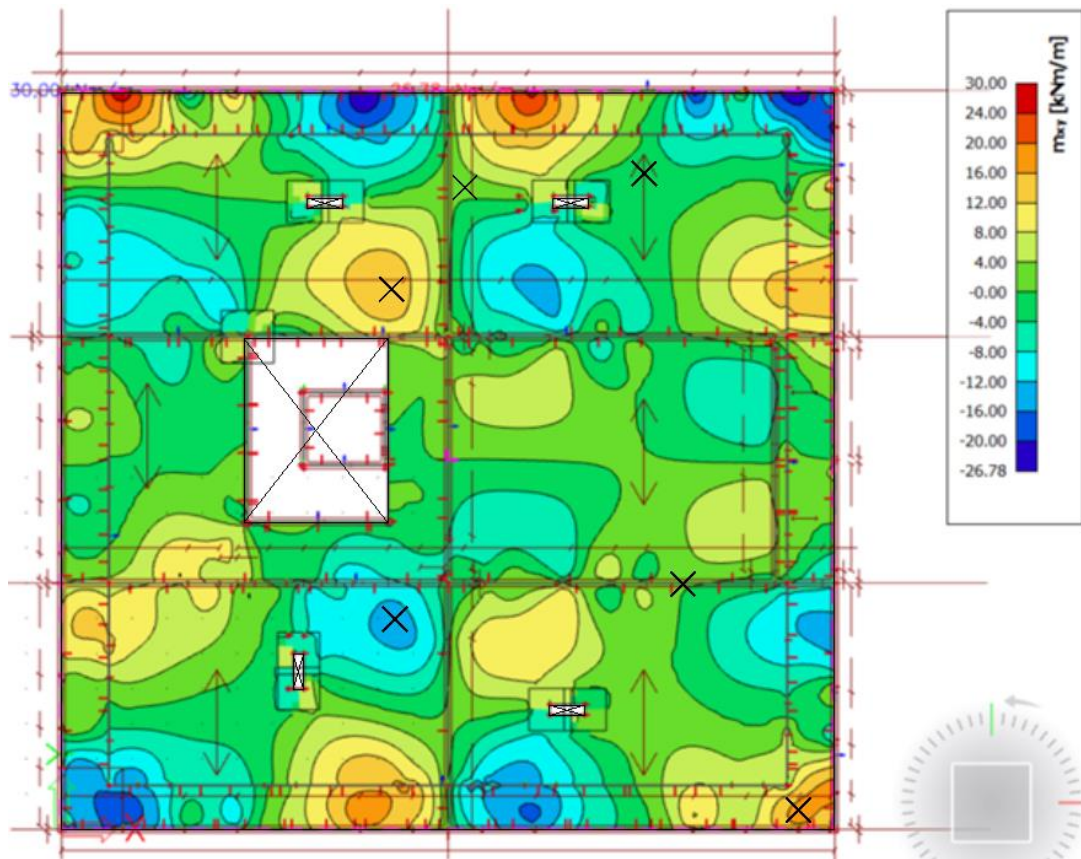
Obdobně jako u předchozího příkladu, získáme vnitřní síly pomocí programu SCIA Engineer.



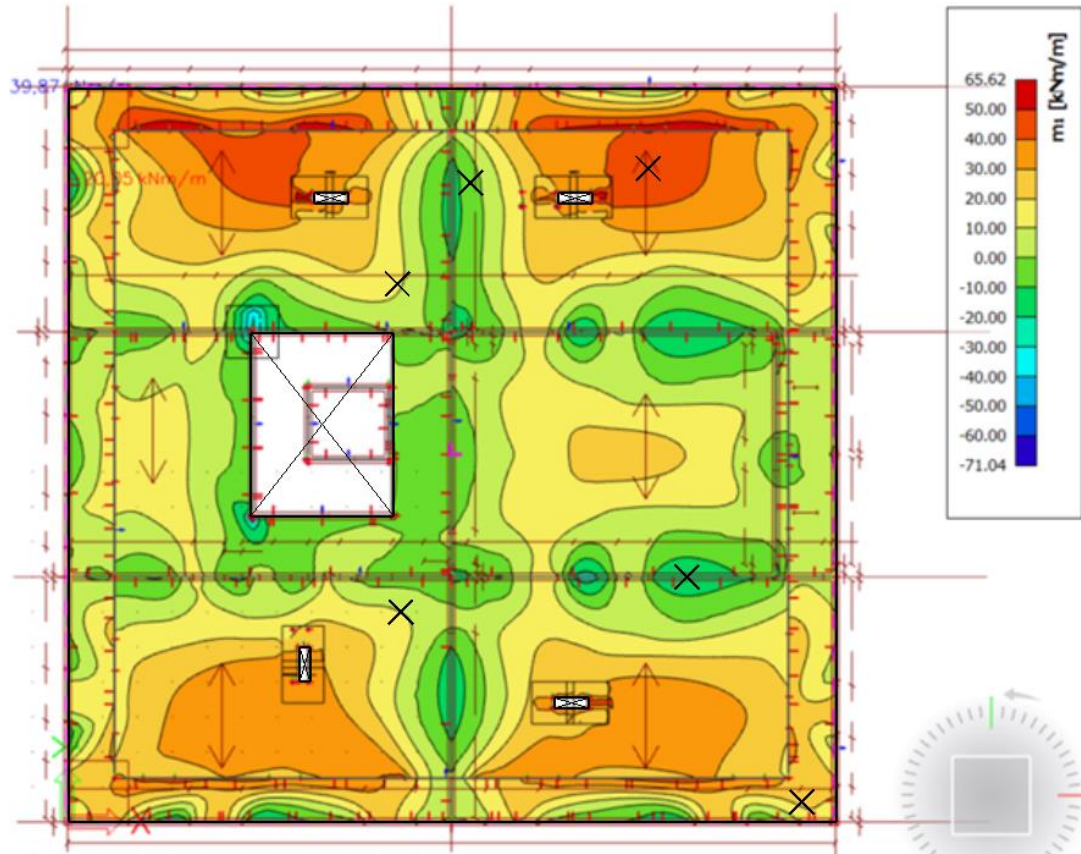
Obrázek 66 Ohybový moment m_x na reálné desce



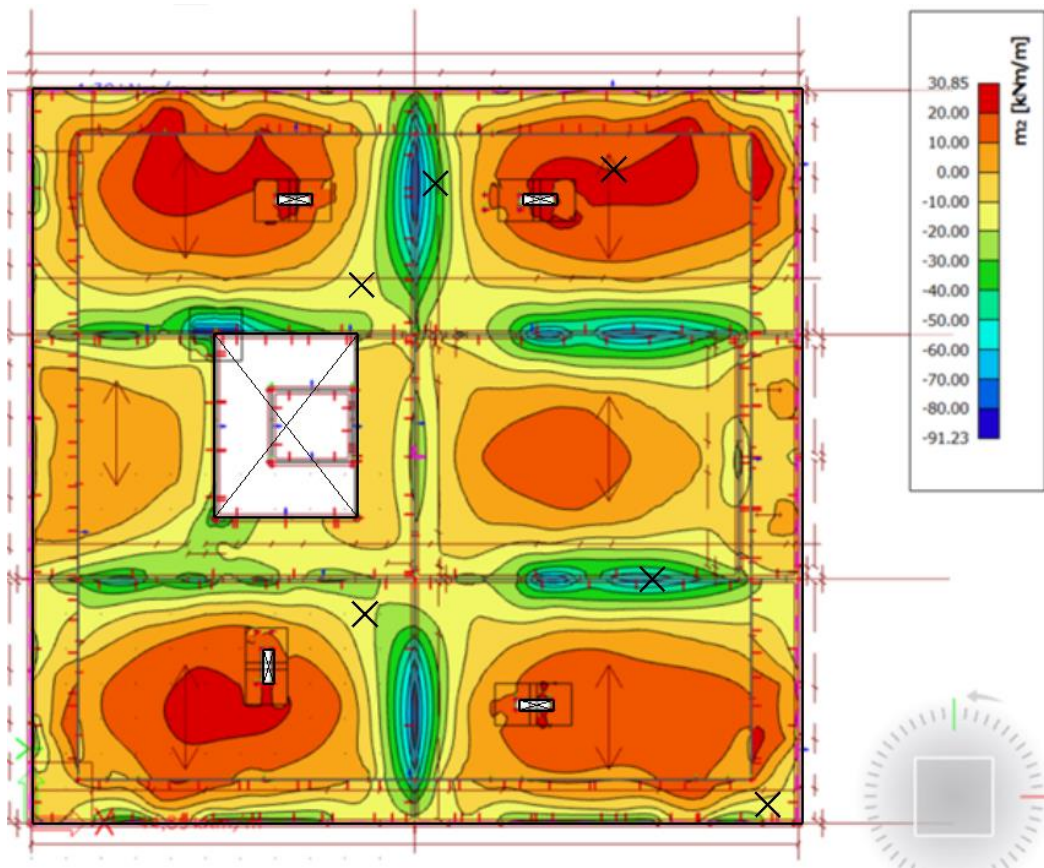
Obrázek 67 Ohybový moment m_y na reálné desce



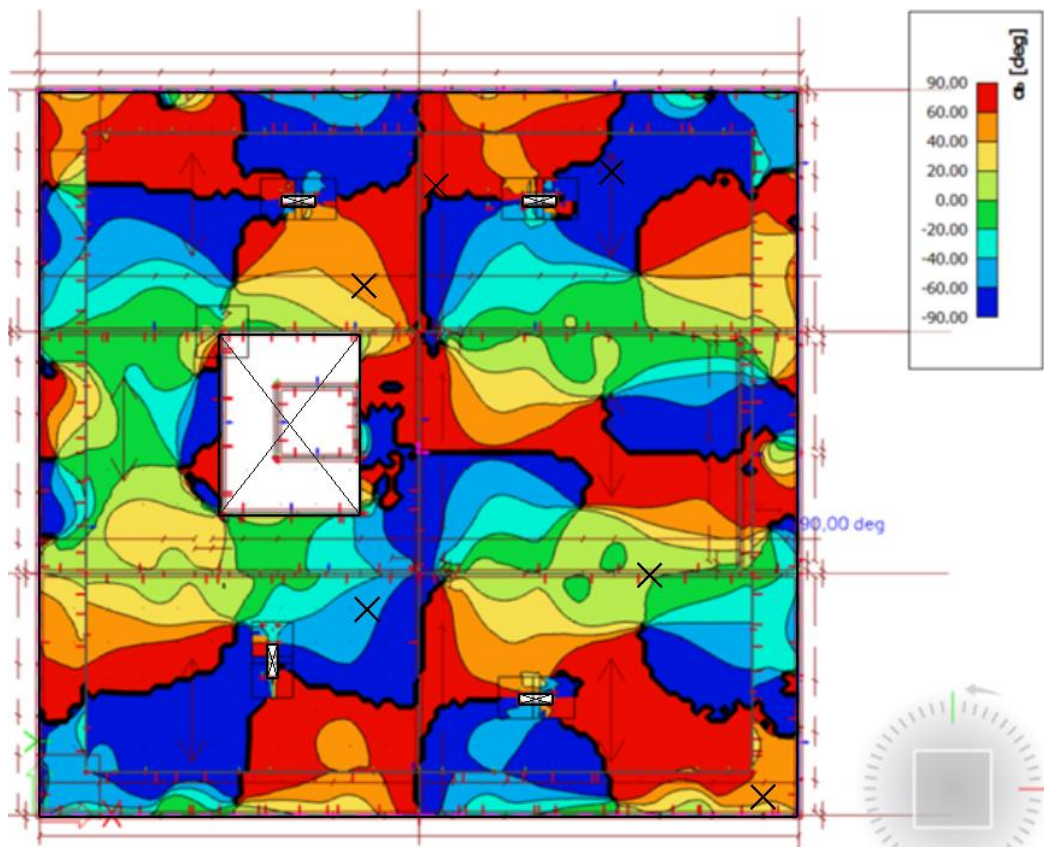
Obrázek 68 Krouticí moment m_{xy} na reálné desce



Obrázek 69 Hlavní moment m_1 na reálné desce



Obrázek 70 Hlavní moment m_2 na reálné desce



Obrázek 71 Úhel α na reálné desce

5.2.4 Vstupy a výsledky

Pro správnost výpočtu je nutné přizpůsobit hodnoty Baumannově metodě. Například úhel α musí ležet v intervalu $\langle 0;45^\circ \rangle$. Moment m_1 musí být větší než moment m_2 a musí být kladný.

5.2.4.1 Vstupy

	m_x [kNm/m]	m_y [kNm/m]	m_{xy} [kNm/m]	m_1 [kNm/m]	m_2 [kNm/m]	α [°]
Bod A	20,76	44,32	-2,29	44,54	20,54	5,49
Bod B	-46,16	-4,4	2,34	46,29	4,27	3,2
Bod C	-17,57	-63,15	1,1	63,18	17,54	1,39
Bod D	-3,04	-2,73	13,73	16,61	-10,84	0,32
Bod E	-10,45	1,38	-12,83	18,66	-9,6	32,61
Bod F	5,52	3,63	16,68	21,28	-12,13	43,38

Tabulka 6 Vstupy do druhého příkladu

5.2.4.2 Výsledky

V tabulce jsou zaznamenány počty profilů výztuže 12 mm potřebných na 1 běžný metr desky. Opět se jedná pouze o staticky nutnou výztuž, nejsou zohledněny konstrukční zásady.

	Baumann	Capra Maury	Wood-Armer
Bod A, spodní výztuž ve směru x	2,630	2,369	2,631
Bod A, spodní výztuž ve směru y	5,319	5,058	5,319
Bod A, horní výztuž ve směru x	0,000	0,000	0,000
Bod A, horní výztuž ve směru y	0,000	0,000	0,000
Bod B, spodní výztuž ve směru x	0,000	0,000	0,000
Bod B, spodní výztuž ve směru y	0,000	0,000	0,000
Bod B, horní výztuž ve směru x	5,535	5,268	5,535
Bod B, horní výztuž ve směru y	0,770	0,502	0,769
Bod C, spodní výztuž ve směru x	0,000	0,000	0,000
Bod C, spodní výztuž ve směru y	0,000	0,000	0,000
Bod C, horní výztuž ve směru x	2,131	2,005	2,131
Bod C, horní výztuž ve směru y	7,333	7,207	7,332
Bod D, spodní výztuž ve směru x	1,219	0,000	1,220
Bod D, spodní výztuž ve směru y	1,254	0,000	1,255
Bod D, horní výztuž ve směru x	1,913	0,347	1,914
Bod D, horní výztuž ve směru y	1,878	0,312	1,878
Bod E, spodní výztuž ve směru x	0,271	0,000	0,272
Bod E, spodní výztuž ve směru y	1,623	0,157	1,622
Bod E, horní výztuž ve směru x	2,657	1,193	2,657
Bod E, horní výztuž ve směru y	1,305	0,000	1,307
Bod F, spodní výztuž ve směru x	2,533	0,630	2,533
Bod F, spodní výztuž ve směru y	2,318	0,414	2,318
Bod F, horní výztuž ve směru x	1,274	0,000	1,274
Bod F, horní výztuž ve směru y	1,489	0,000	1,489

Tabulka 7 Výsledky druhého příkladu pro jednotlivé metody

5.2.5 Vyhodnocení druhého příkladu

Výsledky druhého příkladu odpovídají výsledkům dosaženým v příkladu prvním. Metoda Capra Maury nezohledňuje kroucení, proto jsou její výsledky naprosto neadekvátní. Může tedy sloužit jen jako doplňková, protože umí převádět jednotlivé plochy již známé výztuže do různých směrů.

Metody Baumanna a Wood-Armer dosahují prakticky stejných výsledků. Obdobně jako u předchozího příkladu se liší pouze velmi nepatrně.

Nabízí se tedy otázka, proč existují a jsou používány různé metody. Metoda Baumanna je využita například v softwarech Scia Engineer, RIBTEC nebo RFEM. Metodu Capra-Maury a Wood-Armer využívají programy společností Graitec či Autodesk.

První důvod je ryze geografický. Metoda německého autora Baumanna je logicky nejvíce etablována v německy mluvících zemích, metoda francouzských autorů Capry a Mauryho nachází uplatnění ve francouzském prostředí a metoda Wood-Armerova v prostředí anglofonním.

Druhý důvod je praktický – každá z metod má své výhody i nevýhody. Metoda Baumanna je nejvšestrannější, je schopna stanovit výztuž v libovolném směru. Vstupem pro ni jsou však hlavní vnitřní síly, které je obtížné získat ručním výpočtem a pro inženýra jsou hůře odhadnutelné a kontrolovatelné. Metoda Wood-Armerova je z hlediska uživatele nejprívětivější – vychází z vnitřních sil v základních směrech a používá poměrně snadno pochopitelné výpočetní vztahy. Není však schopna stanovit vyztužení v libovolném směru. Za tímto účelem je vhodně kombinována s metodou Capra-Maury, která umí přepočítat vyztužení v určitém směru na vyztužení v libovolném jiném směru.

6 Závěr

Pro uvedení do problému práce nejprve definuje desku, její vlastnosti a možnosti výpočtu vnitřních sil. Došlo k vymezení charakteristických vlastností desky, dále byly jmenovány základní veličiny zkoumané na desce. V práci je také provedeno základní členění typů desek.

Další část práce charakterizuje jednotlivé metody výpočtu vnitřních sil na desce. Nejdříve jsou jednotlivé metody rozčleněny podle toho, zda uvažují elastické či plastické chování materiálů. Dále se práce snaží popsat jednotlivé metody výpočtu vnitřních sil. Zjištěné vnitřní síly jsou následně důležitými vstupními daty do jednotlivých metod návrhu výztuže.

Jakmile byly stanoveny vnitřní síly, přechází práce ke svému hlavnímu tématu. Tím je dimenzování výztuže v deskách. Na podněty Ing. Davida Krybuse, Ph.D. ze společnosti RIB Engineering GmbH byly vyhledány a popsány základní metody pro dimenzování výztuže. Práce popisuje čtyři základní metody – Baumannovu, Capra Maury, Wood-Armer a metodu Johansenovu. Jedná se o metody staré 40 – 50 let, které mají projektantovi usnadnit návrh výztuže pro železobetonové prvky. Snahou bylo také vyhledat metody novější, což se bohužel nepodařilo. Metody se aplikují ve výpočetních programech, kde umožňují vyřešit i složité konstrukce v relativně rychlém čase. Při počítačovém zpracování jsou schopné navrhnout výztuž pro každý jednotlivý bod, což by pro projektanta bylo časově velmi náročné.

Metody Baumannova, Capra Maury a Wood-Armer jsou v závěrečné části představeny na příkladech. První příklad je spíše teoretického charakteru, kdy se metody aplikují na obdélníkovou prostě podepřenou desku. Druhou aplikací je využití metod pro dimenzování výztuže na desce, která byla předmětem dřívějších studií. Jedná se o reálnější příklad, aby bylo vidět použití na skutečné konstrukci.

Z výsledků příkladů v poslední části je vidět, že metody Baumann a Wood-Armer dochází prakticky k totožným výsledkům. Metoda Capra Maury neumí pro prvotní návrh zohlednit vliv kroucení. Umí ale převést již zjištěnou plochu výztuže v základních směrech do jiných různých směrů. Může být tudíž využita jako doplňková metoda například pro metodu Wood-Armer, která naopak umožňuje stanovení výztuže pouze v základních směrech.

Tato práce se zabývá převážně aplikací metod dimenzování výztuže pro pouze ohýbané prvky. Dá se však aplikovat i na prvky namáhané kombinací ohybu a normálové síly. Jako logická návaznost na tuto práci se tudíž jeví aplikace jednotlivých metod například na skořepinový či deskostěnový prvek.

7 Zdroje

[1] – VRÁTNÝ, Ondřej, Martin TIPKA a Jitka VAŠKOVÁ. *Základní typy betonových konstrukcí pozemních staveb se vzorovými příklady* [online]. Praha, 2012 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: http://people.fsv.cvut.cz/~tipkamar/granty_soubory/FRVS_2012/zaklad_typy_bet_konstr.pdf. Grant FRVŠ 294/2012/G1. FSV ČVUT.

[2] - BAŽANT, Zdeněk. *BETONOVÉ KONSTRUKCE I: MODUL CS 3, Betonové konstrukce plošné – část 1* [online]. Brno, 2005 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: <http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/BL05-Betonove%20konstrukce%20I/CS3-Betonove%20konstrukce%20plosne%20I.pdf>. FAST VUT.

[3] - NILSON, Arthur H., David DARWIN a Charles W. DOLAN. *Design of Concrete Structures*. Fourteenth Edition. New York: McGraw-Hill Education, 2016. Kapitoly 13 a 14

[4] - ŠIMŮNEK, Petr. *Nosné konstrukce - AF01: 3. přednáška* [online]. Brno [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: https://www.fce.vutbr.cz/BZK/simunek.p/AF01/AF01_3prednaska.pdf. FAST VUT.

[5] - JIROUŠEK, Ondřej. *Desky: přednáška 7* [online]. Praha, 2016 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: http://mech.fd.cvut.cz/education/master/18tik/download/prednasky-2016-2017/07_desky.pdf. FD ČVUT.

[6] - BROŽOVSKÝ, Jiří a Alois MATERNA. *Základy matematické teorie pružnosti* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mat_teorie_pruznosti.pdf. Vysoká škola báňská.

[7] - VOŘECHOVSKÝ, Miroslav. *Pružnost a plasticita* [online]. Brno, 2005 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: <http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/CD03-Pruznost%20a%20plasticita/CD03-Pruznost%20a%20plasticita%20%20P01-Pruznost%20a%20plasticita%20-%20pruvodce%20predmetem.pdf>. Průvodce. FAST VUT.

[8] – MUSPRATT, M.A. *Elastic Analysis of Slabs*. Building and Environment 13. Great Britain: Pergamon Press, 1978, 51-59.

[9] - TIPKA, Martin a Josef NOVÁK. *Analýza metod výpočtu železobetonových lokálně podepřených desek* [online]. Praha, 2011 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: http://people.fsv.cvut.cz/~tipkamar/granty_soubory/FRVS_2011/analyza_lok_pod_desek.pdf. FSV ČVUT.

[10] - ZÍDEK, Rostislav a Luděk BRDEČKO. *Pružnost a plasticita: Energetické metody* [online]. Brno, 2014 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: <http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/BL05-Betonove%20konstrukce%20I/CS3-Betonove%20konstrukce%20plosne%20I.pdf>. VUT.

- [11] - KONEČNÝ, Petr. *Energetické principy a variační metody ve stavební mechanice* [online]. Ostrava [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: <http://fast10.vsb.cz/konecny/files/mkp-ost/p2edKon.pdf>. Přednáška. Vysoká škola báňská.
- [12] - ROZSYPALOVÁ, Veronika. *Výpočet plastické únosnosti desek* [online]. Brno, 2013 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=76433. Závěrečná práce. FAST VUT. Vedoucí práce doc. Ing. IVAN NĚMEC, CSc.
- [13] - KREJSA, Martin. *Pružnost a plasticita II: Nelineární chování materiálů, podmínky plasticity, mezní plastická únosnost* [online]. Ostrava [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/pp2_tema_09.pdf. Vysoká škola báňská.
- [14] - BROŽOVSKÝ, Jiří a Petr KONEČNÝ. *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice: Nelineární chování materiálů, podmínky plasticity, mezní plastická únosnost* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecnych_prvku_stavebni_mechanika_interaktivne.pdf. Vysoká škola báňská.
- [15] - BAŽANT, Zdeněk. *Betonové Konstrukce I: Betonové konstrukce plošné - část 2* [online]. Brno, 2004 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: <http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/BL02-Betonove%20Konstrukce/BL02-Plosne%20kce2.pdf>. FAST VUT.
- [16] - ŠIMŮNEK, Petr. *Betonové konstrukce II - BL09* [online]. Brno, 2015 [cit. 2021-5-12]. Dostupné z: https://www.bzk.fce.vutbr.cz/wp-content/uploads/sites/6/2017/02/BL09_01_staticky_vypocet_lokalne_podeprena_deska.pdf. FAST VUT.
- [17] - HOLAN, Jakub. *Výpočet ohybových momentů v obousměrně pruté desce: prezentace k cvičení BK01/BZKQ* [online]. Brno, 2020 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: <https://people.fsv.cvut.cz/~holanjak/vyuka/BK01/prezentace/cv07.pdf>. FSv ČVUT.
- [18] - TIPKA, Martin. *Po obvodě nepoddajně podepřená deska: 5. cvičení BK01/BZKQ* [online]. Praha [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: http://people.fsv.cvut.cz/~tipkamar/vyuka_soubory/BK01/pomucky_BK01_soubory/05_navod.pdf. FSv ČVUT.
- [19] – PROCHÁZKA, Jaroslav a Jiří ŠMEJKAL. *Betonové stropní a schodišťové konstrukce*. Praha: CVUT Praha, 2018.
- [20] - BAUMANN, Theodor. *Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken. Der Bauingenieur* 47(10). Mnichov: Springer - Verlag, 1972.
- [21] – LENSCHOW R. a M. SOZEN. *A Yield Criterion for Reinforced Concrete under Biaxial Moments and Forces*. University of Illinois, Urbana, Juli 1966.

- [22] – PETER J. *Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen für Hauptspannungen schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung*. Dissertation TH Stuttgart, 1964
- [23] – BELLMANN Jürgen – *Strategies for Concrete Shell design with Finite Elements*, TUM 21. Münchener Massivbau Seminar. SoFiSTiK 2018.
- [24] - *Method of calculating plate and shell reinforcement - analytical method* [online]. 2020 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: <https://knowledge.autodesk.com/support/robot-structural-analysis-products/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2021/ENU/RSAPRO-UsersGuide/files/GUID-E35C9B00-D485-4FD3-9988-6909AF7BC9D0-htm.html>
- [25] - *Method of calculating plate and shell reinforcement - Wood-Armer* [online]. 2020 [cit. 2021-5-11]. Dostupné z: <https://knowledge.autodesk.com/support/robot-structural-analysis-products/learn-explore/caas/CloudHelp/cloudhelp/2021/ENU/RSAPRO-UsersGuide/files/GUID-80FE7814-C14D-4A89-A6DF-68EB9E7E4815-htm.html>
- [26] – QUINTAS, Valentín. *Two Main Methods for Yield Line Analysis of Slabs*. Journal of engineering Mechanics 129(2). New York, 2003, 223-231.
- [27] – Mendoza-Chávez, Gustavo & Hervé-Secourgeon, Guillaume. *Strut-and-Tie models for the design of non-flexural elements: computational aided approach*. 2018.
- [28] - KAUFMANN, W. *Vertiefung und Ergänzungen zu Stahlbeton II: 3 Platten*. Curych, 2018. ETH Zürich.
- [29] – KUPFER H., H.K. HILSDORF a H. RÜSCH. *Behaviour of Concrete Under Biaxial Stress*. Journal ACI, Proc. 66(8). 1969.
- [30] - WILLAM K.J. a E.P. WARNKE. *Constitutive Models for Triaxial Behavior of Concrete Subjected to Triaxial Stresses*. Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Proc., 19. 1975. pp. 1–30.
- [31] - ALI AL-AHMED, Ali Hussein, Mushriq Fuad KADHIM AL-SHAMAA a Hasan Hussein ALI. *Implication of Yield Lines Theory in Method Three of the ACI Code for Two-Way Reinforced Concrete Slabs*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020, **737**. ISSN 1757-899X. Dostupné z: doi:10.1088/1757-899X/737/1/012005
- [32] – INGERSLEV, A. *The strength of rectangular plates*. Anglie: J. Inst. Estruct., 1923.
- [33] – VAZQUEZ, M. *Recocido simulado: un nuevo algoritmo para la optimacion de estructuras*. Universidad Politecnica de Madrid, Disertační práce, Španělsko. 1994.

8 Seznam obrázků

Obrázek 1 Průhyb na jednosměrně pnuté desce [3].....	12
Obrázek 2 Průhyby na obousměrně pnuté desce [3].....	13
Obrázek 3 Předpoklad o normálách [6]	14
Obrázek 4 Napětí a vnitřní síly na desce [6].....	15
Obrázek 5 Grafické znázornění přetvárné práce vnějších sil [11].....	20
Obrázek 6 Graf závislosti velikosti síly na průhybu pro nelineárně pružný materiál [11]	20
Obrázek 7 Graf závislosti velikosti síly na průhybu pro lineárně pružný materiál [11]	20
Obrázek 8 Přetvárná práce vnějších sil pro lineárně pružný a nepružný materiál [10].....	22
Obrázek 9 Deformační práce napětí [10]	22
Obrázek 10 Virtuální posun částice [10]	23
Obrázek 11 Superpozice mechanické práce [10]	25
Obrázek 12 Deformační energie z příspěvku normálového napětí [11]	27
Obrázek 13 Deformační energie pro lineárně pružný materiál [11].....	27
Obrázek 14 Průhyb na konzole způsoben vnějším zatížením [11].....	28
Obrázek 15 Model konstrukce pro metodu součtových momentů [9]	32
Obrázek 16 Určení sloupových a středních pruhů [15].....	33
Obrázek 17 Skutečné a zjednodušené rozdělení součtového momentu pole v příčných řezech [15]	33
Obrázek 18 Stanovení hodnoty celkového součtového momentu [9]	34
Obrázek 19 Rozdělení součtového momentu M_{tot} v krajním poli [15]	34
Obrázek 20 Rozdělení ohybových momentů na rámové konstrukci [9].....	35
Obrázek 21 Krajní a vnitřní náhradní rámy [15].....	36
Obrázek 22 Možnosti zjednodušení výpočetního modelu [9]	37
Obrázek 23 Symetrická a nesymetrická kombinace zatěžovacích stavů [9]	37
Obrázek 24 Určení sloupových a středních pruhů [15].....	38
Obrázek 25 Účinný průřez v kroucení pro výpočet součinitele β_i [15]	40
Obrázek 26 Krajní deskový pás [9]	41
Obrázek 27 Rozdělení celkových momentů do sloupových a středních pruhů u krajního deskového pásu s konzolou [9]	41
Obrázek 28 Schéma pracovního diagramu pro pružně plastický materiál [13].....	44
Obrázek 29 Pružnoplastický materiál se zpevněním [14]	45
Obrázek 30 Misesova podmínka plasticity [14]	45
Obrázek 31 Jednorozměrný pracovní diagram betonu [14]	48
Obrázek 32 Aproximace Rambergovou-Osgoodovou funkcí [14].....	48
Obrázek 33 Princip diskrétního modelu betonu [14].....	48
Obrázek 34 Závislost mezi otevřením trhliny a napětím [N].....	49
Obrázek 35 Lomové čáry na obdélníkové desce upnuté po obvodě [19].....	51
Obrázek 36 Působení vnitřních sil a znázornění ohybových zón [20].....	55
Obrázek 37 Vnitřní síly, ortogonální výztuže a trhliny na ohybové zóně [20].	56
Obrázek 38 Požadovaná plocha výztuže a tlaková síla v betonu pro ortogonální vyztužení [20].	57

Obrázek 39 Možná napětí v betonu porušené ohybové zóny a související Mohrova napěťová kružnice [20].	59
Obrázek 40 Možný přenos smykových sil ohybovými trhlinami v desce [20].	60
Obrázek 41 Rovnováha mezi vnitřními silami ohybové zóny a silami ve výztuži a betonu pro ortogonální výztuž [20].	61
Obrázek 42 Kompatibilita mezi deformacemi ϵ_x , ϵ_y , ϵ_b a Δ/a_m v ortogonální výztuži [20].	63
Obrázek 43 Určení směru φ_2 z podmínky, že napětí oceli v obou sadách výztuže dosáhne meze kluzu β_s a beton je vystaven pouze tlaku [20].	64
Obrázek 44 Deska B8 z práce Lenschow-Sozena [21].	65
Obrázek 45 Porovnání teoreticky očekávaných hodnot σ_y/σ_z pro $\varphi = \varphi_1$ s poměrem ocelových napětí naměřených Peterem [22] v první sérii testů.	66
Obrázek 46 Porušení prvku v druhé sérii experimentů Petera [22]	67
Obrázek 47 Metoda zkoumá různé úhly pro neekonomičtější návrh [23]	68
Obrázek 48 Možná plocha výztuže [27]	69
Obrázek 49 Vhodná oblast vyztužení pro různé hodnoty θ [27]	70
Obrázek 50 Znárodnění ohybových momentů [26].	73
Obrázek 51 Pravé křížení lomových čar se stejným znaménkem [26].	74
Obrázek 52 Lomové čáry v rozích prostě podepřené desky [26].	75
Obrázek 53 Mohrova kružnice popisující vztahy mezi jednotlivými momenty [26].	75
Obrázek 54 Příklady lomových čar na volných koncích [26]	76
Obrázek 55 Lomové čáry na prostě podepřených deskách [26].	77
Obrázek 56 Lomové čáry v rozích na vetknutých hranách [26]	78
Obrázek 57 Řešené body pro první příklad	81
Obrázek 58 Ohybový moment m_x	82
Obrázek 59 Ohybový moment m_y	82
Obrázek 60 Krouticí moment m_{xy}	83
Obrázek 61 Hlavní moment m_1	83
Obrázek 62 Hlavní moment m_2	84
Obrázek 63 Úhel α	84
Obrázek 64 Výsek podlaží v programu SCIA Engineer	89
Obrázek 65 Půdorys desky s řešenými body.	90
Obrázek 66 Ohybový moment m_x na reálné desce.	91
Obrázek 67 Ohybový moment m_y na reálné desce.	91
Obrázek 68 Krouticí moment m_{xy} na reálné desce	92
Obrázek 69 Hlavní moment m_1 na reálné desce.	92
Obrázek 70 Hlavní moment m_2 na reálné desce.	93
Obrázek 71 Úhel α na reálné desce	93

9 Seznam tabulek

Tabulka 1 Doporučený poměr m_y/m_x pro desky po obvodě nepoddajně podepřené	52
Tabulka 2 Tabulka hodnot kh , používaná dříve v Německu	58
Tabulka 3 Vstupy do prvního příkladu	88
Tabulka 4 Výsledky prvního příkladu pro jednotlivé metody	88
Tabulka 5 Přehled zatížení pro reálný příklad	90
Tabulka 6 Vstupy do druhého příkladu	94
Tabulka 7 Výsledky druhého příkladu pro jednotlivé metody	94