České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Katedra radioelektroniky
Studijní program: ***Otevřené elektronické systémy***

Typy funkcionálního kalkulu pro operátory a matice

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor: Erik Rapp
Vedoucí: Prof. RNDr. Jan Hamhalter, CSc.
Odevzdáno: Květen, 2021

Tato stránka je úmyslně ponechána prázdná.

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Rapp** Jméno: **Erik** Osobní číslo: **483584**

Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**

Zadávající katedra/ústav: **Katedra radioelektroniky**

Studijní program: **Otevřené elektronické systémy**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Typy funkcionálního kalkulu pro operátory a matice

Název bakalářské práce anglicky:

Types of Functional Calculus for Operators and Matrices

Pokyny pro vypracování:

Cílem je srovnat a propojit základní typy kalkulu (holomorfní, spojitý a ternární) pro operátory na Hilbertově prostoru a matice. Zkoumat ternární kalkulus pro obdélníkové matice (případně obecnější operátory mezi Hilbertovými protory) a snažit se pomocí polárního rozkladu nalézt souvislost mezi ternárním spektrem, standardním spektrem a singulárními hodnotami. Zkoumat spektrální věty v ternárním kalkulu. V literatuře neexistuje žádné pojednání o srovnání spekter a funkčních kalkulů. Úkolem práce je zaplnit tuto mezeru, sepsat ucelený text o této problematice a obohatit ho o nové výsledky a ukázky aplikací.

Seznam doporučené literatury:

[1] W.Rudin: Functional Analysis, Tata McGraw-Hill, 1974
[2] W.Kaup: Spectral singular values in JB* triples, Proc. of the Royla Irish Academy 96 (A), (1996), 95-103.
[3] C.A.Akemann, G.K.Pedersen: Ideal perturbation of elements in C*-algebras, Math. Scan. 41, 117-139 (1977)

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

prof. RNDr. Jan Hamhalter, CSc., katedra matematiky FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **22.01.2021** Termín odevzdání bakalářské práce: ______________

Platnost zadání bakalářské práce: **30.09.2022**

prof. RNDr. Jan Hamhalter, CSc.	doc. Ing. Josef Dobeš, CSc.	prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce	podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

.

Datum převzetí zadání Podpis studenta

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne ....

....

Erik Rapp

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat svým přátelům Karolíně Veselé a Martinovi Šimákovi za podporu a týmovou práci při studiu, a zároveň svému vedoucímu prof. RNDr. Janovi Hamhalterovi, CSc. nejen za inspiraci ke studiu velice zajímavé partie matematiky, ale zároveň za ochotu a především věnovaný čas.

Erik Rapp

Název práce:
Typy funkcionálního kalkulu pro operátory a matice

Autor: Erik Rapp

Studijní program: Otevřené elektronické systémy
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jan Hamhalter, CSc.
České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická, Katedra radioelektroniky

Abstrakt:
Hlavním cílem této práce je seznámit čtenáře s nejběžnějšími typy funkcionálního kalkulu v kontextu obecných Banachových algeber, což zahrnuje holomorfní a spojitý funkcionální kalkulus, a ukázat typické aplikace, především v případě konečně dimenzionálních unitálních Banachových algeber čtvercových matic. Pro tento účel zavedeme základní spektrální teorii a ukážeme spektrální dekompozice pro speciální prvky. V poslední kapitole se zaměříme na Banachův prostor obdélníkových matic, které sice netvoří asociativní algebru vzhledem k násobení, ale přesto mají strukturu Jordanova triple systému, ve kterém budeme uvažovat další obecnější funkcionální kalkulus.

Klíčová slova: Banachovy algebry, funkcionální kalkulus, lineární operátory

Title:
Types of functional calculus for operators and matrices

Author: Erik Rapp

Abstract:
The main aim of this bachelor thesis is to introduce the reader to the most common types of functional calculus in the context of general Banach algebras, which includes holomorphic and continuous calculus, and show some typical applications, especially in the case of finite dimensional unital Banach algebras of square matrices. For this purpose, basic spectral theory will be introduced and spectral decompositions for special elements will be discussed. In the last chapter, we will focus on Banach spaces of rectangular matrices that do not form an associative algebra under multiplication, but nonetheless contain structure of Jordan triple system for which yet another, more general functional calculus can be considered.

Key words: Banach algebras, functional calculus, linear operators

Obsah

Tato stránka je úmyslně ponechána prázdná.

Úvod

Banachovy algebry jsou moderní abstraktní matematická teorie, kterou lze považovat za kombinaci mnoha různých odvětví matematiky, jako je například topologie či abstraktní algebra, která vznikla v první polovině dvacátého století společně s matematickým odvětvím funkcionální analýzy, ke které teď neoddělitelně patří. Za zakladatele teorie Banachových algeber lze považovat Israila Moiseeviche Gelfanda (1913 - 2009), který tuto abstraktní teorii poprvé rozvedl ve své disertační práci (1939).

Banachovy algebry lze dosti naivně charakterizovat jako určité zobecnění komplexních čísel, což je normovaný lineární prostor, konkrétněji Banachův prostor, na kterém lze uvažovat další operace, jako je asociativní násobení či například komplexní sdružení, které obecněji nazýváme involucí. Skutečně, mnohé Banachovy algebry jsou opravdu isometricky isomorfní komplexním číslům, což je důsledek Mazurovy věty [12].

Vzhledem k tomu, že obecné Banachovy algebry jsou lineární prostory s operací násobení, není překvapivé, že v kontextu takových algeber lze uvažovat mocniny a tedy i formální polynomy, což však vede na přirozenou otázku, zda-li není možné takové polynomy charakterizovat pomocí polynomiálních zobrazení, tzn. jestliže máme algebru X a libovolný prvek $x \in X$ a uvažujeme nějaké polynomiální zobrazení $p \in C(\Omega)$, otázkou je, zda-li je možné najít nějaký prvek dané algebry ve tvaru

$$p(x) \in X,$$

takový, který bude mít stejné vlastnosti. Samozřejmě stejná otázka platí i pro obecné spojité zobrazení $f \in C(\Omega)$, a odpověď na takovou otázku dává právě konstrukce, které říkáme obecně funkcionální kalkulus.

V první kapitole této práce se budeme věnovat nejobecnějšímu typu Banachových algeber, ve kterých nebudeme předpokládat žádnou dodatečnou strukturu, a ukážeme, že na těchto algebrách vždy existuje funkcionální kalkulus, budeme-li uvažovat pouze holomorfní zobrazení. Tento kalkulus budeme zavádět postupně a průběžně budeme některé výsledky ilustrovat na jednoduchých příkladech.

Ve druhé kapitole budeme uvažovat komutativní Banachovy algebry, ve kterých vždy existují netriviální ideály, které lze výhodně využít pro teorii Gelfandovy reprezentace, kterou lze naivně popsat jako zobecněnou Fourierovu transformaci, což ukážeme na dvou standardních příkladech. Těmto algebrám následně dáme dodatečnou strukturu podobné struktuře komplexních čísel a ukážeme, že nám Gelfandova reprezentace umožňuje pro jistou třídu prvků uvažovat funkcionální kalkulus definovaný pro libovolné spojité zobrazení.

V poslední kapitole si zavedeme základní algebraickou teorii Jordanových triple systémů, přičemž se budeme soustředit pouze na prostory $M^{m,n}(\mathbb{C})$. Na těchto prostorech ukážeme existenci polární dekompozice a také analogie spektrální dekompozice. Následně zavedeme pomocí polární dekompozice obecnější funkcionální kalkulus, který bude zobecněním funkcionálních kalkulů z předchozích kapitol.

Tato stránka je úmyslně ponechána prázdná.

1. Obecné Banachovy algebry

Přirozeným krokem k rozšíření teorie lineárních prostorů libovolné dimenze je vybavit daný prostor konkrétní binární operací, která tomuto prostoru dodá novou algebraickou strukturu, která je analogická okruhům (připomeňme si, že okruh má binární operace dvě). Vzhledem k tomu, že vektory, jakožto prvky lineárního prostoru, umíme sčítat, dává smysl o této dotatečné operaci mluvit jako o násobení.

Definice 1.1 (Asociativní algebra)**.** Nechť je X lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ s binární operací násobení, která pro všechna $x, y \in X$ a $a \in \mathbb{F}$ splňuje

(1) $(xy)z = x(yz)$,

(2) $x(y+z) = xy + xz$,

(3) $(y+z)x = yx + zx$,

(4) $a(xy) = (ax)y = x(ay)$.

Prostor X s takovou operací nazýváme asociativní algebra.

Definice 1.2 (Jednotka)**.** Nechť je X asociativní algebra. Prvek $e \in X$ se nazývá jednotka, jestliže pro všechna $x \in X$ platí

$$ex = x = xe. \tag{1.1}$$

Definice 1.3 (Mocniny)**.** Nechť je X asociativní algebra a $x \in X$. Mocninu n-tého řádu definujeme iterativně ve tvaru

$$x^n = x^{n-1}x, \tag{1.2}$$

přičemž má-li algebra X jednotku, potom definujeme $x^0 = e$.

Definice 1.4 (Idempotent)**.** Nechť je X asociativní algebra. Prvek $x \in X$ se nazývá idempotent, jestliže pro něj platí

$$x^2 = x. \tag{1.3}$$

Poznámka. Indukcí pro idempotentní prvky zřejmě $x^n = x$.

Tato definice je však čistě algebraická, a proto zavádíme tzv. Banachovy algebry, které pro studium algeber využívají funkcionálně analytické metody. Právě tyto algebry v této kapitole zavedeme a ukážeme, že ať je naše algebra sebekomplikovanější, vždy ji lze výhodně vnořit do prostorů spojitých zobrazení $C(\Omega)$ či případně $C_0(\Omega)$, kde konkrétní volba topologického prostoru Ω záleží na vlastnostech dané algebry.

1.1 Základní pojmy

Definice 1.5 (Banachova algebra)**.** Banachův prostor X se součinem, který tvoří asociativní algebru, nazýváme Banachova algebra, jestliže pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \, . \tag{1.4}$$

Existuje-li navíc $e \in X$ takové, že pro všechna $x \in X$ platí

$$ex = xe = x, \quad \text{a} \quad \|e\| = 1, \tag{1.5}$$

potom Banachovu algebru X nazýváme unitální Banachovou algebrou, přičemž prvek e nazýváme jednotkou.

Poznámka. Protože je zvykem, z dobrého důvodu, teorii budovat v konkrétních tělesech reálných či komplexních čísel, budeme nespecifikované těleso v předchozí definici uvažovat jako těleso komplexních čísel. Samozřejmě nám nic nebrání v tom si zvolit naše těleso reálné, ale to s sebou nese určitá omezení.

Na binární operaci násobení neklademe žádné další podmínky kromě těch, které se vyskytují v definici, což konkrétněji v našem případě znamená, že nemusí být obecně komutativní. Pokud však násobení komutativní je, pak Banachovu algebru nazýváme komutativní Banachovou algebrou, abychom tuto skutečnost speficikovali.

Podmínka pro násobení ve tvaru nerovnosti norem může na první pohled vypadat zvláštně, jejím jednoduchým důsledkem je však následující tvrzení.

Tvrzení 1.1. Je-li X Banachova algebra, potom je součin spojité zobrazení, přičemž

$$\|x^n\| \leq \|x\|^n \,. \tag{1.6}$$

Důkaz. Uvažujme posloupnosti, pro které $x_n \to x$ a $y_n \to y$; potom platí

$$\|x_n y_n - xy\| = \|(x_n y_n - xy) + (x_n y - x_n y)\| \leq \|x_n - x\| \, \|y\| + \|y_n - y\| \, \|x_n\| \to 0,$$

z čehož plyne, že $x_n y_n \to xy$. Druhou část lze ukázat indukcí pro $x^n = x^{n-1}x$. □

1.1.1 Základní příklady algeber

Dříve než přejdeme k popisu obecných vlastností Banachových algeber, ukážeme nejprve, jak takové algebry vypadají na konkrétních případech, ze kterých by měla být patrná i motivace pro celou naši teorii. Hrubě lze Banachovy algebry rozdělit na tři případy, a to funkční algebry, operátorové algebry a ostatní algebry. Nejedná se samozřejmě o žádnou formální klasifikaci, je to pouze praktická záležitost.

Příklad 1.1. Lineární prostor $\mathbb{C}$ (nad $\mathbb{C}$) slouží jako prototyp komplexní Banachovy algebry (stejně tak můžeme sestrojit i algebru reálnou), kde jako binární operaci násobení uvažujeme obyčejný součin, který známe v tělese komplexních čísel.

Příklad 1.2. Uvažujme kompaktní Hausdorfův prostor K. Prostor komplexních spojitých zobrazení $C(K)$ s binární operací násobení, kterou definujeme ve tvaru

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

tvoří komutativní Banachovu algebru s jednotkou $\mathbf{1}_K$. Skutečnost, že tato operace násobení splňuje všechny podmínky z definice algebry, je zřejmá, přičemž pro normu platí

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)| \sup_{x \in K} |g(x)| = \|f\|_\infty \, \|g\|_\infty \,,$$

takže i tato podmínka pro Banachovu algebru je splněna. V případě, že je prostor $K = K_n$ konečný, potom pro tuto algebru platí

$$C(K_n) \cong \mathbb{C}^n,$$

kde v případě $n = 1$ dostáváme předchozí, nejjednodušší příklad Banachovy algebry. Pokud dále zeslabíme podmínku kompaktnosti prostoru K na lokální kompaktnost, pak lze uvažovat prostor spojitých zobrazení, které mizí v nekonečnu $C_0(K)$. Tento prostor má však jednotku pouze v případě, kdy je prostor K kompaktní.

Příklad 1.3. Uvažujme kompaktní Hausdorfův prostor K s diferenciální strukturou (tj. můžeme pro zobrazení na tomto prostoru uvažovat derivace) a algebru $C(K)$. Podprostor spojitě diferencovatelných zobrazení $C^n(K) \subset C(K)$ tvoří komutativní unitální algebru v případě, že uvažujeme normu (jednotka musí mít normu jedna) ve tvaru

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sum_k \|f^{(k)}\|_\infty.$$

Příklad 1.4. Nechť je $D \subset \mathbb{C}$ jednotkový otevřený disk a nechť

$$A(D) = H^\infty(D) \cap C(\bar{D}),$$

kde prostor $H^\infty(D)$ je prostor omezených holomorfních zobrazení na D. Uvážíme-li na tomto prostoru standardní normu ve tvaru

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)| = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|,$$

kde na pravé straně jsme využili toho, že uvažujeme pouze spojitá zobrazení, potom v takovém případě potom prostor $A(D)$ tvoří komutativní unitální Banachovu algebru s násobením po složkách. Tato algebra je taktéž dle dané konstrukce podalgebrou prostoru $H^\infty(D)$.

Definice 1.6 (Konvoluce)**.** Nechť je $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Konvoluci definujeme ve tvaru

$$f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, \mu(\mathrm{d}y). \tag{1.7}$$

Příklad 1.5. Uvažujme prostor Lebesguovsky integrovatelných zobrazení $L^1(\mathbb{R}^n)$ s konvolucí jako operací násobení. Tato operace splňuje všechny vlastnosti násobení, přičemž aplikací Fubiniho věty zjistíme (Youngova nerovnost), že pro konvoluci platí

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1,$$

z čehož plyne, že tento prostor s konvolucí tvoří Banachovu algebru, přičemž je tato algebra komutativní. Tato algebra však není unitální, ale lze ji rozšířit na unitální algebru tak, že budeme uvažovat prostor všech Borelovských měr $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, přičemž pro $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ máme konkrétně rozšíření ve tvaru

$$\mathrm{d}\mu = f\, \mathrm{d}\lambda + z\, \mathrm{d}\delta,$$

kde λ je Lebesgueova míra (shoduje se s Borelovou mírou), δ je delta míra a $z \in \mathbb{C}$.

Následující příklad je značně komplikovanější, neboť využívá nových pojmů, kterým se v této práci nevěnujeme. Uvádíme ho však pro zajímavost, tudíž ho lze vynechat, společně s následujícím příkladem, bez újmy na úplnosti teorie. V případě zájmu čtenáře však uvedeme i konkrétní realizaci v příkladu, který bude následovat.

Příklad 1.6. Uvažujme lokálně kompaktní grupu G. Z teorie míry je známo, že existuje Borelova míra μ na G, kterou nazýváme Haarova míra (lze ukázat, že je jediná), jež je konečná pro každou kompaktní množinu $K \subset G$ a nenulová pro každou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset G$, pričemž je zároveň zleva translačně invariantní, tj. pro každou Borelovskou množinu $S \subset G$ a každé $g \in G$ platí

$$\mu(gS) = \mu(S).$$

Uvažujeme-li prostor $L^1(G)$ s operací násobení ve tvaru

$$f * g = \int_G f(yx^{-1})g(x)\, \mu(\mathrm{d}x),$$

pak je prostor $L^1(G)$ Banachova algebra, která je komutativní pouze v případě, kdy je G komutativní grupa, a unitální, pokud je grupa G konečná. Tento případ Banachovy algebry je důležitý zejména v harmonické analýze, která úzce souvisí s Fourierovou analýzou.

Příklad 1.7. Uvažujme lokálně kompaktní grupu kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$. Že se jedná skutečně o grupu lze jednoduše ověřit. Co se týče topologie, tak uvažujeme standardní topologii, čímž opravdu dostáváme lokálně kompaktní grupu. Uvažujme míru

$$\mu([a,b]) = \int_a^b \frac{1}{z}\, \mu(\mathrm{d}z).$$

Je zřejmé, že takto definovaná míra skutečně splňuje všechny vlastnosti Haarovy míry z předchozího příkladu. Ověříme, že je translačně invariantní. Výpočtem předchozího integrálu dostáváme explicitní tvar míry ve tvaru

$$\mu([a,b]) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Je-li $g \in \mathbb{R}^+$ libovolné, potom platí

$$\mu(g[a,b]) = \mu([ga,gb]) = \ln\left(\frac{gb}{ga}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \mu([a,b]),$$

z čehož plyne translační invariance.

Dále si ukážeme dva důležité příklady, pro jejichž formální konstrukci budeme potřebovat následující větu, kterou vedeme bez důkazu.

Věta 1.2 (Cayley-Dickson)**.** Nechť je X normovaná algebra s involucí. Nechť

$$X' = X \oplus X, \tag{1.8}$$

ve smyslu součtu dvou isomorfních kopií lineárního prostoru. Uvažujme konstrukci:

1. Nechť $x, y, v, w \in X$. Násobení na X' definujeme ve tvaru

   $$(x,y)(v,w) = (xv - w^*y, wx + yv^*), \tag{1.9}$$

   přičemž jednotku definujeme jako $(1,0) \in X'$.

2. Existuje přirozené vnoření algebry $X \hookrightarrow X'$ ve tvaru $x \mapsto (x,0)$.

3. Normu definujeme ve tvaru

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \,. \tag{1.10}$$

4. Involuci definujeme ve tvaru

$$(x,y)^* = (x^*, -y). \tag{1.11}$$

Potom je X' opět normovaná algebra.

Definice 1.7. Normovaná algebra X' z předchozí věty se nazývá Cayley-Dicksonova iterace, přičemž popsané konstrukci se říká Cayley-Dicksonův proces.

Poznámka. Všimněme si, že jestliže na reálných číslech budeme uvažovat triviální involuci $x^* = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, potom Cayley-Dicksonův proces nám dává komplexní čísla

$$\mathbb{R}' \cong \mathbb{C}.$$

Příklad 1.8. Uvažujme prostor kvaternionů $\mathbb{H}$, což je prostor, který obsahuje prvky

$$a + bi + cj + dk \in \mathbb{H},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pro něž lze násobení shrnout v následující tabulce.

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Tabulka 1.1: Kvaternionové generátory.

Analogicky komplexnímu sdružení lze definovat sdružení pro kvaterniony ve tvaru

$$q^* = a - bi - cj - dk,$$

díky čemuž lze přirozeně definovat normu na tomto prostoru ve tvaru

$$\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

Prostor kvaternionů formálně získáme Cayley-Dicksonovým procesem nad komplexními čísly. Nechť je tedy $\mathbb{C}'$ taková iterace a $(a + bi, c + di) \in \mathbb{C}'$, potom kvaternionu odpovídá

$$(a + bi, c + di) \cong a + bi + cj + dk.$$

Vynásobením dvou kvaternionů dostáváme

$$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) = (ac - bf - cg - dh) + (af + be + ch + dg)i + \cdots \\ \cdots + (ag - bh + ce + df)j + (ah + bg - cf + de)k.\end{aligned}$$

A pro libovolné dva prvky iterace $\mathbb{C}'$ je násobení ve tvaru

$$\begin{aligned}(a + bi, c + di)(e + fi, g + hi) = ((ac - bf - cg - dh) + (af + be + ch + dg)i, \\ (ag - bh + ce + df) + (ah + bg - cf + de)i),\end{aligned}$$

z čehož je tedy zřejmé, že si tyto dva součiny odpovídají. Vnoření komplexních čísel do kvaternionové algebry je zřejmý, stejně tak i norma. Pro sdružení kvaternionů máme

$$(a + bi, c + di)^* = (a - bi, -c - di) \cong a - bi - cj - dk.$$

Tímto získáváme reálnou nekomutativní unitální Banachovu algebru, protože prostor kvaternionů je úplný a zároveň je kvaternionové násobení asociativní. Protože je tento prostor čtyřdimenzionální, můžeme ho ztotožnit s čtyřdimenzionálním prostorem čtvercových matic. Uvažujme homomorfismus ve tvaru

$$f(a + bi + cj + dk) = \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix}.$$

Podprostor $H \subset M^2(\mathbb{C})$ všech matic tohoto tvaru má bázi

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Homomorfismus f na tomto podprostoru je isomorfismus, takže $\mathbb{H} \cong H$.

Na konec úvodní sekce uvedeme příklad algebry, která není Banachovou algebrou a kterou lze získat analogickým způsobem, kterým jsme zkonstruovali kvaternionovou algebru.

Příklad 1.9. Uvažujme normovanou algebru oktonionů $\mathbb{O} \cong \mathbb{H}'$. Tato algebra již na rozdíl od kvaternionové algebry není Banachova algebra, protože násobení oktonionů není asociativní, což lze nahlédnout z následující tabulky pro násobení oktonionů.

$\cdot$	i	j	k	kl	jl	il	l
i	-1	k	$-j$	jk	$-kl$	$-l$	il
j	$-k$	-1	i	$-il$	$-l$	kl	jk
k	j	$-i$	-1	$-l$	il	$-jk$	kl
kl	$-jl$	il	$-l$	-1	$-i$	$-j$	$-k$
jl	kl	l	$-il$	$-i$	-1	k	$-j$
il	l	$-kl$	jl	j	$-k$	-1	$-i$
l	$-il$	$-jl$	$-kl$	k	j	i	-1

Tabulka 1.2: Oktonionové generátory.

Uvažujme například součin $(ij)l = -kl$. Potom je zřejmé, že násobení nemůže být asociativní, protože $i(jl) = kl$, ale $-kl \neq kl$, takže oktoniony netvoří Banachovu algebru, neboť z definice musí součin být asociativní. Stejně tak jako oktoniony netvoří Banachovu algebru, netvoří ji ani žádné vyšší Cayley-Dicksonovy iterace (další taková iterace bude šestnáctidimenzionální normovaná algebra nazývaná sedoniony).

Příklad 1.10. Uvažujme Banachův prostor X a prostor lineárních operátorů $B(X)$. Pokud budeme uvažovat operaci násobení jako skládání operátorů, pak se zřejmě jedná o unitální Banachovu algebru. V případě, že má Banachův prostor $X = X_n$ konečnou dimenzi, je ze základního kurzu lineární algebry známo, že pro lineární operátory lze psát

$$B(X_n) \cong M^n(\mathbb{C}),$$

kde v případě prostoru čtvercových matic $M^n(\mathbb{C})$ uvažujeme nejčastěji Frobeniovu normu (protože se jedná o prostor konečné dimenze, všechny normy jsou ekvivalentní) ve tvaru

$$\|A\|_F = \left(\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zajímavé je, že je-li $n > 1$, potom se nejedná obecně o komutativní Banachovu algebru.

S posledním příkladem, který uvedeme, a který není ukázkou Banachovy algebry, se můžeme nejčastěji setkat v kontextu fyziky.

Příklad 1.11. Uvažujme Euklidovský prostor $\mathbb{R}^3$ a operaci vektorového součinu. Víme, že tato operace není asociativní ani komutativní, ale platí pro ní nerovnost ve tvaru

$$\|x \times y\| \leq \|x\| \, \|y\| \, ,$$

což znamená, že na tuto algebru lze nahlížet jako na neasociativní normovanou algebru, ale nikoli jako na Banachovu algebru.

1.1.2 Jednotka a invertibilní prvky

Vzhledem k tomu, že v Banachových algebrách, či algebrách obecně, zavádíme pojem násobení prvků, je zajímavé se zároveň soustředit na inverzní operaci, což je v přímé analogii s teorií grup, či v našem případě spíše vhodněji řečeno s teorií okruhů. V takovém případě přirozeně vyžadujeme existenci prvku, kterému říkáme jednotka. Takový prvek nemá žádný důvod se v algebrách vyskytovat, což však obecně není problém, jak ukážeme v této sekci, což zároveň implikuje, že obecně můžeme naše Banachovy algebry, ve kterých pracujeme, považovat za unitální.

Přesto, že algebry obecně jednotku obsahovat nemusí, mnohé důležité prostory, se kterými se běžně v teoriích, a případně praxi, setkáváme, jednotku přirozeně obsahují. V případě, pokud naše Banachova algebra X jednotku neobsahuje, pak ji lze formálně k dané algebře přidat, tj. o jednotku ji rozšířit na unitální algebru, kterou značíme $X[e]$. V literatuře se můžeme setkat především s následujícím postupem, který se dá považovat za standardní.

Příklad 1.12. Nechť je X Banachova algebra a dále nechť je $X[e] = X \times \mathbb{C}$ s normou

$$\|(x, z)\|_{X[e]} = \|x\|_X + |z| \, .$$

Operaci násobení v takovém případě definujeme ve tvaru

$$(x, z_1)(y, z_2) = (xy + z_1 y + z_2 x, z_1 z_2),$$

kde násobení uvnitř závorek je obyčejné násobení převzaté z původní algebry X. Jednotku přirozeně v tomto případě můžeme definovat jako $e = (0, 1)$. Platí totiž

$$(0, 1)(x, z) = (x, z)(0, 1) = (x, z).$$

Motivace pro tvar tohoto konkrétního součinu spočívá v tom, že zobrazení $x \mapsto (x, 0)$ je isometrický isomorfismus mezi X a podprostorem $X[e]$ s kodimenzí jedna. Píšeme tedy

$$X[e] = X \oplus \mathbb{C},$$

přičemž jednotlivé prvky v návaznosti na direktní součet můžeme značit jako

$$(x, z) = x + ze.$$

Zajímavé je pozorování analogie mezi tímto zápisem jednotlivých prvků rozšířené algebry a zápisem komplexních čísel. Pro ilustraci konkrétního příkladu viz 1.5 v minulé sekci.

Vidíme tedy, že pokud naše algebra X jednotku přirozeně neobsahuje, lze ji relativně jednoduše přidat výše ilustrovaným postupem, což samozřejmě vede na přirozenou otázku, co se stane, když se pokusíme o přidání jednotky k již unitalizované algebře $X[e]$. Vzhledem k tomu, že se jedná o důležité pozorování, uvedeme to jako tvrzení.

Tvrzení 1.3. Je-li X unitální Banachova algebra, pak je jednotka jediná.

Důkaz. Uvažujme, že má algebra X dvě různé jednotky $e, e' \in X$, potom lze psát

$$e = ee' = e'e = e',$$

z čehož plyne spor, tudíž musí být tyto dvě jednotky nutně stejné. □

Obecně může dojít k situaci, že algebra X obsahuje prvek $e \in X$, který se chová jako jednotka, tj. pro všechna $x \in X$ platí

$$ex = xe = x,$$

ale nebude mít jednotkovou normu, což znamená, že se nemůže jednat o jednotku vzhledem k definici obecné Banachovy algebry, která vyžaduje, aby tento prvek měl jednotkovou normu. Pro tyto prvky, které se chovají jako jednotky, speciálně platí

$$\|x\| = \|ex\| \leq \|e\| \|x\| \implies 1 \leq \|e\|.$$

Tento nedostatek lze odstranit následující úvahou.

Na normovaných prostorech můžeme uvažovat ekvivalentní normy, což pro připomenutí znamená, že existují $A, B > 0$ takové, že pro všechna $x \in X$ platí

$$A \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B \|x\|_2,$$

což však naznačuje, že je možné uvažovat ekvivalentní normy na obecných Banachových algebrách, a to konkrétněji tak, abychom vyhověli požadavku jednotkové normy jednotky. Toto skutečně můžeme provést, a to vždy, o čemž pojednává následující věta.

Věta 1.4. Je-li X Banachova algebra, která obsahuje jednotku, pak existuje ekvivalentní norma, vzhledem ke které je tato algebra unitální.

Máme-li Banachovu algebru, která přirozeně žádnou jednotku neobsahuje, a nemůžeme si dovolit z blíže nespecifikovaných důvodů jednotku přidat (může se jednat o praktický důvod), pak ji můžeme částečně nahradit tzv. aproximativní jednotkou.

Definice 1.8 (Aproximativní jednotka)**.** Nechť je X Banachova algebra. Je-li $(e_n) \subset X$ posloupnost, která pro všechna $x \in X$ splňuje

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n x - x\| = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{n\to\infty} \|x e_n - x\| = 0, \tag{1.12}$$

pak tuto posloupnost nazýváme levou, resp. pravou aproximativní jednotkou. V případě, že splňuje obě podmínky, pak tuto posloupnost jednoduše nazýváme aproximativní jednotkou.

Poznámka. Banachova algebra X bez jednotky nemusí mít ani aproximativní jednotku. Jako příklad lze uvést algebru s triviálním násobením $xy = 0$ pro všechna $x, y \in X$.

Příklad 1.13. Již víme z dřívejší sekce, že algebra $L^1(\mathbb{R})$ jednotku neobsahuje a přidaná jednotka má podobu delta míry, která je hrubě řečeno koncentrovaná v jednom konkrétním bodě. Můžeme tedy kupříkladu sestrojit posloupnost $(e_n) \subset L^1(\mathbb{R})$ ve tvaru

$$e_n = \frac{n}{2}\mathbf{1}_{[-1/n,\,1/n]}.$$

Že se jedná o aproximativní jednotku můžeme ukázat přímo z předchozí definice, ale protože již víme, jak by měla vypadat přidaná jednotka, ukážeme, že se námi zvolená posloupnost lokálně chová stejně jako delta míra. Nechť tedy $f \in L^1(\mathbb{R})$, výpočtem

$$(f * e_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)e_n(y)\,\mu(\mathrm{d}y) = \frac{n}{2}\int_{-1/n}^{1/n} f(x-y)\,\mu(\mathrm{d}y) \to f(x),$$

kde limita na pravé straně plyne z Lebesguovy věty.

Jako další přirozený krok je studium inverzních prvků, kvůli kterým se jednotky v algebrách, a jiných algebraických strukturách, zavádí. Začneme nejdříve z definice.

Definice 1.9 (Inverzní prvek)**.** Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$ je libovolný prvek. Existuje-li nějaké $y \in X$, pro které platí

$$xy = yx = e, \tag{1.13}$$

pak prvek y nazýváme inverzním prvkem k x a značíme ho $y = x^{-1}$. Prostor všech invertibilních prvků Banachovy algebry X značíme obvykle $G(X)$.

Příklad 1.14. Uvažujme algebru posloupností $\ell^1(\mathbb{N})$ a nechť $R, L \in B(\ell^1(\mathbb{N}))$ jsou lineární operátory pravé a levé translace, tj. operátory ve tvaru

$$R(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots) \quad \text{resp.} \quad L(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Všimněme si, že je-li $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ libovolné, potom tedy máme

$$(LR)(x) = x, \quad \text{ale} \quad (RL)(x) \neq x,$$

z čehož plyne, že existují i jednostranné inverzní prvky.

Tvrzení 1.5. Je-li X unitální Banachova algebra a $x, y \in G(X)$, potom $xy \in G(X)$.

Důkaz. Nechť je tedy $xy \in G(X)$ a $z \in X$ takové, že platí

$$xyz = e.$$

Potom také máme vynásobením příslušnými inverzemi výraz ve tvaru

$$y^{-1}x^{-1}xyz = y^{-1}x^{-1},$$

z čehož dostáváme, že $z = y^{-1}x^{-1}$, a tudíž $xy \in G(X)$. □

Poznámka. Prostor všech invertibilních prvků unitální Banachovy algebry $G(X)$ již obecně není Banachova algebra. Uvažujme libovolné $x \in G(X)$, potom ale zřejmě

$$(x - x) \notin G(X),$$

takže vidíme, že tato množina není uzavřená na součet. Vzhledem k předchozí větě je však uzavřená na násobení a inverzní prvky, takže tvoří grupu.

Příklad 1.15. Uvažujme kompaktní Hausdorfův prostor K a algebru $X = C(K)$. Potom prostor všech invertibilních prvků $G(X)$ obsahuje právě taková zobrazení, která jsou nenulová, tj. $f(x) \neq 0$, pro všechna $x \in K$.

Stejně tak jako žádná unitální Banachova algebra nemůže obsahovat více než jednu jednotku, žádný invertibilní prvek nemůže obsahovat více jak jeden prvek k němu inverzní. Protože jsme první pozorování uvedli jako tvrzení, uvedeme i toto jako další tvrzení.

Tvrzení 1.6. Nechť je X unitální Banachova algebra. Je-li $x \in G(X)$, potom prvek k němu inverzní je jediný.

Důkaz. Nechť tedy $x \in G(X)$ a $y, z \in G(X)$ jsou k němu inverzní, potom

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z,$$

což však vede ke sporu, tudíž je inverzní prvek jediný. $\square$

Máme-li nějakou Banachovu algebru X a libovolný prvek $x \in X$, pak je z praktického hlediska úloha nalezení jemu inverzního prvku dosti náročná a mnohdy až neřešitelná. Pokud však tento prvek splňuje určité příjemné vlastnosti, pak inverzní prvek můžeme nalézt například aplikací následující věty.

Tvrzení 1.7 (Neumann)**.** Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$ takové, které splňuje podmínku $\|x\| < 1$, potom platí $(e - x) \in G(X)$.

Důkaz. Uvažujme částečný součet ve tvaru

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x^n.$$

Protože se jedná o analogii geometrické řady, pak tento součet konverguje, přičemž stejně jako klasická geometrická řada konverguje absolutně, neboť platí

$$\|s_k\| \leq \sum_{n=0}^{k} \|x\|^n < \infty.$$

Nakonec pro tyto částečné součty platí

$$s_k(e - x) = e - x^{k+1} = (e - x)s_k,$$

a protože $x^n \to 0$, pak je $(e - x) \in G(X)$, přičemž limita $s_k \to s$ nám dává inverzi. $\square$

Podmínku v předchozí větě kladenou na velikost normy uvažovaného prvku nelze zanedbat, pokud budeme chtít uvažovat danou inverzi, viz následující příklad.

Příklad 1.16. Uvažujme algebru $C([0, 1])$ a prvek $(2 - x) \in C([0, 1])$. Pro toto zobrazení zřejmě platí, že $\|(2 - x)\|_\infty = 2$, takže není splněna podmínka pro normu uvažovaného prvku z předchozí věty, přičemž však víme, že toto zobrazení je invertibilní. Dále nechť

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 1)^n = x^{-1},$$

což je zobrazení, které je spojité pouze na množině $(0, 1] \subset [0, 1]$.

Jako přímá aplikace dané metody hledání inverzních prvků v obecných unitálních Banachových algebrách se nabízí teorie zabývající se řešením obecných integrálních rovnic, které říkáme Fredholmova teorie.

Příklad 1.17. Uvažujme Banachův prostor $L^2([0,1])$ a Volterrovu integrální rovnici

$$\phi(x) = 1 + \int_0^x \phi(y)\,\mu(\mathrm{d}y),$$

V případě, že bychom uvažovali $\phi \in H^1([0,1])$, pak bychom mohli řešit ekvivalentně

$$\phi' = \phi,$$

což ze základního kurzu diferenciálních rovnic víme, že vede na řešení $\phi(x) = e^x$. Zaměřme se tedy na pravou stranu integrální rovnice, a to konkrétněji na integrál, který nazýváme Volterrův lineární operátor. Jestliže tento operátor označíme K, potom lze psát

$$(\mathbf{1} - K)\phi = 1.$$

Bez dokazování zmíníme (pro důkaz viz [11]), že pro normu Volterrova operátoru platí

$$\|K\| = \frac{2}{\pi} < 1.$$

Protože je algebra $B(L^2([0,1]))$ unitální Banachova algebra, s přihlédnutím k předchozí nerovnosti je zřejmé, že je operátor $(1 - K)$ invertibilní, a tudíž lze psát

$$\phi = (\mathbf{1} - K)^{-1}(1).$$

Inverzi získáme pomocí nekonečného součtu z důkazu předchozího tvrzení. Všimněme si, že pro jednotlivé mocniny Volterrova operátoru v tomto případě platí

$$K^n(1) = \int_0^x \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}y = \frac{x^n}{n!},$$

takže z toho dostáváme po dosazení řešení ve tvaru

$$\phi(x) = (\mathbf{1} - K)^{-1}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

což odpovídá našemu očekávanému řešení.

1.1.3 Spektrum v Banachových algeberách

V této sekci si zavedeme pojem spektra, což je zjednodušeně řečeno zobecnění vlastních čísel lineárních zobrazení v lineárních prostorech konečné dimenze.

Definice 1.10 (Spektrum)**.** Nechť je X unitální Banachova algebra. Spektrum prvku $x \in X$ definujeme jako množinu ve tvaru

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda e - x) \notin G(X)\}. \tag{1.14}$$

přičemž zároveň definujeme spektrální poloměr $\rho(x)$ jako

$$\rho(x) = \sup|\sigma(x)|. \tag{1.15}$$

Poznámka. Je-li X Banachova algebra a $X[e]$ její rozšíření o jednotku, potom lze definici spektra pro $x \in X$ rozšířit ve tvaru

$$\sigma_X(x) = \sigma_{X[e]}(x) \cup \{0\}. \tag{1.16}$$

Příklad 1.18. Nechť je K kompaktní Hausdorfův prostor. Z příkladu 1.15 víme, že zobrazení $f \in C(K)$ je invertibilní právě tehdy, když je nenulové na celém K, z čehož plyne negací, že zobrazení nebude invertibilní právě tehdy, když $0 \in R(f)$, z čehož dostáváme

$$\sigma(f) = R(f),$$

a zároveň tedy platí $\rho(f) = \|f\|_\infty$.

Definice 1.11 (Bodové spektrum)**.** Nechť je X obecný Banachův prostor. Bodové spektrum lineárního operátoru $x \in B(X)$ je množina ve tvaru

$$\sigma_p(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda e - x)\, \text{není injektivní}\}. \tag{1.17}$$

Poznámka. V návaznosti na předchozí definici bodového spektra je zřejmé, že obecně vztah mezi jednotlivými spektry lineárních operatorů lze psát ve tvaru

$$\sigma_p(x) \subset \sigma(x).$$

Příklad 1.19. Uvažujme Banachovu algebru $M^n(\mathbb{C})$. Matice $(\lambda E - A) \in M^n(\mathbb{C})$ není invertibilní právě tehdy, když není injektivní, což je ekvivalentní s tvrzením

$$N(\lambda E - A) \neq \{0\}.$$

Množina $\sigma_p(A)$ všech takových $\lambda \in \mathbb{C}$ je však zřejmě množinou vlastních čísel, které jsou kořeny charakteristického polynomu p matice A. Dle Cayley-Hamiltonovy věty platí

$$p(A) = 0,$$

což znamená, viz tvrzení 1.31 pro důkaz, že platí relace

$$p(\sigma(A)) = \sigma(p(A)) = \{0\},$$

z čehož však plyne, že $\sigma(A) \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$. Protože jsou však matice ekvivalentní lineárním zobrazením na prostorech konečné dimenze, jedná se o vlastní hodnoty a tudíž v konečně dimenzionálním případě pro operátory platí $\sigma_p(A) = \sigma(A)$.

Příklad 1.20. Uvažujme Banachovu algebru $B(L^p(\Omega))$, kde $1 \leq p < \infty$, a multiplikativní operátor $M \in B(L^p(\Omega))$ definovaný ve tvaru

$$M_a(f) = af,$$

kde $f \in L^p(\Omega)$ a $a \in L^\infty(\Omega)$ je nenulové s.v. Pro tento operátor bude platit

$$(\lambda \mathbf{1}_\Omega - a)f = 0,$$

právě tehdy, když zobrazení f bude nulové s.v., což však znamená, že bodové spektrum tohoto multiplikativního operátoru je dáno ve tvaru

$$\sigma_p(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu\left(\{x \in \Omega \mid a(x) = \lambda\}\right) > 0\}.$$

Z toho vidíme, že bodové spektrum operátoru může být prázdné. V tomto konkrétním případě stačí uvažovat libovolné $a \in L^\infty(\Omega)$, které je ryze monotónní. Spektrum je však neprázdné, neboť spojitou inverzi máme právě tehdy, když pro s.v. $x \in \Omega$ platí

$$|\lambda \mathbf{1}_\Omega(x) - a(x)|^{-1} \leq K,$$

pro nějaké $K > 0$, což však znamená, že spektrum je dáno ve tvaru

$$\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists \epsilon > 0,\, |\lambda \mathbf{1}_\Omega(x) - a(x)| \geq \epsilon \text{ s.v.}\}.$$

Důležité pozorování, které lze vyvodit z předchozích příkladů, je skutečnost, že spektrum je kompaktní množina. Přirozenou otázkou tedy je, zda-li je tato množina kompaktní obecně pro libovolné unitální Banachovy algebry. Na tuto otázku je kladná odpověď.

Věta 1.8 (Gelfand)**.** Je-li X unitální Banachova algebra, potom spektrum libovolného prvku algebry je neprázdná kompaktní množina.

Důkaz. Ukážeme náznak, pro detaily viz [15]. Uvažujme nenulové $\lambda \in \mathbb{C}$ a $x \in X$, které splňují nerovnost $\|x\| < |\lambda|$. Z toho dle tvrzení 1.7 máme $(\lambda e - x) = \lambda(e - \lambda^{-1}x) \in G(X)$. Uvažujme dále zobrazení definované ve tvaru

$$\psi(\lambda) = \lambda e - x.$$

Zobrazení ψ je zřejmě spojité a $G(X)$ je otevřená množina [15, str. 268], takže dle spojitosti je množina $\psi^{-1}(G)$ taktéž otevřená, ale to znamená, že $\sigma(x)$ je uzavřená množina, ale zároveň i omezená. Dále pro dané zobrazení lze psát odhad jeho normy ve tvaru

$$\left\|\psi^{-1}(\lambda)\right\| = \left\|\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|x\|},$$

což je tedy zřejmě omezené zobrazení, je-li spektrum prázdné. Lze ukázat, že je resolvent analytické zobrazení, ale dle Liouvillovy věty z komplexní analýzy zároveň víme, že toto zobrazení musí být identicky nulové na celé komplexní rovině, což je spor a spektrum je tedy vždy neprázdné. $\square$

Spektrum libovolného prvku Banachovy algebry X je tedy vždy kompaktní množina, přičemž je přirozené se ptát, zda-li platí i opačná implikace a to přesněji ta, zda-li pro každou kompaktní podmnožinu komplexních čísel $M \subset \mathbb{C}$ můžeme najít nějaký prvek, jehož spektrum takové množině odpovídá.

Příklad 1.21. Uvažujme algebru $\ell^2(M_n)$, kde $M_n \subset \mathbb{N}$ je konečná množina. V takovém případě je tato algebra zřejmě konečně dimenzionální. Uvažujme dále algebru $B(\ell^2(M_n))$ a lineární operátor $T \in B(\ell^2(M_n))$, který pro všechna $x \in \ell^2(M_n)$ definujeme ve tvaru

$$T(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_nx_n).$$

Protože jsme v konečné dimenzi, potom $\sigma_p(T) = \sigma(T)$, takže tedy zřejmě platí

$$\sigma_p(T) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

To však znamená, že máme-li konečnou kompaktní množinu, potom existuje Banachova algebra, která obsahuje prvek, jehož spektrum je právě daná množina. Tuto myšlenku vzhledem k danému příkladu však lze rozšířit na nekonečnou dimenzi hlavně díky tomu, že komplexní čísla jsou separabilní metrický prostor a triviálně tedy i libovolná jejich podmnožina. Uvažujme kompaktní množinu $A \subset \mathbb{C}$ a hustou posloupnost $(a_n) \subset A$. Dále víme, že prostor $\ell^2(\mathbb{N})$ je Hilbertův prostor, který má ortonormální bázi, takže

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (x, e_k) \, e_k.$$

Z toho vidíme, že $\sigma_p(T) = \{a_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N}\}$, ale spektrum je vždy nutně uzavřená množina, takže musí tedy platit

$$\overline{\sigma_p(T)} = A \subset \sigma(x).$$

Lze jednoduše ověřit, že není-li $\lambda \in A$, potom je uvažovaný operátor invertibilní, ale to pak znamená, že $\lambda \notin \sigma(x)$, takže nakonec dostáváme rovnost.

Jako základní příklad Banachových algeber jsme uváděli prototypní algebru komplexních čísel, ve které je zřejmě každý nenulový prvek invertibilní. Jestliže máme obecnou unitální Banachovu algebru X, kde taktéž každý nenulový prvek má vlastní inverzi, pak můžeme přirozeně očekávat podobnou strukutu té, kterou máme u algebry komplexních čísel. Další věta je v kontextu Banachových algeber velice důležitá, neboť tyto algebry charakterizuje.

Věta 1.9 (Gelfand-Mazur)**.** Je-li X unitální Banachova algebra, kde každý nenulový prvek je invertibilní, potom je X isometricky isomorfní s komplexními čísly, tj. platí

$$X \cong \mathbb{C}. \tag{1.18}$$

Důkaz. Protože dle předpokladu je každé nenulové $x \in X$ invertibilní, potom musí platit

$$(\lambda e - x) = 0,$$

což však znamená, že existuje právě jedno $\phi(x) \in \mathbb{C}$ takové, že

$$x = \phi(x)e,$$

z čehož však plyne, že zobrazení $\phi : x \mapsto \phi(x)$ je isomorfismus, přičemž platí

$$|\phi(x)| = \|\phi(x)e\| = \|x\|,$$

a tudíž ϕ je zároveň isometrie. □

Poznámka. Stanisław Mazur původně předchozí větu formuloval tak, že Banachova algebra (tentokrát ne nutně nad komplexními čísly), kde každý nenulový prvek je invertibilní, je isometricky isomorfní buď s reálnými čísly, komplexními čísly a nebo nekomutativní algebrou kvaternionů [12].

Tvrzení 1.10. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in \partial G(X)$. Je-li $(x_n) \subset G(X)$ posloupnost, pro kterou platí $x_n \to x$, potom platí

$$\|x_n^{-1}\| \to \infty. \tag{1.19}$$

Důkaz. Nechť existuje $M > 0$ takové, pro které $\|x_n^{-1}\| < M$, což znamená, že existuje nějaké $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x_n - x\| < 1/M$, pro které zároveň platí

$$\left\|e - x_n^{-1}x\right\| = \left\|x_n^{-1}(x_n - x)\right\| < 1,$$

takže dle Von Neumannovy věty $x_n^{-1}x \in G(X)$, ale $x = x_n(x_n^{-1}x) \in G(X)$, což vede ke sporu, protože množina $G(X)$ je otevřená, z čehož plyne naše tvrzení. □

Tvrzení 1.11. Nechť je X unitální Banachova algebra. Existuje-li $M < \infty$ takové, že pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\|x\| \, \|y\| \leq M \, \|xy\|, \tag{1.20}$$

potom je X isometricky isomorfní s algebrou komplexních čísel.

Důkaz. Nechť je $x \in \partial G(X)$ libovolný hraniční bod. Potom existuje nějaká posloupnost $(x_n) \subset G(X)$, pro kterou platí $x_n \to x$, takže lze psát

$$\|x_n\| \, \|x_n^{-1}\| \leq M \, \|e\|,$$

ale z toho nutně platí $\|x_n\| \to 0$, což znamená $x_n \to 0$. Pro každý hraniční bod $\lambda \in \partial\sigma(y)$, kde $y \in X$, máme $(\lambda e - y) \in \partial G(X)$, takže $y = \lambda e$, z čehož však již plyne naše tvrzení. □

Naleznout spektrum prvku obecné Banachovy algebry X není jednoduchá záležitost, lze však přinejmenším odhadnout nejmenší množinu (konkrétněji uzavřený disk se středem v nule), ve které je celé spektrum obsaženo. K tomuto slouží následující věta.

Věta 1.12 (Gelfand)**.** Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Potom platí

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} . \tag{1.21}$$

Důkaz. Vynecháváme; lze ho najít například v [15, s. 253]. □

Důsledek 1.13. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Potom pro spektrální poloměr daného prvku platí nerovnost ve tvaru

$$\rho(x) \leq \|x\| . \tag{1.22}$$

Tvrzení 1.14. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Je-li $\lambda \in \sigma(x)$, potom

$$\lambda^n \in \sigma(x^n). \tag{1.23}$$

Důkaz. Přímo plyne ze vztahu $\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \cdots + x^{n-1})$. □

Tvrzení 1.15. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x, y \in X$. Platí $(e - xy) \in G(X)$, právě tehdy, když $(e - yx) \in G(X)$.

Důkaz. Uvažujme $(e - xy) \in G(X)$ a nechť $z = e + y(e - xy)^{-1}x$. Potom lze jednoduše ověřit, že platí rovnosti $z(e - yx) = e = (e - yx)z$. □

Důsledek 1.16. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x, y \in X$. Potom platí

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}. \tag{1.24}$$

Již na začátku této sekce zazněl náznak, že máme-li unitální Banachovu algebru X a její libovolnou podalgebru, potom se jednotlivá spektra stejného prvku nemusí obecně shodovat. Vzhledem k tomu, že podalgebra má intuitivně méně prvků než původní algebra, očekávali bychom, že se nám spektrum zvětší. To ilustruje následující tvrzení.

Tvrzení 1.17. Nechť je X unitální Banachova algebra a $Y \subset X$ je unitální Banachova podalgebra se stejnou jednotkou. Je-li $x \in Y$, potom platí

$$\sigma_X(x) \subset \sigma_Y(x). \tag{1.25}$$

Důkaz. Pro každé $x \in G(Y)$ také $x \in G(X)$, z čehož plyne $G(Y) \subset G(X)$. □

Příklad 1.22. Jako jednoduchý případ lze uvést rozšířené spektrum, které bylo zavedeno na začátku sekce. Uvažujme Banachovu algebru X. Pro libovolné $x \in X[e]$ platí

$$\sigma_{X[e]}(x) \subset \sigma_X(x) = \sigma_{X[e]}(x) \cup \{0\},$$

a protože zřejmě platí $X \subset X[e]$, vidíme, že spektra se obecně neshodují.

1.2 Funkcionální kalkulus

Vzhledem k tomu, že Banachova algebra X (či asociativní algebry obecně), má z definice strukturu okruhu, můžeme na této algebře obecně uvažovat pro každý prvek $x \in X$ jeho libovolný polynom, který můžeme psát jako $p(x)$. Zvolíme-li pevně dané $x \in X$, pak tímto způsobem lze přirozeně reprezentovat prostor všech polynomů nad komplexním tělesem.

Protože jsou polynomy speciální případ analytických zobrazení, otázkou je, jestli stejnou konstrukci lze aplikovat i pro případ analytických zobrazení $A(\Omega)$ či mnohem obecnější zobrazení jako jsou zobrazení měřitelná $L^0(\Omega)$.

V této sekci ukážeme, jak tuto reprezentaci lze rozšířit na obecnější funkční prostory holomorfních zobrazení $H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je vhodně zvolená otevřená množina, přičemž ukážeme nějaké konkrétní konstrukce a i aplikace této reprezentace.

Definice 1.12 (Homomorfismus)**.** Nechť jsou X a Y obecné Banachovy algebry. Lineární zobrazení ϕ definované mezi těmito algebrami se nazývá homomorfismus algeber, jestliže pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y). \tag{1.26}$$

1.2.1 Polynomiální zobrazení

Definice 1.13 (Kalkulus)**.** Nechť je X unitální Banachova algebra, $x \in X$ a nechť $p \in \mathbb{C}[z]$ je polynom. Polynomiální kalkulus definujeme jako zobrazení

$$\Psi_x : \mathbb{C}[z] \to X, \tag{1.27}$$

které má konkrétní tvar

$$\Psi_x(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{1.28}$$

Poznámka. Jak již bylo naznačeno v úvodu této sekce, obecně můžeme reprezentaci polynomu v unitální Banachově algebře X vzhledem k prvku $x \in X$ psát ve zjednodušeném tvaru $p(x)$. Jedná se samozřejmě pouze o notační záležitost, neboť formálně tento výraz nedává smysl vzhledem k definičnímu oboru polynomů.

Protože očekáváme, že reprezentace algeber bude obecně zachovávat algebraickou strukturu, tj. bude se jednat o homomorfismus algeber, je podstatné ukázat, že tomu tak skutečně je v našem konkrétním případě, což ukazuje následující věta.

Věta 1.18. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Polynomiální funkcionální kalkulus je homomorfismus algeber, přičemž splňuje $\Psi_x(z) = x$ a $\Psi_x(1) = e$.

Důkaz. Nejdříve ukážeme lineritu tohoto zobrazení, která plyne ze vztahu

$$\Psi_x(zp+q) = \sum_{k=0}^{n}(zp_k + q_k)x^k = z\sum_{k=0}^{n} p_k x^k + \sum_{k=0}^{n} q_k x^k = z\Psi_x(p) + \Psi_x(q).$$

Multiplikativita tohoto lineárního zobrazení plyne z Cauchyova vzorce ve tvaru

$$\Psi_x(p)\Psi_x(q) = \left(\sum_{n=0}^{p} p_k x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{q} q_k x^n\right) = \sum_{m=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{m} p_k q_{m-k}\right) x^m = \Psi_x(pq).$$

Další dvě vlastnosti lze ověřit přímým dosazením. □

Poznámka. Je-li Ψ_x kalkulus a $x \in X$ splňuje $\Psi_x(z) = x$, potom tento prvek také můžeme nazvat prvkem generující příslušný kalkulus.

Důležité je si uvědomit, že obecně polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ není zobrazení ale pouze formální konečná suma s neurčitou proměnnou z, což znamená, že náš kalkulus nelze prohlásit za funkcionální kalkulus. Toto omezení však jednoduše vyřešíme tím, že si zvolíme nějaký definiční obor $D(p)$, na kterém tento polynom budeme definovat. Neurčitá proměnná z se v tomto případě stane zobrazením ve tvaru

$$z : D(p) \to \mathbb{C},$$

čímž nakonec dostáváme z formálního polynomu polynomiální zobrazení, které nám tedy dává polynomilní funkcionální kalkulus.

Přirozenou otázkou je, zda-li je polynomiální funkcionální kalkulus vzhledem k obecné Banachově algebře X injektivní. Je-li například $x \in X$ nilpotentní, potom zřejmě existuje nenulový polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, pro který platí

$$p(x) = 0,$$

což však znamená, že má zobrazení Ψ_x netriviální jádro a tudíž není obecně injektivní. Zřejmě však toto zobrazení není ani surjektivní.

Následující tvrzení je obecná vlastnost funkcionálního kalkulu, která není jedinečná polynomiálnímu funkcionálnímu kalkulu.

Tvrzení 1.19. Nechť je X unitální Banachova algebra. Je-li $x \in X$ a $p \in \mathbb{C}[z]$, potom

$$p(\sigma(x)) = \sigma(p(x)). \tag{1.29}$$

Důkaz. Dokážeme později. □

Příklad 1.23. Uvažujme obecnou unitální Banachovu algebru a nechť $x, y \in X$ splňují

$$xy = ay,$$

kde $a \in \mathbb{C}$. Zřejmě se jedná o analogii vlastních vektorů lineárních operátorů s diskrétním spektrem. Všimněme si, že vynásobíme-li obě strany prvkem x, potom dostáváme

$$x^2y = x(ay) = a(xy) = a^2y,$$

z čehož indukcí dostáváme v obecném případě aplikací funkcionálního kalkulu

$$p(x)y = p(a)y.$$

V kontextu vlastních vektorů tedy vidíme, že se zachovávají, ale mění se spektrum.

Příklad 1.24. Uvažujme algebru diagonálních matic $D^n(\mathbb{C})$ a nechť $M \in D^n(\mathbb{C})$. Potom pro libovolný polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ dostáváme

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}, \quad p(M) = \begin{bmatrix} p(m_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(m_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(m_n) \end{bmatrix}$$

Na tomto příkladu je taktéž zřejmé, jak funkcionální kalkulus transformuje spektrum.

Příklad 1.25. Pro obecnější případ uvažujme algebru $M^n(\mathbb{C})$. Z teorie lineární algebry víme, že libovolnou matici $A \in M^n(\mathbb{C})$ lze vyjádřit v Jordanově tvaru

$$A = XJX^{-1} = X\left(\bigoplus_{i=1} J_i\right)X^{-1},$$

kde J je Jordanova blokově diagonální matice. Funkcionální kalkulus pro tyto obecné matice bychom chtěli definovat analogicky těm diagonalizovatelným, tj. ve tvaru

$$p(A) = Xp(J)X^{-1} = Xp(J_1) \oplus p(J_2) \oplus \cdots \oplus p(J_k)X^{-1},$$

kde jednotlivé Jordanovy bloky J_n lze psát ve tvaru

$$J_n = \lambda_n E_n + U_n,$$

kde matice E_n je jednotková a matice U_n je dána ve tvaru

$$U_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že jednotlivé mocniny U_n^k posouvají diagonálu dané matice, což znamená, že je tato matice nilpotentní, takže pro její spektrum platí $\sigma(U_n) = \{0\}$. Dále uvažujme libovolné polynomiální zobrazení $p \in \mathbb{C}[z]$ a Taylorův rozvoj ve tvaru

$$p(z) = p(\lambda) + p'(\lambda)(z-\lambda) + \frac{p''(\lambda)}{2}(z-\lambda)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(\lambda)}{n!}(z-\lambda)^n.$$

Aplikací funkcionálního kalkulu pro konkrétní Jordanův blok J_n dostáváme

$$p(J_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p^{(k)}(\lambda_n)}{k!} U_n^k.$$

Protože direktní součet matic je blokově diagonální matice, chová se funkcionální kalkulus analogicky funkcionálnímu kalkulu v kontextu diagonálních matic, tj. aplikuje se na jednotlivé bloky, což tedy vede na konečné vyjádření ve tvaru

$$p(A) = Xp(J)X^{-1}.$$

Všimněme si, že v případě diagonalizovatelných matic můžeme uvažovat v podstatě libovolné zobrazení, které je definované na spektru, což platí i v případě nediagonalizovatelných matic s tím omezením, že vyžadujeme existenci konečného počtu derivací.

Se zavedeným polynomiálním funkcionálním kalkulem můžeme pro určité Banachovy algebry uvažovat spektrální rozklad jednotlivých prvků.

Definice 1.14 (Ortogonalita). Nechť je X Banachova algebra a nechť $(e_i) \subset X$ je posloupnost idempotentů. Tuto posloupnost idempotentů nazýváme ortogonální, jestliže platí

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_i = \delta_{ij} e_j. \tag{1.30}$$

Tvrzení 1.20. Nechť je X Banachova algebra a $e_1, e_2, e_3 \in X$ jsou ortogonální idempotenty, potom součet $(e_1 + e_2)$ je opět idempotent, pro který platí

$$(e_1 + e_2) \perp e_3. \tag{1.31}$$

Důkaz. Dokážeme přímým výpočtem ve tvaru

$$(e_1 + e_2)^2 = e_1^2 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2^2 = e_1 + e_2, \quad (e_1 + e_2)e_3 = e_3(e_1 + e_2) = 0,$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Definice 1.15 (Algebraicita)**.** Nechť je X Banachova algebra. Prvek $x \in X$ se nazývá algebraický, jestliže existuje rozklad ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \tag{1.32}$$

kde $(e_i) \subset X$ jsou ortogonální idempotenty a $(a_k) \subset \mathbb{C}$.

Poznámka. Bude-li platit $a_k \in \sigma(x)$, potom tento rozklad nazýváme spektrální rozklad, přičemž pro tento rozklad můžeme volit $a_i > a_{i+1}$ dle předchozího tvrzení, tj. třeba

$$a_1 e_1 + a_1 e_2 + a_3 e_3 = a_1(e_1 + e_2) + a_3 e_3 = a_1 e_{12} + a_3 e_3.$$

Tvrzení 1.21. Nechť je X unitální Banachova algebra a nechť je $x \in X$ algebraický prvek, který má spektrální rozklad. Potom pro libovolný polynom $p \in C(\sigma(x))$ platí

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} p(a_k) e_k. \tag{1.33}$$

Důkaz. Pro druhou mocninu prvku $x \in X$ lze psát

$$x^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j e_i e_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 e_i,$$

což plyne z předpokladu ortogonality idempotentů. Zbytek lze ukázat indukcí. □

Algebraické prvky jsou tedy prvky, které mají explicitní konstrukci a také vlastnosti, z čehož tedy plyne, že jsou důležitou, a hlavně zajímavou, třídou prvků v obecných Banachových algebrách. Je však otázkou, zda-li takové prvky vůbec existují.

Příklad 1.26. Uvažujme algebru diagonálních matic $D^n(\mathbb{C})$. V této algebře je zřejmě každý prvek algebraický. Pro jednoduchost uvažujme, že má matice $A \in D^n(\mathbb{C})$ na diagonále různé prvky. Uvažujme dále matice $(E_i) \subset D^n(\mathbb{C})$, pro které

$$(E_i)_{jk} = \delta_{ik}.$$

Tyto matice zřejmě tvoří ortogonální systém idempotentů. Rozklad tedy můžeme psát

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} E_k.$$

Předchozí příklad ukazuje, jak nalézt spektrální rozklad diagonálních matic. Pro čtvercové matice $A \in M^n(\mathbb{C})$, pro které $P^{-1}AP \in D^n(\mathbb{C})$, tj. diagonalizovatelné matice, dostáváme

$$A = PDP^{-1} = P\left(\sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right)P^{-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k P E_k P^{-1},$$

z čehož plyne závěr, že diagonalizovatelné matice jsou taktéž algebraické. Následující věta dává konkrétní návod pro aplikaci funkcionálního kalkulu pro tento obecný případ.

Věta 1.22 (Sylvester)**.** Uvažujme algebru $M^n(\mathbb{C})$ a nechť je $A \in M^n(\mathbb{C})$ diagonalizovatelná matice. Je-li $p \in \mathbb{C}[z]$, potom můžeme psát

$$\Psi_A(p) = \sum_{k=0}^{n} p(\lambda_k) P_k, \tag{1.34}$$

kde λ_j jsou vlastní čísla a matice P_k definujeme ve tvaru

$$P_i = \prod_{i \neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}(\lambda_j E_n - A). \tag{1.35}$$

Důkaz. Nechť je tedy $p \in \mathbb{C}[z]$ nějaký polynom. Budeme-li uvažovat body $p(\lambda_n)$, pro jednotlivé prvky spektra $\lambda_n \in \sigma(A)$, potom můžeme aplikovat Lagrangeovu větu o interpolaci, čímž dostaneme vyjádření tohoto polynomu ve tvaru

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} p(\lambda_k) \prod_{i \neq j} \frac{\lambda_j - z}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

Naše tvrzení získáme aplikací funkcionálního kalkulu $\Psi_A(p)$. □

Poznámka. Vzhledem ke konstrukci Lagrangeovy interpolace lze v předchozí větě místo polynomiálních zobrazení uvažovat obecnější zobrazení.

Příklad 1.27. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$ a matici $A \in M^2(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tato matice je zřejmě diagonalizovatelná, přičemž přímým výpočtem kořenů charakteristického polynomu dostáváme spektrum ve tvaru $\sigma(A) = \{1, 2\}$. Máme tedy idempotenty

$$P_1 = (2E_2 - A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{resp.} \quad P_2 = -(E_2 - A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jako poslední ukázku aplikace uvedeme vlastnost stopy v konečné dimenzi.

Příklad 1.28. Uvažujme algebru $M^n(\mathbb{C})$. Potom ze základní teorie lineární algebry víme, že pro libovolnou matici $A \in M^n(\mathbb{C})$ platí

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda_i,$$

takže z vlastností polynomiálního funkcionálního kalkulu máme zobecněný vztah

$$\mathrm{tr}(p(A)) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} p(\lambda_i),$$

kde $p \in \mathbb{C}[z]$ je nějaké polynomiální zobrazení. Analogicky můžeme stejnou konstrukci uvažovat i pro determinanty, kde v takovém případě nahradíme sumu za součin.

1.2.2 Analytická zobrazení

Další důležitá třída holomorfních zobrazení jsou zobrazení analytická, která jsou přímým zobecněním polynomů, tj. každý polynom je zároveň analytické zobrazení. Pro připomenutí reprezentujeme analytická zobrazení pomocí mocninných řad (to však znamená, že zřejmě bude v tomto případě záležet na konkrétní podobě spektra kvůli poloměru konvergence).

Definice 1.16 (Analytičnost)**.** Nechť je $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast. Zobrazení $f \in C(\Omega)$, které lze reprezentovat mocninnou řadou ve tvaru

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \tag{1.36}$$

nazýváme analytické zobrazení. Množinu takových zobrazení značíme $A(\Omega)$.

Definice 1.17 (Analytický kalkulus)**.** Nechť je X unitální Banachova algebra a $f \in A(D)$ analytické zobrazení definované na otevřeném disku $D \subset \mathbb{C}$ o poloměru $r > 0$. Dále nechť pro $x \in X$ platí $\|x\| < r$. Analytický funkcionální kalkulus definujeme jako zobrazení

$$\Lambda_x : A(D) \to X, \tag{1.37}$$

které má konkrétní tvar

$$\Lambda_x(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{1.38}$$

Uvažujme unitální Banachovu algebru X a $x \in X$. Nechť je $f \in A(D)$ nějaké analytické zobrazení, potom lze dle předchozí definice psát

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Z takového zápisu není zřejmé, že by taková řada mohla konvergovat, lze však psát

$$\|f(x)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, \|x^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, \|x\|^k,$$

ale v takovém případě na pravé straně dostáváme obyčejnou skalární nekonečnou řadu, kterou již umíme analyzovat. Rádius konvergence $r > 0$ je v tomto případě určen koeficienty a vzhledem k tomu, že uvažujeme střed v počátku, dostáváme podmínku

$$\|x\| < r.$$

Vzpomeneme-li si však na větu o spektrálním poloměru 1.13, potom tuto podmínku můžeme zeslabit na požadavek ve tvaru

$$\rho(x) < r.$$

Tvrzení 1.23. Analytický funkcionální kalkulus je rozšířením polynomiálního kalkulu.

Důkaz. Nechť je $p \in \mathbb{C}[z]$ polynom n-tého řádu. Polynomy jsou analytická zobrazení, tudíž

$$\Lambda_x(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \Psi_x(p),$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Věta 1.24. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Analytický funkcionální kalkulus je homomorfismus algeber, přičemž $\Lambda_x(z) = x$ a $\Lambda_x(1) = e$.

Důkaz. Analogicky polynomiálnímu kalkulu lze ukázat, že se jedná o homomorfismus za použití Cauchyova vzorce pro násobení mocninných řad. Další vlastnosti jsou zřejmé. □

Jako jednoduchou aplikaci analytického funkcionálního kalkulu uvádíme alternativní formu resolventy[1] pomocí mocninné řady, viz následující tvrzení.

Tvrzení 1.25. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Potom platí

$$(ze - x)^{-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^n, \tag{1.39}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která $\|x\| < |z|$ a zároveň $z \notin \sigma(x)$.

Důkaz. Stačí uvažovat analytické zobrazení ve tvaru

$$f(w) = \frac{1}{z - w} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{w}{z}},$$

a nakonec aplikovat funkcionální kalkulus $\Lambda(f)$. □

Příklad 1.29. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Ze základní teorie lineární algebry již víme, že můžeme uvažovat exponenciální zobrazení libovolného lineárního zobrazení na prostoru konečné dimenze. V obecném případě analogicky

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Tvrzení 1.26. Nechť je X komutativní Banachova algebra. Je-li $x, y \in X$, potom platí

$$e^x e^y = e^{x+y}. \tag{1.40}$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že již známe analytické vyjádření (tj. v podobě mocninné řady) pro exponenciálu obecného prvku Banachovy algebry, můžeme psát

$$e^x e^y = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{x^l}{l!} \frac{y^{k-l}}{(k-l)!}\right).$$

Protože z předpokladu je algebra komutativní, můžeme pro poslední člen aplikovat binomiální větu, která nám dává

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{x^l}{l!} \frac{y^{k-l}}{(k-l)!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^l y^{k-l}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k,$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Poznámka. V předchozí větě nemusíme nutně uvažovat, že je celá unitální Banachova algebra X komutativní. Stačí pouze, aby prvky $x, y \in X$ společně komutovaly. Komutativita v předpokladu tohoto tvzení je důležitá, protože v opačném případě se nám v argumentu exponenciály objeví 'korekční' faktory v podobě komutátorů, viz [1].

[1] Resolventa prvku $x \in X$ unitální Banachovy algebry X je zobrazení $R(z; x) = (ze - x)^{-1}$.

Tvrzení 1.27. Uvažujme algebru $M^n(\mathbb{C})$. Potom pro libovolné $A \in M^n(\mathbb{C})$ platí

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Důkaz. Je-li matice diagonalizovatelná, potom stopa je součet vlastních hodnot, přičemž dle příkladu 1.28 pro determinant dostáváme rovnost

$$\det(e^A) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda_i} = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

V obecném případě lze matici A psát ve tvaru

$$A = N + D,$$

kde N a D jsou komutující matice, přičemž N je nilpotentní a D je diagonalizovatelná. V takovém případě můžeme dle předchozího tvrzení psát

$$\det(e^A) = \det(e^{N+D}) = \det(e^N)\det(e^D) = e^{\operatorname{tr}(N)} e^{\operatorname{tr}(D)},$$

přičemž uvědomíme-li si, že spektrum nilpotentní matice je nulové, a tudíž je i stopa nulová, potom tedy dostáváme naše tvrzení. □

Předtím než uvedeme aplikaci exponenciály v kontextu řešení diferenciálních rovnic, budeme potřebovat následující tvrzení.

Tvrzení 1.28. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Je-li $t \in \mathbb{R}$, potom

$$D(e^{tx}) = xe^{tx}. \tag{1.41}$$

Důkaz. Exponenciála je celistvé zobrazení, které konverguje absolutně. Rozepíšeme-li tedy exponenciálu prvku $x \in X$ v podobě mocninné řady dle definice ve tvaru

$$e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tx)^n,$$

potom můžeme zaměnit derivaci a sumu, čímž dostaneme

$$D(e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} x^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m x^{m+1} = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m x^m,$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Příklad 1.30. Uvažujme unitální Banachovu algebru X a nechť $a \in B(X)$. Dále uvažujme lineární diferenciální rovnici ve tvaru

$$D(x) = a(x), \quad x(0) = x_0 \in X.$$

Aplikací funkcionálního kalkulu a předchozího tvrzení dostáváme řešení ve tvaru

$$x(t) = e^{ta} x_0.$$

Příklad 1.31. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$ a nechť je $A \in M^2(\mathbb{C})$ matice ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z čiště geometrického hlediska lze tuto matici označit za matici rotace v rovině. Platí

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho vidíme, že se matice chová obdobně jako komplexní jednotka, neboť $A^2 = -E$. Aplikací funkcionálního kalkulu dostáváme nekonečnou řadu ve tvaru

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{(2n)!}t^{2n} & -\frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1} \\ \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1} & \frac{1}{(2n)!}t^{2n} \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé sumy lze identifikovat jako elementární zobrazení, což nám dává

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \cos(t)E + \sin(t)A.$$

Vidíme tedy, že tato matice nám generuje rotace v rovině.

Protože každý prvek $x \in X$ Banachovy algebry X sám se sebou komutuje, můžeme v návaznosti na tvrzení 1.26 uvažovat skládání exponenciál s parametrem ve tvaru

$$e^{tx}e^{sx} = e^{(t+s)x},$$

což s ohledem na asociativitu součinu tvoří semigrupu pro libovolné $x \in X$. Porovnáme-li toto pozorování s příkladem 1.30, potom je zřejmé, že toto bude mít důležité důsledky v obecné teorii diferenciálních lineárních rovnic.

1.2.3 Holomorfní zobrazení

V této sekci rozšíříme analytický funkcionální kalkulus na zatím nejobecnější funkcionální kalkulus, který v našem kontextu lze vybudovat. Začneme opět z definice prostoru zobrazení, se kterými budeme pracovat. Protože nezavádíme integraci na Banachových prostorech, důkazy v této sekci budou spíše informativní, pro detaily viz [15].

Definice 1.18 (Holomorfnost)**.** Nechť je $\Omega \subset \mathbb{C}$ oblast. Zobrazení $f \in C(\Omega)$ se nazývá holomorfní, jestliže v každém bodě $z_0 \in \Omega$ existuje derivace

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{1.42}$$

Prostor všech holomorfních zobrazení značíme $H(\Omega)$.

Definice 1.19 (Komponenta)**.** Nechť je X topologický prostor. Množina $M \subset X$ se nazývá komponenta, jestliže se jedná o maximální souvislou množinu v tom smyslu, že není obsažena v žádné jiné souvislé množině.

Definice 1.20 (Holomorfní kalkulus)**.** Nechť je X unitální Banachova algebra, $x \in X$ a nechť je $\sigma(x) \subset \Omega \subset \mathbb{C}$ oblast. Holomorfní funkcionální kalkulus[2] je zobrazení

$$\Phi_x : H(\Omega) \to X, \tag{1.43}$$

které definujeme jako Cauchyho integrál ve tvaru

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)(ze - x)^{-1} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \oint_{\gamma_n} f(z)(ze - x)^{-1} \, \mathrm{d}z, \tag{1.44}$$

kde γ_n jsou kladně orientované Jordanovy křivky takové, pro které $\sigma_n(x) \subset \mathrm{Int}(\gamma_n)$, kde množiny $\sigma_n(x)$ jsou jednotlivé disjunktní komponenty spektra.

Poznámka. V předchozí definici integrální reprezentace nezáleží na volbě konkrétní integrační křivky, analogicky integraci v komplexní analýze. Budeme-li uvažovat, že předchozí integrál je definován ve slabém smyslu (je kompatibilní s funkcionály), k čemuž nám postačí i klasická Riemannovská formulace integrálu, potom pro libovolné $\phi \in X^*$ lze psát

$$\phi \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)(ze - x)^{-1} \, \mathrm{d}z \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) \phi \left((ze - x)^{-1} \right) \, \mathrm{d}z = 0,$$

a protože X^* jako důsledek Hahn-Banachovy věty odděluje body a integrál na pravé straně je standardní skalární integrál, potom s využitím věty o deformaci křivky z komplexní analýzy tedy vidíme, že na její volbě nezáleží.

Věta 1.29. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Holomorfní funkcionální kalkulus je homomorfismus, přičemž $\Phi_x(z) = x$ a $\Phi_x(1) = e$.

Důkaz. Uvedeme pouze náznak důkazu, pro konkrétní detaily viz [15]. Linearita uvažovaného zobrazení Φ_x je zřejmá z vlastností integrálu. Ukážeme tedy, že toto zobrazení zachovává operaci násobení. Nechť jsou γ_1 a γ_2 kružnice s poloměry $\rho(x) < r_1 < r_2$, potom

$$\begin{aligned}
\Phi_x(f)\Phi_x(g) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} f(z)(ze - x)^{-1} \, \mathrm{d}z \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} f(w)(we - x)^{-1} \, \mathrm{d}w \right) = \cdots \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} f(z) g(w) (ze - x)^{-1} (we - x)^{-1} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}w = \cdots \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} f(z) g(w) \frac{1}{z - w} \left[(ze - x)^{-1} - (we - x)^{-1} \right] \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}w,
\end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme využili identity

$$(z - w)(ze - x)^{-1}(we - x)^{-1} = (ze - x)^{-1} - (we - x)^{-1}.$$

Tento integrál lze dále díky linearitě rozdělit na dvě části, začneme nejdříve z

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} f(z) \oint_{\gamma_2} \frac{g(w)}{z - w} \, \mathrm{d}w \, (ze - x)^{-1} \, \mathrm{d}z,$$

což nám díky Cauchyho větě (pro vektorový případ) dává výraz ve tvaru

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{g(w)}{z - w} \, \mathrm{d}w = g(z),$$

[2] Tento typ funkcionálního kalkulu lze v odborné literatuře taktéž nalézt pod názvem Dunford-Schwartzův funkcionální kalkulus.

analogickým způsobem ukážeme, že druhý integrál je nulový, takže

$$\Phi_x(f)\Phi_x(g) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(z)g(z)(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z = \Phi_x(fg).$$

Pro druhou část důkazu si všimněme, že platí

$$z(ze-x)^{-1} = (ze-x+x)(ze-x)^{-1} = e + x(ze-x)^{-1},$$

z čehož dostáváme

$$\Phi_x(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} z(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} x(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z = x\Phi_x(1).$$

Ukážeme, že $\Phi_x(1) = e$ přímým výpočtem a aplikací předchozího pozorování

$$\Phi_x(1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{1}{z}e + \frac{1}{z}x(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z = e + I(r),$$

kde $I(r) \to 0$ pro $r \to \infty$, takže $\Phi_x(1) = e$, což zpětně také dává $\Phi_x(z) = x$. □

Tvrzení 1.30. Holomorfní funkcionální kalkulus je rozšířením analytického kalkulu.

Důkaz. Uvažujme analytické zobrazení $f \in A(\Omega)$, kde $\sigma(x) \subset \Omega$, pak lze psát

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)(ze-x)^{-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_{\gamma}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{z^{k+1-n}}\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_x(z^n),$$

z čehož je již zřejmá rovnost. □

Příklad 1.32. Uvažujme algebru $M^n(\mathbb{C})$ a matici $A \in M^n(\mathbb{C})$, pro kterou platí

$$A = aE + N,$$

kde N je matice nilpotentní, tj. existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, pro které $N^m = 0$. Tato matice má nulové spektrum a protože uvažujeme součet s maticí diagonální, pak tato nilpotentní matice nám spektrum nijak neovlivní a tudíž je spektrum této matice zřejmě $\sigma(A) = \{a\}$. Resolventu lze psát ve tvaru

$$(zE-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{N^k}{(z-a)^{k+1}},$$

takže aplikací holomorfního funkcionálního kalkulu pro $f \in H(\Omega)$ dostáváme

$$f(A) = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}z\right)N^k = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}N^k,$$

což je přesně vztah, který jsme uváděli v příkladu 1.25.

Tvrzení 1.31. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Je-li $f \in H(\Omega)$, kde Ω je oblast, která obsahuje spektrum $\sigma(x) \subset \Omega$, potom platí

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)). \tag{1.45}$$

Důkaz. Uvažujme $\lambda \in \sigma(x)$. Z komplexní analýzy víme, že existuje q takové, pro které

$$f(\lambda) - f(z) = q(z)(\lambda - z),$$

z čehož aplikací holomorfního funkcionálního kalkulu dostáváme

$$f(\lambda)e - f(x) = q(x)(\lambda e - x).$$

Pokud by platilo $f(\lambda) \notin \sigma(f(x))$, potom by pravá strana měla spojitou inverzi, ale v tom případě by měl spojitou inverzi i druhý člen na pravé straně, což by došlo ke sporu, že platí $\lambda \in \sigma(x)$, takže musí nutně platit $f(\lambda) \in \sigma(f(x))$. Dále nechť $\lambda \notin f(\sigma(x))$, potom

$$h(z) = (\lambda - f(z))^{-1}$$

je holomorfní zobrazení v okolí na okolí množiny $\sigma(x)$, takže platí

$$h(x)(\lambda e - f(x)) = e,$$

což impluje, že $\lambda \notin f(\sigma(x))$. □

Tvrzení 1.32. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Nechť Ω_1 a Ω_2 jsou oblasti takové, pro které $\sigma(x) \subset \Omega_1$, $f \in H(\Omega_1)$ a $f(\sigma(x)) \subset \Omega_2$. Nechť dále je dáno zobrazení $g \in H(\Omega_2)$. Platí

$$g \circ f(x) = g(f(x)). \tag{1.46}$$

Důkaz. Opět uvedeme náznak důkazu, pro detaily viz [15]. Nechť jsou γ_1 a γ_2 příslušné kladně orientované Jordanovy křivky. Potom lze psát

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} g \circ f(z)(ze - x)^{-1}\,\mathrm{d}z = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\gamma_1} \left(\oint_{\gamma_2} g(w)(w - f(z))^{-1}\,\mathrm{d}w\right)(ze - x)^{-1}\,\mathrm{d}z,$$

z toho další úpravou dostáváme

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\gamma_2} g(w)\left(\oint_{\gamma_1} (w - f(z))^{-1}(ze - x)^{-1}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} g(w)(we - f(x))^{-1}\,\mathrm{d}w,$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Věta 1.33. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Neodděluje-li spektrum $\sigma(x)$ body 0 a ∞, potom existuje logaritmus prvku x, přičemž pro $0 < \alpha \leq 1$ existuje x^α.

Důkaz. Protože spektrum neeoděluje 0 a ∞, lze uvažovat otevřenou oblast Ω takovou, pro kterou $\sigma(x) \subset \Omega$, a zároveň přes kterou neprochází řez komplexní roviny. Potom existuje holomorfní zobrazení $f \in H(\Omega)$ takové, pro které platí

$$e^{f(z)} = z.$$

Z předchozího tvrzení plyne, že $f(x)$ je logaritmus. Pro druhou část tvrzení uvažujme

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)},$$

čímž je důkaz dokončen. □

Poznámka. V předchozí větě podmínka pro spektrum, které odděluje body 0 a ∞, vychází z toho, že logaritmus je obecně v komplexní rovině vícehodnotový, takže je třeba zvolit nějakou jednu hodnotu, čehož dosáhneme konkrétní volbou řezu komplexní roviny.

Tvrzení 1.34. Nechť je X unitální Banachova algebra a $x \in X$. Je-li $p \in \mathbb{C}[z]$ a $p(x) = 0$, potom je spektrum množina všech kořenů polynomu p.

Důkaz. Polynom je holomorfní, takže z vlastností holomorfního kalkulu $p(\sigma(x)) = \{0\}$. □

Důsledek 1.35. Je-li $A \in M^n(\mathbb{C})$ invertiblní, pak má logaritmus.

Důkaz. Dle Cayley-Hamiltonovy věty existuje polynom p, pro který platí $p(A) = 0$ (charakteristický polynom matice), přičemž je-li matice A invertibilní, pak spektrum neobsahuje nulu a tudíž neodděluje 0 a ∞. Existence logaritmu tedy plyne z věty 1.33. □

Již jsme zmiňovali, že pro určité prvky obecných unitálních Banachových algeber můžeme uvažovat tzv. spektrální rozklad, který je lineární kombinací idempotentů. Protože v případě holomorfního funkcionálního kalkulu máme možnost vyběru křivky pro integraci, můžeme idempotenty konstruovat uměle.

Uvažujme $\mathbf{1}_\Omega \in H(\Omega)$, potom zřejmě pro toto zobrazení platí

$$\mathbf{1}_\Omega^2 = \mathbf{1}_\Omega.$$

Protože je funkcionální kalkulus z konstrukce homomorfismus algeber, potom vlastnosti prvků zachovává, což znamená, že můžeme uvažovat pro unitální Banachovu algebru X a prvek $x \in X$ tzv. spektrální idempotent ve tvaru

$$\mathbf{1}_\Omega(x) \in X.$$

Vzhledem k tomu, že je tato konstrukce obecná, uvedeme jí jako definici.

Definice 1.21 (Spektrální idempotent)**.** Nechť je X unitální Banachova algebra $x \in X$. Dále nechť je $\Omega \supset \sigma(x)$ oblast. Spektrální idempotent je definován ve tvaru

$$\mathbf{1}_\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (ze - x)^{-1} \,\mathrm{d}z, \tag{1.47}$$

kde γ je Jordanova křivka, pro kterou $\mathrm{Int}(\gamma) \subset \Omega$.

Nechť je X unitální Banachova algebra. Vzhledem k předchozí definici můžeme uvažovat takové prvky $x \in X$, kde libovolný prvek jejich spektra je izolovaný, tj. spektrum je diskrétní množina v topologickém smyslu. Takové spektrum indukuje systém ortogonálních spektrálních idempotentů, což znamená, že lze uvažovat spektrální rozklad ve tvaru

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbf{1}_{\{\lambda_n\}}(x).$$

V případě konečné dimenze se zřejmě jedná o zobecnění Jordanova kanonického tvaru pro matice, které jsou speciálním případem kompaktních operátorů. Pro případ, kdy spektrum není diskrétní množinou, předchozí konstrukci zřejmě nelze použít.

Příklad 1.33. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$ a nechť je $A \in M^2(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Spektrum této matice je zřejmě $\sigma(A) = \{-1, 1\}$. Dle předchozí diskuze lze uvažovat křivky

$$\gamma_1(t) = -1 + e^{it} \quad \text{resp.} \quad \gamma_2(t) = 1 + e^{it},$$

pro $t \in [0, 2\pi)$. Resolventa je pro tuto matici dána ve tvaru

$$(zE - A)^{-1} = \frac{1}{z^2 - 1} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix},$$

takže pro integrál podél první křivky lze metodou reziduí psát

$$\mathbf{1}_{\{1\}}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z^2 - 1} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Analogicky pro druhý integrál máme vyjádření ve tvaru

$$\mathbf{1}_{\{-1\}}(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Již víme, že se jedná o spektrální idempotenty, přičemž zároveň pro tuto matici můžeme dle předchozí diskuze psát spektrální rozklad ve tvaru

$$A = (-1)\mathbf{1}_{\{-1\}}(x) + (1)\mathbf{1}_{\{1\}}(x),$$

takže analogicky příkladu 1.27 lze tedy v takovém případě pro obecné $f \in H(\Omega)$ psát

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1 \oplus \gamma_1} f(z)(zE - A)^{-1} \, \mathrm{d}z = f(-1)\mathbf{1}_{\{-1\}}(x) + f(1)\mathbf{1}_{\{1\}}(x).$$

1.2.4 Diskuze

Ačkoliv je námi vybudovaný funkcionální kalkulus aplikovatelný pouze na třídu holomorfních zobrazení, nese to s sebou tu výhodu, že je aplikovatelný v libovolné Banachově algebře, u které jediné, co předpokládáme, je existence jednotky. O té však z této kapitoly víme, že v případě, že Banachova algebra žádnou jednotku neobsahuje, potom ji lze přirozeně přidat tzv. unitalizací algebry.

Cena za takto obecný kalkulus je však ta, že tedy nemůžeme uvažovat například absolutní hodnotu prvků, což je sice spojité zobrazení, ale dle Cauchy-Riemannových podmínek každé reálné holomorfní zobrazení musí být nutně konstantní, což však absolutní hodnota nesplňuje. Stejně tak například nemůžeme uvažovat reálnou či imaginární část, protože komplexní sdružení taktéž není holomorfní zobrazení.

Také jsme si v této kapitole ukázali, že holomorfní funkcionální kalkulus není obecně ani injektivní ani surjektivní, což je však něco, co bychom od reprezentace algebry ve funkční algebře požadovali. Tento nedostatek odstraníme v následující kapitole za cenu toho, že na uvažovanou Banachovu algebru budeme klást určitá omezení.

Tato stránka je úmyslně ponechána prázdná.

2. Komutativní Banachovy algebry

V této kapitole podrobněji rozebereme případ, kdy námi uvažovaná Banachova algebra X je komutativní. V takovém případě se totiž ukazuje, že lze algebru X výhodně reprezentovat pomocí algebry spojitých zobrazení, se kterými obecně umíme dobře pracovat, a v případě dodatečné struktury tato reprezentace bude isometrickým isomorfismem algeber. Této reprezentaci říkáme obecně Gelfandova teorie.

2.1 Základní pojmy

2.1.1 Znaky Banachových algeber

Definice 2.1 (Charakter)**.** Nechť je X Banachova algebra. Nenulové lineární zobrazení ϕ mezi algebrami X a $\mathbb{C}$ se nazývá charakter, jestliže pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y). \tag{2.1}$$

Množinu všech charakterů algebry značíme $\Delta(X)$.

Poznámka. Pro notační jednoduchost budeme v určitých případech psát $\Delta = \Delta(X)$.

Tvrzení 2.1. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra a $\phi \in \Delta(X)$ je libovolný charakter, potom platí $\phi(e) = 1$ a zároveň pro každé $x \in G(X)$ platí $\phi(x) \neq 0$.

Důkaz. Nechť je $x \in X$ takové, pro které $\phi(x) \neq 0$, potom zřejmě máme

$$\phi(x) = \phi(ex) = \phi(e)\phi(x),$$

z čehož přímo plyne první část tvrzení. Pro druhou část uvažme $x \in G(X)$, potom

$$\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(e) = 1,$$

z čehož však plyne, že je $\phi(x)$ nenulové. □

Poznámka. V předchozím důkazu první části tvrzení nemusíme nutně uvažovat libovolný prvek algebry $x \in X$ takový, pro který je charakter nenulový, stačí totiž uvažovat

$$\phi(e) = \phi(e^2) = \phi(e)^2,$$

přičemž jistě $\phi(e) \neq 0$, neboť v opačném případě by žádný charakter algebry neexistoval.

Důsledek 2.2. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra a $x \in X$, potom $\lambda \in \sigma(x)$ právě tehdy, když existuje nějaké $\phi \in \Delta(X)$ pro které platí $\phi(x) = \lambda$.

Důkaz. Je-li $\lambda \in \sigma(x)$, potom $(\lambda e - x) \notin G(X)$, ale dle předchozí věty platí

$$\phi(\lambda e - x) = \lambda - \phi(x) = 0,$$

pro nějaké $\phi \in \Delta(X)$, z čehož plyne naše tvrzení. □

Důsledek 2.3. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra a $x \in X$, potom platí

$$\sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in \Delta(X)\}. \tag{2.2}$$

Tvrzení 2.4. Je-li X unitální Banachova algebra, potom pro každé $\phi \in \Delta(X)$ platí

$$|\phi(x)| < 1, \tag{2.3}$$

kde $x \in X$ splňuje podmínku $\|x\| < 1$.

Důkaz. Nechť $|\lambda| \geq 1$, potom $(e - \lambda^{-1}x) \in G(x)$ dle tvrzení 1.7, což dává

$$\phi(e - \lambda^{-1}x) = 1 - \lambda^{-1}\phi(x) \neq 0,$$

z čehož však plyne, že $\phi(x) \neq \lambda$, čímž dostáváme naši nerovnost. $\square$

Důsledek 2.5. Je-li X unitální Banachova algebra, potom platí $\Delta(X) \subset X^*$.

Příklad 2.1. Nechť je K kompaktní Hausdorfův prostor. Každý multiplikativní funkcionál v algebře $C(K)$ má pro libovolné $f \in C(K)$ tvar $\phi_x(f) = f(x)$.

Příklad 2.2. Nechť je $D \subset \mathbb{C}$ jednotkový disk. Disková algebra $A(D)$ obsahuje funkcionály, které pro libovolné $f \in A(D)$ mají tvar $\phi_x(f) = f(x)$, což je v přímé analogii předchozímu příkladu, ale na rozdíl od algebry $C(K)$ však obsahuje i jiné funkcionály, které nemají tento konkrétní tvar, a to přesněji funkcionály závisející na hranici.

Vzhledem k názvu kapitoly a kontextu, ve kterém charaktery algeber uvažujeme, se nabízí přirozená otázka, proč je uvažujeme pouze v případě komutativních Banachových algeber. Jako motivace poslouží následující příklad, který ukazuje, že charaktery algeber pro obecné (ne nutně komutativní) Banachovy algebry nemusí vůbec existovat.

Příklad 2.3. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$. Tato algebra je zřejmě nekomutativní unitální Banachova algebra. Jestliže v této algebře existují charaktery, pak budou splňovat

$$\phi(xy - yx) = 0.$$

Obecnou komutativní relaci matic $A, B \in M^2(\mathbb{C})$ můžeme psát jako

$$AB - BA = \begin{bmatrix} cf - bg & df + eb - af - bh \\ ag + ch - dg - ec & bg - cf \end{bmatrix},$$

kde $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{C}$. Uvažujme množinu všech takových součinů ve tvaru

$$X = \{AB - BA \mid A, B \in M^2(\mathbb{C})\}.$$

Připomeňme si zároveň, že stopa v lineární algebře je definována jako lineární funkcionál, který vrací součet všech prvků na hlavní diagonále, přesněji ji definujeme jako

$$\mathrm{tr} : M^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} : A \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Z předchozí definice je již zřejmé, že pro stopu libovolné matice $A \in X$ bude platit

$$\mathrm{tr}(A) = 0,$$

přičemž pro jádro stopy zároveň platí $N(\mathrm{tr}) = X$, takže stopa tento prostor charakterizuje, pro důkaz viz článek [16]. Uvažujeme-li tedy libovolnou matici $A \in M^2(\mathbb{C})$, pak zřejmě

$$A - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A)E \in X.$$

Z této skutečnosti dále plyne, že pro charaktery této algebry musí nutně platit

$$\phi\left(A - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A)E\right) = \phi(A) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A) = 0.$$

Protože však stopa není multiplikativní funkcionál, nemůže být multiplikativní ani ϕ, což vede ke sporu, z čehož tedy můžeme učinit závěr, že v této algebře charaktery neexistují. Stejný argument lze použít pro obecnější algebry $M^n(\mathbb{C})$, změní se pouze konstanta.

Tvrzení 2.6. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra, pak je $\Delta(X)$ neprázdné.

Důkaz. Nechť je $X \cong \mathbb{C}$, tj. každý prvek algebry je invertibilní, potom zřejmě daný isomorfismus je znakem algebry dle Gelfand-Mazurovy věty. Případ, kdy algebra obsahuje neinvertibilní prvky, ukážeme později. □

2.1.2 Ideály

Definice 2.2 (Ideál)**.** Nechť je X komutativní Banachova algebra. Podprostor $I \subset X$ se nazývá ideál jestliže pro všechna $x \in X$ a $y \in I$ platí $xy \in I$, přičemž říkáme, že je vlastní, jestliže je vlastní podmnožinou algebry X, tj. $X \neq I$, a také říkáme, že je maximální, jestliže neexistuje žádný ideál J, pro který $I \neq J$, takový, že platí

$$I \subset J \subset X. \tag{2.4}$$

Ideály komutativních Banachových algeber hrají v naší teorii analogickou roli co normální grupy v abstraktní algebře, přesněji v teorii grup. Stejně jako normální grupy můžeme využít pro vytváření nových grup pomocí faktorizace, ideály algeber můžeme využít k vytváření nových komutativních Banachových algeber, o čemž pojednává následující věta.

Tvrzení 2.7. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra a $I \subset X$ uzavřený ideál, potom faktorizace X/I je taktéž komutativní unitální Banachova algebra s normou

$$\|x + I\|_{X/I} = \inf_{y \in I} \|x + y\|_X\,, \tag{2.5}$$

přičemž násobení pro $x, y \in X/I$ definujeme ve tvaru

$$(x + I)(y + I) = xy + I. \tag{2.6}$$

Důkaz. Již víme, že se jedná o Banachův prostor, ukážeme tedy pouze, že násobení splňuje definici. Nechť $x_1, x_2 \in X$, potom lze pro $\epsilon > 0$ najít $y_1, y_2 \in I$ taková, že

$$\|x_i + y_j\| \leq \|x_i + I\| + \epsilon,$$

z čehož však plyne, že pro násobení platí

$$\|(x_1 + I)(x_2 + I)\| = \|(x_1x_2 + I)\| \leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leq (\|x_1\| + \epsilon)(\|x_2\| + \epsilon)\,,$$

ale protože bylo $\epsilon > 0$ libovolné, je nerovnost násobení splněna. Zároveň však platí

$$\|(x)\| = \|(x)(e)\| \leq \|(x)\|\,\|(e)\|\,,$$

takže jednotka má jednotkovou normu. □

Věta 2.8. Nechť je X komutativní unitální Banachova algebra a $I \subset X$ vlastní ideál.

1. Ideál I neobsahuje invertibilní prvky.
2. Uzávěr ideálu je ideál.
3. Každý maximální ideál je uzavřený.
4. Existuje maximální ideál $J \subset X$, pro který $I \subset J$.

Důkaz. Nechť je tedy I vlastní ideál algebry X.

1. Uvažujme, že existuje $y \in I \cap G(X)$, potom však $x = y(y^{-1}x) \in I$ pro všechna $x \in X$, z čehož pak přímo plyne $I = X$, což je spor s tím, že je I vlastní ideál.
2. Víme, že uzávěr podprostoru je opět podprostor, takže pokud $y \in \bar{I}$ a $x \in X$, pak existuje posloupnost, pro kterou $y_n \to I$, takže $xy_n \in I$, ale ze spojitosti násobení dostáváme $xy_n \to xy$, takže $xy \in \hat{I}$.
3. Uvažujme, že je I maximální ideál. Protože ideál neobsahuje žádné invertibilní prvky a množina invertibilních prvků $G(X)$ je otevřená, úzavěr $\bar{I}$ také neobsahuje žádné invertibilní prvky a je vlastním ideálem algebry X, ale z maximality plyne $\bar{I} = I$.
4. Plyne ze Zornova lemmatu, vynecháváme.

Tím jsou jednotlivá tvrzení dokázána. ☐

Důsledek 2.9. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra, potom $x \in G(X)$ právě tehdy, když $\phi(x) \neq 0$ pro všechna $\phi \in \Delta(X)$.

Důkaz. Již jsme dokázali, že pokud $x \in G(X)$, pak $\phi(x) \neq 0$. Pro opačnou implikaci uvažujme, že je x neinvertibilní. Potom $x \in I$ pro nějaký maximální ideál $I \subset X$, ale to znamená $\phi(x) = 0$, z čehož plyne naše tvrzení. ☐

Tvrzení 2.10. Nechť je X komutativní unitální Banachova algebra. Je-li $I \subset X$ maximální ideál, potom platí

$$X/I \cong \mathbb{C}. \tag{2.7}$$

Důkaz. Každé $(x) \in X/I$ je invertibilní, takže tvrzení plyne z Mazur-Gelfandovy věty. ☐

Příklad 2.4. Nechť je K kompaktní Hausdorfův prostor a $x \in K$, potom množina

$$I = \{f \in C(K) \mid f(x) = 0\},$$

je maximální ideál algebry $C(K)$, přičemž lze ukázat, že každý ideál má tento tvar.

Vzhledem k tomu, že jsme již uváděli příklad nekomutativní unitální Banachovy algebry, která neobsahovala žádné multiplikativní funkcionály, tj. charaktery algebry, není důvod se domnívat, že obecná Banachova algebra vždy musí obsahovat netriviální vlastní ideály. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

Příklad 2.5. Uvažujme prostor $M^n(\mathbb{C})$ a nechť $E^{(ij)} \in M^n(\mathbb{C})$ je matice, pro jejíž prvky platí $E^{(ij)}_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}$. Je-li $A \in M^n(\mathbb{C})$ libovolná matice, potom lze psát

$$E^{(ij)}AE^{(kl)} = a_{jk}E^{(il)},$$

kde $A \in M^n(\mathbb{C})$. Protože můžeme v tělese komplexních čísel dělit, plyne z této identity

$$M^n(\mathbb{C}) = \mathrm{span}\{E^{(ij)}\},$$

což však znamená, že jediný netriviální ideál této algebry je celý prostor $M^n(\mathbb{C})$.

Znaky komutativních Banachových algeber a jejich maximální ideály spolu úzce souvisí, což ukazují následující dvě velmi důležité věty.

Věta 2.11. Nechť je X komutativní unitální Banachova algebra. Potom platí, že $I \subset X$ je maximální ideál právě tehdy, když existuje $\phi \in \Delta(X)$ takové, pro které $I = N(\phi)$,

Důkaz. Je-li $\phi \in \Delta(X)$, potom je $\phi^{-1}(0)$ ideál, ale zároveň je tento ideál maximální, protože má kodimenzi 1, z čehož plyne naše tvrzení. Pro opačnou implikaci, kdy je I maximální ideál, viz [15, str. 227]. □

Poznámka. V předchozí sekci o znacích jsme ukázali příklad algebry $M^2(\mathbb{C})$, která žádné žádné charaktery algebry neobsahovala. V této sekci jsme ukázali, že tento prostor zároveň neobsahuje žádné vlastní maximální ideály, což je v souladu s předchozí větou. Ta nám dává návod pro analýzu obecných algeber, a to v tom smyslu, že nalezení ideálů dané algebry je mnohdy jednodušší.

Důsledek 2.12. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra, pak je $\Delta(X)$ neprázdné.

Důkaz. Případ, kdy je každý prvek invertibilní jsme ukázali v předchozí sekci. Existuje-li však $y \in X$, které není invertibilní, potom yX je vlastní ideál, který je obsažen dle Zornova lemmatu v nějakém maximální ideálu, který je jádrem pro nějaké $\phi \in \Delta(X)$. □

Věta 2.13 (Gelfand-Mazur)**.** Nechť je X komutativní unitální Banachova algebra a nechť je dále $I(X)$ množina všech maximálních ideálů algebry X. Potom existuje kanonická bijekce jakožto zobrazení ve tvaru

$$\psi : I(X) \to \Delta(X). \tag{2.8}$$

2.1.3 Gelfandova reprezentace

Definice 2.3 (Gelfandova reprezentace)**.** Nechť je X komutativní unitální Banachova algebra. Gelfandova reprezentace algebry X je zobrazení

$$\Gamma : X \to C(\Delta), \tag{2.9}$$

které je definováno ve tvaru

$$\Gamma_x : \Delta(X) \to \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(x). \tag{2.10}$$

Reprezentaci prvku $x \in X$ také značíme $\hat{x}$.

Poznámka. Prostor znaků algebry $\Delta(X)$ vybavujme tzv. Gelfandovou topologií, což je nejmenší topologie, ve které je každá Gelfandova reprezentace spojité zobrazení, a to konkrétněji slabou topologií, ve které říkáme, že $\phi_n \to \phi$ právě tehdy, když $\phi_n(x) \to \phi(x)$ pro všechna $x \in X$.

Následující věta platí i pro neunitální Banachovy s tím rozdílem, že se nakonec bude jednat o lokálně kompaktní prostor. Protože však lze obecně neunitální algebry unitalizovat, uvedeme ji pouze pro tento případ.

Věta 2.14. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra, potom je množina všech charakterů $\Delta(X)$ vzhledem ke Gelfandově topologii kompaktní Hausdorfův prostor.

Důkaz. Vynecháváme, lze ho najít například v [15, s. 280]. □

Poznámka. Vzhledem k tomu, že je Gelfandova reprezentace spojitý homomorfismus, bude obraz celé algebry X taktéž algebra. Tuto výslednou algebru označíme $\Gamma(X)$.

Věta 2.15. Je-li X komutativní Banachova algebra, potom je Gelfandova reprezentace homomorfismus mezi algebrami X a $\Gamma(X)$, přičemž platí

$$N(\Gamma) = \bigcap_{\alpha} I_\alpha, \tag{2.11}$$

kde $I_\alpha \subset X$ jsou jednotlivé maximální ideály algebry X.

Důkaz. Nechť je $\phi \in \Delta(X)$. Dále nechť $x, y \in X$ a $a \in \mathbb{C}$, potom lze psát

$$\Gamma_{ax+y}(\phi) = \phi(ax + y) = a\phi(x) + \phi(y) = a\Gamma_x(\phi) + \Gamma_y(\phi),$$

a v případě násobení platí

$$\Gamma_{xy}(\phi) = \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = \Gamma_x(\phi)\Gamma_y(\phi),$$

z čehož plyne, že se jedná o homomorfismus algeber. Dále je-li $x \in N(\Gamma)$, potom nutně musí platit $\phi(x) = 0$ pro všechna $\phi \in \Delta(X)$, ale dle věty 2.11 se jedná o průnik maximálních ideálů, z čehož plyne naše tvrzení. □

Poznámka. Zřejmě dle předchozí věty je Gelfandova reprezentace komutativních Banachových algeber injektivní homomorfismus právě tehdy, když je průnik všech maximálních ideálů nulový, tj. $N(\Gamma) = \{0\}$. Takovým algebrám říkáme semi-prosté, přičemž samotný průnik maximálních ideálů nazýváme radikál algebry.

Tvrzení 2.16. Je-li X komutativní unitální Banachova algebra a $x \in X$, potom platí

$$\sigma(x) = \Gamma_x(\Delta). \tag{2.12}$$

Důkaz. Zřejmé z vlastnosti znaků algebry. □

Důsledek 2.17. Je-li X komutativní Banachova algebra a $x \in X$, potom platí

$$\|\Gamma_x\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|, \tag{2.13}$$

kde ρ je spektrální poloměr, což zároveň znamená, že je Gelfandova reprezentace spojitá.

Důkaz. První nerovnost na levé straně je zřejmá z předchozího tvrzení. Druhá nerovnost plyne z důsledku o spektrálním poloměru 1.13. □

Tvrzení 2.18. Nechť je X komutativní unitální Banachova algebra. Pak prvek $x \in X$ je invertibilní právě tehdy, když je invertibilní jeho reprezentace Γ_x.

Důkaz. Uvažujme, že je $x \in G(X)$. Protože je Gelfandova reprezentace multiplikativní homomorfismus, potom musí být Γ_x invertibilní v algebře $C(\Delta)$. Naopak když $x \notin G(X)$, potom nutně musí platit $x \in I$, kde $I \subset X$ je nějaký maximální ideál, což v přímé korespondenci se charaktery algebry dává $\Gamma_x(\phi) = 0$ pro nějaké $\phi \in \Delta(X)$, z čehož však plyne, že reprezentace Γ_x nemůže být invertibilní v algebře $C(\Delta)$, neboť $0 \in \sigma(\Gamma_x)$. □

Příklad 2.6. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$ a podalgebru $N \subset M^2(\mathbb{C})$ generovanou[1] maticemi

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aE, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = bU,$$

kde $a, b \in \mathbb{C}$ jsou libovolné. Vidíme, že tato podalgebra je zřejmě komutativní, což znamená, že prostor $\Delta(N)$ je neprázdný. Je-li tedy $\phi \in \Delta(N)$, potom platí

$$\phi(B^2) = \phi(B)^2 = 0,$$

z čehož plyne, že $\phi(B) = 0$, přičemž ze základních vlastností znaků víme, že $\phi(A) = a$, to nám však již definuje jediný charakter algebry, který tato algebra obsahuje. Gelfandova reprezentace této algebry tedy má následující tvar

$$\Gamma_{aE+bU}(\phi) = \phi(aE + bU) = a\phi(E) + b\phi(U) = a.$$

Užitečnost Gelfandovy transformace v naší abstraktní teorii lze ilustrovat na následujícím příkladu, který ukazuje, že tuto transformaci na obecných komutativních unitálních Banachových algebrách lze v některém abstraktním smyslu ztotožnit s konkrétním případem Fourierovy transformace na klasických $L^1(\mathbb{R}^n)$ algebrách.

Příklad 2.7. Uvažujme prostor $L^1(\mathbb{R}^n)$. Již víme, že se jedná o komutativní Banachovu algebru, protože konvoluce je komutativní operace násobení a jednotku můžeme přidat dle již dříve popsaného způsobu. Pro připomenutí má každý prvek tvar

$$f + a\delta \in L^1(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\delta,$$

kde $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{C}$ a δ je delta míra, přičemž násobení je dáno ve tvaru

$$(f + a\delta) * (g + b\delta) = (f * g + bf + ag) + ab\delta.$$

Uvažujme dále zobrazení $\phi_t : L^1(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\delta \to \mathbb{C}$ ve tvaru

$$\phi_t(f + a\delta) = \hat{f}(t) + a,$$

kde $\hat{f}$ je Fourierova transformace. Platí $\phi_t \in \Delta(L^1(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\delta)$, přičemž lze ukázat, že prostor všech znaků je dán ve tvaru $\Delta(L^1(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\delta) = \{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\phi_\infty\}$, kde

$$\phi_\infty(f + a\delta) = a,$$

[1] Generovaná algebra prvkem $x \in X$ je uzávěr (tudíž se jedná o Banachovu algebru) prostoru všech prvků ve tvaru $p(x)$, kde p je libovolný polynom.

dle Riemann-Lebesgueova lemmatu o Fourierově transformaci, pro konkrétní detaily viz [15, str. 285], což však již přirozeně naznačuje, že tento prostor lze ztotožnit s jednobodovou kompaktifikací reálných čísel, tj. máme homeomorfismus

$$\Delta(L^1(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\delta) \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}.$$

Uvažujme tedy zobrazení $T : \mathbb{R} \to \Delta(L^1(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\delta) : t \mapsto \phi_t$. Toto zobrazení je zřejmě bijektivní, přičemž je také spojité, protože je-li $t_k \to t$ a $f + a\delta \in L^1(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\delta$, potom

$$T(t_k)(f + a\delta) = \hat{f}(t_k) + a \to \phi_t(f + a\delta) = \hat{f}(t) + a,$$

kde jsme využili toho, že Fourierova transformace je spojité zobrazení. Budeme-li dále uvažovat posloupnost $\phi_{t_k} \to \phi_t$, dostaneme

$$\phi_{t_k}(f + a\delta) = \hat{f}(t_k) + a \to \phi_t(f + a\delta) = \hat{f}(t) + a,$$

ale protože to platí pro všechna $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, platí také $t_k \to t$. Analogicky ukážeme, že toto platí i pro posloupnost $t_k \to \infty$, což však znamená, že inverzní zobrazení T^{-1} je také spojité a tudíž se jedná o homeomorfismus, z čehož již lze učinit závěr, že Gelfandova reprezentace na tomto prostoru je totožná s Fourierovou transformací.

Analogicky bychom podobný výsledek očekávali i v případě prostoru posloupností, kde zřejmě místo Fourierovy transformace bude mít Gelfandova reprezentace tvar diskrétní Fourierovy transformace. Tento případ si také ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 2.8. Uvažujme prostor $\ell^1(\mathbb{Z})$. Jedná se o komutativní Banachovu algebru s operací konvoluce ve tvaru

$$(x * y)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k},$$

přičemž tento prostor obsahuje jednotku $\delta = \delta_0$, kde $\delta_n \in \ell^1(\mathbb{Z})$ definujeme jako posloupnost, která má jedničku na n-tém místě. Všimněme si, že pro tyto posloupnosti platí

$$\delta_m * \delta_n = \delta_{m+n}.$$

Je-li $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$ libovolná posloupnost, potom zřejmě lze psát

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\delta_n.$$

Je-li dále $\phi \in \Delta(\ell^1(\mathbb{Z}))$, potom dostáváme

$$\phi(f) = \phi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\delta_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\phi(\delta_n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\phi(\delta)^n,$$

ale protože je δ jednotka, musí platit $\phi(\delta) \in \mathbb{T}$, kde $\mathbb{T}$ je komplexní jednotková kružnice, takže Gelfandova reprezentace je dána ve tvaru

$$\Gamma_f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n, \quad z \in \mathbb{T},$$

což je očekávaná diskrétní Fourierova transformace.

Poznámka. Pro přirozenější tvar diskrétní Fourierovy transformace, se kterým se můžeme setkat v kontextu inženýrském, můžeme psát

$$\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T} : z \mapsto e^{i\theta}.$$

Jako poslední příklad uvedeme prostor spojitých zobrazení, abychom ilustrovali, že Gelfandova reprezentace se v takovém případě chová přirozeným způsobem, jak bychom to očekávali, tj. spojitá zobrazení budou reprezentována sama sebou.

Příklad 2.9. Uvažujme kompaktní Hausforfův prostor K a algebru $X = C(K)$. Již víme, že všechny maximální ideály této algebry lze vyjádřit v množinovém tvaru jako

$$I_x = \{f \in X \mid f(x) = 0\},$$

což přirozeně naznačuje, že máme homeomorfismus ve tvaru

$$\Delta(X) \cong K,$$

kde všechny charaktery $\phi_t \in \Delta(X)$ mají tvar

$$\phi_t(f) = f(t),$$

z čehož je již zřejmé, že Gelfandova reprezentace libovolného spojitého zobrazení f je opět to samé spojité zobrazení, což se shoduje s naší intuicí.

Gelfandova reprezentace komutativních Banachových algeber nemusí být obecně injektivní (víme však, že je injektivní právě tehdy, když její radikál je triviální) ani surjektivní. Má-li naše algebra však dodatečnou strukturu, pak je Gelfandova reprezentace isometrie.

Věta 2.19. Nechť je X komutativní unitální Banachova algebra. Platí-li rovnost

$$\|x^2\| = \|x\|^2\,, \tag{2.14}$$

pro všechna $x \in X$, potom je Gelfandova reprezentace isometrie.

Důkaz. Uvažujme, že tato rovnost platí. Potom induktivně dostáváme

$$\|x^{2n}\| = \|x\|^{2n}\,,$$

z čehož však aplikací věty o spektrálním poloměru dostáváme

$$\rho(x) = \|x\| = \|\Gamma_x\|_\infty\,.$$

Naopak uvažujme, že $\left\|x^2\right\| = s^2$, tj. indukcí $\left\|x^{2n}\right\| \leq s^{2n}$, to vede na

$$\|\Gamma_x\|_\infty \leq s,$$

což však v případě isometrie vynutí $s = \|x\|$. □

2.2 Hvězdičkové Banachovy algebry

V této sekci zavedeme novou třídu Banachových algeber, jejichž struktura nám dává možnost isometricky isomorfní Gelfandovy reprezentace (samozřejmě za předpokladu komutativity dané algebry).

Jako prototyp pro tyto speciální Banachovy algebry využijeme unitální (a komutativní) Banachovy algebry komplexních čísel $\mathbb{C}$, o které víme, že můžeme uvažovat operaci komplexního sdružení, kterou pro libovolný prvek $(a + ib) \in \mathbb{C}$ definujeme jako

$$(a + ib)^* = a - ib,$$

přičemž tato operace je v komplexních číslech spojitá.

Definice 2.4 (Involuce)**.** Nechť je X Banachova algebra. Involuce je unární operace, která pro všechna $x, y \in X$ a $a \in \mathbb{C}$ splňuje následující podmínky

(1) $(ax + y)^* = a^*x^* + y^*$,

(2) $(xy)^* = y^*x^*$,

(3) $x^{**} = x$,

kde a^* je standardní komplexní sdružení, tj. $(u + iv)^* = u - iv$, kde $u, v \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.10. Uvažujme Banachův prostor $B(H, K)$, kde H a K jsou Hilbertovy prostory, a nechť $x \in B(H, K)$ libovolný operátor. Sdružený operátor $x^* \in B(K, H)$ v takovém případě definujeme pomocí skalárního součinu ve tvaru

$$(x\xi_1, \xi_2)_K = (\xi_1, x^*\xi_2)_H \,,$$

pro všechna $\xi_1 \in H$ a $\xi_2 \in K$. Ověřme, že takto definované sdružení lineárních operátorů je skutečně operace involuce. Ukážeme pouze, že splňuje první podmínku z definice involuce, zbylé dvě jsou zřejmé. Nechť $x, y \in B(H, K)$ a $a \in \mathbb{C}$, potom platí

$$\begin{aligned}((ax + y)\xi_1, \xi_2)_K &= a\,(x\xi_1, \xi_2)_K + (y\xi_1, \xi_2)_K = \cdots \\ &= a\,(\xi_1, x^*\xi_2)_H + (\xi_1, y^*\xi_2)_H = (\xi_1, (ax + y)^*\xi_2)_H \,.\end{aligned}$$

Platí-li $H = K$, potom je prostor $B(H)$ unitální Banachova algebra s involucí. Existence takového sdruženého operátoru plyne z Rieszovy věty, pro detaily viz [15].

Uvažujme opět unitální Banachovu algebru komplexních čísel $\mathbb{C}$. V této algebře lze jednoduše nalézt prvky, které jsou vůči komplexnímu sdružení invariantní ve smyslu, že platí

$$z^* = z.$$

Vyjádříme-li si takový prvek explicitně ve tvaru

$$(a + ib)^* = a - ib,$$

pak zjistíme, že těmito prvky jsou právě ryze reálná čísla. Analogický rozklad libovolného komplexního čísla na reálnou a imaginární část lze uvažovat i v obecnějších Banachových algebrách s involucí, jak si ukážeme později.

Definice 2.5 (Samo-sdruženost)**.** Nechť je X Banachova algebra s involucí. Prvek $x \in X$ se nazývá samo-sdružený, jestliže pro něj platí

$$x^* = x. \tag{2.15}$$

Poznámka. Máme-li unitální Banachovu algebru s involucí, potom je jednotka vždy samo-sdruženým prvkem, neboť pro libovolné $x \in X$ máme

$$ex = xe = x, \quad \text{ale} \quad e^*x^* = x^*e^* = x^*,$$

a protože je jednotka jediná, musí tedy platit $e^* = e$.

Příklad 2.11. V Banachově algebře komplexních čísel $\mathbb{C}$ jsme již zmínili, že samo-sdružené prvky jsou právě ryze reálná komplexní čísla. Pro netriviální příklad uvažujme Banachovu algebru s involucí $M^2(\mathbb{C})$ a matici $A \in M^2(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ jsou libovolné. Sdružená matice je dána ve tvaru

$$A^* = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že množina samo-sdružených matic je dána ve tvaru

$$M^2(\mathbb{C})^{\mathrm{sa}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

z čehož vidíme, že se jedná o reálný Banachův prostor. Nejedná se však o algebru, neboť tento prostor není uzavřený na součin, tj. z definice involuce pro $A, B \in M^2(\mathbb{C})^{\mathrm{sa}}$ platí

$$(AB)^* = B^* A^* = BA,$$

což zřejmě není samo-sdružený prvek, pokud A a B nekomutují.

Tvrzení 2.20. Nechť je X Banachova algebra s involucí a nechť prvky $x, y \in X$ jsou samo-sdružené. Součin $xy \in X$ je samo-sdružený právě tehdy, když x a y komutují.

Důkaz. V případě, že je součin samo-sdružený, potom $(xy)^* = yx = xy$. Opačně pokud budeme uvažovat, že prvky spolu komutují, potom dostáváme

$$(xy)^* = y^* x^* = yx = xy,$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Důsledek 2.21. Je-li X komutativní Banachova algebra s involucí, potom reálný lineární prostor X^{sa}, definovaný v příkladě 2.11, je reálná Banachova algebra s triviální involucí.

Tvrzení 2.22. Nechť je X Banachova algebra s involucí. Prvky $x, y \in X$ komutují právě tehdy, když komutují $x^*, y^* \in X$.

Důkaz. Stačí uvažovat součin $xy = yx$ a provést involuci, čímž dostaneme $y^* x^* = x^* y^*$. □

Tvrzení 2.23. Nechť je X Banachova algebra s involucí. Pro každé $x \in X$ existuje dekompozice ve tvaru

$$x = u + iv, \tag{2.16}$$

kde $u, v \in X$ jsou samo-sdružené.

Důkaz. Stačí zřejmě uvažovat rozklad ve tvaru

$$2u = (x + x^*) \quad \text{a} \quad 2v = i(x^* - x).$$

Přímým dosazením dostáváme požadovanou dekompozici. Uvažujme jinou dekompozici ve tvaru $x = u' + iv'$ a položme $w = v' - v$. Potom w a iw jsou samo-sdružené, přičemž

$$iw = (iw)^* = -iw,$$

ale z toho plyne, že $w = 0$, tudíž je tato dekompozice jediná. □

Důsledek 2.24. Nechť je X Banachova algebra s involucí. Potom platí

$$X = X^{\mathrm{sa}} + iX^{\mathrm{sa}}. \tag{2.17}$$

Příklad 2.12. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$ a matici $A \in M^2(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Dekompozice této matice na samo-sdružené matice je dána ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

Struktura Banachova prostoru X^{sa} je důležitá z praktického hlediska například v kontextu kvantové fyziky, kde se uvažují samo-sdružené operátory na Hilbertových prostorech jakožto pozorovatelné (fyzikální veličiny jako je rychlost či třeba hybnost částice).

Protože je komutativita obecně poměrně silný požadavek pro algebru, prostor X^{sa} obecně není přirozeně algebrou. Všimněme si však, že jsou-li prvky $x, y \in X^{\mathrm{sa}}$, potom platí

$$(xy + yx) \in X^{\mathrm{sa}},$$

což nám dovoluje na takovém prostoru definovat operaci součinu ve tvaru

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

Protože tento součin není asociativní (je však na druhou stranu vždy komutativní), není tento prostor Banachovou algebrou, ale speciální Jordanovou algebrou, která úzce souvisí s Jordanovými triple systémy, které uvedeme v poslední kapitole.

Jako jednoduchý případ, kdy se přirozeně můžeme setkat se samo-sdruženými prvky v obecných algebrách uvádíme následující příklad, který jsme již viděli v kontextu řešení jednoduchých diferenciálních rovnic.

Příklad 2.13. Uvažujme unitální Banachovu algebru s involucí X a nechť je $x \in X$ libovolné a také uvažujme v rámci tohoto příkladu, že je involuce isometrie. V takové algebře můžeme definovat množinu exponenciál daného prvku s parametrem $t \in \mathbb{R}$ jako mocninnou řadu ve tvaru

$$e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tx)^n.$$

Aplikujeme-li involuci člen po členu (to lze, protože se jedná o isometrii), potom dostáváme

$$(e^{tx})^* = e^{tx^*}.$$

Budeme-li uvažovat, že prvek s vlastní involucí komutuje (později pro takové prvky zavedeme definici), potom můžeme uvažovat součin

$$e^{tx}e^{tx^*} = e^{t(x+x^*)}.$$

Z toho vidíme, že bude-li $x \in X$ anti-sdružené, tj. $x^* = -x$, potom nám sdružení této exponenciály dává inverzi, ale z předchozí charakterizace protorů samo-sdružených prvků tedy víme, že musí platit $x \in iX^{\mathrm{sa}}$, takže můžeme tedy uvažovat exponenciály ve tvaru

$$e^{itx}.$$

S takovými výrazy se často můžeme setkat v teoretické fyzice.

Příklad 2.14. Uvažujme kompaktní Hausdorfův prostor K. V takovém případě je Banachova algebra $C(K)$ algebra s přirozenou involucí (komplexní sdružení komplexních zobrazení). Všimněme si, že v této algebře zřejmě platí

$$\|f^* f\|_\infty = \|f\|_\infty^2 ,$$

ale to však z definice Banachovy algebry zároveň dává

$$\|f\|_\infty^2 = \|f^* f\|_\infty \leq \|f^*\|_\infty \|f\|_\infty .$$

Nahradíme-li $f \mapsto f^*$ a zároveň $f^* \mapsto f$, potom zjistíme, že v této algebře je involuce přirozeně isometrie.

V předchozím příkladu jsme ukázali, že v algebře spojitých komplexních zobrazení (která je důležitá, jak jsme již ukazovali v předchozí kapitole, především v kontextu Gelfandovy reprezentace). Je-li X Banachova algebra s involucí, která je zároveň v této algebře isometrií, a prvek $x \in X$ je samo-sdružený, potom zřejmě platí

$$\|x^* x\| = \left\|x^2\right\| = \|x\|^2 ,$$

což lze porovnat s podmínkou pro to, kdy je Gelfandova reprezentace isometrií.

Příklad 2.15. Uvažujme algebru $B(H)$, kde H je Hilbertův prostor a nechť $x \in B(H)$. Protože se jedná o Banachovu algebru, potom zřejmě platí

$$\|x^* x\| \leq \|x^*\| \|x\| .$$

Uvažujme libovolné $\xi \in H$ s jednotkovou normou. Cauchy-Schwarz nám dává

$$(x^* x \, \xi, \xi) \leq \|x^* x\| ,$$

to ale znamená, že platí nerovnost ve tvaru

$$\|x^*\| \|x\| \geq \|x^* x\| \geq \sup_\xi (x^* x \, \xi, \xi) = \sup_\xi (x \, \xi, x \, \xi) = \|x\|^2 .$$

Záměnou $x \mapsto x^*$ a zároveň $x^* \mapsto x$ dostáváme, že sdružení je isometrie.

Poznámka. Všimněme si, že chceme-li, aby nám podmínka z předchozích příkladů implikovala isometrii involuce, stačí uvažovat pouze slabší verzi ve tvaru

$$\|x\|^2 \leq \|x^* x\| .$$

Vzhledem k tomu, že algebry spojitých zobrazení a omezených lineárních operátorů obě splňují stejnou podmínku, je účelné uvažovat takové algebry obecně.

Definice 2.6 (C^*-algebra)**.** Nechť je X obecná Banachova algebra s involucí. Tuto algebru nazýváme C^*-algebra, jestliže pro všechna $x \in X$ platí

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 . \tag{2.18}$$

Poznámka. Je-li X C^*-algebra, která obsahuje jednotku (libovolné normy), tak je automaticky unitální neboť platí

$$\|e^* e\| = \|e\| = \|e\|^2 .$$

Stejně jako v obecných Banachových algebrách s involucí (bez dodatečné struktury) jsme přirozeně uvažovali samo-sdružené prvky, v C^*-algebrách je zajímavé vzhledem k uvažované podmínce uvažovat prvky, kterým říkáme normální, viz následující definice.

Definice 2.7 (Normalita)**.** Nechť je X C^*-algebra. Prvek $x \in X$ se nazývá normální, jestliže pro něj platí

$$x^* x = x x^*. \tag{2.19}$$

Poznámka. Všimněme si, že samo-sdružené prvky jsou v libovolné algebře normální, opačná implikace však neplatí.

Tvrzení 2.25. Nechť je X unitální C^*-algebra. Je-li $x \in X$ je normální, potom platí

$$\rho(x) = \|x\|. \tag{2.20}$$

Důkaz. Uvažujme nejdříve, že $x \in X$ je samo-sdružený (tudíž i normální), platí

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| = \left\|x^2\right\|,$$

z čehož indukcí dostáváme

$$\|x\|^{2^n} = \|x^{2^n}\|,$$

takže dle věty o spektrálním poloměru máme

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|x\|.$$

Dále protože xx^* je samo-sdružený, můžeme pro x normální psát

$$\rho(x)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{2^{-n}}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \|\left(x^{2^n}\right)\left(x^{2^n}\right)^*\|^{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \|(xx^*)^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|x\|^2,$$

což po odmocnění obou stran dává naši požadovanou rovnost. □

Důsledek 2.26. Je-li X Banachova algebra s involucí, potom existuje jediná norma, vzhledem ke které je tato algebra C^*-algebrou.

Důkaz. Uvažujme dvě normy, vzhledem ke kterým je tato algebra C^*-algebrou a nechť $x \in X$ je libovolné; potom lze dle předchozího tvrzení 2.25 psát

$$\|x\|_1^2 = \|x^*x\|_1 = \rho(x^*x) = \|x^*x\|_2 = \|x\|_1^2,$$

z čehož plyne, že jsou tyto dvě normy stejné. □

Tvrzení 2.27. Nechť je X Banachova algebra s involucí a nechť $x \in X$ je normální prvek s rozkladem na samo-sdružené prvky $x_1, x_2 \in X^{\mathrm{sa}}$ ve tvaru

$$x = x_1 + i x_2. \tag{2.21}$$

Potom prvky x_1 a x_2 komutují, tj. $x_1 x_2 = x_2 x_1$.

Důkaz. Již víme, že takový rozklad existuje a je jedinečný dle tvrzení o rozkladu 2.23, nechť tedy $x = x_1 + i x_2$, kde $x_1, x_2 \in X^{\mathrm{sa}}$, potom přímým výpočtem

$$x_1 x_2 = \frac{1}{2}(x + x^*)\frac{1}{2i}(x - x^*) = \frac{1}{4i}(x^2 - xx^* + x^*x - (x^*)^2) = \frac{1}{4i}(x^2 - (x^2)^*).$$

Analogicky i pro druhý součin, z čehož nakonec dostáváme naše tvrzení. □

Na konec sekce zmíníme, že každou konečně dimenzionální C^*-algebru lze reprezentovat pomocí nějakých prostorů čtvercových matic. Analogicky v nekonečné dimenzi lze tyto algebry reprezentovat jako podprostory spojitých lineárních operátorů nad nějakými Hilbertovými prostory. Pro detaily viz [15] či případně [14]; následující větu uvádíme pouze pro konečně dimenzionální algebry.

Věta 2.28. Necht je X unitální konečně dimenzionální C^*-algebra. Potom existuje jedinečné $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$X \cong \bigoplus_{k=1}^{n} M^{m_k}(\mathbb{C}), \tag{2.22}$$

kde (m_i) jsou jediná až na permutaci.

2.3 Spojitý funkcionální kalkulus

V této sekci zavedeme spojitý funkcionální kalkulus, který je zřejmým rozšířením holomorfního funkcionálního kalkulu za cenu toho, že se omezíme na algebry s konkrétnější strukturou. Nejdříve začneme z krátké diskuze ohledně spekter.

Definice 2.8 (Unitarita)**.** Nechť je X unitální C^*-algebra. Prvek $u \in X$ se nazývá unitární, jestliže pro něj platí

$$u^*u = uu^* = e. \tag{2.23}$$

Poznámka. Stejně jako v případě samo-sdružených prvků jsou unitární prvky taktéž normální.

Příklad 2.16. Uvažujme algebru $B(H)$, kde H je Hilbertův prostor. V takovém případě jsou unitární prvky právě surjektivní lineární isometrie.

Tvrzení 2.29. Nechť je X unitální C^*-algebra a $u \in X$ je unitární. Potom platí

$$\sigma(u) \subset \mathbb{T}. \tag{2.24}$$

Důkaz. Protože je dle předpokladu u unitární, musí být unitární i u^*, takže můžeme psát

$$\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|e\| = 1,$$

ale protože je normální, pak dle tvrzení 2.25 pro všechna $\lambda \in \sigma(u)$ máme $|\lambda| \leq 1$, ale protože pro unitární prvky zřejmě platí $u^* = u^{-1}$, potom máme

$$\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*),$$

ale to znamená, že pro všechna $\lambda \in \sigma(u)$ zároveň platí $|\lambda| \geq 1$, takže $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$. □

Tvrzení 2.30. Nechť je X unitální C^*-algebra a $x \in X$ je samo-sdružené. Potom platí

$$\sigma(u) \subset \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Důkaz. Nechť $\lambda \in \sigma(x)$ je libovolné. Protože je algebra komplexních čísel Banachova algebra s involucí, lze dle věty o rozkladu 2.23 uvažovat

$$\lambda = \alpha + i\beta,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^{\mathrm{sa}} = \mathbb{R}$. Uvažujme posloupnost ve tvaru

$$x_n = x - \alpha e + in\beta e, \quad i(n+1)\beta \in \sigma(x_n),$$

kde $\rho(x_n) = \|x_n\|$, protože je x_n normální. Nakonec máme odhad

$$(n+1)^2\beta^2 \leq \rho(x_n)^2 = \|x_n\|^2 = \|x_n^* x_n\| = \left\|(x - \alpha e)^2 + n^2\beta^2 e\right\| \leq \|x - \alpha e\|^2 + n^2\beta^2,$$

což implikuje, že člen $n^2\beta^2$ je omezený pro všechna $n \in \mathbb{N}$, takže $\beta = 0$, z čehož $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Vrátíme-li se ke Gelfandově reprezentaci komutativních algeber, je pro naše účely důležité ukázat, jak se chovají charaktery vzhledem ke komutativní C^*-algebře.

Tvrzení 2.31. Nechť je X komutativní C^*-algebra a nechť $\phi \in \Delta(X)$ je libovolný charakter algebry. Potom pro všechna $x \in X$ platí

$$\phi(x^*) = \phi(x)^*. \tag{2.26}$$

Důkaz. Uvažujme pro $x \in X$ rozklad dle věty 2.23 ve tvaru $x = a + ib$. Protože charaktery přímo korespondují se spektrem daného prvku, pak dle předchozí věty dostáváme

$$\phi(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}, \quad \phi(b) \in \sigma(b) \subset \mathbb{R},$$

z toho však rovnou plyne

$$\phi(x^*) = \phi(a - ib) = \phi(a) - i\phi(b) = \phi(x)^*,$$

takže znaky přirozeně respektují operaci involuce. □

Poznámka. Zobrazení, která respektují operaci involuce se nazývají $*$-homomorfismy.

Věta 2.32. Nechť je X unitální komutativní C^*-algebra. Gelfandova reprezentace ve tvaru

$$\Gamma : X \to C(\Delta), \tag{2.27}$$

isometrický $*$-isomorfismus.

Důkaz. Gelfandova reprezentace je isometrie, neboť pro všechna $x \in X$ platí

$$\|\Gamma_x\|_\infty^2 = \|\Gamma_x^*\Gamma_x\|_\infty = \left\|\Gamma_{(x^*x)}\right\|_\infty = \rho(x^*x) = \|x^*x\| = \|x\|^2,$$

což znamená, že $\Gamma(X)$ je uzavřená podalgebra $C(\Delta)$, která odděluje body, přičemž pro každé $\phi \in \Delta(X)$ existuje $x \in X$, které splňuje

$$\Gamma_x(\phi) \neq 0,$$

takže dle Stone-Weierstrassovy věty [15] dostáváme

$$\Gamma(X) \cong C(\Delta),$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Vzhledem k předchozí větě o Gelfandově reprezentaci komutativních C^*-algeber máme přibližný návod, jak konstruovat pro takové algebry spojitý funkcionální kalkulus. Kdybychom totiž mohli identifikovat prostor charakterů $\Delta(X)$ se spektrem uvažovaného prvku algebry $x \in X$, potom bychom pro libovolné $f \in C(\Delta)$ mohli psát

$$f(x) = \Gamma_x^{-1}(f).$$

Předpokládejme nejdřív, že toto opravdu lze provést. Potom však nastává problém, co se týče požadavku komutativity, neboť mnohé zajímavé algebry komutativní nejsou, ale přesto obsahují komutativní podalgebry. Můžeme tedy najít nějakou takovou algebru, která obsahuje náš uvažovaný prvek. Ze základní teorie Banachových algeber však víme, že toto omezení nám naruší spektrum.

Věta 2.33. Nechť je X unitální C^*-algebra. Je-li $Y \subset X$ unitální C^*-podalgebra se stejnou jednotkou, potom pro všechna $x \in Y$ platí

$$\sigma_X(x) = \sigma_Y(x), \tag{2.28}$$

tj. při omezení nedojde ke změně spektra.

Důkaz. Tuto větu dokážeme pouze pro případ, kdy je algebra $Y \subset X$ komutativní. V takovém případě totiž platí, že každý prvek $x \in Y$ je normální. Nechť tedy $x \in Y$ je libovolné a nechť $x^{-1} \in Y$. Protože je $x \in Y$ normální, je normální i jeho inverze, ale to však znamená, že z komutativity plyne $x^{-1} \in Y$. □

Chceme-li tedy zvolit nějakou komutativní podalgebru, která obsahuje náš prvek $x \in X$, musí taková algebra zřejmě obsahovat $x^* \in X$, ale protože musí být komutativní, pak tento prvek musí být normální. Předchozí tvrzení lze tedy výhodně uvažovat v případě, zvolíme-li nejmenší algebru generovanou množinou $\{e, x, x^*\}$, kterou označíme

$$C^*(\{e, x\}).$$

Sjednocením všech úvah dostáváme spojitý funkcionální kalkulus.

Věta 2.34 (Spojitý kalkulus)**.** Nechť je X unitální C^*-algebra a $x \in X$ je normální prvek. Potom existuje isometrický $*$-isomorfismus ve tvaru

$$\Psi : C(\sigma(x)) \to C^*(\{e, x\}), \tag{2.29}$$

pro který $\Psi(z) = x$ a zároveň $\Psi(1) = e$.

Důkaz. Pro jednoduchost nechť $Y = C^*(\{e, x\})$. Víme, že tato algebra je komutativní unitální C^*-algebra, přičemž Gelfandova reprezentace je isometrický $*$-isomorfismus

$$\Gamma : Y \to C(\Delta).$$

Dva charaktery, které se shodují pro prvek $x \in Y$ se musí shodovat na algebře Y, což znamená, že $\delta_x(\phi) = \phi(x)$ je spojitá bijekce mezi $\Delta(X)$ a $\sigma(x)$, ale protože tyto dvě množiny jsou kompaktní Hausdorfovy prostory, jedná se o homeomorfismus a tyto množiny lze ztotožnit. Z toho dostáváme isometrický $*$-isomorfismus

$$\Phi : C(\sigma(x)) \to C(\Delta),$$

pro který $\Phi_f(\phi) = f(\delta_x(\phi)) = f(\phi(x)) = f(\Gamma_x(\phi))$. Označíme-li $\Psi = \Gamma_x^{-1} \circ \Phi$, potom dostáváme požadované zobrazení. Zbytek lze ověřit přímým dosazením. □

Tvrzení 2.35. Nechť je X unitální C^*-algebra a $x \in X$ je normální prvek. Potom pro libovolné zobrazení $f \in C(\sigma(x))$ platí

$$\sigma(f(x)) = f(\sigma(x)). \tag{2.30}$$

Důkaz. Nechť je $Y = C^*(\{e, x\})$. Potom s využitím spojitého funkcionálního kalkulu a věty 2.33 o neměnnosti spektra máme

$$\sigma_X(f(x)) = \sigma_Y(f(x)) = \sigma_{C(\sigma(x))}(f) = f(\sigma(x)),$$

z čehož dostáváme naše tvrzení. □

Důsledek 2.36. Nechť je X unitální C^*-algebra a $x \in X$ je normální prvek. Potom pro libovolné zobrazení $f \in C(\sigma(x))$ platí

$$\|f(x)\| = \sup_{z \in \sigma(x)} |f(z)| = \|f\|_\infty . \tag{2.31}$$

Dále se na konec této sekce zaměříme na některé důležité aplikace a důsledky spojitého funkcionálního kalkulu a to především na existenci odmocniny pro pozitivní prvky, kterou využijeme pro konstrukci polární dekompozice v poslední kapitole.

Definice 2.9 (Projekce)**.** Nechť je X obecná C^*-algebra. Prvek $p \in X$ se nazývá projekce, jestliže pro něj platí

$$p^2 = p = p^*, \tag{2.32}$$

tj. jedná se o samo-sdružený idempotent. Přičemž říkáme, že dvě různé projekce $p, q \in X$ jsou vzájemně ortogonální právě tehdy, když $pq = qp = 0$.

Tvrzení 2.37. Nechť je X unitální C^*-algebra a $p \in X$ projekce. Potom platí

$$\sigma(p) \subset \{0, 1\}. \tag{2.33}$$

Důkaz. Protože je $p \in X$ z definice projekce idempotent, můžeme uvažovat $f(z) = z(1-z)$, což však aplikací spojitého funkcionálního kalkulu dává $f(p) = 0$, ale to znamená, že spektrum může obsahovat pouze hodnoty 0 nebo 1, z čehož plyne naše tvrzení. □

Tvrzení 2.38. Nechť je X konečně dimenzionální unitální C^*-algebra a nechť je $x \in X$ je normální. Potom $\sigma(x)$ je konečná množina, přičemž

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k p_k, \tag{2.34}$$

kde $a_k \in \sigma(x)$ a p_k jsou vzájemně ortogonální projekce.

Důkaz. Protože je z předpokladu prvek $x \in X$ normální, potom je algebra $C(\sigma(x))$ isomorfní s nějakou C^*-podalgebrou $Y \subset X$, která však zřejmě musí být taktéž konečně dimenzionální, což znamená, že spektrum musí být nutně konečná množina. V takovém případě však pro každé $\lambda \in \sigma(x)$ můžeme uvažovat zobrazení

$$p_\lambda(z) = \mathbf{1}_{\{\lambda\}}(x),$$

které je spojité díky tomu, že spektrum je konečné. Toto zobrazení je zřejmě samo-sdružený idempotent, což znamená, že jeho obraz vzhledem ke spojitému funkcionálnímu kalkulu musí být projekce, ale protože máme

$$\sum_{\lambda \in \sigma(x)} \lambda p_\lambda(z) = z,$$

potom aplikací kalkulu dostáváme námi požadovaný rozklad na projekce. □

V obecných nekonečně dimenzionálních algebrách je předchozí konstrukce problematická nejen z toho důvodu, že spektrum je obvykle nespočetná množina, ale také kvůli tomu, že projekce až na triviální případy nemusí v C^*-algebře vůbec existovat.

Příklad 2.17. Uvažujme algebru $C(K)$, kde K je nějaký kompaktní Hausdorfův prostor. Potom je zřejmé, že v takovém případě v této algebře neexistují žádné netriviální projekce, tj. jiné než 0 a 1, právě tehdy, když je prostor K souvislý.

Definice 2.10 (Pozitivita)**.** Nechť je X obecná C^*-algebra. Samo-sdružený prvek $x \in X$ se nazývá pozitivní, jestliže má nezáporné spektrum.

Poznámka. Množinu všech pozitivních prvků algebry obvykle značíme X^+, přičemž skutečnost, že je prvek $x \in X$ pozitivní, tj. $x \in X^+$, značíme zjednodušeně $x \geq 0$. Všimněme si také, že množina X^+ je zřejmě uzavřená na násobení nezápornými skaláry.

Tvrzení 2.39. Nechť je X unitální C^*-algebra. Je-li $x \in X$ normální, potom $x^*x \geq 0$.

Důkaz. Protože je $x \in X$ z předpokladu normální, potom dle vlastnostní spojitého funkcionálního kalkulu dostáváme

$$\sigma(x^*x) = f(\sigma(x)),$$

kde $f(z) = z^*z$, což je spojité zobrazení, pro které lze psát $f(z) = |z|^2$. □

Díky spojitému funkcionálnímu kalkulu máme určitou analogii Jordanovy dekompozice pro samo-sdružené prvky, se kterou jsme se již mohli setkat v základní teorii měr. Tvrzení uvádíme pro spíše zajímavost, a tedy bez důkazu.

Tvrzení 2.40. Nechť je X unitální C^*-algebra a $x \in X$ je samo-sdružený. Uvažujme

$$f(z) = \max\{z, 0\} \quad \text{resp.} \quad g(z) = \max\{-z, 0\}. \tag{2.35}$$

Potom $f(x)$ a $g(x)$ jsou pozitivní a platí rozklad ve tvaru

$$x = f(z) - g(z). \tag{2.36}$$

Protože mají z definice pozitivní prvky C^*-algebry nezáporné spektrum, je na tomto spektru odmocnina spojité zobrazení a tedy lze pro takové prvky bez problémů odmocninu pomocí spojitého funkcionálního kalkulu definovat.

Tvrzení 2.41. Nechť je X unitální C^*-algebra. Je-li $x \in X$ pozitivní, tj. $x \in X^+$, potom existuje prvek $x^{1/2} \in X^+$, který splňuje

$$(x^{1/2})^2 = x, \tag{2.37}$$

přičemž existuje-li $y \in X$ takové, že $x = y^*y$, potom $x \geq 0$.

Důkaz. Protože je $x \in X^+$, má nezáporné spektrum a tudíž aplikací funkcionálního kalkulu pro zobrazení $f(z) = \sqrt{z}$ dostáváme naše tvrzení. Protože je součin y^*y samo-sdružený pro libovolné $y \in X$, musí mít reálné spektrum, takže nechť $f, g \in C(\mathbb{R})$ jsou ve tvaru

$$f(z) = \sqrt{z}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z) \quad \text{a} \quad g(z) = \sqrt{-z}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^-}(z).$$

Zřejmě $f(z)g(z) = 0$, ale také $f^2(z) - g^2(z) = z$ pro všechna $z \in \mathbb{R}$. Protože obě zobrazení jsou v počátku nulová, dostáváme samo-sdružené prvky ve tvaru

$$u = f(y^*y) \quad \text{a} \quad v = g(y^*y),$$

pro které $uv = vu = 0$ a $u^2 - v^2 = y^*y$. To dává prvek $vy^*yv = v(u^2 - v^2)v = -v^4$, který však má záporné spektrum, což znamená, že je nulový, ale protože je samo-sdružený, potom $v = 0$, to však nakonec dává $y^*y = u^2$, což však víme, že je pozitivní. $\square$

Definice 2.11 (Absolutní hodnota)**.** Nechť je X unitální C^*-algebra. Absolutní hodnotu libovolného prvku $x \in X$ definujeme ve tvaru

$$|x| = \sqrt{x^*x}. \tag{2.38}$$

Příklad 2.18. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$ a matici $A \in M^2(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Absolutní hodnota této matice je dána přímým výpočtem ve tvaru

$$|A| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 22 \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že absolutní hodnota prvků C^*-algebry je důležitá a setkáme se s ní v poslední kapitole v kontextu Jordanových triple systémů, uvedeme následující užitečnou definici.

Definice 2.12 (Singulární hodnoty)**.** Uvažujme prostor $B(H, K)$, kde H a K jsou Hilbertovy prostory a nechť $x \in B(H, K)$. Singulární hodnoty definujeme jako množinu

$$\sigma_{\text{sing}}(x) = \sigma_p(|x|). \tag{2.39}$$

3. Jordanovy triple systémy

V předchozích kapitolách jsme se soustředili především na Banachovy algebry, které jsou z definice asociativní, vyznačující se spojitou binární operací násobení. V této kapitole se zaměříme na prostory s novou algebraickou strukturou, která je dána ternární operací, které říkáme Jordanův triple součin.

Nejdříve začneme ze základních algebraických vlastností takových struktur a následně ukážeme, že na nich lze definovat funkcionální kalkulus analogicky předchozím kapitolám, který budeme ilustrovat na konkrétním Banachově prostoru obdélníkových matic.

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1 (Jordanův triple systém)**.** Nechť je X komplexní, resp. reálný lineární prostor. Jordanův triple součin je ternární operace, která pro všechna $x, y, z, a, b \in X$ splňuje

(1) $\{x, y, z\}$ je trilineární zobrazení, které je symetrické ve vnějších argumentech,

(2) $\{a, b, \{x, y, z\}\} - \{x, y, \{a, b, z\}\} = \{\{a, b, x\}, y, z\} - \{x, \{b, a, y\}, z\}$.

Lineární prostor X s touto operací nazýváme komplexní, resp. reálný Jordanův triple systém. Je-li zároveň triple součin ve vnitřním argumentu sdruženě lineární, potom se prostor X nazývá sdružený (či Hermitovský) Jordanův triple systém.

Příklad 3.1. Uvažujme asociativní algebru $\mathbb{C}^n$ s násobením po složkách. Tato algebra tvoří komplexní Jordanův triple systém s triple součinem pro $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ ve tvaru

$$\{x, y, z\}_1 = xyz,$$

Pokud však budeme uvažovat triple součin ve tvaru

$$\{x, y, z\}_2 = xy^* z,$$

potom tato algebra tvoří sdružený Jordanův triple systém. Formální rozdíl mezi těmito triple součiny je zřejmý, z praktického hlediska je však zajímavé pozorování

$$\{ix, iy, z\}_1 = -\{x, y, z\}_1, \quad \{ix, iy, z\}_2 = \{x, y, z\}_2.$$

Příklad 3.2. Uvažujme Banachův prostor $B(H, K)$, kde H a K jsou libovolné komplexní Hilbertovy prostory. Tento prostor netvoří algebru. Zvolíme-li pevně nějaké $y \in B(H, K)$, potom tento prostor tvoří asociativní algebru se součinem ve tvaru

$$x \circ_y z = xy^* z.$$

Protože však není příliš důvod se omezovat na konkrétní $y \in B(H, K)$, lze tuto asociativní algebru rozšířit na sdružený Jordanův triple systém pokud uvažujeme Jordanův triple součin definovaný ve tvaru

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}\left(x \circ_y z + z \circ_y x\right) = \frac{1}{2}(xy^* z + zy^* x),$$

pro $x, y, z \in B(H, K)$. Tento symetrický Jordanův triple součin nazýváme kanonický.

Poznámka. Je-li X obecně asociativní algebra, potom je zároveň Jordanovým triple systémem, pokud uvažujeme kanonický součin, což v našem případě znamená, že můžeme uvažovat libovolnou Banachovu algebru. Má-li navíc uvažovaná asociativní algebra operaci involuce, potom zřejmě bude mít strukturu sdruženého Jordanovova triple systému.

V návaznosti na předchozí poznámku máme následující tvrzení.

Tvrzení 3.1. Nechť je X Banachova algebra s isometrickou involucí a strukturou Jordanova triple systému vzhledem ke kanonickému součinu a nechť $x, y, z \in X$. Platí

$$\|\{x, y, z\}\| \leq \|x\| \, \|y\| \, \|z\| \,. \tag{3.1}$$

Důkaz. Pro námi definovaný kanonický součin zřejmě platí

$$\|\{x, y, z\}\| = \frac{1}{2} \|xy^*z + zy^*x\| \leq \|x\| \, \|y\| \, \|z\| \,,$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Důsledek 3.2. Kanonický triple součin je spojitá operace na Banachových algebrách s isometrickou involucí.

Uvedeme ještě poslední důležitý příklad netriviálního Jordanova triple systému.

Příklad 3.3. Uvažujme dále algebru $C_0(\mathbb{R})$. Již víme, že tato algebra má přirozeně strukturu sdruženého Jordanova triple systému s kanonickým triple součinem ve tvaru

$$\{f, g, h\} = fg^*h,$$

pro všechna $f, g, h \in C_0(\mathbb{R})$. Jako netriviální příklad Jordanova triple podsystému, který již není podalgebrou, lze uvést prostor všech lichých zobrazení $C^{\text{odd}}(\mathbb{R})$ ve tvaru

$$C_0^{\text{odd}}(\mathbb{R}) = \{f \in C_0(\mathbb{R}) \mid f(-z) = -f(z), \, \forall z \in \mathbb{R}\}.$$

Již víme, že každá asociativní algebra s involucí má zároveň strukturu sdruženého Jordanova triple systému, není však zatím zřejmé, že se jedná o zobecnění již nám známých algeber. Uvažujme však, že naše asociativní algebra X obsahuje jednotku $e \in X$, potom lze pro libovolná $x, y \in X$ psát triple součin ve tvaru

$$\{x, e, y\} = \frac{1}{2}(xe^*y + ye^*x) = \frac{1}{2}(xy + yx),$$

což lze rozpoznat jako speciální Jordanův součin. V případě, že je naše algebra zároveň komutativní, potom se nám tento součin zjednodušuje na tvar

$$\{x, e, y\} = xy,$$

což je však obyčejný asociativní součin.

Tvrzení 3.3. Nechť je X Jordanův triple systém. Je-li $x, y, z \in X$ potom platí identita

$$\{x, y, \{x, z, x\}\} = \{x, \{y, x, z\}, x\}. \tag{3.2}$$

Důkaz. Identitu získáme opakovanou aplikací Jordanovy identity z definice. □

Otázkou může být jak jednoduše charakterizovat triple součin pro obecný Jordanův triple systém X. Jestliže si všimneme, že platí vztah ve tvaru

$$\{x+z, y, x+z\} = \{x, y, z\} + \{x, y, x\} + \{z, y, z\} + \{z, y, x\},$$

potom lze triple součin charakterizovat pomocí polarizační identity ve tvaru

$$2\{x, y, z\} = \{x+z, y, x+z\} - \{x, y, x\} - \{z, y, z\},$$

ze které lze vidět, že stačí pouze znát součin ve tvaru $\{x, y, x\}$ pro všechna $x, y \in X$.

Příklad 3.4. Nechť je X asociativní algebra s involucí a strukturou sdruženého Jordanova triple systému vzhledem ke kanonickému triple součinu ve tvaru

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}\left(xy^*z + zy^*x\right),$$

pro všechna $x, y, z \in X$. Tento součin lze také charakterizovat jako

$$\{x, y, x\} = xy^*x,$$

neboť z polarizační identity plyne vztah

$$2\{x, y, z\} = (x+z)y^*(x+z) - xy^*x - zy^*z = xy^*z + zy^*x,$$

což je přesně náš původní triple součin. Všimněme si také, že pokud námi uvažovaná algebra obsahuje jednotku $e \in X$, potom lze také psát

$$2\{x, e, y\} = (x+y)^2 - x^2 - y^2 = xy + yx.$$

Již z první kapitoly víme, že v případě asociativních algeber s jednotkou můžeme uvažovat libovolné mocniny induktivně ve tvaru

$$x^n = \{x, e, x^{n-1}\},$$

což však není možné v obecných Jordanových triple systémech, které neobsahují binární operaci. Předchozí tvrzení pro triple součiny nám však dovoluje přirozeně definovat liché mocniny v obecných Jordanových triple systémech následujícím způsobem.

Definice 3.2 (Mocniny)**.** Nechť je X Jordanův triple systém. Liché mocniny libovolného prvku $x \in X$ definujeme induktivně pro $n \in \mathbb{N}$ ve tvaru

$$x^{(1)} = x, \quad x^{(2n+1)} = \{x, x^{(2n-1)}, x\} = \{x, x, x^{(2n-1)}\}. \tag{3.3}$$

Příklad 3.5. Nechť je X asociativní algebra s involucí a strukturou sdruženého Jordanova triple systému vzhledem ke kanonickému triple součinu ve tvaru

$$\{x, y, x\} = xy^*x,$$

pro všechna $x, y \in X$. Pro prvek $x \in X$ máme třetí mocninu ve tvaru

$$x^{(3)} = \{x, x, x\} = xx^*x,$$

přičemž indukcí máme obecnou mocninu ve tvaru

$$x^{(2n+1)} = x(x^*x)^n \quad \text{resp.} \quad x^{(2n+1)} = (xx^*)^n x.$$

Vidíme, že pro samo-sdružené prvky $x \in X^{\mathrm{sa}}$ triple mocniny odpovídají klasickým lichým mocninám v uvažované asociativní algebře.

Výhodnou odbočkou do Jordanových algeber, které jsou asociativní vzhledem k mocninám, generovaných jedním prvkem z Jordanova triple systému, lze ukázat, že se triple mocniny chovají přirozeným způsobem vzhledem k jejich triple násobení. Vzhledem k tomu, že jsme Jordanovy algebry nezaváděli, důkaz vynecháváme, ale lze ho najít v [4].

Tvrzení 3.4. Nechť je X Jordanův triple systém a $x \in X$. Pro lichá $a, b, c \in \mathbb{N}$ platí

$$\{x^{(a)}, x^{(b)}, x^{(c)}\} = x^{(a+b+c)}. \tag{3.4}$$

Příklad 3.6. Uvažujme obecný Jordanův triple systém X. Prostor $V(x) \subset X$ generovaný lichými mocninami prvku $x \in X$ je zřejmě Jordanův triple pod-systém, přičemž se jedná o nejmenší Jordanův triple systém, který obsahuje prvek $x \in X$. Díky asociativitě (lze ukázat pomocí Jordanových algeber) vzhledem k mocnění prvků je tento systém komutativní.

Definice 3.3 (Triple polynom)**.** Nechť je X Jordanův triple systém a $x \in X$. Triple polynom $p(x) \in X$ je libovolná lineární kombinace triple mocnin ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(2k+1)} \in X. \tag{3.5}$$

Poznámka. Analogicky obecným Banachovým algebrám lze předchozí konstrukci polynomů nad Jordanovými triple systémy využít ke konstrukci polynomiálního ternárního funkcionálního kalkulu pro libovolné liché polynomy.

Příklad 3.7. Uvažujme C^*-algebru X se strukturou sdruženého Jordanova triple systému s kanonickým součinem. Potom pro libovolné $x \in X$ dle příkladu 3.5 lze psát

$$x^{(2n+1)} = x(x^* x)^n,$$

ale člen v závorce je vzhledem k dané algebře pozitivní a lze tedy psát

$$x(x^* x)^n = x\,|x|^n\,,$$

z čehož tedy dostáváme, že triple polynomy v této algebře budou ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x\,|x|^n\,.$$

3.2 Spektrum v Jordanových triple systémech

Protože v obecných Jordanových triple systémech pracujeme s ternární operací, spektrum obecného prvku je v tradičním smyslu analogicky předchozím kapitolám obtížné definovat. Výhodné však je, pokud v uvažovaném triple součinu zafixujeme dvě hodnoty, což nám definuje lineární operátor, se kterými však již umíme dobře pracovat.

Definice 3.4 (Muliplikativní operátor)**.** Nechť je X Jordanův triple systém a $x, y \in X$. Multiplikativní operátor $(x \,\square\, y) \in L(X)$ je definován ve tvaru

$$(x \,\square\, y)(z) = \{x, y, z\}, \tag{3.6}$$

pro všechna $z \in X$.

Poznámka. Dále se budeme zajímat především o multiplikativní operátor ve tvaru

$$(x \,\square\, x) \in L(X).$$

Všimněme si, že v případě, že budeme uvažovat C^*-algebru se strukturou sdruženého Jordanova triple součinu, potom je multiplikativní operátor spojitý, neboť jistě platí

$$\|(x \,\square\, x)y\| \leq \|x\|^2 \|y\| .$$

Protože nás v této kapitole zajímají především prostory obdélníkových matic, uvádíme následující příklad nalezení spektra multiplikativního operátoru právě pro tento případ.

Příklad 3.8. Uvažujme Banachův prostor $M^{m,n}(\mathbb{C})$ se strukturou sdruženého Jordanova triple systému s kanonickým triple součinem. Protože je tento prostor konečně dimenzionální, potom dostáváme isomorfismus ve tvaru

$$L(M^{m,n}(\mathbb{C})) \cong M^{mn}(\mathbb{C}).$$

V našem případě je relevantní najít reprezentaci multiplikativního operátoru. Zvolme si kanonickou uspořádanou bázi prostoru $M^{m,n}(\mathbb{C})$, tj. pro libovolné $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ máme

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \cdots + a_{1n}E_{1n} + \cdots + a_{mn}E_{mn},$$

kde $E_{ij} \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ jsou matice, pro které platí $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ij,kl}$. Tato uspořádaná kanonická báze nám dává vyjádření multiplikativního operátoru pro $B \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$(B \,\square\, B)A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(B \,\square\, B)E_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(B \,\square\, B)_1 E_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(B \,\square\, B)_2 E_{ij},$$

kde jsme rozdělili náš operátor na součet dvou operátorů ve tvaru

$$(B \,\square\, B)A = \frac{1}{2}(BB^*A + AB^*B) = \frac{1}{2}\left((B \,\square\, B)_1 A + (B \,\square\, B)_2 A\right).$$

Všimněme si, že při uvážení tohoto rozkladu multiplikativního operátoru dostáváme dle předchozího vyjádření vzhledem k uspořádané kanonické bázi reprezentaci ve tvaru

$$(B \,\square\, B)_1 \cong P_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \oplus BB^*\right) P_2, \quad (B \,\square\, B)_2 \cong \sum_{j=1}^{m} \oplus B^*B,$$

kde $P_1, P_2 \in M^{mn}(\mathbb{C})$ jsou nějaké permutační matice. V případě, že uvažujeme Jordanův triple podsystém $N(\mathbb{C}) \subset M^{m,n}(\mathbb{C})$, ve kterém pro všechna $A, B, C \in N(\mathbb{C})$ platí

$$\{A, B, C\} = AB^*C,$$

se nám celá reprezentace multiplikativního operátoru zjednodušuje na tvar

$$(B \,\square\, B)|_{N(\mathbb{C})} \cong \sum_{j=1}^{m} \oplus B^*B = \sum_{j=1}^{m} \oplus |B|^2 .$$

Předchozí příklad ukazuje konkrétní postup pro nalezení maticové reprezentace multiplikativního operátoru v konečně dimenzionálním sdruženém Jordanově triple systému s kanonickým součinem $M^{m,n}(\mathbb{C})$, který lze aplikovat i na obecnější systémy. Následující příklad uvádíme pro praktickou realizaci daného postupu.

Příklad 3.9. Uvažujme konkrétně matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M^2(\mathbb{C}),$$

což v uspořádané kanonické bázi odpovídá $(1, -1, 0, 2) \in \mathbb{C}^4$. Pro multiplikativní operátor ve tvaru $(A \square A) \in L(M^2(\mathbb{C}))$ tedy můžeme jeho maticovou reprezentaci psát ve tvaru

$$(A \square A) \cong \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pro ilustraci ověříme, že budeme-li uvažovat $A^{(3)}$, potom daná reprezentace nám skutečně dává správný výsledek. Třetí mocnina standardním výpočtem je dána ve tvaru

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

V naší reprezentaci dostáváme maticovým násobením

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

čímž jsme tedy ověřili správnost našeho výpočtu.

Předchozí konstrukce pro multiplikativní operátor v konečně dimenzionálních prostorech může na první pohled vypadat samoúčelně, je však užitečná v tom smyslu, že spektrum není závislé na volbě báze, takže to zjednodušuje analýzu tohoto operátoru.

Uvažujme opět Banachův prostor $M^{m,n}(\mathbb{C})$ se strukturou sdruženého Jordanova triple systému a nechť je $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ libovolná matice. Potom lze psát

$$\sigma(A \square A) \subset \frac{1}{2} \left(\sigma(A^*A) + \sigma(AA^*) \right),$$

kde uvažujeme standardní spektrum v Banachových algebrách. Dále uvažujme sdružený Jordanův triple podsystém $V(A) \subset M^{m,n}(\mathbb{C})$ generovaný tímto prvkem, tj. lineární obal triple mocnin daného prvku, a dále uvažujme multiplikativní operátor

$$(A \square A) \in L(V(A)).$$

Protože libovolný prvek $B \in V(A)$ lze vyjádřit jako polynom, tj. ve tvaru

$$B = \sum_k b_k A^{(2k+1)},$$

můžeme přímým dosazením psát

$$(A \square A)B = \frac{1}{2} AA^* \left(\sum_k b_k A^{(2k+1)} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_k b_k A^{(2k+1)} \right) A^*A,$$

což dále s využitím výsledku z příkladu (3.5) pro kanonický součin dostáváme

$$\sum_k b_k A^{(2k+1)} = \sum_k b_k A(A^*A)^k = \sum_k b_k (AA^*)^k A.$$

Dosazením do předchozího vztahu pro multiplikativní operátor dostáváme

$$(A \,\square\, A)B = \frac{1}{2} \sum_k b_k \left(AA^*A(A^*A)^k + A(A^*A)^k A^*A \right) = \sum_k b_k A(A^*A)^{k+1} = B(A^*A).$$

Z toho vidíme, že multiplikativní operátor na Jordanově triple systému $V(A)$ lze reprezentovat vzhledem ke kanonické bázi ve tvaru direktního součtu jako

$$(A \,\square\, A) \cong \sum_{j=1}^{m} \oplus\, A^*A = \sum_{j=1}^{m} \oplus\, |A|^2,$$

Z toho nakonec lze vyvodit, viz [10] pro detaily, že platí

$$\sigma(A \,\square\, A|_{V(A)}) \cup \{0\} = \sigma(A^*A) \cup \{0\} = \sigma(AA^*) \cup \{0\},$$

což je zřejmé zjednodušení oproti původnímu vztahu pro spektrum multiplikativního operátoru, kde jednotlivá spektra nemusela být nutně stejná.

Příklad 3.10. Uvažujme pro jednoduchost opět multiplikativní operátor z příkladu 3.9. Spektrum multiplikativního tohoto operátoru je množina ve tvaru

$$\sigma(A \,\square\, A) = \{3 - \sqrt{5}, 3, 3 + \sqrt{5}\},$$

přičemž máme

$$\sigma(A^*A) = \sigma(AA^*) = \{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\},$$

z čehož již vidíme, že relace ve tvaru

$$\sigma(A \,\square\, A) \subset \frac{1}{2} \left(\sigma(A^*A) + \sigma(AA^*) \right)$$

opravdu v našem případě platí.

Vzhledem k předchozí diskuzi vidíme, že spektrum multiplikativního operátoru nad Jordanovým triple systémem $V(A)$ generovaným jedním prvkem $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ sdruženého konečně dimenzionálního Jordanova triple systému $M^{m,n}(\mathbb{C})$ s kanonickým součinem vlastně obsahuje druhé mocniny singulárních hodnot daného prvku.

Jako poslední věc v teorii Jordanových triple systémů v kontextu této práce zavedeme analogii spektrálního rozkladu na ortogonální idempotenty, který jsme uváděli v obecných Banachových algebrách. K tomu budeme potřebovat pár dalších definic.

Definice 3.5 (Pozitivita)**.** Jordanův triple systém X se nazývá pozitivní, jestliže pro všechna $x \in X$ má multiplikativní operátor $(x \,\square\, x) \in L(X)$ nezáporné spektrum.

Příklad 3.11. Uvažujeme-li libovolnou C^*-algebru X se strukturou sdruženého Jordanova triple systému s kanonickým součinem, potom je tento Jordanův triple systém zřejmě pozitivní. Speciálně je tedy dle předchozí diskuze spektra pozitivní i sdružený Jordanův triple systém obdélníkových matic $M^{m,n}(\mathbb{C})$.

Definice 3.6 (Tripotent)**.** Nechť je X Jordanův triple systém. Prvek $e \in X$ se nazývá Jordanův tripotent (či zjednodušeně tripotent), jestliže pro něj platí

$$\{e, e, e\} = e, \tag{3.7}$$

přičemž tripotenty $e_i, e_j \in X$ nazýváme navzájem ortogonální, jestliže platí

$$\{e_i, e_j, e_i\} = e_i \delta_{ij}. \tag{3.8}$$

Poznámka. Je-li X sdružený Jordanův triple systém a $e \in X$ je libovolný tripotent, potom i jeho komplexní či záporný násobek je taktéž tripotentem, tj. platí

$$\{-e, -e, -e\} = -e, \quad \{ie, ie, ie\} = ie.$$

Stejně jako v Banachových algebrách, obecně v Jordanových triple systémech nemusí tripotenty existovat.

Ortogonalitu tripotentů, což je analogie idempotentnů v asociativních algebrách, můžeme využít pro speciální rozklad prvků analogicky spektrálnímu rozkladu v obecných Banachových algebrách. Uvažujme Jordanův triple systém X a nechť je $(e_n) \subset X$ konečná posloupnost nenulových ortogonálních tripotentů. Potom lze uvažovat

$$Y = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{C} e_k \subset X,$$

což je zřejmě Jordanův triple systém. Následující věta takové rozklady charakterizuje.

Věta 3.5. Nechť je X Jordanův triple systém konečné dimenze. Je-li X pozitivní a semi-prostý, potom pro libovolné nenulové $x \in X$ existuje jednoznačný rozklad ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k e_k, \tag{3.9}$$

kde $0 < a_k < a_{k+1}$ a $(e_k) \subset X$ jsou vzájemně ortogonální tripotenty.

Důkaz. Důkaz lze najít v [4]. $\square$

Máme-li Jordanův triple systém, ve kterém je takový rozklad možný, potom lze triple spektrum libovolného prvku definovat následujícím způsobem.

Definice 3.7 (Spektrální rozklad)**.** Nechť je X pozitivní a semi-prostý Jordanův triple systém konečné dimenze. Rozklad dle věty 3.5 prvku $x \in X$ z předchozí věty se nazývá spektrální rozklad, přičemž triple spektrum definujeme jako množinu ve tvaru

$$\mathrm{Sp}(x) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}. \tag{3.10}$$

Poznámka. Všimněme si, že na rozdíl od Banachových algeber může být triple spektrum prázdné, což je právě případ, když je prvek nulový.

Budeme-li se opět soustředit na multiplikativní operátor v libovolném sdruženém Jordanově systému X, ve kterém je možné pro $x \in X$ uvažovat spektrální rozklad, potom platí

$$(x \,\square\, x) = \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \,(e_k \,\square\, e_k).$$

Z čehož vidíme, že $\mathrm{Sp}(x) = \{0 < t \mid t^2 \in \sigma(x \,\square\, x)\}$, což nám dává rovnou i návod pro zobecnění triple spektra pro nekonečně dimenzionální Jordanovy triple systémy.

Definice 3.8 (Triple spektrum)**.** Nechť je X sdružený Jordanův triple systém. Spektrum libovolného prvku $x \in X$ definujeme jako množinu ve tvaru

$$\Sigma(x) = \{t^2 \in \mathbb{R} \mid t^2 \in \sigma(x \,\square\, x|_{V(x)})\}, \tag{3.11}$$

kde $V(x) \subset X$ je Jordanův triple podsystém generovaný prvkem $x \in X$, přičemž triple spektrum definujeme ve tvaru a nakonec triple spektrum jako množinu

$$\mathrm{Sp}(x) = \{0 < t \mid t^2 \in \Sigma(x)\}. \tag{3.12}$$

Příklad 3.12. Uvažujeme-li Banachův prostor $M^{m,n}(\mathbb{C})$ s se strukturou sdruženého Jordanova triple systému s kanonickým součinem, potom pro nenulové $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ máme

$$\mathrm{Sp}(A) = \sigma_p(|A|) \setminus \{0\},$$

což jsou právě nenulové singulární hodnoty.

Tuto sekci zakončíme příkladem, ve kterém porovnáme jednotlivá spektra pro speciální případ čtvercových matic, a to ve smyslu spektra vzhledem ke strukře C^*-algebry a také vzhledem ke struktuře sdruženého Jordanova triple systému.

Příklad 3.13. Uvažujme sdružený Jordanův triple systém $M^2(\mathbb{C})$ s kanonickým součinem a nechť $A, B \in M^2(\mathbb{C})$ jsou matice ve tvarech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice A je zřejmě tripotent, z čehož plyne, že platí

$$V(A) = \mathbb{C}A,$$

takže triple spektrum této matice je dle spektrálního rozkladu $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, ale spektrum této matice vzledem k C^*-algebře je $\sigma(A) = \{0\}$. Matice B samo-sdružená, přičemž pro ni zřejmě lze psát její generovnaý prostor jako

$$V(B) = \mathbb{C}e_{11} + \mathbb{C}e_{22},$$

přičemž tato matice má obecnou reprezentaci ve tvaru

$$(B \,\square\, B) \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

takže omezíme-li se na $V(B)$, dostáváme, že triple spektrum je $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 2\}$. Všimněme si, že v tomto případě také platí $\mathrm{Sp}(B) = |\sigma(B)| \setminus \{0\}$, což je obecná vlastnost samo-sdružených prvků C^*-algeber, pro detaily opět viz [4].

3.3 Polární dekompozice

Jako odbočku od naší hlavní teorie Jordanových triple systémů uvedeme polární dekompozici prvků v Banachových prostorech spojitých lineárních operátorů, které uvažujeme především nad Hilbertovými prostory, abychom mohli pro operátory konstruovat i jejich příslušné involuce, či konkrétněji jejich operátorová sdružení. V následující sekci, která bude následovat, tuto konstrukci využijeme pro zavedení triple funkcionálního kalkulu.

Polární dekompozice vlastně vychází z jednoduchého pozorování v prototypní C^*-algebře komplexních čísel $\mathbb{C}$, kde libovolný prvek $z \in \mathbb{C}$ můžeme rozložit na tzv. polární tvar

$$z = e^{i\theta} |z| , \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

kde absolutní hodnotu definujeme standardně vzhledem ke spojitému funkcionálnímu kalkulu ve tvaru $|z| = (z^*z)^{1/2}$. Všimneme-li si, že budeme-li na první člen takové polární dekompozice nahlížet jako na operátor násobení zleva $M_\theta \in B(\mathbb{C})$, potom se vlastně jedná o isometrii, neboť pro všechna $\xi \in \mathbb{C}$ platí rovnost

$$\|M_\theta \xi\| = \|e^{i\theta}\xi\| = \|\xi\| .$$

Toto lze tedy brát jako návod pro analogickou konstrukci v obecnějších algebrách.

Definice 3.9 (Operátorová algebra)**.** Nechť je H Hilbertův prostor. Operátorová algebra je unitální C^*-algebra spojitých lineárních operátorů $B(H)$.

Tvrzení 3.6. Nechť je $B(H)$ operátorová algebra. Je-li $x \in B(H)$, potom platí

$$\||x| \xi\| = \|x\xi\| \tag{3.13}$$

pro všechna $\xi \in H$.

Důkaz. Naše požadované tvrzení plyne z rovností ve tvaru

$$0 \leq \||x| \xi\|^2 = (|x| \xi, |x| \xi) = (|x|^2 \xi, \xi) = (x^*x \xi, \xi) = (x\xi, x\xi) = \|x\xi\|^2 ,$$

čímž je naše tvrzení dokázáno. □

Definice 3.10 (Částečná isometrie)**.** Nechť je $B(H)$ operátorová algebra. Potom lineární operátor $u \in B(H)$ se nazývá částečná isometrie, jestliže pro všechna $\xi \in N(u)^\perp$ platí

$$\|u \xi\| = \|\xi\| . \tag{3.14}$$

Jinými slovy je operátor u isometrie na prostoru $N(u)^\perp$.

Poznámka. Z předchozí definice plyne, že každá isometrie je částečná isometrie, ale opačná implikace platí pouze tehdy, když je jádro částečné isometrie triviální.

Příklad 3.14. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$ a matici $A \in M^2(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Je zřejmé, že platí $N(A) = \{0\} \oplus \mathbb{C}$, což znamená, že $N(A)^\perp = \mathbb{C} \oplus \{0\}$, z čehož lze učinit závěr, že matice A je tedy částečná isometrie, není však dle předchozí poznámky isometrií.

Definice 3.11. Necht je $B(H)$ operátorová algebra a $u \in B(H)$ částečná isometrie. Počáteční, resp. koncový prostor částečné isometrie definujeme jako

$$\mathcal{I}(u) = N(u)^\perp \quad \text{resp.} \quad \mathcal{F}(u) = R(u). \tag{3.15}$$

Vzhledem ke korespondenci mezi operátorovými algebrami a C^*-algebrami (analogicky tomu, jak můžeme reprezentovat konečne dimenzionální C^*-algebry pomocí prostorů matic, můžeme tyto algebry v nekonečné dimenzi reprezentovat jako podalgebry operátorových algeber) je dobré se zaměřit také na čistě algebraické vlastnosti částečných isometrií.

Definice 3.12 (Algebraická část. isometrie)**.** Nechť je X obecná C^*-algebra. Prvek $u \in X$ se nazývá částečná isometrie, jestliže je u^*u projekce.

Tvrzení 3.7. Nechť je X unitální C^*-algebra. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní

(1) u je částečná isometrie,

(2) $uu^*u = u$,

(3) $u^*uu^* = u^*$,

(4) uu^* je projekce.

Důkaz. Je-li u částečná isometrie, potom je u^*u z předchozí definice projekce, takže můžeme uvažovat výraz $uu^*u - u = u(u^*u - e)$, což z vlastností C^*-algeber dává

$$\|uu^*u - u\|^2 = \|(u^*u - e)u^*u(u^*u - e)\| = \left\|(u^*u)^3 - 2(u^*u)^2 + u^*u\right\| = 0,$$

z čehož tedy dostáváme rovnost $uu^*u = u$. Uvažujeme-li dále involuci totoho výrazu, potom zřejmě také $u^*uu^* = u^*$, ale v takovém případě pak platí

$$u(u^*uu^*) = uu^*,$$

tj. se jedná o samo-sdružený idempotent, což je z definice projekce. Nakonec uvažujeme-li, že je prvek uu^* projekce, potom násobením zprava v předchozí rovnosti dostáváme

$$(u^*uu^*)u = u^*u,$$

takže se jedná o částečnou isometrii. □

Důsledek 3.8. Je-li operátorová algebra $B(H)$ sdružený Jordanův triple systém, potom jsou tripotenty právě částečné isometrie.

Stejně jako v C^*-algebrách nemusí existovat netriviální projekce, jak jsme ukázali v minulé kapitole, nemusí obecně existovat ani netriviální částečné isometrie (což může být zřejmé už jen z toho důvodu, že používáme projekce v definici).

Příklad 3.15. Uvažujme algebru spojitých zobrazení $C_0(\mathbb{R})$. O této algebře víme, že je komutativní C^*-algebrou. Pokud budeme chtít najít všechny částečné isometrie v této algebře, stačí uvažovat charakterizující podmínku ve tvaru

$$f(z)f^*(z)f(z) = f(z), \quad \text{neboli} \quad |f(z)|^2 f(z) = f(z),$$

pro všechna $z \in \mathbb{R}$ z čehož tedy plyne, že vyžadujeme, aby pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platilo

$$|f(x)| = 1,$$

ale z toho však vidíme, že jediná částečná isometrie v této algebře je částečná isometrie triviální, tj. nulové zobrazení.

Předtím než přistoupíme k hlavnímu důkazu existence a jedinečnosti polární dekompozice pro libovolný lineární operátor z operátorové algebry $B(H)$, je zajímavé se ptát, jaké má vlastně částečná isometrie spektrum.

Všimněme si, že částečná isometrie $u \in B(H)$ je kontraktivní zobrazení, tj. $\|u\| \leq 1$, což však znamená, že operátor definovaný ve tvaru $(e - uu^*) \in B(H)$ je pozitivní a má tedy dle spojitého funkcionálního kalkulu odmocninu. Uvažujme matici ve tvaru

$$M = \begin{pmatrix} u & \sqrt{e - uu^*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B(H \oplus H).$$

Přímým výpočtem MM^* dostáváme

$$\begin{pmatrix} u & \sqrt{e - uu^*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ \sqrt{e - uu^*} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

z čehož je však zřejmé, že se jedná o projekci, ale dle tvrzení 3.7 je $M \in B(H \oplus H)$ částečná isometrie, což tedy znamená, že každé kontraktivní zobrazení lze rozšířit na větší operátorovou algebru, ve které bude částečnou isometrií.

Protože je každá částečná isometrie kontraktivní, její spektrum tedy leží v jednotkovém komplexním disku. Máme dva případy; je-li invertibilní, potom její spektrum leží na kružnici a částečná isometrie je v takovém případě unitární. Pro neinvertibilní případ máme následující větu.

Tvrzení 3.9. Nechť je $B(H)$ operátorová algebra. Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ kompaktní množina obsažená v jednotkovém disku, pro kterou $0 \in \Omega$, potom je tato množina spektrem nějaké částečné isometrie.

Důkaz. Pro důkaz viz [8]. □

Z předchozího tvrzení tedy vidíme, že spektrum částečných isometrií může být v podstatě jakékoliv a nelze o nich nic konkrétnějšího říct.

Věta 3.10. Nechť je $B(H)$ operátorová algebra a $x \in B(H)$. Potom existuje jedinečná částečná isometrie u, která nám dává polární dekompozici operátoru x ve tvaru

$$x = u\,|x|\,, \tag{3.16}$$

pro kterou platí $N(u) = N(x) = N(|x|)$.

Důkaz. Uvažujme lineární operátor ve tvaru

$$u_0 : R(|x|) \to R(x),$$

jež definujeme jako $u_0(|x|\,\xi) = x\xi$, pro všechna $\xi \in H$. Z tvrzení 3.6 plyne, že je tento operátor definován korektně, přičemž ho lze spojitě rozšířit na částečnou isometrii

$$u : N(|x|)^{\perp} \to N(x)^{\perp},$$

která splňuje $u\,|x| = x$. Pro jedinečnost této polární dekompozice uvažujme, že má lineární operátor $x \in B(H)$ tvar $x = qw$, kde pro operátor w platí $w \geq 0$ a q je částečná isometrie, která splňuje $N(q) = N(w)$. Potom můžeme psát

$$x^*x = (qw)^*(qw) = wq^*qw = w^2,$$

z čehož plyne, že platí $|x| = w$, přičemž $N(q)^{\perp} = N(|x|)^{\perp}$ a zároveň také $\|q|x|\,\xi\| = \|x\xi\|$ pro všechna $\xi \in H$, ale to znamená $N(q) = N(|x|)$, ale zároveň

$$\|q|w|\,\xi\| = \|x\,\xi\|\,,$$

pro všechna $\xi \in H$, z čehož plyne jedinečnost. □

Uvědomíme-li si, že v předchozím důkazu pracujeme s operátory vlastně jenom v souvislosti s jejich jádry, lze analogickým způsobem uvažovat stejný rozklad i pro případ, kdy máme prostor $B(H, K)$, který není operátorovou algebrou. To však znamená, že v případě konečně dimenzionálních prostorů polární rozklad můžeme uvažovat i v případě obdélníkových matic. Rozšíření definice částečné isometrie je v takovém případě zřejmé.

Příklad 3.16. Uvažujme algebru $M^2(\mathbb{C})$ a matici $A \in M^2(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Polární dekompozice této matice je potom ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

z čehož lze jednoduše vidět, že $N(U) = \{0\} \oplus \{0\} = N(|A|)$.

Příklad 3.17. Uvažujme algebru $M^{3,2}(\mathbb{C})$ a matici $A \in M^{3,2}(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Protože se nejedná o algebru, nemáme zde funkcionální kalkulus, který by nám definoval absolutní hodnotu. Všimněme si však, že pro libovolné $B \in M^{3,2}(\mathbb{C})$ máme $B^*B \in M^2(\mathbb{C})$, což je však unitální C^*-algebra, na které kalkulus uvažovat můžeme, a tedy také

$$|A| = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polární dekompozice této obdélníkové matice je tedy dána ve tvaru

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3/5 & 0 \\ 4/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lze jednoduše ověřit, že pro částečnou isometrii platí relace $uu^*u = u$.

Protože v obecných C^*-algebrách nemusí existovat netriviální projekce a tudíž ani částečné isometrie, je zřejmé, že obecně nemůžeme uvažovat polární dekompozici. Lze však uvažovat slabší formulaci této dekompozice pro tento typ algeber.

Tvrzení 3.11. Nechť je X unitální C^*-algebra. Je-li $x \in X$ invertibilní prvek, potom pro něj existuje dekompozice ve tvaru

$$x = (x\,|x|^{-1})\,|x|\,. \tag{3.17}$$

Důkaz. Existence absolutní hodnoty vyplývá ze spojitého funkcionálního kalkulu. Ověřme tedy, že $u = x\,|x|^{-1}$ je částečná isometrie. To je ekvivalentní s tvrzením

$$uu^*u = u,$$

takže přímým dosazením dostáváme

$$x\,|x|^{-1}\,|x|^{-1}\,x^*x\,|x|^{-1} = x\,|x|^{-2}\,|x| = x\,|x|^{-1}\,,$$

z čehož vidíme, že u je částečná isometrie. □

Poznámka. Všimněme si, že máme-li matici $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$, pro níž je $A^*A \in M^n(\mathbb{C})$ invertibilní, potom můžeme dekompozici z předchozí věty uvažovat i v tomto případě.

Příklad 3.18. Uvažujme opět příklad 3.17. Protože absolutní hodnota uvažované matice byla invertibilní, můžeme dle předchozího tvrzení psát matici $A \in M^{3,2}(\mathbb{C})$ ve tvaru

$$A = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

což nám dává shodný výsledek bez použití spojitého funkcionálního kalkulu.

Další tvrzení, viz článek [2] pro dodatečné detaily, je přímým důsledkem polární dekompozice v operátorových algebrách.

Tvrzení 3.12. Nechť je $X \subset B(H)$ operátorová podalgebra. Existuje-li polární dekompozice $x = u\,|x|$ pro prvek $x \in X$, potom pro libovolné spojité zobrazení $f \in C(\sigma(|x|))$, které splňuje $f(0) = 0$, platí

$$uf(|x|) \in X. \tag{3.18}$$

Důkaz. Pro libovolný prvek $x \in X$ s polární dekompozicí platí

$$u\left(\sum_{n=1}^{m} a_n\,|x|^n\right) = \sum_{n=1}^{m} a_n(u\,|x|)\,|x|^{n-1} = \sum_{n=1}^{m} a_n x\,|x|^{n-1} \in X.$$

Tvrzení plyne z pozorování, že spektrum prvku $|x|$ je kompaktní podmnožina pravé reálné poloosy, takže dle Stone-Weierstrassovy věty můžeme zobrazení f stejnoměrně aproximovat polynomy bez konstantního členu. □

Je účelné upozornit na to, ačkoli to může být zřejmé, že předchozí konstrukce nedává obecně shodné výsledky s klasickým funkcionálním kalkulem, který jsme zaváděli v minulých kapitolách.

Příklad 3.19. Uvažujme libovolnou C^*-algebru X, ve které je možné provést polární dekompozici. Potom pro prvek $x \in X$ lze vzhledem k předchozímu tvrzení psát

$$x^{(n)} = u\,|x|^n = (u\,|x|)\,|x|^{n-1} = x\,|x|^{n-1}\,.$$

Vidíme tedy, že aplikací předchozího tvrzení tedy obecně nedostáváme výsledky shodné klasickému spojitému funkcionálnímu kalkulu. Všimněme si však, že pokud bude platit, že $x \in X^+$, potom daná konstrukce skutečně odpovídá spojitému funkcionálnímu kalkulu. Pro případ, kdy prvek $x \in X$ není pozitivní, uvažujme příklad 3.16, potom platí

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{ale} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Jako poslední dva příklady této sekce uvedeme souvislost polární dekompozice pro konečně dimenzionální Banachovy prostory matic $M^{m,n}(\mathbb{C})$ se singulárními hodnotami matic a také ukážeme souvislost předchozího tvrzení se singulární dekompozicí.

Příklad 3.20. Uvažujme Banachův prostor $M^{m,n}(\mathbb{C})$ a nechť je $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ libovolná matice. Tato matice má polární dekompozici, přičemž víme, že pozitivní člen této dekompozice je normální matice, takže existuje unitární matice $V \in M^n(\mathbb{C})$, pro kterou

$$|A| = VDV^*,$$

kde $D \in M^n(\mathbb{C})$ je diagonální matice, která obsahuje singulární hodnoty. Dosadíme-li tuto unitární diagonalizaci do polární dekompozice, potom dostáváme

$$A = U\,|A| = U(VDV^*) = WDV^*,$$

což je singulární maticová dekompozice.

Definice 3.13 (Sing. dekompozice)**.** Nechť je dán Banachův prostor $M^{m,n}(\mathbb{C})$ a libovolná matice $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$. Je-li $A = U\,|A|$ polární dekompozice této matice, potom singulární dekompozice je dána ve tvaru

$$A = (UV)DV^* = WDV^*, \tag{3.19}$$

kde $VDV^* = |A|$ je unitární diagonalizace.

Poznámka. Je důležité si neplést předchozí definici singulární dekompozice pro libovolné matice s tzv. singular value decomposition (SVD), která uvažuje diagonální obdélníkovou matici, což v našem případě je matice D vždy čtvercová.

Příklad 3.21. Všimněme-si, že při uvážení singulární dekompozice matice $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ lze v případě unitární diagonalizace pozitivního členu polární dekompozice psát

$$f(|A|) = Vf(D)V^*,$$

což po dosazení do výrazu z předchozího příkladu dává výsledný vztah

$$f(A) = Wf(D)V^*,$$

který vypadá dosti podobně funkcionálnímu kalkulu pro diagonalizovatelné čtvercové matice, které jsme uvažovali v první kapitole této práce.

Skutečnost, že normální matice lze unitárně diagonalizovat, je známý fakt ze základní teorie lineární algebry, přičemž tento postup lze však rozšířit i do obecných unitálních C^*-algeber libovolné dimenze, kde každý normální prvek je unitárně ekvivalentní nějakému multiplikativnímu operátoru, viz [14] pro detaily. Takové větě se říká spektrální teorém, který vyžaduje Borelův funkcionální kalkulus, který je nad rámec této práce.

3.4 Triple funkcionální kalkulus

Na konci předchozí sekce jsme ukázali náznak nového funkcionálního kalkulu, který nám dovoluje operace s obdélníkovými maticemi. V této závěrečné sekci ukážeme, jak lze aplikovat polární dekompozici pro konstrukci triple funkcionálního kalkulu. Budeme uvažovat hlavně Banachovy prostory $M^{m,n}(\mathbb{C})$, ve kterých lze kromě polární dekompozice uvažovat také spektrální rozklady.

Nejdříve začněme ze stručné diskuze pro obecný případ. Již v úvodu této kapitoly jsme naznačili, jak pro obecné Jordanovy triple systémy sestrojit triple funkcionální kalkulus pro lichá polynomiální zobrazení.

Nechť je X Jordanův triple systém a $x \in X$. Potom pro lichý polynom p můžeme psát

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k (x \,\Box\, x) x^{(2k-1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k (x \,\Box\, x)^k x.$$

Uvažujme dále, že Jordanův triple systém X je konečně dimenzionální, semi-prostý a pozitivní. V takovém případě pak lze uvažovat pro libovolný prvek $x \in X$ spektrální rozklad dle věty 3.5 na ortogonální tripotenty, který lze psát ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k e_k,$$

přičemž víme, že v takovém případě $a_i > 0$. Pro triple mocninu tedy dostáváme

$$x^{(3)} = \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_k e_k, \sum_{k=1}^{m} a_k e_k, \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\} = \sum_{k=1}^{m} a_k^{(3)} e_k = \sum_{k=1}^{m} a_k^3 e_k,$$

kde jsme využili toho, že tripotenty ve spektrálním rozkladu jsou nutně vzájemně ortogonální, takže křížové členy jsou nulové. Indukcí tedy dostáváme

$$p(x) = \sum_{k=1}^{m} p(a_k) e_k,$$

což je však v přímé analogii se spektrálním rozkladem v obecných Banachových algebrách s tím rozdílem, že v Jordanových triple systémech nelze uvažovat sudé mocniny. Všimněme si také, že pro triple spektrum v takovém případě zřejmě platí

$$\mathrm{Sp}(p(x)) = |p(\mathrm{Sp}(x))| \setminus \{0\}.$$

Uvažujme dále sdružený Jordanův triple systém $M^{m,n}(\mathbb{C})$, ve kterém je dle předchozí sekce možná polární dekompozice. Pro libovolný prvek $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ lze tedy psát

$$A = U\,|A| = U \left(\sum_{k=1}^{n} a_k P_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k (U P_k),$$

kde suma v závorce je klasický spektrální rozklad pozitivního členu polární dekompozice v konečně dimenzionální C^*-algebře $M^n(\mathbb{C})$. Všimněme si, že pro takový rozklad platí

$$\{UP_i, UP_j, UP_j\} = (UP_i)(UP_j)^*(UP_i) = UP_i P_j^* U^* U P_i,$$

ale protože spektrální rozklad je rozklad na ortogonální projekce, potom platí

$$\{UP_i, UP_j, UP_j\} = UP_i P_j^* U^* U P_i = U\{P_i, P_j, P_i\} = \delta_{ij}(UP_i),$$

což však znamená, že tento rozklad nám dává rozklad na vzájemně ortogonální tripotenty v uvažovaném Jordanově triple systému. Dále pro triple mocninu opět dostáváme

$$A^{(3)} = (U\,|A|)(U\,|A|)^*(U\,|A|) = U\,|A|^2\,U^* U\,|A| = U\,|A|^3,$$

přičemž při uvážení spektrální dekompozice máme opět indukcí

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(a_k)(UP_k).$$

Protože pro pozitivní člen polární dekompozice platí $|x| \in M^n(\mathbb{C})$, dostáváme zobecnění daného kalkulu dle tvrzení 3.12, který lze definovat následujícím způsobem.

Definice 3.14 (Triple kalkulus)**.** Nechť je $M^{m,n}(\mathbb{C})$ sdružený Jordanův triple systém s kanonickým součinem, a nechť $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ je nenulová matice. Triple funkcionální kalkulus definujeme jako zobrazení

$$\Omega_A : C_0(\mathrm{Sp}(A)) \to M^{m,n}(\mathbb{C}), \tag{3.20}$$

které je dáno ve tvaru

$$\Omega_A(f) = Uf(|A|) = Wf(D)V^*, \tag{3.21}$$

kde v poslední rovnosti je singulární dekompozice dle definice 3.13.

Předtím než ukážeme, že se opravdu jedná o funkcionální kalkulus, tak jak jsme ho chápali v předchozích kapitolách, ukážeme tři příklady aplikace.

Příklad 3.22. Uvažujme sdružený Jordanův triple systém $M^{3,2}(\mathbb{C})$ a nechť $D \in M^{3,2}(\mathbb{C})$ je libovolná diagonální matice ve tvaru

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je-li $\alpha = \arg(a)$ a $\beta = \arg(b)$, potom polární dekompozice této matice je dána ve tvaru

$$D = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |b| \end{pmatrix}.$$

Uvažujeme-li zobrazení f vzhledem k tvrzení 3.12, potom můžeme obecně psát

$$f(D) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(|a|) & 0 \\ 0 & f(|b|) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} f(|a|) & 0 \\ 0 & e^{i\beta} f(|b|) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že námi zavedený triple kalkulus se v případě diagonálních matic chová obdobně jako funkcionální kalkulus v případě Banachových algeber. Všimněme si, že uvažujeme-li $a, b \geq 0$, potom vzhledem k předchozímu výsledku dostáváme

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.23. Pro konkrétní příklad aplikace triple kalkulu uvažujme opět sdružený Jordanův triple systém $M^{3,2}(\mathbb{C})$ a nechť je $A \in M^{3,2}(\mathbb{C})$ matice ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože Banachův prostor $M^{3,2}(\mathbb{C})$ není algebra, nelze na něm uvažovat standardní druhé mocniny. Polární dekompozici této matici jsme již nalezli v příkladu 3.17, aplikací triple funkcionálního kalkulu na tento rozklad dostáváme

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 15 & 0 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 3.24. Uvažujme sdružený Jordanův triple systém $M^{m,n}(\mathbb{C})$, a nechť je nenulová matice $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ libovolná. Protože se nejedná o algebru, nemůžeme k této matici najít její inverzi. Triple funkcionální kalkulus nám však přesto dovoluje definovat zobecněnou inverzi, kterou obecně definujeme jako

$$\{A, A^{(-1)}, A\} = A^{(-1)}, \quad \{A^{(-1)}, A, A^{(-1)}\} = A.$$

Uvažujme, že $0 \notin \sigma(A^*A)$, potom zobecněná inverze je dána ve tvaru

$$A^{(-1)} = U\,|A|^{-1} = WD^{-1}V^*.$$

Opravdu se jedná o zobecněnou inverzi dle předchozí definice, neboť platí

$$\{A, A^{(-1)}, A\} = (U\,|A|)(U\,|A|^{-1})^*(U\,|A|) = U\,|A|\,,$$

druhý vztah lze ověřit analogicky.

Poznámka. Předchozí definice zobecněné inverze pro lineární operátory je také známá jako Moore-Penroseova pseudoinverze. Všimněme si, že uvažujeme-li skutečně singulární rozklad, potom lze tuto inverzi zobecnit pro případ, kdy $0 \in \sigma(A^*A)$ tak, že zadefinujeme

$$f(z) = \begin{cases} z^{-1} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}.$$

Ukažme tedy, že se jedná skutečně o funkcionální kalkulus. Protože víme, že v obecných Banachových algebrách byl kalkulus homomorfismus, je důležité si říci, co chápeme pod takovým výrazem v Jordanových triple systémech.

Definice 3.15 (Triple homomorfismus)**.** Nechť jsou X a Y obecné Jordanovy triple systémy. Zobrazení ϕ mezi těmito systémy se nazývá triple homomorfismus, jestliže je lineární a zároveň pro všechna $x, y, z \in X$ splňuje

$$\phi(\{x, y, z\}) = \{\phi(x), \phi(y), \phi(z)\}. \tag{3.22}$$

Tvrzení 3.13. Nechť je $M^{m,n}(\mathbb{C})$ sdružený Jordanův triple systém s kanonickým součinem, a nechť $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ je nenulová matice. Potom triple kalkulus Ω_A je injektivní triple homomorfismus, pro který zároveň platí $\Omega_A(z) = A$.

Důkaz. Nechť $f, g, h \in C_0(\mathrm{Sp}(A))$ jsou libovolné. Potom lze psát

$$\begin{aligned}\{\Omega_A(f), \Omega_A(g), \Omega_A(h)\} = {} & \frac{1}{2}(Uf(|A|))(Ug(|A|))^*(Uh(|A|)) + \cdots \\ & + \frac{1}{2}(Uh(|A|))(Ug(|A|))^*(Uf(|A|)),\end{aligned}$$

kde pro první člen na pravé straně prvního řádku rovnice platí

$$(Uf(|A|))(Ug(|A|))^*(Uh(|A|)) = Uf(|A|)g^*(|A|)U^*Uh(|A|) = Uf(|A|)g^*(|A|)h(|A|).$$

Analogicky bychom dostali podobný výsledek i pro druhý člen, ale z vlastností spojitého funkcionálního kalkulu víme, že jednotlivé členy spolu komutují, takže lze jednoduše psát

$$\{\Omega_A(f), \Omega_A(g), \Omega_A(h)\} = Uf(|A|)g^*(|A|)h(|A|) = \Omega_A(\{f, g, h\}),$$

z čehož plyne, že se jedná o triple homomorfismus. Pro injektivitu uvažujme rovnici

$$\Omega_A(f) = 0,$$

vynásobením částečnou isometrií zleva dostáváme

$$U^*\Omega_A(f) = U^*Uf(|A|) = f(|A|) = 0,$$

což však znamená, že zobrazení f musí být nutně nulové na spektru. Poslední vlastnost lze ověřit přímým dosazením. □

Zajímavé je, když uvažujeme libovolnou nenulovou matici $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ a zároveň její sdruženou matici $A^* \in M^{n,m}(\mathbb{C})$. Ačkoli tyto matice zřejmě nepatří do stejného prostoru, je mezi nimi vzhledem k triple funkcionálnímu kalkulu následující jednoduchý vztah.

Tvrzení 3.14. Nechť je $M^{m,n}(\mathbb{C})$ sdružený Jordanův triple systém s kanonickým součinem, a nechť $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ je nenulová matice. Pro libovolné $f \in C_0(\mathrm{Sp}(A))$ platí

$$f(A^*) = f(A)^* \in M^{n,m}(\mathbb{C}). \tag{3.23}$$

Důkaz. Protože lze polární dekompozici v námi uvažovaném Jordanově triple systému zaměnit za singulární dekompozici, můžeme zřejmě psát

$$A^* = VDW^*,$$

z čehož tedy dostáváme

$$f(A^*) = Vf(D)W^* = (Wf(A)V^*)^* = f(A)^*,$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Poznámka. Samozřejmě v předchozím důkazu nám nic nebránilo stejný výsledek ukázat pomocí polární dekompozice. Singulární dekompozici jsme zvolili čistě z toho důvodu, abychom ukázali, že dané konstrukce jsou skutečně ekvivalentní.

Dále víme, že se tento kalkulus v případě singulární dekompozice chová podobně jako kalkulus pro diagonalizovatelné čtvercové matice. Otázkou však je, zda-li se tento kalkulus bude chovat obdobně i pro jiné rozklady pomocí unitárních matic.

Tvrzení 3.15. Nechť je $M^{m,n}(\mathbb{C})$ sdružený Jordanův triple systém s kanonickým součinem, a nechť $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ je nenulová matice. Dále nechť $P \in M^m(\mathbb{C})$ a $Q \in M^n(\mathbb{C})$ jsou unitární matice a nechť

$$B = PAQ. \tag{3.24}$$

Potom pro libovolné $f \in C_0(\mathrm{Sp}(A))$ platí

$$f(B) = Pf(A)Q. \tag{3.25}$$

Důkaz. Důkaz provedeme přímým výpočtem ve tvaru

$$f(B) = f(PAQ) = f(PWDV^*Q) = (PW)f(D)(V^*Q) = Pf(A)Q,$$

z čehož plyne naše tvrzení. □

Pro další vlastnost triple funkcionálního kalkulu si nejdříve všimněme, že díky symetrii triple součinu můžeme obecně pro libovolnou nenulovou matici $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ psát

$$\{f(A), g(A), h(A)\} = \{h(A), g(A), f(A)\},$$

což lze hrubě interpretovat jako analogii komutativity, kterou jsme měli v klasickém funkcionálním kalkulu, tj. například pro čtvercové matice $B \in M^n(\mathbb{C})$ platilo

$$f(B)g(B) = g(B)f(B).$$

Tento vztah lze formulovat mnohem průhledněji, neboť protože jsme již v předchozí kapitole ukázali, že jednotka v obecných C^*-algebrách je nutně samo-sdružená, lze předchozí vztah vzhledem k jednotce $E_{n,n} \in M^n(\mathbb{C})$ také psát jako

$$f(B)E_{n,n}^*g(B) = g(B)E_{n,n}^*f(B).$$

Protože však v prostoru $M^{m,n}(\mathbb{C})$ zřejmě existuje matice $E_{m,n} \in M^{m,n}(\mathbb{C})$, která má na hlavní diagonále jednotky a všude jinde nuly, potom lze první vztah přepsat jako

$$\{f(A), E_{m,n}, h(A)\} = \{h(A), E_{m,n}, f(A)\},$$

což už je v přímé analogii s tím, s čím jsme se setkali v předchozích kapitolách, a především se jedná o zobecnění, neboť pro případ sdruženého Jordanova triple systému $M^n(\mathbb{C})$ platí

$$f(B)g(B) = \{f(B), E_{n,n}, h(B)\} = g(B)f(B).$$

Ačkoliv tedy v Jordanově triple systému $M^{m,n}(\mathbb{C})$ nemůžeme zřejmě uvažovat binární součin a tedy ani nemůžeme mluvit o jeho komutativitě, protože se nejedná o algebru, můžeme v něm uvažovat následující tvrzení.

Tvrzení 3.16. Nechť je $M^{m,n}(\mathbb{C})$ sdružený Jordanův triple systém s kanonickým součinem, a nechť $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ je nenulová matice. Potom pro $f, g \in C_0(\mathrm{Sp}(A))$ platí

$$g(AA^*)f(A) = f(A)g(A^*A), \tag{3.26}$$

kde $g(AA^*)$ a $g(A^*A)$ je dáno klasickým spojitým funkcionálním kalkulem.

Důkaz. Opět využijeme singulární dekompozice pro výpočet. Zřejmě platí

$$AA^* = (WDV^*)(WDV^*)^* = WD^2W^*, \quad A^*A = (WDV^*)^*(WDV^*) = VD^2V^*,$$

z čehož tedy přímým výpočtem dostáváme

$$g(AA^*)f(A) = Wg(D^2)W^*Wf(D)V^* = Wg(D^2)f(D)V^* = Wf(D)V^*Vg(D^2)V^*,$$

z čehož po porovnání členů již však plyne naše tvrzení. □

Protože již víme, že triple spektrum pro prvky konečně dimenzionálních sdružených Jordanových triple systémů, pro které je možné uvažovat jejich spektrální rozklad na vzájemně ortogonální tripotenty, jsou právě koeficienty daného rozkladu, vzhledem ke kterému již víme, jak se triple funkcionální kalkulus chová, lze formulovat následující větu o spektru.

Tvrzení 3.17. Nechť je $M^{m,n}(\mathbb{C})$ sdružený Jordanův triple systém s kanonickým součinem, a nechť $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ je nenulová matice. Potom pro $f \in C_0(\mathrm{Sp}(A))$ platí

$$\mathrm{Sp}(f(A)) = |f(\mathrm{Sp}(A))| \setminus \{0\}.$$

Důkaz. Je-li $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$ nenulová matice, potom lze psát její spektrální rozklad dle věty 3.5 na vzájemně ortogonální tripotenty vzhledem k polární dekompozici ve tvaru

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k (UP_k),$$

ale v takovém případě pro libovolné zobrazení $f \in C_0(\mathrm{Sp}(A))$ lze psát

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k)(UP_k).$$

Může nastat několik případů, jak bude vypadat obraz $f(a_k)$. Místo toho, abychom každý případ procházeli zvlášť, využijeme toho, že je triple spektrum shodné se spektrem absolutní hodnoty uvažované matice až na nulu. Uvažujme součin

$$f(A)^* f(A) = \sum_{k=1}^{n} |f(a_k)|^2 P_k,$$

z toho však zřejmě dostáváme spektrální rozklad ve tvaru

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} |f(a_k)| (UP_k).$$

Z toho nakonec plyne naše tvrzení. □

Vidíme tedy z předchozího tvrzení, že i pro triple funkcionální kalkulus máme analogii věty pro transformaci spektra jako jsme měli v případě spojitého funkcionálního kalkulu, co nám však chybí, je surjektivita našeho kalkulu.

Tento nedostatek však lze vyřešit tím, že se omezíme pouze na sdružený Jordanův triple systém $V(A)$ generovaný námi zvolenou nenulovou maticí $A \in M^{m,n}(\mathbb{C})$. Protože se jedná však o Banachův prostor, uvažujeme úzávěr tohoto generovaného prostoru.

Uvědomíme-li si, že triple spektrum libovolného prvku $x \in X$ sdruženého Jordanova triple systému X je kladná část spektra multiplikativního operátoru $(x \,\square\, x)$, který omezujeme právě na generovaný Jordanův triple systém $V(x)$, zřejmě tímto omezením triple spektrum matice nijak neovlivníme, z čehož nakonec tedy vidíme, že triple funkcionální kalkulus

$$\Omega_A : C_0(\mathrm{Sp}(A)) \to V(A)$$

je triple isomorfismus.

Tato stránka je úmyslně ponechána prázdná.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo uvedení čtenáře do základní problematiky studia Banachových algeber a jejich reprezentace ve funkčních Banachových prostorech komplexních spojitých zobrazení pomocí tzv. funkcionálního kalkulu a zároveň ukázat, že analogickou reprezentaci lze uvažovat i pro obecnější algebraické struktury.

V první kapitole jsme stručně vysvětlili obecný pojem asociativní algebra a následně se věnovali konkrétní třídě Banachových algeber. Ukázali jsme nejdůležitější základní vlastnosti takových algeber a ilustrovali je na relativně jednoduchých příkladech. Dále jsme v dané kapitole uvedli základy spektrální teorie, které jsme následně využili ke konstrukci holomorfního funkcionálního kalkulu, který je možný v libovolné Banachově algebře.

V druhé kapitole jsme se omezili na komutativní Banachovy algebry přirozeně obsahující vlastní ideály, které úzce souvisí s charaktery dané algebry. Prostor charakterů jsme následně ztotožnili se spektrem, což nám dovolilo uvažovat tzv. Gelfandovu reprezentaci.

V té samé kapitole jsme dále v případě komutativních Banachových algeber uvažovali dodatečnou strukturu, vzhledem ke které jsme ukázali, že je Gelfandova reprezentace isometrický isomorfismus, který jsme využili ke konstrukci obecnějšího spojitého funkcionálního kalkulu, který nám dovolil definovat absolutní hodnotu prvků.

V poslední kapitole jsme stručně uvažovali novou algebraickou strukturu, kterou jsme charakterizovali ternárním součinem, jenž jsme nazvali triple součinem. Ukázali jsme, že v takových strukturách lze uvažovat analogii spektrálního rozkladu, který jsme společně s polární dekompozicí operátorů využili ke konstrukci triple funkcionálního kalkulu. V této kapitole jsme se převedším omezili na konečně dimenzionální Banachův prostor obdélníkových matic, na kterých jsme daný triple kalkulus ilustrovali.

Možné rozšíření práce

Funkcionální kalkulus $\Phi_x(f)$ je z definice lineární homomorfismus algeber (či případně triple homomorfismus Jordanových triple systémů); budeme-li však jako argument uvažovat prvek reprezentované algebraické struktury pro nějaké pevně zvolené spojité zobrazení, potom zobrazení $\Phi_f(x)$ již nebude lineární. Přirozeným rozšířením této bakalářské práce by tedy bylo zkoumat vlastnosti takového nelineárního zobrazení mezi algebrami vzhledem ke Gâteauxově derivaci či případně Fréchetově derivaci.

Jako motivace poslouží případ nekomutativní unitální Banachovy algebry X, ve které lze uvažovat holomorfní funkcionální kalkulus. Uvažujeme-li různá $x, y \in X$, potom vzhledem ke Gâteauxově derivaci lze ukázat [7], že pro holomorfní kalkulus platí

$$\mathrm{d}\Phi_f(x;y) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,(ze-x)^{-1}\,y\,(ze-x)^{-1}\;\mathrm{d}z,$$

a konkrétněji pro mocniny máme v nekomutativním případě vztah

$$\mathrm{d}\Phi_{z^n}(x;y) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} y x^{n-k}.$$

Pro více detailů, v případě zájmu čtenáře, lze doporučit článek [17].

Tato stránka je úmyslně ponechána prázdná.

Literatura

[1] Achilles, R., Bonfiglioli, A., *The early proofs of the theorem of Campbell, Baker, Hausdorff, and Dynkin.* Arch. Hist. Exact Sci. **66**, 295–358 (2012). doi:10.1007/s00407-012-0095-8.

[2] Akemann, C. A., Pedersen, G. K., *Ideal perturbations of elements in C^*-algebras.* Mathematica Scandinavica, **41**, 117–139 (1977). doi:10.7146/math.scand.a-11707.

[3] Arazy, J., Kaup, W., *On continuous Peirce decompositions, Schur multipliers and the perturbation of triple functional calculus.* Math Ann **320**, 431–461 (2001). doi:10.1007/PL00004481.

[4] Chu, C.-H., *Jordan Structures in Geometry and Analysis.* Cambridge: Cambridge University Press (2011).

[5] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis.* 2. Springer-Verlag New York (2007).

[6] Friedman, Y., Russo, B., *The Gelfand-Naimark theorem for JB*-triples.* Duke Math. J. **53**, 139-148 (1986). doi:10.1215/S0012-7094-86-05308-1.

[7] Hiai F., Petz D. *Functional Calculus and Derivation.* Introduction to Matrix Analysis and Applications. Universitext. Springer, Cham. (2014) doi:10.1007/978-3-319-04150-6_3.

[8] Halmos, P. R., McLaughlin, J. E., *Partial isometries.* Pacific Journal of Mathematics, **13**, 585–596 (1963). doi:10.2140/pjm.1963.13.585.

[9] Kaup, W., *On Spectral and Singular Values in JB^*-Triples.* Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences 96A, **1**, 95-103 (1996). doi:www.jstor.org/stable/i20490191.

[10] Kaup. W., *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces.* Math Z **183**, 503–529 (1983). doi:10.1007/BF01173928.

[11] Kershaw, D., *Operator norms of powers of the Volterra operator.* The Journal of Integral Equations and Applications, **11**, 351–362 (1999). doi:10.1216/jiea/1181074282.

[12] Mazur, S., *Sur les anneaux linéaires*, Comptus Rendus Acad. Sci. Paris **207**, 1025–1027 (1938).

[13] Meyer, C. D., *Matrix analysis and applied linear algebra.* CD Meyer. Siam, 2000. 5971 (2000).

[14] Murphy, G. J., *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA (1990).

[15] Rudin, W., *Functional analysis.* 2. Tata McGraw-Hill (1991).

[16] Shoda, K., *Einige Sätze über Matrizen*, Japan J. Math. **13**, 361-365 (1937). doi:10.4099/jjm1924.13.0_361.

[17] Suzuki, M., *Quantum analysis—Non-commutative differential and integral calculi.* Commun.Math. Phys. **183**, 339–363 (1997). doi:10.1007/BF02506410.