

Posudek oponenta disertační práce

| | |
|---------------------------------|---|
| Student | Mgr. Michal Kozák |
| Disertační práce (název) | <i>Robustness of Turing system</i> |
| Oponent | Prof. RNDr. Vlastimil Křivan, CSc. |
| Pracoviště oponenta | Ústav matematiky, PřF JU v Českých Budějovicích |

Disertační práce se zabývá jevem, který jako první popsal Alan Turing a který souvisí se vznikem prostorových struktur v důsledku přidání difuze k prostorově homogennímu systému, který je, v případě nulové difuze, ve stabilním pevném bodě. To bylo překvapující zjištění, protože obecná představa o difuzi je taková, že shlazuje prostorové nehomogenity. Turingův originální model popisuje vznik prostorové struktury v systému dvou veličin, které Turing označoval jako morfogeny. Nicméně tyto veličiny neměly žádný reálný základ v biologii. Rozvoje se uvedená teorie dočkala v pracích J. D. Murryho a jeho spolupracovníků, kteří položili základy pro tzv. mechanickou morfogenezi, která popisuje interakce mezi mesenchymálními buňkami a extracelulární maticí. Pokud je mi známo, tato teorie má i reálné aplikace např. při léčbě popálenin. Známé jsou také obrázky z knihy *J.D. Murray: "Mathematical Biology"* popisující např. vznik různých vzorů na srsti zvířat, lastur a pod. Další aplikace Turingova teorie zaznamenává v souvislosti s rozvojem biologického poznání o epigenetice, např. při formování embrya a pod. Řada těchto výsledků souvisí se vznikem prostorových struktur v závislosti na velikosti dané oblasti. Nicméně podmínky, které vedou ke vzniku prostorových struktur jsou poměrně omezující a platí pouze v malé části parametrického prostoru.

Práce je rozdělena do tří kapitol a závěru. První kapitola práce (str. 7-22) podává rámcový přehled o vzniku prostorových struktur v Turingově modelu. Jsou zde např. přehledně uvedeny podmínky, které vedou ke vzniku prostorových struktur a dále některé metodologické přístupy (např. je zmíněna Sturm-Liouvilleova teorie). Celkově je tato část poměrně přehledná, některé části by si zasloužily více pozornosti, některé části byly pro mě matoucí (např. na str. 11-12 diskuse ohledně ne/stability v modelech dravce a jeho kořisti, kde se typicky předpokládá self-inhibice u dravce, ale nikoliv u predátora, jak by snad plynulo z poslední věty prvního odstavce na str. 12).

Druhá kapitola je založena na práci *V. Klika, M. Kozák, E.A. Gaffney (2018): Domain size driven instability: Self-organization in systems with advection, SIAM J. Appl. Math., 78:2298-2322* a věnuje se vlivu advektivního pohybu na podmínky vzniku prostorových struktur v Turingově systému s různými okrajovými podmínkami. Výsledky jsou pěkně shrnuty v Tabulce 1 na str. 41.

Třetí kapitola je založena na práci *M. Kozák, E.A. Gaffney, V. Klika (2019): Pattern formation in faction-diffusion systems with piecewise kinetic modulation: An example study of*

heterogeneous kinetics, *Physical Review E*, 100:042220 a věnuje se vlivu prostorové nehomogenity v jedné ze dvou rovnic popisující Turingův systém. Tato část souvisí s tím, že v Turingově modelu morfogeneze se předpokládá, že všechny koeficienty jsou prostorově homogenní. Otázka, která se tedy v této části práce řeší souvisí s tím, co by se stalo, kdyby koeficienty byly prostorově nehomogenní. V této obecnosti je tento problém zřejmě nezvládnutelný, proto se autoři zaměřili na speciální případ, kdy prostorová nehomogenita vstupuje do první z obou rovnic a to sice pomocí skokové nelinearity u lineárního členu.

Práce je zakončena krátkou diskusí.

Dotazy:

1. Není mi jasné, proč v disertační práci nejsou přímo zakomponované obě dvě časopisecké práce, na kterých je práce postavena?
2. Ve třetí kapitole je diferenciální rovnice, díky skokové funkci u lineárního členu, nespojitá v pravé straně. Pokud nebudeme uvažovat difuzi, pak by taková diferenciální rovnice nemusela mít řešení. Např. rovnice $x' = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$ nemá řešení pro $x(0) = 0$, případně řešení nejsou definované na celé reálné ose. Autoři tento problém řeší tím, že skokovou funkci aproximují hladkou funkcí. To mj. vede k tomu, že pro výsledný systém nelze analyticky najít pevný bod. Tady se nabízí chápat řešení diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou ve smyslu Filippovova řešení. To by vedlo k jednoduššímu systému a umožňovalo analýzu systému bez difuze i v případě, že by nehomogenita vstupovala do soustavy rovnic nelineárně. Zajímalo by mě, zda-li autor o této možnosti uvažoval?

Kvalita disertační práce: Práce je podle mého názoru kvalitním příspěvkem v oblasti matematického modelování Turingovy nestability. O tom bezpochyby svědčí i obě dvě publikované práce.

Vlastní přínos studenta a zejména jeho schopnost samostatné tvůrčí činnosti ve výzkumné oblasti: Disertační práce prokazuje schopnost tvůrčí činnosti studenta v oblasti matematického modelování. Vzhledem k tomu, že se disertační práce zakládá na dvou publikovaných multiautorských pracech, nejsem schopen posoudit vlastní příspěvek doktoranda.

Jazyková a formální úroveň práce: Na vysoké úrovni.

Závěr: Student prokázal tvůrčí schopnosti v oblasti aplikací a rozvoji matematiky. Práci doporučuji k obhajobě.

4.1. 2021