

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ
ÚSTAV TECHNICKÉ MATEMATIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCE

MODELOVÁNÍ TVORBY A RŮSTU NÁMRAZY

Autor:

Bc. Adam Groma

Vedoucí práce:

doc. Ing. Jiří Fürst, PhD.

Datum:

leden 2021

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Groma** Jméno: **Adam** Osobní číslo: **456346**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Modelování tvorby a růstu námrazy

Název diplomové práce anglicky:

Modeling of icing formation and growth

Pokyny pro vypracování:

1. Popište fyzikální a matematický model tvorby a růstu námrazy.
2. Formulujte úlohu s tvorbou a růstem námrazy na rovné desce.
3. Proveďte simulace tvorby a růstu námrazy na rovné desce pomocí komerčního softwaru
4. Implementujte 1D verzi modelu v jazyce MATLAB a proveďte simulaci s parametry odpovídajícími bodu 3.
5. Porovnejte výsledky vlastního 1D kodu s výsledky simulaci z bodu 3.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Ehsan Afrasiabian, Oleg Iliev, Stefano Lazzari, Carlo Isetti, Numerical Simulation of Frost Formation on a Plate-Fin Evaporator, 3rd World Congress on Momentum, Heat and Mass Transfer (2018).
[2] Florent Brèque, Maroun Nemer, Frosting modeling on a cold flat plate: Comparison of the different assumptions and impacts on frost growth predictions, international journal of refrigeration 69 (2016) 340–360
[3] Lee, K.-S., Jhee, S., Yang, D.-K., 2003. Prediction of the frost formation on a cold flat surface. Int. J. Heat Mass Transf. 46, 3789–3796. doi:10.1016/S0017-9310(03)00195-9

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D., ústav technické matematiky FS


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

doc. Ing. Tomáš Hyhlík, Ph.D., 12112

Datum zadání diplomové práce: **23.10.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **22.01.2021**

Platnost zadání diplomové práce: _____



doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce



doc. Ing. Jiří Fůrst, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

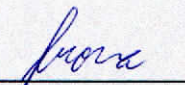


prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

30.10.2020
Datum převzetí zadání



Podpis studenta

Anotační list

Jméno autora:	Bc. Adam Groma
Název DP:	Modelování tvorby a růstu námrazy
Anglický název:	Modelling of frost formation and growth
Rok:	2021
Obor studia:	Matematické modelování v technice
Ústav:	Ústav technické matematiky
Vedoucí:	doc. Ing. Jiří Fürst, PhD.
Bibliografické údaje:	počet stran: 63 počet obrázků: 15 počet tabulek: 5 počet grafů: 27
Klíčová slova:	STAR-CCM+, MATLAB, námraza, chlazená deska, desublimace, 1D model, Eulerovský vícefázový model proudění
Key words:	STAR-CCM+, MATLAB, frost, cooled plate, deposition, 1D model, Eulerian multiphase flow model

Anotace:

Tato práce se věnuje představení teorie tvorby a růstu námrazy a jejímu modelování dvěma různými metodami. První metoda je založena na doplnění modelu desublimace do Eulerovského vícefázového modelu proudění a druhá metoda na tepelné a hmotnostní bilanci zjednodušeného jednorozměrného fyzikálního modelu. Oba modely jsou použity pro simulaci tvorby a růstu námrazy na rovné chlazené desce. Výsledky jsou porovnány s experimentem a analyzovány. Hlavním předmětem analýzy je přesnost modelů, vhodnost Eulerovského modelu k simulaci tvorby námrazy a možnosti zpřesnění modelů.

Abstract:

In this thesis the basic theory of frost formation and growth is described. Two methods for frost modelling are considered. The first method is based on the deposition model addition to the Eulerian multiphase flow model and the second method is based on simplified one-dimensional physical model heat and mass balance. Both models are used for chilled flat plate frosting simulation. Results are compared with an experimental data and analyzed. The main goals of the analysis are the models accuracy, suitability of the Eulerian multiphase model for the frosting simulation and a ways of the models accuracy improvements.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Jiřího Fürsta, PhD. a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Liberci dne 18. 1. 2021

.....

podpis autora

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce, panu doc. Ing. Jiřímu Fürstovi, Ph.D., a odbornému konzultantovi, panu doc. Ing. Tomáši Hyhlíkovi, Ph.D. za cenné rady a konstruktivní připomínky.

Obsah

1	Úvod	10
2	Teorie	11
2.1	Princip tvorby námrazy	11
2.2	1D model	13
2.2.1	Bilance hmoty	14
2.2.2	Bilance tepla	15
2.3	Eulerovský model	16
2.3.1	Bilance hmoty	16
2.3.2	Bilance energie	17
2.3.3	Bilance hybnosti	18
2.3.4	Desublimace	20
3	Testovací úloha	22
3.1	1D model	22
3.1.1	Soustava rovnic	22
3.1.2	Použité konstanty a součinitele	23
3.1.3	Počáteční a okrajové podmínky	24
3.2	Eulerovský model	25
3.2.1	Implementace modelu desublimace	25
3.2.2	Geometrie a síť	27
3.2.3	Okrajové a Počáteční podmínky	28
3.2.4	Nastavení výpočtu	29
4	Výsledky	31
4.1	Vizualizace vlastností proudění a námrazy	31
4.2	Srovnání numerických výsledků a experimentu	35
4.2.1	Tloušťka námrazy	35
4.2.2	Hmotnost námrazy	42
4.2.3	Teplota povrchu námrazy	45
4.3	Vlastnosti Eulerovského modelu u namrzající desky	48
4.4	Vyhodnocení výsledků	51
4.4.1	1D model	52
4.4.2	Eulerovský model	52
5	Závěr	54

Seznam použitého značení

Zkratky

KO	kontrolní objem
CFD	computational fluid dynamics
CAE	computer aided engineering

Veličiny

A	plocha
\mathbf{A}	normálový vektor plochy
A_0	plocha namrzající desky
A_D	součinitel odporu prostředí
B	součinitel růstu tloušťky námrazy
c_p	měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku
C_D	činitel odporu prostředí
d	průměr krystalů
D_{eff}	součinitel difuze vodní páry do námrazy
D_{w-air}	součinitel difuze vodní páry ve vlhkém vzduchu
E	celková energie
\mathbf{f}	vektor objemových sil
f_{sat}	saturační funkce
$\mathbf{f}_{p,i}$	vektor odporové síly porézního prostředí pro led
\mathbf{F}	vektor odporové síly prostředí
\mathbf{F}_{int}	vektor vnitřních sil
g	Gibbsova volná energie
\mathbf{g}	gravitační zrychlení
h	součinitel přestupu tepla
h_{conv}	součinitel přestupu tepla
h_{mass}	součinitel přestupu hmoty vodní páry mezi vzduchem a námrazou
H	celková entalpie
J	difuzní tok
k	Boltzmannova konstanta
k_{eff}	součinitel tepelné vodivosti

l_{ai}	charakteristický rozměr pro přenos tepla mezi fází ledu a vlhkého vzduchu
L_{plate}	délka namrzající desky
L_{sub}	měrné skupenské teplo sublimace/desublimace
Le	Lewisovo číslo
m	hmotnost
$\dot{m}_{wv,i}$	hustota hmotnostního toku z vodní páry do ledu
$\dot{m}_{\delta_{fr}}$	hmotnostní tok vodní páry způsobující nárůst tloušťky námrazy
$\dot{m}_{\rho_{fr}}$	hmotnostní tok vodní páry způsobující nárůst hustoty námrazy
\dot{m}_{ω}	místní hmotnostní tok vodní páry uvnitř námrazy
$\dot{m}_{\omega,surf}$	hmotnostní tok vodní páry skrz povrch námrazy
\mathbf{M}	vektor přenosu hybnosti mezi fázemi
Nu	Nusseltovo číslo
p	tlak
p^0	atmosférický tlak
\mathbf{P}	tenzor odporu porézního prostředí
\mathbf{P}_i	tenzor setrvačného odporu porézního prostředí
\mathbf{P}_v	tenzor viskózního odporu porézního prostředí
Pr	Prandtlovo číslo
Q	hustota tepelného toku
$\dot{Q}_{conv,surf}$	konvektivní tepelný tok skrz povrch námrazy
\dot{Q}_{surf}	celkový tepelný tok skrz povrch námrazy
\dot{Q}_{ω}	místní tepelný tok uvnitř námrazy
Re	Reynoldsovo číslo
$S \vee \mathbf{S}$	zdrojový člen
t	čas
T_e	teplota povrchu
\mathbf{T}	tenzor molekulárního napětí
T_s	teplota okolního proudění vzduchu
$T_{sat,s}$	teplota rosného bodu
ΔT_{sup}	rozdíl mezi teplotou rosného bodu a teplotou povrchu
\mathbf{T}^t	tenzor turbulentního napětí
\mathbf{u}	vektor rychlosti
V	objem
w	hmotnostní zlomek
W_{plate}	šířka namrzající desky
α	objemový zlomek
δ	tloušťka
ϵ	poréznost
λ	měrná tepelná vodivost
μ_{diff}	činitel difuzního odporu

μ_t	dynamická viskozita turbulentního proudění
ρ	hustota
σ_t	Schmidtovo číslo turbulentního proudění
τ_{wv}	relaxační součinitel času
ϕ	relativní vlhkost vzduchu
ω	měrná vlhkost vzduchu
ω_s	měrná vlhkost proudění vzduchu
$\omega_{sat,e}$	měrná vlhkost vzduchu nasyceného vodními parami při teplotě povrchu
$\Delta\omega_{sup}$	rozdíl mezi měrnou vlhkostí proudění vzduchu a měrnou vlhkostí vzduchu nasyceného vodními parami při teplotě povrchu

α, C_1, C_0, n bezrozměrné součinitele a mocnitele

Dolní indexy

0	počáteční podmínka
$a \vee air$	vlastnosti vlhkého vzduchu
ai	z fáze vlhkého vzduchu do ledu
da	vlastnosti suchého vzduchu
fr	vlastnosti námrazy
$i \vee ice$	vlastnosti ledu
ia	z fáze ledu do vlhkého vzduchu
$surf$	vlastnosti na povrchu námrazy
$w \vee wall$	vlastnosti namrzající desky
wv	vlastnosti vodní páry

Horní indexy

1D	spojeno s 1D modelem
exp	spojeno s experimentem
E	spojeno s energií
Eul	spojeno s Eulerovským modelem
in	vlastnost na vstupu do výpočetní oblasti
m	spojeno s hmotou
s	vlastnost vzduchu nasyceného vodními parami
u	spojeno s hybností

1 Úvod

Námraza je jev, při kterém na povrchu objektů vznikají krystalky ledu. Ty pak podle [1] můžou vytvářet dva různé typy námrazy, lišící se strukturou. První typ vzniká mrznutím drobných kapiček vody, čímž se tvoří souvislá vrstva ledu. S touto strukturou se vyskytuje například při namrzání letících letadel, lopatek větrných turbín, nebo v přírodě za větrného chladného počasí. Druhý typ námrazy vzniká desublimací vzdušné vlhkosti na dostatečně chladném povrchu. Tvoří se tak porézní struktura krystalů ledu, se kterou se setkáváme například v mrazácích, jejich výparnicích nebo v přírodě v podobě jinovatky. V této práci se budeme zabývat výhradně druhým typem námrazy, tedy porézní strukturou ledových krystalů vznikající desublimací. Proto také dále pod pojmem námraza budeme rozumět právě tuto strukturu.

Vzhledem k možnosti výskytu námrazy jako porézní struktury ve výparnicích, lze její studium využít při výzkumu tepelných výměníků a jejich zefektivňování. Jednou z možností studia tvorby a růstu námrazy je využití CAE (computer-aided engineering) metod, které může pomoci při snaze o redukci, či zamezení tvorby námrazy ve výparnicích. Ve většině dostupných zdrojů se autoři výzkumů zabývají konstrukcí a řešením matematických modelů pro tvorbu a růst námrazy v jednoduchých případech, jako např. namrzání rovné desky. Modely jsou většinou řešeny numerickými metodami za pomoci různých programovacích jazyků. Tyto modely jsou často zjednodušené, například pouze pro 1D/2D případy, a jednoúčelové, takže by se těžko aplikovali na složitější geometrie, nebo ve více rozměrech. Jednou z možností, jak získat model tvorby a růstu námrazy poměrně jednoduše rozšiřitelný do více rozměrů a na různé geometrie a je využití CFD (computational fluid dynamics) softwaru. V této práci se proto budeme zabývat převážně konstrukcí modelu pro tvorbu a růst námrazy v komerčním softwaru STAR-CCM+ od společnosti Siemens.

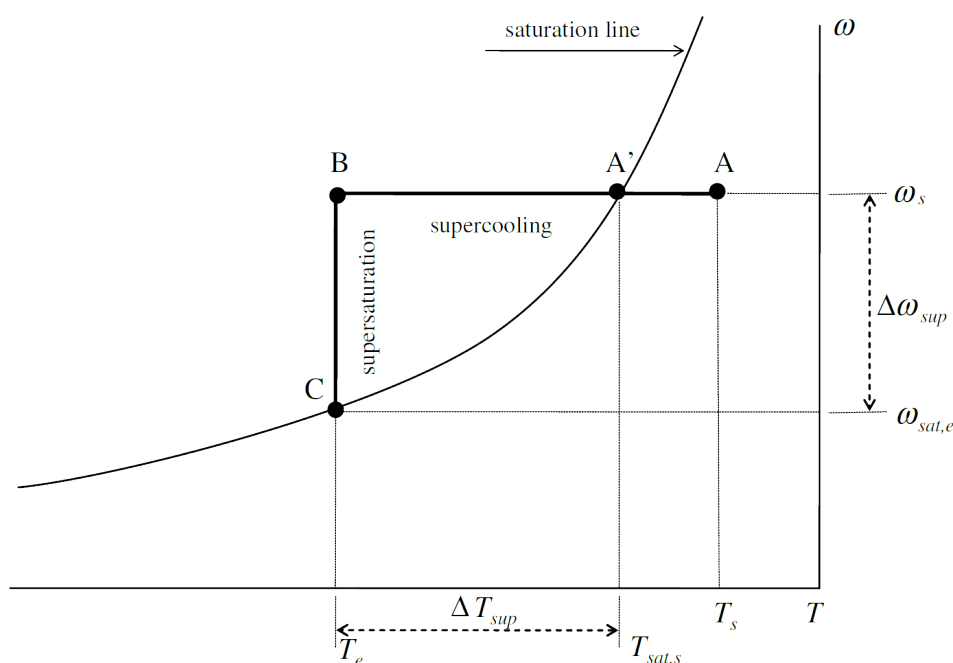
Cílem této práce je uvést teoretické základy důležité k pochopení procesu namrzání z fyzikálního hlediska. Formulovat zjednodušený jednorozměrný model tvorby námrazy a implementovat ho v jazyce MATLAB. Formulovat a implementovat model tvorby námrazy v CFD softwaru STAR-CCM+. Formulovat úlohu tvorby námrazy na rovné desce, na které budou oba modely testovány. Srovnat výsledky obou modelů a porovnat je také s experimentálními výsledky jiných autorů. Vyhodnotit přesnost obou modelů ve srovnání s experimentem, případně navrhnout možná zpřesnění. Potvrdit vhodnost modelu v CFD softwaru k simulaci tvorby námrazy.

2 Teorie

Tato kapitola je věnována nejprve souhrnu teoretických základů nutných pro pochopení principu vzniku a růstu námrazy a jejího modelování. Tvorbu námrazy nejprve budeme modelovat pomocí zjednodušeného modelu pro implementaci v jazyce MATLAB a poté pomocí Eulerovského vícefázového modelu pro implementaci ve STAR-CCM+.

2.1 Princip tvorby námrazy

Pro vznik námrazy musí být splněny určité předpoklady pro teplotu a vlhkost. Podle [3], pokud je teplota povrchu tělesa nad rosným bodem, dochází pouze k tepelné výměně. Pokud je teplota povrchu pod rosným bodem, ale nad bodem mrazu, může docházet ke kondenzaci. Když je zároveň teplota povrchu pod bodem mrazu, zkondenzovaná pára může namrznat. Nakonec, aby mohlo dojít k desublimaci, musí být teplota povrchu i rosný bod pod bodem mrazu. Vyjdeme z [2] a teplotní rozdíl mezi teplotou povrchu a rosným bodem nazveme úroveň podchlazení ΔT_{sup} . Pak také existuje minimální úroveň podchlazení, která musí být splněna pro vznik námrazy.



Obr. 2.1: Psychrometrické procesy tvorby námrazy [2]

Dále podle [2] úroveň podchlazení vzduchu ΔT_{sup} odpovídá úrovni přesycení vodními parami Δw_{sup} neboli rozdílu mezi vlhkostí proudu vzduchu a vzduchu na povrchu

těles. Závislost je znázorněna na obrázku 2.1. Samotný vznik námrazy můžeme z energetického hlediska rozdělit do tří nezávislých psychrometrických procesů:

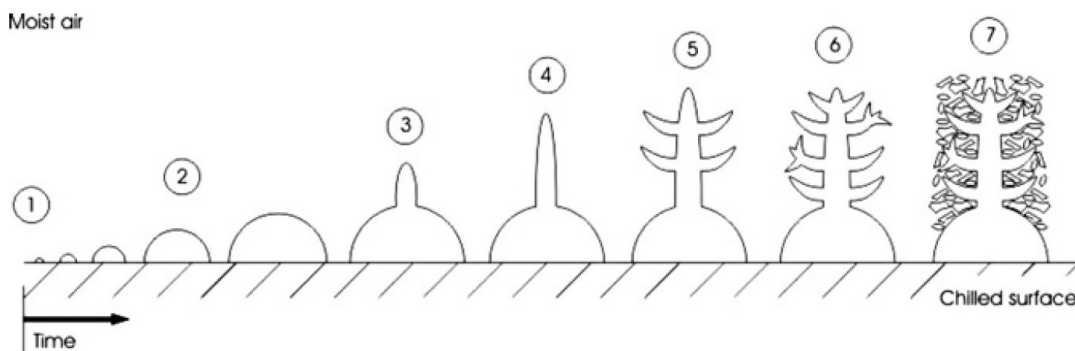
(A' → A) - ochlazení vlhkého vzduchu v mezní vrstvě na teplotu rosného bodu

(A → B) - podchlazení vlhkého vzduchu na teplotu dostatečně nízkou pro desublimaci

(B → C) - stavová změna (desublimace), nastane pouze při dostatečném podchlazení

Celková energie, kterou je třeba odebrat z vodní páry, je součtem tepla odebraného z vodní páry při ochlazování (A → B) a latentního tepla uvolněného při stavové změně (A → B).

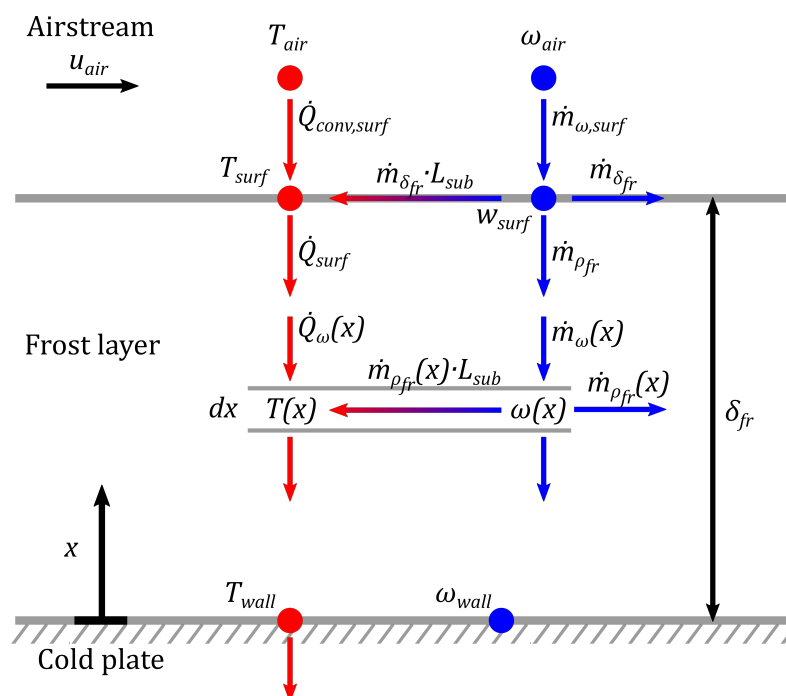
Dále se podíváme na vznik porézní struktury námrazy v mikroskopickém měřítku. Budeme vycházet ze [3]. Proces je znázorněn na obrázku 2.2 a lze rozdělit do čtyř fází. Na chlazeném povrchu se nejprve začne formovat jádro krystalu (1), které dále roste (2). Přitom roste také teplota jeho povrchu a množství tepla, které je nutno odebrat pro jeho růst. Ve chvíli kdy toto teplo začne být větší než teplo nutné odebrat pro vznik nového jádra, zformuje se na povrchu sekundární jádro (3). To opět roste, zároveň s energií, kterou je nutno odebrat (4). Důsledkem toho se v dalších místech objevují nová jádra a proces se dále opakuje (5,6). Postupná krystalizace a růst jader pokračuje, dokud se úroveň přesycení nepřiblíží k nule (7). Od tohoto okamžiku se námraza chová jako porézní vrstva, ve které dochází k difuzi vodní páry, což má za následek růst hustoty i tloušťky námrazy. Další růst námrazy závisí především na množství odebíraného tepla z námrazy a množství páry difundující do námrazy. Tzn. na teplotě namrzaného povrchu a na vlhkosti vzduchu a vlastnostech jeho proudění. Těmito vlastnostmi a podmínkami růstu námrazy se budeme zabývat při konstrukci modelů.



Obr. 2.2: Schéma vzniku a růstu krystalů námrazy [4]

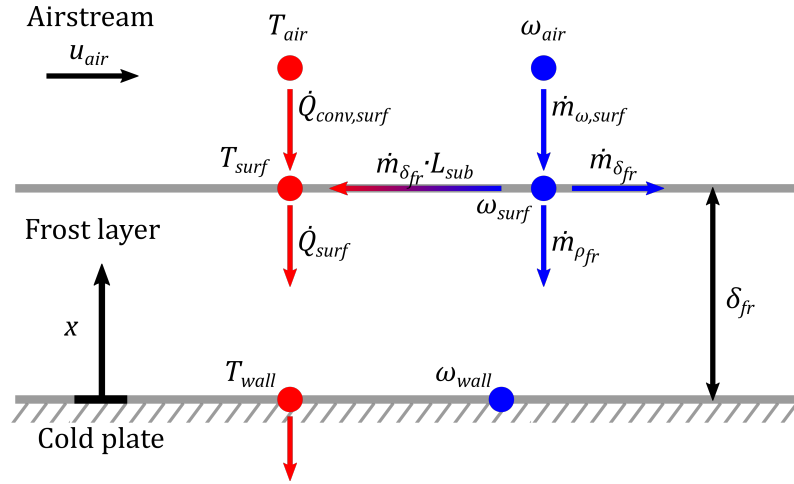
2.2 1D model

Cílem tohoto modelu je předpovědět časový vývoj tloušťky δ_{fr} a hustoty ρ_{fr} námrazy jako porézní struktury na čtvercové desce. Budeme se tedy v této části zabývat pouze růstem vrstvy námrazy, nikoli jejím vznikem. Obecně uvažujeme přenos hmoty a tepla při růstu námrazy ve třech oblastech: proud vzduchu s konvektivním přenosem tepla a hmoty, vrstvu námrazy s difuzí tepla a hmoty a rozhraní mezi vzduchem a vrstvou námrazy na povrchu námrazy. Při řešení problému růstu námrazy se zde omezíme na směr kolmý k namrzající rovné desce. Důvodem je, že až na okraje desky, jsou v řezu kolmém na směr proudění vzduchu po celé šířce desky stejné podmínky. V řezu kolmém na desku a rovnoběžném s proudem vzduchu vlastnosti námrazy nejsou konstantní, ale podle experimentální studie [5] se při zanedbání těchto rozdílů nedopustíme velké chyby.



Obr. 2.3: Schéma procesu růstu námrazy - obecný model

Bilance tepla a hmoty ve zmiňovaných třech oblastech, vycházející z [6], je znázorněna na obrázku 2.3. Tento model můžeme dále zjednodušit, podobně jako je stanoveno v [7]. Budeme uvažovat konstantní hustotu v jednotlivých vrstvách námrazy. Pravděpodobně tak zvýšíme chybu výpočtu ve srovnání s reálným procesem, ale zbavíme se diferencí veličin v prostorové proměnné x , které by bylo nutné zavádět pro namrzající vrstvu. Problém se nám tak redukuje na dvě oblasti, proud vzduchu a rozhraní mezi vzduchem a vrstvou námrazy. Viz schéma na obrázku 2.4. Dále si popíšeme přenos tepla a hmoty dle schématu, včetně jednotlivých veličin.



Obr. 2.4: Schéma procesu růstu námrazy - zjednodušený model

2.2.1 Bilance hmoty

Při růstu námrazy dochází k desublimaci vodní páry z proudícího vzduchu, a tím k růstu hmotnosti m_{fr} , hustoty ρ_{fr} a tloušťky δ_{fr} námrazy. Pro nárůst hmotnosti musí z vlhkého vzduchu do vrstvy námrazy proudit celkový hmotnostní tok vodní páry $\dot{m}_{\omega,surf}$, která desublimuje. Ten je roven změně hmotnosti námrazy v čase

$$\dot{m}_{\omega,surf} = \frac{dm_{fr}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho_{fr} \cdot \delta_{fr} \cdot A_0). \quad (2.1)$$

A_0 je plocha namrzající desky. V čase se mění hustota i tloušťka námrazy. Derivujeme tedy jako součin:

$$\dot{m}_{\omega,surf} = A_0 \cdot \frac{d\rho_{fr}}{dt} \cdot \delta_{fr} + A_0 \cdot \rho_{fr} \cdot \frac{d\delta_{fr}}{dt}. \quad (2.2)$$

Celkový hmotnostní tok vodní páry tudíž lze rozdělit na část způsobující nárůst hustoty

$$\dot{m}_{\rho_{fr}} = A_0 \cdot \delta_{fr} \cdot \frac{d\rho_{fr}}{dt}, \quad (2.3)$$

a část zvětšující tloušťku námrazy

$$\dot{m}_{\delta_{fr}} = A_0 \cdot \rho_{fr} \cdot \frac{d\delta_{fr}}{dt} \quad (2.4)$$

Z analogie mezi konvektivním přestupem tepla a hmoty můžeme celkový hmotnostní tok vodní páry z vlhkého vzduchu do námrazy určit, podle [6], jako funkci rozdílu měrné vlhkosti proudu vzduchu ω_{air} a měrné vlhkosti vzduchu na povrchu námrazy ω_{surf}

$$\dot{m}_{\omega,surf} = -h_{mass} \cdot A_0 \cdot \rho_{da} \cdot (\omega_{surf} - \omega_{air}), \quad (2.5)$$

kde ρ_{air} je hustota vlhkého vzduchu a h_{mass} součinitel přestupu hmoty. Hmotnostní tok vodní páry způsobující nárůst hustoty námrazy je podle [6] dán z Fickova zákona jako

$$\dot{m}_{\rho_{fr}} = -D_{eff} \cdot A_0 \cdot \rho_{air} \cdot \frac{\omega_{wall} - \omega_{surf}}{\delta_{fr}}, \quad (2.6)$$

kde D_{eff} je součinitel difuze a ω_{wall} měrná vlhkost vzduchu na stěně namrzající desky.

Na povrchu námrazy desublimuje část vodní páry obsažené v proudu vzduchu, která způsobí zvýšení tloušťky námrazy, a vlhkost proudu vlhkého vzduchu, jinak přesyceného vodními parami, se tím sníží na úroveň nasycení. Měrná vlhkost vzduchu na povrchu námrazy tedy odpovídá měrné vlhkosti nasyceného vzduchu při teplotě na povrchu námrazy T_{surf} . Závislost měrné vlhkosti na teplotě povrchu vyjádříme saturační funkcí f_{sat}

$$\omega_{surf} = f_{sat}(T_{surf}). \quad (2.7)$$

Na úrovni nasycení potom bude i vzduch u stěny namrzající desky o teplotě T_{wall}

$$\omega_{wall} = f_{sat}(T_{wall}). \quad (2.8)$$

2.2.2 Bilance tepla

V důsledku rozdílu mezi teplotou proudu vzduchu T_{air} a teplotou namrzající desky T_{wall} dochází k přenosu tepla mezi těmito rozhraními. Tento jev se skládá z konvektivního přenosu tepla mezi proudem vzduchu a povrchem námrazy a vedení tepla vrstvou námrazy. Konvektivní přenos tepla popisuje konvektivní tepelný tok daný v [6] jako

$$\dot{Q}_{conv,surf} = -h_{conv} \cdot A_0 \cdot (T_{surf} - T_{air}), \quad (2.9)$$

kde h_{conv} je součinitel přestupu tepla. Pro vedení tepla námrazou pak z Fourierova zákona dostaneme vztah pro tepelný tok námrazou (uvedeno v [6])

$$\dot{Q}_{surf} = -k_{eff} \cdot A_0 \cdot \frac{T_{wall} - T_{surf}}{\delta_{fr}} \quad (2.10)$$

kde k_{eff} je součinitel tepelné vodivosti. V průběhu namrzání do tepelné bilance vstupuje ještě latentní teplo stavové změny L_{sub} , které se uvolní při desublimaci vodní páry. V reálném ději probíhá desublimace po celé tloušťce vrstvy. Nicméně v rámci zachování nezávislosti rovnic na prostorové souřadnici, budeme počítat s uvolněním latentního tepla na povrchu námrazy. Dostaneme tak tepelnou rovnováhu na povrchu námrazy

$$\dot{Q}_{surf} = \dot{Q}_{conv,surf} + \dot{m}_{\omega,surf} \cdot L_{sub}. \quad (2.11)$$

Neboli teplo procházející námrazou je součtem tepla přeneseného do námrazy konvekci a latentního tepla vzniklého desublimací vodní páry.

2.3 Eulerovský model

CFD software STAR-CCM+ nativně neobsahuje model pro simulaci desublimace, proto desublimaci budeme implementovat za použití jiných dostupných modelů a jejich doplnění. Základní myšlenkou je, že upravíme vícefázový Eulerovský model o dvou oddělených fázích (Eulerian segregated flow model) tak, aby se jedna fáze chovala jako porézní struktura námrazy. V této části popíšeme právě Eulerovský model. Zavedeme bilanční rovnice pro jednotlivé fáze a budeme se věnovat členům důležitým pro zavedení desublimace a námrazy do modelu.

Podíl fází v každém bodě výpočetní domény je dán objemovými zlomky. V našem případě budeme pracovat se dvěma fázemi, vlhký vzduch (index a) jako plynná fáze resp. led (index i) jako krystalická pevná fáze, jejichž objemové zlomky označíme α_a resp. α_i . Potom platí

$$\alpha_a + \alpha_i = 1. \quad (2.12)$$

Vlhký vzduch se dále skládá ze dvou složek, vodní pára (index wv), resp. suchý vzduch (index da), jejichž podíl ve vlhkém vzduchu reprezentujeme hmotnostní zlomek w_{wv} , resp. w_{da} . Analogicky platí

$$w_{wv} + w_{da} = 1. \quad (2.13)$$

Potřebujeme tedy bilanční rovnice pro tři složky, led, suchý vzduch a vodní páru. Rovnice budeme uvádět v integrálním tvaru tak, aby byly včetně značen konzistentní s bilančními rovnicemi v teoretické příručce k softwaru STAR-CCM+ [8]. Odtud jsou také bilanční rovnice Eulerovského modelu převzaty, případně podle potřeby upraveny.

2.3.1 Bilance hmoty

Zákon zachování hmoty lze popsat rovnicemi kontinuity. Pro kontrolní objem (KO) V s plochou hranice A lze rovnici kontinuity pro fázi ledu podle [8] psát jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha_i \rho_i dV + \oint_A \alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{A} = \int_V S_i^m dV. \quad (2.14)$$

Členy na levé straně postupně zleva popisují přírůstek hmoty ledu v KO a tok hmoty ledu skrz hranici KO. Člen na pravé straně reprezentuje zdroj hmoty. Podobné transportní rovnice platí i pro suchý vzduch a vodní páru s tím rozdílem, že na pravé straně přibude

difuzní člen. Dostáváme tedy obecnější rovnice, viz také [8],

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w_{da} \alpha_a \rho_a dV + \oint_A w_{da} \alpha_a \rho_a \mathbf{u}_a \cdot d\mathbf{A} = \oint_A \alpha_a \left(J_{da} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \nabla w_{da} \right) dV + \int_V S_{da}^m dV, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w_{wv} \alpha_a \rho_a dV + \oint_A w_{wv} \alpha_a \rho_a \mathbf{u}_a \cdot d\mathbf{A} = \oint_A \alpha_a \left(J_{wv} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \nabla w_{wv} \right) dV + \int_V S_{wv}^m dV. \quad (2.16)$$

Význam členů na levé straně a objemového integrálu na pravé straně je v obou rovnicích analogický s rovnicí 2.14.

Pro samotné proudění směsi vlhkého vzduchu a ledu podél rovné desky by byly zdrojové členy nulové. V našem případě bude nulový pouze hmotnostní zdroj suchého vzduchu ($S_{da}^m = 0$) a zbylé dva zdrojové členy využijeme k popisu desublimace. Tu lze chápat jako hmotnostní tok z vodní páry do ledu, jehož hustotu označíme $\dot{m}_{wv,i}$. Platí tedy

$$S_i^m = -S_{wv}^m = \dot{m}_{wv,i}. \quad (2.17)$$

Hustotu hmotnostního toku pro desublimaci $\dot{m}_{wv,i}$ popíšeme později v kapitole 2.3.4.

2.3.2 Bilance energie

Z energetického hlediska bere podle [8] Eulerovský model fázi o více složkách jako jeden celek. Rovnice popisující zákon zachování energie máme tedy pouze dvě, pro led a pro vlhký vzduch. Energetická bilance pro proudění bez stavových změn lze napsat podle [8] pro fázi ledu jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha_i \rho_i E_i dV + \oint_A \alpha_i \rho_i H_i \mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{A} + \oint_A \alpha_i p \mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{A} = \\ \oint_A \alpha_i k_{eff,i} \nabla T_i d\mathbf{A} + \oint_A \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{A} + \int_V \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{u}_i dV + \int_V Q_{ai} dV + \int_V S_i^E dV \end{aligned} \quad (2.18)$$

a pro vlhký vzduch jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha_a \rho_a E_a dV + \oint_A \alpha_a \rho_a H_a \mathbf{u}_a \cdot d\mathbf{A} + \oint_A \alpha_a p \mathbf{u}_a \cdot d\mathbf{A} = \\ \oint_A \alpha_a k_{eff,a} \nabla T_a d\mathbf{A} + \oint_A \mathbf{T}_a \cdot \mathbf{u}_a \cdot d\mathbf{A} + \int_V \mathbf{f}_a \cdot \mathbf{u}_a dV + \int_V Q_{ia} dV + \int_V S_a^E dV. \end{aligned} \quad (2.19)$$

V obou rovnicích na levé straně první člen reprezentuje změnu celkové energie v KO, druhý člen tok energie přes hranici KO vlivem proudění a třetí člen výkon spojený s tokem skrz hranici KO proti tlaku p . Na pravé straně zleva máme transport tepla skrz hranici KO

vedením, práci vykonanou na fázi tečným napětím na hranici KO vlivem vazkosti, práci vykonanou na dané fázi druhou fází, přenos tepla mezi fázemi a zdroj energie. Všechny členy v rovnicích jsou vztaženy k odpovídající fázi.

Důležitou součástí modelu je přenos tepla mezi ledem a vlhkým vzduchem, který je popsán hustotou tepelného toku mezi fázemi

$$Q_{ai} = -Q_{ia} = h_{ai}(T_i - T_a). \quad (2.20)$$

h_{ai} je součinitel přestupu tepla mezi fázemi, který závisí na součiniteli tepelné vodivosti vlhkého vzduchu λ_a , objemových zlomcích obou fází, Nusseltově čísla Nu_{ai} a charakteristickém rozměru tepelné výměny, v našem případě průměru krystalů ledu d_i :

$$h_{ai} = \frac{6\lambda_a\alpha_a\alpha_i Nu_{ai}}{d_i^2}. \quad (2.21)$$

Nusseltovo číslo určíme podle korelace Ranz-Marshallovy jako funkci Reynoldsova čísla ledu a Prandtlova čísla vlhkého vzduchu:

$$Nu_{ai} = 2 + 0,6Re_i^{0,5}Pr_a^{0,3}. \quad (2.22)$$

Rovnice 2.20 až 2.22 vychází z [10] a jsou uvedeny ve tvaru se značením podle [8].

Pro zavedení desublimace do výměny energie je zdrojový člen ledu nulový, $S_i^E = 0$, zatímco pro vlhký vzduch je zdrojový člen roven latentnímu teplo uvolněné při desublimaci

$$S_a^E = \dot{m}_{wv,i}L_{sub}. \quad (2.23)$$

2.3.3 Bilance hybnosti

Fáze ledu má simulovat pevnou porézní strukturu námrazy. Z hlediska pohybu je proto naším cílem, aby led setrval v místě vzniku neboli aby měl nulovou hybnost, resp. rychlost. Nejprve se však podívejme na zákon zachování hybnosti pro dvousložkovou fázi vlhkého vzduchu z [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha_a \rho_a \mathbf{u}_a dV + \oint_A \alpha_a \rho_a \mathbf{u}_a \otimes \mathbf{u}_a \cdot d\mathbf{A} = & - \int_V \alpha_a \nabla p dV + \int_V \alpha_a \rho_a \mathbf{g} dV \\ & + \oint_A [\alpha_a (\mathbf{T}_a + \mathbf{T}_a^t)] \cdot d\mathbf{A} + \int_V \mathbf{M}_i dV + \int_V (\mathbf{F}_{int})_i dV + \int_V \mathbf{S}_a^u dV. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Členy na levé straně analogicky jako v případě hmoty a energie vyjadřují změnu celkové hybnosti v KO a tok hybnosti přes hranici KO vlivem proudění. Na pravé straně zleva potom dostáváme hybnost vlivem tlakového gradientu, vlivem gravitace, molekulární

a turbulentní přenos hybnosti, přenos hybnosti mezi fázemi, vliv vnitřních sil a zdrojový člen hybnosti.

Výměna hybnosti mezi jednotlivými fázemi je podle [8] dána v závislosti na jejich vzájemné rychlosti odporovou silou prostředí

$$\mathbf{F}_{ai} = -\mathbf{F}_{ia} = A_D(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_a), \quad (2.25)$$

kde A_D je koeficient odporu prostředí, pro který na základě [10] použijeme z [8] část korelace podle Gidaspowa platnou pro proudění s řídkým výskytem pevných částic neboli korelaci podle Wen and Yu:

$$A_D = \frac{3}{4} C_D \frac{\alpha_i \rho_a}{l_{ai}} |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_a| \alpha_a^n. \quad (2.26)$$

C_D je činitel odporu prostředí daný korelací Schiller and Neumann, $n = -1,65$ je bezrozměrný mocnitel a l_{ai} je charakteristický rozměr pro přenos tepla.

Pro fázi ledu chceme, aby byla její rychlost nulová. Toho lze v Eulerovském modelu dosáhnout dvěma způsoby. První možnost je definovat nulovou počáteční a okrajovou podmínku pro rychlost ledu a definovat zdrojový člen hybnosti ledu \mathbf{S}_i^u tak, aby měl stejnou velikost a opačný směr než součet ostatních členů na pravé straně hybnostní rovnice pro led. V této práci využijeme druhou, jednodušší možnost. Definujeme kontrolní oblast jako porézni, čímž v hybnostní rovnici pro led podle [8] přibude člen odporu porézního prostředí $\int_V \mathbf{f}_{p,i} dV$. $\mathbf{f}_{p,i}$ je odporová síla porézního prostředí pro led, která je dána vztahem

$$\mathbf{f}_{p,i} = -\mathbf{P}\mathbf{u}_i. \quad (2.27)$$

\mathbf{P} je tenzor odporu porézního prostředí. Ten je složený z tenzoru viskózního \mathbf{P}_v a setrvačného \mathbf{P}_i odporu prostředí:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_i |\mathbf{u}_i|. \quad (2.28)$$

Jak vidíme, odporová síla vždy působí proti směru pohybu, takže pokud pro složky tenzoru \mathbf{P} použijeme dostatečně velké hodnoty, přiblíží se rychlost fáze ledu k nule za každých podmínek. Výsledná bilanční rovnice pro led potom bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i dV + \oint_A \alpha_i \rho_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \cdot d\mathbf{A} = \\ & - \int_V \alpha_i \nabla p dV + \int_V \alpha_i \rho_i \mathbf{g} dV + \oint_A [\alpha_i (\mathbf{T}_i + \mathbf{T}_i^t)] \cdot d\mathbf{A} \\ & + \int_V \mathbf{M}_i dV + \int_V (\mathbf{F}_{int})_i dV + \int_V \mathbf{f}_{p,i} dV + \int_V \mathbf{S}_i^u dV \sim 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Význam jednotlivých členů je analogický s rovnicí 2.24 pro vlhký vzduch. Člen odporu prostředí $\mathbf{f}_{p,a}$ přibyl i v hybnostní rovnici pro vlhký vzduch, kde ovšem zůstane nulový, tudíž ho nemusíme brát v úvahu. Rovnice 2.27, 2.28 a 2.29 vychází z [8].

Jelikož chceme fázi ledu zamezit v pohybu, je zdrojový člen hybnosti pro led roven nule, $\mathbf{S}_i^u = 0$. Pro vlhký vzduch bude zdrojový člen reprezentovat úbytek hybnosti vlivem skupenské přeměny vodní páry, což lze vyjádřit jako

$$\mathbf{S}_a^u = -\dot{m}_{wv,i} u_a. \quad (2.30)$$

2.3.4 Desublimace

Stavová změna, jak jsme již uvedli ve 2.3.1, je v modelu reprezentována hustotou hmotnostního toku z vodní páry do ledu $\dot{m}_{wv,i}$. V této části se budeme věnovat otázce, jak tuto veličinu určit. Její zavedení, tedy také rovnice 2.31 až 2.35, vychází z [9].

K přechodu hmoty z fáze vlhkého vzduchu do fáze ledu dochází v případě přesycení vlhkého vzduchu vodními parami. Desublimací pak dojde k poklesu vlhkosti vzduchu na úroveň nasycení a tím snížení energie soustavy. Stavová změna je tak řízena poklesem energie při přechodu molekuly z plynného do pevného skupenství. To lze vyjádřit úbytkem Gibbsovy volné energie

$$-\Delta g = kT \ln \frac{p_{wv}}{p_{wv}^s}, \quad (2.31)$$

kde k je Boltzmannova konstanta, T je teplota KO, p_{wv} je parciální tlak vodní páry ve vlhkém vzduchu a p_{wv}^s je parciální tlak vodní páry v nasyceném vzduchu o teplotě T . Jelikož mezi tlakem p_{wv} a p_{wv}^s je velmi malý rozdíl, můžeme výraz linearizovat

$$-\Delta g = k T \frac{p_{wv} - p_{wv}^s}{p_{wv}^s}. \quad (2.32)$$

Vztah mezi parciálním tlakem vodní páry a hmotnostním zlomkem vodní páry w_{wv} je

$$w_{wv} = 0,622 \frac{p_{wv}}{p^0}, \quad (2.33)$$

kde p^0 je atmosferický tlak. Dosazením z rovnice 2.33 do 2.32 dostaneme, že stavová změna je řízena Gibbsovou volnou energií úměrnou

$$-\Delta g \propto kT \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s}, \quad (2.34)$$

kde w_{wvs} je hmotnostní zlomek vodní páry v nasyceném vzduchu o teplotě T .

Zlomek $\frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s}$ tedy můžeme považovat za bezrozměrnou úroveň přesycení vlhkého vzduchu řídicí stavovou změnu při namrzání. Velikost hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu je potom dána touto bezrozměrnou veličinou a hmotností vodní páry v kontrolním objemu ($\alpha_a \rho_a w_{wv}$) jako

$$\dot{m}_{wv,i} = \tau_{wv} \alpha_a \rho_a w_{wv} \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s}. \quad (2.35)$$

τ_{wv} je relaxační součinitel času, který v této práci budeme uvažovat konstantní o hodnotě

$$\tau_{wv} = 10, \quad (2.36)$$

podle [9].

Dále je nutné zavést kritérium, kdy bude docházet ke stavové změně. To použijeme z [9], kde je založeno na bezrozměrné rychlosti u_a/u_a^{in} , vztažené k rychlosti proudění na vstupu do testovací sekce u_a^{in} , a bezrozměrné úrovni přesycení vlhkého vzduchu jako

$$\dot{m}_{wv,i} = \begin{cases} \tau_{wv} \alpha_a \rho_a w_{wv} \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s}; & \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s} \geq B \cdot \frac{u_a}{u_a^{in}} \\ 0; & \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s} < B \cdot \frac{u_a}{u_a^{in}}. \end{cases} \quad (2.37)$$

B je koeficient popisující nárůst tloušťky námrazy, který je nutno určit empiricky na základě srovnání výpočetního modelu s experimentem. Pro naše výpočty využijeme korelaci zavedenou v [9]

$$B = (-4, 8T_w^2 + 2489T_w - 3, 21 \times 10^5) \cdot (-0, 687u_a^{in} + 1, 771) \cdot w_a^{in}. \quad (2.38)$$

Součinitele τ_{wv} a B jsou empirické. Tudíž při snaze o přiblížení výsledků modelu k reálným (experimentálním) hodnotám z kvantitativního hlediska, má smysl upravovat právě tyto dva koeficienty. Jelikož se v této práci věnujeme primárně tvorbě modelu a kvalitativní správnosti jeho výsledků, nebudeme korelace koeficientů pro jednotlivé výpočty měnit. Přirozeným výstupem této práce však bude analýza možností jejich zpřesnění na základě získaných výsledků.

3 Testovací úloha

V kapitole 2 jsme zavedli dva modely pro počítačovou simulaci tvorby námrazy. Pro zhodnocení těchto modelů budeme provádět simulaci tvorby námrazy na povrchu vodorovné rovinné desky konstantní teploty. Deska bude umístěna v kontrolní oblasti s proudem vzduchu o konstantní teplotě, vlhkosti a rychlosti na vstupu do oblasti.

V této kapitole se budeme zabývat implementací 1D modelu v softwaru MATLAB R2018b a Eulerovského modelu v softwaru STAR-CCM+ 13.03.011-R8.

3.1 1D model

V kapitole 2.2 jsme se věnovali 1D matematickému modelu popisujícímu růst námrazy na rovné desce. Dále si popíšeme úpravy rovnic pro jednodušší implementaci modelu v jazyce MATLAB, použité konstanty a korelace pro jednotlivé součinitele a počáteční a okrajové podmínky modelu.

3.1.1 Soustava rovnic

Neznámé proměnné v zavedeném modelu jsou δ_{fr} , ρ_{fr} a T_{surf} (ω_{surf} je funkcí T_{surf} , viz 2.7), přičemž první dvě neznámé se v modelu vyskytují v první derivaci. Naší snahou tedy je rovnice 2.1 až 2.11 upravit tak, abychom dostali soustavu třech rovnic, z nichž dvě budou obyčejné diferenciální rovnice (ODR) prvního řádu rozřešené vzhledem k první derivaci.

První ODR dostaneme kombinací výrazů 2.3 a 2.6:

$$\frac{d\rho_{fr}}{dt} = \frac{D_{eff} \cdot \rho_{air}}{\delta_{fr}^2} \cdot (\omega_{surf} - \omega_{wall}). \quad (3.1)$$

Druhou ODR získáme dosazením 2.5 a 2.6 do 2.2, s využitím rovnosti 2.3:

$$\frac{d\delta_{fr}}{dt} = \frac{h_{mass} \cdot \rho_{air}}{\rho_{fr}} \cdot (\omega_{air} - \omega_{surf}) - \frac{D_{eff} \cdot \rho_{air}}{\delta_{fr} \cdot \rho_{fr}} \cdot (\omega_{surf} - \omega_{wall}). \quad (3.2)$$

Tím jsme dvěma rovnicemi shrnuli hmotnostní bilanci. Třetí rovnice bude vycházet z tepelné bilance a získáme ji dosazením 2.5, 2.9 a 2.10 do tepelné rovnováhy na povrchu

námrazy 2.11:

$$0 = h_{conv} \cdot (T_{air} - T_{surf}) + h_{mass} \cdot \rho_{air} \cdot L_{sub} \cdot (\omega_{air} - \omega_{surf}) - \frac{k_{eff}}{\delta_{fr}} \cdot (T_{surf} - T_{wall}). \quad (3.3)$$

Rovnice 3.1 až 3.3 nám dohromady dávají soustavu pro řešení tří neznámých proměnných ($\delta_{fr}, \rho_{fr}, T_{surf}$) neboli pro řešení 1D modelu růstu námrazy na rovné desce. Model byl implementován v softwaru MATLAB za použití funkcí pro řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic.

3.1.2 Použité konstanty a součinitele

Pro součinitele v soustavě rovnic 3.1 až 3.3 použijeme vhodné korelace z literatury. Součinitel tepelné vodivosti námrazy určíme podle [11] jako

$$k_{eff} = 0,024248 + 7,2311 \times 10^{-4} \cdot \rho_{fr} + 1.183 \times 10^{-6} \cdot \rho_{fr}^2. \quad (3.4)$$

Součinitel přestupu tepla mezi proudem vzduchu a námrazou (h_{conv}) určíme z definice Nusseltova čísla

$$Nu = \frac{L_{plate} \cdot h_{conv}}{k_{eff}}, \quad (3.5)$$

kde L_{plate} je charakteristická délka, v našem případě délka namrzající desky. Nusseltovo číslo pak získáme z korelace podle [12]

$$Nu = 0,664 \cdot Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}, \quad (3.6)$$

kde Reynoldsovo číslo Re_L je dáno vztahem

$$Re = \frac{\rho_{air} \cdot u_{air} \cdot L_{plate}}{\mu_{air}} \quad (3.7)$$

a Prandtlovo číslo Pr jako

$$Pr = \frac{c_{p,air} \cdot \mu_{air}}{k_{eff}}, \quad (3.8)$$

kde ρ_{air} je hustota vlhkého vzduchu, μ_{air} dynamická viskozita vlhkého vzduchu a u_{air} rychlost proudu vzduchu. $c_{p,air}$ je měrná tepelná kapacita vlhkého vzduchu.

Součinitel přestupu hmoty h_{mass} určíme na základě Chiltonovy–Colburnovy analogie uvedené ve [12] jako

$$h_{mass} = \frac{h_{conv}}{\rho_{air} \cdot c_{p,air} \cdot Le^{\frac{2}{3}}}. \quad (3.9)$$

Zde budeme uvažovat podle [6] Lewisovo číslo $Le = 1$. Neboli, že součinitele hmotnostní a tepelné difuze jsou si rovny.

Dalším součinitelem je součinitel difuze vodní páry v námraze D_{eff} . Ten určíme podle [13] ze vztahů

$$\begin{aligned} D_{eff} &= \mu_{diff} \cdot D_{w-air} \\ D_{w-air} &= C_1 \cdot T_{fr}^\alpha \\ \mu_{diff} &= \frac{\varepsilon_{fr}}{1 - C_0(1 - \varepsilon_{fr})} \\ \varepsilon_{fr} &= 1 - \frac{\rho_{fr}}{\rho_{ice}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde korelace pro činitel difuzního odporu μ_{diff} byla získána za pomoci experimentů. V rovnicích D_{w-air} je součinitel difuze vodní páry ve vzduchu, ρ_{ice} hustota ledu, ε_{fr} poréznost námrazy a T_{fr} teplota námrazy, v našem případě průměr T_{wall} a T_{surf} . Pro konstanty použijeme hodnoty $C_1 = 1,432 \times 10^{-9}$, $\alpha = 1,72$, $C_0 = 0,58$ a $\rho_{ice} = 917 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Měrnou vlhkost vzduchu na povrchu námrazy a na stěně namrzající desky určíme jako měrnou vlhkost nasyceného vzduchu neboli měrnou vlhkost vzduchu o teplotě v daném místě a relativní vlhkosti 100 %.

Latentní teplo desublimace (sublimace) budeme uvažovat ze [14]

$$L_{sub} = 2,838 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

3.1.3 Počáteční a okrajové podmínky

Jelikož zkonstruovaný 1D model uvažuje pouze růst námrazy, nikoli její vznik, potřebujeme předepsat počáteční podmínky pro tloušťku, resp. hustotu námrazy $\delta_{fr,0}$, resp. $\rho_{fr,0}$. Podle [6] bylo ukázáno, že pro některé podobné modely, pokud se počáteční tloušťka blíží nule (řádově $1 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a menší) a počáteční hustota je výrazně nižší než hustota námrazy během procesu namrzání (mezi 8 a 48 $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$), počáteční podmínky nemají vliv na řešení po několika minutách simulace. Na základě toho volíme počáteční podmínky $\delta_{fr,0} = 2 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $\rho_{fr,0} = 30 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. K výpočtu potřebujeme ještě počáteční teplotu.

Okrajové podmínky předepisujeme pro proud vlhkého vzduchu a namrzající desku. Pro výpočet potřebujeme předepsat délku namrzající desky L_{plate} , šířku namrzající desky W_{plate} (pro přepočítání hmotnosti, tloušťky a hustoty námrazy), teplotu proudu vzduchu T_{air} , relativní vlhkost vzduchu ϕ^{in} , rychlost proudění u_{air} a teplotu namrzající desky T_{wall} . Z relativní vlhkosti vzduchu ϕ^{in} určíme měrnou vlhkost ω_{air} , kterou dosazujeme do

rovníc. Abychom výsledky modelu mohli srovnávat s experimentálními výsledky z literatury, volíme dvě skupiny okrajových podmínek podle dvou různých experimentálních studií, kde jsou uvedena všechna potřebná data. Použité hodnoty pro implementaci 1D modelu jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Tab. 3.1: Okrajové podmínky podle experimentálních dat

data uvádí	L_{plate} [m]	W_{plate} [m]	T_{air} [°C]	ϕ^{in} [%]	u_{air} [m · s ⁻¹]	T_{wall} [°C]
Hermes a kol. v [4]	0,1	0,1	16	80	0,7	-4 -8 -12 -16
Lee a kol. v [15]	0,3	0,15	10 15 5	63,4 52,2 57,2	1,75 2,5 1	-20 -15 -15

3.2 Eulerovský model

Jako výchozí model v CFD softwaru STAR-CCM+ používáme Eulerovský vícefázový model o dvou složkách popsany v části 2.3. V této stati popíšeme implementaci modelu desublimace do Eulerovského modelu, podíváme se na geometrii a síť použité pro testovací úlohy a uvedeme počáteční a okrajové podmínky výpočtů.

3.2.1 Implementace modelu desublimace

Již bylo uvedeno, že v Eulerovském vícefázovém modelu pracujeme se dvěma složkami, vlhkým vzduchem a ledem. Jejich množství v každé buňce výpočetní oblasti je dáno objemovými zlomky α_a a α_i . Jelikož na počátku simulace chceme, aby se ve výpočetní oblasti nevyskytovala námraza, je nutno nastavit nulovou počáteční podmínku pro objemový zlomek ledu $\alpha_i^0 = 0$ v celé oblasti. Do výpočetní oblasti zároveň námraza nesmí vstupovat, a proto předepíšeme také nulovou okrajovou podmínku na vstupu $\alpha_i^{in} = 0$. Za těchto podmínek je již Eulerovský model připraven na implementaci desublimace.

Pro implementaci desublimace využijeme uživatelsky definovatelné funkce, pomocí nichž do Eulerovského modelu doprogramujeme vztahy popsané v kapitole 2.3, které pro přehlednost znovu uvedeme:

$$\dot{m}_{wv,i} = \begin{cases} \tau_{wv} \alpha_a \rho_a w_{wv} \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s}; & \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s} \geq B \cdot \frac{u_a}{u_a^{in}}, \\ 0; & \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s} < B \cdot \frac{u_a}{u_a^{in}}, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$B = (-4, 8T_w^2 + 2489T_w - 3, 21 \times 10^5) \cdot (-0, 687u_a^{in} + 1, 771) \cdot w_a^{in}. \quad (3.12)$$

Používáme $\tau_{wv} = 10$. Tyto funkce doplníme do bilančních rovnic Eulerovského modelu jako součást zdrojových členů hmoty

$$S_i^m = -S_{wv}^m = \dot{m}_{wv,i}, \quad (3.13)$$

energie

$$S_a^E = \dot{m}_{wv,i} L_{sub} \quad (3.14)$$

a hybnosti

$$S_a^u = -\dot{m}_{wv,i} u_a. \quad (3.15)$$

Je patrné, že oblast v Eulerovském modelu, kde dochází k desublimaci, závisí výhradě na splnění podmínky z rovnice 3.11,

$$\frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s} \geq B \cdot \frac{u_a}{u_a^{in}}, \quad (3.16)$$

kteřou proto nazveme podmínkou výskytu desublimace. To znamená, že také oblast výskytu námrazy je závislá pouze na splnění této podmínky. Z podmínky plyne, že pravděpodobnost výskytu desublimace roste s rostoucím množstvím vodní páry ve vzduchu (w_{wv}), klesající teplotou vzduchu ($w_{wv}^s = f(T_a)$), klesající rychlostí proudění vzduchu (u_a) nebo menším koeficientem B .

Naopak samotný vztah pro hustotu hmotnostního toku

$$\dot{m}_{wv,i} = \tau_{wv} \alpha_a \rho_a w_{wv} \frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s} \quad (3.17)$$

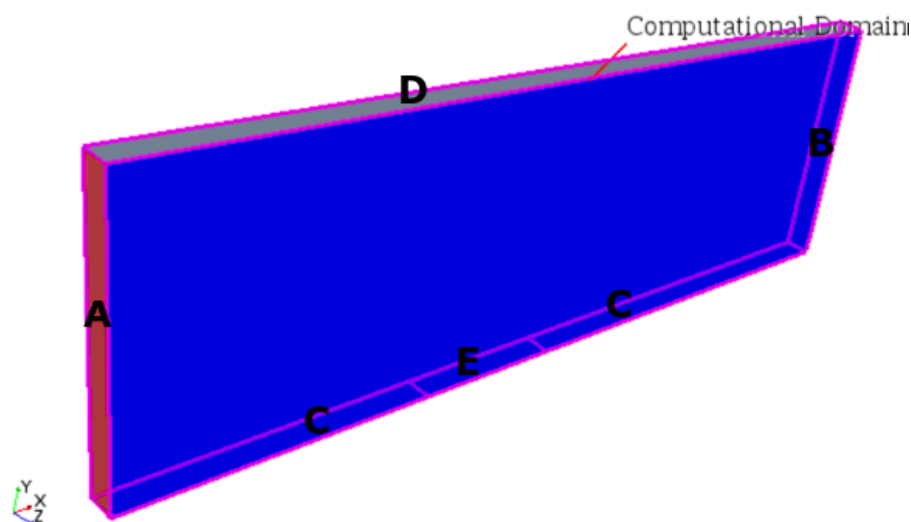
nemá přímý vliv na místo výskytu námrazy, ale na hustotu vznikající námrazy v místech splnění podmínky 3.16. Hustota námrazy bude vyšší v místech s vyšším obsahem vodní páry ve vzduchu (w_{wv}), s nižší teplotou vzduchu ($w_{wv}^s = f(T_a)$) nebo s větším relaxačním koeficientem času (τ_{wv}).

Z výše uvedených poznatků plyne, že koeficient B ovlivňuje především tloušťku námrazy, zatímco koeficient τ_{wv} má vliv hlavně na hustotu námrazy. Úplnou nezávislost tloušťky vzniklé námrazy na koeficientu τ_{wv} a hustoty na koeficientu B nelze předpokládat, jelikož změnou libovolného z koeficientů se do jisté míry změní lokální vlastnosti proudění.

3.2.2 Geometrie a síť

Jako výpočetní oblast byl zvolen kanál obdélníkového průřezu, kde chlazená deska je součástí spodní stěny kanálu. Předpokládáme, že vlastnosti námrazy budou téměř konstantní v řezu kolmém na směr proudění. Můžeme proto výpočty provádět pouze na úzkém výřezu kanálu teoreticky nekonečné šířky a výsledné vlastnosti námrazy rozšířit na požadovanou šířku desky. Toho se využije především pro výpočet hmotnosti námrazy, případně pro další extenzivní veličiny. Šířka výpočetní oblasti proto byla zvolena tak, aby u všech sítí byla shodná s šířkou všech buněk sítě.

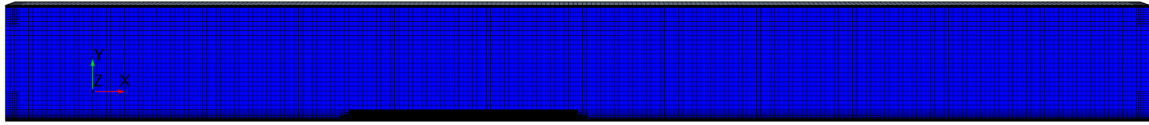
Kromě chlazené desky o konstantní teplotě považujeme stěny kanálu za adiabatické a vlastnosti proudění jsou dány okrajovými podmínkami předepsanými ve vstupním průřezu kanálu. Popis a rozložení částí výpočetní oblasti je na obrázku 3.1. Část kanálu před, resp. za chlazenou deskou byla zvolena dostatečně dlouhá, aby se v ní stačil vyvinout rychlostní profil proudění u stěny kanálu a aby podmínky u výstupu z výpočetní oblasti neovlivňovaly tvorbu námrazy.



Obr. 3.1: Rozložení výpočetní oblasti s osou z v poměru 10:1 a částmi: A) vstupní průřez výpočetní oblasti, B) výstupní průřez výpočetní oblasti, C) spodní stěna kanálu, D) svrchní stěna kanálu, E) chlazená deska

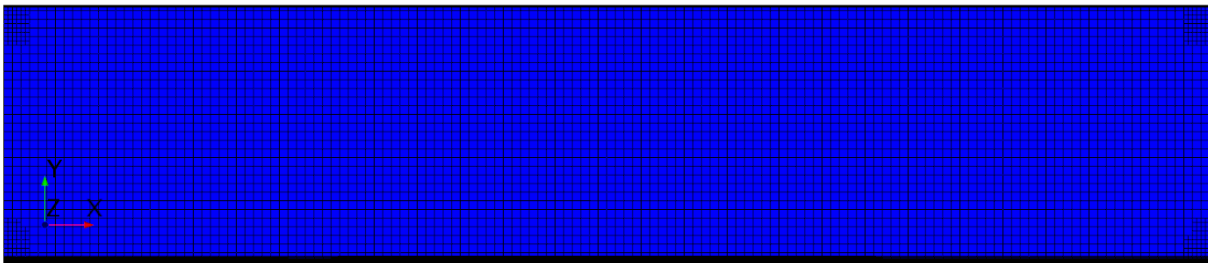
Jelikož chceme porovnávat výsledky výpočtů s experimentálními výsledky ze dvou různých zdrojů, byly výpočty provedeny na dvou různých geometriích stejného tvaru, ale jiných rozměrů. Rozměry zvolených geometrií byly přizpůsobeny podle dostupných informací o experimentech ve [4] a [15]. Pro každou geometrii byla také přizpůsobena síť. Zároveň byla síť zjemněna u stěn tak, aby bylo zajištěno $y^+ < 1$. U chlazené namrzající desky byla síť zjemněna zároveň tak, aby bylo možné monitorovat růst tloušťky námrazy v rozumných krocích.

Pro první geometrii o délce namrzající desky 10 cm, výšce kanálu 5 cm a délce výpočetní oblasti 0,5 m byla použita jemnější síť o 15 tisících buňkách se zjemněním do vzdálenosti 5 mm od dolní stěny, viz obrázek 3.2.



Obr. 3.2: Síť 1

Pro druhou geometrii o délce namrzající desky 30 cm, výšce kanálu 15 cm a délce výpočetní oblasti 0,7 m byla použita hrubší síť o 12 tisících buňkách se zjemněním do vzdálenosti 7 mm od dolní stěny, viz obrázek 3.3.



Obr. 3.3: Síť 2

3.2.3 Okrajové a Počáteční podmínky

Jak již bylo zmíněno, mimo chlazenou desku o konstantní teplotě T_w považujeme horní a dolní stěnu kanálu (viz obr. 3.1) za adiabatické. Vlastnosti proudění jsou dány okrajovými podmínkami předepsanými na vstupním průřezu kanálu a teplotou chlazené desky. V práci byly použity dvě sady okrajových podmínek založené na různých experimentálních studiích a pro každou sadu byla použita jedna geometrie a síť. První sada podmínek, ze studie [4], je v tabulce 3.2 a byla pro ni použita síť z obrázku 3.2. Druhá sada podmínek, ze studie [15], je v tabulce 3.3 a byla pro ni použita síť na obrázku 3.3.

Hmotnostní zlomek vodní páry na vstupu do výpočetní oblasti w_{wv}^{in} , je ekvivalentní s relativní vlhkostí vzduchu ϕ^{in} v tabulce 3.1. Ostatní veličiny jsou shodné s veličinami ve zmíněné tabulce, pouze je použito značení konzistentní s Eulerovským modelem a jsou dodefinovány vlastnosti ledu na vstupu, u_i^{in} a T_i^{in} . Na vstupu je ještě nutno definovat objemový zlomek vlhkého vzduchu, resp. ledu, který je pro všechny případy $\alpha_a^{in} = 1$, resp. $\alpha_i^{in} = 0$ a hmotnostní zlomek suchého vzduchu, který určíme jako $w_{da}^{in} = 1 - w_{wv}^{in}$. V dalším, pokud budeme uvádět okrajové podmínky společně pro oba modely, budeme používat značení okrajových podmínek použité v tabulkách 3.2 a 3.3, pouze místo w_{wv}^{in} budeme

používat ϕ^{in} a vlastnosti ledu vynecháme, jelikož jeho objemový zlomek na vstupu je roven nule.

Tab. 3.2: okrajové podmínky podle experimentálních dat - Hermes

L_{plate} [m]	W_{plate} [m]	T_a^{in} [°C]	$w_{wv}^{in} \times 10^3$ [-]	u_a^{in} [m · s ⁻¹]	T_w [°C]	u_i^{in} [m · s ⁻¹]	T_i^{in} [°C]
0,1	0,1	16	8,98	0,7	-4 -8 -12 -16	0	16

Tab. 3.3: okrajové podmínky podle experimentálních dat - Lee

L_{plate} [m]	W_{plate} [m]	T_a^{in} [°C]	$w_{wv}^{in} \times 10^3$ [-]	u_a^{in} [m · s ⁻¹]	T_w [°C]	u_i^{in} [m · s ⁻¹]	T_i^{in} [°C]
0,3	0,15	10	5,28	1,75	-20	0	10
		15	6,33	2,5	-15		15
		5	3,22	1	-15		5

Na výstupu z výpočetní oblasti jsou vlastnosti proudění dopočítávány z modelu.

V modelu je nutno předepsat také počáteční podmínky v čase $t = 0$. Počáteční teploty pro vlhký vzduch a led byly použity shodné s okrajovými teplotami na vstupu do výpočetní oblasti, tedy $T_i^0 = T_a^0 = T_i^{in} = T_a^{in}$. Totéž platí i pro objemový zlomek ledu $\alpha_i^0 = \alpha_i^{in}$ a objemový zlomek vlhkého vzduchu $\alpha_a^0 = \alpha_a^{in}$. Hmotnostní zlomek vodní páry byl na počátku roven nule $w_{wv}^0 = 0$, stejně jako počáteční rychlosti vlhkého vzduchu a ledu $u_a^0 = u_i^0$.

Tato volba počátečních podmínek vnese do výsledků jistou chybu, především na počátku tvorby námrazy. Vhodnější by bylo pro počáteční podmínky použít rozložení vlastností ustáleného proudění vlhkého vzduchu bez přítomnosti desublimace s odpovídajícími okrajovými podmínkami.

3.2.4 Nastavení výpočtu

Pro výpočet byl použit časový krok 0,5 s se 100 iteracemi v jednom časovém kroku. Tím je zajištěna konvergence veličin v rámci každého časového kroku pro použité nastavení výpočtu. Pro řešiče jednotlivých modelů byly použity poměrně nízké hodnoty oproti hodnotám doporučeným pro Eulerovský vícefázový model v [16]. Důvodem je nestandardní použití modelů a přidání modelu pro simulaci desublimace.

Během zjišťování vhodného nastavení výpočtu vznikaly při vyšších výpočetních časech simulace problémy se stabilitou výpočtu. Ty byly pravděpodobně způsobeny použitím

extrémních hodnot pro objemový zlomek ledu a odpor prostředí pro fázi ledu. Při vyšetřování stability bylo zjištěno, že zjemnění sítě, ani snížení časového kroku na stabilitu nemají výrazný vliv. Výpočet se podařilo stabilizovat až snížením relaxačních koeficientů všech řešičů používaných k řešení zavedených modelů. To znamená, že je možné, že použitím většího časového kroku, hrubší sítě, nebo zvýšením relaxačních koeficientů pro některé řešiče by bylo možné zkrátit výpočetní čas bez výrazného snížení přesnosti nebo stability výpočtu.

4 Výsledky

V rámci této práce byly provedeny výpočty vlastností námrazy pro 6 různých případů okrajových podmínek, viz tab 4.2. Nejprve v programu MATLAB byly spočteny časové průběhy průměrné tloušťky δ_{fr} , průměrné hustoty ρ_{fr} a teploty povrchu námrazy T_{surf} , z nichž byly dopočteny časové průběhy hmotnosti námrazy m_{fr} . Poté byly provedeny výpočty v CFD programu STAR-CCM+ a zaznamenány časové průběhy m_{fr} . Dále byly zaznamenány časové průběhy a závislosti na souřadnici y , kolmé k namrzající desce, veličin δ_{fr} , T_{surf} , a dalších významných veličin, v bodech na začátku, v 1/4, 1/2, 3/4 a na konci namrzající desky.

Jako hlavní kritérium pro vyhodnocení výsledků použijeme srovnání vypočtených časových průběhů hmotnosti a tloušťky námrazy s experimentálními daty z [4] a [15]. Na základě srovnání výsledků a analýzy simulace Eulerovského modelu navrhneme možná zpřesnění Eulerovského modelu.

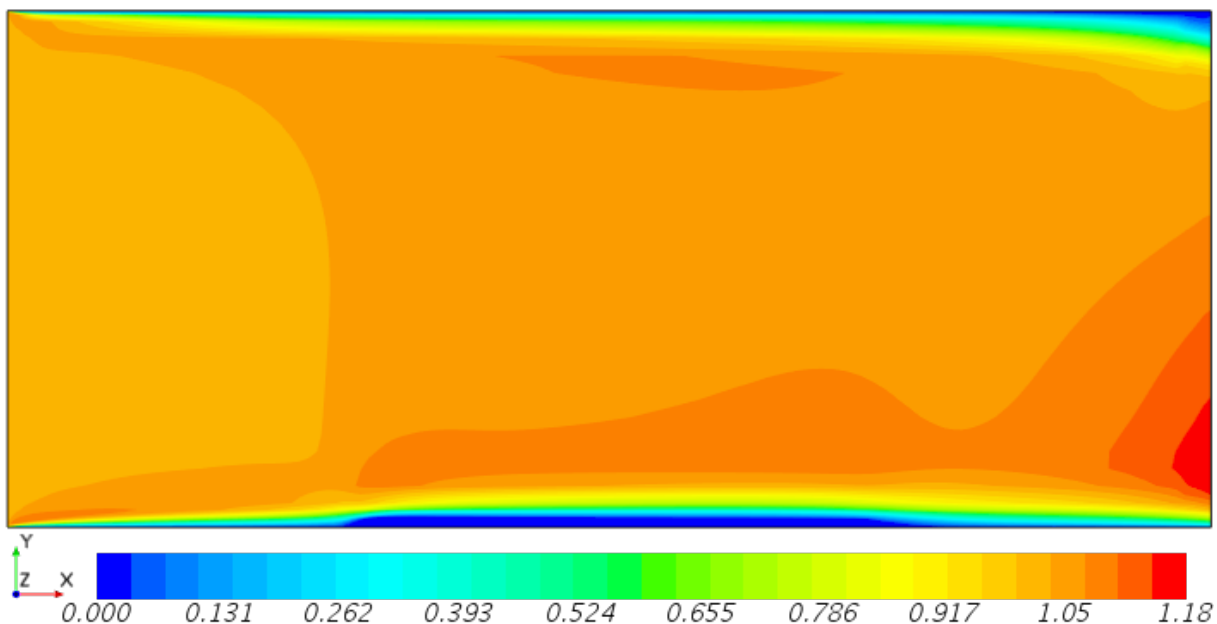
4.1 Vizualizace vlastností proudění a námrazy

Nejprve se podívejme na prostorové rozložení některých charakteristických veličin námrazy a proudění vlhkého vzduchu ve výpočetní oblasti Eulerovského modelu. Pokud nebude řečeno jinak, budeme v této části výsledky zobrazovat v čase $t = 180$ min od začátku namrzání a jako modelový si pro tuto část vybereme případ s okrajovými podmínkami podle tabulky 4.1.

Tab. 4.1: Okrajové podmínky - Lee 3

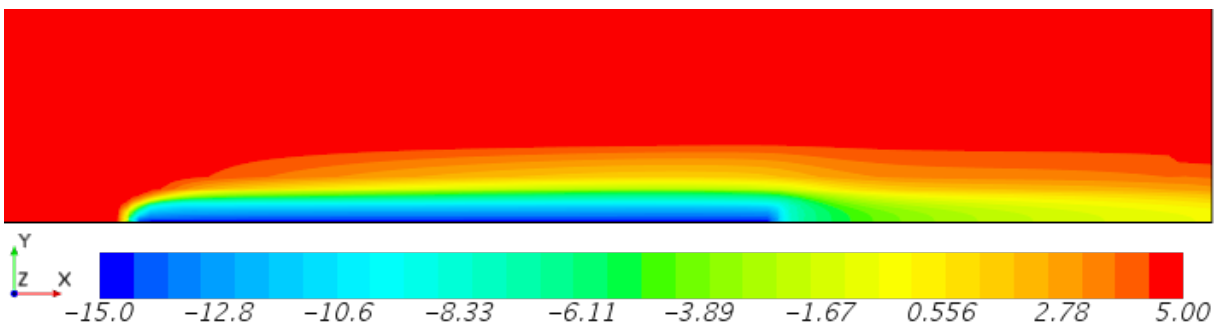
L_{plate} [m]	W_{plate} [m]	T_a^{in} [°C]	$w_{wv}^{in} \times 10^3$ [-]	u_a^{in} [m · s ⁻¹]	T_w [°C]
0,3	0,15	5	3,22	1	-15

Na obrázku 4.1 vidíme rozložení rychlosti vzduchu ve výpočetní oblasti. Pro lepší viditelnost jevů na stěnách je použito zvětšení výpočetní oblasti ve směru osy y v poměru 2:1. Je vidět, že uvnitř námrazy, tedy v blízkosti namrzající desky, se rychlost blíží nule. Totéž platí i v těsné blízkosti stěn.



Obr. 4.1: Rozložení velikosti rychlosti vlhkého vzduchu u_a [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] v čase $t = 180$ min

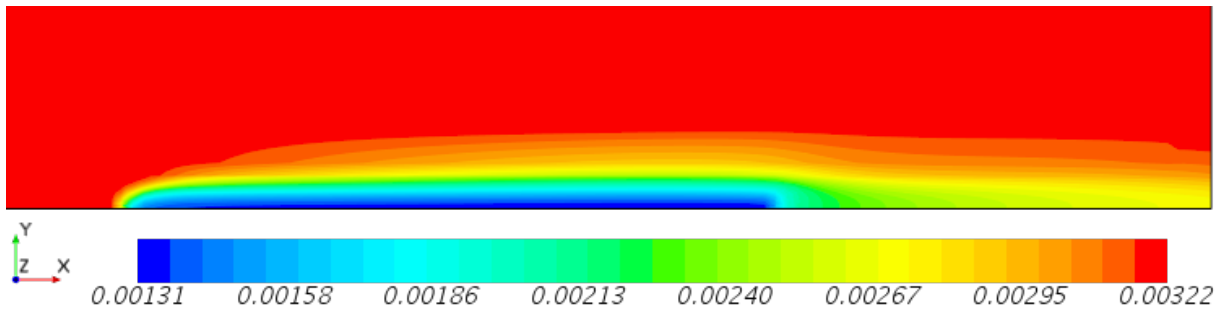
Pro lepší viditelnost jevů v blízkosti namrzající desky, případně části dolní stěny za deskou, budeme dále výpočetní oblast ve směru osy y zobrazovat zvětšeně v poměru 3:1: Oblast také ořízneme o horní část výpočetního objemu a části před nebo za namrzající deskou, kde jsou níže zobrazované vlastnosti konstantní.



Obr. 4.2: Rozložení teploty vlhkého vzduchu T_a [$^{\circ}\text{C}$] v čase $t = 180$ min

Obrázek 4.2 vyobrazuje rozložení teploty proudícího vzduchu ve výpočetní oblasti. Z obrázku je patrný výrazný pokles teploty vzduchu v blízkosti chlazené desky, tedy ve vznikající námraze a její bezprostřední blízkosti. V důsledku tohoto ochlazení je i v blízkosti spodní stěny kanálu za vzniklou námrazou teplota vzduchu snížena oproti hlavnímu proudu dále od stěny.

Na obr. 4.3 je zobrazen hmotnostní zlomek vodní páry ve vlhkém vzduchu. Srovnáním s rozložením teplot a rychlostí je vidět, že k výraznějšímu snížení obsahu vodní páry ve vzduchu dochází v místech o nižší teplotě a nižší rychlosti proudění. To je přímý

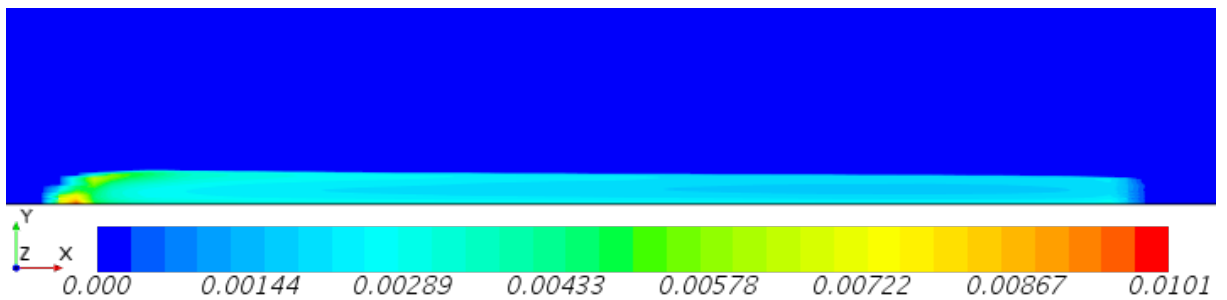


Obr. 4.3: Rozložení hmotnostního zlomku vodní páry ve vlhkém vzduchu w_{wv} [-] v čase $t = 180$ min

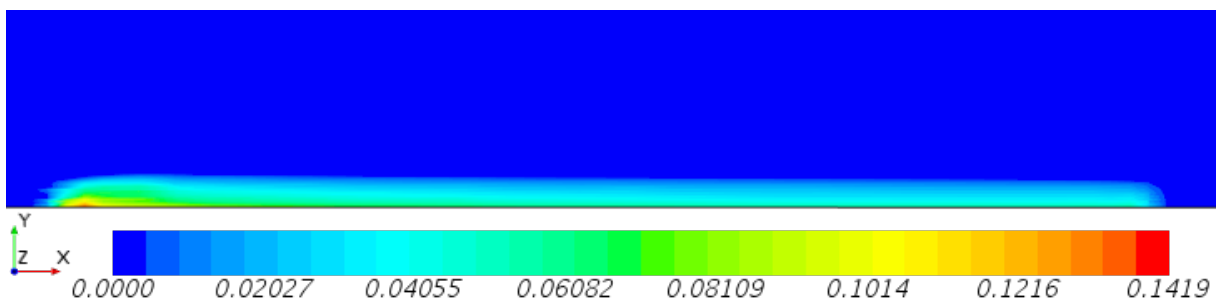
důsledek podmínky výskytu desublimace, viz rovnice 3.16:

$$\frac{w_{wv} - w_{wv}^s}{w_{wv}^s} \geq B \cdot \frac{u_a}{u_a^{in}}$$

Důsledkem této podmínky je zároveň oblast výskytu desublimace, resp. hustoty hmotnostního toku z vodní páry ledu, viz obrázek 4.4, která také implikuje oblast výskytu námrazy (fáze ledu) zobrazená na obrázku 4.5 jako objemový zlomek ledu. Přičemž objemový zlomek ledu je úměrný hustotě námrazy. Jak je vidět, nejhustší námraza v modelu vzniká na náběžné hraně desky. To je způsobeno místním prudkým snížením rychlosti a teploty proudícího vzduchu o maximální vlhkosti. Podle výsledků simulace je zde hustota námrazy až trojnásobná oproti většině námrazy. Při dalším vývoji modelu je proto vhodné věnovat tomuto jevu zvýšenou pozornost a ověřit správnost vzniklého maxima porovnáním simulace s experimentem.

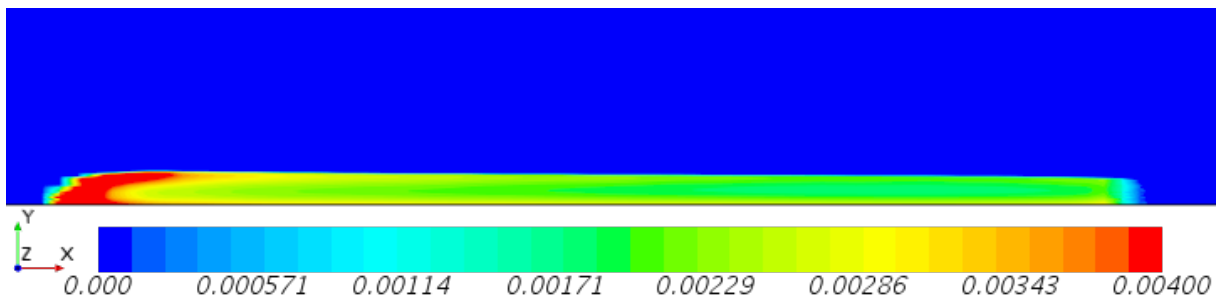


Obr. 4.4: Rozložení hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu $\dot{m}_{wv,i}$ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$] v blízkosti chlazené desky v čase $t = 180$ min

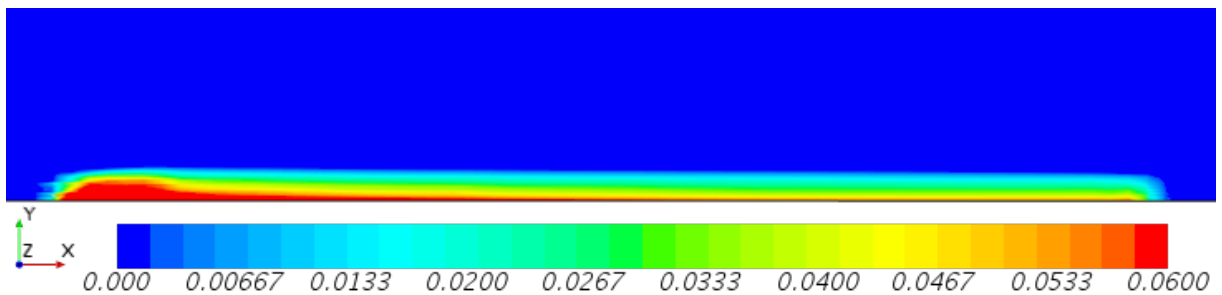


Obr. 4.5: Rozložení objemového zlomku ledu v prostoru α_i [-] v čase $t = 180$ min

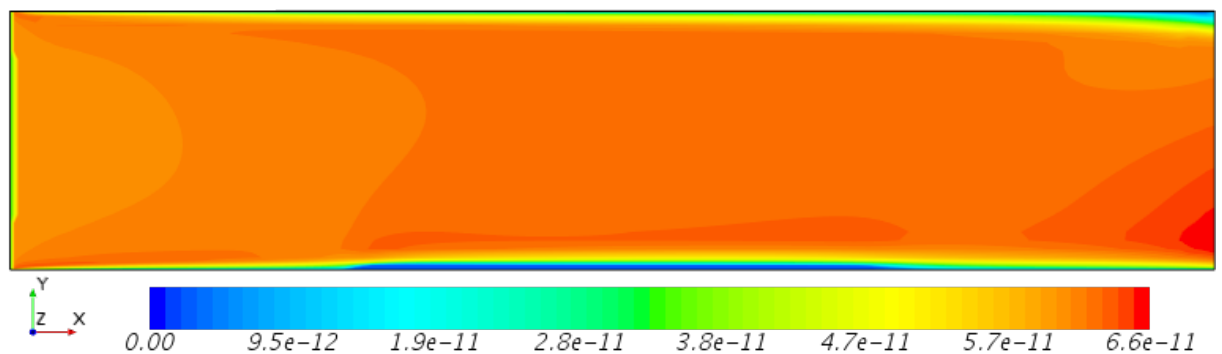
Kvůli vysokým maximálním hodnotám zobrazených veličin u náběžné hrany desky není na obrázku 4.4 a 4.5 vidět rozložení hodnot v oblasti zbytku námrazy. Proto jsou veličiny zobrazeny znovu na obrázku 4.6 a 4.7 s posunutou horní hranicí barevného spektra. Zde vidíme, že hustota hmotnostního toku je vyšší těsně u namrzající desky a na povrchu námrazy. V těsné blízkosti desky je vyšší hodnota způsobena minimální teplotou a rychlostí proudění vzduchu. Na povrchu námrazy dochází ke snížení teploty a rychlosti vzduchu a k tomu zde vzduch dosahuje maximální vlhkosti. Objemový zlomek ledu, a tedy hustota námrazy je podle očekávání nejvyšší na povrchu chlazené desky a nejnižší na povrchu námrazy. To je způsobeno poklesem teploty prostředí a rychlosti proudění směrem k povrchu desky, difuzí vodních par do námrazy a také faktem, že blíže u povrchu desky vzniká námraza delší dobu.



Obr. 4.6: Rozložení hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu $\dot{m}_{wv,i}$ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$] v blízkosti chlazené desky v čase $t = 180$ min



Obr. 4.7: Rozložení objemového zlomku ledu v prostoru α_i [-] v čase $t = 180$ min



Obr. 4.8: Rozložení velikosti rychlosti fáze ledu u_i [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] v čase $t = 180$ min (zobrazeno v původním poměru, bez měřítka)

Ještě je dobré si uvědomit, že při počítačových výpočtech se v některých případech přiřazuje nulovým veličinám, místo nuly, zanedbatelně malá hodnota. V Eulerovském modelu se tak děje například v případě objemového zlomku ledu α_i , jehož hodnota v místech s předepsanou nulovou hodnotou je řádu 10^{-12} až 10^{-14} [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]. V části 2.3.3 jsme uvedli, že pohybu námrazy je v modelu zamezeno definováním odporu prostředí proti pohybu fáze ledu. Jestli je odpor prostředí dostatečný můžeme zkontrolovat podle obrázku 4.8, kde vidíme, že rychlost fáze ledu je nejvýše řádu 10^{-11} [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]. Rychlost ledu lze tudíž z hlediska výpočtů považovat za nulovou.

4.2 Srovnání numerických výsledků a experimentu

Srovnání výsledků rozdělíme do několika částí, podle porovnávané veličiny. Nejprve se budeme věnovat srovnání časových průběhů průměrné tloušťky, poté průměrné hmotnosti, a nakonec povrchové teploty námrazy. Pro případy, kde nejsou dostupná experimentální data budeme srovnávat pouze Eulerovský model s 1D modelem.

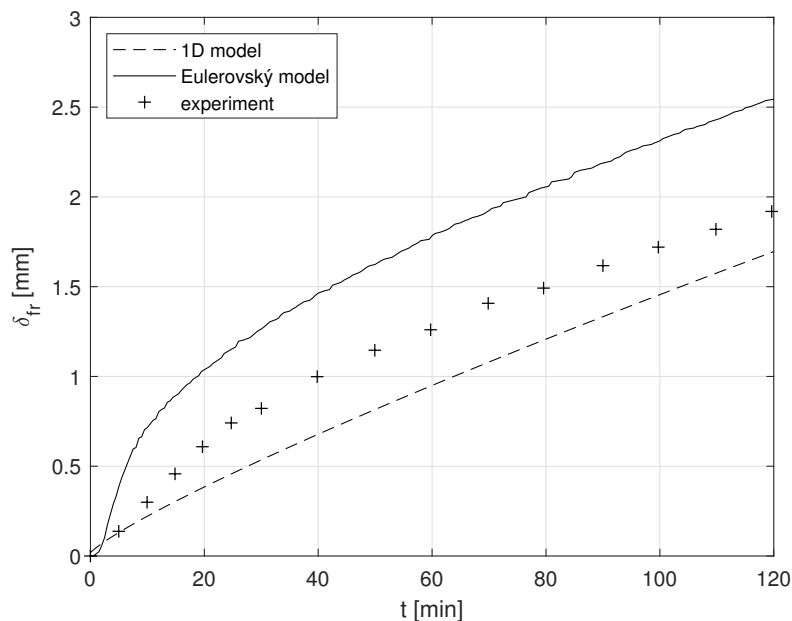
V textu a grafech se budeme často odkazovat na sady okrajových podmínek, proto je zde znovu uvedeme i s označením, které pro ně budeme používat, viz tabulka 4.2.

Tab. 4.2: Okrajové podmínky s používaným označením

označení	L_{plate} [m]	W_{plate} [m]	T_a^{in} [$^{\circ}\text{C}$]	ϕ^{in} [%]	u_a^{in} [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]	T_w [$^{\circ}\text{C}$]
$T_w = -4^{\circ}\text{C}$	0,1	0,1	16	80	0,7	-4
$T_w = -8^{\circ}\text{C}$						-8
$T_w = -12^{\circ}\text{C}$						-12
$T_w = -16^{\circ}\text{C}$						-16
Lee 1	0,3	0,15	10	63,4	1,75	-20
Lee 2			15	52,2	2,5	-15
Lee 3			5	57,2	1	-15

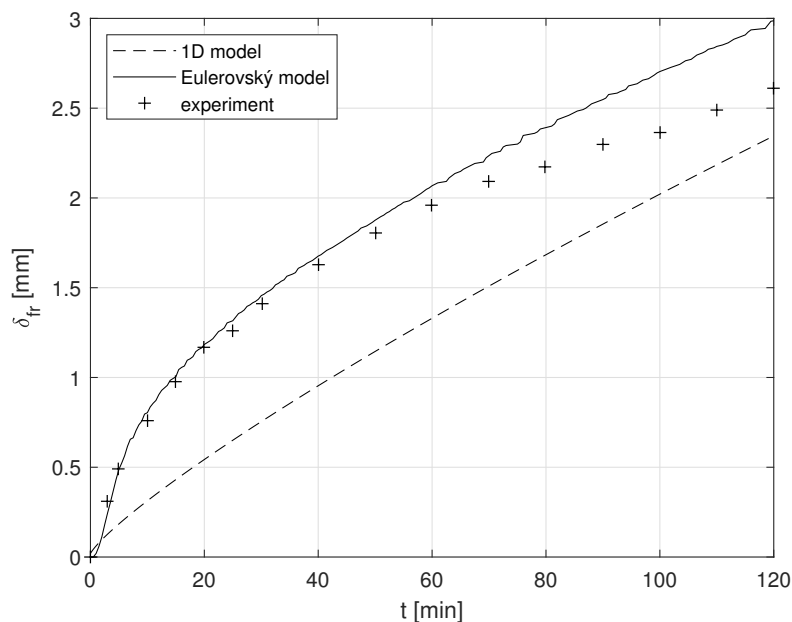
4.2.1 Tloušťka námrazy

Experimentální průběhy průměrné tloušťky námrazy v čase jsou dostupné pro všechny případy okrajových podmínek. První čtyři případy okrajových podmínek se liší pouze teplotou namrzající desky. Srovnání experimentálních výsledků s 1D modelem a Eulerovským modelem pro případ $T_w = -4^{\circ}\text{C}$ můžeme vidět v grafu 1. Tloušťka námrazy podle 1D modelu je menší než podle experimentu a její časový průběh je proti experimentu bližší lineárnímu průběhu. V případě Eulerovského modelu vidíme, že tvar křivky je podobný experimentální závislosti. Vypočtené hodnoty tloušťky námrazy jsou ovšem značně vyšší než hodnoty experimentální.



Graf 1: Časový průběh tloušťky námrazy pro případ $T_w = -4^\circ\text{C}$

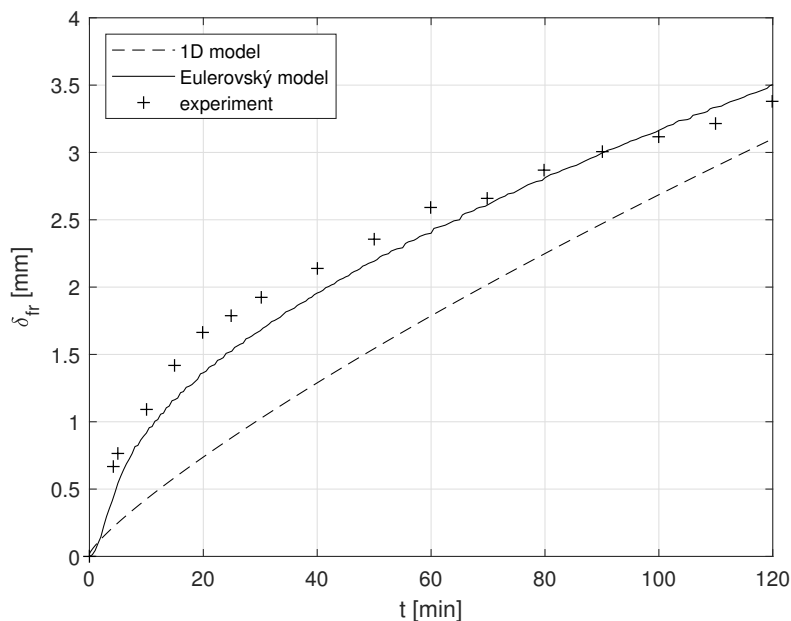
Výsledky pro případ $T_w = -8^\circ\text{C}$ jsou zobrazeny v grafu 2. V případě 1D modelu je průběh tloušťky námrazy oproti experimentu opět bližší lineárnímu. Hodnoty z modelu jsou nižší než experimentální. Pro vyšší čas klesá strmost průběhu experimentálních výsledků, pročež se k nim výsledky modelu přibližují. Průběh tloušťky námrazy podle Eulerovského modelu je z počátku blízký experimentu a po delším čase se od experimentu odchyľuje směrem nahoru.



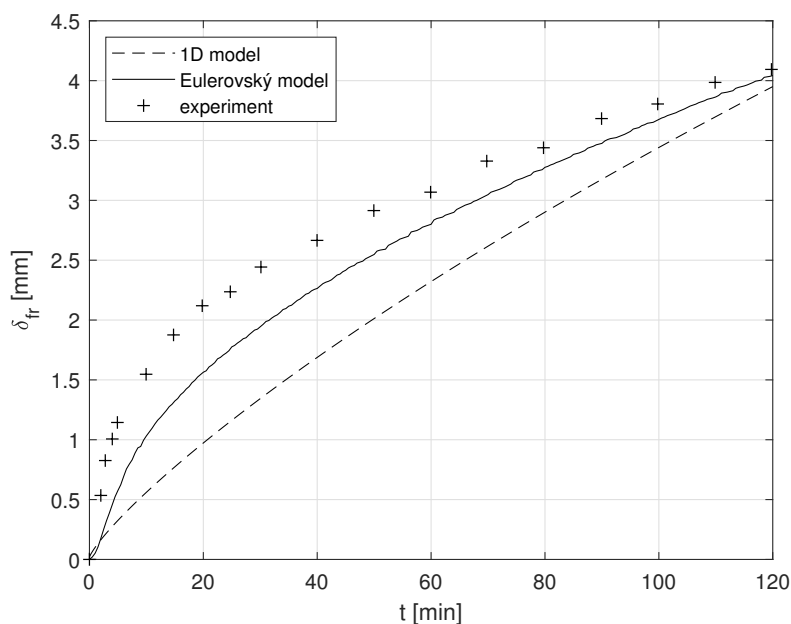
Graf 2: Časový průběh tloušťky námrazy pro případ $T_w = -8^\circ\text{C}$

Z grafu 3 vidíme, že v případě okrajových podmínek $T_w = -12^\circ\text{C}$ je růst tloušťky námrazy podle Eulerovského modelu velmi blízký experimentálnímu. Průběh podle modelu je pouze z počátku o něco mírnější a později o něco strmější než podle experimentu. 1D model má ve srovnání s experimentem podobný výsledek jako v předchozím případě.

Tloušťka námrazy podle něj roste lineárněji a je menší než podle experimentu. Hodnoty z modelu se s rostoucím časem nejprve vzdalují od experimentálních a později se k nim blíží.



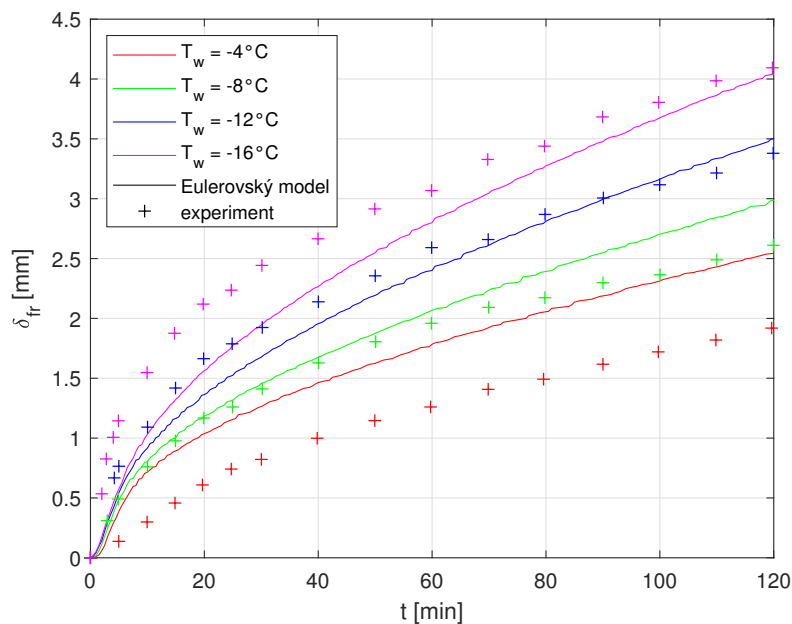
Graf 3: Časový průběh tloušťky námrazy pro případ $T_w = -12^\circ\text{C}$



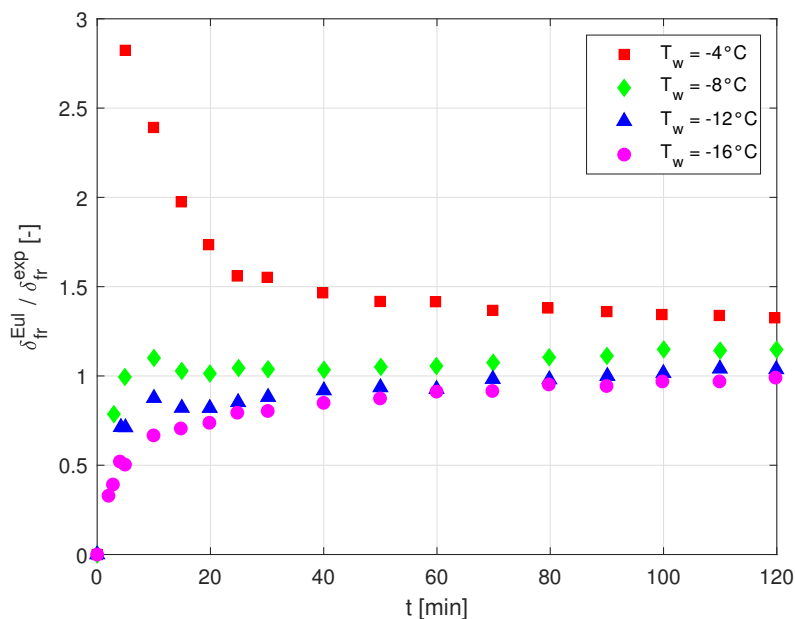
Graf 4: Časový průběh tloušťky námrazy pro případ $T_w = -16^\circ\text{C}$

Pro poslední případ okrajových podmínek lišících se pouze teplotou desky, případ $T_w = -16^\circ\text{C}$, jsou časové průběhy tloušťky námrazy zobrazeny v grafu 4. Časový průběh tloušťky námrazy podle 1D modelu je zde v porovnání s experimentem opět blízký lineárnímu. Hodnoty tloušťky jsou menší než podle experimentu. Nejprve se hodnoty modelu od experimentálních vzdalují a pro delší časy se k experimentálním přibližují. Na konci simulace, v čase $t = 120\text{min}$, jsou hodnoty z modelu téměř shodné s experimentálními.

Výsledky Eulerovského modelu jsou v tomto případě přibližně uprostřed mezi výsledky experimentu a 1D modelu.



Graf 5: Časový průběh tloušťky námrazy podle Eulerovského modelu a experimentu pro $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$

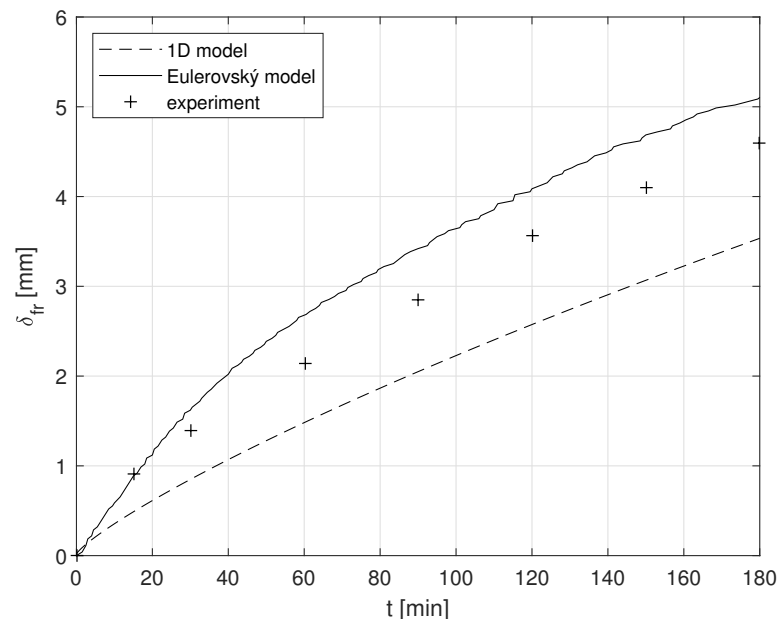


Graf 6: Časový průběh podílu tloušťky námrazy z Eulerovského modelu δ_{fr}^{Eul} a experimentu δ_{fr}^{Exp} pro $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$

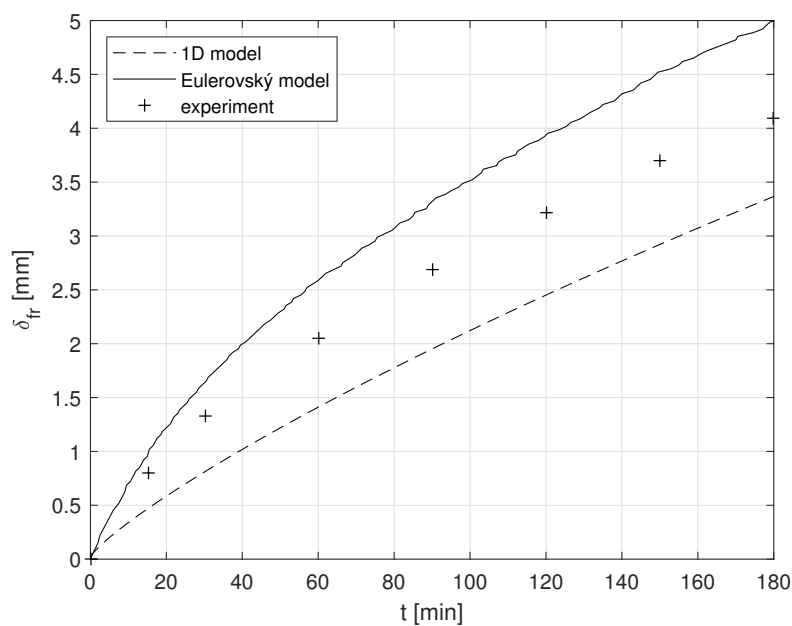
Pro lepší zhodnocení výsledků Eulerovského modelu ještě zobrazíme výsledky modelu a experimentu pro různé podmínky do grafu 5. Odtud vidíme, že pro Eulerovský model se z počátku průběh růstu tloušťky námrazy pro různé teploty namrzající desky příliš neliší. Důsledkem toho zde vzniká velká poměrná odchylka od experimentálních hodnot, jejíž průběh můžeme pozorovat v grafu 6. Z něj je vidět, že na počátku simulace jsou nejpřesnější numerické hodnoty pro případ $T_w = -8^\circ\text{C}$ a po delším čase pro $T_w = -12^\circ\text{C}$.

Podle těchto výsledků by tedy bylo vhodné zpomalit počáteční nárůst námrazy pro teploty stěny vyšší než -8°C a naopak urychlit ho pro teploty nižší. Zároveň by pro teploty stěny pod -8°C včetně, bylo vhodné snížit strmost získaných křivek po počátečním prudkém nárůstu tloušťky. Pro teploty vyšší než -8°C je situace opačná.

Zbylé tři případy se liší okrajovými podmínkami ve více než jedné veličině. Časový průběh tloušťky námrazy pro případ Lee 1 je zobrazeny v grafu 7. Hodnoty podle 1D modelu jsou stejně jako v předchozích případech okrajových podmínek menší než podle experimentu a časový průběh je lineárnější. S rostoucím časem se hodnoty modelu a experimentu vzdalují. Výsledky Eulerovského modelu se od experimentálních s rostoucím časem z počátku vzdalují a po 60 minutách zůstává rozdíl přibližně konstantní.



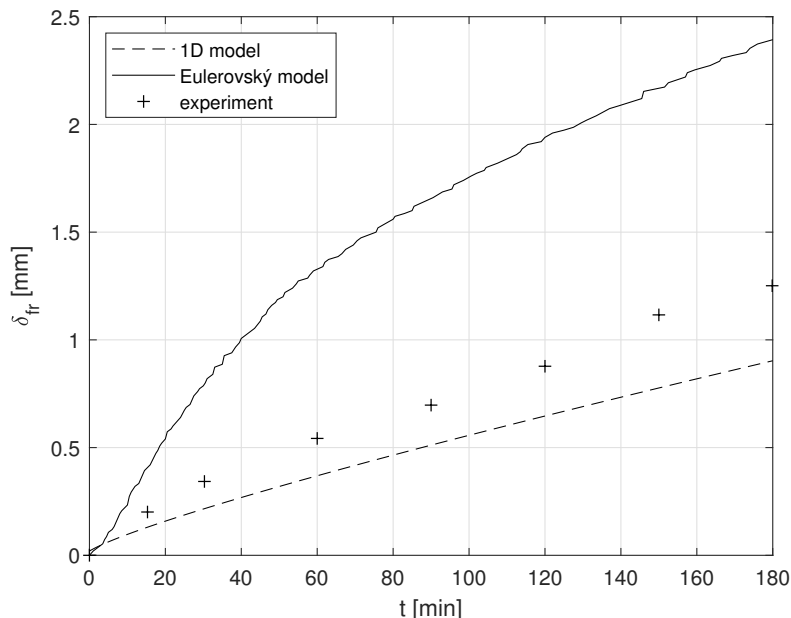
Graf 7: Časový průběh tloušťky námrazy pro případ Lee 1



Graf 8: Časový průběh tloušťky námrazy pro případ Lee 2

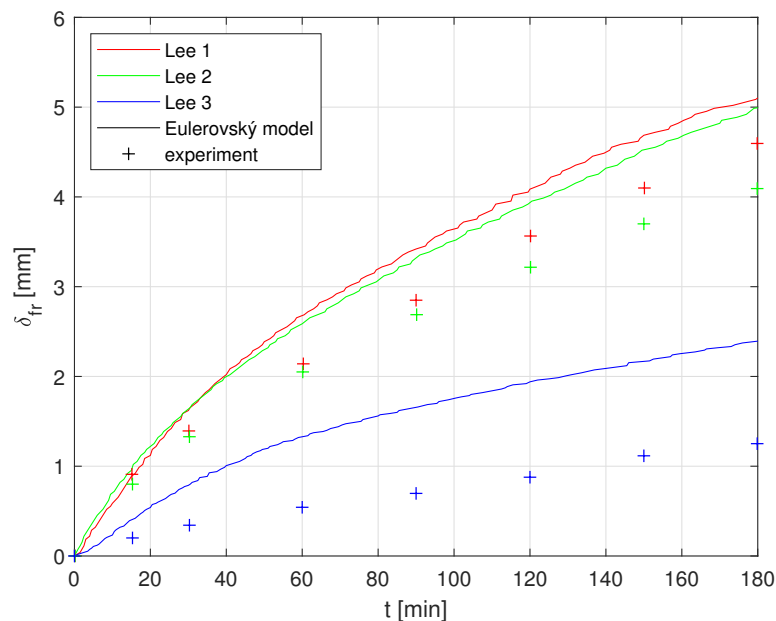
Výsledky pro případ Lee 2 jsou vyobrazeny v grafu 8. Vzájemné chování modelů a experimentu je v tomto případě shodné s grafem 7 pro okrajové podmínky Lee 1.

V případě Lee 3 je chování tloušťky námrazy podle 1D modelu vzhledem k experimentu shodné s případy Lee 1 a Lee 2, jak je vidět v grafu 9. Také vidíme, že tloušťka podle Eulerovského modelu pro případ Lee 3 je ve srovnání s experimentem výrazně větší, a to pro libovolný čas.

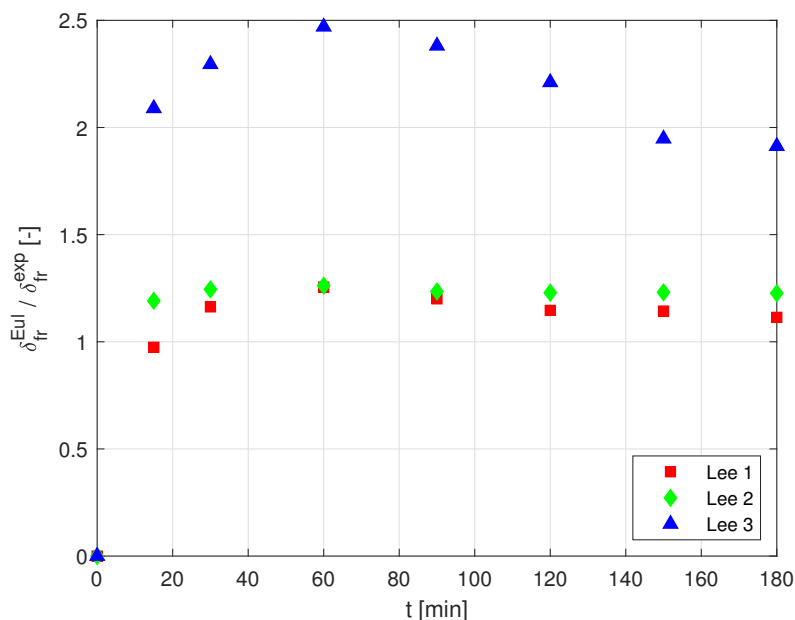


Graf 9: Časový průběh tloušťky námrazy pro případ Lee 3

Růst námrazy podle Eulerovského modelu a experimentu je zobrazen pro případy Lee 1 až Lee 3 společně v grafu 10. Zde vidíme, že je rychlost růstu námrazy pro případ Lee 3 výrazně menší než pro případy Lee 1 a 2, a to již od počátku výpočtu. Jelikož se jednotlivé případy navzájem liší vždy alespoň třemi okrajovými podmínkami, nelze vyvodit jednoznačnou závislost odlišností výsledků na jednom parametru. Jediný společný rozdíl případu Lee 3, oproti zbylým dvěma případům, je výrazně menší teplotní rozdíl mezi vstupní teplotou proudu vzduchu a teplotou namrzajícího povrchu. V případech Lee 1 a Lee 2 je teplotní rozdíl shodný. Tento fakt ovšem může být vzhledem k odlišnosti ostatních okrajových podmínek zavádějící. V grafu 11 vidíme poměrnou odchylku výsledků Eulerovského modelu vzhledem k experimentu. Je vidět, že pro všechny případy, Lee 1 až Lee 3, má na počátku tloušťka námrazy podle modelu příliš strmý růst, který se později zpomaluje a snižuje. Vlivem toho poměrná odchylka od experimentálních hodnot nejprve prudce roste a později se pomalu snižuje. Jde o podobný charakter jako v případě $T_w = -4^\circ\text{C}$.



Graf 10: Časový průběh tloušťky námrazy podle Eulerovského modelu a experimentu pro Lee 1 až Lee 3

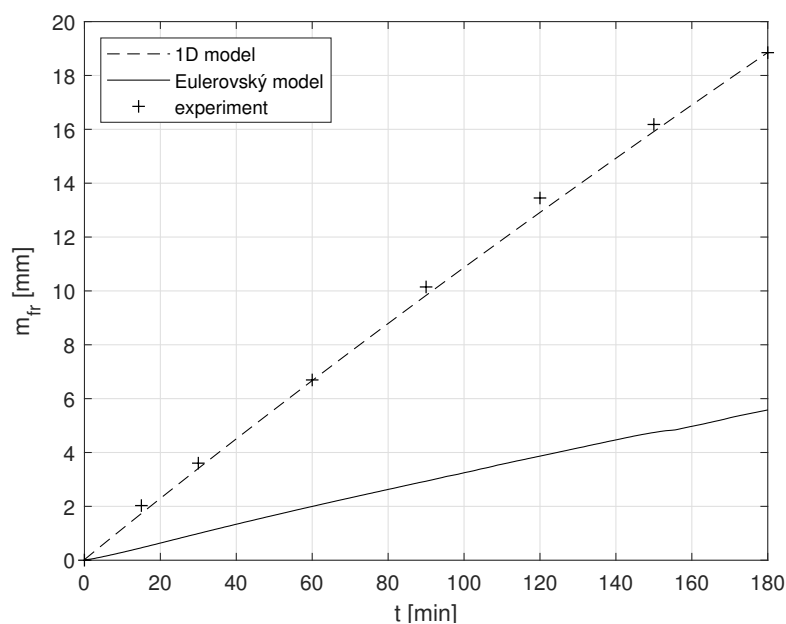


Graf 11: Časový průběh podílu tloušťky námrazy z Eulerovského modelu δ_{fr}^{Eul} a experimentu δ_{fr}^{Exp} pro Lee 1 až Lee 3

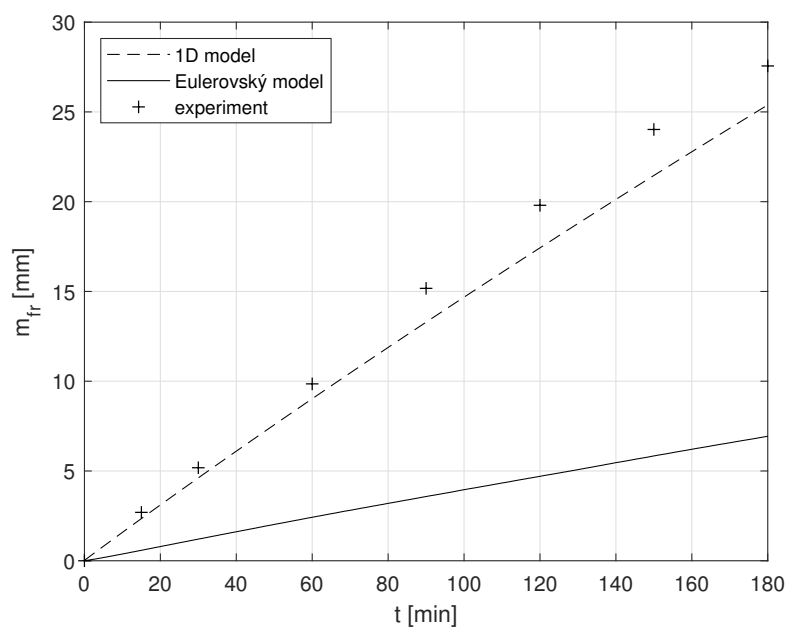
Ze získaných výsledků lze obecně vyvodit, že 1D model podhodnocuje tloušťku námrazy a tloušťka podle něj roste lineárněji ve srovnání s experimentálními průběhy. Pro Eulerovský model lze pouze podle grafu 10 říci, že změna teploty namrzající desky má příliš malý vliv na počáteční nárůst tloušťky námrazy (v prvních asi 20 minutách tvorby námrazy). Proto jsou v této části hodnoty pro různé teploty namrzající desky podobné.

4.2.2 Hmotnost námrazy

Časové průběhy hmotnosti námrazy jsou v experimentálních studiích dostupné jen pro podmínky Lee 1 až Lee 3. Proto se v budeme věnovat nejprve těmto případům. Výsledné časové průběhy hmotnosti námrazy obou modelů a experimentu pro případ Lee 1 jsou zobrazeny v grafu 12. Vidíme, že hodnoty hmotnosti podle 1D modelu se shodují s experimentálními hodnotami. Růst hmotnosti námrazy je v obou případech lineární. V případě Eulerovského modelu je průběh hmotnosti také lineární, ale hodnoty jsou výrazně nižší než experimentální



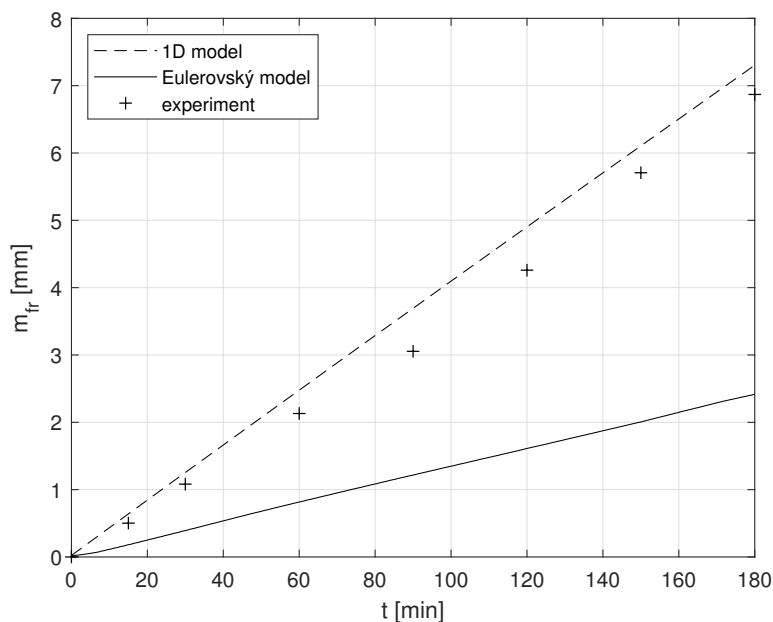
Graf 12: Časový průběh hmotnosti námrazy pro případ Lee 1



Graf 13: Časový průběh hmotnosti námrazy pro případ Lee 2

Hmotnost podle Eulerovského modelu je výrazně menší než podle experimentu také v případě Lee 2, viz graf 13. Průběhy hmotnosti jsou i v tomto případě podle obou modelů i experimentu lineární. Hmotnost podle 1D modelu je ve srovnání s experimentem o něco nižší, ale výsledek je stále uspokojivý.

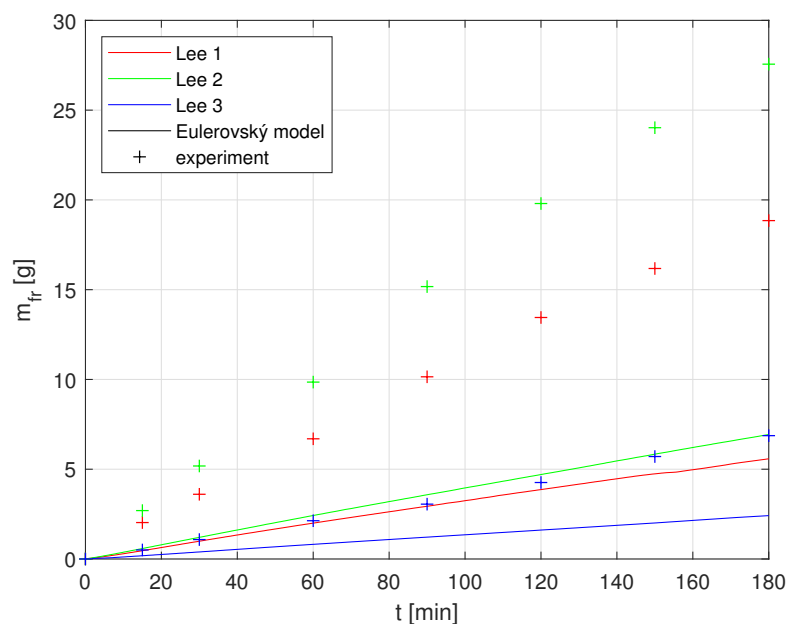
V případě Lee 3 je podle grafu 14 hmotnost námrazy z 1D modelu naopak o něco vyšší než z experimentu. Rozdíl opět není velký. Průběhy hmotnosti podle experimentu i obou modelů jsou opět lineární a Eulerovský model stejně jako v případech Lee 1 a Lee 2 výrazně podhodnocuje hmotnost námrazy.



Graf 14: Časový průběh hmotnosti námrazy pro případ Lee 3

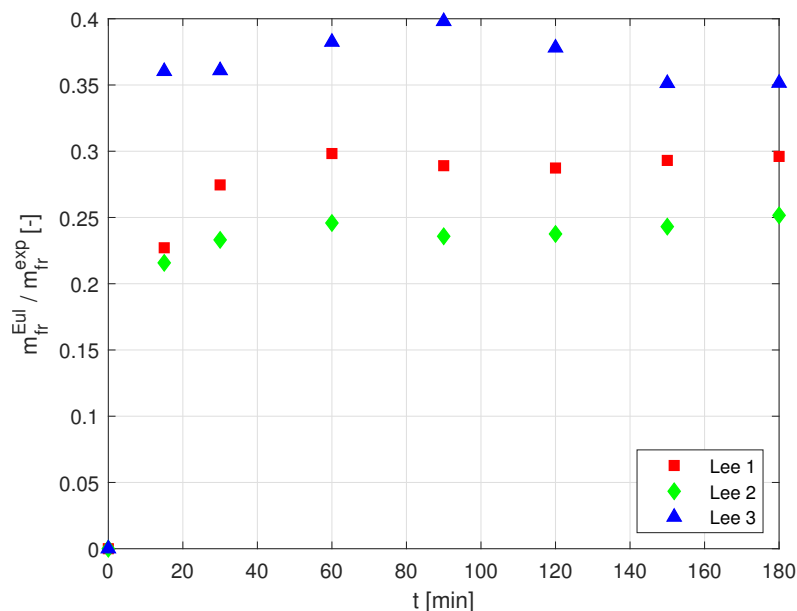
Je vidět že výsledky hmotnosti 1D modelu v případech Lee 1 až Lee 3 se od experimentu příliš neliší. Jejich procentuální odchylka je maximálně 20 % a s rostoucím časem má spíše klesající tendenci. Naopak odchylka výsledků Eulerovského modelu od experimentu v případě hmotnosti námrazy je velmi vysoká. Z grafu 16 můžeme vidět, že činí více než 50 % z experimentálních dat. V případě Lee 3 je chyba hmotnosti námrazy podstatně menší než v předchozích dvou případech. Při srovnání s odchylkou tloušťky námrazy, graf 11, vidíme, že je odchylka hmotnosti opačným směrem od experimentu. V případě Lee 3 tloušťka podle Eulerovského modelu nejdále od experimentální, zatímco hmotnost je naopak k experimentální nejbližší. Odchylka hmotnosti podle modelu od hmotnosti podle experimentu má ve všech třech případech z počátku mírně rostoucí a později mírně klesající tendenci.

V grafu 15 si ještě můžeme všimnout, že hmotnost námrazy v případě Lee 2 je podstatně větší než v případě Lee 1. Tloušťka námrazy však byla o něco větší v případě Lee 1, viz graf 10. Je tomu tak v případě Eulerovského modelu, 1D modelu i experimentu. Z toho plyne, že v případě Lee 2 je výrazně větší hustota námrazy než v případě Lee 1.



Graf 15: Časový průběh hmotnosti námrazy podle Eulerovského modelu a experimentu pro Lee 1 až Lee

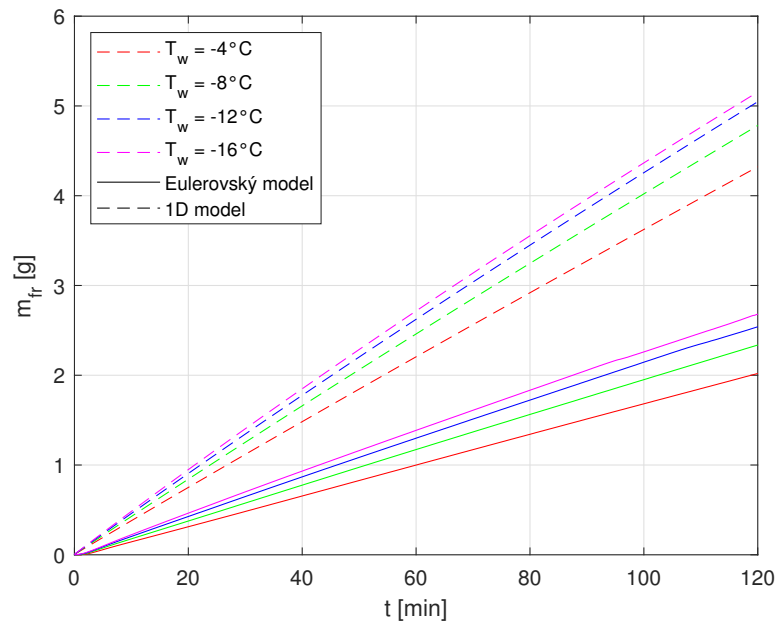
3



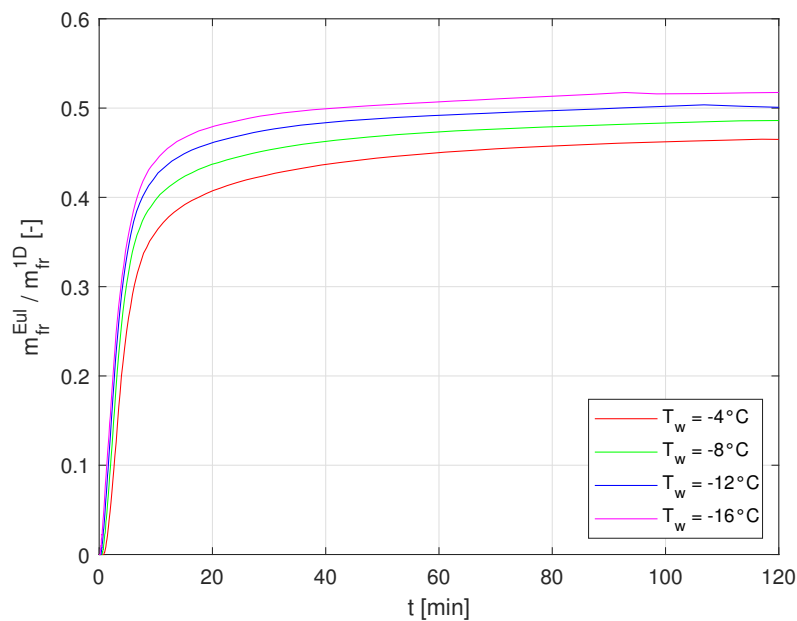
Graf 16: Časový průběh podílu hmotnosti námrazy z Eulerovského modelu m_{fr}^{Eul} a experimentu m_{fr}^{exp} pro Lee 1 až Lee 3

Jak již bylo řečeno, pro zbylé čtyři případy okrajových podmínek nejsou dostupná experimentální data pro hmotnost námrazy. V předchozích výsledcích jsme však viděli dobrou shodu průběhů hmotnosti z 1D modelu s experimentem. Proto v této části budeme srovnávat růst hmotnosti podle Eulerovského modelu s 1D modelem. Srovnání pro případy $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$ vidíme v grafu 17. Stejně jako v případech Lee 1 a Lee 3 jsou průběhy hmotnosti podle obou modelů lineární a Eulerovský model výrazně podhodnocuje hmotnost námrazy. Jak lze očekávat je dle obou modelů pro vyšší teploty namrzající desky T_w hmotnost vznikající námrazy menší. Při srovnání hodnot z jednotlivých modelů, viz graf 18, vidíme, že na začátku simulace poměrná odchylka hodnot prudce roste a později

je téměř konstantní. Výsledky Eulerovského modelu se od 1D modelu liší přibližně o 50 %, přičemž pro vyšší teploty namrzající desky T_w je odchylka větší.



Graf 17: Časový průběh hmotnosti námrazy podle Eulerovského modelu a 1D modelu pro $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$

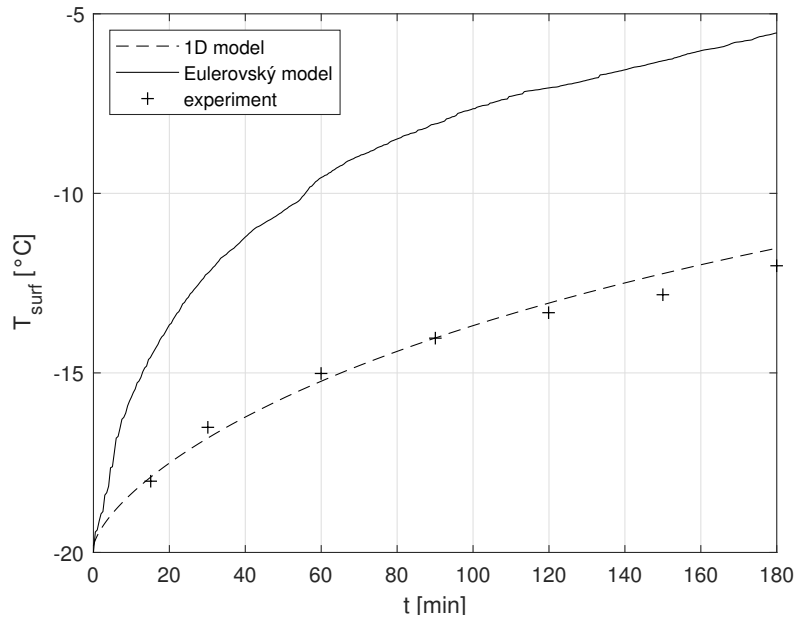


Graf 18: Časový průběh podílu hmotnosti námrazy z Eulerovského modelu m_{fr}^{Eul} a 1D modelu m_{fr}^{1D} pro $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$

4.2.3 Teplota povrchu námrazy

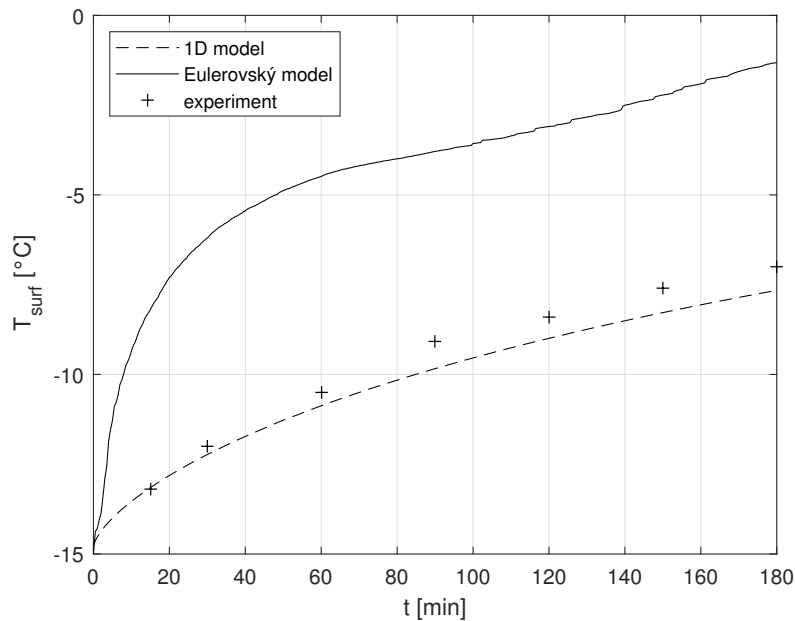
Pro okrajové podmínky Lee 1 až Lee 3 jsou dostupná experimentální data i pro teplotu povrchu námrazy. V grafu 19 vidíme srovnání průběhů povrchové teploty námrazy pro případ Lee 1 z obou modelů a experimentu. Jak lze očekávat, počáteční teplota

povrchu je podle obou modelů shodná s teplotou namrzající desky a během růstu námrazy povrchová teplota stoupá. Zároveň je podle očekávání vždy záporná. Pro případ 1D modelu se průběh téměř neliší od experimentu. Na druhou stranu teplota na povrchu námrazy podle Eulerovského modelu je výrazně vyšší.



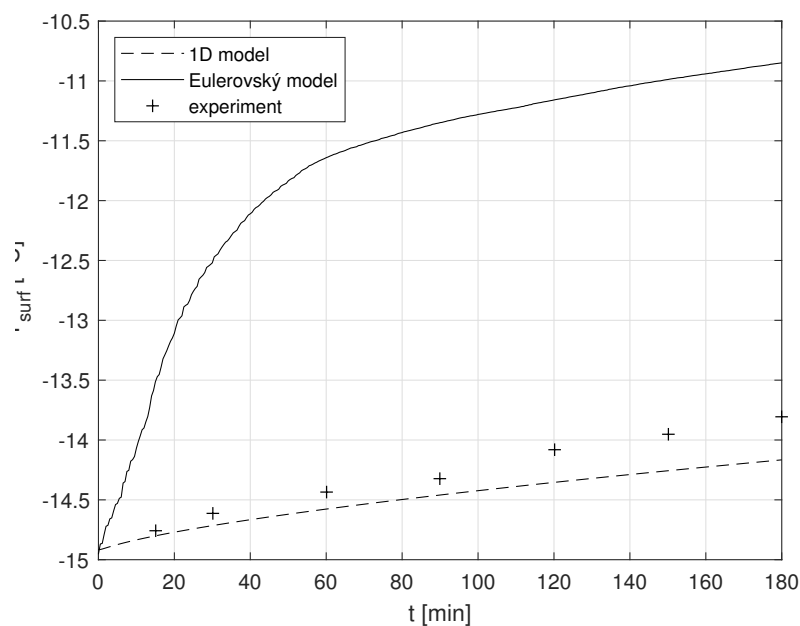
Graf 19: Časový průběh teploty povrchu námrazy pro případ Lee 1

V případě Lee 2 jsou výsledky podobné, viz graf 20, jako pro případ Lee 1. Povrchová teplota námrazy v čase $t = 0$ min je podle obou modelů rovna teplotě namrzající desky a v průběhu namrzání stoupá, což odpovídá očekávání. Shoda 1D modelu s experimentem je o něco horší než v předchozím případě, ale stále uspokojivá. Růst teploty je také podobně strmý jako v případě Lee 1. Podle Eulerovského modelu je povrchová teplota opět výrazně vyšší než dle druhého modelu a experimentu. Zároveň po zhruba 80 minutách simulace dochází dle Eulerovského modelu k nečekanému výraznějšímu zpomalení růstu povrchové teploty a později opět ke zrychlení.



Graf 20: Časový průběh teploty povrchu námrazy pro případ Lee 2

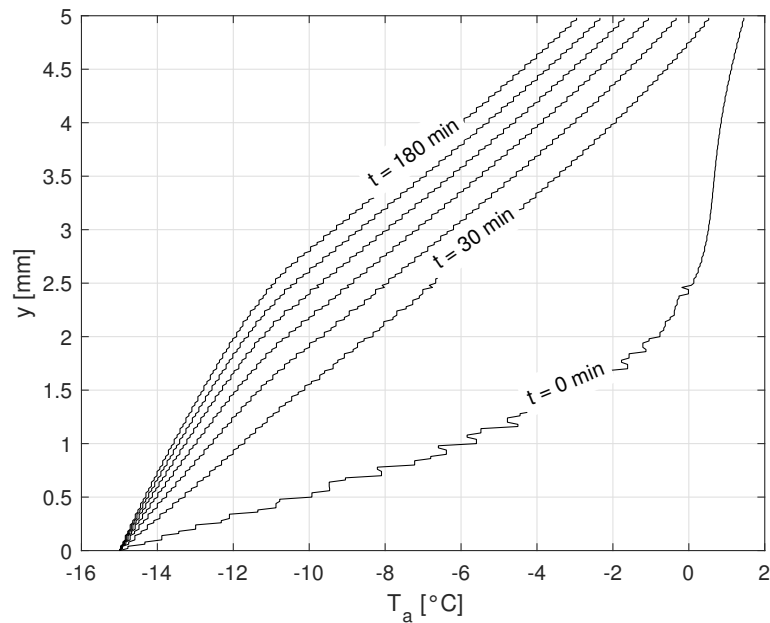
Pro třetí případ okrajových podmínek, Lee 3, vidíme výsledky v grafu 21. Počáteční hodnota a průběhy povrchové teploty opět odpovídají očekávání. Podle experimentu během růstu námrazy dochází jen k malému růstu teploty, výrazně menšímu než v případech Lee 1 a 2. Podle 1D modelu je nárůst teploty ve srovnání s experimentem o něco rychlejší, ale výsledky jsou stále blízké. Hodnoty povrchové teploty z Eulerovského modelu jsou podstatně vyšší než z experimentu. Tato odchylka je výrazně větší než v případech Lee 1 a Lee 2. Zatímco podle experimentu je v případě Lee 3 nárůst povrchové teploty po 180 minutách přibližně třetinový oproti případům Lee 1 a Lee 2, podle Eulerovského modelu je nárůst asi dvě třetiny.



Graf 21: Časový průběh teploty povrchu námrazy pro případ Lee 3

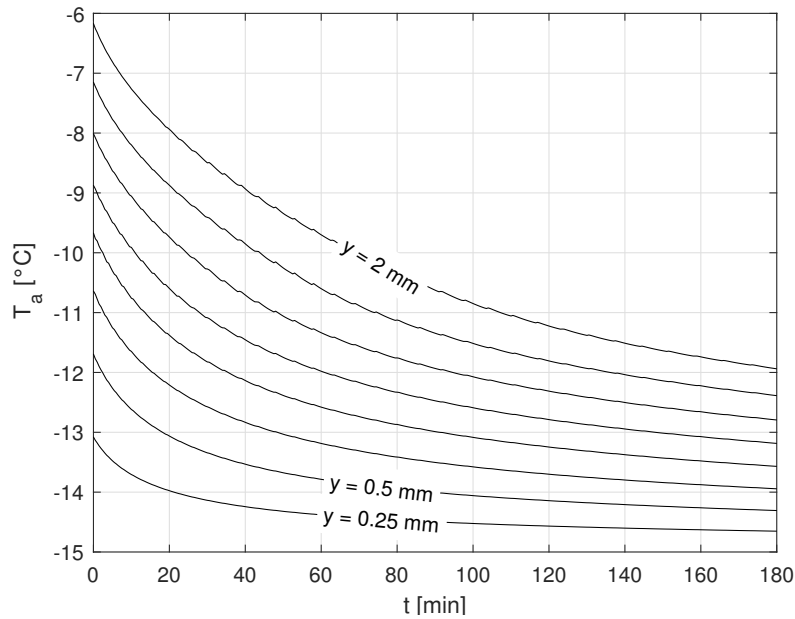
4.3 Vlastnosti Eulerovského modelu u namrzající desky

Pro lepší zhodnocení Eulerovského modelu se podíváme na chování významných veličin v uvnitř námrazy a v blízkosti. Jako modelový v této části použijeme případ okrajových podmínek Lee 3. Veličiny budeme zobrazovat v těžišti namrzající desky. Budeme zobrazovat průběhy veličin v čase, v různých vzdálenostech od namrzající desky y , a v závislosti na vzdálenosti od povrchu desky y pro různé časy.



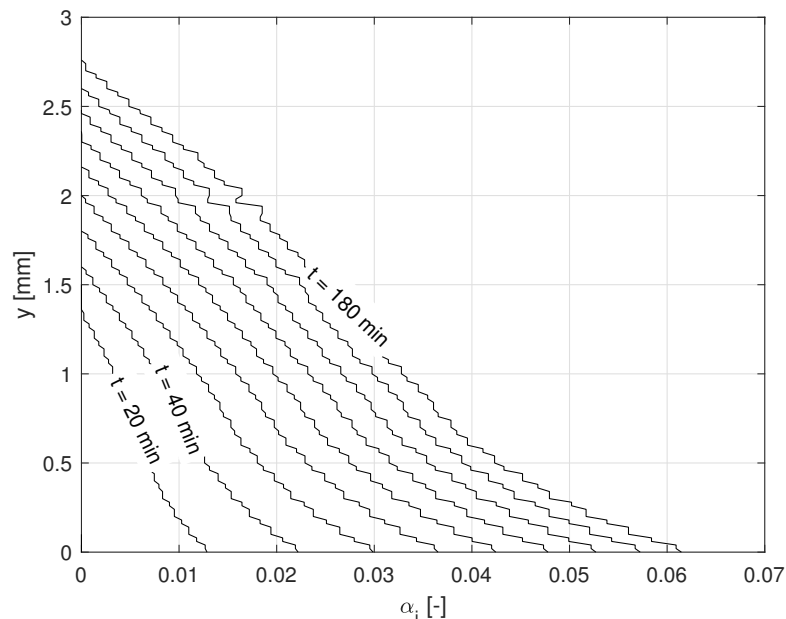
Graf 22: Závislost teploty vzduchu na vzdálenosti od namrzající desky v různých časech výpočtu

V grafu 22 vidíme průběhy teploty vzduchu T_a v závislosti na vzdálenosti od namrzající desky v různých časech výpočtu. Průběhy odpovídají očekávání. Je vidět, že teplota na povrchu desky je shodná s teplotou desky. S rostoucí vzdáleností od desky teplota klesá a přibližuje se vstupní teplotě proudu vzduchu. Blízko u desky, tedy uvnitř námrazy, klesá teplota přibližně lineárně, což odpovídá vedení tepla skrz stěnu. Od povrchu námrazy směrem od stěny odpovídá potom průběh teploty šíření tepla prouděním. Teplota byla zaznamenávána do vzdálenosti $y = 5$ mm od desky. Nicméně s větší vzdáleností by teplota vzduchu v každém čase dospěla do stejného bodu. Průběh teploty v čase $t = 0$ není hladký, jelikož zde proudění vzduchu ještě není ustálené, ale přibližně odpovídá průběhu teplot u přenosu tepla prouděním. Pro vyšší časy vidíme, že teplota postupně klesá a zlom mezi vedením a prouděním tepla se posouvá směrem od desky. To je v souladu s růstem tloušťky námrazy v čase.



Graf 23: Průběh teploty vzduchu v čase v různých vzdálenostech od chladného povrchu

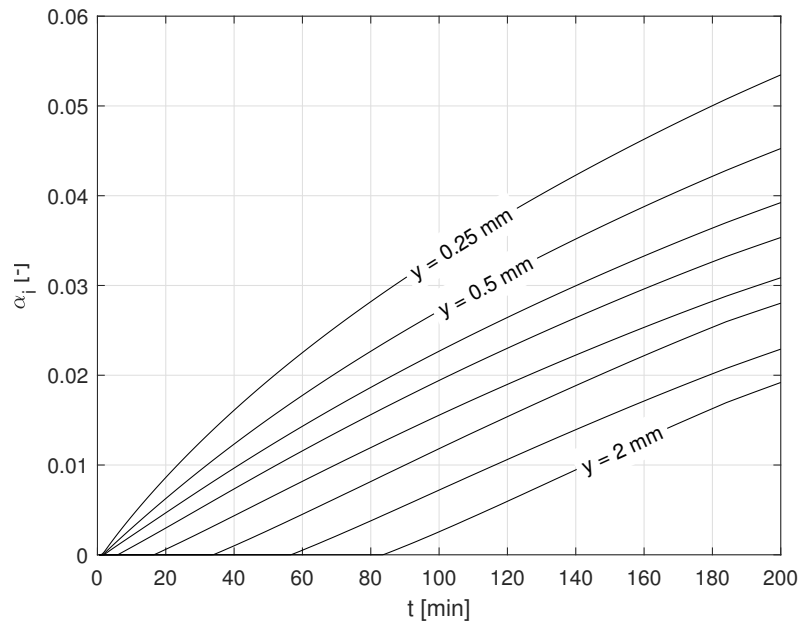
Závislost teploty vzduchu na čase v osmi bodech různě vzdálených od povrchu namrzající desky vidíme v grafu 23. Vidíme, že teplota ve všech bodech v čase klesá, což lze čekat vzhledem ke vznikající námraze a přítomnosti chlazené desky. Také vidíme že dále od desky je teplota vyšší, tedy vzdálenější teplotě namrzající desky a bližší teplotě okolního proudění.



Graf 24: Závislost objemového zlomku fáze ledu na vzdálenosti od namrzající desky v různých časech výpočtu

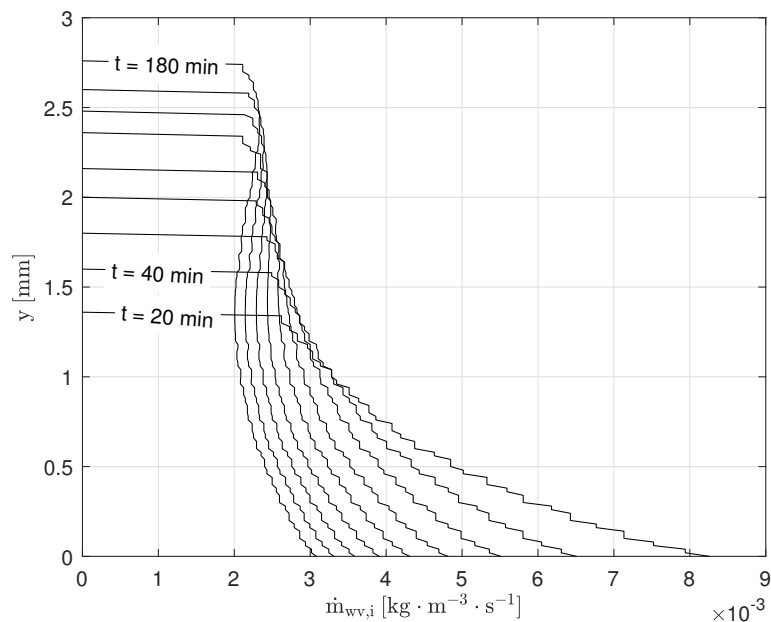
Další důležitou veličinou je objemový zlomek fáze ledu α_i , který je přímo úměrný hustotě námrazy ρ_{fr} . Podle očekávání by hmotnostní zlomek ledu měl v libovolném čase být vyšší blíže u namrzající desky a s rostoucím časem by měl stoupat. To potvrzuje graf 24. Zároveň

se led nevyskytuje ve větší vzdálenosti, než je tloušťka námrazy v daném čase. Lze proto z grafu vyčíst i tloušťku námrazy pro jednotlivé časy.



Graf 25: Průběh objemového zlomku fáze ledu v čase v různých vzdálenostech od chladného povrchu

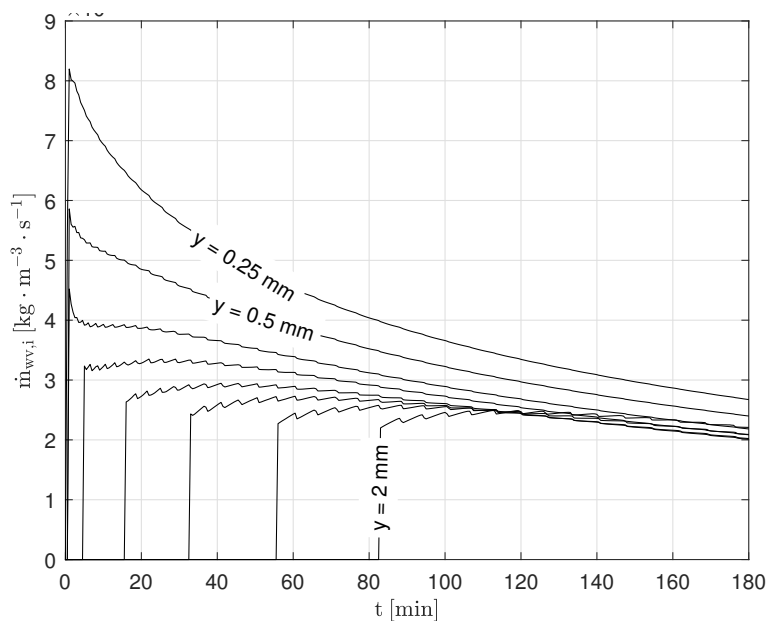
Z grafu 25 je opět vidět, že objemový zlomek ledu, tedy i hustota námrazy v jednotlivých bodech, s časem roste. Navíc vidíme, že růst hustoty se postupně zpomaluje. Hustota námrazy blíže u namrzajícího povrchu vyšší a z křivek se dá odhadnout, že tomu tak bude pro libovolný čas, což je v souladu s realitou.



Graf 26: Závislost hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu na vzdálenosti od namrzající desky v různých časech výpočtu

Hustota hmotnostního toku z vodní páry do ledu udává množství ledu, které v daném místě vzniká. Pokud je hustota toku nenulová, dochází k místnímu růstu hustoty námrazy.

Lze očekávat, že hustota hmotnostního toku z vodní páry do ledu $\dot{m}_{wv,i}$ v pevném bodě uvnitř námrazy bude s rostoucím časem klesat. Další vlastnosti nelze dobře odhadnout. Z grafu 26 vidíme, že pro velké vzdálenosti od namrzajícího povrchu je hustota hmotnostního toku nulová, nedochází zde tedy k růstu námrazy. Pro malé výpočetní časy má na namrzajícím povrchu hustota hmotnostního toku výrazné maximum a s rostoucí vzdáleností od povrchu klesá. To způsobuje rychlý nárůst hustoty námrazy v blízkosti namrzající desky. Pro vyšší časy se maximum na povrchu desky zmenšuje. Po delším čase je nejrychlejší růst hustoty námrazy blízko povrchu námrazy a na povrchu namrzající desky, zatímco nejpomalejší růst je přibližně uprostřed vrstvy námrazy.



Graf 27: Průběh hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu v čase v různých vzdálenostech od chladného povrchu

V grafu 27 vidíme, že čím jsme dále od namrzající desky, tím později zde vzniká nenulová hustota hmotnostního toku, tedy také námraza. Ve chvíli, kdy v daném bodě začne vznikat námraza, dojde k prudkému zpomalení proudění v tomto bodě, což je pravděpodobné důsledek počátečního mírného růstu hustoty hmotnostního toku ve všech vzdálenostech od namrzající desky. Dále již hustota hmotnostního toku ve všech vzdálenostech klesá dle očekávání.

4.4 Vyhodnocení výsledků

V částech 4.1 až 4.3 byly shrnuty výsledky Eulerovského a 1D modelu a jejich srovnání s dostupnými experimentálními daty z literatury pro sedm různých případů okrajových podmínek a popsáno chování Eulerovského modelu na vybraném případě. Dále se zaměříme na celkové hodnocení uvedených výsledků a možnosti zpřesnění jednotlivých modelů.

4.4.1 1D model

Výsledky 1D modelu, viz 4.2, vykazují dobrou shodu s experimentálními výsledky, a to především v případě hmotnosti námrazy. Tloušťka námrazy byla podle modelu vždy o něco menší než dle experimentu. Je třeba si však uvědomit, že 1D model počítá přímo pouze tloušťku a průměrnou hustotu námrazy. Hmotnost byla z těchto dvou veličin dopočítána. Jestliže tedy hmotnost vyšla shodně s experimentem a tloušťka menší, znamená to, že průměrná hustota podle modelu je větší než podle experimentu.

V případě 1D modelu jsou nepřesnosti ve výsledcích způsobeny především zjednodušeními, které jsme do modelu zavedli v části 2.2. Největší chybu pravděpodobně způsobuje to, že model počítá pouze se stavy na dvou rozhraních, povrchu chlazené desky a povrchu námrazy. Pro větší přesnost by bylo potřeba uvažovat průběžnou změnu stavu mezi těmito rozhraními. Tím by uvnitř námrazy vznikla závislost veličin na vzdálenosti od namrzající desky a v modelu by přibyly další diferenciální rovnice. Tím by se zvýšila složitost modelu i jeho řešení.

4.4.2 Eulerovský model

V části 4.1 byla provedena vizuální kontrola proudění podle Eulerovského modelu. Podle výsledků u náběžné hrany chlazené desky vzniká námraza o hustotě minimálně dvakrát větší než v ostatních částech desky. Jelikož však neznáme empirický průběh hustoty námrazy podél desky, nelze určit správnost tohoto jevu. Všechny ostatní veličiny se ve výpočetní oblasti, především v blízkém okolí namrzající desky, chovají podle očekávání. Rychlost ledu je v celé výpočetní oblasti nulová, díky čemuž můžeme simulovat vznik tuhé ledové struktury. V blízkosti desky vzniká nenulový hmotnostní tok z vodní páry do ledu, tím dochází k růstu hmotnostního zlomku ledu, a tedy vzniku námrazy. Výskyt námrazy potom ovlivňuje rozložení jednotlivých veličin v blízkosti desky. V námraze dochází k poklesu teploty, rychlosti a vlhkosti vzduchu.

Srovnání výsledků Eulerovského modelu s 1D modelem a experimentem se věnujeme v části 4.2. Jako referenční pro určení přesnosti modelu uvažujeme experiment, mimo případů s chybějícími experimentálními daty pro průběhy hmotnosti. Zde bereme jako referenční výsledky 1D modelu. Bylo zjištěno, že výsledky Eulerovského modelu jsou výrazně odlišné od experimentu. Ke zvýšení přesnosti zejména na začátku simulace by pomohlo uvažovat jako počáteční podmínky rozložení veličin vyvinutého proudění vzduchu s odpovídajícími okrajovými podmínkami na vstupu do výpočetní oblasti.

V části 4.3 jsme se věnovali pouze Eulerovskému modelu. Sledovali jsme teplotu prostředí, rychlost růstu námrazy a hustotu námrazy v blízkosti namrzající desky. Průběhy těchto

veličin jak v čase, tak v závislosti na vzdálenosti od desky nejsou nijak překvapující. Dále od desky celkově vzniká méně námrazy, tudíž je zde nižší hustota a teplota se vzdáleností od desky roste. V čase potom teplota v pevném bodě v blízkosti desky klesá, klesá také rychlost vzniku ledu a hustota stoupá, ale rychlost jejího růstu se s rostoucím časem zmenšuje.

Položme si nyní otázku, jak využít získané poznatky a výsledky Eulerovského modelu k jeho zpřesnění neboli k přiblížení jeho výsledků výsledkům experimentálním. V podkapitole 3.2.1 bylo řečeno, že součinitel popisující nárůst tloušťky námrazy B ovlivňuje, jak implikuje název, především růst tloušťky námrazy, zatímco relaxační součinitel času τ_{wv} ovlivňuje převážně růst hustoty. Ten má vliv především na růst hustoty, a tudíž hmotnosti námrazy.

Podle výsledků snaze o zpřesnění modelu je třeba se zaměřit především na samotnou desublimaci. V části 3.2.1 jsme uvedli, že používáme dva empirické součinitele, součinitel popisující nárůst tloušťky námrazy B a relaxační součinitel času τ_{wv} . Ten má vliv především na růst hustoty, a tudíž hmotnosti námrazy. Jelikož jde o empirické součinitele, nelze jejich hodnotu stanovit teoreticky. Pro zpřesnění modelu by bylo vhodné otestovat jeho citlivost na změnu těchto součinitelů a také na změnu okrajových podmínek s konstantními součiniteli. Zároveň by bylo potřeba získat dostatečné množství experimentálních dat, ze kterých by se dala určit citlivost vlastností námrazy (tloušťky, hustoty a povrchové teploty námrazy) na změnu jednotlivých okrajových podmínek. Okrajovými podmínkami je v obou případech myšlena rychlost, vlhkost a teplota proudu vzduchu a teplota chlazené desky. Pro každou okrajovou podmínku a součinitel (pouze v případě modelu) by bylo vhodné otestovat alespoň čtyři různé hodnoty. Na základě důkladné analýzy výsledků modelu a experimentu by se potom daly získat korelace pro τ_{wv} a B vhodnější než korelace použité v této práci, viz rovnice 2.36 a 2.38.

Dále je třeba upozornit na fakt, že hlavním důvodem nepřesnosti modelu nemusí být pouze použité korelace pro τ_{wv} a B . Ze vztahu 2.37, resp. 3.11, který definuje oblast a rychlost růstu námrazy, plyne, že na vznik růst námrazy má výrazný vliv také místní teplota, viz část 3.2.1 na konci. Z výsledků srovnání povrchové teploty námrazy mezi modelem a experimentem v části 4.2 je vidět, že hodnoty jsou v případě Eulerovského modelu výrazně vyšší. Jelikož je uvnitř námrazy průběh teplot ve směru kolmém k namrzajícímu povrchu lineární, znamená to, že dle modelu je teplota všude uvnitř námrazy vyšší než při experimentu. To může vést k pomalejšímu růstu hustoty námrazy a tím k její menší hmotnosti ve srovnání s experimentem. Zároveň je však možné, že pokud by v Eulerovském modelu došlo k rychlejšímu růstu hustoty námrazy vlivem změny empirických součinitelů, zvýšila by se tím tepelná kapacita námrazy, a tudíž snížila teplota uvnitř i na jejím povrchu. To je jeden z důvodů, proč je ke zpřesnění modelu potřeba zjistit citlivost vlastností proudění vzduchu a vrstvy námrazy na změny součinitelů τ_{wv} a B a okrajových podmínek.

5 Závěr

V této práci byly nejprve popsány základní fyzikální principy a poznatky související se vznikem a růstem námrazy, jako pevné porézní struktury. Tomuto tématu se věnuje část 2.1. Dále se práce věnuje formulaci, implementaci a výsledkům 1D modelu a Eulerovského modelu simulujících tvorbu námrazy na rovné chlazené desce.

V části 2.2 byl na základě bilance tepla a hmoty uvnitř rostoucí vrstvy námrazy formulován jednorozměrný model růstu námrazy, v práci označovaný jako 1D model. Model simuluje růst námrazy na povrchu rovné chlazené desky. Jeho formulace vychází z [6]. Tloušťka a hustota námrazy jsou v modelu nezávislé na souřadnicích rovnoběžných s namrzající deskou. Uvažovaný jeden rozměr je tedy směr kolmý na namrzající povrch. Model také neuvažuje hmotnostní a tepelnou bilanci uvnitř rostoucí vrstvy námrazy, ale pouze na jejím povrchu. V důsledku toho je hustota námrazy nezávislá na prostorové souřadnici. Díky nezávislosti na prostorové souřadnici je 1D model tvořen pouze třemi rovnicemi 3.1, 3.2 a 3.3, z nichž první dvě jsou obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. V opačném případě by výrazně vzrostl jak počet diferenciálních rovnic, tak jejich složitost.

1D model byl úspěšně implementován v jazyce MATLAB. Implementaci modelu se věnuje část 3.1, kde byly v části 3.1.1 shrnuty již zmíněné tři základní rovnice modelu, 3.1 až 3.3. Dále, v části 3.1.2, byly uvedeny vztahy použité pro výpočet vlastností vzduchu a námrazy. Poslední část, 3.1.3, se věnuje okrajovým a počátečním podmínkám, které byly použity pro výpočty. Počáteční podmínky pro hustotu a tloušťku námrazy byly zvoleny dostatečně malé, podle [17], aby neměly vliv na řešení po několika minutách simulace. Okrajové podmínky byly zvoleny podle experimentálních studií [4] a [15], aby výsledky výpočtů bylo možné porovnat s experimentálními daty. Celkově bylo provedeno sedm různých výpočtů, tři s okrajovými podmínkami z [15] a čtyři s podmínkami z [4].

Druhý způsob simulace tvorby námrazy, kterému se práce věnuje je simulace s využitím komerčního CFD softwaru STAR-CCM+. V tomto softwaru není přítomen model desublimace. Proto byl použit Eulerovský vícefázový model o dvou fázích (vlhký vzduch a led), který byl nastaven tak, aby jedna složka simulovala proud vlhkého vzduchu a druhá složka pevnou porézní strukturu námrazy. Model desublimace byl následně v softwaru do modelu doplněn pomocí uživatelských funkcí. Bilančním rovnicím Eulerovského modelu a přidanému modelu desublimace se věnuje část 2.3. Část 2.3.1 se zabývá bilancí hmoty Eulerovského modelu, do které byly doplněny členy pro přenos hmoty z vodní páry obsažené ve vzduchu do ledu. Tyto členy reprezentují desublimaci. Použití členů v bilančních rovnicích je v podstatě ekvivalentní s definováním propadu hmoty vodní páry a zdroje hmoty ledu.

V části 2.3.2 se práce věnuje bilanci tepla Eulerovského modelu. Bilanční rovnice byly doplněny o člen reprezentující latentní teplo uvolněné při desublimaci. Další část, 2.3.3, byla věnována bilanci hybnosti. Zde byl do rovnic zahrnut úbytek hybnosti vlhkého vzduchu vlivem ztráty hmoty při desublimaci. Do rovnice pro led byl navíc přidán člen výrazného odporu prostředí, aby se fáze ledu chovala jako porézní struktura. Vztahy definující oblast výskytu a rychlost desublimace byly formulovány na závěr, v části 2.3.4.

Eulerovskému modelu byla věnována také část 3.2. Implementace modelu desublimace a vztahy desublimaci popisující byly shrnuty v části 3.2.1. Pro testovací úlohy byly vybrány dva různé rozměry namrzající desky na základě [15] a [4]. Pro každý rozměr byla použita o něco jiná geometrie a síť, které byly uvedeny v části 3.2.2. Dále, v části 3.2.3 byly uvedeny okrajové podmínky použité pro jednotlivé výpočty. Stejně jako v případě 1D modelu, bylo provedeno sedm výpočtů, tři pro okrajové podmínky z [15] a čtyři z [4]. Základní numerické nastavení výpočtů bylo potom vysvětleno v části 3.2.4.

Kapitola 4 byla v práci věnována výsledkům a jejich vyhodnocení. Nejprve byla v části 4.1 provedena vizuální kontrola vlastností proudění ve výpočetní oblasti Eulerovského modelu. Bylo zkontrolováno rozložení rychlosti, teploty a vlhkosti vzduchu, hmotnostní tok z vodní páry do ledu, hustota námrazy a rychlost ledu. Podle výsledků vzniká u naběžné hrany chlazené desky námraza o hustotě minimálně dvakrát větší než v ostatních částech desky. Jelikož však neznáme empirický průběh hustoty námrazy podél desky, nelze určit správnost tohoto jevy. Rozložení ostatních kontrolovaných veličin splnilo očekávání.

Část 4.2 byla věnována srovnáním výsledků experimentu, 1D modelu a Eulerovského modelu pro shodné okrajové podmínky. Nejprve, v část 4.2.1, byla porovnána tloušťka námrazy v závislosti na čase pro sedm případů okrajových podmínek. Tloušťka podle 1D modelu vyšla ve všech případech menší než podle experimentu a její průběh v čase byl bližší lineárnímu. Podle Eulerovského modelu byl časový průběh tloušťky námrazy podobnější experimentu než v případě 1D modelu. Hodnoty tloušťky podle Eulerovského modelu byly ale pro různé okrajové podmínky posunuty různým směrem od experimentálních výsledků.

Dále byly porovnávány výsledné časové průběhy hmotnosti námrazy z jednotlivých modelů a experimentu, viz část 4.2.2. Podle 1D modelu vyšla hmotnost námrazy v některých případech téměř shodná s experimentálními výsledky a vždy se lišila o méně než 20%. Jelikož hmotnost byla v 1D modelu dopočítávána z hustoty a tloušťky námrazy, znamená to, že hustota námrazy dle modelu musela nutně vyjít větší, než by byla podle experimentu. V případě Eulerovského modelu byla hmotnost námrazy vždy o více než 50% menší než podle experimentu. Odchyłka byla podobně jako v případě tloušťky závislá na okrajových podmínkách.

Podobné chování jako hmotnost vykazovaly modely i v případě povrchové teploty námrazy, které byla věnována kapitola 4.2.3. Teplota podle 1D modelu vyšla velice podobně s experimentálními hodnotami. V případě Eulerovského modelu byla povrchová teplota námrazy výrazně vyšší než podle experimentu.

Část 4.3 byla věnována opět pouze Eulerovskému modelu. Byla v ní provedena kontrola vlastností vlhkého vzduchu a námrazy ve středu namrzající desky. Kontrolována byla závislost teploty vzduchu, objemového zlomku ledu a hustoty hmotnostního toku na čase a na vzdálenosti od desky. V jednotlivých průbězích se nevyskytly žádné nečekané jevy.

Poslední část práce, část 4.4, byla věnována vyhodnocení výsledků jednotlivých modelů a možností jejich zpřesnění. Nepřesnost výsledků 1D modelu vychází z uvažovaných zjednodušení při jeho zavedení. Pro zpřesnění Eulerovského modelu by bylo nutné provést další výpočty pro různé okrajové podmínky a získat více experimentálních dat pro porovnání.

V rámci této práce tedy byly popsány a implementovány dva modely popisující tvorbu námrazy na rovné desce, 1D model a Eulerovský model. 1D model byl implementován v jazyce MATLAB. Jeho výsledky při srovnání s experimentem jsou uspokojivé. Model podhodnocuje hustotu námrazy a nadhodnocuje její tloušťku. Díky tomu vyšla hmotnost námrazy téměř shodně s experimentálními výsledky. Průběh teploty povrchu námrazy také vykázal velmi dobrou shodu s experimentem. Jak již bylo řečeno, odchylky výsledků 1D modelu od experimentu jsou dány zjednodušeními, se kterými se počítalo při jeho formulaci.

Druhý model, který byl v práci popsán a implementován v softwaru STAR-CCM+ je Eulerovský model. Přesnost jeho výsledků ve srovnání s experimentem byla výrazně závislá na okrajových podmínkách. To bylo způsobeno použitými empirickými korelacemi pro součinitele definující oblast a rychlost tvorby námrazy. Model zároveň ve srovnání s experimentem značně podhodnocuje hmotnost vzniklé námrazy a nadhodnocuje teplotu jejího povrchu. Pokud bychom chtěli zvýšit přesnost modelu na základě dostupných experimentálních dat, bylo by vhodné zjistit citlivost hmotnosti a povrchové teploty námrazy na změnu použitých empirických součinitelů. Z výsledků by bylo možné určit vhodnější korelace pro součinitele. Pro další zpřesnění by bylo nutné získat více experimentálních dat a z nich určit citlivost vlastností námrazy na změnu okrajových podmínek. Zároveň by bylo třeba zjistit citlivost vlastností námrazy dle modelu na změnu okrajových podmínek a změnu empirických koeficientů. Rozborem získaných výsledků by bylo možné určit vhodné korelace pro empirické součinitele.

Důležitým závěrem této práce je, že Eulerovský model s doplněním modelu desublimace je možné použít k simulaci tvorby námrazy na chlazeném povrchu. Pro praktické využití

je nutné zvýšit přesnost modelu. V rámci práce byl uvažován pouze případ namrzání rovné desky, ale model je možné otestovat a použít i pro jiné geometrie. Potenciál jeho využití je tedy všude, kde může dojít ke vzniku námrazy. Příkladem jsou tepelné výměníky nebo jakákoli zařízení pracující v zimě ve venkovních podmínkách.

Literatura

- [1] Bell, C., (2. 1. 2013). *Hoar Frost and Rime Ice: What's the Difference?* [online]. [cit. 2018-12-18] Dostupné z: <https://cathybell.org/2013/01/02/hoar-frost-and-rime-ice-whats-the-difference/>
- [2] Piucco, R.O., Hermes, C.J.L., Melo, C., Barbosa J.R., (2008). *A study of frost nucleation on flat surfaces*. In: Experimental Thermal and Fluid Science 32, str. 1710-1715.
- [3] Mengjie Song, Chaobin Dang, (2018). *Review on the measurement and calculation of frost characteristics*. In: International journal of refrigeration 124, str. 586-614.
- [4] Hermes, C.J.L., Piucco, R.O., Barbosa, J.R., Melo, C., (2009). *A study of frost growth and densification on flat surfaces*. In: Experimental Thermal and Fluid Science 33, str. 371-379.
- [5] Lee J., Lee, K.S., (2018). *The behavior of frost layer growth under conditions favorable for desublimation*. In: International Journal of Heat and Mass Transfer 120, str. 259-266.
- [6] Brèque, F., Nemer, M., (2016). *Frosting modeling on a cold flat plate: Comparison of the different assumptions and impacts on frost growth predictions*. In: International journal of refrigeration 69, str. 340–360.
- [7] Na, B., Webb, R.L., 2004b. *Mass transfer on and within a frost layer*. In: International Journal of Heat and Mass Transfer 47, str. 899–911. j.ijheatmasstransfer.2003.08.023.
- [8] *Simcenter STAR-CCM+* [online]. [cit. 2020-11-10] Dostupné z: <https://docs.sw.siemens.com/documentation/external/PL20201113103827399/en-US/userManual/userguide/html/index.html>
- [9] Xiaomin Wu, Fuqiang Chu, Qiang Ma, (2017). *Frosting model based on phase change driving force*. In: International Journal of Heat and Mass Transfer 110, str. 760–767.
- [10] Afrasiabian, E., Iliev, O., Lazzari, S., Isetti, C., (2018). *Numerical Simulation of Frost Formation on a Plate Fin Evaporator*. In: Proceedings of the 3rd World Congress on Momentum, Heat and Mass Transfer (MHMT'18), str. 3789-3796.
- [11] Yonko, J.D., Sepsy, C.F., (1967). *An investigation of the thermal conductivity of frost while forming on a flat horizontal plate*. ASHRAE Trans. 1.1–1.11.

- [12] Bergman, T.L., Lavine, A.S., Incropera, F.P., Dewitt, D.P., (2011). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6. vyd. JohnWiley & Sons.
- [13] Auracher, H., (1972). *Water vapor diffusion and frost formation in capillaries*. In: Bulletin of the International Institute of Refrigeration, str. 477–488.
- [14] Datt, P. (2011) *Latent Heat of Sublimation*. In: Singh V.P., Singh P., Haritashya U.K. (eds) Encyclopedia of Snow, Ice and Glaciers. Encyclopedia of Earth Sciences Series. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-90-481-2642-2_329
- [15] Lee, K.S., Jhee, S., Yang, D.K., (2003). *Prediction of the frost formation on a cold flat surface*. In: International Journal of Heat and Mass Transfer 46, Paper No. ICMFHT 125.
- [16] (9. 5. 2019). *What are the recommended best practices while troubleshooting an Eulerian multi-phase simulation?* [online]. [cit. 2019-09-05] Dostupné z: https://support.sw.siemens.com/en-US/product/226870983/knowledge-base/KB000036416_EN_US?pid=sc%3Asearch&pid_context=What%20are%20the%20recommended%20best%20practices%20while%20troubleshooting%20an%20Eulerian%20multi-phase%20simulation&index=content-external&audience=external
- [17] Jones, B.W., Parker, J.D., (1975). *Frost formation with varying environmental parameters*. J. Heat Transfer 97, str. 255–259.

Seznam obrázků

Obrázek 2.1	Psychrometrické procesy tvorby námrazy [2]	11
Obrázek 2.2	Schéma vzniku a růstu krystalů námrazy [4]	12
Obrázek 2.3	Schéma procesu růstu námrazy - obecný model	13
Obrázek 2.4	Schéma procesu růstu námrazy - zjednodušený model	14
Obrázek 3.1	Rozložení výpočetní oblast s osou z v poměru 10:1 a částmi: A) vstupní průřez výpočetní oblasti, B) výstupní průřez výpočetní oblasti, C) spodní stěna kanálu, D) svrchní stěna kanálu, E) chlazená deska	27
Obrázek 3.2	Síť 1	28
Obrázek 3.3	Síť 2	28
Obrázek 4.1	Rozložení velikosti rychlosti vlhkého vzduchu u_a [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] v čase $t = 180 \text{ min}$	32
Obrázek 4.2	Rozložení teploty vlhkého vzduchu T_a [$^{\circ}\text{C}$] v čase $t = 180 \text{ min}$	32
Obrázek 4.3	Rozložení hmotnostního zlomku vodní páry ve vlhkém vzduchu w_{wv} [-] v čase $t = 180 \text{ min}$	33
Obrázek 4.4	Rozložení hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu $\dot{m}_{wv,i}$ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$] v blízkosti chlazené desky v čase $t = 180 \text{ min}$	33
Obrázek 4.5	Rozložení objemového zlomku ledu v prostoru α_i [-] v čase $t = 180 \text{ min}$	33
Obrázek 4.6	Rozložení hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu $\dot{m}_{wv,i}$ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$] v blízkosti chlazené desky v čase $t = 180 \text{ min}$	34
Obrázek 4.7	Rozložení objemového zlomku ledu v prostoru α_i [-] v čase $t = 180 \text{ min}$	34
Obrázek 4.8	Rozložení velikosti rychlosti fáze ledu u_i [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$] v čase $t = 180 \text{ min}$ (zobrazeno v původním poměru, bez měřítka)	34

Seznam tabulek

Tabulka 3.1	Okrajové podmínky podle experimentálních dat	25
Tabulka 3.2	okrajové podmínky podle experimentálních dat - Hermes	29
Tabulka 3.3	okrajové podmínky podle experimentálních dat - Lee	29
Tabulka 4.1	Okrajové podmínky - Lee 3	31
Tabulka 4.2	Okrajové podmínky s používaným označením	35

Seznam grafů

Graf 1	Časový průběh tloušťky námrazy pro případ $T_w = -4^\circ\text{C}$	36
Graf 2	Časový průběh tloušťky námrazy pro případ $T_w = -8^\circ\text{C}$	36
Graf 3	Časový průběh tloušťky námrazy pro případ $T_w = -12^\circ\text{C}$	37
Graf 4	Časový průběh tloušťky námrazy pro případ $T_w = -16^\circ\text{C}$	37
Graf 5	Časový průběh tloušťky námrazy podle Eulerovského modelu a experimentu pro $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$	38
Graf 6	Časový průběh podílu tloušťky námrazy z Eulerovského modelu δ_{fr}^{Eul} a experimentu δ_{fr}^{Exp} pro $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$	38
Graf 7	Časový průběh tloušťky námrazy pro případ Lee 1	39
Graf 8	Časový průběh tloušťky námrazy pro případ Lee 2	39
Graf 9	Časový průběh tloušťky námrazy pro případ Lee 3	40
Graf 10	Časový průběh tloušťky námrazy podle Eulerovského modelu a experimentu pro Lee 1 až Lee 3	41
Graf 11	Časový průběh podílu tloušťky námrazy z Eulerovského modelu δ_{fr}^{Eul} a experimentu δ_{fr}^{Exp} pro Lee 1 až Lee 3	41
Graf 12	Časový průběh hmotnosti námrazy pro případ Lee 1	42
Graf 13	Časový průběh hmotnosti námrazy pro případ Lee 2	42
Graf 14	Časový průběh hmotnosti námrazy pro případ Lee 3	43
Graf 15	Časový průběh hmotnosti námrazy podle Eulerovského modelu a experimentu pro Lee 1 až Lee 3	44
Graf 16	Časový průběh podílu hmotnosti námrazy z Eulerovského modelu m_{fr}^{Eul} a experimentu m_{fr}^{Exp} pro Lee 1 až Lee 3	44
Graf 17	Časový průběh hmotnosti námrazy podle Eulerovského modelu a 1D modelu pro $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$	45
Graf 18	Časový průběh podílu hmotnosti námrazy z Eulerovského modelu m_{fr}^{Eul} a 1D modelu m_{fr}^{1D} pro $T_w = -4^\circ\text{C}$ až $T_w = -16^\circ\text{C}$	45
Graf 19	Časový průběh teploty povrchu námrazy pro případ Lee 1	46
Graf 20	Časový průběh teploty povrchu námrazy pro případ Lee 2	47
Graf 21	Časový průběh teploty povrchu námrazy pro případ Lee 3	47
Graf 22	Závislost teploty vzduchu na vzdálenosti od namrzající desky v různých časech výpočtu	48
Graf 23	Průběh teploty vzduchu v čase v různých vzdálenostech od chladného povrchu	49
Graf 24	Závislost objemového zlomku fáze ledu na vzdálenosti od namrzající desky v různých časech výpočtu	49
Graf 25	Průběh objemového zlomku fáze ledu v čase v různých vzdálenostech od chladného povrchu	50

Graf 26	Závislost hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu na vzdálenosti od namrzající desky v různých časech výpočtu	50
Graf 27	Průběh hustoty hmotnostního toku z vodní páry do ledu v čase v různých vzdálenostech od chladného povrchu	51