

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**FAKULTA STROJNÍ**

**ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A  
MECHATRONIKY**

**Odbor pružnosti a pevnosti**



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Porovnání metod určení ohybové tuhosti navíjených  
nosníků**

2020

Michal Nepokoj

## Prohlášení

Tímto prohlašuji, že tvorba práce „Porovnání metod určení ohybové tuhosti navíjených nosníků“ proběhla samostatně pod vedením doc. Ing. Tomáše Mareše Ph.D. Použitá literatura je uvedena na konci této bakalářské práce.

V Praze dne 18.9. 2020



# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Nepokoj** Jméno: **Michal** Osobní číslo: **437696**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**  
Studijní obor: **bez oboru**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Porovnání metod určení ohybové tuhosti navíjených nosníků**

Název bakalářské práce anglicky:

**Comparison of methods of determination of bending stiffness of wound beams**

Pokyny pro vypracování:

1. Rešerše metod určení ohybové tuhosti navíjených nosníků
2. Určení ohybové tuhosti vybraných navíjených nosníků
3. Porovnání získaných tuhostí vzájemně a s výsledky MKP analýz
4. Závěr, komentáře, doporučení

Seznam doporučené literatury:

Doporučené diplomové práce

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **22.04.2020**

Termín odevzdání bakalářské práce: **07.08.2020**

Platnost zadání bakalářské práce:

doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.  
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

15.7.2020

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

## Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu této bakalářské práce doc. Ing. Tomáši Marešovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a trpělivost při tvorbě této práce. Rád bych také poděkoval rodičům za podporu a pomoc při studiu.

# Anotační list

<b>Jméno autora:</b>	Michal Nepokoj
<b>Název bakalářské práce:</b>	Porovnání metod určení ohybové tuhosti navíjených nosníků
<b>Anglický název:</b>	Comparison of methods of determination of bending stiffness of wound beams
<b>Akademický rok:</b>	2019/2020
<b>Obor studia:</b>	Teoretický základ strojního inženýrství
<b>Ústav/odbor:</b>	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti
<b>Vedoucí bakalářské práce:</b>	Doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.
<b>Bibliografické údaje:</b>	Počet stran: 34 Počet obrázků: 15 Počet tabulek: 7 Počet příloh: 2
<b>Klíčová slova:</b>	Kompozitní materiál, mechanika kompozitního materiálu, navíjený nosník, ohybová tuhost
<b>Keywords:</b>	Composite material, mechanics of composite materials, wound beam, bending stiffness
<b>Anotace:</b>	Práce se zabývá porovnáním metod pro výpočet ohybové tuhosti navíjených kompozitních nosníků metodami horního odhadu, dolního odhadu, matice ABD a modelu MKP.
<b>Abstract:</b>	This work presents comparison of methods for calculating bending stiffness of wound composite beams using methods of higher approximation, lower approximation, ABD Matrix and FEM model.

# Obsah

Seznam použitých symbolů .....	7
1 Úvod .....	9
2 Definice kompozitních materiálů a jejich vlastnosti .....	10
2.1 Částicové kompozity .....	11
2.2 Vláknové kompozity .....	11
2.3 Další druhy kompozitů .....	12
3 Popis anizotropních materiálů .....	13
3.1 Řazení anizotropních materiálů podle složitosti popisu .....	15
3.2 Moduly pružnosti .....	17
3.3 Transformace napětí a deformace .....	19
3.4 Kritéria pevnosti .....	21
3.4.1 Kritéria pevnosti z makromechanického hlediska .....	22
4 Porovnání analytických metod .....	23
4.1 Hashin-Shtrikmanovy meze .....	23
4.2 Výpočet pomocí ABD matice .....	25
4.3 Metoda konečných prvků .....	27
5 Vyhodnocení výsledků .....	28
5.1 Diskuze .....	33
6 Závěr .....	34
Seznam použité literatury .....	35
Seznam obrázků .....	36
Seznam tabulek .....	37
Seznam grafů .....	38
Seznam příloh .....	39

## Seznam použitých symbolů

Symbol	jednotka	název
$\sigma$	Pa	napětí
$S$	Pa	matice tuhosti
$\varepsilon$		deformace
$\sigma_{ij}$	Pa	napětí ve směru ij
$E_i$	Pa	Youngův modul pružnosti ve směru i
$\nu_{ij}$		Poissonovo číslo ve směru ij
$C$	$\text{Pa}^{-1}$	matice poddajnosti
$S_{ij}$	Pa	tuhost ve směru ij
$C_{ij}$	$\text{Pa}^{-1}$	poddajnost ve směru ij
$\varepsilon_{mL}$		deformace matrice ve směru L
$\varepsilon_{vL}$		deformace vlákna ve směru L
$\varepsilon_1$		deformace ve směru i
$\sigma_i$	Pa	napětí ve směru i
$A$	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	matice tahové tuhosti
$B$	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	matice vazební tuhosti
$D$	N	matice ohybové tuhosti
$G_{ij}$	Pa	modul pružnosti ve smyku
$V_v$		objemový podíl vlákna
$V_m$		objemový podíl matrice
$\Delta w$	m	posuv kompozitu ve směru T
$\Delta h_v$	m	posuv vláken ve směru T
$\Delta h_m$	m	posuv matrice ve směru T
$\sigma_{mP}$	Pa	napětí v matrici ve směru T
$\sigma_{vP}$	Pa	napětí ve vláknu ve směru T
$\sigma_P$	Pa	napětí ve směru T
$\sigma'$	Pa	transformované napětí
$T_\sigma$		transformační matice pro napětí
$\varepsilon'$		transformovaná deformace
$T_\varepsilon$		transformační matice pro deformaci
$N$	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$	matice výsledných sil na jednotku délky
$M$	N	matice momentů vztažených na jednotku délky
$u$	m	posuv
$F$	N	síla

Symbol	jednotka	název
$(EJ)_{eq}$	$N \cdot m^2$	ohybová tuhost
$l$	m	délka nosníku
$t$	m	tloušťka nosníku
$\gamma$		zkos
$F_{Lk}$	N	kritická síla, pro které dojde k porušení kompozitu
$F_{Lv}$	N	kritická síla, pro které dojde k porušení vlákna
$\sigma'_{Lm}$	Pa	napětí v matrici při kterém dojde k porušení vlákna
$\sigma'_{Lv}$	Pa	napětí ve vlákne při kterém dojde k porušení matrice
$F_{Lm}$	N	kritická síla, pro které dojde k porušení matrice
$k$		vektor křivosti střední vrstvy laminátu



# 1 Úvod

Popularita kompozitních materiálů ve strojírenství již od 70. let minulého století stabilně roste, a to převážně pro jejich vysoký poměr tuhosti a hmotnosti. Pro složitější geometrie a komplexnější aplikace těchto materiálů je výhodné mít k dispozici jinou možnost odhadu tuhosti těchto výrobků, než je experiment.

Zatímco pro izotropní materiály je odhad tuhosti poměrně přímočarý, u kompozitních materiálů tomu tak kvůli složitosti popisu materiálu bohužel není. Právě kvůli neizotropnosti kompozitních materiálů existuje několik metod, jak tuhost získat.

Právě pro jejich srovnání je vhodný případ navíjených nosníků, pro které je možné využít analytické metody, které se nehodí pro složitější geometrie.

V této práci je nejprve nastíněna obecná problematika kompozitních materiálů s důrazem na mechaniku kompozitů, která je dále využita v praktické části práce.

Ve 4. kapitole jsou podrobněji objasněny jednotlivé analytické metody. Tyto metody jsou dále využity v 5. kapitole pro vypočtení tuhosti reálných nosníků skládající se z různých kombinací materiálu, počtu vrstev a orientací vláken.

Cílem bakalářské práce je seznámit se s danou problematikou a porovnání jednotlivých metod analýzy ohybové tuhosti navíjených kompozitních nosníků.

V této práci jsou využity metody horního a dolního odhadu pomocí Hashin - Shtrikmanových mezí a ABD matic. Pro srovnání je také zahrnuta metoda konečných prvků s využitím skořepinového modelu.

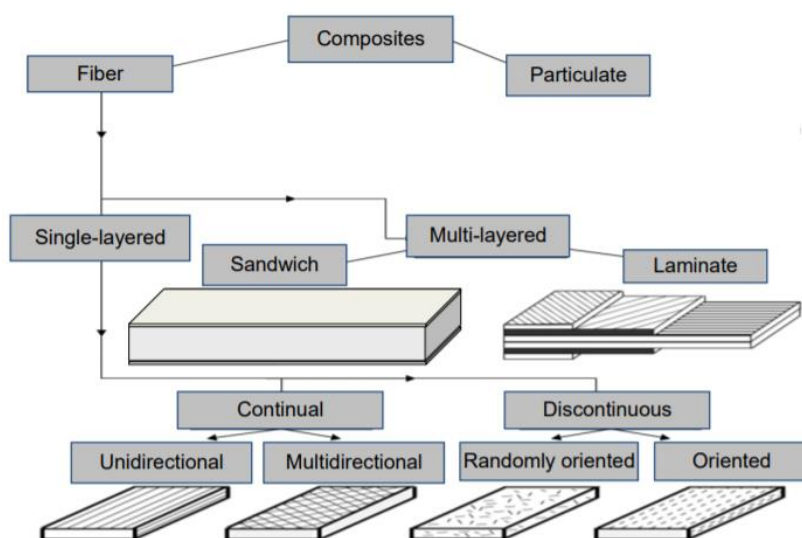
## 2 Definice kompozitních materiálů a jejich vlastnosti

Kompozitní materiál, nebo zkráceně kompozit, je obecný materiál složený ze dvou nebo více chemicky a fyzikálně rozdílných materiálů, díky jejichž geometrickému uspořádání vznikne materiál s výrazně jinými chemickými nebo fyzikálními vlastnostmi než materiály původní. [5]

Mezi kompozitní materiály lze zařadit například i beton, a proto můžeme říci, že se při stavbách využívají už tisíce let. První kompozitní materiály využívanými v moderním strojírenství byly materiály vyztužené skleněnými vlákny po roku 1940. Vědní oblast zabývající se mechanikou kompozitu, tak jak se jí zabývá tato práce, ale vznikla až po roce 1960. [5]

Oproti běžným materiálům je největší výhodou kompozitních materiálů jejich vysoký poměr nosnosti a hmotnosti. Toto tvrzení se může zdát příliš zjednodušené, ale je pravdivé pro drtivou většinu aplikací, kdy se ve strojírenství volí moderní kompozitní materiály. První měli o tyto materiály zájem především letecký, energetický a stavební průmysl. [5]

Nejčastěji ve strojírenství využívané kompozitní materiály jsou hlavně materiály z uhlíkových, aramidových, nebo skleněných vláken a bimetaly. Pro různé aplikace jsou vhodné různé geometrické struktury materiálů, jak je vidět na obr. 1.



Obr. 1: Druhy kompozitních materiálů [8]

## 2.1 Částicové kompozity

Částicové kompozity jsou materiály, které se skládají z matrice a částic, jejichž rozměry se příliš neliší jeden od druhého s výjimkou destiček. Částice se mohou podílet na přenosu namáhání, ale ne tak výrazně jako vláknové kompozity. Částice mohou mít různé tvary. Nejčastěji se využívají pro dosažení konkrétních mechanických vlastností, jako je odolnost proti opotřebení, snížení koeficientu tření, lepší tepelná, nebo elektrická vodivost. Z makroskopického hlediska se částicové kompozity dají považovat za izotropní materiál a zřídka se používají jako nosný materiál. Z těchto důvodů částicové kompozity v této práci nebudou dále zahrnuty. [9]

## 2.2 Vláknové kompozity

Pro většinu makroskopicky homogenních materiálů je pravdivé tvrzení, že jejich skutečná naměřená pevnost je mnohem menší než teoretická hodnota. Tento fakt je způsoben vrozenými nedokonalostmi materiálu. [7]



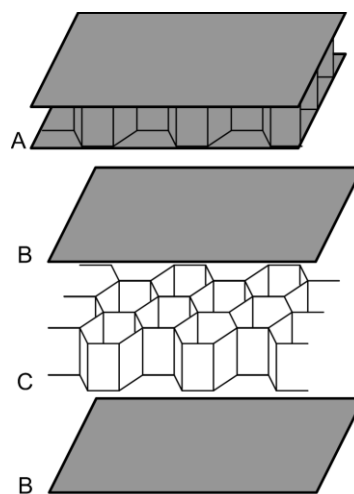
*Obr. 2: Navíjený kompozitní nosník [11]*

Pevnost snižují především vady typu trhlin, proto mají vlákna z polymerových, nebo plastových vláken mnohem lepší vlastnosti ve směru délky než stejný kompaktní materiál. Z důvodu malého průřezového rozměru jsou samotná vlákna nevhodná pro praktické účely, proto se využívají matricové materiály. Vláknové kompozity (obr. 2) jsou nejpoužívanější třídou kompozitů, protože dosahují vysokých pevností. Vláknové

kompozity můžeme rozdělit na jednovrstvé a mnohovrstvé, některé kompozity se skládají z více vrstev, které ale mají stejnou orientaci vláken, proto tento materiál můžeme uvažovat jako jednovrstvý. Jsou-li složky jednotlivých vrstev identické, nazývají se lamináty, jsou-li jednotlivé vrstvy z různých materiálů, nazývají se hybridními lamináty. Další dělení vláknových kompozitů, lze učinit podle délky vláken na dlouhvláknové a krátkovláknové (tato vlákna se také nazývají whiskery). Jako krátkovláknové kompozity můžeme uvažovat materiály, ve kterých musíme brát v úvahu délku vláken, u dlouhvláknových můžeme vlákna uvažovat jako kontinuální. Orientaci whiskerů nelze snadno řídit a využívají se i kompozity s nahodile orientovanými vlákny. Pro dlouhvláknové materiály jsou vlákna hlavním nosným materiálem. To je zapříčiněno výrazně vyšší tuhostí vláken oproti matrici. Matrice potom prakticky slouží jen jako ochrana a pojivo mezi vlákny. Kromě vysokého poměru pevnosti a hmotnosti, jsou vláknové kompozity přitažlivé i schopností řízené anizotropie. Té se využívá v aplikacích, kdy je známo, že materiál bude zatěžován jen specifickou silou. [7]

### 2.3 Další druhy kompozitů

Dále se kompozity dělí podle makro-struktury na lamináty a sendvičové kompozity. Sendvičové kompozity jsou stejně jako lamináty tvořeny z vrstev obsahující vláknové kompozity, navíc ale mají jádro, které je z lehkého materiálu a její hlavní funkcí je udržet konstantní vzdálenost, mezi vnějšími, nosnými vrstvami. Jako mezivrstva se nejčastěji používají pěny, lehké dřevo nebo voštiny. Voštiny (obr. 3) se skládají z vertikálních šestiúhelníků, které mohou připomínat plástve z včelího úlu. [8]

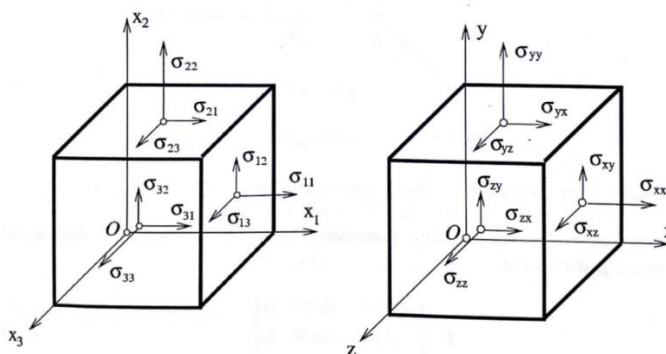


Obr. 3: Voštiny [11]

### 3 Popis anizotropních materiálů

Výpočty tuhosti kompozitních materiálů jsou znatelně složitější než pro ostatní materiály. Přestože většina materiálů jsou v mikroskopickém měřítku nehomogenní, z makroskopického hlediska je pro praktické účely jako homogenní (a zároveň i izotropní) uvažovat lze. Toto zjednodušení nám umožní charakterizovat materiál, co se reakce na obecnou vnější sílu týče, jen pomocí dvou veličin, a to jsou Poissonovo číslo a Youngův modul pružnosti v tahu. Pro analýzu obecného anizotropního materiálu si nevystačíme s jednoduchou skalární rovnicí, ale budeme muset využít maticový tvar Hookova zákona (1). Zde vystupuje matice tuhosti, která se bude lišit složitostí podle počtu rovin symetrie materiálu.

$$\sigma = S \cdot \varepsilon \quad (1)$$



Obr. 4: Systémy  $O(x_1, x_2, x_3)$ ,  $O(x, y, z)$  [1]

Stav napjatosti lze obecně vyjádřit tenzorem napětí. V systému  $O(x_1, x_2, x_3)$  (obr. 4) lze tenzor napětí v libovolném bodě P vyjádřit rovnicí (2). Z momentové rovnice rovnováhy elementu plyne, že napětí s opačným pořadím indexů se rovnají, proto je matice složek tenzoru symetrická.

$$\sigma(P) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Pokud pro vyjádření napětí a deformace použijeme tzv. Voigtův zápis, můžeme Hookeův zákon psát ve tvaru (4).

$$\sigma = S \cdot \varepsilon \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Kde  $\varepsilon$  je Voigtův vektor deformace a  $S$  je matice tuhosti. Matice tuhosti je stejně jako tenzor napětí pro každý materiál symetrická. [3] Pro každý materiál existuje i matice poddajnosti  $C$  (7), která je maticí inverzní k matici tuhosti.

$$\varepsilon = C \cdot \sigma \quad (5)$$

$$C = S^{-1} \quad (6)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (7)$$

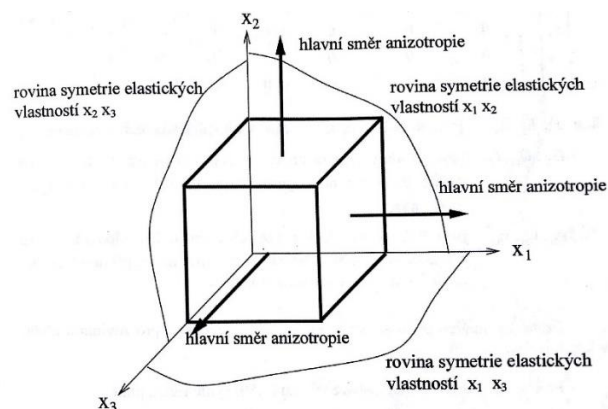
### 3.1 Řazení anizotropních materiálů podle složitosti popisu

Pro zcela anizotropní materiál mají tenzory napětí, deformace, matice tuhosti a poddajnosti 21 nezávislých proměnných. V případech, kdy existuje alespoň jedna rovina symetrie elastických vlastností se množství nezávislých proměnných výrazně sníží.

Kompozitní materiály zkoumané v této práci, budou mít 3 roviny symetrie, a proto bude počet potřebných proměnných pro charakteristiku materiálu o poznání menší. Počet nezávislých proměnných je uveden v následující tabulce. Tabulka č. 1 byla převzata ze zdroje [1].

Druh materiálu	Počet nezávislých konstant
Anizotropní materiál	21
Materiál s jedinou rovinou symetrických vlastností	13
Ortotropní materiál	9
Příčně izotropní materiál (hexagonální) viz obr. 5	5
Pseudoizotropní materiál (kubický)	3
Izotropní materiál	2

Tab. 1: Počet nezávislých konstant [1]



Obr. 5: Ortotropní materiál [1]

Ortotropní materiál je materiál, jehož každým bodem procházejí tři navzájem kolmé roviny symetrie. Hookův zákon (5) lze potom s využitím konstant pružnosti přepsat do (8). [1]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & G_{23}^{-1} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13}^{-1} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

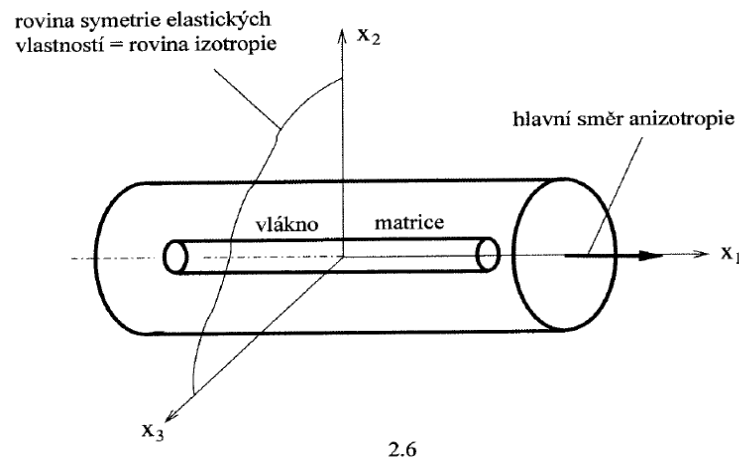
V tomto případě jsou charakteristiky  $E_1, E_2, E_3$  nazývány Youngovy moduly pružnosti v hlavních směrech anizotropie,  $G_{23}, G_{13}, G_{12}$  moduly pružnosti ve smyku a  $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{31}$  jsou Poissonova čísla. U všech konstant jsou indexy odpovídající příslušným rovinám symetrie. [1]

Díky symetrii matice poddajnosti můžeme tvrdit, že:

$$-\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}; \quad -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}; \quad -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_2} \quad (9)$$

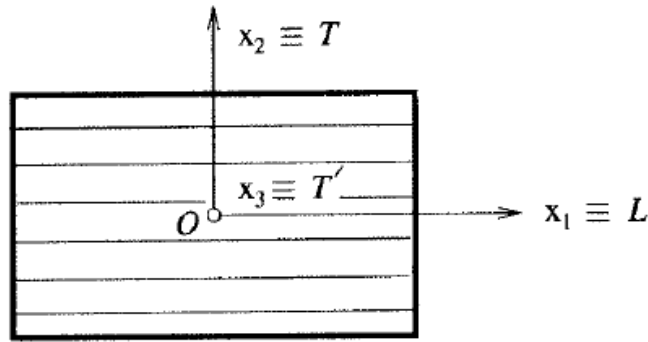
Z čehož vyplývá že z 6 poissonových čísel jsou nezávislé jen 3 a celkový počet proměnných potřebných pro popis ortotropního materiálu je 9. [1]

Pro některé kompozitní materiály můžeme pro usnadnění výpočtu využít další vlastnost a tou je příčná izotropie (Obr. 6). Hlavní směr anizotropie je v tomto případě určen osou  $x_1$  a rovina izotropie rovinou  $x_2, x_3$ . [1]



Obr. 6: Příčně izotropní materiál [1]





Obr. 7: Grafické znázornění směrů LTT' [1]

Z těchto vlastností plyne, že:

$$E_2 = E_3 \quad (10)$$

$$G_{12} = G_{13} \quad (11)$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} \quad (12)$$

Po dosazení do rovnice (8) je patrné, že k úplnému popisu příčně izotropního materiálu je třeba 5 nezávislých proměnných. Tento popis materiálu je vhodný pro zkoumání vlastností navíjených kompozitních nosníků, které se skládají z tenkých lamin, a proto budou další konstitutivní vztahy vztaženy na tento zjednodušený případ. Směr vláken  $x_1$  bývá často označován jako směr L a směry  $x_2, x_3$  jako směry T a T' (obr. 7).

### 3.2 Moduly pružnosti

Jak bylo nastíněno v minulé kapitole, příčně izotropní materiál je popsán pěti materiálovými charakteristikami. Tento materiálový popis vychází z předpokladu, že matrice a vlákno jsou pevně spojeny a chovají se jako lineárně elastický materiál. Vlákno má vlastní modul pružnosti  $E_v$  a matrice  $E_m$ . Dojde-li k plastizaci některého z materiálů, nebo k oddělení, tyto předpoklady selhávají. [4]

Pro výpočet podélného modulu pružnosti  $E_L$  (Obr. 8) vycházíme z předpokladu, že matrice i vlákna se deformují společně a jejich deformace se rovnají. [4]

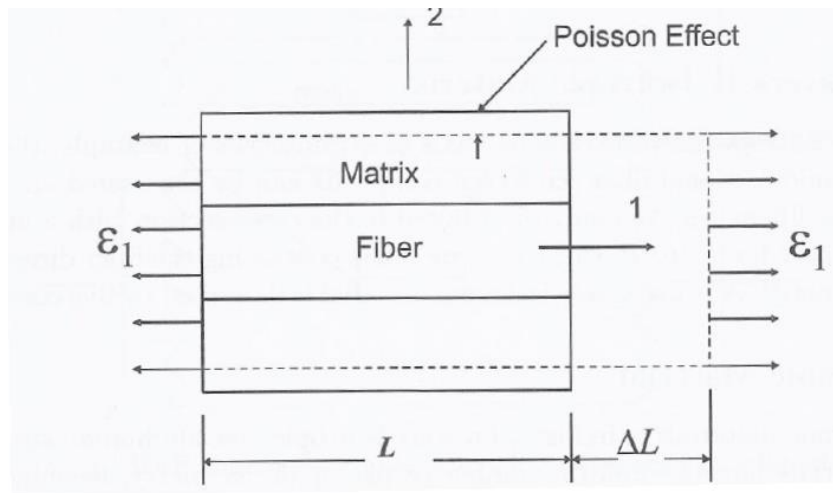
$$\varepsilon_{mL} = \varepsilon_{vL} = \varepsilon_1 \quad (13)$$

V tom případě můžeme tvrdit, že:

$$E_L = V_v \cdot E_v + V_m \cdot E_m \quad (14)$$

Kde  $V_m$  a  $V_v$  jsou objemové podíly vláken a matrice, pro které platí (15). [4]

$$V_v + V_m = 1 \quad (15)$$



Obr. 8: Schéma kompozitního materiálu pro definici  $E_L$  [4]

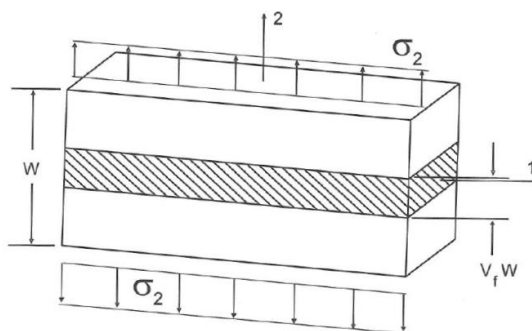
Pro výpočet příčného modelu pružnosti  $E_T$  (Obr. 9) využijeme podmínky rovnosti napětí, která plyne ze silové rovnováhy jednotlivých vrstev mezi sebou (16).

$$\sigma_{mP} = \sigma_{vP} = \sigma_P \quad (16)$$

Změna příčného rozměru je tedy (17) a z toho vyplývá (18). [4]

$$\Delta w = \Delta h_v + \Delta h_m \quad (17)$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_v}{E_v} + \frac{V_m}{E_m} \quad (18)$$



Obr. 9: Schéma kompozitního materiálu pro definici  $E_T$  [4]

Modul pružnosti matrice bývá z pravidla řádově menší než modul pružnosti vlákna. Lze proto tvrdit, že  $E_T$  je závislé především na modulu pružnosti matrice  $E_m$ . [4]

### 3.3 Transformace napětí a deformace

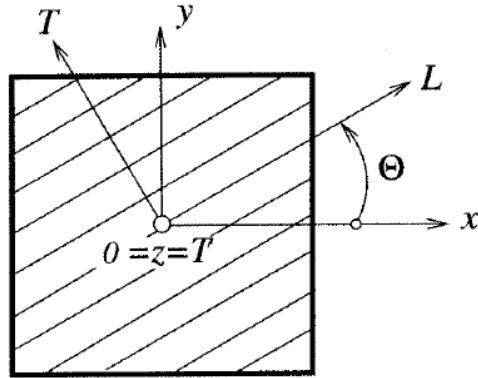
Většina navíjených kompozitních nosníků se skládá z několika vrstev. Tyto vrstvy se často shodují v materiálech, ze kterých jsou vyrobeny, ale liší se úhlem, pod kterým jsou tyto vrstvy navíjeny, proto je nutné transformovat vlastnosti materiálu z původního systému souřadnic  $LTT'$  do námi zvoleného systému  $xyz$  (obr. 10). [1]

Jak bylo řečeno v minulé kapitole, v této práci budeme pracovat s laminami, které jsou zatěžovány rovinnou napjatostí, a proto budeme dále pracovat s předpokladem, že napětí ve směru  $T'$  jsou rovny nule.

Pro tento zjednodušený případ lze Hookeův zákon zapsat rovnicí (20) a k popisu takového materiálu jsou třeba 4 charakteristiky,  $E_L, E_T, G_{LT}$  a  $\nu_{LT}$ .

$$\nu_{LT} = \nu_{TL} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & \frac{1}{E_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} \quad (20)$$



Obr. 10: Znáornění systémů souřadnic LTT a xyz [1]

Obecně lze transformaci napětí popsat následujícími vztahy. [1]

$$\sigma' = T_{\sigma} \cdot \sigma \quad (21)$$

Pro výše zmíněné rovinné napětí, lze napsat (21).

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Obdobně lze psát i pro transformaci rovinné deformace (22).

$$\varepsilon' = T_{\varepsilon} \cdot \varepsilon \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta \\ -2\sin \theta \cdot \cos \theta & 2\sin \theta \cdot \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Při dosazení (23) a (21) do vyjádřené rovnice pro tuhost S z již známé rovnice (3) dostáváme ()

$$S' = T_{\sigma}^{-1} \cdot S_{LT} \cdot T_{\varepsilon} \quad (25)$$

Obdobně lze tvrdit pro transformaci matice poddajnosti.

$$C' = T_{\varepsilon}^{-1} \cdot C_{LT} \cdot T_{\sigma} \quad (26)$$

### 3.4 Kritéria pevnosti

Pro kompozitní materiály je kromě Youngova modulu pružnosti na orientaci vláken závislá i mez pevnosti. K této problematice lze přistoupit buď z mikro, nebo makromechanického hlediska. [1]

Při podélném namáhání jednosměrného kompozitu platí deformační podmínka (27), kde  $\varepsilon_{Lm}$  je poměrná deformace matrice,  $\varepsilon_{Lv}$  je poměrná deformace vlákna a  $\varepsilon_{Lk}$  je poměrná deformace kompozitu. [1]

$$\varepsilon_{Lm} = \varepsilon_{Lv} = \varepsilon_{Lk} \quad (27)$$

Potom pro celkové napětí v kompozitu platí (28), kde  $\sigma_{Lm}$  a  $\sigma_{Lv}$  jsou napětí v matrici a vláknech,  $\sigma_{Lk}$  je celkové napětí v materiálu,  $V_m$  a  $V_v$  jsou objemové podíly matrice a vláken v kompozitu. [1]

$$\sigma_{Lk} = \sigma_{Lm}V_m + \sigma_{Lv}V_v \quad (28)$$

Při výpočtu pevnosti musíme počítat s možností dvou případů, viz tab. 2. Veličiny s horním indexem  $m$  jsou jejich mezní tahové hodnoty.  $F_L$  jsou hodnoty pevnosti v tahu pro kompozit, vlákna a matrici,  $\sigma'_{Lm}$  je napětí v matrici při kterém dojde k porušení vlákna, nebo naopak  $\sigma'_{Lv}$  je napětí ve vláknech, při kterém dojde k porušení v matrici. [1]

$\varepsilon_{Lm}^m < \varepsilon_{Lv}^m$	$F_{Lk} = F_{Lv}V_v + \sigma'_{Lm}V_m$
$\varepsilon_{Lm}^m > \varepsilon_{Lv}^m$	$F_{Lk} = F_{Lm}V_m + \sigma'_{Lv}V_v$

Tab. 2: Tahová pevnost kompozitu [1]

### 3.4.1 Kritéria pevnosti z makromechanického hlediska

V případě izotropických materiálů se problematika pevnosti při obecném zatížení řeší různými způsoby. Obecně se dá říct, že se snažíme jednou z metod získat redukované napětí, které potom srovnáváme s hodnotou mezi pevnosti. Při volbě metody musíme brát ohled především na křehkost materiálu. Potom máme na výběr z metod jako třeba podmínka největších smykových napětí, podmínka největšího normálového napětí, podmínka hustoty deformační energie, Mohrova podmínka pevnosti, nebo podmínka maximálního poměrného prodloužení.

Podmínky pevnosti kompozitních materiálů jsou upravené varianty podmínek předchozích. Většina těchto podmínek vychází z předpokladu, že materiál je homogenní, v úvahu je jen měnící se pevnost v závislosti na úhlu natočení vláken. Následující přehled kritérií byl převzat z [1].

#### 1. Neinteraktivní kritéria

Pro tyto kritéria se nebere v úvahu existence vazby mezi složkami jednotlivých napětí.

- a. Kritérium maximálního napětí
- b. Kritérium maximální deformace

#### 2. Interaktivní kritéria

- a. Hillovo kritérium pevnosti
- b. Tsai-Hillovo kritérium pevnosti

## 4 Porovnání analytických metod

Cílem této práce je porovnat některé z analytických metod pro získání ohybové tuhosti kompozitních navíjených nosníků. Efektivita těchto metod byla vyhodnocena na příkladu vetknutého nosníku mezikruhového průřezu zatíženého bodovou silou  $F$  na jeho konci.

Při experimentu byly využity nosníky, jejichž délka byla zřetelně větší než jejich ostatní rozměry. Proto předpokládáme, že můžeme zanedbat vliv smyku a pro průhyb v místě působení síly platí (29). [3]

$$u = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (29)$$

Kde:

$l$  - délka nosníku [m]

$F$  - působící bodová síla [N]

$E$  - Youngův modul pružnosti [Pa]

$J$  - kvadratický moment průřezu [ $m^4$ ]

$$u = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot (EJ)_{eq}} \quad (30)$$

V této práci chceme ověřit správnost některých analytických metod získáním ohybové tuhosti  $(EJ)_{eq}$ , aby pro kompozitní nosník platilo (30).

### 4.1 Hashin-Shtrikmanovy meze

První dvě metody využití k získání ekvivalentu ohybové tuhosti nosníku  $(EI)_{eq}$  jsou spolu úzce spjaté. Jedná se o odhad ohybové tuhosti.

- Z matice tuhosti – horní odhad
- Z matice poddajnosti – dolní odhad

V přechodných kapitolách byly zavedeny matice tuhosti  $S$  (4) i poddajnosti  $C$  (7).

Po transformaci potom pro každou vrstvu  $i$  z  $n$  vrstev získáváme transformované  $S^i$  (31) a  $C^i$  (32).

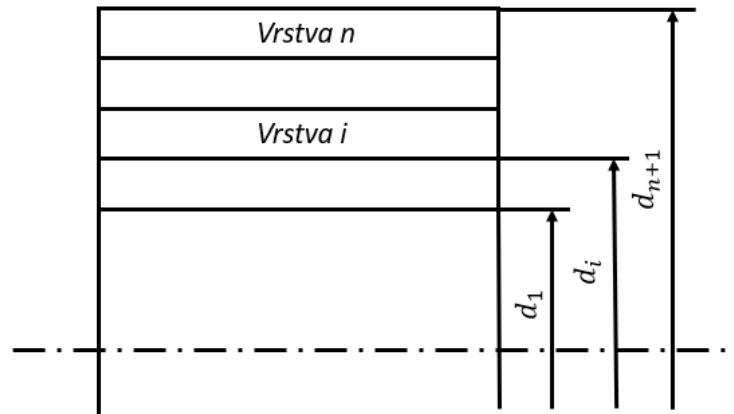
$$S^i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{12} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$C^i = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{12} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Do následujících výpočtů potom vstupují pouze hodnoty ve směru osy nosníku, tedy tuhost  $S_{11}^i$  a poddajnost  $C_{11}^i$  pro vrstvu  $i$ .

Pro vrstvu  $i$  potom platí (33), kde  $d$  jsou průměry podle obr. 11.

$$J_i = \frac{\pi \cdot d_{i+1}^4}{64} \cdot \left( 1 - \left( \frac{d_i}{d_{i+1}} \right)^4 \right) \quad (33)$$



Obr. 11: Definice průměrů  $d_i$  pro libovolný nosník o  $n$  vrstvách

Ohybová tuhost nosníku dle metody horního odhadu je potom podle vztahu (34).

$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^n S_{11}^i \cdot J_i \quad (34)$$

Pro tuhost nosníku dle metody dolního odhadu platí obdobně (35).

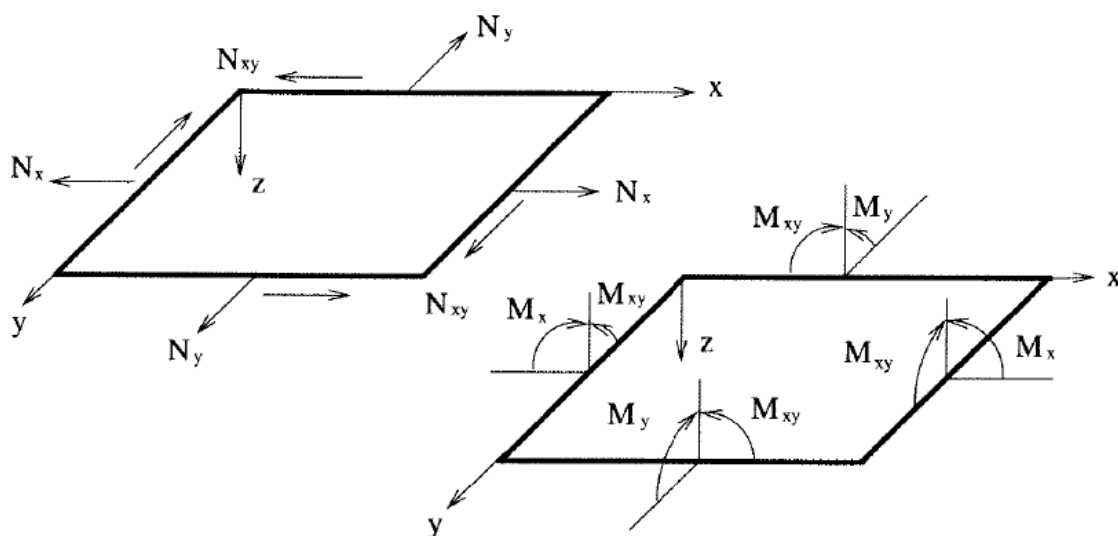
$$(EI)_{eq} = \sum_{i=1}^n \frac{J_i}{C_{11}^i} \quad (35)$$

Do této matice tedy vstupuje natočení každé z vrstev nosníku  $\alpha$ , tloušťka každé z vrstev nosníku a materiálové charakteristiky zavedené v kapitole 3.3. Do výpočtu tedy nevstupuje délka nosníku, či velikosti zatěžovací síly.



## 4.2 Výpočet pomocí ABD matice

Tato metoda vychází z klasické laminační teorie, která popisuje vztah mezi silami a momenty působícími na laminu a poměrnými deformacemi, zkosity a křivostmi (36). Podrobné rozepsání v (37). [4] Tato práce vychází z klasické laminační teorie, odvození lze naléznout např. v uvedeném zdroji [1].



Obr. 12: síly a momenty působící na laminu

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0^m \\ k \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (37)$$

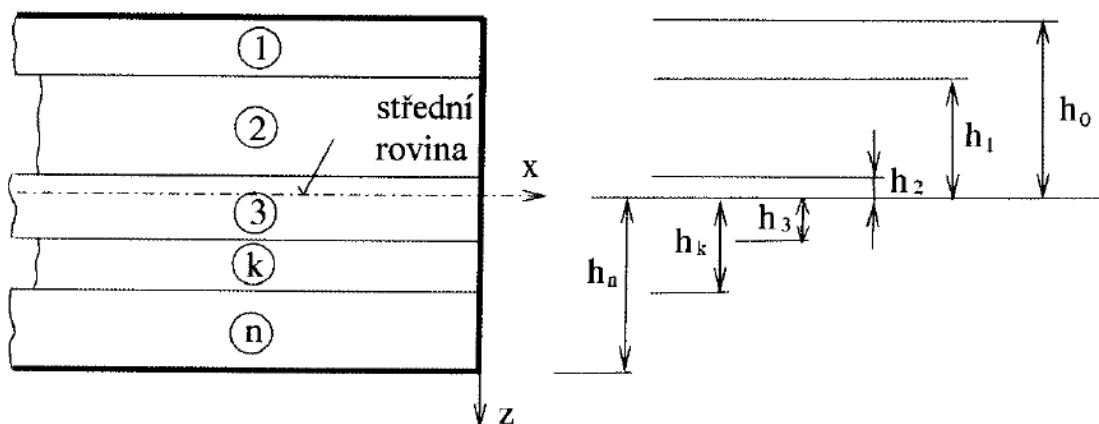
A je matice tahové tuhosti, B je matice vazební tuhosti a D je matice ohybové tuhosti,  $\varepsilon_0^m$  značí poměrné deformace ve střední rovině a  $k$  je vektor křivost plochy průřezu. Pro uvedené matice tuhosti platí následující vztahy. [6]

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k - h_{k-1}) \quad (38)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (39)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (40)$$

V těchto vztazích vystupuje vzdálenost  $h_k$ , která je znázorněna na obr.12. [1]. Vzdálenost  $h$  je tedy vzdálenost od střední roviny každé z rovin.



Obr. 13: Definice  $h_i$  pro libovolný nosník [1]

V našem případě předpokládáme rovinnou napjatost a matice B je tedy nulová. Pro získání  $(EJ)_{eq}$  tedy vycházíme pouze z matice A. V tom případě tedy vycházíme z rovnice (41).

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} \quad (41)$$

Z této rovnice vyplývá (42).

$$N_1 = \left( A_{11} - [A_{12} \quad A_{13}] \cdot \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \right) \cdot \varepsilon_1 \quad (42)$$

Jak vyplývá z klasické laminační teorie, rozměr síly  $N_1$  je  $[Nm^{-1}]$ . Pro získání napětí (43) a po sléze i Youngova modulu pružnosti (44) je třeba pravou stranu rovnice vydělit tloušťkou laminátu  $t$ . [4]

$$\sigma_1 = \frac{1}{t} \left( A_{11} - [A_{12} \quad A_{13}] \cdot \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \right) \cdot \varepsilon_1 \quad (43)$$

$$E = \frac{1}{t} \left( A_{11} - [A_{12} \quad A_{13}] \cdot \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} \right) \quad (44)$$

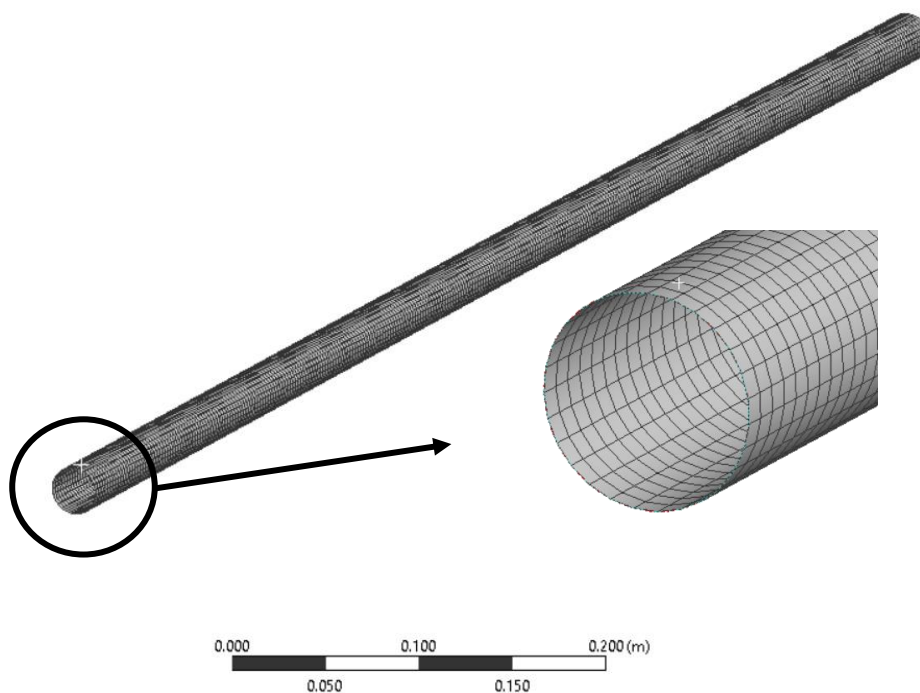
Pro získání  $(EJ)_{eq}$  potom využijeme stejný postup jako v kapitole 4.1.

### 4.3 Metoda konečných prvků

Tato práce by nebyla úplná bez srovnání s výsledky z analýzy metody konečných prvků. Pro výrobky složitější geometrie, než je ta uvažovaná v této práci může být MKP jediná možnost odhadu ohybové tuhosti. Proto je vhodné na jednoduchých nosnících ukázat, jak tato metoda ob stojí ve srovnání s analytickými metodami.

Pro srovnání je zvolena konvenční metoda využívající skořepinový model v prostředí ANSYS. V předchozích metodách do výpočtu nevstupovala délka nosníku ani síla, která na nosník působí. V tomto případě byla zvolena délka nosníku  $l = 1 \text{ m}$ , která by měla být dostatečná, aby zajistila, že dominantní posuv konce nosníku bude způsoben ohybem a smyková tuhost bude zanedbatelná. Síla zatížení byla zvolena  $F = 1 \text{ N}$ , která by naopak měla být dost nízká, aby v nosnících nedošlo k plastizaci.

Velikost každého z elementů je asi 3 mm, celý výpočetní model má potom asi 9000 elementů.



Obr. 14: Výpočetní síť MKP a její detail

## 5 Vyhodnocení výsledků

Pro referenci byly využity data z experimentu, které se naměřily při tvorbě článku [2] na Fakultě strojní ČVUT. V této práci jsou s těmito výsledky srovnány metody horního a dolního odhadu, ABD matic a metoda konečných prvků. Pro srovnání bylo vybráno jedenáct nosníků, které se liší počtem vrstev, materiály i orientací vláken. Data převzata z [2] jsou v tabulkách 4, 5 a 6. Nosníky 1-5 v tabulce 5 jsou skladby podélné, nosníky 6-11 v tabulce 6 jsou skladby napříčkové.

	$E_L$ [GPa]	$E_T$ [Gpa]	$G_{LT}$ [GPa]	$\nu_{LT}$ [-]
t700_50_epoxy_50	118.9	4.7191	3.1	0.343
xn60_50_epoxy_50	317.4	3.5897	2.963	0.373
xn80_50_epoxy_50	390.9	3.5897	2.963	0.373
xn90_50_epoxy_50	431.4	3.5897	2.963	0.373
ums40_50_epoxy_50	198.9	4.7	3.1	0.35

Tab. 3: Tabulka využitých materiálu a jejich vlastností [2]

Nosník č.	1	2	3	4	5
materiál	t700	xn80	xn90	ums40	xn60
t1 [mm]	0.24	0.29	0.27	0.27	0.33
t2 [mm]	0.55	0.57	0.47	0.55	0.67
alfa1 [°]	87.3	86.1	87.9	88.8	88.2
alfa2 [°]	0	0	0	0	0
D [mm]	26	26	26	50	50

Tab. 4: tabulka skladeb nosníků 1-5

Nosník č.	6	7	8	9	10	11
materiál	t700	xn80	xn90	t700	ums40	xn60
t1 [mm]	0.24	0.29	0.27	0.24	0.27	0.33
t2 [mm]	0.1175	0.1375	0.135	0.1025	0.1225	0.1825
t3 [mm]	0.1175	0.1375	0.135	0.1025	0.1225	0.1825
t4 [mm]	0.1175	0.1375	0.135	0.1025	0.1225	0.1825
t5 [mm]	0.1175	0.1375	0.135	0.1025	0.1225	0.1825
alfa1 [°]	87.3	86.1	87.9	88.6	88.8	88.2
alfa2 [°]	45.3	45.5	45.4	44.5	44.5	44.6
alfa3 [°]	-45.3	-45.5	-45.4	-44.5	-44.5	-44.6
alfa4 [°]	-45.3	-45.5	-45.4	-44.5	-44.5	-44.6
alfa5 [°]	45.3	45.5	45.4	44.5	44.5	44.6
D [mm]	26	26	26	50	50	50

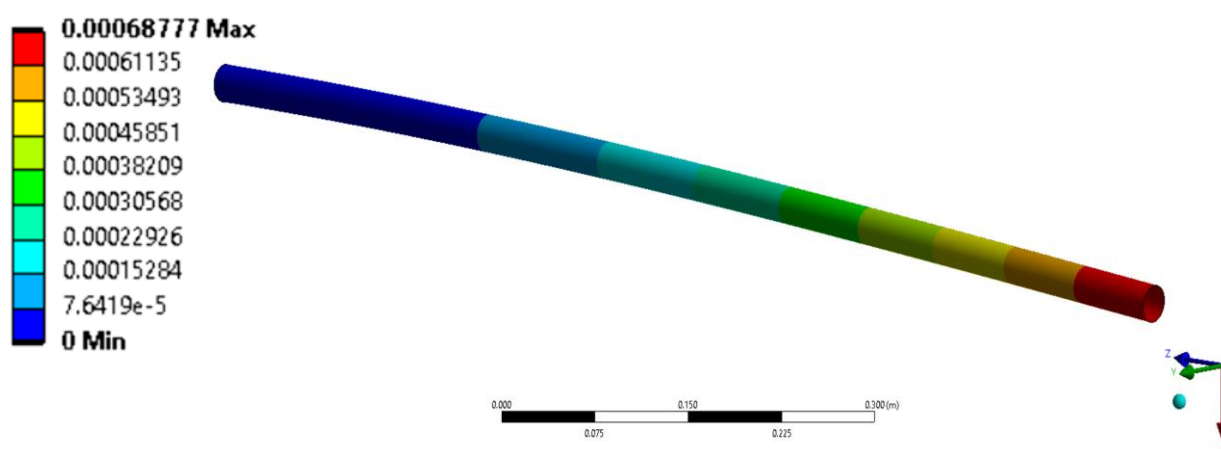
Tab. 5: Tabulka skladeb nosníků 6-11

Pro první tři metody byl vytvořen skript v jazyce Python 3.7 za využití knihoven numpy a math. Skript je rozdělen do dvou souborů. První *FCE\_bak\_nepok.py* obsahuje funkce, které se opakují pro každý nosník a napříč metodami. Tento soubor slouží jako knihovna pro hlavní soubor *MAIN\_bak\_nepok.py*, který obsahuje výpočetní algoritmus a vstupní data pro všechny nosníky a materiály. Po spuštění hlavního souboru se v kmenové složce vytvoří soubor .csv s tabulkou s výsledky. Tyto skripty jsou součástí přílohy A.

Metoda MKP byla řešena v programu ANSYS 2020 R2 pomocí skořepinové sítě. Z rovnice (30) byla vyjádřena  $(EJ)_{eq}$  v závislosti na posuvu  $u$ . Jako vstup byl použit posuv ve směru zátěžné síly. Na obr. 15 je ukázka výsledku simulace nosníku č. 1. Tato simulace je součástí přílohy B.

**B: Static Structural**

Directional Deformation  
 Type: Directional Deformation(X Axis)  
 Unit: m  
 Global Coordinate System  
 Time: 1  
 9/15/2020 9:12 PM



Obr. 15: Výsledky analýzy MKP, průhyb ve směru působící síly

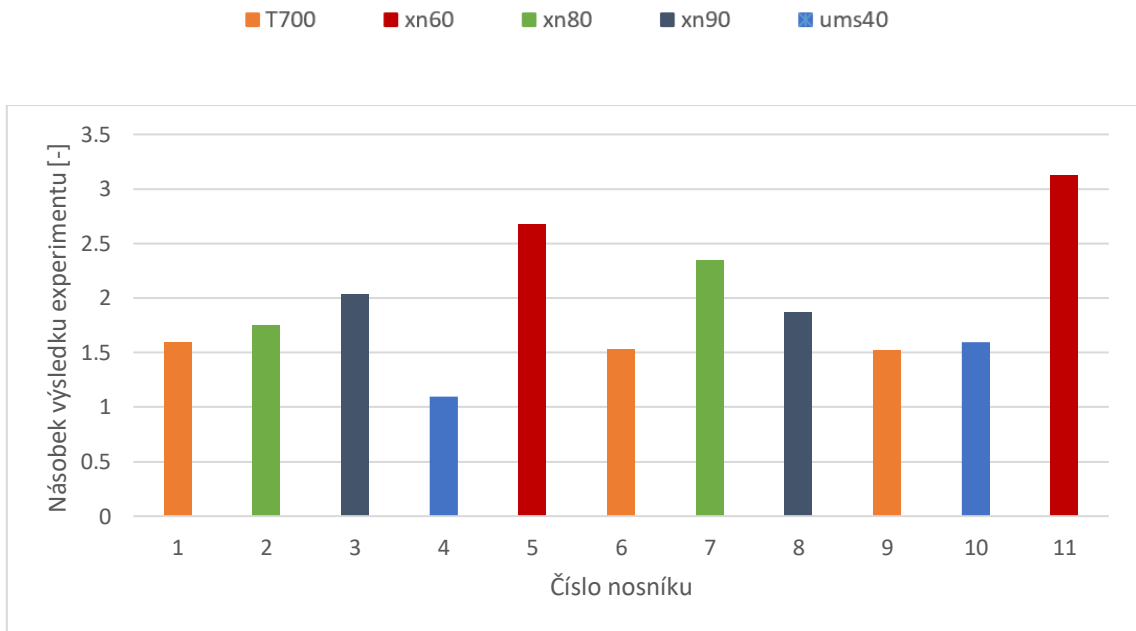
Nosník č.	1	2	3	4	5
Horní odhad [ $Nm^2$ ]	517.8	1761.6	1578.2	5809.6	11373.5
Dolní odhad [ $Nm^2$ ]	515.4	1759.3	1576.3	5792.8	11355.5
ABD matice [ $Nm^2$ ]	504.7	1707.3	1532.5	5720.2	11160.4
Experiment [ $Nm^2$ ]	324.59	1009.5	774.84	5303.6	4247.7

Tab. 6: Tabulka výsledků pro nosníky 1-5

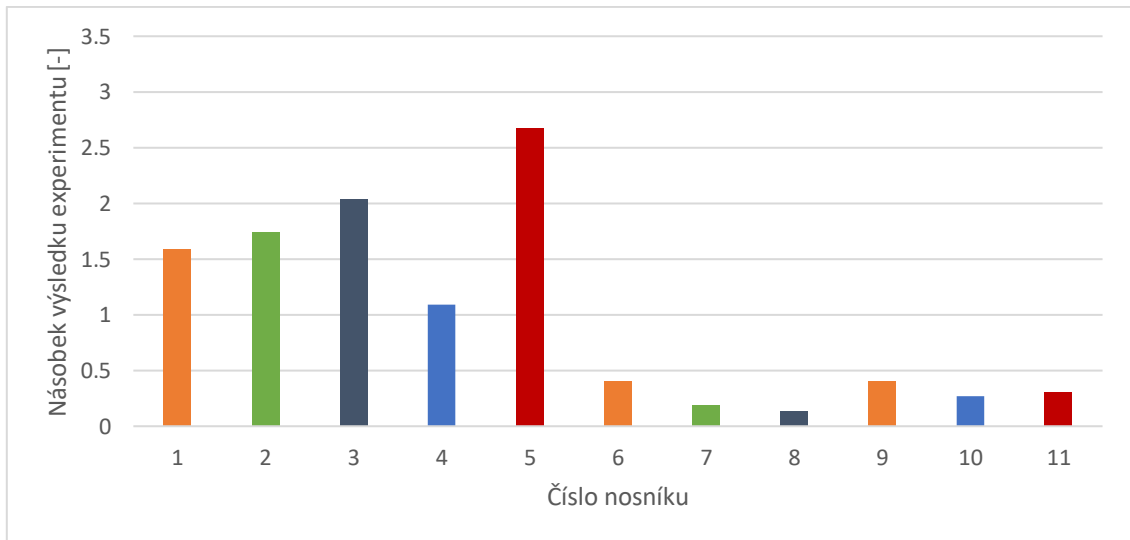
Nosník č.	6	7	8	9	10	11
Horní odhad [ $Nm^2$ ]	132.3	434.8	468.4	820.1	1513.1	6110.3
Dolní odhad [ $Nm^2$ ]	34.7	35.0	33.9	216.6	256.5	603.2
ABD matice [ $Nm^2$ ]	97.2	291.7	312.3	632.4	1110.7	5838.2
Experiment [ $Nm^2$ ]	86.3	185.23	250.52	539.79	948.8	1955.5

Tab. 7: Tabulka výsledků pro nosníky 6-11

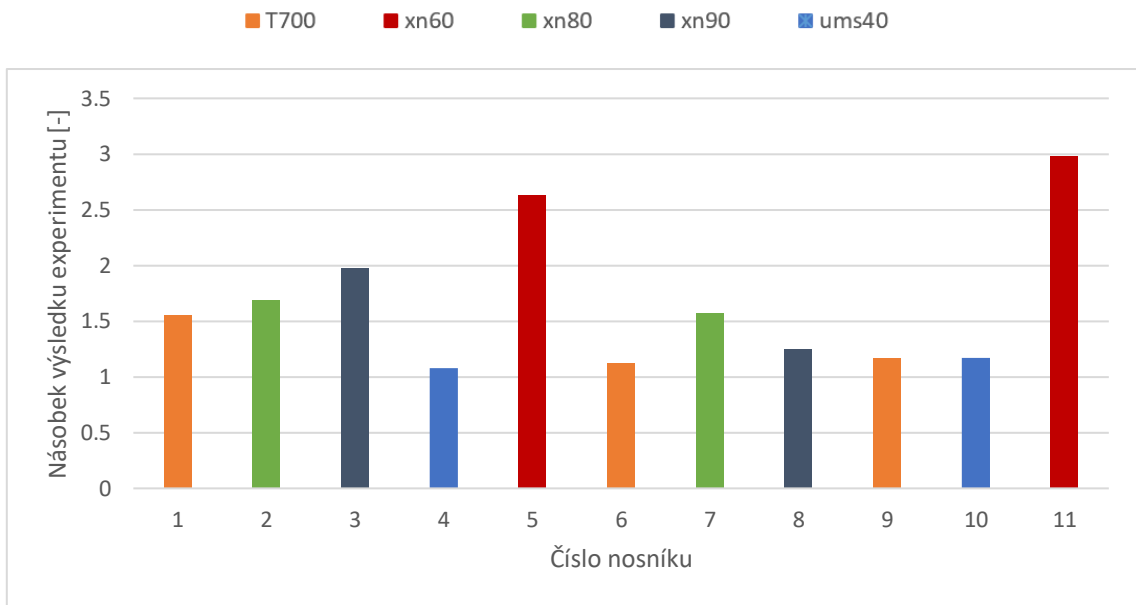
Výsledky z provedených analýz jsou vyneseny do následujících grafů 1-4. Každý graf znázorňuje výsledky ohybové tuhosti všech nosníků pro každou z výpočetních metod. Vynesené hodnoty jsou pro lepší viditelnost poměry výsledku pro danou metodu a výsledek experimentu. V grafech jsou barevně odlišené materiály nosníku.



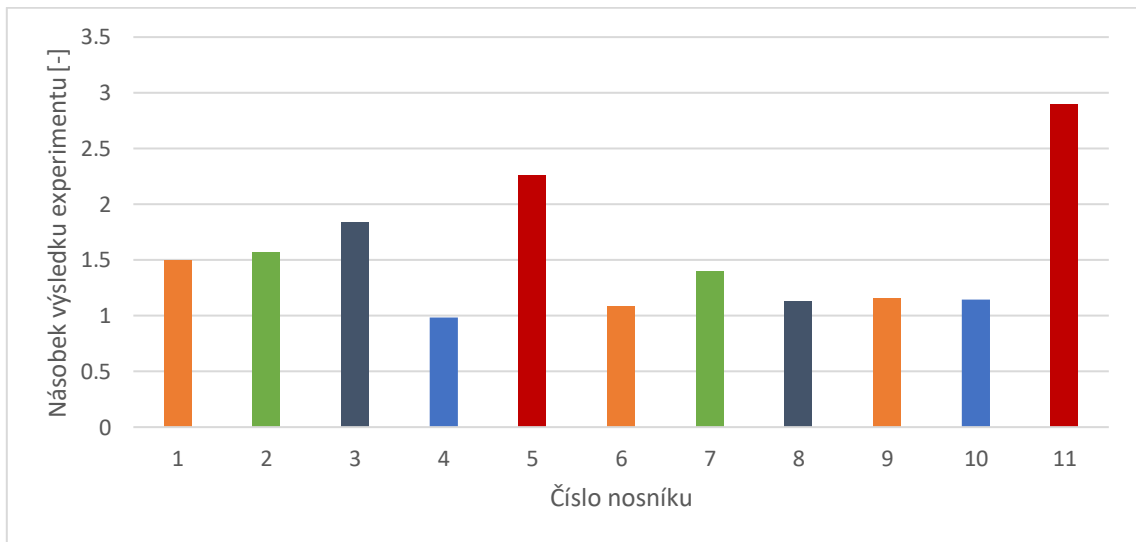
Graf 1: Výsledky pro metodu horního odhadu



Graf 2: Výsledky pro metodu dolního odhadu



Graf 3: Výsledky pro metodu ABD matic



Graf 4: Výsledky MKP analýzy



## 5.1 Diskuze

Z grafů 1-4 je patrné, že výsledky ohybových tuhostí získaných analytickými metodami se od výsledku experimentu značně liší. Můžeme také vidět, že odchylka každé metody je vysoce závislá na materiálu, z kterého je nosník vyroben. Nejhorší výsledky vycházejí pro materiál xn60, pro který je vypočtená ohybová tuhost více než dvakrát větší než tuhost určená experimentem. Tato chyba je konzistentní napříč metodami. Naopak pro materiál ums40 jsou odchylky vypočtených výsledků od experimentu mnohem menší. Pro materiál ums40 odchylka metod ABD matic a MKP od naměřených hodnot ohybové tuhosti nepřesahuje 20%

Z využitých metod se jako nejméně spolehlivá ukázala metoda dolního odhadu, která pro nosníky podélné skladby předpovídá podobnou tuhost jako ostatní metody, ale pro nosníky napříčné skladby selhává a výsledky odpovídají 10-30 % naměřené tuhosti. Můžeme tedy říct, že pro nosníky podélné skladby předpovídají všechny vyšetřované metody podobné výsledky.

Pro zbylé tři metody, se nedá říct, že by výsledky byly spolehlivější pro konkrétní orientaci vláken. Nejlepší výsledky vykazují metoda ABD matic a MKP. Tyto metody předpovídají navzájem podobné hodnoty, bohužel se ale nedá říct, že by jejich odchylky od výsledku experimentu byly konzistentní a dosahují od 0 % do +195 %.

## 6 Závěr

V prvních dvou kapitolách této práce byly uvedeny základní informace o kompozitních materiálech a byla přiblížena problematika výpočtu tuhosti anizotropních materiálů. Byly představeny čtyři analytické metody výpočtu ohybové tuhosti navíjených nosníků.

V praktické části byly vypočítány ohybové tuhosti pro 11 nosníků metodami horního odhadu, dolního odhadu a ABD matic pomocí výpočetního skriptu, který byl vytvořen v jazyce Python. Pro těchto 11 nosníků byly vytvořeny simulace v programu ANSYS odkud byly získány tuhosti pro metodu MKP.

Z výsledků plyne, že v některých případech dochází k velkým odchylkám. Zejména metoda dolního odhadu je využitelné jen pro podélné skladby nosníku. Metody horního odhadu, MKP a ABD matic jsou využitelné pro všechny skladby. Do všech metod ovšem vstupuje nejistota materiálových dat, která je v některých případech velice znatelná.

## Seznam použité literatury

- [1] LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. Plzeň: Západočeská univerzita v plzni, 2004. ISBN 9788070432730.
- [2] ZÁMEČNÍKOVÁ, Tereza, Tomáš MAREŠ, Viktor KULÍŠEK, Anna MALÁ a Bohumil KROPIK. *Comparison of Methods for Calculation of Composite Wound Tube Deflection*. Czech Technical University in Prague.
- [3] MAREŠ, Tomáš. *Poznámky z přednášek Mechaniky kompozitních materiálů*. Praha, 2018.
- [4] ZAVŘELOVÁ, Tereza. *Analysis of composite beam bending*. Diplomová práce (Ing.), České vysoké učení technické v Praze. Fakulta strojní, ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky. Praha, ČR, 2017
- [5] CHALA, Krishan K. *Composite Materials: Science and Engineering*. Second edition. Birmigham, Alabama: Springer, 2002. ISBN 0-387-98409-7.
- [6] MALÁ, Anna. *Výpočtové metody pro analýzu tenkostěnných i silnostěnných kompozitních nosníků*. Diplomová práce (Ing.), České vysoké učení technické v Praze. Fakulta strojní, ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky. Praha, ČR, 2017
- [7] AGARWAL, Bhagwan D. a Lawrence J. BROUTMAN. *Vláknové kompozity*. Praha: SNTL - nakladatelství technické literatury, 1987.
- [8] CABRNOCH, Bohuslav. *Composite materials and their properties* [online]. [cit. 2018-09-26]. Dostupné z: [http://drone.fsid.cvut.cz/mcmfolder/Composite%20materials%20and%20their%20properties\\_2015.pdf](http://drone.fsid.cvut.cz/mcmfolder/Composite%20materials%20and%20their%20properties_2015.pdf)
- [9] SCHWARTZ, Mel. M. *Composite materials handbook*. 2nd ed. New York: Osborne-McGraw-Hill, 1992. ISBN 0-07-055819-1.
- [10] Neitzel/Mitschang: *Handbuch Verbundwerkstoffe*, Hanser Technikbücher 2004, [ISBN 3-446-22041-0](https://www.hanser.de/ISBN-3-446-22041-0)
- [11] *Tasuns* [online]. [cit. 2020-09-17]. Dostupné z: <http://cz.t-composites.net/custom-carbon-fiber-tubes/carbon-fiber-round-tubes/carbon-round-tubes.html>

## Seznam obrázků

Obr. 1: Druhy kompozitních materiálů [8] .....	10
Obr. 2: Navíjený kompozitní nosník [11].....	11
Obr. 3: Voštiny [11] .....	12
Obr. 4: Systémy $O(x_1, x_2, x_3)$ , $O(x, y, z)$ [1].....	13
Obr. 5: Ortotropní materiál [1].....	15
Obr. 6: Příčně izotropní materiál [1] .....	16
Obr. 7: Grafické znázornění směrů LTT' [1] .....	17
Obr. 8: Schéma kompozitního materiálu pro definici EL [4] .....	18
Obr. 9: Schéma kompozitního materiálu pro definici ET [4] .....	19
Obr. 10: Znázornění systémů souřadnic LTT a xyz [1] .....	20
Obr. 11: Definice průměrů $d_i$ pro libovolný nosník o $n$ vrstvách .....	24
Obr. 12: síly a momenty působící na laminu .....	25
Obr. 13: Definice $h_i$ pro libovolný nosník [1].....	26
Obr. 14: Výpočetní síť MKP a její detail .....	27
Obr. 15: Výsledky analýzy MKP, průhyb ve směru působící síly.....	30

## Seznam tabulek

Tab. 1: Počet nezávislých konstant [1].....	15
<i>Tab. 2: Tahová pevnost kompozitu [1].....</i>	21
<i>Tab. 3: Tabulka využitých materiálu a jejich vlastností [2].....</i>	28
<i>Tab. 4: tabulka skladeb nosníků 1-5 .....</i>	28
<i>Tab. 5: Tabulka skladeb nosníků 6-11 .....</i>	29
Tab. 6: Tabulka výsledků pro nosníky 1-5 .....	30
Tab. 7: Tabulka výsledků pro nosníky 6-11 .....	30

## Seznam grafů

Graf 1: Výsledky pro metodu horního odhadu .....	31
Graf 2: Výsledky pro metodu dolního odhadu .....	31
Graf 3: Výsledky pro metodu ABD matic.....	32
Graf 4: Výsledky MKP analýzy .....	32

## Seznam příloh

A - Python výpočetní skript

B - ANSYS 2020 R2 soubor MKP simulace