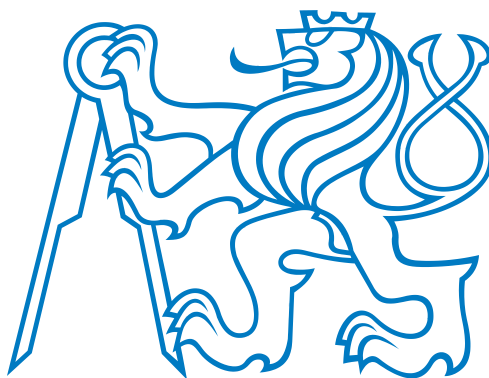


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

FAKULTA STROJNÍ

ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY



Diplomová práce

ANALÝZA STABILITY LAMINÁTOVÝCH DESEK

STABILITY ANALYSIS OF LAMINATE PLATES

| | |
|-------------------|-----------------------------|
| Autor: | Bc. Ondřej Studničný |
| Vedoucí práce: | doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D |
| Studijní program: | Strojní inženýrství |
| Studijní obor: | Aplikovaná mechanika |
| Školní rok | 2020/2021 |

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Studničný Jméno: Ondřej Osobní číslo: 458494
Fakulta/ústav: Fakulta strojní
Zadávající katedra/ústav: Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Studijní program: Strojní inženýrství
Studijní obor: Aplikovaná mechanika

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Analýza stability laminátových desek

Název diplomové práce anglicky:

Stability analysis of laminate plates

Pokyny pro vypracování:

1. Přehled a rozbor dostupné literatury
2. Popis obecného postupu řešení
3. Řešení vybraných případů ztráty stability laminátových desek
4. Zhodnocení , závěr , komentáře

Seznam doporučené literatury:

1. V.Laš : Mechanika kompozitních materiálů , Plzeň 2007
2. T.Mareš : Základy konstrukční optimalizace , Praha 2005

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: 30.10.2020

Termín odevzdání diplomové práce: 15.01.2021

Platnost zadání diplomové práce:

doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

16.12.2020

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Anotační list

| | |
|-----------------------|---|
| Jméno autora: | Bc. Ondřej Studničný |
| Název DP: | Analýza stability laminátových desek |
| Anglický název: | Stability analysis of laminate plates |
| Rok: | 2021 |
| Obor studia: | Aplikovaná mechanika |
| Ústav/odbor: | Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky Odbor pružnosti a pevnosti |
| Vedoucí práce: | doc. Ing Tomáš Mareš, Ph.D |
| Bibliografické údaje: | počet stran: 52 počet obrázků: 28 počet příloh: 1 |
| Klíčová slova: | ztráta stability, laminátová deska, symetrický laminát, jednosměrný laminát, laminátová teorie |
| Keywords: | buckling of laminated plates , laminate plates, symmetric laminate, unidirectional composite, lamination theory |

Anotace

Tato diplomová práce přináší přehled základních analytických výpočtů kritické síly pro ztrátu stability kompozitových materiálů. Práce je rozdělena na teoretickou a výpočtovou část. Teoretická část obsahuje popis principů ztráty stability, seznámení s problematikou klasické laminátové teorie a odvození ohybové analýzy desek a kritické síly pro ztrátu stability materiálu. Praktická část obsahuje provedené výpočty kritické síly pro izotropní a ortotropní desky pomocí přímého a energetického řešení principem minima potenciální energie.

Abstract

This thesis provides an overview of basic analytical calculations of the critical forces for buckling for composite materials. Document is split into theoretical and computational part. The theoretical part describes principle of buckling, introducing of classical lamination theory, including bending analysis and buckling calculations. The practical part demonstrates calculations of the critical force for buckling for isotropic and orthotropic composite plates by direct solution, as well as energetic solution based on the principle of minimum potential energy.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů, zejména skutečnost, že České vysoké učení technické v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 15. ledna 2021

.....

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Tomáši Marešovi, Ph.D. za vedení při práci na diplomové práci, za cenné rady, připomínky a v neposlední řadě za čas a trpělivost. Dále bych chtěl poděkovat kolegům z firmy Doosan Bobcat za zkušenosti v průběhu mého studia. Největší díky bych chtěl věnovat svoji přítelkyni, rodičům a sourozencům, kteří pro mě byli po celé studium oporou.

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 1 |
| 1 Ztráta stability | 3 |
| 1.1 Ztráta stability laminátové desky | 4 |
| 2 Klasická laminátová teorie | 5 |
| 2.1 Kirchhoffova hypotéza | 5 |
| 2.2 Rovnice rovnováhy laminátové desky | 7 |
| 2.3 Základní rovnice laminátové desky | 10 |
| 2.4 Způsoby skládání kompozitových desek | 13 |
| 2.4.1 Symetrické lamináty | 14 |
| 2.4.2 Vyrovnané lamináty | 15 |
| 2.4.3 Vyrovnané symetrické lamináty | 15 |
| 2.5 Křížově vrstvené lamináty | 15 |
| 2.5.1 Symetrické křížově vrstvené lamináty | 16 |
| 3 Stabilita desek | 17 |
| 3.1 Ohybová analýza desek | 17 |
| 3.2 Ztráta stability laminátové desky | 19 |
| 3.3 Okrajové podmínky | 20 |
| 3.4 Ztráta stability při jednoosém tlakovém napětí | 21 |
| 3.5 Ztráta stability při dvouosém tlakovém napětí | 23 |
| 3.6 Energetické řešení ztráty stability | 25 |
| 3.6.1 Deformační energie laminátové desky | 26 |
| 3.6.2 Potenciální energie laminátové desky | 26 |
| 3.7 Ritzova metoda | 28 |
| 3.8 Řešení ztráty stability Ritzovou metodou | 29 |
| 3.8.1 Ztráta stability pro prostě podepřenou desku | 30 |
| 3.9 Symetrická laminátová deska při jednoosém tlakovém napětí | 31 |
| 3.9.1 Čtvercový laminát zatížený jednoosým napětím | 33 |
| 3.9.2 Laminátová deska s proměnným poměrem stran | 34 |
| 3.10 Symetrická laminátová deska se složením vrstev $\pm 45^\circ$ | 34 |
| 3.10.1 Laminátová deska $\pm 45^\circ$ při dvouosém napětí | 36 |
| 3.10.2 Laminátová deska $\pm 45^\circ$ při jednoosém a smykovém napětí | 37 |
| Závěr | 41 |
| Seznam použité literatury | 43 |
| Seznam použitých veličin | 45 |

Seznam obrázků

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Tři fáze rovnováhy [1] | 3 |
| 2.1 | Laminátová deska v rovině x - z [7] | 5 |
| 2.2 | Nesymetrický laminát $[0/45/90/0]$ [8] | 5 |
| 2.3 | Laminátová deska zatížená různými druhy sil [7] | 6 |
| 2.4 | Deska v rovině xz před a po deformaci [7] | 6 |
| 2.5 | Napětí na elementu $dx dy xh$. Upraveno z [9] | 7 |
| 2.6 | Síly působící na daný element | 8 |
| 2.7 | Síly působící v elementu ve směru osy z . Upraveno z [9] | 9 |
| 2.8 | Momenty působící na daný element | 9 |
| 2.9 | Laminátová deska zobrazena před a po deformaci. Upraveno z [9]. . . | 10 |
| 2.10 | Důsledek daných prvků z globální matice tuhosti na vazbu mezi složkami sil a deformace [10] | 13 |
| 2.11 | Příklad symetrické desky | 14 |
| 2.12 | Příklad vyrovnaného laminátu | 15 |
| 3.1 | síly působící na element v nerovnovážném stavu [1] | 19 |
| 3.2 | Izotropní deska zatížena silou N_{xx} [15] | 21 |
| 3.3 | Kritická síla pro ztrátu stability jako funkce poměru stran desky a vlastních čísel [6] | 23 |
| 3.4 | Laminátová deska zatížena silami N_{xx} a N_{yy} | 23 |
| 3.5 | Závislost kritické síly pro ztrátu stability na délce strany a poměru sil N_{xx} a N_{yy} pro čtvercovou laminátovou desku | 25 |
| 3.6 | Deformace v závislosti na příčném průhybu w pro (a) normálovou deformaci a (b) smykovou deformaci [15] | 27 |
| 3.7 | Laminát ze skladbou vrstev $[\pm\Theta]_s$ zatížená silou $-N_{xx}$ | 32 |
| 3.8 | Laminátová deska se skladbou $[\pm\Theta_n]_s$, závislost kritické síly na úhlu vláken a počtu vrstev n | 34 |
| 3.9 | Laminátová deska se skladbou $[\pm\Theta]_s$, závislost kritické síly na úhlu vláken a poměru mezi stranami Θ | 35 |
| 3.10 | Laminátová deska $[\pm 45_2]_s$, zatížená silami N_{xx} , αN_{xx} a βN_{xx} | 35 |
| 3.11 | Závislost kritické síly N_{xxkrit} na poměru stran γ a na poměru sil α . . | 37 |
| 3.12 | Skoková změna kritické síly N_{xxkrit} při poměru stran a poměru sil $\alpha = -0.5$ | 38 |
| 3.13 | Změna kritické síly v závislosti na množství vrstev konstantní tloušťky pro složení vrstev $[\pm 45_n]_s$ pro $\alpha = 2$ | 39 |
| 3.14 | Závislost kritické síly na poměru stran γ a poměru sil β | 39 |
| 3.15 | Závislost kritické síly na poměru stran γ a poměru sil β při signifikantních smykových silách | 40 |

Úvod

Kompozity představují od 60. let minulého století velmi atraktivní skupinu materiálů při stavbě konstrukcí ve strojírenství. Tyto materiály jsou při správném použití schopny přenést v určených směrech velké napětí a zároveň mají nízkou hmotnost a lze je použít v tenkých vrstvách. Kvůli těmto důvodům se firmám vyplatí investovat do vývoje a inovací nových kompozitních materiálů, které by zdokonalily jejich produkty v leteckém, automobilovém, lodním nebo sportovním průmyslu. Na rozdíl od konvenčních materiálů nejsou vláknové kompozity izotropní materiál se 2 nezávislými konstantami, ale jsou materiál ortotropní. Ortotropní materiál má 9 nezávislých konstant, a proto jsou výpočty složitější a kompozity méně předvídatelné. Tato vlastnost významně ovlivňuje vzpěr nosníku a ztrátu stability desek. U izotropního materiálu můžeme citlivost proti ztrátě stability ovlivnit geometrií desky a volbou materiálu. U kompozitové desky mohou i drobné nuance při výběru vrstev způsobit výrazný rozdíl v citlivosti laminátové desky proti ztrátě stability. Laminátové desky se využívají například v letectví, kde může být konstrukční chyba fatální. Z tohoto důvodu potřebuje být konstruktér při navrhování kompozitových prvků dobře obeznámen s problematikou mechaniky kompozitních materiálů.

Tato práce se zabývá analýzou stability laminátových desek. V kapitole 1 diplomové práce je popsána problematika ztráty stability a představen koncept stability s potenciální energií v systému, který je složen ze tří fází. Dále je popsána ztráta stability laminátových desek a zmíněny problémy, které při ztrátě stability nastávají.

V kapitole 2 je představena *klasická laminátová teorie*, která je odvozena od *Kirchhoffovy hypotézy*. Tato hypotéza je základním prvkem vedoucím k rovnicím laminátové desky, které uvádím v 2.3. Pro tyto rovnice platí předpoklad rovinné napjatosti, protože tloušťka je vůči ostatním dvěma parametrům zanedbatelná. Při aplikaci Cauchyho tenzoru deformace získáme z poměrné deformace a křivosti desky síly a momenty, které působí na daný laminát. Vazby mezi těmito veličinami udávají prvky globální matice tuhosti. Některé tyto prvky nejsou žádoucí a vhodnou skladbou vrstev je můžeme vynulovat. Základní způsoby skládání vrstev a efekt na globální matici tuhosti je zobrazen v kapitole 2.4.

V kapitole 2.2 jsou představeny tři rovnice rovnováhy. Tyto tři rovnice mají šest neznámých a jako rovnici kompatibility použijeme klasickou laminátovou teorii a základní rovnice laminátové desky. Po aplikaci rovnic kompatibility získáme vztah pro ohybovou analýzu laminátových desek představenou v kapitole 3.1. Tyto výpočty fungují při zanedbatelných tlakových silách působících ve směru normály tloušťky desky. Při kritickém nárůstu těchto sil dochází ke ztrátě stability. Výpočet této kritické síly je představen v kapitole 3.2. Přímé analytické řešení ztráty stability dle Naviera je zobrazeno v kapitole 3.4. Přímé analytické řešení lze využít u jednoduchých případů, pro složitější případy je tento způsob komplikovaný nebo jej nelze využít vůbec. Z tohoto důvodu je v kapitole 3.6 představeno energetické řešení pro symetrické desky založené na výpočtu deformační a potenciální energie soustavy. Ritzova metoda, vysvětlená v kapitole 3.7, je založena na principu minima potenciální energie. Aplikaci této metody získáme vztahy pro výpočet kritické síly pro ztrátu stability i při komplikovanějších případech.

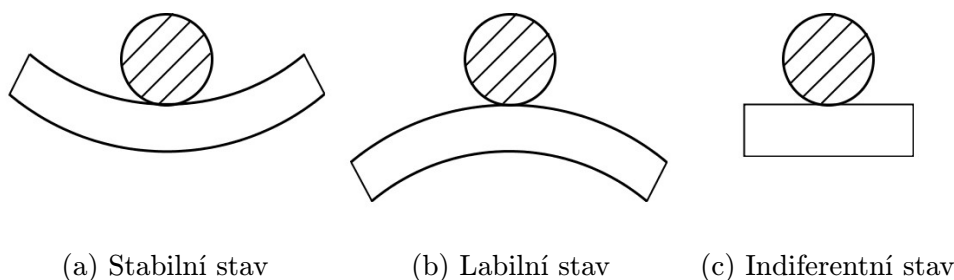
V kapitole 3.9 se zabývám výpočtem kritické síly v závislosti na úhlu natočení vláken v lamině pro laminát se skladbou $[\pm 45]_s$. Z těchto výsledků následně zkoumám laminát se skladbou $[\pm 45]_s$ s různými módy zatížení. Tyto výpočty jsou zobrazeny v kapitole 3.10.

Hlavním cílem této práce je analýza ztráty stability laminátových desek. Dílčími cíli je zkoumání kritické síly pro ztrátu stability v závislosti na délce strany, poměru stran, počtu vrstev, úhlu natočení vláken v jednotlivých vrstvách a poměru sil působících na laminátovou desku.

1 Ztráta stability

Fyzický jev, při kterém je rovný, dostatečně štíhlý prvek příčně ohýbán z jeho podélné polohy tlakovým zatížením, se nazývá vzpěr pro nosníky a ztráta stability pro desky. Existují dva typy ztráty stability: *bifurcation-type* a *deflection-amplification-type*. První typ je pouze koncepční, protože pro fungování tohoto modelu by byl zapotřebí dokonale rovný homogenní člen. Na tento člen by navíc tlakové zatížení muselo působit přesně v ose. V reálném provozu jsou tyto podmínky nedosažitelné. Tento model ale můžeme využít pro stanovení horní hranice kritické síly [1].

Stabilitu systému lze definovat několika způsoby. Statickou stabilitu rovnováhy můžeme definovat vztahem mezi narušením statické rovnováhy na vstupu a výsledným příčným posuvem na výstupu. Systém je stabilní, pokud je výsledný posuv malý vůči všem přípustným zatížením. Systém je labilní, pokud je výsledný posuv velký v porovnání s velikostí zatížení. V naší problematice je výchozí vychýlení tlakové zatížení tělesa a výsledný posuv zkoumáme pomocí deformace. Podmínku stability můžeme v našich případech ověřit, pokud počáteční stav a nekonečně blízké okolí zatížíme silou, která bude ve všech místech neměnná. Systém můžeme označit za stabilní, pokud se po následném odlehčení systém vrátí do původní pozice. Labilní systém se po odlehčení zdeformuje do konečné podoby. U indiferentního stavu při odlehčení v blízkém okolí od počátečního stavu, zůstane systém v místě odlehčení [2].



Obrázek 1.1: Tři fáze rovnováhy [1]

Koncept stability je také spjat s potenciální energií v systému. Tento princip lze dobře ukázat na dokonale tuhé kouli, která je zobrazená ve všech třech fázích na obrázku 1.1. Pokud je koule (a) lehce vychýlena z počáteční pozice, tak se po odstranění zatížení vrátí do původní pozice. Při vychýlení z původní pozice se zvýší pozice těžiště, takže je zapotřebí dodat potenciální energii do systému. Naopak koule (b) se při vychýlení z počátečního stavu nevrátí zpět, ale bude pokračovat dolů. Při vychýlení se sníží poloha těžiště, což znamená snížení potenciální energie v systému. Z těchto poznatků vyplývá, že pro stabilní stav je energie v systému minimálně na lokálním minimu a pro labilní stav je energie na svém lokálním maximu. Koule v indiferentním stavu (c) po odstranění zatížení zůstane na stejném místě, energie se v systému nezmění [2, 1, 3].

1.1 Ztráta stability laminátové desky

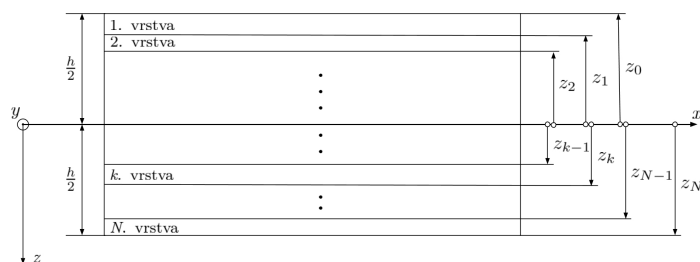
Laminátové desky jsou pod tíhou tlakových nebo smykových sil na střední rovinu desky náchylné ke ztrátě stability. Tento stav je velmi podobný vzpěru u jednorozměrných nosníků, nicméně je zde několik odlišností. Při vzpěru nosníku tato kritická síla pro vzpěr způsobuje finální kolaps a nosník není schopen přenášet nadále zatížení. Desky mohou i po ztrátě stability přenášet určitou velikost zatížení, protože se jedná obvykle o lokální ztrátu stability [4]. Síla, kterou je deska schopná přenášet, závisí na geometrii desky, materiálových vlastnostech, okrajových podmínkách a typu zatížení [1]. Problematika laminátových desek po ztrátě stability je ale velmi komplikovaná a nelineární. Po ztrátě stability existuje velké riziko finálního kolapsu desky a je zapotřebí být velmi konzervativní [4].

Se ztrátou stability laminátových desek se můžeme potýkat v letectví, konkrétně při navrhování konstrukcí na přípustné poškození (Damage Tolerance). V průběhu životnosti těchto konstrukcí předpokládáme pravidelné inspekce. Při ztrátě stability, nebo při jiném poškození desky dochází k mnoha delaminacím mezi jednotlivými vrstvami po celé tloušťce laminátu a postupně vzniká několik tenčích sublaminátů. Tyto nové sublamináty mají menší ohybovou tuhost a jsou citlivější k další ztrátě stability, což povede k výraznějšímu oddělení lamin od sebe a zároveň vzniku nových delaminací. Toto šíření může při případném zanedbání inspekci dospět ke konečnému kolapsu dané desky [5].

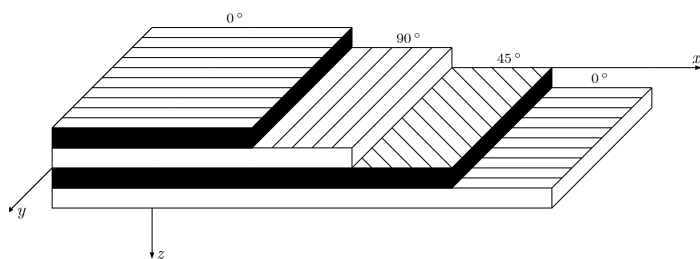
Pro každou laminátovou desku s danými rozměry, materiály matrice a vláken, okrajovými podmínkami a daným zatížením existuje matematicky nekonečně mnoho sil, které ztrátu stability způsobí. Fyzikální význam má pouze nejmenší z těchto sil. Tato síla se při výpočtech určuje pomocí vlastních čísel. Na rozdíl od vlastních frekvencí dané desky, kdy i další vlastní čísla dané soustavy mají fyzikální význam [6].

2 Klasická laminátová teorie

Základním prvkem pro studium a řešení problematiky laminátových desek je takzvaná *klasická laminátová teorie*. Tato teorie je odvozena z *Kirchhoffovy hypotézy*, která byla představena v polovině 19. století německým fyzikem *Gustavem Robertem Kirchhoffem*. Laminát, neboli kompozit je ortotropní materiál. Ortotropní materiál má tři roviny symetrie, které jsou na sebe navzájem kolmé. Při výpočtech laminátových desek se budeme pohybovat v pravotočivém kartézském souřadnicovém systému $x-y-z$, ve kterém se rovina xy bude nacházet ve středové rovině laminátu. Laminát se skládá z N vrstev tzv. lamin, kde k -tá tloušťka h_k je ve srovnání s délkou a šířkou velmi malá, a proto budeme uvažovat v každé vrstvě rovinnou napjatost. Tloušťka celého laminátu je h a středová rovina se nachází v polovině této tloušťky. Od středové roviny ve vzdálenosti $-h/2$ ve směru osy z se nachází vrstva 1, u které je tloušťka definována souřadnicemi z_0 a z_1 . Tímto způsobem jsou postupně ve směru osy z definovány všechny tloušťky vrstev laminátu, přičemž k -tá vrstva je od z_{k-1} až po z_k a poslední vrstva N je v rozmezí od z_{N-1} do z_N . Tento laminát je zobrazen na obrázku 2.1 [7]. Další důležitou vlastností je úhel mezi vlákny ve vrstvě vůči ose x v globálním souřadnicovém systému. Skladba vrstev se zapisuje do hranatých závorek a za každou vrstvu je zapsán úhel mezi vlákny a osou x . Na obrázku 2.2 je nesymetrický laminát se skladbou $[0/45/90/0]$ [8].



Obrázek 2.1: Laminátová deska v rovině $x-z$ [7]



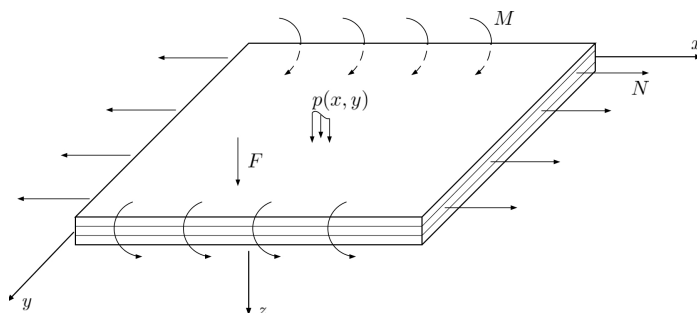
Obrázek 2.2: Nesymetrický laminát $[0/45/90/0]$ [8]

2.1 Kirchhoffova hypotéza

Kirchhoffova hypotéza je jedním z předpokladů pro řešení desek a skořepin. Tato hypotéza se využívá pro kovové, dřevěné, betonové a jiné materiály. Teorie dává důraz

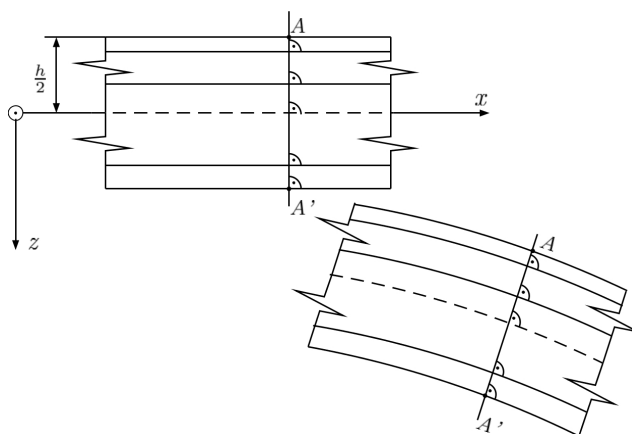
na způsob složení vrstev, druh zatížení a na okrajové podmínky. Materiálové vlastnosti jsou v této teorii vedlejší. Tato hypotéza se využívá u součástí vyrobených z kompozitu. Analogicky pro nosníky existuje *Bernoulliho hypotéza*.

Pro vysvětlení *Kirchhoffovy hypotézy* si představme laminátovou desku, na kterou působí různé druhy zatížení. Na obrázku 2.3 vidíme desku zatíženou momentem M , spojitým zatížením p , silou F a osovou silou N . Tato deska je složena z několika vrstev, které jsou mezi sebou spojeny dokonalou, nekonečně tenkou vrstvou. Všechny tyto vrstvy jsou navzájem rovnoběžné. Na obrázku 2.4 lze vidět úsečku AA' , která prochází celým laminátem a před zatížením s deformací byla tato úsečka normálou k povrchu každé vrstvy [7].



Obrázek 2.3: Laminátová deska zatížená různými druhy sil [7]

Kirchhoffova hypotéza předpokládá, že původní úsečka AA' zůstane i po deformaci laminátu úsečkou a zároveň i normálou k zdeformované střední rovině a navíc nezmění svoji délku, jak je vidět na obrázku 2.4 [7, 9]. Protože povrchy lamin zůstávají rovnoběžné vůči sobě i vůči střední ploše, zůstává úsečka AA' normálou k povrchu každé vrstvy. Zajímavou částí této hypotézy je i neměnnost délky úsečky po deformaci. To znamená, že se nemění vzdálenost mezi horní a spodní rovinou laminátu. Z toho vyplývá, že deformace $\varepsilon_z = 0$. Tento předpoklad je v reálném případě chybný, ale *Kirchhoffova hypotéza* se tímto problémem nezabývá [7].



Obrázek 2.4: Deska v rovině xz před a po deformaci [7]

Vzhledem k předpokladu zachování původní úsečky jako normály ke všem laminám při zachování původní délky, můžeme posuv jakéhokoliv bodu z úsečky zjistit pomocí geometrické střední roviny. Z tohoto důvodu tuto rovinu pojmenujeme jako *referenční rovinu*, protože posuv, napětí i deformaci v bodě na úsečce lze případně dourčit [7].

2.2 Rovnice rovnováhy laminátové desky

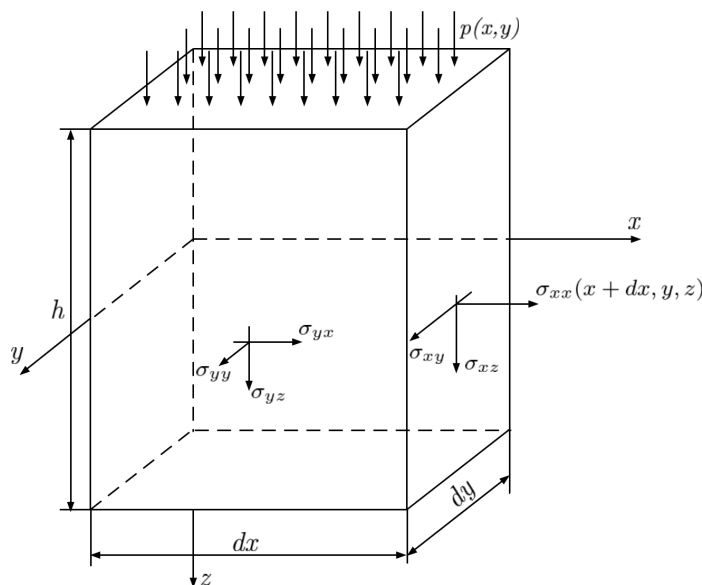
Pro získání rovnice rovnováhy využijeme laminátovou desku s N vrstvami a tlakovým zatížením $p(x,y)$, ze které vyjmeme element o rozměrech $dx dy xh$ a na tomto elementu zobrazíme všechny vnitřní síly a momenty způsobené vnitřním napětím. Rozměr h je konečný, a proto je funkce napětí neznámá a závislá na z . Naproti tomu rozměry dx a dy se limitně blíží nule a funkci napětí můžeme aproximovat ve směru x Taylorovým polynomem ve tvaru

$$\sigma_{ab}(x + dx, y, z) = \sigma_{ab} + \frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 \sigma_{ab}}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots,$$

a analogicky ve směru y

$$\sigma_{ab}(x, y + dy, z) = \sigma_{ab} + \frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial y} dy + \frac{\partial^2 \sigma_{ab}}{\partial y^2} \frac{dy^2}{2!} + \dots,$$

kde $\sigma_{ab} = \sigma_{ab}(x, y, z)$. Z důvodu snižování řádu u každého dalšího členu Taylorova polynomu o jeden řád, budeme pro budoucí výpočty využívat pouze první dva členy polynomu, ostatní zanedbáme. Pro lepší grafickou přehlednost bude parciální derivace zapisována způsobem $\sigma_{ab,c} = \frac{\partial \sigma_{ab}}{\partial c}$ [9].



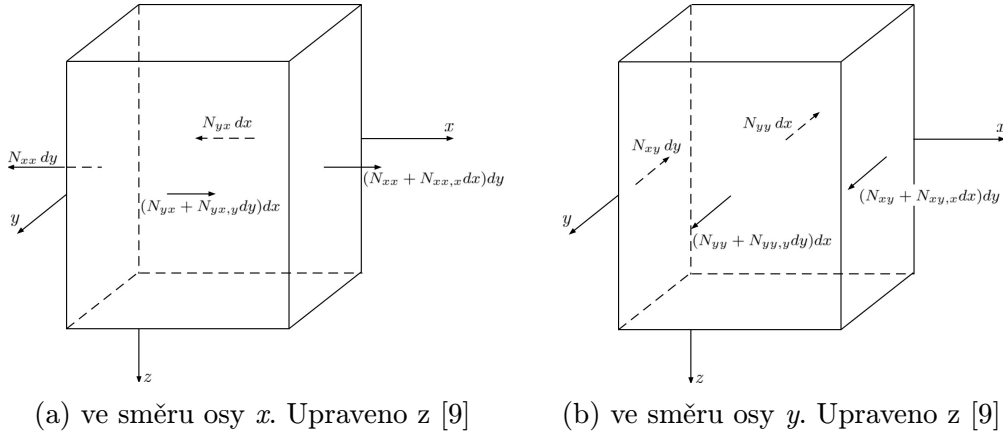
Obrázek 2.5: Napětí na elementu $dx dy xh$. Upraveno z [9]

Na obrázku 2.5 jsou zobrazena všechna napětí s normálou ve směru osy x nebo y . Tato napětí jsou v každé vrstvě rozdílná, a proto vyjádříme sílu a moment jako

výslednici daného typu napětí ze všech vrstev. Tyto síly a momenty mají následující tvary

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz, & N_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz, & N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz, \\
 N_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yx} dz, & Q_{xz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz, & Q_{yz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz, \\
 M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz, & M_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz, & M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz, \\
 & & M_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{yx} dz.
 \end{aligned}$$

Jak lze vidět v definicích pro různé síly, tyto síly nejsou vyjádřeny v $[N]$, ale v $[N/mm]$. Z tohoto důvodu se těmito výslednicím sil říká *lineární hustota síly* a momentům *hustota momentu* s jednotkami $[N]$. Pro získání síly je zapotřebí tuto *lineární hustotu síly* vynásobit šířkou strany elementu, na kterou tato síla působí. Na obrázku 2.6a lze vidět všechny síly působící ve směru osy x [9].



Obrázek 2.6: Síly působící na daný element

Nyní sestavíme rovnici rovnováhy a dostaneme

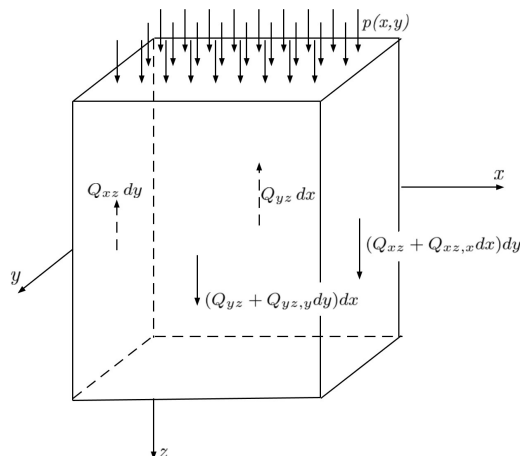
$$(N_{xx} + N_{xx,x} dx) dy + (N_{yx} + N_{yx,y} dy) dx - N_{xx} dy - N_{yx} dx = 0.$$

Po vykrácení a úpravě dostaneme první rovnici rovnováhy ve tvaru

$$N_{xx,x} + N_{yx,y} = 0 \quad (2.1)$$

Síly působící ve směru osy y jsou zobrazeny na obrázku 2.6b a druhá rovnice rovnováhy má tvar

$$N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0. \quad (2.2)$$

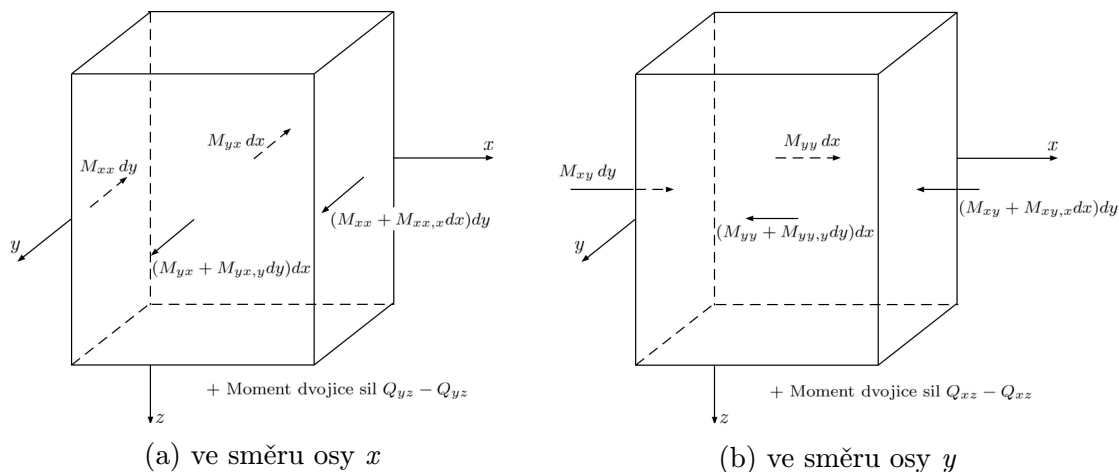


Obrázek 2.7: Síly působící v elementu ve směru osy z . Upraveno z [9]

V ose z působí kromě vnitřních sil i vnější tlakové zatížení $p(x,y)$, jak je znázorněno na obrázku 2.7. Po úpravách dostaneme rovnici

$$p + Q_{xz,x} + Q_{yz,y} = 0. \quad (2.3)$$

Vzhledem k variabilnímu napětí v každé jednotlivé vrstvě, vznikají vůči *referenční ploše* momenty. Tyto momenty jsou vyjádřeny jako *lineární hustota momentu* s jednotkami [N]. Pro získání momentu je zapotřebí tuto hustotu momentu vynásobit šířkou elementu, na kterou tato hustota momentu působí. V následujících výpočtech jsme zanedbali moment dvojice sil $Q_{xz,x} dx$ a $Q_{yz,y} dy$, protože tento nárůst bude vůči původním momentům minimálně o řád menší [9].



Obrázek 2.8: Momenty působící na daný element

Na obrázcích 2.8a a 2.8b lze vidět momenty působící ve směru osy x , respektive osy y . Po sestavení rovnic rovnováhy ve směru x a y dostaneme rovnice ve tvarech

$$Q_{yz,y} - M_{xy,x} - M_{yy,y} = 0, \quad (2.4)$$

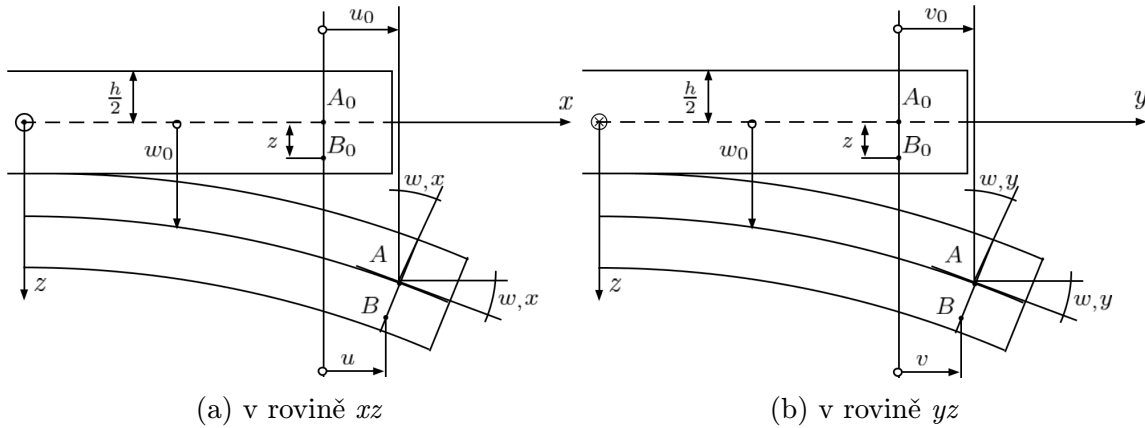
$$Q_{xz,x} - M_{xx,x} - M_{yx,y} = 0. \quad (2.5)$$

Z rovnice (2.4) vyjádříme sílu Q_{yz} a z rovnice (2.5) vyjádříme Q_{xz} , které dosadíme do (2.3) a dostaneme třetí rovnici rovnováhy ve tvaru

$$p + M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} = 0 \quad (2.6)$$

Po získání třech rovnic rovnováhy máme tři rovnice na šest neznámých. Proto potřebujeme rovnici kompatibility, která by tento problém s velkým množstvím neznámých na počet rovnic rovnováhy vyřešila. Nejčastěji se pro tento problém využívá *Klasická laminátová teorie*, založena na *Kirchhoffově hypotéze* z kapitoly 2.1 [9].

2.3 Základní rovnice laminátové desky



Obrázek 2.9: Laminátová deska zobrazena před a po deformaci. Upraveno z [9].

Pro vysvětlení klasické laminátové teorie si vezmeme laminátovou desku, kde budeme pozorovat průběhy posuvů bodů A a B , které leží na středové ploše laminátu a bodu B . Tyto body leží na přímce, která je kolmá na středovou plochu. Po deformaci desky a aplikaci *Kirchhoffovy hypotézy* zůstanou tyto dva body na stejné přímce a vzájemná vzdálenost se nezmění. Na obrázku 2.9a a 2.9b vidíme desku před a po deformaci s body A_0 a B_0 před deformací a body A a B po deformaci. Úhel mezi přímkou před a po deformaci je díky *Kirchhoffově hypotéze* úhel natočení průhybové čáry, což je definované jako první derivace průhybu. Pro posuv bodu B ve směru osy x , osy y a osy z platí

$$u = u_0 - zw_{,x}, \quad (2.7)$$

$$v = v_0 - zw_{,y}, \quad (2.8)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y). \quad (2.9)$$

kde $u_0 = u_0(x, y)$ a $v_0 = v_0(x, y)$. Průhyb bodu B ve směru osy z bude při malých deformacích stejný jako bodu A, takže $w(x, y, z) = w_0(x, y)$ [9, 8, 7]. Pro získání deformací využijeme Cauchyho tenzor malých deformací ve tvaru

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Aplikací Cauchyho tenzoru deformace na rovnice (2.7) – (2.9) získáme deformace

$$\varepsilon_{xx} = u_{0,x} - zw_{,xx}, \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{yy} = v_{0,y} - zw_{,yy}, \quad (2.11)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = u_{0,y} + v_{0,x} - 2zw_{,xy}, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz}.$$

Rovnice (2.10) až (2.12) je možné psát také ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa}, \quad (2.13)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ je deformace střední plochy a $\boldsymbol{\kappa}$ je křivost desky. Pro získání napětí využijeme obecný Hookův zákon v tomto ortotropním materiálu a při rovinné napjatosti ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma}^x = \mathbf{S}^x \boldsymbol{\varepsilon}^x,$$

kde \mathbf{S}^x je matice tuhosti vůči globálnímu souřadnicovému systému. Vzhledem k nespojitému průběhu napětí po tloušťce laminátu šetříme síly a momenty působící v průřezu laminátu jako součet účinků ze všech N vrstev [8, 9]. Potom pro síly je možné psát

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}^x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{T}_{\sigma}^{xp} \mathbf{S}^x \boldsymbol{\varepsilon}^x dz.$$

kde \mathbf{S}^p je matice tuhosti v hlavních směrech laminy ve tvaru

$$\mathbf{S}^p = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \cdot \begin{bmatrix} E_L & \nu_{LT}E_T & 0 \\ \nu_{TL}E_L & E_T & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT}(1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

kde E_L je modul pružnosti ve směru vláken, E_T je modul pružnosti kolmo vůči směru vláken, G_{LT} je modul pružnosti ve smyku a ν je Poissonovo číslo. \mathbf{T}_{σ}^{xp} je transformační matice napětí z hlavního souřadnicového systému dané laminy do globálního souřadnicového systému ve tvaru

$$\mathbf{T}_{\sigma}^{xp}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & \sin^2 \Theta & -2 \sin \Theta \cos \Theta \\ \sin^2 \Theta & \cos^2 \Theta & 2 \sin \Theta \cos \Theta \\ \sin \Theta \cos \Theta & -\sin \Theta \cos \Theta & \cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

a T_ε^{px} je transformační matice deformace z globálního do hlavního souřadnicového systému ve tvaru

$$T_\varepsilon^{px}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & \sin^2 \Theta & \sin \Theta \cos \Theta \\ \sin^2 \Theta & \cos^2 \Theta & -\sin \Theta \cos \Theta \\ -2 \sin \Theta \cos \Theta & 2 \sin \Theta \cos \Theta & \cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Tato soustava rovnic platí pro jednu laminu. Pro celou laminátovou desku sečteme účinky ve všech vrstvách a dostaneme

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{B}\kappa, \quad (2.17)$$

kde \mathbf{A} je matice tahové tuhosti definovaná vztahem

$$\mathbf{A} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S}_k^x dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \mathbf{T}_\sigma^{xp}(\Theta_k) \mathbf{S}_k^p \mathbf{T}_\varepsilon^{px}(\Theta_k) dz$$

a matice vazební tuhosti \mathbf{B} definovaná vztahem

$$\mathbf{B} = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{S}_k^x dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \mathbf{T}_\sigma^{xp}(\Theta_k) \mathbf{S}_k^p \mathbf{T}_\varepsilon^{px}(\Theta_k) dz,$$

kde transformační matice napětí a tuhosti jsou funkcí úhlu Θ_k , což je úhel mezi vlákny ve vrstvě k a osou x v globálním souřadnicovém systému a \mathbf{S}_k je matice tuhosti k -té vrstvy [9]. Matici tahové tuhosti můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N (z_k - z_{k-1}) \mathbf{T}_\sigma^{xp}(\Theta_k) \mathbf{S}_k^p \mathbf{T}_\varepsilon^{px}(\Theta_k) \quad (2.18)$$

a matici vazební tuhosti \mathbf{B} ve tvaru

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^N \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} \mathbf{T}_\sigma^{xp}(\Theta_k) \mathbf{S}_k^p \mathbf{T}_\varepsilon^{px}(\Theta_k). \quad (2.19)$$

Analogicky můžeme tento postup použít i pro momenty a dostaneme rovnici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \boldsymbol{\sigma} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{T}_\sigma^{xp} \mathbf{S} \mathbf{T}_\varepsilon^{px} dz \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D}\kappa, \quad (2.20)$$

kde \mathbf{D} je matice ohybové tuhosti, kterou lze vyjádřit vztahem

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^N \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \mathbf{T}_\sigma^{xp}(\Theta_k) \mathbf{S}_k^p \mathbf{T}_\varepsilon^{px}(\Theta_k). \quad (2.21)$$

Rovnice (2.17) a (2.20) můžeme spojit dohromady a vyjádřit síly a momenty pomocí poměrných deformací ve střední rovině a křivosti ve tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

nebo ve tvaru submatic

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Matice, vyjadřující vztah mezi silami a momenty a deformací s křivostí se nazývá celková matice tuhosti nebo globální matice tuhosti. Ze vztahu (2.22) je zřejmé, že matice \mathbf{A} váže poměrnou deformací středové roviny se složkami sil, zatímco matice \mathbf{D} vyjadřuje vztah mezi křivostí desky a složkami momentů. Matice vazbové tuhosti \mathbf{B} dává do vztahu složky sil s křivostí desky a zároveň váže složky momentů s poměrnou deformací střední roviny. Jinými slovy při nenulové matici \mathbf{B} způsobí síly ohýbání a zkroucení desky, momenty dále způsobí deformaci ve střední rovině. Ve většině případů nejsou tyto vztahy žádoucí a je snaha o odstranění těchto vazeb. Tomuto efektu je možné se vyhnout při správné skladbě vrstev laminátu [8].

2.4 Způsoby skládání kompozitových desek

| Prvek | Nenulový prvek | Nulový prvek |
|----------|----------------|--------------|
| A_{16} | | |
| B_{11} | | |
| B_{12} | | |
| B_{16} | | |
| D_{16} | | |

Obrázek 2.10: Důsledek daných prvků z globální matice tuhosti na vazbu mezi složkami sil a deformace [10]

Jak bylo zmíněno v předchozí kapitole, při obecném složení laminátů z několika vrstev, dochází k vazbám mezi silami s momenty vůči poměrné deformaci s křivostí.

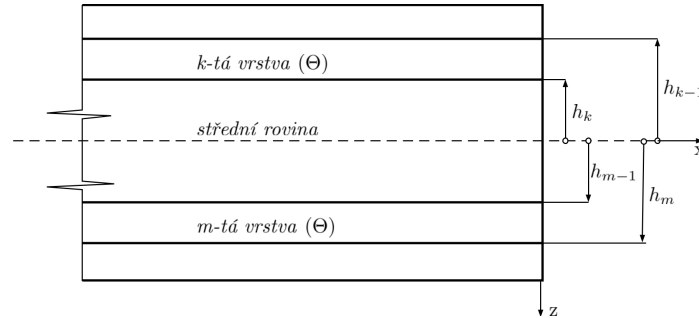
Na obrázku 2.10 vidíme, jaký je rozdíl mezi působením sil a momentů na danou desku při nulovém a nenulovém prvku z globální matice tuhosti. Pokud jsou tyto prvky nulové, pak se ztrácí vazba mezi danými složkami, které způsobují přídavná namáhání materiálu, které u izotropního materiálu nevznikají [10]. Tyto prvky z globální matice tuhosti (2.22) můžeme vynulovat vhodnou skladbou laminátových desek.

2.4.1 Symetrické lamináty

Pro snížení namáhání laminátu by bylo vhodné odstranit vazby způsobené maticí \mathbf{B} . Tento předpoklad zajistíme, pokud pro rovnici (2.19) bude platit

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^N \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} \mathbf{T}_\sigma(\Theta_k) \mathbf{S}_k^p \mathbf{T}_\varepsilon(\Theta_k) = 0. \quad (2.24)$$

Všechny prvky budou v této matici nulové, pokud pro každou k -tou vrstvu nad střední rovinou bude existovat m -tá vrstva se stejnou tloušťkou, stejnými materiálovými vlastnostmi a stejnou orientací vláken pod střední rovinou (Obrázek 2.11). Stejně materiálové vlastnosti a orientace vláken ve vrstvě zajistí stejnou matici tuhosti pro k -tou a m -tou vrstvu. Společně se stejnou tloušťkou vrstev je zajištěna nulová matice \mathbf{B} [8].



Obrázek 2.11: Příklad symetrické desky

Tímto složením vrstev nám mizí vazby způsobené prvky v matici \mathbf{B} , popsané v kapitole 2.4 [8]. Z tohoto důvodu se nám rovnice (2.22) vykrátí do tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

a do tvaru

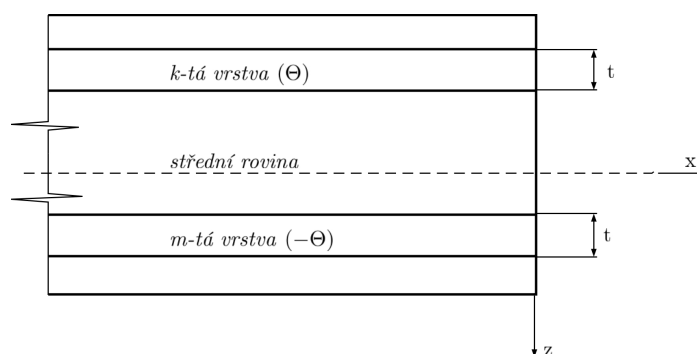
$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

2.4.2 Vyrovnané lamináty

Vyrovnané lamináty jsou takové lamináty, kde pro každou vrstvu k , která má orientaci vláken pod úhlem $+\Theta$ existuje vrstva m s identickými materiálovými vlastnostmi a tloušťkou, která má orientaci vláken pod úhlem $-\Theta$. Při tomto složení platí

$$(A_{16})_m = -(A_{16})_k, \quad (A_{26})_m = -(A_{26})_k. \quad (2.27)$$

Pokud je takto složený celý laminát, vypadnou z matice tahové tuhosti prvky A_{16}, A_{26} . Tyto prvky v kompozitu způsobují vazbu mezi normálovými silami a smykovou deformací, jak bylo uvedeno v kapitole 2.4. Na obrázku 2.12 lze vidět, že vzájemná poloha mezi těmito vrstvami není důležitá [7, 8].



Obrázek 2.12: Příklad vyrovnaného laminátu

2.4.3 Vyrovnané symetrické lamináty

Vyrovnané symetrické lamináty musí splňovat podmínky jak pro symetrické, tak i pro vyrovnané lamináty. Toho lze dosáhnout pouze kladením čtyř vrstev se stejnou tloušťkou a stejnými mechanickými vlastnostmi v následujícím pořadí orientací $(\Theta, -\Theta)_s$. Díky vrstvám s úhly Θ a $-\Theta$ ztrácí laminát vazbu mezi normálovými silami a smykovou deformací, zatímco symetrie vůči střední rovině zajistí ztrátu vazeb mezi tahem a ohybem a tahem a krutem [8]. V tomto případě se rovnice (2.22) dostane do tvaru

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

a s vazbou mezi smykovými silami a zkosem jako u izotropního materiálu ve tvaru

$$N_{xy} = A_{66}\gamma_{xy}.$$

Vztah mezi momenty a křivostí desky je stejný jako rovnice (2.26) u symetrického laminátu z kapitoly 2.4.1 [7].

2.5 Křížově vrstvené lamináty

Tyto lamináty jsou tvořeny postupným skládáním stejných vrstev pod úhly 0 a $\pi/2$. Tyto lamináty můžeme skládat symetricky a antisymetricky [8].

2.5.1 Symetrické křížově vrstvené lamináty

Tento laminát, symetricky vrstvený podle střední vrstvy, má lichý počet vrstev podle střední roviny. Laminát má počet vrstev $n \geq 3$. Tyto lamináty mají všechny klady symetrických laminátů a navíc vyžívají vlastnosti, že prvky matice tuhosti mezi tahem a smykem jsou nulové, a proto pro tyto prvky platí

$$A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0.$$

Vlastnosti symetrického křížově vrstveného laminátu jsou stejné jako vlastnosti ortotropní desky k jejím hlavním směrům [8].

3 Stabilita desek

V této kapitole se budeme zabývat analýzou příčného průhybu desek pod zatížením příčných sil a predikcí sil potřebných ke ztrátě stability laminátové desky. Příčný průhyb způsobený ohybem je obvykle větší než průhyb desky způsobený tlakovými silami působícími na okraje desky, protože ohybová tuhost je obvykle menší než tahová tuhost [11]. Při primárním návrhu desky se v mnoha případech zanedbávají příčné smykové deformace a deformace způsobené změnou teploty a vlhkosti pro získání jednoduššího řešení na úkor chyb, které tímto zjednodušením vznikly. Tento model je poté zkoumán z hlediska ohybové analýzy, která je obvykle zásadní [12]. Ztráta stability se definuje jako stav, při kterém tlakové a smykové síly působící ve směru normály tloušťky desky způsobují nadměrný příčný průhyb. V rovnovážných rovnicích pro průhyb desek jsou zahrnuty jak ohybové, tak i tlakové a smykové síly. Vztah mezi průhybem a tlakovými silami se ale bere v potaz pouze při ztrátě stability nebo při nadměrném průhybu. Důvod spočívá v konstrukci laminátů, které jsou navrhovány převážně pro ohyb a řeší se u nich ohybová analýza desek a tlakové se smykovými silami jsou malé pro ztrátu stability [11].

3.1 Ohybová analýza desek

V kapitole 2.2 jsme z rovnice rovnováhy získali vztah (2.6) ve tvaru

$$M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} = -p(x, y).$$

Do této rovnice dosadíme ze základních rovnic laminátové desky, konkrétně pro momenty ve tvaru

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \boldsymbol{\sigma}^x dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{T}_\sigma^{xp} \mathbf{S} \mathbf{T}_\varepsilon^{px} dz \boldsymbol{\varepsilon}^x = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_0^x + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}.$$

Pro následující odvození budeme uvažovat desku z jedné laminy s úhlem natočení vláken α a tloušťkou h . Tato lamina má všechny prvky matice vazební tuhosti \mathbf{B} nulové, a proto budou základní rovnice laminátové desky ve tvaru

$$\mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{T}_\sigma^{xp}(\Theta) \mathbf{S} \mathbf{T}_\varepsilon^{px}(\Theta) dz \boldsymbol{\kappa} = \frac{h^3}{12} \mathbf{T}_\sigma^{xp}(\Theta) \mathbf{S} \mathbf{T}_\varepsilon^{px}(\Theta) \boldsymbol{\kappa}$$

nebo zjednodušeně ve tvaru

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Tyto rovnice dosadíme do (2.6) a získáme rovnici pro ohybovou analýzu desky ve tvaru

$$D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxxy} + (2D_{12} + 4D_{66})w_{,xxyy} + 4D_{23}w_{,xyyy} + D_{22}w_{,yyyy} = p. \quad (3.2)$$

Tuto rovnici můžeme pro symetricky křížově vrstvené lamináty zjednodušit do tvaru

$$D_{11}w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} = p(x, y), \quad (3.3)$$

kde koeficienty jsou obvykle zjednodušeny do formy

$$D_{11} \equiv D_1, D_{22} \equiv D_2, (D_{12} + 2D_{66}) \equiv D_3$$

a rovnice (3.3) se dostane do tvaru

$$D_1w_{,xxxx} + 2D_3w_{,xxyy} + D_2w_{,yyyy} = p(x, y), \quad (3.4)$$

Tato zjednodušená forma rovnice se také využívá v konstrukci pro prvotní konstrukci desek, kdy se zanedbávají vazby mezi tahem a smykem, teplotní změny a změny vlhkosti, což může vést k podstatným chybám ve výpočtech. Tyto nevýhody jsou ale kompenzovány jednodušším a rychlejším způsobem výpočtu [6].

Pro izotropní desky se vztah mezi momenty a křivostí desky zjednoduší do podoby

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{E\nu h^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{E\nu h^3}{12(1-\nu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{bmatrix}.$$

kde μ je Poissonovo číslo a E je modul pružnosti. Po dosazení těchto vztahů do (2.6) dostaneme vztah pro ohybovou analýzu izotropních desek ve tvaru

$$Dw_{,xxxx} + 2Dw_{,xxyy} + Dw_{,yyyy} = p(x, y), \quad (3.5)$$

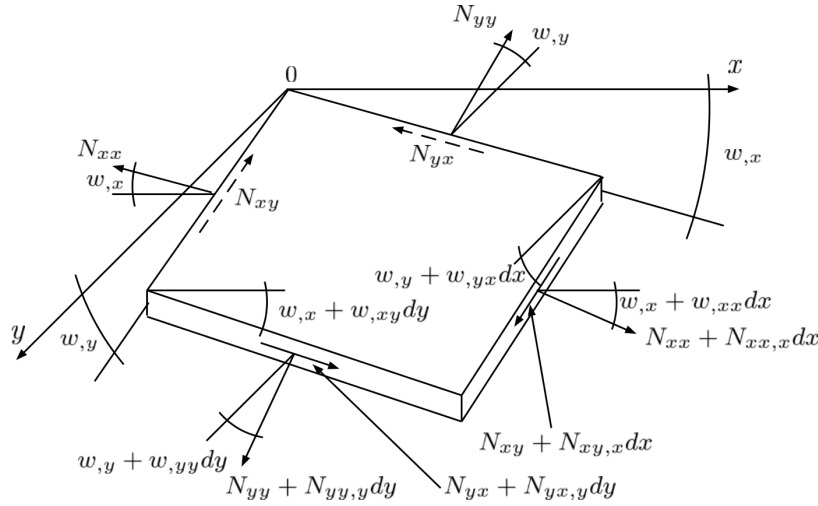
kde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Rovnice (3.1) - (3.5) můžeme řešit dvěma způsoby: přímým řešením diferenciálních rovnic nebo použitím přibližných energetických metod, například principem minima úplné potenciální energie. Přímé analytické řešení diferenciálních rovnic kompozitních desek spadá do několika kategorií. Nejčastěji se využívá separace proměnných, kde příčný průhyb nahradíme dvěma fourierovými řadami (řešení podle Naviera), nebo jednou fourierovou řadou (řešení podle M. Levyho). Každé z těchto řešení má své výhody a nevýhody, vhodnost použití těchto metod záleží na okrajových podmínkách dané desky. Řešení dle Naviera se využívá pro desky, které jsou na všech stranách prostě podepřeny. Řešení dle Levyho je vhodné pro desky, které jsou na dvou protilehlých stranách prostě podepřeny a na druhých protilehlých stranách deska podepřena není. Přímé řešení lze obvykle použít pro jednoduché příklady se základními okrajovými podmínkami. Pro složitější případy je vhodné použít přibližné energetické metody, které jsou v mnoha případech rychlejší. V některých případech jsou energetické metody jediné možné řešení [6]. Fourierovy řady není možné použít pro výpočet, pokud není na daných protilehlých stranách deska prostě podepřena. V těchto případech lze použít pouze přibližná řešení, například Galerkinovu nebo Ritzovu metodu [11].

3.2 Ztráta stability laminátové desky

V kapitole 3.1 byly odvozeny vzorce pro ohybovou analýzu desek, která byla způsobena příčnými silami. Síly N_{xx} , N_{yy} a N_{xy} působící ve směru normály tloušťky byly minimální [11, 6]. Pro tyto případy byla rovnováha soustavy stabilní a příčný průhyb byl zanedbatelný. Při nárůstu sil působících ve směru normály na kritickou mez dochází ke ztrátě stability a soustava se dostává do labilního stavu. K tomuto meznímu stavu dochází při kritické síle pro ztrátu stability [13]. Pro výpočet kritické síly ztráty stability vyjmeme ze zdeformované desky element o rozměrech $dx \times dy \times h$. Na tento element působí síly působící ve směru normály tloušťky a zkoumáme vztah mezi příčným průhybem a těmito silami [6]. Element je zobrazen na obrázku 3.1. Vnější tlakové zatížení p , vnitřní lineární hustoty síly Q_{xz} a Q_{yz} a hustoty momentu působí na tento element stejně jako v rovnovážném stavu. Jako u rovnovážného stavu předpokládejme rozdílné síly a deformace přes daný element a od třetího členu zanedbáme všechny následující členy Taylorova rozvoje. Úhly natočení $w_{,x}$ a $w_{,y}$ jsou stále malé [1].



Obrázek 3.1: síly působící na element v nerovnovážném stavu [1]

Při součtu sil působících ve směru osy x a y dostaneme stejné rovnice jako v kapitole 2.2, čili ve směru osy x

$$N_{xx,x} + N_{yx,y} = 0,$$

a ve směru osy y

$$N_{yy,y} + N_{xy,x} = 0.$$

Součet sil ve směru osy z si pro přehlednost rozdělíme na složky od síly N_{xx} , od síly N_{yy} a od síly N_{xy} . Složky od síly N_x ve směru osy z jsou

$$(N_{xx} + N_{xx,x}dx)dy(w_{,x} + w_{,xx}dx) - N_{xx}dyw_{,x},$$

po úpravě a zanedbání členů o řád nižších dostaneme tyto členy

$$(N_{xx}xw_{,xx} + N_{xx,x}w_{,x})dx dy.$$

Analogicky pro sílu N_{yy} ve směru osy z dostaneme tyto členy

$$(N_{yy}w_{,yy} + N_{yy,y}w_{,y})dx dy$$

a pro sílu N_{xy}

$$(N_{xy,x}w_{,y} + N_{xy}w_{,yx} + N_{yx}w_{,xy} + N_{yx,y}w_{,x})dx dy.$$

Výsledný součet sil ve směru osy z je

$$(p + Q_{xz,x} + Q_{yz,y} + N_{xx}w_{,xx} + N_{xx,x}w_{,x} + N_{yy}w_{,yy} + N_{yy,y}w_{,y} + N_{xy,x}w_{,y} + N_{xy}w_{,yx} + N_{yx}w_{,xy} + N_{yx,y}w_{,x})dx dy = 0. \quad (3.6)$$

Do této rovnice dosadíme z (2.1), (2.2), (2.4) a (2.5) a dostaneme diferenciální rovnici pro výpočet ztráty stability zohledňující vliv sil N_{xx} , N_{yy} a N_{xy} na příčný průhyb w ve tvaru

$$M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} = p(x, y) + N_{xx}w_{,xx} + N_{yy}w_{,yy} + 2N_{xy}w_{,xy} \quad (3.7)$$

Zdůrazněme, že síla potřebná ke ztrátě stability je nezávislá na příčných silách působících na laminátovou desku. Při analýze dané desky mohou tyto síly v kombinaci se silami působícími ve směru normály tloušťky desky způsobit napětí, při kterém dojde k poruše desky před ztrátou stability. Tento jev je patrný i u vlastních frekvencí dané desky, kdy příčné síly nijak tyto frekvence neovlivní. Při návrhu konstrukce laminátové desky s rizikem ztráty stability je doporučeno desky skládat symetricky podle střední roviny. Touto konstrukcí jsou zajištěny nulové prvky vazební matice a je tím redukována pravděpodobnost poruchy desky před kritickou silou způsobující ztrátu stability [6].

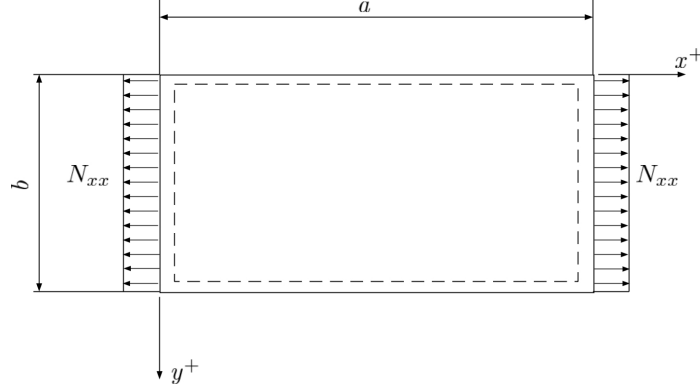
3.3 Okrajové podmínky

Pro řešení diferenciálních rovnic čtvrtého řádu pro ohybovou rovnici i rovnici pro ztrátu stability jsou zapotřebí čtyři okrajové podmínky na okrajích rovnoběžných s osou x a čtyři okrajové podmínky na okrajích desek rovnoběžných s osou y . To znamená dvě okrajové podmínky na každé straně [6]. Okrajové podmínky obvykle dělíme na deformační a silové [14]. Pro prostě podepřenou stranu se používají okrajové podmínky ve formě

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ M_n &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde n je směr normály daného okraje [6]. Pro tuhé vetknutí dané strany jsou používány okrajové podmínky

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$



Obrázek 3.2: Izotropní deska zatížena silou N_{xx} [15]

3.4 Ztráta stability při jednoosém tlakovém napětí

Uvažujme izotropní desku o rozměrech $a \times b$, která je zatížena silou N_{xx} . Ostatní síly N_{yy} a N_{xy} jsou nulové, stejně jako příčné tlakové zatížení $p(x, y)$. Deska je na všech stranách prostě podepřena. Deska zobrazena na obrázku 3.2 [6]. Rovnici (3.7) pro tuto izotropní desku můžeme zjednodušit do tvaru

$$Dw_{,xxxx} + 2Dw_{,xxyy} + Dw_{,yyyy} - N_{xx}w_{,xx} = 0, \quad (3.10)$$

kde

$$D = \frac{1}{12} \frac{Eh^3}{1 - \nu^2}.$$

Jak bylo uvedeno v kapitole 3.1, desky prostě podepřenou ve všech stranách můžeme přímo řešit pomocí separace proměnných, konkrétně použijeme řešení dle Naviera. Funkci příčného průhybu nahradíme dvěma fourierovými řadami ve tvaru

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots). \quad (3.11)$$

Tato funkce musí splňovat okrajové podmínky dané desky z (3.8). Po příslušné parciální derivaci funkce dosadíme do rovnice (3.5) a dostáváme rovnici

$$\sum_m \sum_n \left[D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + N_{xx}\pi^2 \frac{m^2}{a^2} \right] A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

Netriviálním řešením této rovnice je

$$D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + N_{xx}\pi^2 \frac{m^2}{a^2} = 0.$$

Z tohoto vztahu získáme vztah pro výpočet kritické síly pro ztrátu stability při jednoosém napětí ve tvaru

$$N_{xxcr} = -\frac{D\pi^2 a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2, \quad (3.12)$$

kde index $_{cr}$ značí kritickou sílu způsobující ztrátu stability. Lze si všimnout, že kritická síla je záporná a působí na danou desku tlakovým zatížením. m a n jsou vlastní čísla dané soustavy. Kombinace celých vlastních čísel značí kritickou sílu pro ztrátu stability. Fyzikální význam má ale pouze nejmenší z těchto sil. V tomto případě musí být vlastní číslo $n = 1$. Druhé vlastní číslo závisí na geometrii dané desky. Zavedeme si poměr mezi danými stranami $r = a/b$ a při substituci v rovnici (3.12), kdy $n = 1$ je

$$N_{xxcr} = -\frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{m}{r} + \frac{r}{m} \right)^2 . \quad (3.13)$$

Při ($a < b$) se bude kritická síla s přibývajícím velikostí vlastního čísla m zvětšovat, a proto minimální kritická síla bude pro $m = n = 1$. Příčný průhyb bude definován funkcí

$$w(x, y) = A_{11} \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) \quad (3.14)$$

a kritická síla bude nabývat hodnoty

$$N_{xxcr} = -\frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{1}{r} + r \right)^2 . \quad (3.15)$$

Můžeme dále najít poměr šířky a délky, při kterém dosahuje kritická síla pro ztrátu stability svého minima, nechť

$$\frac{dN_{xxcr}}{dr} = 0 = -\frac{2D\pi^2}{b^2} \left(\frac{1}{r} + r \right) \left(-\frac{1}{r^2} + 1 \right) .$$

Tato rovnice je splněna pro $r = 1$. Minimální kritická síla pro $a = b$ a $m = n = 1$ je

$$N_{xxcra=b} = -\frac{4\pi^2}{b^2} = -\frac{4\pi^2}{a^2} . \quad (3.16)$$

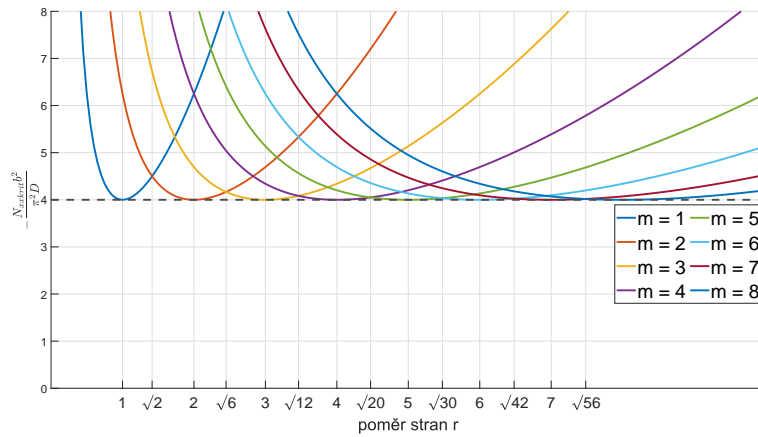
V případech, kdy deska byla širší než delší minimální kritická síla nastala při vlastním čísle $m = 1$. Existuje ale poměr stran r , při kterém by kritická síla pro vlastní číslo $m = 2$ byla menší než pro $m = 1$? Tuto otázku lze vyjádřit matematicky ve formě

$$\left(\frac{m}{r} + \frac{r}{m} \right)^2 \leq \left(\frac{m-1}{r} + \frac{r}{m-1} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad m(m-1) \leq r^2 \quad (3.17)$$

V rovnici (3.17) lze vidět, že kritická síla pro ztrátu stability $N_{xxcr}(m = 2) \leq N_{xxcr}(m = 1)$ bude platit v případě, že poměr mezi stranami $r = \sqrt{2}$. Tento fakt zároveň znamená, že tato izotropní deska se při ztrátě stability ve směru osy x vychýlí o celou sinusoidu, ne jen o půlku sinusoidy, protože příčný průhyb bude

$$w(x, y) = A_{21} \sin \left(\frac{\pi 2x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right) .$$

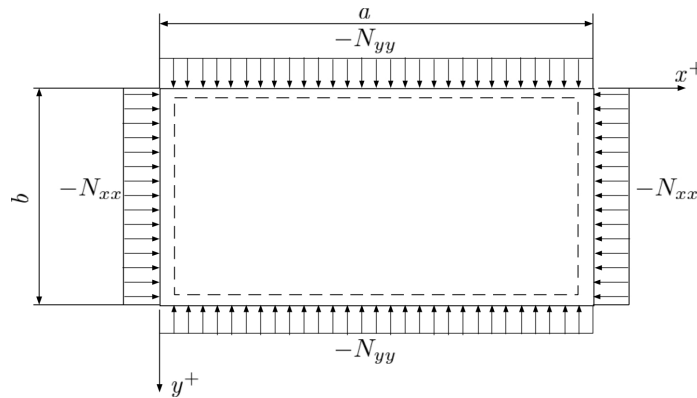
Na obrázku 3.3 lze vidět závislost volby vlastního čísla dané desky na poměru délky a šířky desky. Zároveň lze na tomto obrázku vidět, při jakém poměru stran dosahuje dané vlastní číslo své minimální síly pro ztrátu stability. Minimální kritická síla je pro všechny vlastní čísla stejná [6, 15].



Obrázek 3.3: Kritická síla pro ztrátu stability jako funkce poměru stran desky a vlastních čísel [6]

3.5 Ztráta stability při dvuosém tlakovém napětí

Uvažujme laminu s vlákny s úhlem natočení $\Theta = 0^\circ$ o rozměrech $a \times b$, která je zatížena silami $-N_{xx}$ a $-N_{yy}$. Příčné tlakové zatížení a smyková síla N_{xy} jsou nulové a deska je na všech stranách prostě podepřena. Laminátová deska je složena z vláken t600 a epoxidové matrice s objemovým podílem vláken 60%. Pro toto složení má lamina $E_L = 139\,800\text{ MPa}$, $E_T = 7759\text{ MPa}$, $G_{LT} = 3817\text{ MPa}$, $\nu_{LT} = 0,340$. Schematicky je lamina zobrazena na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Laminátová deska zatížena silami N_{xx} a N_{yy}

Pro laminovou desku s tímto zatížením a úhlem vláken Θ můžeme rovnici (3.7) s využitím (2.20) zapsat ve tvaru

$$D_{11}w_{,xxxx} + (2D_{12} + 4D_{66})w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} = -N_{xx}w_{,xx} - N_{yy}w_{,yy}, \quad (3.18)$$

kde koeficienty matice ohybové tuhosti pro úhel natočení $\Theta = 0^\circ$ odpovídají matici tuhosti v hlavních směrech vynásobenou tloušťkou vrstvy nebo-li

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{16} & D_{66} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \cdot \begin{bmatrix} E_L & \nu_{LT}E_T & 0 \\ \nu_{TL}E_L & E_T & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT}(1 - \nu_{LT}\nu_{TL}) \end{bmatrix}.$$

Pro řešení této ztráty stability opět použijeme řešení dle Naviera, kde příčný průhyb definujeme jako funkci dvou fourierových řad ve tvaru

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots).$$

Definujme si poměr tlakových sil

$$\alpha = \frac{N_{yy}}{N_{xx}}$$

a po příslušných parciálních derivacích funkce průhybu dostaneme

$$\sum_{m,n} \left[D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + D_3 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - N_{xx} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \alpha N_{xx} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0, \quad (3.19)$$

kde

$$D_{11} \equiv D_1, \quad 2D_{12} + 4D_{66} \equiv D_3, \quad D_{22} \equiv D_2.$$

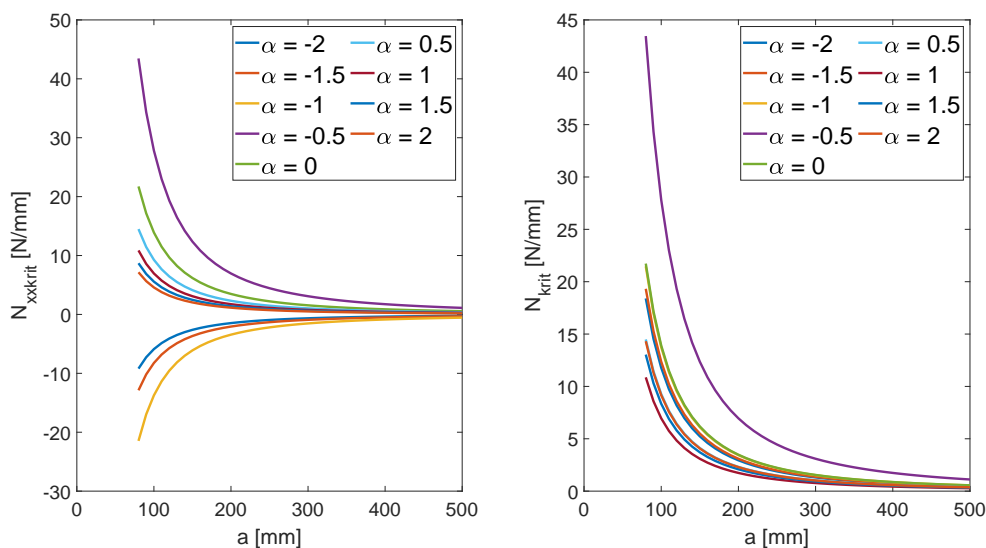
Netriviálním řešením je

$$D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + D_3 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - N_{xx} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \alpha N_{xx} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 = 0.$$

Kritická síla pro ztrátu stability je

$$N_{xxcr} = \pi^2 \frac{\left[D_1 \left(\frac{m}{a} \right)^4 + D_3 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]}{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \alpha \left(\frac{n}{b} \right)^2} \quad (3.20)$$

Vlastní čísla pro určení minimální kritické síly budou záviset na poměru šířky a délky desky, poměru sil α a mikromechanice dané laminy. Na obrázku 3.5 je zobrazen vztah mezi kritickou silou pro ztrátu stability na délce strany a poměru sil α pro čtvercovou laminátovou desku s úhlem natočení vláken $\Theta = 0^\circ$. Na prvním grafu lze vidět kritickou sílu v závislosti na směru působení síly. Při kladném průběhu působí síla způsobující ztrátu stability ve směru osy x , zatímco při průběhu kritické síly v záporných hodnotách působí kritická síla ve směru osy y . Ve druhém grafu je porovnání velikosti kritické síly bez závislosti na směru působení. Na prvním grafu je zřejmé, že pro $\alpha = \langle -2; -1 \rangle$ bude kritická síla působit ve směru osy y . Pro ostatní poměry



Obrázek 3.5: Závislost kritické síly pro ztrátu stability na délce strany a poměru sil N_{xx} a N_{yy} pro čtvercovou laminátovou desku

α bude tato kritická síla působit ve směru osy x . Z druhého grafu můžeme vyčíst, že nejodolnější deska proti ztrátě stability bude při poměru $\alpha = -0.5$. Průběhy kritické síly v závislosti na délce strany a jsou pro poměry sil $\alpha = \langle -2; 1, 5 \rangle$ a jednoosé zatížení velmi podobné. Všechny tyto výsledky jsou při jednovrstvé lamině silně závislé na materiálových vlastnostech kompozitu v příčném a podélném směru vláken. Například při změně úhlu natočení vláken na $\Theta = 90^\circ$ budou desky odolnější vůči ztrátě stability při tlakovém zatížení ve směru y a tahovém zatížení ve směru x .

3.6 Energetické řešení ztráty stability

Při komplikovanějších případech geometrie desky, okrajových podmínkách a způsobu zatížení dochází při řešení přímým řešením ke komplexnějším výpočtům nebo je tento způsob řešení nemožný. Tyto případy musíme řešit pouze přibližně. Jedním z přibližných řešení daných desek jsou energetické metody [13]. Energetické principy jsou základem pro výpočty metodou konečných prvků [16]. V mechanice se používají tři základní energetické principy. Prvním je princip minima potenciální energie, druhým je minimum doplňkové energie a třetím je Hellinger-Reissner variační princip. Třetí zmíněný princip se ale v těchto případech využívá zřídka, neboť je zapotřebí splnit silové okrajové podmínky a rovnici rovnováhy, které se splňují hůře než podmínky na posuv. Dále se budeme zabývat pouze principem minima potenciální energie. Tento princip je při komplikovaném způsobu zatížení nebo složitých okrajových podmínkách ideálním nástrojem pro získání relevantních výsledků [6].

3.6.1 Deformační energie laminátové desky

Deformační energie elastického tělesa v souřadném systému x, y, z je dána vztahem

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_{xx} + \sigma_y \varepsilon_{yy} + \sigma_z \varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz, \quad (3.21)$$

kde je trojitý integrál vztažen na dané deformované těleso. V důsledku aplikace *Kirchhoffovy hypotézy* je $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ a rovnici (3.21) můžeme zapsat ve tvaru

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (Q_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx}^2 + 2Q_{12}^{(k)} \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} + 2Q_{16}^{(k)} \varepsilon_{xx} \gamma_{xy} + 2Q_{26}^{(k)} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy} + Q_{22}^{(k)} \varepsilon_{yy}^2 + Q_{66}^{(k)} \gamma_{xy}^2) dx dy dz, \quad (3.22)$$

kde $Q_{ij}^{(k)}$ je člen mimoosové matice k -té vrstvy získaný ze vztahu

$$Q = T_{\sigma}^{xp} S T_{\varepsilon}^{px}. \quad (3.23)$$

Deformace nahradíme vztahy (2.10) – (2.12) a dále budeme uvažovat pouze o symetrických laminátových deskách, kde členy matice vazební tuhosti $B_{ij} = 0$. Tímto předpokladem zmizí vazba mezi rovinnými posuvy u_0, v_0 a příčným průhybem w . Pro čistý ohyb a problematiku ztráty stability můžeme uvažovat, že deformační energie způsobená rovinnými posuvy je konstantní a deformační energii pro čistý ohyb a ztrátu stability po integraci po tloušťce stěny je

$$U = \frac{1}{2} \iint_A [D_{11} w_{,xx}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} + D_{22} w_{,yy}^2 + 4(D_{16} w_{,xx} + D_{26} w_{,yy}) w_{,xy} + 4D_{66} w_{,xy}^2] dx dy + C, \quad (3.24)$$

kde C je konstanta deformační energie způsobené rovinnými posuvy u_0, v_0 .

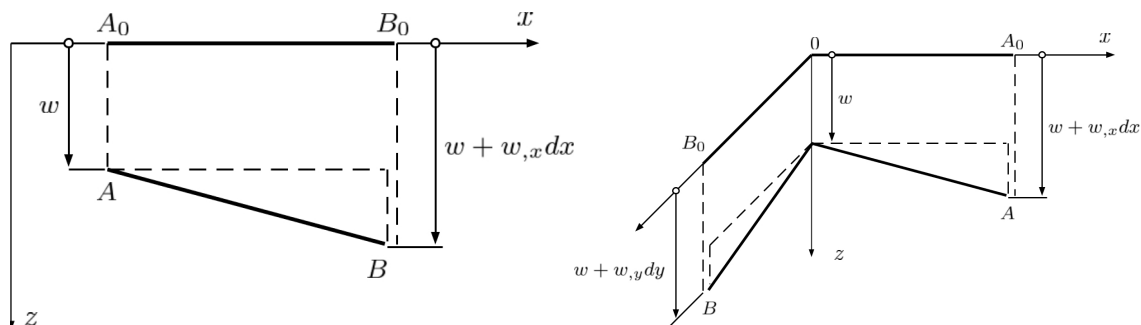
3.6.2 Potenciální energie laminátové desky

Potenciální energii rozdělíme na dvě části: energii způsobenou příčnými silami a energii způsobenou silami působícími ve směru normály tloušťky. Potenciální energie způsobená příčnými silami je

$$W = - \iint_A p(x, y) w dx dy \quad (3.25)$$

a potenciální energie způsobená silami působícími ve směru normály tloušťky je

$$V = \iint_A (N_{xx} \varepsilon_{xx} + N_{yy} \varepsilon_{yy} + N_{xy} \varepsilon_{xy}) dx dy \quad (3.26)$$



Obrázek 3.6: Deformace v závislosti na příčném průhybu w pro (a) normálovou deformaci a (b) smykovou deformaci [15]

kde N_{xx} , N_{yy} a N_{xy} jsou počáteční síly působící ve směru normály tloušťky stěny před ztrátou stability a ε_{xx} , ε_{yy} a ε_{zz} jsou deformace střední roviny způsobené příčným průhybem w . Tyto deformace jsou obvykle spjaty s velkými odchylkami získané z *Green-Lagrangeova* tenzoru deformace a tyto deformace jsou nelineární funkcí průhybu w [16].

Pro lineární vztahy uvažujme element o velikosti dx x dy nacházející se ve středové rovině desky. Tento element je ohybově zatížen a zkoumáme vztah mezi deformací a příčným průhybem w . Jak lze vidět na obrázku 3.6(a), při deformaci ε_{xx} se element $|A_0B_0|$ zdeformuje na element $|AB|$ při zachování vzdálenosti mezi body dx . Horizontální složka tohoto zdeformovaného elementu bude

$$\left[dx^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \dots$$

Deformace střední roviny při aproximaci prvních dvou členů bude

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (3.27)$$

Analogicky ve směru osy y

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (3.28)$$

Pro určení smykové deformace uvažujme dva elementy $|OA_0|$ a $|OB_0|$ ve směrech os x a y , zobrazeném na obrázku 3.6(b). Tyto elementy zdeformují do pozice $|O'A|$ a $|O'B|$. Zdeformovaný element $|O'A|$ si rozdělíme na směrové kosiny l_1, m_1 a n_1 a element $|O'B|$ na l_2, m_2 a n_2 , kde

$$l_1 = \frac{\left[dx^2 - \frac{\partial w}{\partial x} dx \right]^{\frac{1}{2}}}{dx} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad m_1 = 0 \quad n_1 = \frac{(\partial w / \partial x) dx}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

a

$$l_2 = 0 \quad m_2 \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad n_2 = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Smykovou deformaci získáme porovnáním $\angle A_0OB_0$ a $\angle AO'B$ ve tvaru

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle AO'B = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \angle AO'B \right) = \cos(\angle AO'B) = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2.$$

Po dosažení získáváme smykovou deformaci v závislosti na průhybu w ve tvaru

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.29)$$

Tyto vztahy dosadíme do (3.26) a dostaneme

$$V = \frac{1}{2} \iint_A [N_{xx} w_{,x}^2 + N_{yy} w_{,y}^2 + 2N_{xy} w_{,xy}] dx dy. \quad (3.30)$$

Rovnice (3.24), (3.25) a (3.30) jsou základem pro získání přibližného řešení energetickými metodami. Dvěma příklady energetických metod na principu minima potenciální energie jsou Ritzova a Galerkinova metoda [15, 16].

3.7 Ritzova metoda

Ritzova metoda poskytuje metodu založenou na principu minimální potenciální energie, při kterém získáme přibližnou hodnotu okrajové úlohy. Tato metoda lze použít pro výpočet čistého ohybu, ztráty stability nebo pro volné kmitání. Pro ztrátu stability můžeme vyjádřit energetickou podmínku ve tvaru

$$\Pi(u_0, v_0, w) = U + V + W. \quad (3.31)$$

Deformační a potenciální energii v Ritzově metodě vyjádříme funkcí příčného průhybu w ve tvaru

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} W_{mn}(x, y). \quad (3.32)$$

kde A_{mn} jsou neznámé koeficienty a W_{mn} jsou funkce obvykle separátně proměnné $X_m(x)$ a $Y_n(y)$. Tyto funkce musí splňovat okrajové podmínky zadané desky a zároveň musí být jejich derivace spojitě minimálně ve stejném řádu jako jsou diferenciální rovnice. Při substituci (3.32) do (3.31) vede celý problém k minimalizaci neznámých koeficientů. Matematicky toto vyjádříme ve tvaru

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = 0 \quad \begin{cases} m = 1, 2, \dots, M_1 \\ n = 1, 2, \dots, N_1 \end{cases} \quad (3.33)$$

Po této minimalizaci dostaneme soustavu rovnic s $M_1 \times N_1$ neznámými koeficienty a počtem rovnic. Tento postup vede u ztráty stability k problematice vlastních čísel dané soustavy rovnic [16].

3.8 Řešení ztráty stability Ritzovou metodou

Při následujících výpočtech uvažujme desku o rozměrech $a \times b$, která je zatížená silami N_{xx} , N_{yy} a N_{xy} . Příčné zatížení zanedbejme a z rovnic (3.24), (3.30) dostaneme vztah ve tvaru

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [& D_{11} w_{,xx}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} + D_{22} w_{,yy}^2 + 4D_{16} w_{,xx} w_{,xy} + \\ & + 4D_{26} w_{,yy} w_{,xy} + 4D_{66} w_{,xy}^2 + N_{xx} w_{,x}^2 + N_{yy} w_{,y}^2 + 2N_{xy} w_{,xy}] dx dy. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Příčný průhyb vyjádříme řadou se separovatelně proměnnými ve tvaru

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y),$$

které musí splňovat okrajové podmínky řešené desky. Okrajové podmínky pro základní typy uložení jsou

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \quad \text{pro tuhé vetknutí} \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2} = 0 & \quad \text{pro prosté podepření.} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Při substituci (3.32) do (3.34) řešíme problém ve tvaru [16]

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{m,p=1}^M \sum_{n,r=1}^N \left[& D_{11} \iint_A X_{m,xx} X_{p,xx} Y_n Y_r dx dy + D_{22} \iint_A X_m X_p Y_{n,yy} Y_{r,yy} dx dy + \right. \\ & + D_{12} \left(\iint_A X_m X_{p,xx} Y_{n,yy} Y_r dx dy + \iint_A X_{m,xx} X_p Y_n Y_{r,yy} dx dy \right) + \\ & + 2D_{16} \left(\iint_A X_{m,xx} X_{p,x} Y_n Y_{r,y} dx dy \iint_A X_{m,x} X_{p,xx} Y_{n,y} Y_r dx dy \right) + \\ & + 2D_{26} \left(\iint_A X_m X_{p,x} Y_{n,yy} Y_{r,y} dx dy \iint_A X_{m,x} X_p Y_{n,y} Y_{r,yy} dx dy \right) + \\ & + 4D_{66} \iint_A X_{m,x} X_{p,x} Y_{n,y} Y_{r,y} dx dy + N_{xx} \iint_A X_{m,x} X_{p,x} Y_n Y_r dx dy + \\ & + N_{xy} \left(\iint_A X_{m,x} X_p Y_n Y_{r,y} dx dy + \iint_A X_m X_{p,x} Y_{n,x} Y_r dx dy \right) + \\ & \left. + N_{yy} \iint_A X_m X_p Y_{n,y} Y_{r,y} dx dy \right] \frac{1}{2} A_{mn}^2 \quad (3.36) \end{aligned}$$

3.8.1 Ztráta stability pro prostě podepřenou desku

Pokud je deska na všech stranách prostě podepřena, použijeme pro funkci příčného průhybu sinusové řady ve tvaru

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.37)$$

Při dosazení do (3.36) se dostaneme k integraci dvou řad. První touto řadou je

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(m-p)\pi x}{a} - \cos \frac{(m+p)\pi x}{a} \right) dx.$$

Tento výraz můžeme dále integrovat a získáme

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(m-p)\pi x}{a} \frac{a}{(m-p)\pi} - \sin \frac{(m+p)\pi x}{a} \frac{a}{(m+p)\pi} \right]_0^a.$$

Sinus je pro $k\pi x = 0$, $k \in N$, a proto nás zajímá pouze případ, kdy $m = p$ a

$$\begin{aligned} \lim_{m-p \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(m-p)\pi x}{a} \frac{a}{(m-p)\pi} \right]_0^a &= \lim_{m-p \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\sin \frac{(m-p)\pi a}{a} \frac{a}{(m-p)\pi} \right) = \\ &= \lim_{m-p \rightarrow 0} \frac{a}{2} \left[\frac{\sin(m-p)\pi}{(m-p)\pi} \right] \Big|_{\text{L'Hospitalovo pravidlo}} = \\ &= \lim_{m-p \rightarrow 0} \frac{a \cos((m-p)\pi) \pi}{2 \pi} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Tímto dostáváme

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} dx = \begin{cases} = 0, & \text{pro } m \neq p, \quad (m, p \in N), \\ = \frac{a}{2}, & \text{pro } m = p, \quad (m, p \in N). \end{cases} \quad (3.38)$$

Analogicky pro sinusové řady ve směru osy y a tím dostáváme

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy = \delta_{mp} \delta_{nr} \frac{ab}{4}, \quad (3.39)$$

kde *Kroneckerova delta*

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{pro } l = k, \\ 0 & \text{pro } l \neq k. \end{cases}$$

Druhou řadou, kterou je zapotřebí vyřešit je

$$\int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\cos \frac{(m-p)\pi x}{a} + \cos \frac{(m+p)\pi x}{a} \right) dx.$$

Jak šlo vidět u předchozí řady, pouze první člen je nenulový, a proto

$$\int_0^a \int_0^b \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{r\pi y}{b} dx dy = \delta_{mp} \delta_{nr} \frac{ab}{4}, \quad (3.40)$$

Poslední řadou je

$$I_{mp} = \int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\sin \frac{(p-m)\pi x}{a} + \sin \frac{(p+m)\pi x}{a} \right) dx.$$

Po integraci a úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} I_{mp} &= \frac{1}{2} \int_0^a \sin \frac{(p-m)\pi x}{a} dx + \frac{1}{2} \int_0^a \sin \frac{(p+m)\pi x}{a} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{a}{(p+m)\pi} (1 - \cos(p+m)\pi) + \frac{1}{2} \frac{a}{(p-m)\pi} (1 - \cos(p-m)\pi) = \\ &= \frac{1}{2} (1 - (-1)^{p+m}) \frac{a}{(p+m)\pi} + \frac{1}{2} (1 - (-1)^{p-m}) \frac{a}{(p-m)\pi} \end{aligned}$$

Je-li $m+p$ sudé, pak je

$$m+p = 2k \quad (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow I_{mp} = 0.$$

Je-li $m+p$ liché, pak je

$$m+p = 2k+1 \quad (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow I_{mp} = \frac{a}{(p+m)\pi} + \frac{a}{(p-m)\pi}.$$

Obecně můžeme tento výraz zapsat ve tvaru

$$I_{mp} = (1 - (-1)^{p+m}) \frac{a}{\pi} \frac{p}{p^2 - m^2}.$$

Analogicky můžeme vypočítat řady ve směru osy y ve tvaru

$$I_{nr} = (1 - (-1)^{r+n}) \frac{b}{\pi} \frac{r}{r^2 - n^2}.$$

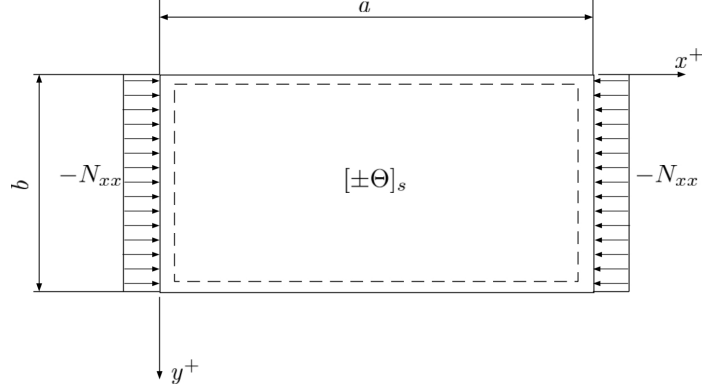
Celou řadu můžeme nyní zapsat ve tvaru

$$\int_0^a \int_0^b \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} dx dy = \Theta_{mpnr} \frac{ab}{\pi^2} \frac{pr}{(p^2 - m^2)(r^2 - n^2)}, \quad (3.41)$$

kde

$$\Theta_{mpnr} = \begin{cases} 0 & \text{je-li } m+p \cup n+r \text{ sudé,} \\ 4 & \text{je-li } m+p \cap n+r \text{ liché.} \end{cases}$$

Při využití vztahů (3.39), (3.40) a (3.41) jsme nyní schopní získat celkovou potenciální energii laminátové desky, přes kterou získáme kritickou sílu pro ztrátu stability [14].



Obrázek 3.7: Laminát ze skladbou vrstev $[\pm\Theta]_s$ zatížená silou $-N_{xx}$

3.9 Symetrická laminátová deska při jednoosém tlakovém napětí

Uvažujme laminátovou desku ze skladbou $[\pm\Theta]_s$ o rozměrech $a \times b$ a tloušťce jednotlivé vrstvy h , která je zatížena silou $-N_{xx}$. Příčné i tlakové síly N_{yy} , N_{xy} zanedbejme a deska je na všech stranách prostě podepřena. Poměr mezi stranami je $b = \gamma \cdot a$. Tento laminát se skládá z vláken t600 a epoxidové matrice s objemovým podílem vláken 60%. Pro toto složení mají jednotlivé laminy $E_L = 139\,800 \text{ MPa}$, $E_T = 7759 \text{ MPa}$, $G_{LT} = 3817 \text{ MPa}$, $\nu_{LT} = 0,340$. Schematicky je tento laminát zobrazen na obrázku 3.7.

Pro zjištění kritické síly pro ztrátu stability vyžijeme Ritzovu energetickou metodu, kde potřebujeme zjistit celkovou potenciální energii laminy. U symetrické laminátové desky je pro případ ztráty stability celková potenciální energie složena z deformační energie a potenciální energie způsobené silami ve směru normály tloušťky. Matematicky vyjádříme celkovou potenciální energii ve tvaru

$$\begin{aligned} \Pi = U + V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [D_{11}w_{,xx}^2 + 2D_{12}w_{,xx}w_{,yy} + D_{22}w_{,yy}^2 + \\ + 4D_{16}w_{,xx}w_{,xy} + 4D_{26}w_{,yy}w_{,xy} + 4D_{66}w_{,xy}^2 - N_{xx}w_{,x}^2] dx dy, \end{aligned} \quad (3.42)$$

kde prvky matice ohybové tuhosti pro vlákna s úhlem natočení Θ získáme z rovnice

$$D = \sum_{k=1}^N \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \mathbf{T}_\sigma(\Theta_k) \mathbf{S}^p \mathbf{T}_\varepsilon(\Theta_k).$$

Funkci příčného průhybu w pro prostě podepřenou desku budou dvě Fourierovy řady ve tvaru

$$w = \sum_m^M \sum_n^N A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots, M \\ n = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases}$$

Po substituci funkce příčného průhybu do (3.42) a minimalizaci potenciální energie díky (3.33) dostaneme soustavu rovnic

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (G_{prmn} - b_{prmn}) A_{mn} = 0 \quad \begin{cases} m, p = 1, 2, 3, \dots, M \\ n, r = 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (3.43)$$

Pro přehlednost zavedeme zkrácenou notaci

$$k = (m-1)M + n \quad \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots, M \\ n = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (3.44)$$

$$l = (p-1)M + r \quad \begin{cases} p = 1, 2, 3, \dots, M \\ r = 1, 2, 3, \dots, N \end{cases} \quad (3.45)$$

a rovnici (3.43) zapíšeme ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{M \times N} \sum_{l=1}^{M \times N} (G_{kl} - \lambda b_{kl}) A_k = 0, \quad (3.46)$$

kde

$$\begin{aligned} G_{kl} = & \frac{ab\pi^4}{4} \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] \delta_{kl} + \\ & -2\pi^4 D_{16} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{p}{a} \right) \left(\frac{r}{b} \right) \frac{ab}{\pi^2} \frac{mn}{(m^2 - p^2)(n^2 - r^2)} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{m}{a} \right) \left(\frac{p}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right) \frac{ab}{\pi^2} \frac{pr}{(p^2 - m^2)(r^2 - n^2)} \right] \Theta_{mnp r} + \\ & -2\pi^4 D_{26} \left[\left(\frac{p}{a} \right) \left(\frac{n}{b} \right)^2 \left(\frac{r}{b} \right) \frac{ab}{\pi^2} \frac{mn}{(m^2 - p^2)(n^2 - r^2)} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{m}{a} \right) \left(\frac{n}{b} \right) \left(\frac{r}{b} \right)^2 \frac{ab}{\pi^2} \frac{pr}{(p^2 - m^2)(r^2 - n^2)} \right] \Theta_{mnp r} \\ & b_{lk} = \frac{ab\pi^2}{4} N_{xx} \left(\frac{m}{a} \right)^2 \delta_{lk}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

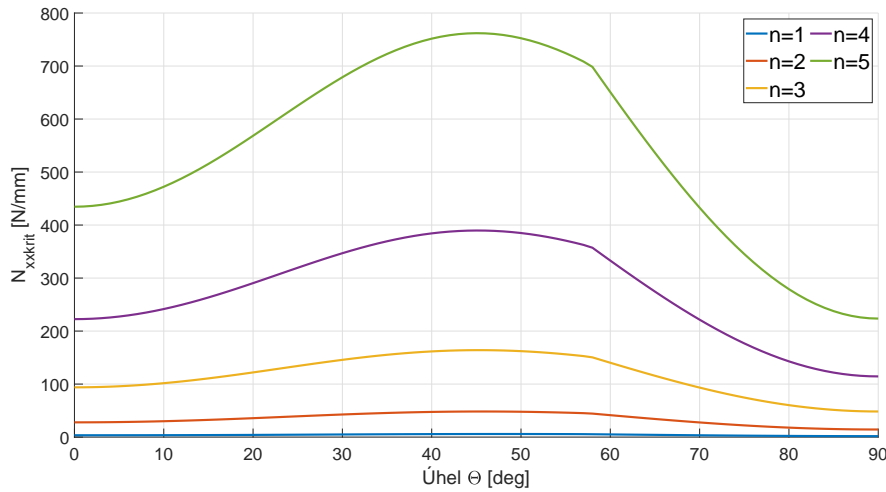
Pokud laminátová deska neztratí stabilitu, průhyb $A_{mn} = 0$, při ztrátě stability je průhyb nenulový. Hodnoty λ pro desku se ztrátou stability jsou vlastní čísla soustavy rovnic (3.46). Tato soustava má $M \times N$ vlastních čísel, ale pouze nejmenší vlastní číslo má fyzikální význam a je důležitý pro výpočet kritické síly. Tímto vlastním číslem vynásobíme prvotní odhad síly N_{xx} a získáme tím kritickou sílu N_{xxcr} [10].

3.9.1 Čtvercový laminát zatížený jednoosým napětím

Uvažujme laminátovou desku o rozměrech $a \times a = 200 \text{ mm}$, tloušťce jednotlivých vrstev $h = 0,25 \text{ mm}$ a skladbě $[\pm\Theta_n]_s$. Pro příčný průhyb je uvažována funkce dvou fourierových řad ve tvaru

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^7 \sum_{n=1}^7 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Na obrázku 3.8 je zobrazena závislost kritické síly N_{xxkrit} na úhlu vláken a počtu vrstev n . Z obrázku je patrné, že k maximální kritické síle dochází při $\Theta = 45^\circ$. Lze také vidět, že nejmenší kritickou sílu za těchto podmínek má deska s úhlem natočení $\Theta = 90^\circ$. Zároveň množstvím vrstev stoupá nutná síla potřebná ke ztrátě stability. Tento jev je z důvodu rostoucí tloušťky laminátu, což při této skladbě způsobuje vyšší hodnoty jednotlivých členů matice ohybové tuhosti. Zároveň lze také vidět trend výrazného nárůstu kritické síly při relativně malém zvýšení počtu vrstev. Například pro úhel $\Theta = 45^\circ$ je nárůst kritické síly o 240 % při porovnání laminátové desky o 8 a 12 vrstvách.



Obrázek 3.8: Laminátová deska se skladbou $[\pm\Theta_n]_s$, závislost kritické síly na úhlu vláken a počtu vrstev n

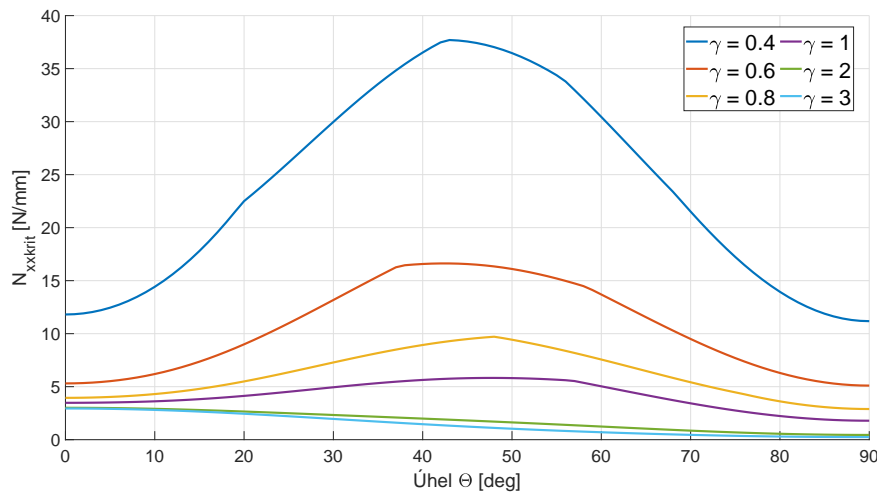
3.9.2 Laminátová deska s proměnným poměrem stran

Uvažujme laminátovou desku o rozměrech $a = 200 \text{ mm}$, $b = \gamma \cdot a$, tloušťce jednotlivých vrstev $h = 0,25 \text{ mm}$ a skladbě $[\pm\Theta]_s$. Pro příčný průhyb w je uvažováno prvních sedm členů dvou fourierových řad ve tvaru

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^7 \sum_{n=1}^7 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Tato soustava bude zatížena silou N_{xx} a budeme zkoumat závislost kritické síly na úhlu vláken Θ a poměru mezi stranami γ . Můžeme si také všimnout, že křivky pro $n \in \langle 2; 5 \rangle$ jsou po částech spojitě, ale $n = 1$ je spojitá v celém intervalu. Toto je způsobeno vlastními čísly matice, které se v bodě u úhlu $\Theta = 57^\circ$ zásadním způsobem změny. Při větším výběru členů fourierových řad pro funkci příčného průhybu by tyto síly byly přesnější, ale čas výpočtu by exponenciálně rostl.

Z obrázku 3.9 můžeme vidět tuto závislost pro $\Theta \in \langle 0; 90 \rangle$ a $\gamma \in \langle 0,4; 3 \rangle$. Můžeme zde pozorovat silný vliv poměru stran γ na průběh kritické síly v závislosti na úhlu

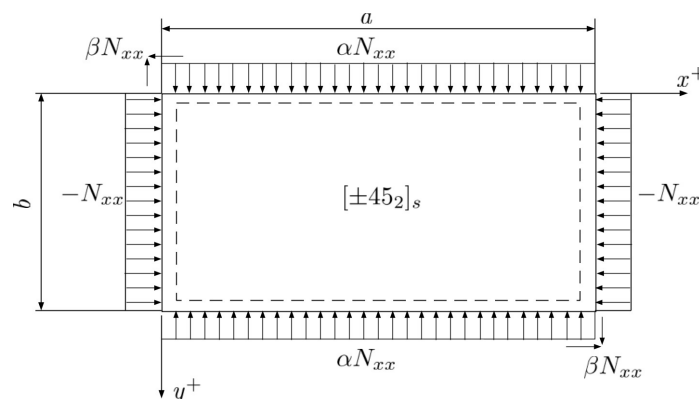


Obrázek 3.9: Laminátová deska se skladbou $[\pm\Theta]_s$, závislost kritické síly na úhlu vláken a poměru mezi stranami Θ

vláken. U desek, kde strana $a \geq b$ kritická síla dosahuje svého maxima pro $\Theta = 45^\circ$. U desek s rozměry $b > a$ tato síla v průběhu klesá a svého minima dosáhne pro $\Theta = 90^\circ$. Nejvyšších hodnot dosahuje v místech, kde vlákna v laminátu jsou rovnoběžná s osou x . Z tohoto důvodu je vhodné při návrhu skladby vrstev v konstrukcích náchylných na ztrátu stability mít vrstvy, kde úhel vláken je $\pm 45^\circ$ vůči dominantní síle působící na tuto desku.

3.10 Symetrická laminátová deska se složením vrstev $\pm 45^\circ$

Uvažujme laminátovou desku se složením vrstev $[\pm 45_2]_s$ o rozměrech $a \times b$ a tloušťce vrstvy h , která je zatížena tlakovými silami $-N_{xx}$, $-N_{yy}$ a $-N_{xy}$. Příčné síly zanedbejme a deska je na všech stranách prostě podepřena a schematicky zobrazena na obrázku 3.10. Pro výpočet kritické síly předpokládejme, že síly $N_{yy} = \alpha \cdot N_{xx}$ a $N_{xy} = \beta \cdot N_{xx}$.



Obrázek 3.10: Laminátová deska $[\pm 45_2]_s$, zatížená silami N_{xx} , αN_{xx} a βN_{xx}

Pro zjištění kritické síly využijeme energetickou *Ritzovu metodu* a spočítáme celkovou potenciální energii daného laminátu. Laminát se bude skládat z vláken t600 a epoxidové matrice s objemovým podílem vláken 60 %. Pro toto složení mají jednotlivé laminy $E_L = 139\,800\text{ MPa}$, $E_T = 7759\text{ MPa}$, $G_{LT} = 3817\text{ MPa}$, $\nu_{LT} = 0,340$. Celková potenciální energie má tvar

$$\begin{aligned} \Pi = U + V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [D_{11}w_{,xx}^2 + 2D_{12}w_{,xx}w_{,yy} + D_{22}w_{,yy}^2 + 4D_{16}w_{,xx}w_{,xy} + \\ + 4D_{26}w_{,yy}w_{,xy} + 4D_{66}w_{,xy}^2 - N_{xx}w_{,x}^2 - \alpha N_{xx}w_{,y}^2 - 2\beta N_{xx}w_{,xy}] dx dy, \end{aligned} \quad (3.49)$$

kde prvky matice ohybové tuhosti pro laminu s N vrstvami a úhlem natočení Θ získáme z rovnice

$$D = \sum_{k=1}^N \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \mathbf{T}_\sigma(\Theta_k) \mathbf{S}^p \mathbf{T}_\varepsilon(\Theta_k).$$

Pro prostě podepřenou desku ze všech stran předepíšeme funkci příčného průhybu w ve tvaru

$$w = \sum_m^M \sum_n^N A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots, M \\ n = 1, 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

Po dosazení funkce příčného průhybu do (3.49) a derivaci příslušných funkcí dostaneme rovnici celkové potenciální energie. Po minimalizaci velikosti průhybu díky (3.33) a následné změně notace indexů dostaneme soustavu rovnic

$$\sum_{k=1}^{M \times N} \sum_{l=1}^{M \times N} (G_{kl} - \lambda b_{kl}) A_k = 0,$$

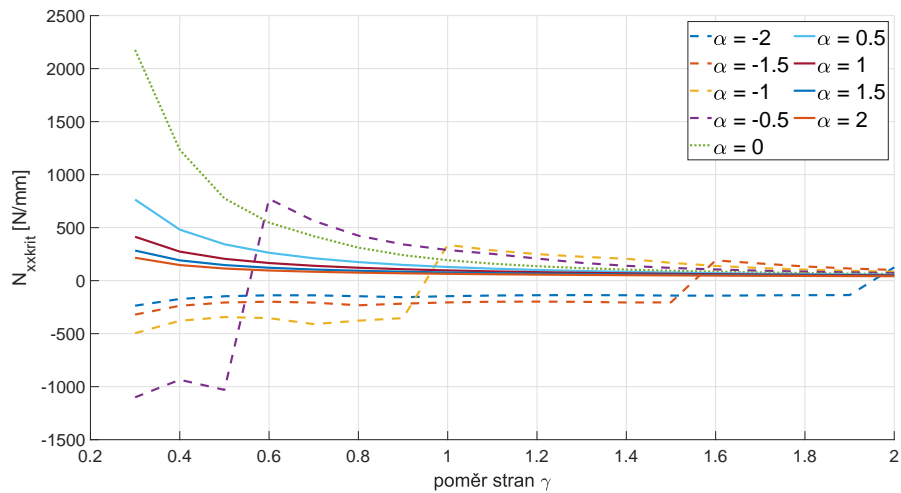
kde G_{kl} je stejné jako v (3.47) na straně 33. b_{kl} získaný z potenciální energie způsobené silami působícími ve směru normály tloušťky bude

$$\begin{aligned} b_{kl} = \frac{ab\pi^2}{4} \left[N_{xx} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \alpha N_{xx} \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \delta_{lk} + \\ + \beta N_{xx} \left[\frac{mnpr}{(p^2 - m^2)(n^2 - r^2)} + \frac{mnpr}{(m^2 - p^2)(r^2 - n^2)} \right] \Theta_{mnpr} \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.10.1 Laminátová deska $\pm 45^\circ$ při dvuosém napětí

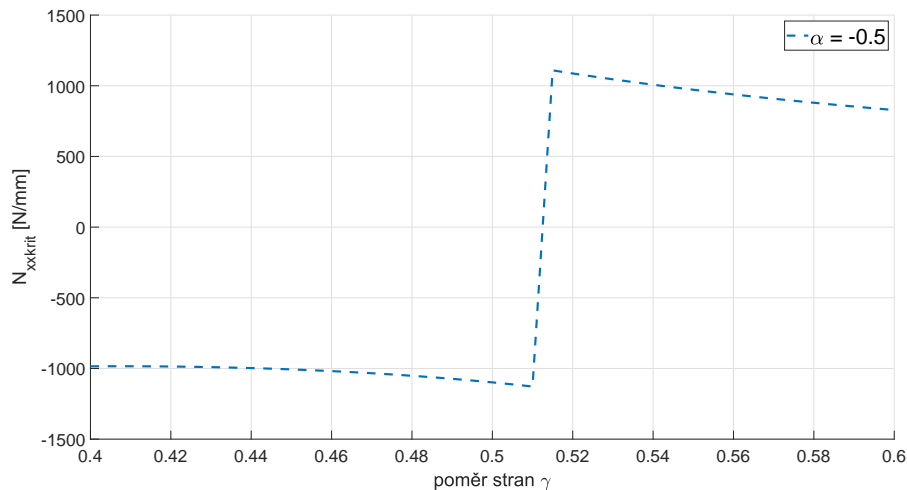
Symetrická laminátová deska složená z 8 vrstev o tloušťce vrstvy $h = 0,25\text{ mm}$ a skladbou $[\pm 45_2]_s$ je zatížena silou N_{xx} ve směru osy x a silou $N_{yy} = \alpha \cdot N_{xx}$ ve směru osy y . Strana $a = 200\text{ mm}$. Poměr pro smykové zatížení $\beta = 0$. Na obrázku 3.11 je zobrazena závislost kritické síly $N_{xx\text{krit}}$ na poměru $\alpha \in \langle -2; 2 \rangle$ a poměru stran $b = \gamma \cdot a$. Pro výpočet bylo u funkce příčného průhybu w použito prvních sedm členů fourierových řad

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^7 \sum_{n=1}^7 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$



Obrázek 3.11: Závislost kritické síly N_{xxkrit} na poměru stran γ a na poměru sil α

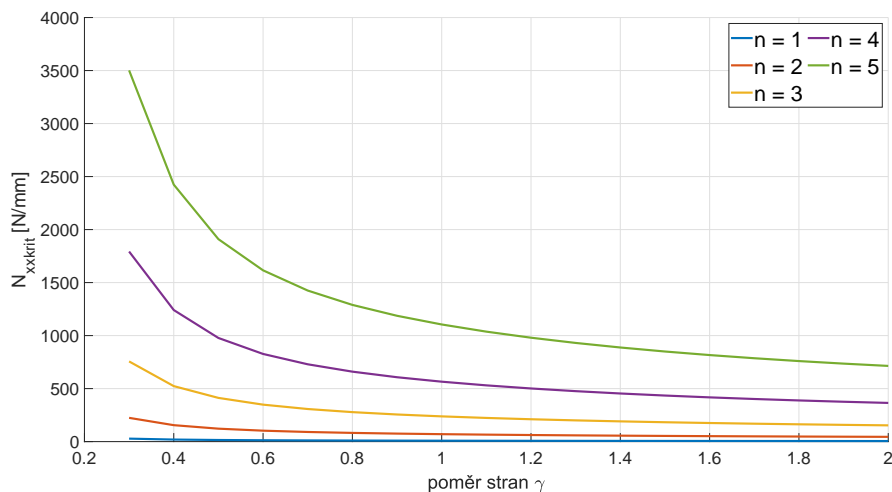
Na obrázku 3.11 je závislost kritické síly N_{xxkrit} na poměru stran γ a poměru sil α . Jednoosá napjatost je zobrazena tečkovanou čarou, kritické síly s poměr sil $\alpha < 0$ jsou zobrazeny čerchovanou čarou a křivky s poměrem $\alpha > 0$ zobrazeny plnou čarou. Z obrázku 3.11 lze vidět, že kritická síla dosahuje nejvyšších hodnot při jednoosém napětí. Zároveň kritická síla potřebná pro ztrátu stability klesá při rostoucím rozměru b . Při vysokém poměru γ dojde k jednorozměrnému problému, který se bude týkat vzpěru nosníku, konkrétně II. případu vzpěru. Dále lze vidět, že pro záporný poměr sil α je do určitého poměru stran kritická síla N_{xxkrit} tahová a po přesáhnutí tohoto poměru přichází skoková změna a tato kritická síla je tlaková.



Obrázek 3.12: Skoková změna kritické síly N_{xxkrit} při poměru stran a poměru sil $\alpha = -0.5$

Při detailním zobrazení křivky kritické síly, který je na obrázku 3.12, pro $\alpha = -0,5$ a poměru stran $\gamma \in \langle 0,4; 0,6 \rangle$ lze vidět, že k tomuto skoku přibližně dochází při dosažení rovnosti poměru stran γ a poměru sil α . Tento trend je patrný pro všechny křivky se záporným poměrem sil N_{xx} a N_{yy} . Důvodem tohoto skoku je změna „dominantní“ síly působící na desku. Do daného poměru stran γ dochází ke ztrátě stability při N_{yy} , a proto N_{xx} je tahová síla. Při $\gamma \geq -\alpha$ dojde ke ztrátě stability z důvodu síly N_{xx} a N_{yy} je tahová síla.

Kritickou sílu pro změnu stability můžeme jednoduše změnit tloušťkou celé laminy, například zvýšením počtu vrstev při zachování tloušťky jednotlivých lamin. Tímto způsobem zvětšíme prvky matice ohybové tuhosti a daný laminát bude odolnější vůči ztrátě stability. Na obrázku 3.13 vidíme laminát zatížený silami N_{xx} a N_{yy} v poměru $\alpha = 2$, který je složen z $[\pm 45_n]_s$. Při narůstajícím počtu vrstev laminátu narůstá i kritická síla způsobující ztrátu stability. Takto lze desky udělat odolnější proti ztrátě stability při drobném nárůstu tloušťky. Například kritická síla je více než dvojnásobná při porovnání $[\pm 45_3]_s$ a $[\pm 45_4]_s$, kdy dochází k navýšení počtu vrstev z 12 na 16. Je to nejjednodušší způsob, jak ochránit laminátové desky při vhodné skladbě vrstev proti ztrátě stability.

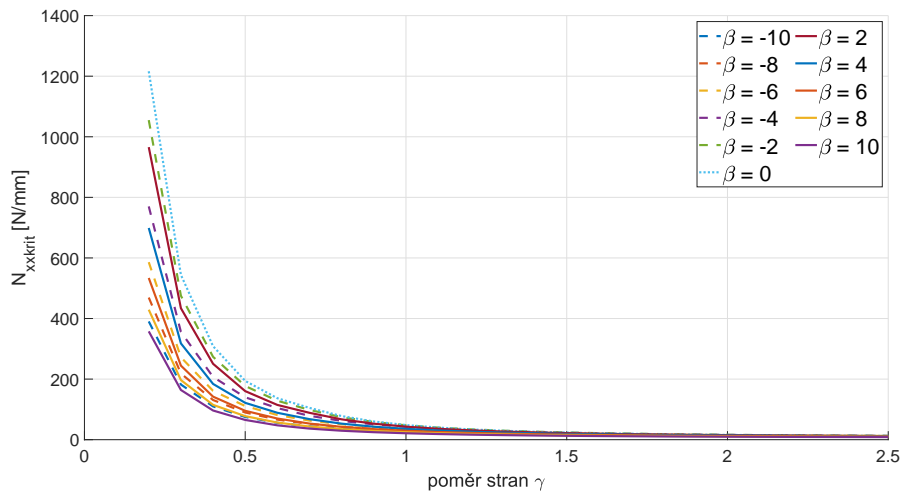


Obrázek 3.13: Změna kritické síly v závislosti na množství vrstev konstantní tloušťky pro složení vrstev $[\pm 45_n]_s$ pro $\alpha = 2$

3.10.2 Laminátová deska $\pm 45^\circ$ při jednoosém a smykovém napětí

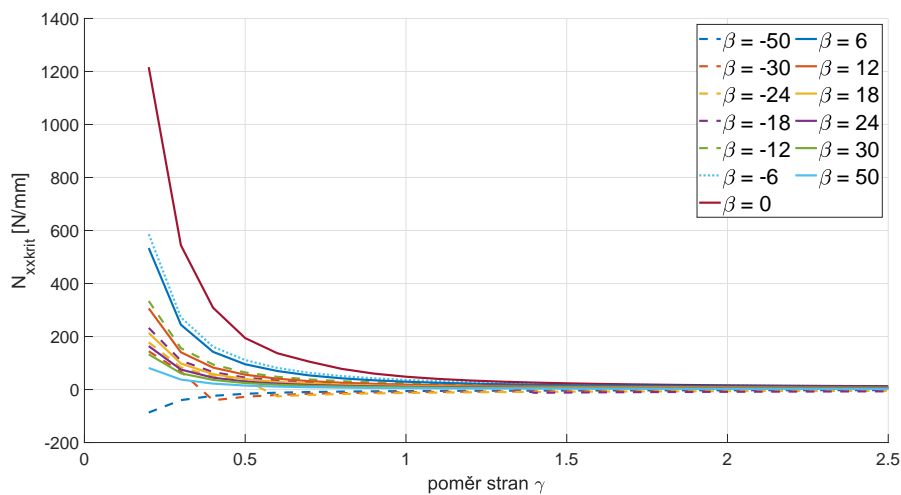
Symetrická laminátová deska složená z 8 vrstev o tloušťce vrstvy $h = 0,25 \text{ mm}$ a skladbou $[\pm 45_2]_s$ je zatížena silami N_{xx} a $N_{xy} = \beta \cdot N_{xx}$. Strana desky $a = 200 \text{ mm}$ a poměr $\alpha \Rightarrow N_{yy} = 0$. Na obrázku 3.14 je vidět kritická síla N_{xxkrit} v závislosti na poměru stran γ a na poměru sil β . Poměr stran $\gamma \in \langle 0,3; 2,5 \rangle$ a poměr sil $\beta \in \langle -10; 10 \rangle$.

Při porovnání poměrů α z kapitoly 3.10.1 a β z obrázku 3.14 je patrné menší ovlivnění kritické síly smykovými silami N_{xy} . Tento trend lze vidět již ze soustavy



Obrázek 3.14: Závislost kritické síly na poměru stran γ a poměru sil β

rovníc b_{lk} , kdy členy ovlivněné silami N_{xy} jsou v porovnání s členy N_{xx} a N_{yy} o řád menší a neovlivní takovým způsobem vlastní čísla soustavy. Dále si můžeme všimnout, že při vysokém poměru stran γ jsou kritické síly pro všechny druhy zatížení podobné. Kritická síla je stále nejvyšší při jednoosém napětí a při rostoucím poměru sil β se tato kritická síla snižuje. Je také vidět, že směr působení mírným způsobem ovlivní velikost kritické síly. Například pro $\beta = \pm 2$ a poměr stran $\gamma = 0,5$ je rozdíl mezi těmito silami necelých 10 %.



Obrázek 3.15: Závislost kritické síly na poměru stran γ a poměru sil β při signifikantních smykových silách

Vlastnosti z obrázku 3.14 platí při signifikantní úloze síly N_{xx} . Při větším rozsahu poměru sil β je patrná větší variabilita výsledků kritické síly. Na obrázku 3.15 je poměr stran $\gamma \in \langle 0, 2; 2, 5 \rangle$ a poměr sil $\beta \in \langle -50; 50 \rangle$. Můžeme se zde setkat se skokovou

změnou kritické síly z tlakové na tahovou hodnotu při dosažení poměru stran γ , a tím i změnou „dominantní“ složky v daném systému. Prvotně je významnější silou N_{xx} . Při výrazné smykové složce jsou dané křivky v kladném a záporném směru téměř symetrické vůči nulové kritické síle.

Závěr

Cílem této diplomové práce byla analýza ztráty stability laminátových desek. Dílčími cíli bylo zkoumání kritické síly na různých faktorech a hledání ideální kombinace odolné proti ztrátě stability. Tohoto cíle bylo dosaženo přímým a energetickým řešením při využití principu minima potenciální energie.

V teoretické části jsem se seznámil s problematikou stability systému a odvození základní rovnice klasické laminátové teorie. Společně s tím byla představena i globální matice tuhosti popisující vazby laminátu mezi poměrnou deformací a křivostí desky se silami a momenty působícími na danou desku. Byly představeny základní způsoby skladby laminátových desek pro ovlivnění prvků v globální matici tuhosti. Na závěr byly popsány výpočty pro ohybovou analýzu desek a výpočty kritické síly působící ve směru normály tloušťky desky. Tento výpočet jsem řešil Ritzovou metodou nebo přímým řešením diferenciálních rovnic. Oba druhy výpočtu jsou problematikou vlastních čísel soustavy. Všechny desky mají nekonečně kritických sil způsobujících ztrátu stability, ale pouze ta nejmenší bez závislosti na tlakovém či tahovém zatížení má fyzikální význam. Cílem bylo najít takovou kombinaci vlastních čísel soustavy, při které je tato síla nejmenší. Všechny laminátové desky byly na všech stranách prostě podepřeny a při těchto okrajových podmínkách definujeme funkci příčného průhybu dvěma fourierovými sinusovými řadami.

V kapitole 3.4 proběhlo seznámení s výpočtem pro ztrátu stability izotropní desky. Tato deska byla jednoose zatížena ve směru osy x . U příkladu bylo potvrzeno, že ztrátu stability způsobí pouze tlakové zatížení desky. Dále zde byla patrná změna jednoho vlastního čísla soustavy při změně poměru stran desek. Zároveň minimální kritická síla je pro všechna vlastní čísla stejná.

V kapitole 3.5 jsem řešil čtvercovou laminu s úhlem natočení vláken $\Theta = 0^\circ$ zatíženou silami ve směru os x a y v poměru α . Tato lamina se skládá z vláken t600 a epoxidové matrice s objemovým podílem vláken 60%. U této desky je patrný klesající trend kritické síly při narůstající délce strany. Nejedolnější proti ztrátě stability byla laminátová deska zatížená tlakově ve směru osy x a tahově ve směru osy y v poměru sil $\alpha = -0,5$. Tento trend lze pro jednovrstvou laminu změnit úhlem natočení vláken o 90° , při kterém se citlivost vůči ztrátě stability na poměru sil α změní. Tyto první dva příklady je časově nejvýhodnější řešit přímým řešením, protože členy ohybové matice tuhosti D_{16} , D_{26} jsou nulové. Následující příklady mají tyto prvky obecně nenulové a energetické řešení založené na principu minima potenciální energie je časově výhodnější.

Po odvození energetického řešení jsem řešil problematiku kritické síly závislé na úhlu natočení vláken Θ . Řešil jsem symetrický laminát se skladbou vrstev $[\pm\Theta]_s$ a čtvercovým rozměrem. Deska dosahuje největší kritické síly pro ztrátu stability při úhlu natočení vláken $\Theta = \pm 45^\circ$. Tato odolnost se zvyšuje při narůstajícím počtu vrstev $\pm\Theta$. Tento trend je způsobený nárůstem velikosti prvků ohybové matice D_{ij} a zvýšenou tloušťkou laminátu. Pro zvýšení odolnosti laminátu proti ztrátě stability je jedním z řešení zvýšit počet vrstev se skladbou $\pm 45^\circ$. Tento způsob je vhodný především pro desky, při kterých je strana, na kterou působí daná síla menší než druhý rozměr desky.

Z předchozího výpočtu jsem zkoumal lamináty se složením vrstev $[\pm 45]_s$, které byly zatíženy silami N_{xx} a N_{yy} v poměru α a poměrem stran γ . Byla vypočítána závislost kritické síly na poměru sil a poměru stran laminátové desky. Vysokou odolnost proti ztrátě stability dosahovala deska při jednoosém napětí. Zajímavých hodnot dosahovaly desky s poměrem sil $\alpha < 0$. Při tomto poměru jedna síla zatěžuje desku tlakově, zatímco druhá zatěžuje tahově. Při výpočtech desky s tímto způsobem zatížení dochází ke skokové změně síly N_{xx} v kritickém stavu. Zatímco u menšího poměru stran je tlakovou silou působící na desku N_{yy} , při nárůstu poměru dochází ke změně a kritickou tlakovou silou se stává N_{xx} . Tato skoková změna nastává při $-\alpha \approx \gamma$. Po této skokové změně jsou desky dobře odolné proti ztrátě stability.

Poslední problém, který jsem řešil byla laminátová deska se složením vrstev $[\pm 45]_s$. Deska byla zatížena silami N_{xx} a N_{xy} v poměru β a poměrem stran γ . Smykové síly v tomto případě snižovaly hodnotu N_{xx} v kritickém stavu pro ztrátu stability. Směr působení smykových sil zásadním způsobem neovlivní kritickou N_{xxkrit} .

Tato práce splnila stanovené cíle. V budoucnu by se mohla provést optimalizace skladby vrstev laminátu zatíženého silami N_{xx} , N_{yy} i N_{xy} .

Seznam použité literatury

1. YOO, Chai H.; LEE, Sung C. *Stability of Structures - Principles and Applications* [online]. Elsevier, 2011 [cit. 2020-03-29]. ISBN 978-0-12-385122-2. Dostupné z: <https://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpSSPA0007/stability-structures/stability-structures>.
2. CHEN, Wai-Fah; ATSUTA, Toshio. *Theory of Beam-Columns, Volume 1 - In-Plane Behavior and Design* [online]. J. Ross Publishing, Inc., 2008 [cit. 2020-03-29]. ISBN 978-1-932159-76-9. Dostupné z: <https://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpTBCVIPBA/theory-beam-columns-volume/theory-beam-columns-volume>.
3. TIMOSHENKO, Stephen P.; GERE, James M. *Theory of Elastic Stability (2nd Edition)*. Dover Publications, 1989. ISBN 978-0-486-47207-2.
4. KASSAPOGLOU, Christos. *Design and analysis of composite structures: with applications to aerospace structures* [online]. 2nd;2. Aufl.; Chichester: Wiley, 2013 [cit. 2020-11-15]. ISBN 1118401603. Dostupné z: <https://ebookcentral.proquest.com/lib/cvut/reader.action?docID=589191>.
5. BOUVET, Christophe. *Mechanics of Aeronautical Composite Materials*. John Wiley & Sons, 2017. ISBN 978-1-78630-114-7. Dostupné také z: <https://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpMACM000N/mechanics-aeronautical/mechanics-aeronautical>.
6. VINSON, Jack R. *Plate and panel structures of isotropic, composite and piezoelectric materials, including sandwich construction*. Dordrecht: Springer, 2005. ISBN 1-4020-3110-6.
7. HYER, Michael W. *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials* [online]. DEStech Publications, 2009 [cit. 2020-03-20]. ISBN 978-1-932078-86-2. Dostupné z: <https://app.knovel.com/hotlink/khtml/id:kt010RSKC6/stress-analysis-fiber/governing-conditions>.
8. LAŠ, Vladislav. *Mechanika kompozitních materiálů*. V Plzni: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-704-3273-X.
9. MAREŠ, Tomáš. *Lecture notes on Mechanics of composite materials* [online]. Praha, 2016 [cit. 2020-03-20]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/tomas.mares/mkm/mkm.pdf>.
10. KOLLÁR, László P. *Mechanics of Composite Structures* [online]. Cambridge University Press, 2003 [cit. 2020-03-20]. ISBN 978-0-521-80165-2. Dostupné z: <https://app.knovel.com/hotlink/khtml/id:kt006APA93/mechanics-composite-structures/orthotropic-laminate>.
11. GIBSON, Ronald F. *Principles of Composite Material Mechanics (4th Edition)*. CRC Press, 2016. ISBN 978-1-4987-2072-4. Dostupné také z: <https://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpPCMME011/principles-composite/principles-composite>.

12. VINSON, Jack R.; SIERAKOWSKI, Robert L. *The Behavior Of Structures Composed Of Composite Materials*. 2. Aufl. Dordrecht: Springer Science + Business Media, 2008. ISBN 9781402009044.
13. SZILARD, Rudolph. *Theories And Applications Of Plate Analysis: Classical Numerical And Engineering Methods*. John Wiley & Sons, 2004. ISBN 9788126545865.
14. MAREŠ, Tomáš. *Základy konstrukční optimalizace*. Praha: Tomáš Mareš, 2006. ISBN 80-239-6508-5.
15. UGURAL, Ansel C. *Plates and Shells: Theory and Analysis, Fourth Edition*. CRC Press, 2017. ISBN 978-1-5231-1370-5.
16. WHITNEY, J.M. *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*. Taylor & Francis, 1987. ISBN 9780877625186.

Seznam použitých veličin

| Symbol | Jednotka | Název |
|--|----------------|--|
| a | $[mm]$ | délka desky |
| \mathbf{A} | $[N\ mm^{-1}]$ | matice tahové tuhosti |
| b | $[mm]$ | šířka desky |
| \mathbf{B} | $[N]$ | matice vazební tuhosti |
| \mathbf{D} | $[N\ mm]$ | matice ohybové tuhosti |
| E_L | $[MPa]$ | modul pružnosti v podélném směru |
| E_T | $[MPa]$ | modul pružnosti v příčném směru |
| F | $[N]$ | příčná síla |
| G_{LT} | $[MPa]$ | modul pružnosti ve smyku |
| h | $[mm]$ | tloušťka laminátu |
| M | $[N]$ | moment na jednotku délky |
| N | $[N\ mm^{-1}]$ | síla na jednotku délky |
| N_{krit} | $[N\ mm^{-1}]$ | kritická síla pro ztrátu stability |
| \mathbf{Q} | $[N\ mm^{-2}]$ | matice mimoosové tuhosti |
| p | $[N\ mm^{-2}]$ | příčné tlakové zatížení |
| r | | poměr mezi délkou a šířkou stěny |
| \mathbf{S} | $[N\ mm^{-2}]$ | matice tuhosti |
| T_σ | | transformační matice napětí |
| T_ε | | transformační matice deformace |
| u | $[mm]$ | posuv v ose x |
| U | $[J]$ | deformační energie |
| v | $[mm]$ | posuv v ose y |
| V | $[J]$ | potenciální energie |
| w | $[mm]$ | posuv v ose z |
| W | $[J]$ | potenciální energie |
| $x-y-z$ | | souřadnicový systém x,y,z |
| α | | poměr mezi silami N_{xx} a N_{yy} |
| β | | poměr mezi silami N_{xx} a N_{xy} |
| γ | | poměr mezi šířkou a délkou desky |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ | | zkosy v souřadnicovém systému $x-y-z$ |
| $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ | | poměrná deformace v systému $x-y-z$ |
| Θ | $[deg]$ | úhel směru vláken |
| ν_{LT} | | poissonovo číslo |
| Π | $[J]$ | celková potenciální energie |
| $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ | $[MPa]$ | složky normálového napětí s souřadnicovým systémem $x-y-z$ |
| $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ | $[MPa]$ | složky smykového napětí s souřadnicovým systémem $x-y-z$ |