

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta strojní - Ústav přístrojové a řídicí techniky



DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Návrh optimálního řízení
modelu helikoptéry**

Optimal control design for helicopter model

Autor: Bc. Filip Lorenc

Vedoucí práce: Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D.

Akademický rok: 2020/2021

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Lorenc** Jméno: **Filip** Osobní číslo: **459971**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávací katedra/ústav: **Ústav přístrojové a řídicí techniky**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Přístrojová a řídicí technika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Návrh optimálního řízení modelu helikoptéry

Název diplomové práce anglicky:

Optimal control design for helicopter model

Pokyny pro vypracování:

1. Proveďte rešerši na téma robustního řízení s důrazem na praktické implementační aspekty.
2. Sestavte matematický model laboratorní soustavy modelu helikoptéry se třemi stupni volnosti a identifikujte parametry reálné soustavy.
3. Pro daný systém navrhnete optimální algoritmus řízení vhodnou metodou a kvantitativně ho porovnejte s některou z konvenčních metod návrhu řízení (např. PID).
4. Zhodnoťte dosažené výsledky.

Seznam doporučené literatury:

- [1] ZHOU, Kemin, et al. Robust and optimal control. New Jersey: Prentice hall, 1996.
[2] ATHANS, Michael a Peter L. FALB. Optimal control: an introduction to the theory and its applications. New York: Dover Publications, c2007. ISBN 978-0-486-45328-6.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D., U12110.3

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **30.10.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **20.01.2021**

Platnost zadání diplomové práce: _____

Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

_____ podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

_____ Datum převzetí zadání

_____ Podpis studenta

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně s použitím literárních pramenů a informací, které cituji a uvádím v seznamu použité literatury a zdrojů informací.

Datum:

.....
podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval Ing. Jaroslavu Buškovi, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, cenné rady, odborný dohled v průběhu vypracovávání a za čas, který mi byl ochoten věnovat při konzultacích. Dále bych chtěl poděkovat rodině a přátelům za velkou podporu během studia.

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS20/159/OHK2/3T/12.

Abstrakt

Předmětem této práce je vývoj matematického modelu a řídicího systému pro tandemovou helikoptéru od firmy Quanser s označení 3-DOF. Přestože je tento systém se třemi stupni volnosti poměrně jednoduchý, stále nabízí dobrý model skutečného tandemového vrtulníku. Matematický model je vytvořen uvolněním modelu helikoptéry a následným vytvořením Newton-Eulerových pohybových rovnic. Model je následně linearizován v okolí pracovního bodu. Na soustavu je aplikované zapojení se třemi PID regulátory, které se kvůli silně nelineárnímu chování soustavy nepodařilo nastavit. Jako výkonnější varianta se ukázalo použití lineárního kvadratického regulátoru doplněného o integrační složku (LQI). Při nasazení LQI regulátoru je nutné mít plnou zpětnou vazbu, a proto je v práci vyvinut stavový pozorovatel. Závěrečné hodnocení ukazuje, že LQI regulátor je schopen úspěšně řídit tento systém se slušnými výkonovými charakteristikami i přes vysoce nelineární charakter systému.

Klíčová slova

Model, Řízení, Helikoptéra, LQI, Pozorovatel

Abstract

The scope of this thesis is the development of a mathematical model and control system for a tandem helicopter from Quanser. Although this system with three degrees of freedom is relatively simple, it still offers a good model of a real tandem helicopter. The mathematical model is created by releasing the helicopter model and then creating Newton-Euler equations of motion. The model is then linearized around the operating point. A connection with three PID controllers is applied to the system, which could not be set due to the strongly nonlinear behavior of the system. The use of a linear quadratic controller with integral action (LQI) proved to be a more powerful variant. When using the LQI controller, it is necessary to have full state feedback, and therefore a state observer is developed in the thesis. The final evaluation shows that the LQI controller is able to successfully control this system with decent performance characteristics despite the highly nonlinear system.

Keywords

Model, Control, Helicopter, LQI, Observer

Obsah

| | | |
|----------|---|----|
| 1 | Úvod | 7 |
| 2 | Robustní řízení | 8 |
| 3 | Tvorba modelu | 9 |
| 3.1 | Popis soustavy | 9 |
| 3.2 | Pohybové rovnice | 12 |
| 3.2.1 | Zdvih | 12 |
| 3.2.2 | Náklon | 14 |
| 3.2.3 | Dráha | 15 |
| 3.3 | Zhodnocení chování modelu | 16 |
| 3.4 | Parametry modelu | 19 |
| 3.4.1 | Délky | 19 |
| 3.4.2 | Hmotnosti | 19 |
| 3.4.3 | Momenty setrvačnosti | 19 |
| 3.4.4 | Tah motorů | 20 |
| 3.4.5 | Odporový moment | 24 |
| 3.4.6 | Gravitační moment | 27 |
| 3.4.7 | Optimalizace parametrů modelu | 28 |
| 3.5 | Stavový popis | 28 |
| 3.5.1 | Stabilita | 32 |
| 3.5.2 | Pozorovatelnost a říditelnost | 34 |
| 4 | Řízení | 36 |
| 4.1 | PID regulátor | 36 |
| 4.1.1 | Aplikace PID regulátoru | 38 |
| 4.2 | Stavový regulátor | 40 |
| 4.3 | Lineární kvadratický regulátor (LQR) | 41 |
| 4.4 | Lineární kvadratický regulátor s integrační složkou (LQI) | 43 |
| 4.4.1 | Aplikace LQI regulátoru | 44 |
| 4.5 | Stavový pozorovatel | 47 |
| 4.5.1 | Nastavení stavového pozorovatele | 48 |
| 4.6 | Výpočet neměřitelných stavů pomocí derivace | 50 |
| 5 | Výsledná regulace | 52 |
| 5.1 | Kritéria hodnotící průběh řízeného výstupu | 52 |
| 5.1.1 | Kritérium regulační odchylky | 52 |
| 5.1.2 | Kritérium maximální odchylky regulované veličiny | 52 |
| 5.1.3 | Kritérium doby regulace | 52 |
| 5.1.4 | Kritérium tlumení regulačního pochodu | 53 |
| 5.1.5 | Integrační kritéria | 53 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5.2 | Naměřená data | 54 |
| 5.2.1 | Testování LQI regulátoru v porovnání s modelem | 54 |
| 5.2.2 | Porovnání pozorovatele s derivací při dopočítávání zrychlení | 57 |
| 5.2.3 | Testování 3 druhů nastavení LQI regulátorů | 57 |
| 6 | Simulace | 60 |
| 7 | Závěr | 63 |
| | Seznam použité literatury | 64 |
| | Seznam použitých symbolů | 67 |
| | Seznam použitého SW | 69 |

1 Úvod

Principy letu a konstrukce leteckých prostředků vzbuzovaly vždy velkou pozornost. S technologickým pokrokem výpočetní techniky a s vývojem moderní teorie řízení jsou automatické řídicí systémy hlavním faktorem ve vývoji téměř každého nového leteckého prostředku. Z tohoto důvodu je stále důležitější se touto problematikou zabývat.

Na Ústavu řízení Fakulty strojní ČVUT v Praze se nachází několik experimentálních úloh určených pro návrh řízení. Jednou z těchto úloh je i model tandemové helikoptéry od firmy Quanser s označením 3-DOF. Model slouží jako experimentální platforma pro zkoumání dynamiky helikoptéry a také jako platforma pro testování různých typů regulátorů. I když je tento systém se třemi stupni volnosti poměrně jednoduchý, stále nabízí dobrý model tandemového vrtulníku využívaného po celém světě.

První část této práce je zaměřena na tvorbu matematického modelu, který je dále použit pro nastavení regulátorů. Matematický model je vytvořen uvolněním modelu helikoptéry a následným vytvořením Newton-Eulerových pohybových rovnic. Newton-Eulerovy rovnice jsou následně linearizovány v okolí pracovního bodu a převedeny na stavový popis.

Druhá část je věnována výběru a nastavení regulátoru. Všechny vybrané regulátory jsou nejdříve nastaveny na lineárním modelu a poté nasazeny na nelineární model. V kapitole je dále zmíněna problematika týkající se dopočítávání neměřitelných stavů.

V poslední kapitole jsou regulátory použity pro řízení reálné soustavy. Výsledné řízení je v této kapitole posléze zhodnoceno pomocí několika kritérií, vhodných pro dané měření.

2 Robustní řízení

Konvenční teorie řízení umožňuje lidem řízení a regulaci mnoha procesů. Moderní řídicí techniky umožňují optimalizovat řídicí systémy v závislosti na nákladech a výkonu. Optimální řídicí systémy nejsou vždy úplně tolerantní k nepřesnostem chování systému [1]. Nepřesnosti v chování mohou být dány fluktuacemi v systému, nebo např. nepřesností matematického modelu, na kterém byl regulátor nastaven. Teorie robustního řízení je metoda měření změn výkonu řídicího systému při změnách parametrů systému. Robustnost je obvykle definována jako minimální požadavek, který musí systém splňovat, aby byl užitečný v reálné prostředí [2]. Robustní řídicí systém dosahuje zaručených výkonů řízení, při zachování stejných parametrů řídicího systému. Tato technika řízení dovoluje vytvářet spolehlivé vestavěné systémy. [3]

Robustní PID regulátor

PID regulátory jsou široce používané regulátory v mnoha průmyslových procesech, jelikož obsahují pouze tři nastavitelné parametry. Při nasazení jakéhokoliv regulátoru je posuzována jeho robustnost. Je velice obtížné nastavit PID regulátor tak, aby vykazoval robustní chování. Práce [4] se zabývá návrhem robustního nastavení PID regulátoru založeného na tzv. „generalized minimum variance control (GMVC)“ schématu. V práci je navržena metoda pro nastavení váhového faktoru cenové funkce GMVC. Metoda pro nastavení robustního PID regulátoru je v práci [5] založená na dvou-smyčkovém „model following control (MFC)“ systému, který obsahuje matematický model řízeného systému a dva PID regulátory. Pro regulaci helikoptéry jsou v této diplomové práci vybrány konvenční PID regulátory, jelikož jsou považovány za minimální etalon v oblasti regulace.

Robustní Lineární kvadratický regulátor (LQR)

Lineární kvadratický regulátor je ve skutečnosti metoda sloužící pro optimální zjištění parametrů matice zisku u stavového regulátoru. Metoda nabízí jednoduché nastavení požadovaného chování uzavřené regulační smyčky na základě minimalizace cenové funkce. Stejně jako u PID regulátoru, je u LQR posuzována jeho robustnost. Zdá se, že robustnost LQR patří mezi kontroverzní témata. V práci [6] je LQR popisováno jako regulátor, který postrádá robustní vlastnosti. Kvůli tomuto nedostatku je v práci navržena robustní verze LQR označená jako RLQR. Oproti tomu práce [7] dokazuje možnost robustního nastavení LQR, jen za pomoci vhodné volby váhových matic. Robustním nastavením LQR a jeho aplikací na inverzní kyvadlo se zabývá práce [8]. V práci je kyvadlo stabilizováno běžným LQR doplněným o PV regulátor, sloužící pro vyhoupnutí kyvadla.

3 Tvorba modelu

Tato kapitola je věnována tvorbě matematického modelu, který je dále použit pro nastavení regulátorů. Matematický model je vytvořen uvolněním modelu helikoptéry obr. 3.3 a následným vytvořením Newton-Eulerových pohybových rovnic. Newton-Eulerovy rovnice jsou následně linearizovány v okolí pracovního bodu a převedeny na stavový popis.

3.1 Popis soustavy

Soustava, která je v rámci této práce řízena, je na obr. 3.1. Jedná se o model helikoptéry se třemi stupni volnosti od firmy Quanser. Soustava se skládá z těla helikoptéry, ke kterému jsou připevněny dva stejnosměrné motory pohánějící vrtule. Osy motorů jsou navzájem rovnoběžné a vektory síly tahu motorů jsou kolmé k tělu helikoptéry. Tělo helikoptéry je připevněno kloubem s jedním stupněm volnosti k jednomu konci ramena. Rameno, držící helikoptéru, je připevněno ke stojanu. Stojan je s ramenem spojen soustavou kloubů, která helikoptéře zajišťuje další dva stupně volnosti (zdvih a pohyb). Na druhém konci ramena je připevněno protizávaží, které snižuje účinnou hmotnost helikoptéry tak, aby jej bylo možné zvednout za pomoci tahu z motorů. Model je analogií k helikoptéře s tandemovými rotory. [9]

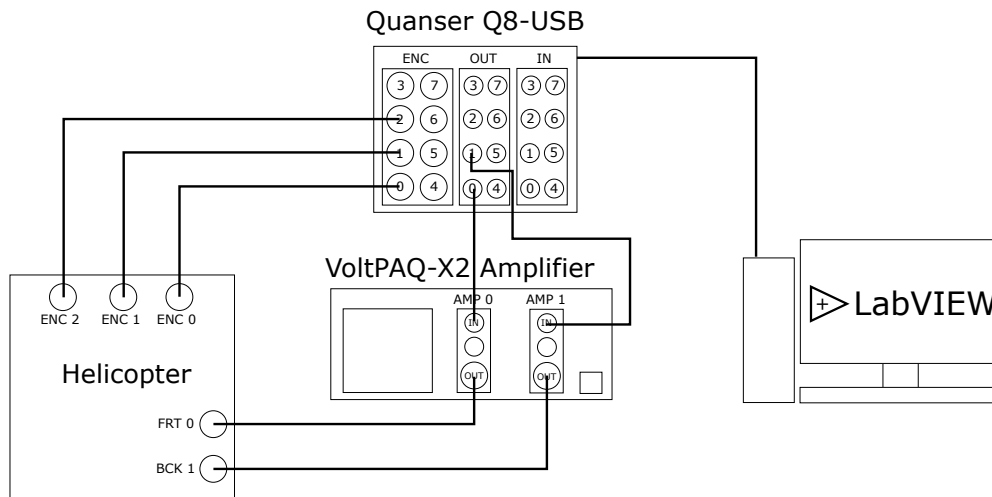


Obr. 3.1: Fotografie helikoptéry Quanser 3DOF. Převzato z [28]

Přivedení pozitivního napětí na zadní motor způsobí pozitivní náklon helikoptéry a přivedení pozitivního napětí na přední motor způsobí negativní náklon helikoptéry. Helikoptéra stoupá, pokud je přivedeno kladné napětí na oba motory. Kontrolou obou motorů je možné kompletně ovládat polohu helikoptéry.

Měřicí aparát

Měření polohy helikoptéry je zajištěno pomocí inkrementálních enkodérů od firmy US Digital. Na soustavě se nachází celkem tři inkrementální enkodery označené jako ENC 0, ENC 1 a ENC 2. Enkodery jsou namontovány na všech kloubech soustavy a umožňují přesné sledování polohy. Rozlišení enkodérů umístěných na náklonovém a zdvihovém úhlu je podle dokumentace 4096 bodů na otáčku a rozlišení enkodéru umístěného na dráhovém úhlu je pak dvojnásobné (8192 bodů na otáčku). [9]



Obr. 3.2: Schéma zapojení měřícího aparátu

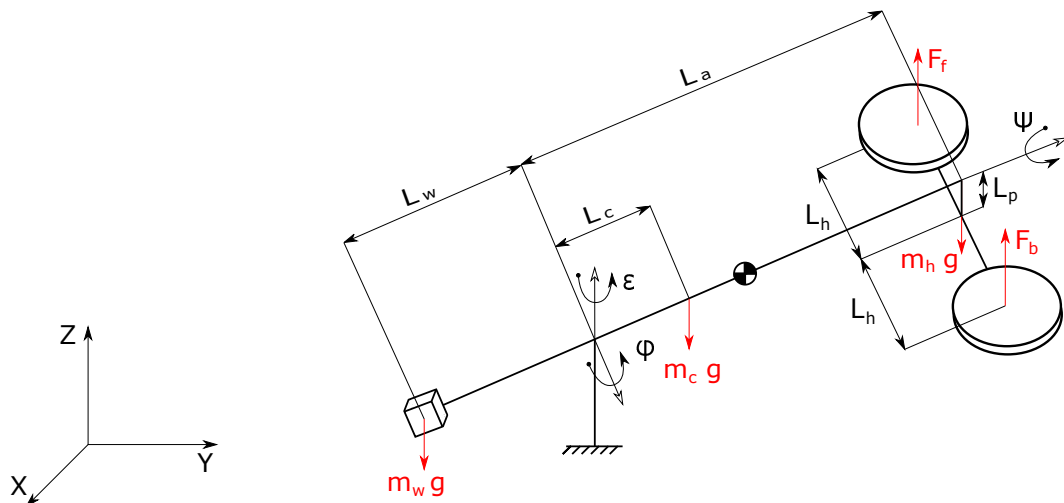
Na obr. 3.2 lze vidět kompletní schéma zapojení měřícího aparátu. Enkodery jsou zapojené do vstupně-výstupní měřící desky Quanser Q8-USB, která dokáže v reálném čase zpracovávat vstupní data a to až rychlostí 2 kHz. Měřicí deska Q8 je připojená USB kabelem k počítači na kterém jsou měřená data zpracovávána. Data z měřící desky jsou v počítači zpracovávána programem LabVIEW 2018, nebo programem Matlab/Simulink. Počítač na základě vytvořeného programu vyhodnotí vstupy a vypočítá velikost akčního zásahu. Vypočítaná velikost akčního zásahu je přenesena do měřící desky ze které je vyslán povel do generátoru napětí VoltPAQ-X2. Generátor obsahuje dva napět'ové výstupy, které dokáží generovat napětí od -25 V do +25 V. Napět'ový generátor je připojen ke dvou kartáčovým stejnosměrným motorům Pittman 9234 umístěných na těle helikoptéry.

Na generátoru napětí se nachází dva přepínače (pro každý napět'ový výstup zvlášť) označené jako „Gain“. Přepínač lze nastavit do polohy Gain 1x, nebo do polohy Gain 3x. Při nastavení přepínače do polohy Gain 1x je výstup z generátoru napětí roven vstupnímu signálu. Pokud je přepínač přepnut do polohy Gain 3x, tak je výstup z generátoru roven trojnásobku vstupního signálu. Jelikož měřicí deska Quanser Q8-USB pracuje na rozsahu ± 10 V, musí se Gain na generátoru napětí nastavit na 3x (jinak by bylo maximální výstupní napětí 10 V). V programu je důležité, vydělit požadovaný výstupní signál třemi, aby se napět'ový výstupní signál rovnal požadovanému.

Souřadný systém

Souřadný systém je vytvořen podle obr. 3.3. Model helikoptéry má tři stupně volnosti, přičemž všechny stupně volnosti jsou rotační. Kladný směr rotace a sil je vyobrazen na obr. 3.3

- Úhel zdvihu. Úhel je označený řeckým písmenem φ (φ). Tento úhel se nachází v rovině YZ a vyznačuje míru zdvihu helikoptéry. Maximální rozsah úhlu zdvihu je $\langle -27^\circ, 33^\circ \rangle$.
- Úhel náklonu. Úhel je označený řeckým písmenem ψ (ψ). Tento úhel se nachází v rovině XZ a vyznačuje míru náklonu helikoptéry. Maximální rozsah úhlu náklonu je $\langle -101^\circ, 101^\circ \rangle$.
- Úhel dráhy. Úhel je označený řeckým písmenem epsilon (ϵ). Tento úhel se nachází v rovině XY a vyznačuje dráhu helikoptéry. Maximální rozsah úhlu dráhy je $\langle -\infty^\circ, \infty^\circ \rangle$.



Obr. 3.3: Free body diagram helikoptéry

Délky

- L_w : Vzdálenost od zdvihové osy ke středu protizávaží
- L_a : Vzdálenost od zdvihové osy k helikoptéře
- L_c : Vzdálenost od zdvihové osy ke středu ramena
- L_p : Vzdálenost od konce ramena do středu helikoptéry
- L_h : Vzdálenost od středu helikoptéry k motoru. Tato vzdálenost je stejná pro přední i zadní motor.

Hmotnosti

- m_w : Hmotnost protizávaží
- m_h : Hmotnost kompletní helikoptéry
- m_c : Hmotnost celého ramena

Tah motorů

- F_f : Tah předního motoru
- F_b : Tah zadního motoru

Momenty

- M_f : Odporový moment, index určuje, pro jaký úhel je odporový moment brán
- M_G : Gravitační moment, index určuje, pro jaký úhel je gravitační moment brán

3.2 Pohybové rovnice

Analýza modelu helikoptéry je tvořena takzvaným „free-body diagramem“, který graficky zobrazuje síly a momenty působící na soustavu. Na soustavu jsou aplikovány Newton-Eulerovy rovnice, které v klasické mechanice popisují kombinaci posuvné a rotační dynamiky tuhého tělesa. Newton-Eulerovy rovnice jsou tvořeny druhým Newtonovým zákonem (zákon síly) a jeho ekvivalentem pro rotační pohyb – Eulerovou rovnicí. [10]

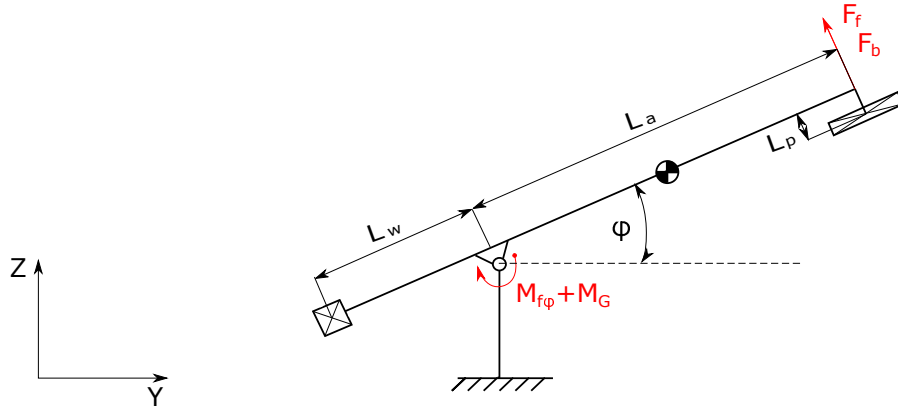
$$\begin{aligned} F &= ma \\ M &= I\dot{\omega} \end{aligned} \tag{1}$$

První rovnice (Newtonova rovnice síly) vyjadřuje přímou závislost síly (F) na hmotnosti tělesa (m) a na zrychlení (a). Druhá rovnice (Eulerova rovnice) vyjadřuje přímou závislost momentu (M) na momentu setrvačnosti (I) a na úhlovém zrychlení ($\dot{\omega}$).

3.2.1 Zdvih

Na obr. 3.4 lze vidět uvolněný model helikoptéry v rovině YZ. Na Uvolněném modelu helikoptéry jsou vyznačeny všechny síly a momenty, které jsou při modelování uvažovány. Na zdvihový úhel působí moment od tahu motorů ($M_{F\varphi}$), gravitační moment ($M_{G\varphi}$) a odporový moment ($M_{f\varphi}$).

Ohybový moment od tahu motorů se vypočítá podle následujícího vztahu a je závislý na náklonu helikoptéry (ψ):



Obr. 3.4: Uvolněný model helikoptéry v rovině YZ

$$M_{F\varphi}(t) = (F_f(t) + F_b(t))L_a \cos(\psi(t)) \quad (2)$$

Dalším ohybovým momentem, působícím na soustavu v rovině YZ, je odporový moment ($M_{f\varphi}$). Odporový moment je kombinací třecího momentu a odporu vzduchu.

Posledním momentem, působícím na soustavu v rovině YZ, je gravitační moment ($M_{G\varphi}$). Gravitační moment je tvořen součtem tíhových sil, které na soustavu působí a je závislý na úhlu φ . Gravitační moment se pro zdvihový úhel vypočítá podle následujícího vztahu:

$$M_{G\varphi}(t) = (m_w L_w - m_c L_c - m_h L_a)g \cos(\varphi(t)) \quad (3)$$

Za pomoci Newton-Eulerových rovnic je zjištěna pohybová rovnice pro zdvihový úhel (φ). Výsledná pohybová rovnice vychází z rovnosti momentů a má tvar:

$$\ddot{\varphi}(t)I_\varphi = (F_f(t) + F_b(t))L_a \cos(\psi(t)) + M_{G\varphi}(t) - M_{f\varphi}(t) \quad (4)$$

Při výpočtu momentu setrvačnosti I_φ , je model helikoptéry brán jako soustava hmotných bodů. Moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů je definován vztahem (5). [11]

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (5)$$

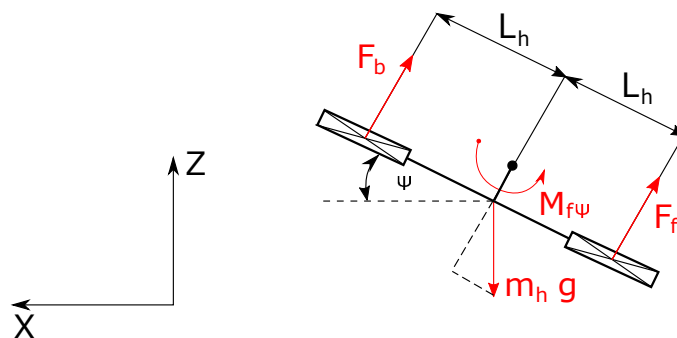
Po dosazení do rovnice (5) vyjde výsledná rovnice pro moment setrvačnosti ve směru úhlu φ jako:

$$I_\varphi = m_w L_w^2 + m_c L_c^2 + m_h L_a^2 \quad (6)$$

Z rovnice je patrné, že na modelu jsou uvažovány tři hmotné body. Prvním uvažovaným hmotným bodem je hmotnost protizávaží (m_w) na jedné straně ramena, druhým hmotným bodem je hmotnost helikoptéry (m_h) na druhé straně ramena a posledním hmotným bodem je hmotnost ramena (m_c) soustředěná v bodu ve vzdálenosti (L_c).

3.2.2 Náklon

Na obr. 3.5 lze vidět uvolněný model helikoptéry v rovině XZ. Na Uvolněném modelu helikoptéry jsou vyznačeny všechny síly a momenty, které jsou při modelování uvažovány. Na Náklonový úhel působí moment od tahu motorů ($M_{F\psi}$), gravitační moment ($M_{G\psi}$) a odporový moment ($M_{f\psi}$).



Obr. 3.5: Uvolněný model helikoptéry v rovině XZ

Ohybový moment od tahu motorů se vypočítá podle následujícího vztahu:

$$M_{F\psi}(t) = (F_b(t) - F_f(t))L_h \quad (7)$$

Dalším ohybovým momentem, působícím na náklonový úhel, je odporový moment ($M_{f\psi}$). Odporový moment je kombinací třecího momentu a odporu vzduchu.

Posledním momentem, působícím na náklonový úhel, je gravitační moment ($M_{G\psi}$). Gravitační moment se pro náklonový úhel vypočte pomocí následujícího vztahu:

$$M_{G\psi}(t) = -m_h g L_p \cos(\varphi(t)) \sin(\psi(t)) \quad (8)$$

Za pomoci Newton-Eulerových rovnic je zjištěna pohybová rovnice pro náklonový úhel (ψ). Výsledná pohybová rovnice vychází z rovnosti momentů a jsou v ní sečteny všechny momenty působící na náklonový úhel.

$$\ddot{\psi}(t)I_\psi = (F_b(t) - F_f(t))L_h - m_h g L_p \cos(\varphi(t)) \sin(\psi(t)) - M_{f\psi}(t) \quad (9)$$

Moment setrvačnosti ve směru úhlu ψ se vypočítá obdobně jako moment setrvačnosti ve směru úhlu φ . Po dosazení do rovnice (5) vyjde výsledná rovnice pro moment setrvačnosti

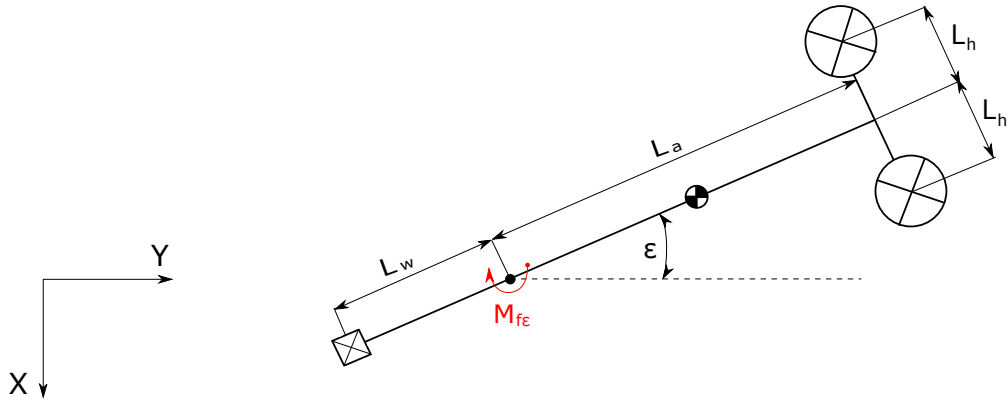
ve směru úhlu ψ jako:

$$I_\psi = (m_f + m_b)L_h^2 \quad (10)$$

Z rovnice je patrné, že na modelu jsou v rovině XZ uvažovány dva hmotné body. Oba tyto body tvoří dominantní hmotnost celé helikoptéry. Hmotnými body jsou hmotnosti předního a zadního motoru.

3.2.3 Dráha

Na obr. 3.6 lze vidět uvolněný model helikoptéry v rovině XY. Na Uvolněném modelu helikoptéry jsou vyznačeny všechny síly a momenty, které jsou při modelování uvažovány. Na dráhový úhel působí moment od tahu motorů (M_{F_ϵ}) a odporový moment (M_{f_ϵ}). V tomto úhlu, na rozdíl od předešlých dvou, nepůsobí na soustavu gravitační moment.



Obr. 3.6: Uvolněný model helikoptéry v rovině XY

Ohybový moment od tahu motorů se vypočítá podle následujícího vztahu:

$$M_{F_\epsilon}(t) = (F_f(t) + F_b(t))L_a \cos(\varphi(t)) \sin(\psi(t)) \quad (11)$$

Dalším ohybovým momentem, působícím na dráhový úhel, je odporový moment (M_{f_ϵ}). Odporový moment je kombinací třecího momentu a odporu vzduchu.

Za pomoci Newton-Eulerových rovnic je zjištěna pohybová rovnice pro dráhový úhel (ϵ). Výsledná pohybová rovnice vychází z rovnosti momentů.

$$\ddot{\epsilon}(t)I_\epsilon = (F_f(t) + F_b(t))L_a \cos(\varphi(t)) \sin(\psi(t)) - M_{f_\epsilon}(t) \quad (12)$$

Moment setrvačnosti ve směru úhlu ϵ je uvažován stejný, jako ve směru úhlu φ . Výsledný moment setrvačnosti má tvar:

$$I_{\epsilon} = I_{\varphi} = m_w L_w^2 + m_c L_c^2 + m_h L_a^2 \quad (13)$$

3.3 Zhodnocení chování modelu

Po vytvoření modelu je zapotřebí zhodnotit jeho chování, aby bylo možné říci, že se model chová dle očekávání uvedeného v popisu soustavy. Takovéto testování umožní zkontrolovat správnost pohybových rovnic a popřípadě umožní jejich úpravu dle potřeby.

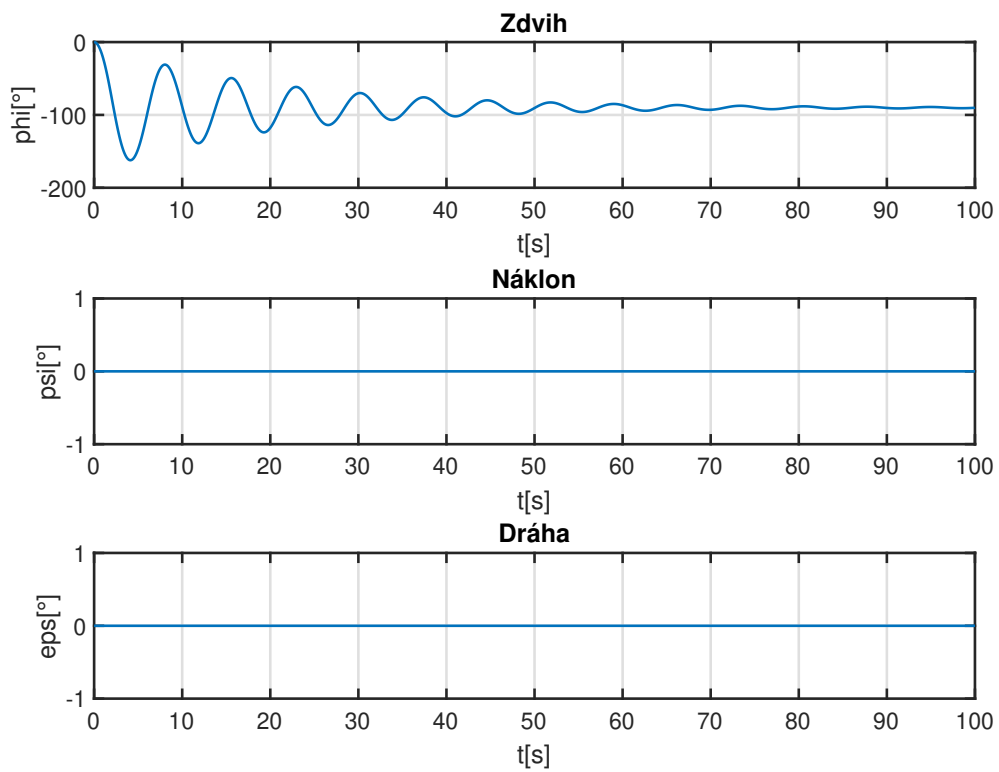
Prvním testem je spuštění modelu bez přidaného napětí na motorech, kdy je zdvihové rameno nastaveno ve vodorovné poloze ($\varphi = 0^\circ$). Na obr. 3.7 je zobrazen graf z výstupu ze simulace. Na grafu je vidět, že zdvihová osa tlumeně kmitá kolem úhlu -90° , což odpovídá úvaze o chování soustavy. V grafu je dále vidět průběh náklonu a dráhy, který je ale v tomto testu neměnný.

Druhým testem je přivedení takového napětí na oba motory, aby byl model v rovnovážné poloze. Na obr. 3.8 je zobrazen graf z výstupu ze simulace. Na grafu je vidět, že všechny úhly, jsou celou simulaci v nulové poloze, což také odpovídá úvaze o chování modelu.

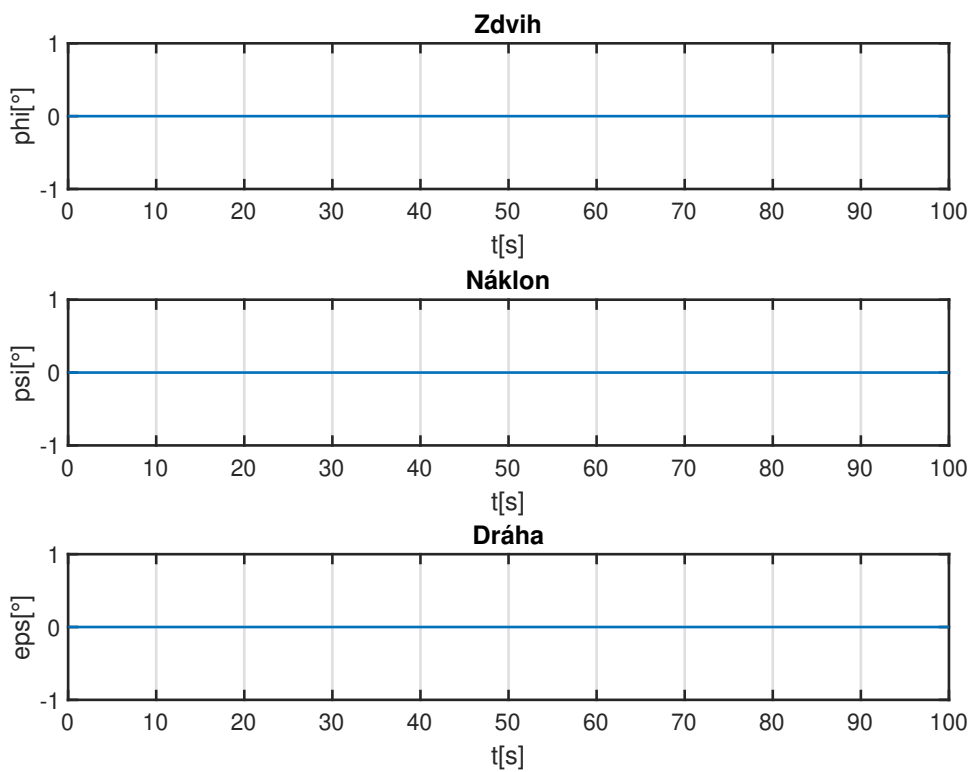
V třetím testu je model přiveden do rovnovážné polohy, ale na zadní motor je následně přivedeno vyšší napětí, než na přední motor. Na obr. 3.9 je zobrazen graf z výstupu ze simulace. Na grafu je vidět, že při přivedení kladného napětí na zadní motor se helikoptéra nakloní do kladného úhlu a začne se pohybovat kolem dráhové osy v kladném úhlu. Jelikož je helikoptéra v rovnovážném stavu a přivedeme ještě další napětí na jeden z motorů, tak se helikoptéra nejen otáčí, ale k tomu i stoupá.

Čtvrtým, a zároveň posledním testem, je podobný test jako třetí, až na výjimku, kdy není přivedeno přídatné napětí na zadní motor, ale na motor přední. Na obr. 3.10 je zobrazen graf z výstupu ze simulace. Na grafu je vidět, že model se chová podobně jako při třetím testu s tím rozdílem, že se nakloní a otáčí do záporného úhlu.

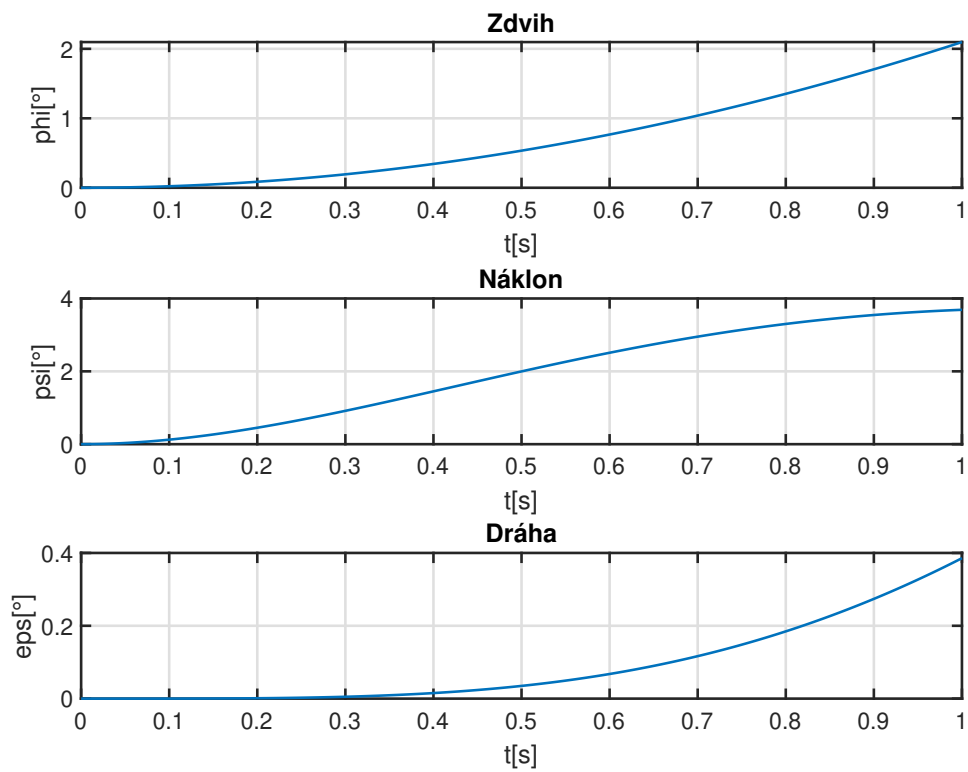
Při testování nebyla odhalena nesrovnalost mezi matematickým modelem a reálnou soustavou, proto je možné pokračovat k optimalizaci parametrů modelu, aby chování matematického modelu co možná nejpřesněji odpovídalo chování reálné soustavy.



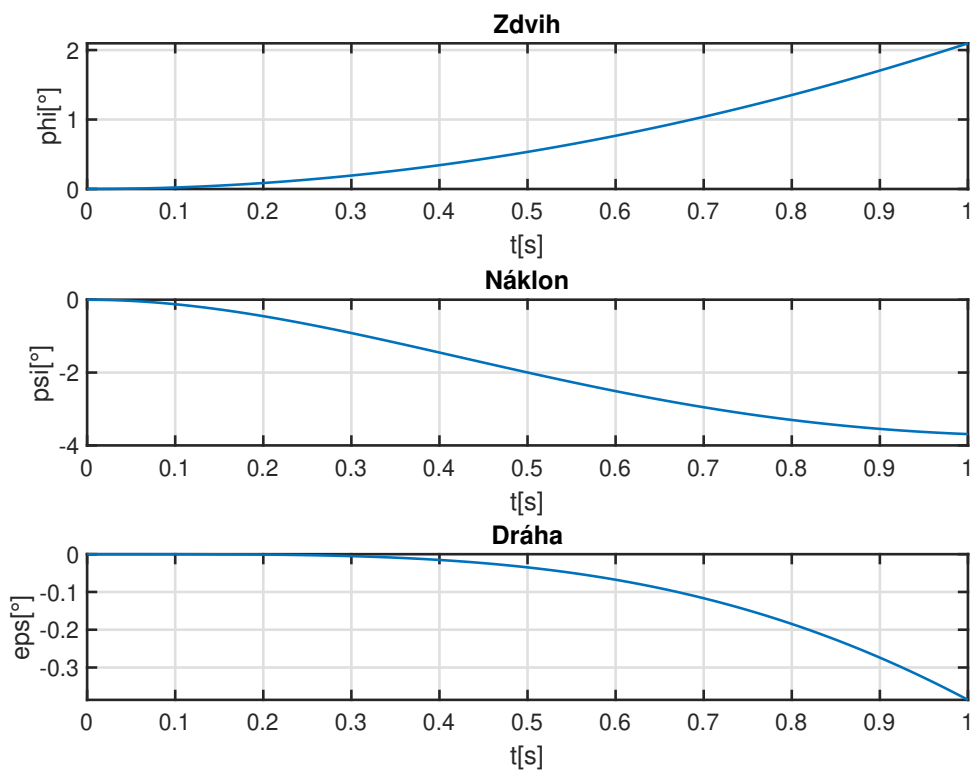
Obr. 3.7: Test 1 - chování modelu bez přidání napětí



Obr. 3.8: Test 2 - chování modelu v rovnovážné poloze



Obr. 3.9: Test 3 - chování modelu při přivedení napětí na zadní motor



Obr. 3.10: Test 4 - chování modelu při přivedení napětí na přední motor

3.4 Parametry modelu

Důležitou součástí tvorby modelu je získání správných hodnot všech parametrů modelu. Některé parametry je jednoduché získat za pomoci měření. Mezi jednoduše měřitelné parametry patří v tomto případě délky a hmotnosti. Mezi obtížně zjistitelné hodnoty pak patří součinitele tření a momenty setrvačnosti, které se většinou vypočítávají pomocí zjednodušených vzorců.

Parametry se mohou také v rámci zpřesnění chování modelu upravit tak, aby chování matematického modelu co nejvíce odpovídalo chování reálné soustavy. Takováto úprava se nazývá optimalizací parametrů.

3.4.1 Délky

Všechny délkové parametry potřebné pro matematický model jsou změřeny na reálné soustavě. Potřebné délkové parametry jsou uvedeny v tabulce 3.1.

| Parametr | Hodnota |
|----------|---------|
| L_w | 0,47 m |
| L_a | 0,66 m |
| L_h | 0,178 m |
| L_c | 0,095 m |
| L_p | 0,04 m |

Tab. 3.1: Tabulka obsahující délkové parametry

3.4.2 Hmotnosti

Všechny hmotnostní parametry potřebné pro matematický model jsou změřeny na reálné soustavě. Potřebné hmotnostní parametry jsou uvedeny v tabulce 3.2.

| Parametr | Hodnota |
|----------|----------|
| m_w | 1,918 kg |
| m_h | 1,426 kg |
| m_c | 0,446 kg |

Tab. 3.2: Tabulka obsahující hmotnostní parametry

3.4.3 Momenty setrvačnosti

Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která určuje velikost točivého momentu, potřebného pro požadované úhlové zrychlení. Je tu analogie s hmotností, která určuje velikost síly, potřebné pro požadované zrychlení. Z tohoto důvodu je moment setrvačnosti také nazýván jako úhlová hmotnost. [11]

Moment setrvačnosti patří mezi obtížně měřitelné veličiny. Pro zjištění hodnoty momentu setrvačnosti se využívají CAD programy, nebo zjednodušené matematické vzorce. Hodnoty momentů setrvačnosti v tabulce 3.3 jsou vypočítané pomocí vzorce pro soustavu hmotných bodů (5).

| Parametr | Hodnota |
|--------------|-------------------------|
| I_φ | 1,049 kgm ² |
| I_ψ | 0,0452 kgm ² |
| I_ϵ | 1,049 kgm ² |

Tab. 3.3: Tabulka obsahující momenty setrvačnosti

3.4.4 Tah motorů

Tah na helikoptěře vyvolávají dvě vrtule o průměru 20,3 cm. Vrtule jsou poháněné kartáčovými stejnosměrnými motory Pittman 9234 [28]. Při uvažování lineárního chování motoru lze tah určit ze vztahu (14). Vztah vyjadřuje přímou závislost tahu motoru (F) na tahové konstantě (K_F) a na velikosti vstupního napětí (U).

$$F = K_F U \quad (14)$$

K určení tahu F je nutné zjistit hodnotu tahové konstanty K_F .

Měření tahové konstanty

K zjištění tahové konstanty je zapotřebí znát statickou charakteristiku závislosti tahu motoru na vstupním napětí. Velikost tahu motorů je možné měřit pomocí tenzometrického snímače. Tenzometrický snímač se skládá ze tří částí, kterými jsou těleso snímače, tenzometry a Wheatstonův můstek.

Těleso snímače:

Těleso snímače slouží pro převod mechanického namáhání na přesně definovanou deformaci. Při namáhání tělesa snímače nesmí být překročena jeho mez pevnosti, jinak by došlo k nenávratné deformaci materiálu a už by nebylo možné snímač použít pro měření. Těleso snímače se zatěžuje maximálně na polovinu meze pevnosti. [12]

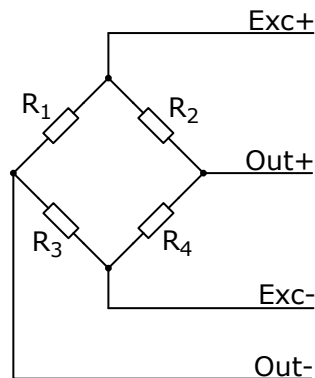
Tenzometr:

Tenzometr je pasivní elektronická součástka, používaná jako senzor pro přesné měření deformací, sil, tlaků i momentů. Princip tenzometru spočívá na faktu, že odpor elektrického vodiče je přímo úměrný jeho délce a nepřímo úměrný průřezu. Pokud je tenzometr umístěn na tělese snímače, pak vlivem zatížení tělesa dochází k jeho deformaci a tím i k deformaci

tenzometru. Při deformaci stačí změřit změnu odporu snímače a tu pak převést na velikost síly. [12]

Wheatstonův můstek:

Změna odporu vlivem deformace je u tenzometrů velice malá a proto je nutné tenzometry zapojit do Wheatstonova můstku. Wheatstonův můstek je obvod používaný pro měření malých změn odporu. Schéma Wheatstonova můstku je na obr. 3.11.



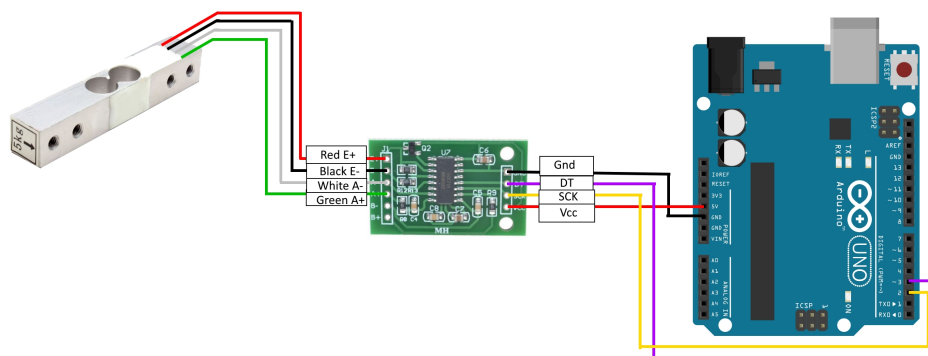
Obr. 3.11: Wheastonův můstek

Wheatstonův můstek se skládá ze čtyř odporů, které v tomto případě reprezentují tenzometry. Můstek je napájen napětím U_{in} , které je přivedeno na konektory Exc+ a Exc-. Výstupní napětí U_{out} je měřeno na konektorech Out+ a Out-. Výstupní napětí z můstku je dáno vztahem (15). Ze vztahu je patrné, že pokud jsou všechny čtyři odpory shodné, pak na výstupu je nulové napětí. [13]

$$U_{out} = U_{in} \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right) \quad (15)$$

Elektrické schéma zapojení tenzometrického snímače:

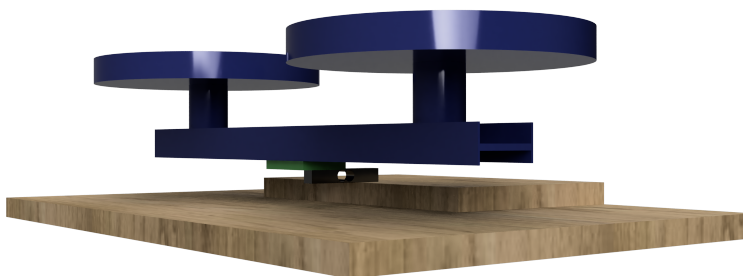
Čtení a zpracování dat z tenzometrického snímače je zajištěno programovatelnou deskou Arduino Mega obsahující procesor ATmega2560. Procesor ATmega2560 obsahuje vestavěný 10-bit analogo-digitální převodník, ale tato přesnost není pro měření napětí na tenzometru dostačující. Z důvodu zvýšení přesnosti měření je k desce nejdříve připojen externí analogo-digitální převodník s 24-bit přesností nesoucí označení HX711. Schéma zapojení tenzometrického snímače k programovatelné desce Arduino je na obr. 3.12.



Obr. 3.12: Schéma zapojení tenzometru do arduina. Převzato z [14]

Měřící přípravek:

K uchycení tenzometrického snímače k helikoptéře je zapotřebí navrhnout měřící přípravek. Přípravek je navržen v programu Autocad Fusion 360 a je zobrazen na obr. 3.13. Model se skládá z helikoptéry, Tenzometrického snímače, základové desky, desky pro uchycení snímače a spojovým dílem mezi snímačem a helikoptérou.



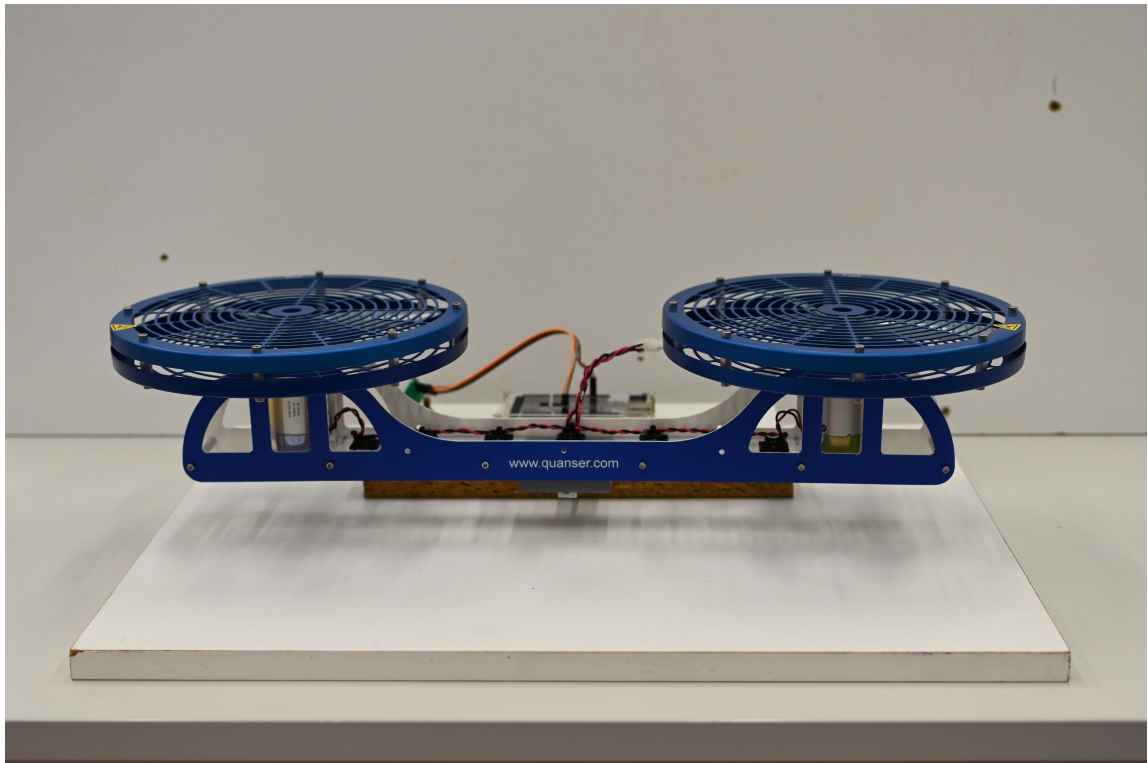
Obr. 3.13: Model měřící desky

Základní a úchyťová deska jsou vyrobeny z dřevotřískové desky. Desky jsou k sobě uchyceny šroubovými spoji, kvůli snadné demontáži. Spojový díl mezi helikoptérou a tenzometrickým snímačem je vytvořen pomocí technologie 3D tisku.

Měření:

Před samotným měřením je nutná kalibrace měřícího přípravku. Ke kalibraci přípravku je použit kalibrační program od Nathan Seidle (umístěn v příloze), který obsahuje knihovnu pro práci s převodníkem HX711. Kalibrace začíná spuštěním programu v moment, kdy je měřící přípravek v nezátíženém stavu. Po spuštění programu se na měřící přípravek umístí závaží o známé hmotnosti. Pomocí kláves + a - se nastavuje velikost výstupní hodnoty, dokud se neshoduje s hmotností použitého závaží. Výsledkem kalibrace je kalibrační faktor, který se v programu umístí do funkce `setscale()`. Po kalibraci je možné otestovat správné nastavení dalším známým zatížením.

K měření tahu je použit měřící program od Nathan Seidle (umístěn v příloze), do kterého se vloží kalibrační faktor z předchozí kalibrace. Při měření je nastavena hodnota vstupního



Obr. 3.14: Sestavená měřicí deska

napětí do motoru a následně je zaznamenána hodnota velikosti tahu, který helikoptéra za pomoci motorů vytváří. Měření je prováděno od 0 do 22 V a to s krokem 1 V.

Naměřené hodnoty jsou zobrazeny v grafu na obr. 3.15. Z naměřených hodnot je patrné, že závislost tahu na napětí je kvadratická. Kvadratická rovnice je získána pomocí kvadratické regrese a pro závislost tahu na napětí vychází:

$$F = 0,0047U^2 + 0,0198U \quad (16)$$

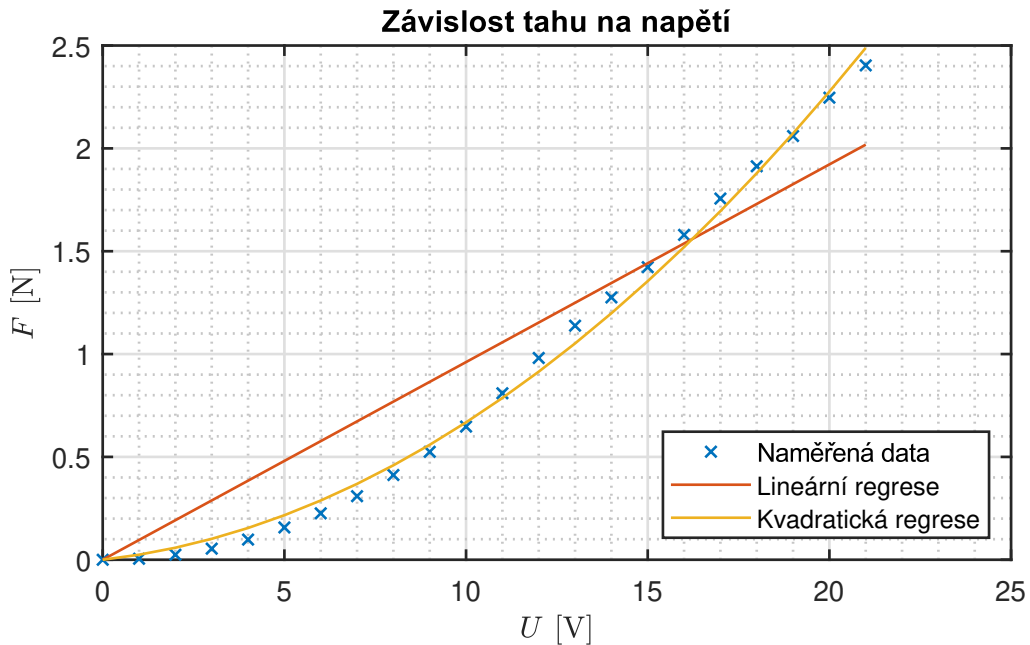
Při použití kvadratické regrese vychází přesnost regrese $R^2 = 0,9956$. Z důvodu zjednodušení modelu chování motoru, je místo kvadratické regrese použita lineární regrese. Lineární rovnice pro závislost tahu na napětí vychází:

$$F = 0,0961U \quad (17)$$

Kde hodnota 0,0961 je hodnota tahové konstanty K_F . Při použití lineární regrese vychází přesnost regrese $R^2 = 0,9017$.

V grafu se krom naměřených dat a jejich regresí nachází průběh závislosti tahu na napětí podle modelové dokumentace. V modelové dokumentaci je uvedena hodnota tahové konstanty $K_F = 0,22$. Tato hodnota však vychází více jak dvojnásobná oproti naměřeným datům. Z tohoto faktu je usuzováno, že dokumentová tahová konstanta je brána pro oba

motory zároveň a ne jen pro jeden. V grafu je proto dokumentová tahová konstanta upravena na hodnotu $K_F = 0,11$.



Obr. 3.15: Graf závislosti tahu F na napětí U

3.4.5 Odporový moment

Odporový moment (M_f) je kombinací třecího momentu a odporu vzduchu. Odpor vzduchu se teoreticky vypočte pomocí vztahu (18). V reálném nasazení je použití tohoto vzorce nepraktické a to z důvodu obtížného měření všech potřebných parametrů.

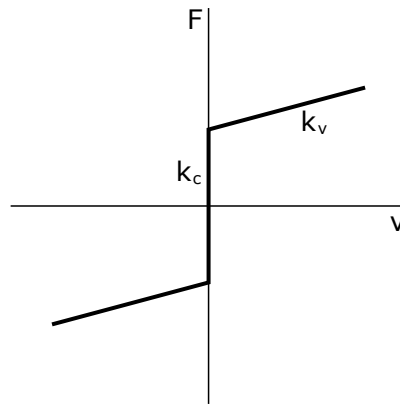
$$F = \frac{1}{2}c\rho Av^2 \quad (18)$$

Pro snadnější zakomponování odporu vzduchu a třecího momentu do modelu lze použít Coulombův-viskózní model tření. Tento model je popsán vztahem (19).

$$M_{f\phi}(t) = k_C \text{sign}(\dot{\phi}(t)) + k_v \dot{\phi}(t) \quad (19)$$

kde $\dot{\phi}$ je úhlová rychlost, k_C je konstanta pro Coulombovskou část modelu a k_v je konstanta pro viskózní část modelu. Chování Coulombova - viskózního modelu lze vidět na obr. 3.16. Velikost konstanty k_C určuje velikost síly potřebné k odtržení soustavy (uvedení soustavy do pohybu) a velikost konstanty k_v určuje velikost tlumení soustavy.[15]

K zjištění parametrů k_C a k_v lze navrhnout tři experimenty, které proměří chování reálné soustavy ve všech úhlech. Dalším krokem je využití doplňku v programu Simulink s názvem „Parameter Estimation“, který dokáže na základě naměřených dat upravit parametry tak, aby



Obr. 3.16: Coulombův - viskózní model tření

model co nejvíce seděl s naměřenými daty. Nevýhodou této metody je fakt, že nedostaneme reálné hodnoty třecích koeficientů.

Další možností zjištění parametru k_v (nikoliv však parametru k_c) je pomocí logaritmického dekrementu. Logaritmický dekrement (δ) slouží pro zjištění velikosti tlumení (ξ) z periodických průběhů. Logaritmický dekrement se vypočte ze vztahu (20). [16]

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{x_1}{x_{n+1}} \right| \quad (20)$$

Kde x_1 je velikost amplitudy kmitu a x_{n+1} je velikost amplitudy n -tého kmitu. Po zjištění logaritmického dekrementu je možné vypočítat velikost tlumení dle vztahu (21).

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (21)$$

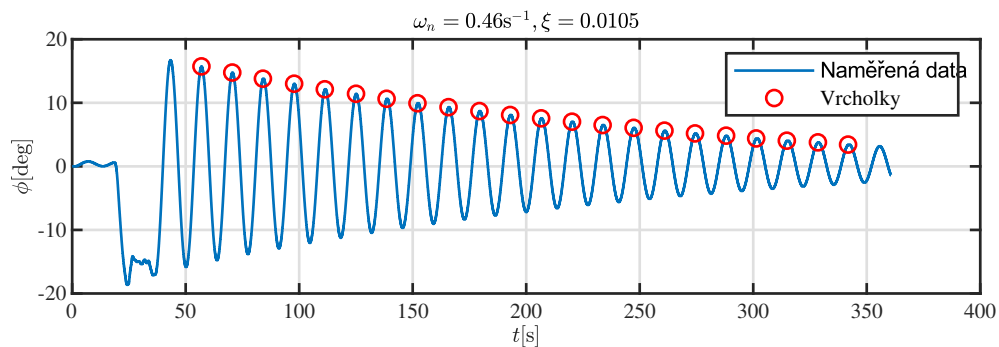
Z diferenciální rovnice druhého řádu vychází, že velikost parametru k_v se vypočte následujícím vztahem (22).

$$k_v = 2\omega_n \xi \quad (22)$$

Pro zjištění logaritmického dekrementu je nutné naměřit průběh kmitů v úhlech, ve kterých má být zjištěn součinitel viskózního tření. Na soustavě je potřeba naměřit průběhy ve směru úhlu zdvihu, náklonu a dráhy.

Zdvih

Při měření průběhu kmitů na zdvihovém úhlu je nutné zafixovat úhel náklonu a úhel zdvihu. Další nutnou podmínkou je přemístění protizávaží na polohu, kdy je rameno v rovnováze. Vyvážené rameno se vychýlí na úhel cca 15° a následně se uvolní. Na obr. 3.17 je zobrazen průběh z měření kmitů na zdvihovém úhlu.



Obr. 3.17: Průběh kmitů na zdvihovém úhlu (φ)

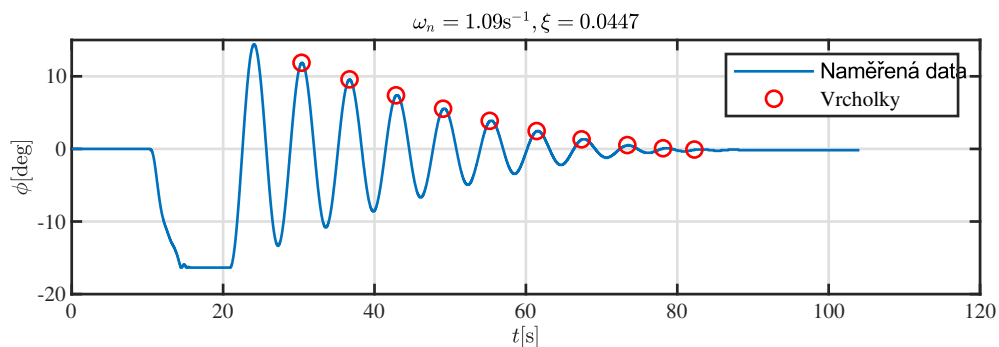
V tabulce 3.4 jsou uvedeny identifikované parametry pro úhel zdvihu. Identifikované parametry jsou zjištěny pomocí matlabovského skriptu pro identifikaci kyvadla (umístěn v příloze). Parametry zjištěné identifikací jsou vlastní frekvence, součinitel tlumení a koeficient tření.

| Parametr | Hodnota |
|---------------------|---------------------------|
| $\omega_{n\varphi}$ | $0,46 \text{ s}^{-1}$ |
| $\xi_{v\varphi}$ | $0,0105$ |
| $k_{v\varphi}$ | $0,0097 \text{ Nms}^{-1}$ |

Tab. 3.4: Tabulka identifikovaných parametrů pro úhel zdvihu

Náklon

Při měření průběhu kmitů na náklonovém úhlu je nutné zafixovat úhel zdvihu a úhel dráhy. Další nutnou podmínkou je umístění závaží na jednu stranu helikoptéry. Překlopená helikoptéra se vychýlí na úhel cca 15° a následně se uvolní. Na obr. 3.17 je zobrazen průběh z měření kmitů na náklonovém úhlu.



Obr. 3.18: Průběh kmitů na náklonovém úhlu (ψ)

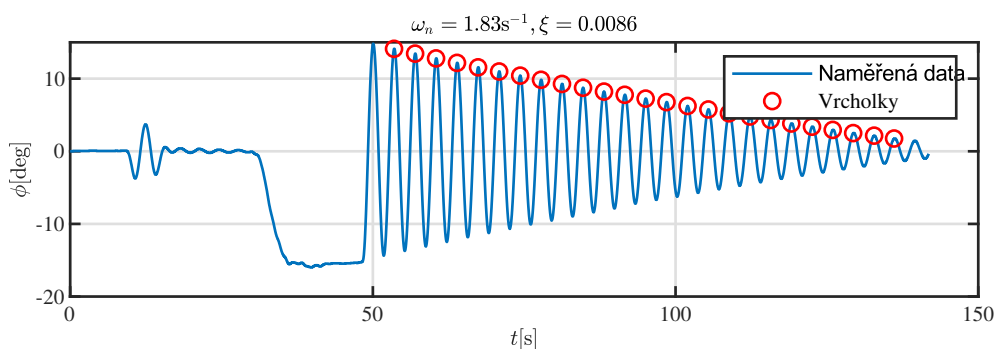
V tabulce 3.5 jsou uvedeny identifikované parametry pro úhel náklonu. Identifikované parametry jsou zjištěny pomocí matlabovského skriptu pro identifikaci kyvadla (umístěn v příloze). Parametry zjištěné identifikací jsou vlastní frekvence, součinitel tlumení a koeficient tření.

| Parametr | Hodnota |
|------------------|-------------------------|
| $\omega_{n\psi}$ | 1,09 s ⁻¹ |
| $\xi_{v\psi}$ | 0,0447 |
| $k_{v\psi}$ | 0,097 Nms ⁻¹ |

Tab. 3.5: Tabulka identifikovaných parametrů pro úhel náklonu

Dráha

Při měření průběhu kmitů na dráhovém úhlu je nutné zafixovat úhel zdvihu a úhel náklonu. Další nutnou podmínkou je překlopení soustavy tak, aby vzniklo kyvadlo. Na překlopené soustavě se vychýlí rameno na úhel cca 15° a následně se uvolní. Na obr. 3.17 je zobrazen průběh z měření kmitů na dráhovém úhlu.



Obr. 3.19: Průběh kmitů na dráhovém úhlu (ϵ)

V tabulce 3.6 jsou uvedeny identifikované parametry pro úhel dráhy. Identifikované parametry jsou zjištěny pomocí matlabovského skriptu pro identifikaci kyvadla (umístěn v příloze). Parametry zjištěné identifikací jsou vlastní frekvence, součinitel tlumení a koeficient tření.

| Parametr | Hodnota |
|----------------------|--------------------------|
| $\omega_{n\epsilon}$ | 1,83 s ⁻¹ |
| $\xi_{v\epsilon}$ | 0,0086 |
| $k_{v\epsilon}$ | 0,0315 Nms ⁻¹ |

Tab. 3.6: Tabulka identifikovaných parametrů pro úhel zdvihu

3.4.6 Gravitační moment

Gravitační moment kolem zdvihové osy je součet všech tíhových sil působících v tomto úhlu na soustavu. Gravitační moment je možné vypočítat analyticky za pomoci znalosti mechaniky. Výsledná analytická rovnice má tvar:

$$M_{G\varphi}(t) = (m_w L_w - m_c L_c - m_h L_a) g \cos(\varphi(t)) \quad (23)$$

Výpočtem rovnice (23) lze získat orientační velikost gravitačního momentu. Výsledek této rovnice však nebude úplně shodný s reálnou velikostí gravitačního momentu a to z důvodu zjednodušení modelu. Gravitační moment jde získat nejen analytickou metodou, ale i za pomoci měření na reálné soustavě. K měření gravitačního momentu ve směru zdvihového úhlu je zapotřebí navrhnout experiment. Při experimentu je helikoptéra za pomoci jednoduchého PI regulátoru udržována v požadovaném úhlu a následně je změřeno napětí potřebné pro udržení helikoptéry v tomto úhlu. Změřené napětí je dle vztahu (14) převedeno na tah. U měřícího způsobu zjištění gravitačního momentu je důležitá přesnost změřeného vztahu mezi napětím a tahem. Pokud je vztah mezi napětím a tahem chybný, pak se tato chyba přenesení i na měření gravitačního momentu a budou získány chybné výsledky. Měřící metodu by bylo vhodné zvolit, pokud by analytická rovnice nevykazovala dobré výsledky. Analytická rovnice (23) je však pro tvorbu tohoto modelu dostačující a přináší výhodu v podobě rychlého přepočítání hodnoty při změně parametrů soustavy.

3.4.7 Optimalizace parametrů modelu

Optimalizace parametrů modelu je proces, při kterém jsou reálné parametry soustavy nahrazeny tak, aby výsledné chování modelu co nejvíce odpovídalo chování reálné soustavy. Pro optimalizaci parametrů lze použít nástroj v programu Matlab/Simulink, který se jmenuje Parameter estimator. V parameter estimator se vytvoří požadovaný experiment a nadefinují se parametry, které se mají odhadnout. Na základě naměřeného experimentu a simulace program odhadne parametry tak, aby se výstupy co možná nejvíce shodovaly. Z předešlé věty vyplývá, že aby byl odhad parametrů možný, je zapotřebí vytvořit experimenty, které otestují chování soustavy.

Z důvodu obtížného porovnání samotné helikoptéry s modelem, je vhodné provést porovnání až při připojení některého z regulátorů. Při tomto zapojení je porovnávána kompletní regulační smyčka namísto samotného modelu.

3.5 Stavový popis

Stavový popis je v řídicí technice reprezentace matematického modelu fyzického systému jako množina vstupních, výstupních a stavových proměnných zapsaných pomocí lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Stavové proměnné, jsou proměnné, jejichž hodnota se s časem mění v závislosti na vstupních hodnotách a vnitřním uspořádáním modelu.

Stavový prostor, je Euklidovský prostor, ve kterém jsou proměnné na osách stavové proměnné. Stav systému může být reprezentován jako vektor v tomto prostoru. Pokud je dynamický systém lineární a časově neměnný, potom se mohou diferenciální a algebraické rovnice zapsat v maticové podobě. Stavový popis poskytuje pohodlný a kompaktní způsob

modelování. Díky stavovému popisu lze snadno analyzovat systém s více vstupy a s více výstupy (MIMO - Multiply input / Multiply output).

Vnitřní stavové proměnné jsou nejmenší možná podmnožina systémových proměnných, které mohou reprezentovat všechny stavy systému v jakýkoliv daný čas. Počet stavových proměnných (značených jako n) je obvykle roven řádu systému. Pokud je systém reprezentován přenosovou funkcí, potom počet stavových proměnných je roven řádu přenosové funkce. Stavové proměnné nesmějí být definované jako lineární kombinace jiných stavových proměnných daného systému (musí být lineárně nezávislé). Při nedodržení této podmínky není možné se systémem pracovat.[17]

Stavový popis má tvar:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{24}$$

Kde první rovnice se nazývá stavová rovnice a druhá výstupní.

Stavový vektor

Stavový vektor je vektor, ve kterém jsou obsaženy všechny stavové proměnné. Za všechny stavové proměnné je dosazena substituce $x_1(t) \dots x_6(t)$.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \\ \epsilon(t) \\ \dot{\epsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix}\tag{25}$$

Vektor vstupů

Vektor vstupů se skládá z napětí přivedeného do předního motoru $U_f(t)$ a z napětí přivedeného do zadního motoru $U_b(t)$. Za parametry $U_f(t)$ a $U_b(t)$ je dosazena substituce $u_1(t)$ a $u_2(t)$

$$u(t) = \begin{bmatrix} U_f(t) \\ U_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}\tag{26}$$

Vektor funkcí pravých stran

Při volbě stavových proměnných podle (25) vyjde následující stavový model:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ I_\varphi^{-1}(M_G \cos(x_1(t)) + (u_1(t) + u_2(t))K_F L_a \cos(x_3(t)) - k_{v\varphi}x_2(t)) \\ x_4(t) \\ I_\psi^{-1}((u_2(t) - u_1(t))K_F L_h - m_h g \cos(x_1(t)) \sin(x_4(t))L_p - k_{v\psi}x_4(t)) \\ x_6(t) \\ I_\epsilon^{-1}((u_1(t) + u_2(t))K_F L_a \cos(x_1(t)) \sin(x_3(t)) - k_{v\epsilon}x_6(t)) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Rovnovážný bod

Jak již bylo zmíněno výše, stavový popis se skládá ze soustavy lineárních diferenciálních rovnic. V reálném světě má však většina soustav nelineární průběh. Z tohoto důvodu se musí před samotnou tvorbou stavového popisu tato soustava linearizovat. Linearizace se provádí za pomoci derivace v rovnovážném bodě. Rovnovážný bod soustavy je hodnota stavového vektoru, která splňuje podmínku $f(x_0, u_0) = 0$. Rovnovážný bod se získá dosazením nulové hodnoty za vektor funkcí pravých stran \dot{x} .

$$\begin{aligned} 0 &= x_2^0 \\ 0 &= I_\varphi^{-1}(M_G \cos(x_1^0) + (u_1^0 + u_2^0)K_F L_a \cos(x_3^0) - k_{v\varphi}x_2^0) \\ 0 &= x_4^0 \\ 0 &= I_\psi^{-1}((u_2^0 - u_1^0)K_F L_h - m_h g \cos(x_1^0) \sin(x_4^0)L_p - k_{v\psi}x_4^0) \\ 0 &= x_6^0 \\ 0 &= I_\epsilon^{-1}((u_1^0 + u_2^0)K_F L_a \cos(x_1^0) \sin(x_3^0) - k_{v\epsilon}x_6^0) \end{aligned}$$

Z výše uvedené soustavy rovnic jsou zjištěny hodnoty $x_2^0 = x_4^0 = x_6^0 = 0$ a tři rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= M_G \cos(x_1^0) + (u_1^0 + u_2^0)K_F L_a \cos(x_3^0) \\ 0 &= (u_2^0 - u_1^0)K_F L_h \\ 0 &= (u_1^0 + u_2^0)K_F L_a \cos(x_1^0) \sin(x_3^0) \end{aligned}$$

Tento systém je tvořen třemi rovnicemi o čtyřech neznámých a má tedy nekonečné množství řešení. Pro další výpočet je nutné, aby jedna z neznámých byla zafixována. Analýzou modelu je zjištěno, že nejvhodnější je fixace úhlu zdvihu (φ) na hodnotě 0° .

Zafixováním úhlu zdvihu je získána následující rovnice pro výpočet hodnot rovnovážných bodů vstupů:

$$u_1^0 = u_2^0 = \frac{-M_G}{2L_a K_F} \quad (28)$$

Výsledné hodnoty rovnovážného bodu jsou uvedeny v (29).

$$\begin{aligned} x^0 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ u^0 &= [6,35 \ 6,35]^T \end{aligned} \quad (29)$$

Matice vnitřních vazeb systému - A

Matice vnitřních vazeb systému (A) se získá parciální derivací funkce pravých stran (27) podle stavového vektoru (25) (Vytvoření Jacobiho matice) a následným dosazením rovnovážných bodů (29).

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0092 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12,3848 & -2,1558 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,7676 & 0 & 0 & -0,03 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Matice vazeb systému na vstup - B

Matice vazeb systému na vstup (B) se získá parciální derivací funkce pravých stran (27) podle vektoru vstupu (26) (Vytvoření Jacobiho matice) a následným dosazením rovnovážných bodů (29).

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,0605 & 0,0605 \\ 0 & 0 \\ -0,3786 & 0,3786 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Matice vazeb výstupu na stav - C

Matice vazeb výstupu na stav (C) lze považovat za filtr měřitelných stavových veličin. Matice C, má podobu jednotkové matice v případě, že je možné měřit všechny stavové proměnné. V případě helikoptéry, je však možné měřit pouze úhly natočení ramen (φ , ψ a ϵ) a ne jejich rychlosti ($\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ a $\dot{\epsilon}$). Z důvodu neměřitelnosti všech stavových proměnných má matice C následující podobu:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

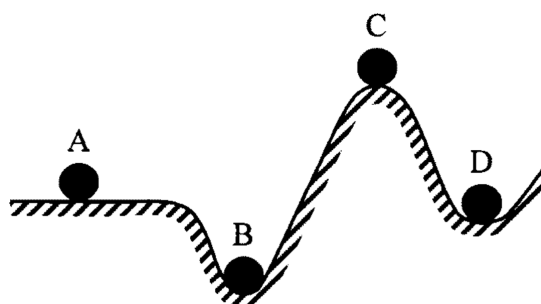
Matice vazeb vstupu na výstup - D

Matice vazeb vstupu na výstup (D) se také nazývá jako poruchová matice. Z hlediska dynamických vlastností je vliv matice vazeb vstupu na výstup (D) zanedbatelný a může se považovat za nulový.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

3.5.1 Stabilita

Stabilní systém je takový systém, který se po vychýlení ze svého rovnovážného stavu a odstranění vzruchu, způsobující toto vychýlení, znovu vrátí do původního rovnovážného stavu. Systém se může nacházet celkem ve čtyřech rovnovážných stavech, které jsou schématicky vyobrazeny na obr. 3.20. Stav A se nachází na mezi stability, stav B je stabilní, stav C je nestabilní a stav D je stabilní v malém. [18]

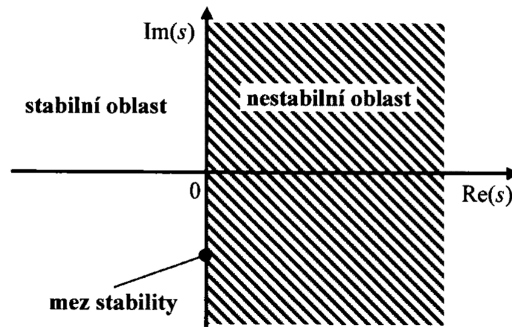


Obr. 3.20: Rovnovážné stavy systému

Z hlediska řízení je vhodné udržet regulační obvod v rovnovážném stavu, který je optimální z pohledu několika hledisek. Těmito hledisky mohou být například technologická a ekonomická. Řízení má za úkol udržet regulované veličiny v původním, nebo v novém rovnovážném stavu. „Stabilita je tedy nutnou podmínkou správné funkce regulačního obvodu“. [18]

Nutná a současně postačující podmínka stability zní: „Systém je stabilní, jestliže všechny kořeny s_i $i = 0, 1, \dots, n$ charakteristické rovnice leží v levé polovině komplexní roviny“ [18]

Podle komplexní roviny můžeme stabilitu systému rozdělit na tři části:



Obr. 3.21: Rozložení kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině

- Kořeny charakteristické rovnice se nachází nalevo od komplexní roviny – System je stabilní
- Kořeny charakteristické rovnice se nachází napravo od komplexní roviny – System je nestabilní
- Kořeny charakteristické rovnice se nachází na komplexní rovině – System je na mezi stability

Stabilita systému v pracovním bodě

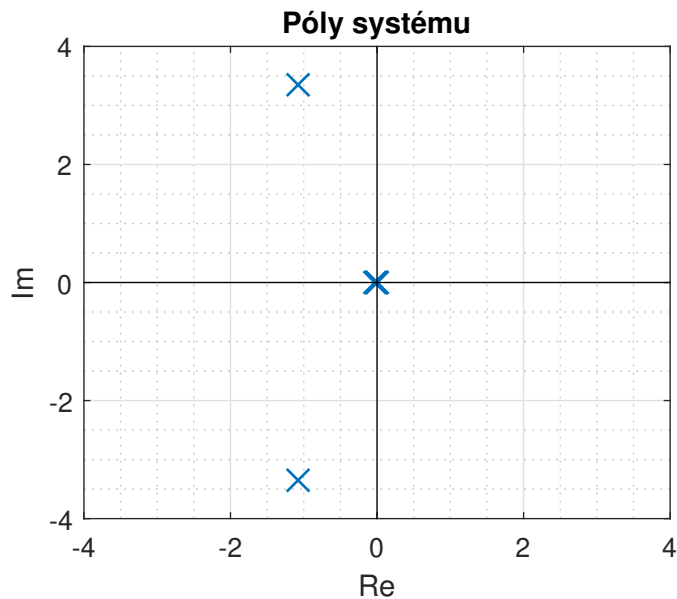
Stabilitu systému v pracovním bodě lze zjistit z pólů linearizovaného systému. Póly linearizovaného systému jsou vlastní čísla matice A (30), které se vypočítají dle vztahu (34). System je v pracovním bodě stabilní, pokud všechny póly linearizovaného systému leží nalevo od imaginární osy komplexní roviny.

$$M(s) = \det[sI - A] = 0 \quad (34)$$

Pro výpočet pólů systému je použit matlabovský příkaz `eig(A)`.

$$s = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.03 \\ -1.0779 + 3,3501i \\ -1.0779 - 3,3501i \\ 0 \\ -0.0092 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Výsledné póly linearizovaného systému jsou uvedené ve vektoru (35). Z výsledných pólů je možné říci, že se linearizovaný systém nachází na mezi stability. Mez stability je způsobena nulovými hodnotami pólů na pozici úhlů φ a ϵ . Všechna úhlová zrychlení a úhel ψ vycházejí stabilní. Úhel ψ a úhlové zrychlení $\dot{\psi}$ navíc obsahují komplexní složku. Komplexní složka a záporná reálná složka mají za následek tlumené kmitání těchto dvou veličin.



Obr. 3.22: Póly linearizovaného systému v komplexní rovině

3.5.2 Pozorovatelnost a říditelnost

Říditelnost a pozorovatelnost jsou důležité vlastnosti řízeného systému. Tyto pojmy zavedl v roce 1960 R. Kalman. [19]

Říditelnost i pozorovatelnost lineárních systémů závisí na schopnosti řešitelnosti algebraických rovnic. Řešitelnost algebraických rovnic je dána hodnotami matice. Z tohoto důvodu je říditelnost i pozorovatelnost dána hodnotami specifických matic.

Definice říditelnosti: “Abychom s daným systémem mohli pomocí vstupu dělat, cokoliv se nám zachce, musí být systém (úplně) říditelný. “ Říditelnost je tedy schopnost, přivést systém pomocí řízení z libovolného počátečního stavu do libovolného koncového stavu a je dána hodnotami matice říditelnosti (36). [19]

$$\mathcal{C}(A, B) = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-2}B \quad A^{n-1}B] \quad (36)$$

Nutná a postačující podmínka zní, že systém je plně říditelný, pokud se hodnota matice říditelnosti (36) rovná řádu systému (37).

$$\text{rank } \mathcal{C}(A, B) = n \quad (37)$$

Definice pozorovatelnosti: “Abychom mohli pozorováním výstupu zjistit, co se uvnitř systému děje, musí být systém úplně pozorovatelný.” To znamená, že jsme schopni zjistit hodnoty všech stavových proměnných. Pozorovatelnost řízeného systému je dána maticí pozorovatelnosti (38). [19]

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Nutná a postačující podmínka zní, že systém je plně pozorovatelný, pokud se hodnost matice pozorovatelnosti (38) rovná řádu systému (39).

$$\text{rank } \mathcal{O}(A, C) = n \quad (39)$$

Pozorovatelnost a říditelnost řešeného systému

Říditelnost řešeného systému je ověřena pomocí programu Matlab. Příkaz, ověřující říditelnost, je definován jako:

$$\text{controllability} = \text{rank}(\text{ctrb}(\text{sys})); \quad (40)$$

Kde *sys* je proměnná definující celý systém, funkce *ctrb* vytváří matici říditelnosti a funkce *rank* vrací hodnost matice. Vztah (40) vrací hodnotu šest, což je i velikost řádu systému. Řešený systém tedy splňuje podmínku říditelnosti (37) a je plně říditelný.

Pozorovatelnost, stejně jako říditelnost řešeného systému, je ověřena pomocí programu Matlab. Příkaz, ověřující pozorovatelnost, je definován jako:

$$\text{observability} = \text{rank}(\text{obsv}(\text{sys})); \quad (41)$$

Vztah pro ověření pozorovatelnosti je podobný jako při ověření říditelnosti s tím rozdílem, že místo funkce *ctrb* je použita funkce *obsv*, která vrací matici pozorovatelnosti. Vztah (41) vrací hodnotu šest, což je i velikost řádu systému. Řešený systém tedy splňuje podmínku pozorovatelnosti (39) a je pozorovatelný.

4 Řízení

Tato kapitola je věnována výběru a nastavení regulátoru. Všechny vybrané regulátory jsou nejdříve nastaveny na lineárním modelu a poté nasazeny na nelineární model. V kapitole je dále zmíněna problematika týkající se dopočítávání neměřitelných stavů.

4.1 PID regulátor

PID regulátor je spojitý, nepřímý a lineární regulátor využívající zápornou zpětnovazební smyčku. PID regulátor se skládá z proporcionální (P), integrační (I) a derivační (D) složky. PID regulátor spojitě vypočítává regulační odchylku (e), jako rozdíl mezi referenční hodnotou (w) a měřenou regulovanou veličinou (y). Akční veličina (u) je pak dána proporcionální, integrační a derivační změnou regulační odchylky (e). V praxi není potřeba využívat všechny tři složky PID regulátoru, ale využít jen složky, vhodné pro danou aplikaci (P, I, PI, PD). [18]

Proporcionální složka

Proporcionální složka, neboli P regulátor, se chová stejně jako běžný zesilovač. P regulátor nastavuje hodnotu akční veličiny (u) proporcionálně neboli úměrně k regulační odchylce (e). Chování P regulátoru lze popsat vztahem (42). [18]

$$u(t) = r_0 e(t) \quad (42)$$

Kde r_0 je činitel zesílení. Někdy je činitel zesílení nazýván jako proporcionální konstanta. Krom r_0 se také používá převrácená hodnota nazývaná jako pásmo proporcionality. Pásmo proporcionality udává, o kolik procent se musí změnit regulační odchylka, aby se akční veličina změnila v celém rozsahu.

$$pp = \frac{100}{r_0} \quad (43)$$

Při použití samotného P regulátoru je nutné počítat s trvalou regulační odchylkou tzn. Regulační odchylka nikdy nebude nulová.

Integrační složka

Integrační složka, neboli I regulátor, nastavuje akční veličinu (u) úměrně integrálu regulační odchylky (e). Chování I regulátoru lze popsat vztahem (44). [18]

$$u(t) = r_I \int_0^t e(\tau) d\tau + u(0) \quad (44)$$

Kde r_I je integrační konstanta regulátoru. Krom r_I se také používá převrácená hodnota T_I , která se nazývá jako integrační časová konstanta regulátoru.

$$T_I = \frac{1}{r_I} \quad (45)$$

Přidáním I regulátoru k P regulátoru lze odstranit trvalou regulační odchylku, ale může se zhoršit stabilita regulované soustavy. Při použití PI regulátoru má integrační časová konstanta tvar (46).

$$T_I = \frac{r_0}{r_I} \quad (46)$$

Derivační složka

Derivační složka, neboli D regulátor, nastavuje akční veličinu (u) úměrně k derivaci regulační odchylky (e). Chování D regulátoru lze popsat vztahem (47). [18]

$$u(t) = r_D \dot{e}(t) \quad (47)$$

Kde r_D je derivační konstanta regulátoru. Krom r_D se také používá označení T_D , které se nazývá jako derivační časová konstanta regulátoru. Pro derivační časovou konstantu regulátoru platí vztah (48).

$$T_D = \frac{r_D}{r_0} \quad (48)$$

Samotný D regulátor se nepoužívá a je vždy v kombinaci PD, nebo PID. Derivační regulátor má za úkol zrychlení regulačního děje. Nevýhodou D regulátoru je jeho schopnost zesilovat šum.

Výsledný ideální PID regulátor

Spojením výše uvedených složek vznikne kompletní PID regulátor, který lze popsat vztahem (49). Vhodnou volbou všech tří konstant lze docílit velice robustní a rychlé regulace. [18]

$$u(t) = r_0 e(t) + r_I \int_0^t e(\tau) d\tau + r_D \dot{e}(t) + u(0) \quad (49)$$

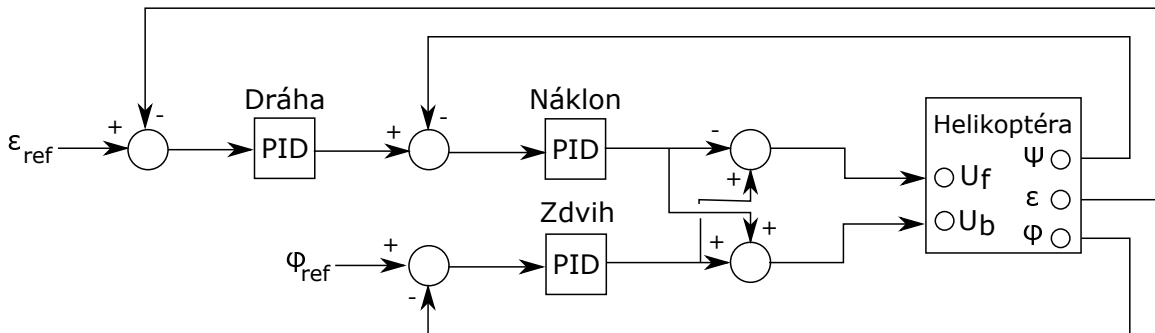
Uvedený vztah (49) však reprezentuje chování ideálního PID regulátoru. Takovýto regulátor je nemožné v reálném světě zkonstruovat, jelikož není možné vytvořit ideální derivační regulátor (regulátor by viděl do budoucnosti). Z důvodu nerealizovatelnosti derivačního regulátoru, je zapotřebí přidat k derivaci slabou integrační složku (filtr), která nám zajistí realizovatelnost derivační složky.

4.1.1 Aplikace PID regulátoru

Tradiční PID regulátory se běžně používají pro systémy s jedním vstupem a s jedním výstupem (SISO). Je velice obtížné navrhnout PID regulaci pro systém s více výstupy a s více vstupy (MIMO), který má spousty vazeb mezi vstupy a výstupy. Na helikoptéru je zapotřebí aplikovat tři PID regulátory. PID regulátory mají na starost regulování zdvihu, náklonu a dráhy. Všechny tři PID regulátory je zapotřebí zapojit tak, aby je bylo možné připojit k systému helikoptéry se dvěma vstupy. Při návrhu zapojení PID regulace pro řešený systém helikoptéry je využito následujících znalostí:

- 1) Pokud se má helikoptéra rovnoměrně zdvihnout, je nutné, aby bylo přivedeno kladné napětí na oba motory zároveň.
- 2) Pokud se má helikoptéra naklonit, je nutné, přivést kladné napětí na jeden motor a záporné napětí na motor druhý
- 3) Pokud se má helikoptéra přemístit, je nutné, aby se helikoptéra naklonila

Pomocí předešlých tří znalostí o soustavě je vytvořen návrh zapojení, který lze vidět na obr. 4.1. Na schématu zapojení lze vidět blok představující helikoptéru, tři PID regulátory a dva vstupy pro referenční hodnoty.



Obr. 4.1: Schéma zapojení PID regulátorů k modelu helikoptéry

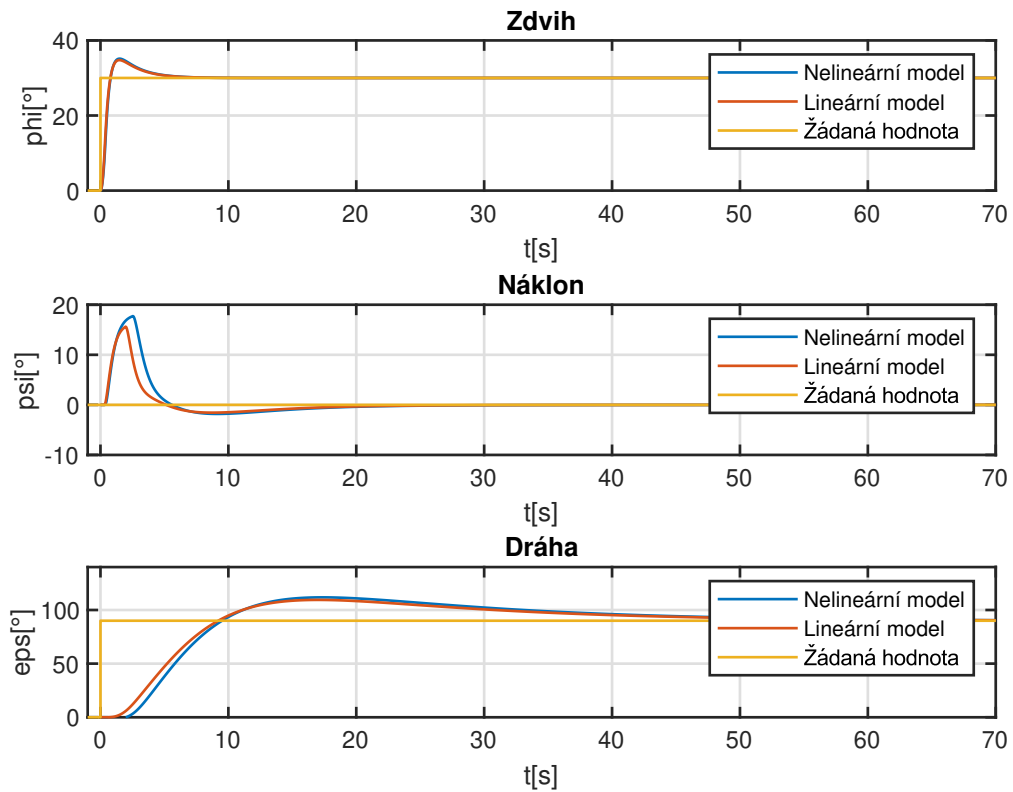
Výstup PID regulátoru pro zdvih je připojen k obou vstupům systému. Toto zapojení je vytvořeno na základě první znalosti. Výstup PID regulátoru pro náklon je zapojen stejně jako PID regulátor pro zdvih s tím rozdílem, že je k zadnímu motoru připojen s negací. Připojení PID regulátoru pro náklon je dáno druhou znalostí. Poslední PID regulátor pro regulaci dráhy je připojen do vstupu náklonového PID regulátoru. Zapojení PID regulátoru pro regulaci dráhy je dáno třetí znalostí. Toto zapojení vytvoří dva vstupy pro žádanou hodnotu. K vstupu do zdvihového PID regulátoru je připojena žádaná hodnota zdvihu a k vstupu do PID regulátoru pro regulaci dráhy je připojena žádaná hodnota dráhy. Žádaná hodnota náklonu je dána výstupem z PID regulátoru pro regulaci dráhy a v konečném čase regulace musí být nulová. K vstupu do systému jsou připojeny dvě saturace, které omezují maximální vstupní hodnotu napětí na mez danou reálným systémem. PID regulátoru pro

regulaci dráhy je vybaven vnitřní saturací, která omezuje výstup z regulátoru na maximální rozsah náklonu helikoptéry ($\pm 32^\circ$).

Nastavení PID regulátorů

Celý proces nastavení PID regulátorů začíná připojením zdvihového PID regulátoru a náklonového PID regulátoru. Tyto dva PID regulátory jsou připojeny k linearizovanému modelu (v podobě stavového popisu) helikoptéry. K nastavení PID regulátorů je použit matlabovský nástroj PID Tuner. V nástroji PID tuner lze jednoduše nastavit požadované vlastnosti PID regulátoru pomocí dvou parametrů. Parametry, které se v nástroji PID tuner nastavují, jsou rychlost regulace a agresivita regulace. Po nastavení a otestování těchto dvou regulátorů, je do náklonového PID regulátoru připojen PID regulátor pro regulaci dráhy a stejně jako předešlé dva regulátory, nastaven pomocí nástroje PID tuner. Otestované nastavení PID regulátorů je následně aplikováno na nelineární model.

Na obr. 4.2 je graf zobrazující výstup ze simulace regulační smyčky. V grafu jsou vidět reakce na skok pro lineární i nelineární model. průběh reakce na skok je u lineárního a nelineárního modelu téměř shodný. Po otestování PID regulátorů na matematickém modelu je zapojení aplikováno na reálnou soustavu. Přestože PID regulátor vykazuje na modelu celkem dobrý průběh, při aplikaci na reálnou soustavu se nepovedlo soustavu uregulovat. Na soustavě je dále vyzkoušena experimentální metoda nastavení PID regulátoru zvaná jako Ziegler–Nichols. Ani metodou Ziegler–Nichols se nepovedlo soustavu uregulovat a proto není PID regulátor posuzován v závěrečném hodnocení.



Obr. 4.2: Průběh PID regulace

4.2 Stavový regulátor

Pokud je systém popsán pomocí stavového popisu, tak vlastní čísla matice A , neboli póly systému, vyjadřují dynamické vlastnosti celého systému. Podle polohy pólů vzhledem k osám komplexní roviny lze určit stabilitu, vlastní frekvenci a tlumení. Vhodnou volbou stavového zpětnovazebního regulátoru je možné změnit polohu pólů uzavřené smyčky tak, aby měl systém požadované dynamické chování. Pro odvození stavového zpětnovazebního regulátoru je bráno, že soustava je ve tvaru stavového popisu (24). [20]

Dále je zapotřebí, aby byla k dispozici úplná zpětná vazba. Ve zpětné vazbě se nachází matice zisku označována jako K a akční veličina dostává díky tomu tvar:

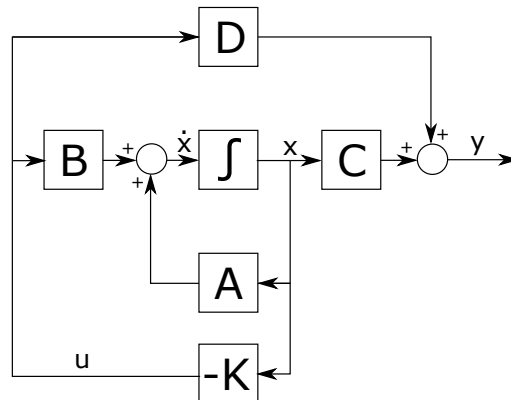
$$u = -Kx \quad (50)$$

Dynamiku systému s uzavřenou smyčkou lze poté zapsat jako:

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (51)$$

Kde člen $(A - BK)$ reprezentuje matici A systému s uzavřenou smyčkou. Systém s uzavřenou smyčkou má stejný počet vstupů jako je stavových proměnných. Počet sloupců

matice B je roven počtu akčních veličin u a musí být schodný s počtem řádků matice zisku K . Změna pólů systému je proces při kterém jsou póly členu $(A - BK)$ převedeny do stabilní oblasti.



Obr. 4.3: Schéma zapojení stavového regulátoru

Na obr. 4.3 lze vidět schéma blokového zapojení stavového regulátoru. Jednou z metod, získání matice zisku (K), je metoda nazývaná jako Lineární kvadratický regulátor neboli LQR.

4.3 Lineární kvadratický regulátor (LQR)

Lineární kvadratický regulátor je ve skutečnosti metoda sloužící pro optimální určení parametrů matice zisku (K) u stavového regulátoru. Tato metoda umožňuje stabilní a vysoce výkonný návrh systémů s uzavřenou smyčkou. LQR je stavový regulátor, který minimalizuje nákladovou funkci definovanou jako:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (52)$$

Parametr Q je pozitivně semidefinitní matice, která určuje energii stavů systému. Parametr R je pozitivně definitní matice, která určuje energii vstupního řídicího signálu. Velikosti matice Q a R určují váhu příslušných stavů a vstupů do systému. V jednoduchosti to znamená, že čím vyšší je prvek na diagonále matice Q , nebo R tím více přispívá k velikosti cenové funkce J a tím více se tento parametr minimalizuje zpětnovazební maticí zisku K . Matice Q tedy určuje přesnost regulace a matice R určuje velikost vstupní energie (náklady na regulaci). Parametry matice zisku (K) se získají pomocí vztahu:

$$K = R^{-1} B^T P \quad (53)$$

Kde P je výsledkem Riccatiho diferenciální rovnice. K výpočtu matice zisku K se využívají numerické metody. Jedním ze solverů je například prostředí MATLAB, které nabízí funkci `lqr` obsahující vstupní parametry matice A , B , Q a R . [21]

Parametry matic Q a R se stanovují zpravidla experimentálně (metoda pokus-omyl). Existují ale metody, které dokáží určit prvotní hodnoty matic Q a R . Tyto hodnoty se však musí dále upravit k finální podobě. Jednou z metod nastavení matic je například Brysonovo pravidlo. Brysonovo pravidlo pracuje s maximální možnou hodnotou stavu (pro matici Q), nebo s maximální možnou hodnotou vstupu (pro matici R). [22]

$$\begin{aligned} q_{ii} &= \frac{1}{\max(x_i^2)} \\ r_{ii} &= \frac{1}{\max(u_i^2)} \end{aligned} \quad (54)$$

Kde x_i je maximální hodnota daného stavu a u_i je maximální hodnota daného vstupu.

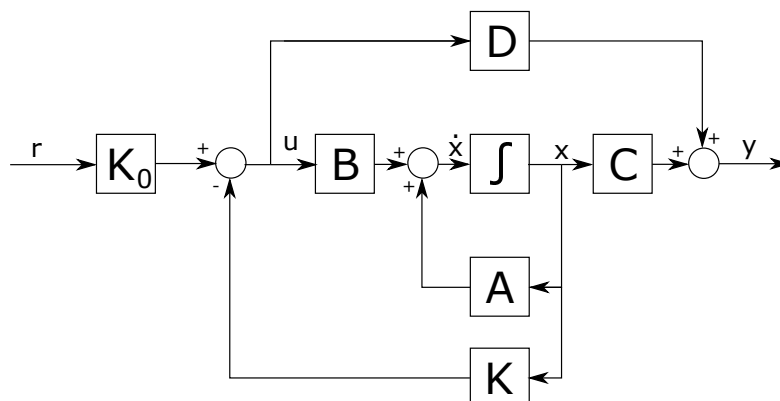
Ze schématu na obr. 4.3 je patrné, že zde není žádný vstup pro referenční hodnotu. Takovéto zapojení má za úkol vytvořit stabilní systém. Pokud je zapotřebí systém nejen stabilizovat, ale i přidat vstup pro připojení referenční hodnoty (r), je nutné změnit akční veličinu podle následujícího vztahu:

$$u = -Kx(t) + K_0r(t) \quad (55)$$

Matice K_0 musí být zvolena tak, aby systém s uzavřenou smyčkou měl statický zisk roven jedné (pokud je na vstup přivedena hodnota jedna, tak na výstupu bude také hodnota jedna). Hodnota matice K_0 , která vytvoří statický zisk roven jedné, se vypočítá podle následujícího vztahu:

$$K_0 = (C(A - BK)^{-1}B)^{-1} \quad (56)$$

Na obr. 4.4 lze vidět zapojení stavového regulátoru se vstupem pro referenční hodnotu.



Obr. 4.4: Schéma zapojení stavového regulátoru s referenčním vstupem

4.4 Lineární kvadratický regulátor s integrační složkou (LQI)

Samotný LQ regulátor se chová podobně jako PD regulátor a tudíž u něj vzniká problém s trvalou regulační odchylkou. Trvalou regulační odchylku, jak již bylo popsáno v kapitole o PID, lze eliminovat pomocí integrační složky. LQ regulátor s integrační složkou se nazývá LQI. Použití LQI regulátoru přináší výhodu v podobě vzniku referenčního vstupu a není tedy nutné dopočítávat matici zisku K_0 . [23]

Integrál regulační odchylky je dán popsán vztahem:

$$e(t) = \int_0^t (r - y(\tau)) d\tau \quad (57)$$

Dosazení vztahu (57) do stavového popisu (24), u kterého je zanedbána poruchová matice D , vznikne následující vztah:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (58)$$

Akční veličina (u) má při LQI zapojení následující podobu:

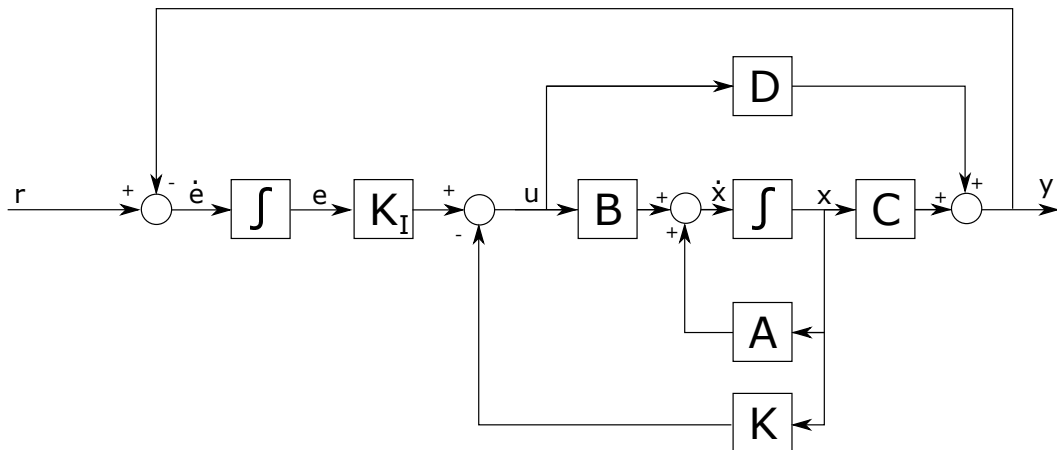
$$u(t) = \begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (59)$$

Kde K je matice zisku stavového regulátoru a matice K_I je matice zisku integrační části. Pro vyřešení LQI regulátoru je zapotřebí změnit systémové matice do následující podoby:

$$A_I = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, B_I = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, K_S = \begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix} \quad (60)$$

Na obr. 4.5 lze vidět schéma zapojení LQI regulátoru. Toto schéma je podobné schématu zapojení LQ regulátoru s referenčním vstupem, které je na obr. 4.4, ale obsahuje navíc zápornou zpětnou vazbu a integrační člen. Záporná zpětná vazba vytváří regulační odchylku, která je integrována a tím co nejvíce potlačena.

Problémem LQI regulátoru v reálném nasazení, stejně jako u stavového regulátoru, je splnitelnost jednoho z předpokladů. Tímto předpokladem je úplná zpětná vazba. Úplné zpětné vazby nelze vždy docílit měřením, například kvůli omezenosti počtu senzorů, nebo nemožnosti daný stav měřit. Z tohoto důvodu se musí při nasazení LQI regulátoru vypočítat všechny neměřitelné stavy pomocí matematického modelu. Jednou z metod pro získání neznámých stavů je stavový pozorovatel. Stavový pozorovatel je popsán a použit v kapitole 4.5.



Obr. 4.5: Schéma zapojení LQI regulátoru

4.4.1 Aplikace LQI regulátoru

Pro výpočet LQI regulátoru je zapotřebí nejdříve změnit systémové matice dle vztahů (60). Po změně systémových matic je třeba navrhnout matice Q a R . Matice zisku K je výsledkem matlabovské funkce lqr , do které se vloží matice A_I , B_I , Q a R .

U modelu helikoptéry je požadováno řídit úhel zdvihu (φ) a úhel dráhy (ϵ), nikoliv však úhel náklonu (ψ). Úhel náklonu se mění automaticky při požadavku na změnu úhlu dráhy, ale jeho ustálená hodnota v koncovém čase musí být vždy rovna nule. Pokud by se konečná hodnota úhlu náklonu nerovnila nule, jednalo by se o nestabilní systém. Z tohoto důvodu není žádoucí mít vstup pro referenční hodnotu úhlu náklonu. Pro vytvoření externího vstupu pro referenční hodnoty úhlu zdvihu a úhlu náklonu je zapotřebí změnit matici vazeb výstupu na stav (C) tak, aby byly získány tyto dva externí vstupy. Takto modifikovaná matice C se použije pouze pro dosazení do vztahu (60). Výsledná matice C má tedy tvar:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Kvůli přidání integrační složky je zapotřebí rozšířit matici Q o dva řádky a o dva sloupce. Tyto nové členy určují váhu přesnosti integrační složky na úhel zdvihu a úhel dráhy. Při vytváření váhových matic Q a R je nejdříve použito Brysonovo pravidlo, ale toto nastavení se ve výsledku ukazuje jako nedostatečné. Dalším způsobem nastavení váhových matic je metoda pokus-omyl, kdy se při změně jedné hodnoty váhové matice spustí simulace, vytvořena v programu Matlab-Simulink, a sleduje se reakce této změny. Tímto způsobem se pokračuje dokud není dosaženo požadované kvality regulace. Po několika simulacích jsou vytvořeny následující váhové matice:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (62)$$

Váhová matice R je vytvořena s ohledem na cíl, vytvořit co nejkvalitnější regulaci bez ohledu na spotřebu energie.

$$R = \begin{bmatrix} 0,05 & 0 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix} \quad (63)$$

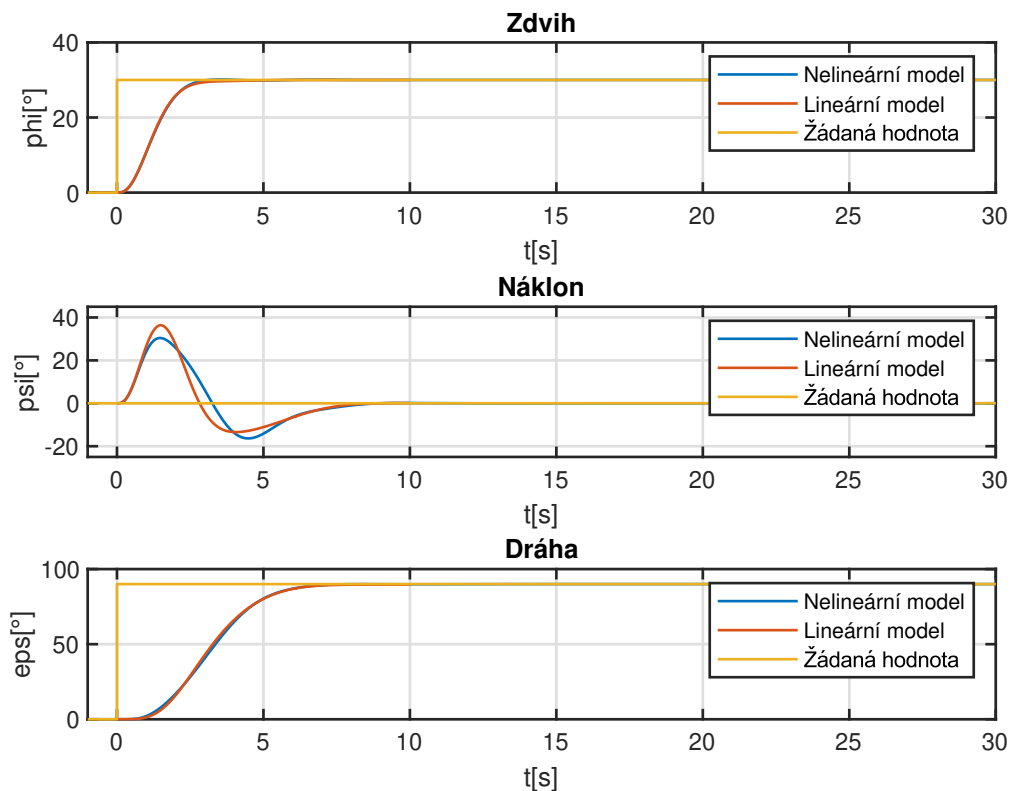
Výsledná matice zisku má tvar:

$$K = \begin{bmatrix} 54,83 & 31,65 & -26,34 & -10,48 & -50,56 & -71,03 \\ 54,83 & 31,65 & 26,34 & 10,48 & 50,56 & 71,03 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Výsledná matice integračního zisku má tvar:

$$K_I = \begin{bmatrix} -31,62 & 14,14 \\ -31,62 & -14,12 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Na obr. 4.6 je graf zobrazující výstupu ze simulace regulační smyčky. V grafu jsou vidět reakce na skok pro lineární i nelineární model. Oba zmíněné modely mají podobný průběh a z vizuálního hlediska jsou výsledky uspokojivé.



Obr. 4.6: Průběh LQI regulace

Stabilita linearizovaného systému s uzavřenou smyčkou

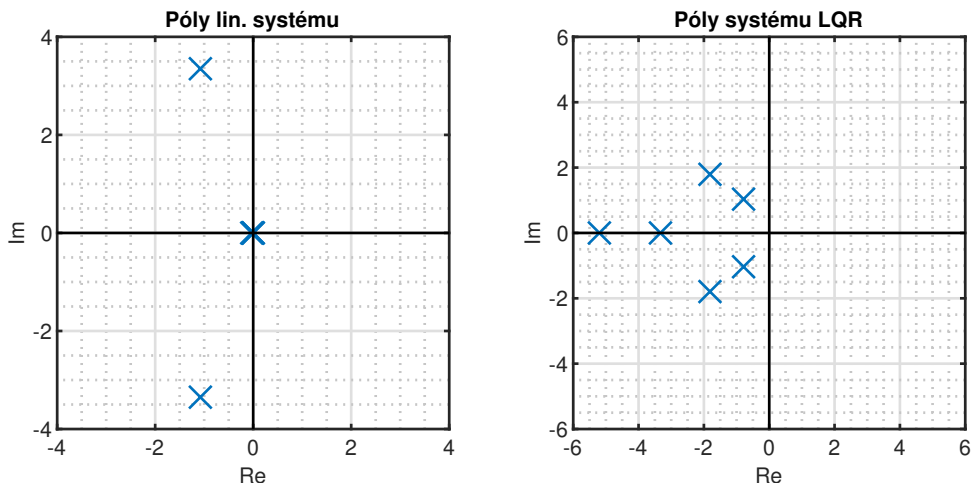
Jak již bylo popsáno výše v kapitole 4.2, vytvořením zpětnovazebního regulátoru se změnila poloha pólů uzavřené smyčky a tím i dynamika celého systému. Póly linearizovaného systému jsou řešeny z vlastních čísel matice A . V případě nasazení stavového regulátoru jsou póly uzavřené smyčky vlastními čísly matice $(A - BK)$. Póly uzavřeného systému se tedy vypočtou dle vztahu (66).

$$M(s) = \det[sI - (A - BK)] = 0 \quad (66)$$

Pro výpočet pólů uzavřené smyčky je použit matlabovský příkaz `eig(A-BK)`.

$$s = \begin{bmatrix} -1,92 + 1,72i \\ -1,92 - 1,72i \\ -5,21 \\ -3,31 \\ -0,81 + 1,03i \\ -0,81 - 1,03i \end{bmatrix} \quad (67)$$

Výsledné póly uzavřené smyčky jsou uvedené ve vektoru (67). Na obr. 4.7 lze vidět porovnání stability linearizovaného systému se stabilitou systému s uzavřenou smyčkou (dále jen póly systému LQR). Póly systému LQR se výrazně liší od pólů linearizovaného systému, což dokazuje fakt, že stavový regulátor mění póly systému. Nový systém je na rozdíl od předešlého systému stabilní (všechny póly systému jsou nalevo od komplexní roviny) a obsahuje také komplexní část. Komplexní část u některých prvků ve vektoru vlastních čísel (67) definuje, že systém má kmitavý, ale díky záporným reálným částem, tlumený charakter.



Obr. 4.7: Porovnání pólů linearizovaného systému a pólů systému LQR

4.5 Stavový pozorovatel

Stavový pozorovatel je dynamický systém, který se využívá pro odhad stavů systému, nebo pro odhad některých stavů systému. Plný stavový pozorovatel se používá pro odhad všech stavů systému. Pozorovatel může být navržen pro spojitě, nebo pro diskrétní systémy. [24]

Smysl pozorovatele je generovat odhad stavových veličin $x(t)$ na základě měření výstupních veličin $y(t)$ a vstupních veličin $u(t)$. Stavový pozorovatel je ve své podstatě model řízené soustavy v podobě stavového popisu. Odhadované stavové veličiny jsou použity pro vstup do regulátoru namísto reálných stavových veličin.

Stavový pozorovatel se stává mocným nástrojem hlavně při nasazení stavového zpětnovazebního regulátoru na soustavu, u které není možné měřit všechny stavové veličiny. Bez takového stavového pozorovatele by nebylo možné soustavu za pomoci stavového regulátoru řídit.

Na obr. 4.8 lze vidět schéma zapojení LQI regulátoru se stavovým pozorovatelem. Matice L je zpětnovazební matice pozorovatele, jejímž vstupem je odchylka skutečné

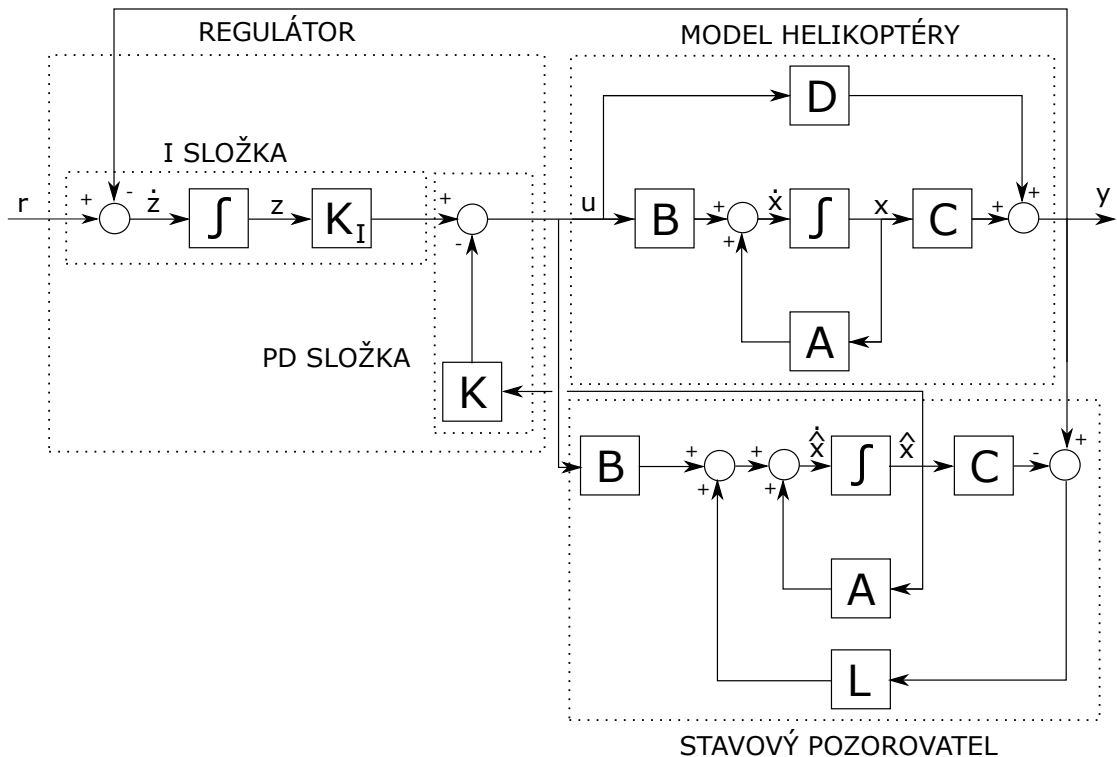
a pozorované hodnoty výstupu. Pozorované stavové proměnné jsou označené stříškou a použité pro vstup do stavového regulátoru K . Dle obr. 4.8 lze odvodit následující rovnice:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t)\end{aligned}\quad (68)$$

Po úpravě je získáno:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \quad (69)$$

Kde člen $(A - LC)$ je systémová matice pozorovatele. Vlastní čísla matice $(A - LC)$ musejí být zápornější (systém musí být rychlejší), než vlastní čísla matice A resp. vlastní čísla matice $(A - BK)$.



Obr. 4.8: Schéma zapojení LQI regulátoru se stavovým pozorovatelem

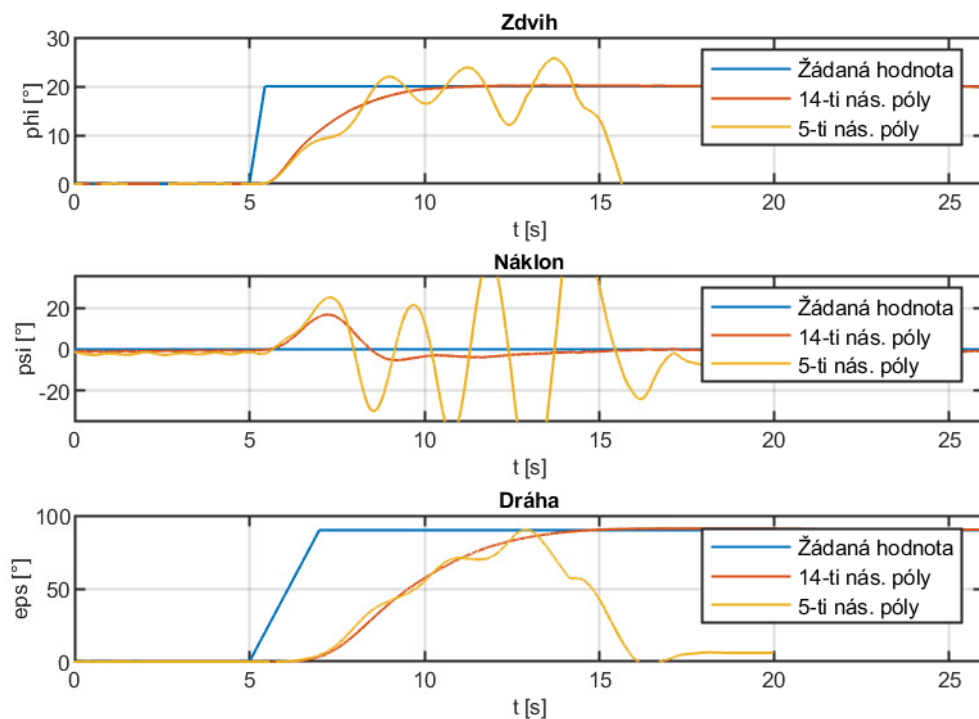
4.5.1 Nastavení stavového pozorovatele

Nastavením stavového pozorovatele se týká volby zpětnovazební matice pozorovatele L . Jak již bylo zmíněno výše, je nutné, aby póly matice $(A - LC)$ byly zápornější než póly matice $(A - BK)$. Obecným faktem je, že póly pozorovatele se nastavují 3-5x větší, než póly matice $(A - BK)$. Vektor požadovaných pólů pozorovatel je vytvořen z vektoru pólů systému (67) vynásobeného pěti:

$$s = 5 \cdot \begin{bmatrix} -1,92 + 1,72i \\ -1,92 - 1,72i \\ -5,21 \\ -3,31 \\ -0,81 + 1,03i \\ -0,81 - 1,03i \end{bmatrix} \quad (70)$$

Matice L je vypočtena pomocí funkce `place` v programu Matlab. Do funkce se vloží transponovaná matice A , transponovaná matice C a vektor požadovaných pólů. Výstupem z funkce je transponovaná matice L .

Při nasazení stavového pozorovatele na reálnou soustavu je zjištěno, že pětínásobné póly pozorovatele nejsou dostačující. Jako ideální nastavení stavového pozorovatele se v tomto případě ukazuje použití 14-ti násobných pólů. Obě nastavení jsou otestována na reálné soustavě při reakci na změnu reference z 0° na 20° pro zdvihový úhel a z 0° na 90° pro dráhový úhel. Z průběhů na obr. 4.9 je patrné, že s 5-ti násobnými póly se nepovedlo soustavu uregulovat. Naopak s 14-ti násobnými póly vykazuje soustava optimální chování.



Obr. 4.9: Graf porovnání dvou nastavení stavového pozorovatele

4.6 Výpočet neměřitelných stavů pomocí derivace

Jednou z možností zjištění úhlových rychlostí je použití derivace. Derivací úhlu je možné získat úhlovou rychlost. Použití derivačních bloků přináší na první pohled jednodušší řešení, než nasazení stavového pozorovatele. Problémem při použití derivačních bloků je vlastní realizace derivace. Podmínka fyzikální realizovatelnosti definuje, že následek je vždy vyvolán příčinou. Prakticky to znamená, že odezva dynamického členu nemůže vzniknout před okamžikem změny vstupní veličiny. Pokud je dynamický systém ve tvaru přenosové funkce (71), tak podmínka definuje, že řád jmenovatele musí být větší, nebo roven řádu čitatele ($n \geq m$).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (71)$$

Přenos derivace má tvar:

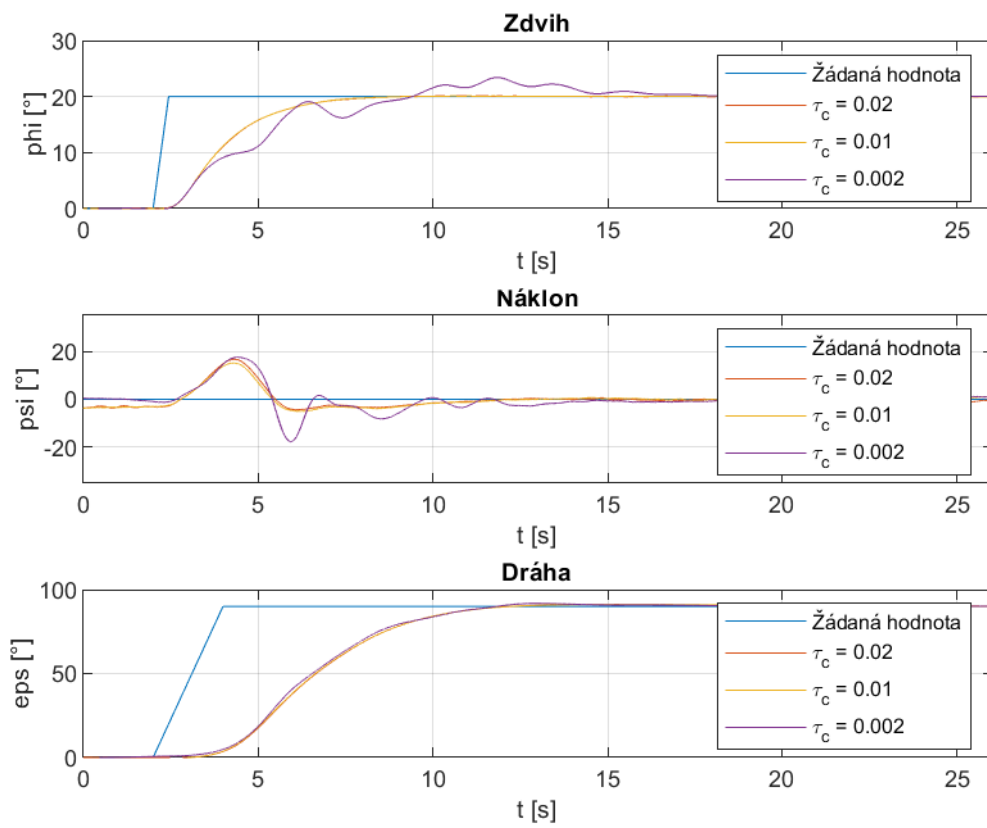
$$G(s) = s \quad (72)$$

Z přenosu derivace (72) je patrné, že nesplňuje fyzikální podmínku realizovatelnosti, jelikož má čítec vyšší řád. Aby bylo možné derivaci realizovat je nutné upravit přenos na následující tvar:

$$G(s) = \frac{s}{\tau_c s + 1} \quad (73)$$

Do přenosu je přidána integrační složka s konstantou τ_c . Konstanta τ_c se nazývá derivační koeficient a jeho velikost určuje chování přenosu (73). Čím nižší je derivační koeficient, tím více se přenos (73) podobá chování čisté derivaci.

Na obr. 4.10 je vidět graf, zobrazující průběh měření na reálné soustavě při rozdílných velikostech derivační konstanty. Z grafu je patrné, že při hodnotách derivační konstanty 0.01 - 0.02 dosahuje regulace soustavy optimálních výsledků. Při nižších hodnotách derivační konstanty dochází k zhoršení kvality regulačního pochodu. Měření je provedeno i při hodnotě derivační konstanty 0,1. Při této hodnotě se však nepovedlo soustavu uregulovat. Výsledné zapojení LQI regulátoru je vytvořeno s využitím derivačních bloků. Použité derivační bloky mají nastavenou hodnotou derivační konstanty 0.01.



Obr. 4.10: Chování reálné soustavy při rozdílném derivačním koeficientu

5 Výsledná regulace

5.1 Kritéria hodnotící průběh řízeného výstupu

Při návrhu regulátoru je požadováno, aby měl průběh výstupní veličiny určitý charakter. Pod pojmem kvalita regulačního pochodu je na mysli chování řízené veličiny v průběhu regulace. Pro posouzení kvality regulačního pochodu existuje celá řada kritérií. Výběr vhodného kritéria souvisí s typem řízeného procesu.

Nejméně příznivým vstupem do regulátoru je skoková změna. Z tohoto důvodu se regulátory nejdříve testují na skokovou změnu. Pokud regulátor úspěšně ureguluje skokovou změnu vstupního signálu je poté pravděpodobné, že bude vyhovovat i pro ostatní druhy vstupního signálu (rampa, sinus, ...).

5.1.1 Kritérium regulační odchylky

Podle tohoto kritéria se nehodnotí průběh řízeného výstupu v konečném čase, ale jeho asymptotické vlastnosti. Trvalá regulační odchylka (TRO) je definována vztahem (74). [25]

$$\text{TRO} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (74)$$

U TRO je požadováno, aby jeho hodnota byla co možná nejmenší (v ideálním případě $\text{TRO} = 0$). Ze znalosti regulátorů je jasné, že TRO se uplatní pouze u regulátorů, nemajících integrační složku. Regulátory obsahující integrační složku mají trvalou regulační odchylku rovnou nule. Jelikož jsou v této práci využity regulátory, obsahující integrační složku, není potřeba toto kritérium zkoumat.

5.1.2 Kritérium maximální odchylky regulované veličiny

Jako maximální odchylka regulované veličiny je chápána výška překmitu řízeného výstupu nad hodnotu žádané hodnoty, ke kterému dojde v první fázi řízení. Maximální odchylka regulované veličiny se většinou udává v procentech a je dána vztahem (75). [25]

$$\sigma [\%] = \frac{y_M}{w} \quad (75)$$

kde y_M je velikost překmitu nad žádanou hodnotou a w je velikost žádané hodnoty.

5.1.3 Kritérium doby regulace

Kritérium doby regulace, je kritérium, které udává čas, při kterém dojde řízený výstup do ohraničeného pásma v okolí žádané hodnoty a dále toto pásmo nepřekročí. Kritérium doby regulace lze popsat následujícím vztahem (76). [25]

$$t_p : w - \delta \leq y(t) \leq w + \delta \quad (76)$$

5.1.4 Kritérium tlumení regulačního pochodu

Kritérium tlumení regulačního pochodu slouží pro hodnocení periodických regulačních pochodů, kdy řízený výstup má podobu tlumených kmitů. kritérium hodnotí dva po sobě jdoucí kmity podle následujícího vztahu (77). [25]

$$\xi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} \quad (77)$$

Kde A_1 je amplituda prvního kmitu a A_2 je amplituda druhého kmitu (Velikost překmitu nad žádanou hodnotu). Pokud vyjde hodnota $\xi = 0$ pak se jedná o netlumené kmity, na druhou stranu, pokud bude hodnota $\xi = 1$ pak jde o aperiodický průběh.

5.1.5 Integrované kritéria

Integrované kritéria patří do kategorie kritérií, které charakterizují průběh regulačního pochodu na nekonečném časovém horizontu. Při návrhu regulátoru je snahou, aby integrované kritérium dosahovalo co možná nejmenší hodnoty. [26]

Kritérium integrální plochy (IE)

Základním integrovaným kritériem je kritérium integrální plochy. Integrál představuje plochu vymezenou křivkou $e(t)$, horizontální osou a vertikální osou. Toto kritérium je vhodné pouze pro aperiodické regulační pochody. V případě použití kritéria na netlumený, kmitavý průběh by docházelo k sčítání kladných a záporných ploch a Integrál J_{IE} by vycházel minimální.

$$J_{IE} = \int_0^{\infty} e(t) dt \quad (78)$$

Kritérium absolutní hodnoty regulační plochy (IAE)

Nedostatek kritéria integrální plochy lze odstranit použitím kritéria absolutní hodnoty regulační plochy označovaný zkratkou IAE. Všechny plochy pod křivkou $e(t)$ jsou u toho kritéria kladné a proto je toto kritérium použitelné i pro kmitavé regulační pochody. Problémem IAE kritéria je jeho analytický výpočet vzhledem k přítomnosti absolutní hodnoty, avšak při použití simulace dává toto kritérium dobré hodnoty.

$$J_{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (79)$$

Kritérium absolutní hodnoty regulační plochy s penalizací času (ITAE)

Kritérium IAE lze vylepši penalizací dlouho trvajících regulačních odchylek. K penalizaci dlouho trvajících regulačních odchylek stačí přidat do integrálu čas t .

$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} t|e(t)|dt \quad (80)$$

Kritérium kvadrátu regulační plochy (ISE)

Nepoužitelnost integrálu s absolutní hodnotou por analytické řešení a současné odstranění problému s odečítáním ploch pod křivkou $e(t)$ řeší kritérium kvadrátu regulačních plochy označované jako ISE. U tohoto kritéria je regulační odchylka ve formě kvadrátu a tudíž je vždy kladná.

$$J_{ISE} = \int_0^{\infty} e^2(t)dt \quad (81)$$

Kritérium kvadrátu regulační plochy s penalizací času (ITSE)

Stejně jako u kritéria absolutní hodnoty regulační plochy, lze u kritéria kvadrátu regulační plochy využít penalizaci času. Výsledné kritérium má poté tvar:

$$J_{ITSE} = \int_0^{\infty} te^2(t)dt \quad (82)$$

5.2 Naměřená data

Měření úhlů na soustavě je prováděno čtením dat z dostupných enkodéru. Enkodéry jsou připojeny do měřicí desky Quanser Q8-USB. Data z měřicí desky zpracovává a ukládá program Simulink. Solver je nastaven na numerickou metodu ODE 1 s velikostí kroku 0,002 s.

5.2.1 Testování LQI regulátoru v porovnání s modelem

Tato sekce je věnována porovnání chování soustavy s modelem. Pro porovnání jsou použity celkem tři měření. Prvním měřením je reakce na změnu reference z 0° na 20° pro zdvihový úhel. Druhým měřením je reakce na změnu reference z 0° na 90° pro dráhový úhel. Posledním měřením je kombinace obou těchto pohybů.

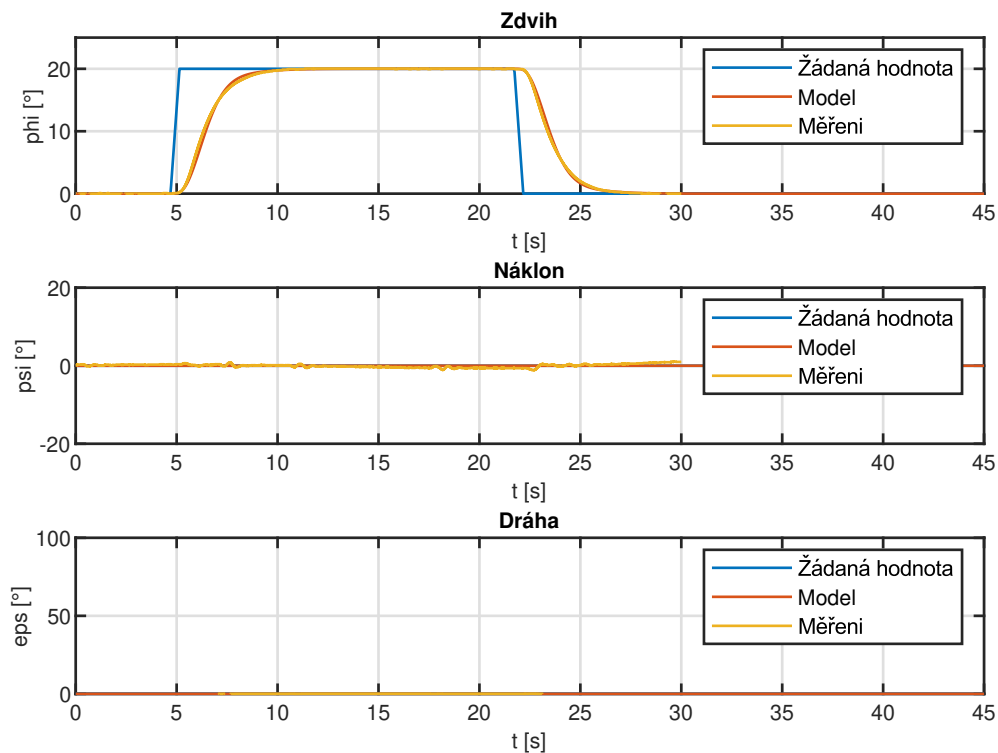
Odezva na skok do úhlu zdvihu

Na obr. 5.1 je porovnání chování modelu a reálné soustavy při změně reference z 0° na 20° pro zdvihový úhel. Z grafu je patrné, že vytvořený matematický model se chová stejně

jako reálná soustava. Naměřené nenulové hodnoty pro úhel náklonu a úhel dráhy se pohybují v hodnotách v rámci šumu. Níže jsou uvedeny dvě hodnotící kritéria, která jsou při tomto měření aplikována.

Hodnocení regulace:

- Čas ustálení zdvihu: 6.67 s
- Překmitnutí zdvihu: 0.2 %



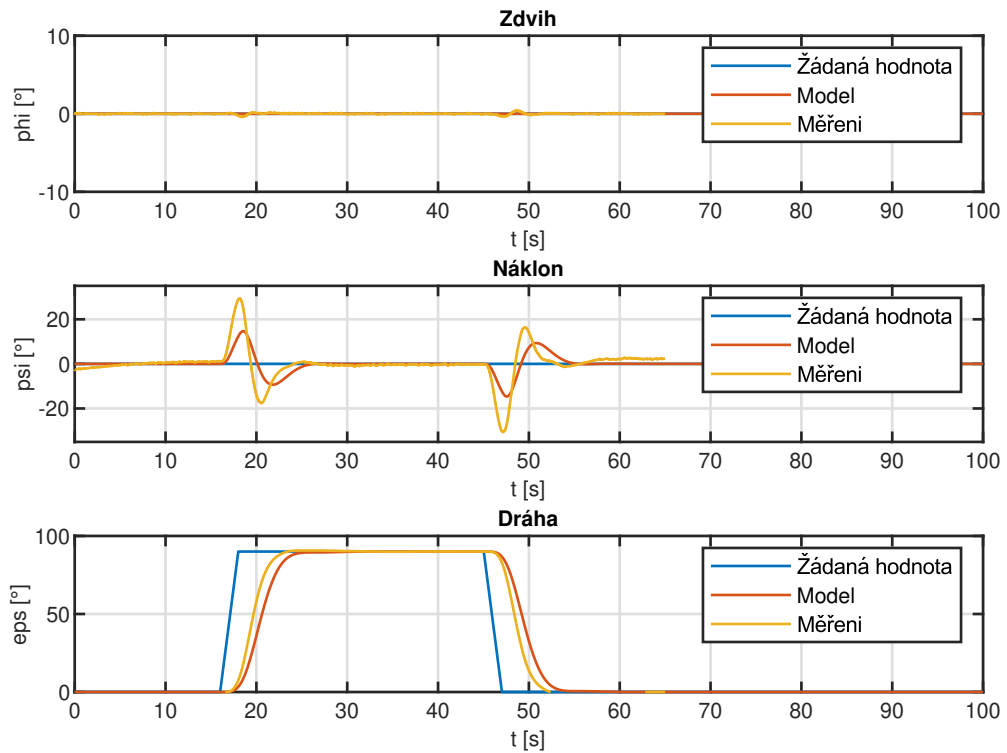
Obr. 5.1: Odezva na skok do úhlu zdvihu

Odezva na skok do úhlu dráhy

Na obr. 5.2 je porovnání chování modelu a reálné soustavy při změně reference z 0° na 90° pro dráhový úhel. Z grafu je patrné, že vytvořený matematický model vykazuje podobné chování jako reálná soustava. Na rozdíl od předešlého pokusu, je zde vidět odchylka v průběhu dráhy a také rozdílné chování náklonu helikoptéry. Naměřené nenulové hodnoty pro úhel zdvihu se pohybují v hodnotách v rámci šumu. Níže jsou uvedeny dvě hodnotící kritéria, která jsou při tomto měření aplikována.

Hodnocení regulace:

- Čas ustálení dráhy: 7,45 s
- Překmitnutí dráhy: 0,73 %



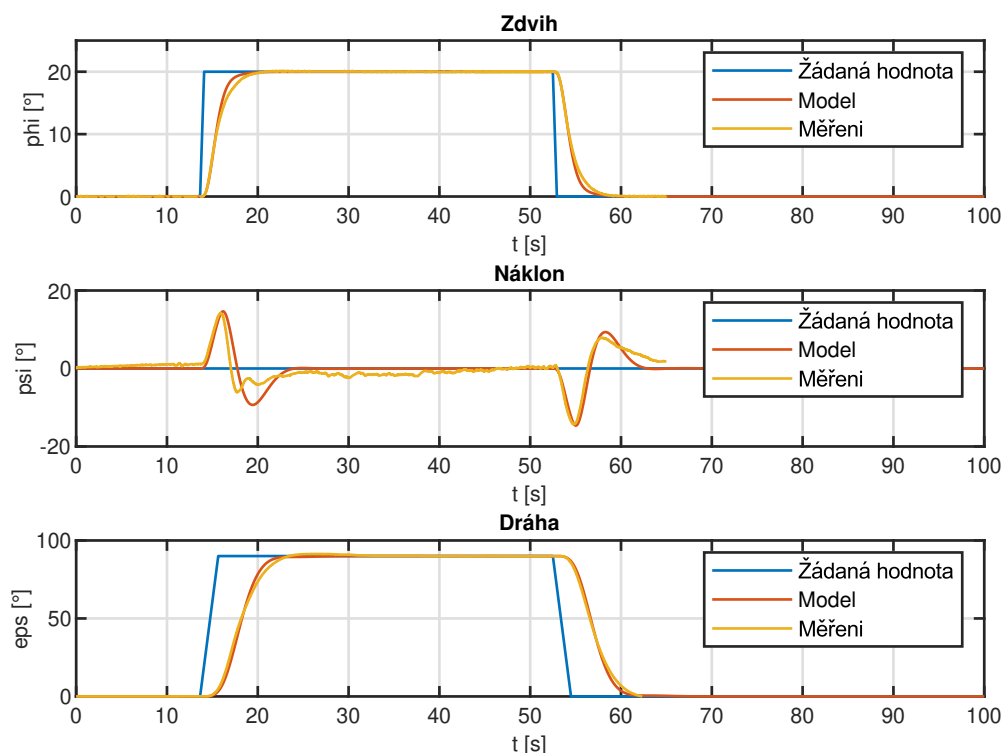
Obr. 5.2: Odezva na skok do úhlu dráhy

Odezva na kombinovaný skok

Na obr. 5.3 je porovnání chování modelu a reálné soustavy při změně reference z 0° na 20° pro zdvihový úhel a z 0° na 90° pro dráhový úhel. Jde o kombinaci předešlých dvou testů. Z grafu je patrné, že vytvořený matematický model zde vykazuje daleko lepší chování, než při předešlém testu. Úhel náklonu, zdvihu i dráhy mají v tomto testu téměř shodný průběh s reálnou soustavou. Níže jsou uvedeny dvě hodnotící kritéria, která jsou při tomto měření zjištěna.

Hodnocení regulace:

- Čas ustálení zdvihu: 7,13 s
- Překmitnutí zdvihu: 0,6 %
- Čas ustálení dráhy: 12 s
- Překmitnutí dráhy: 9,8 %



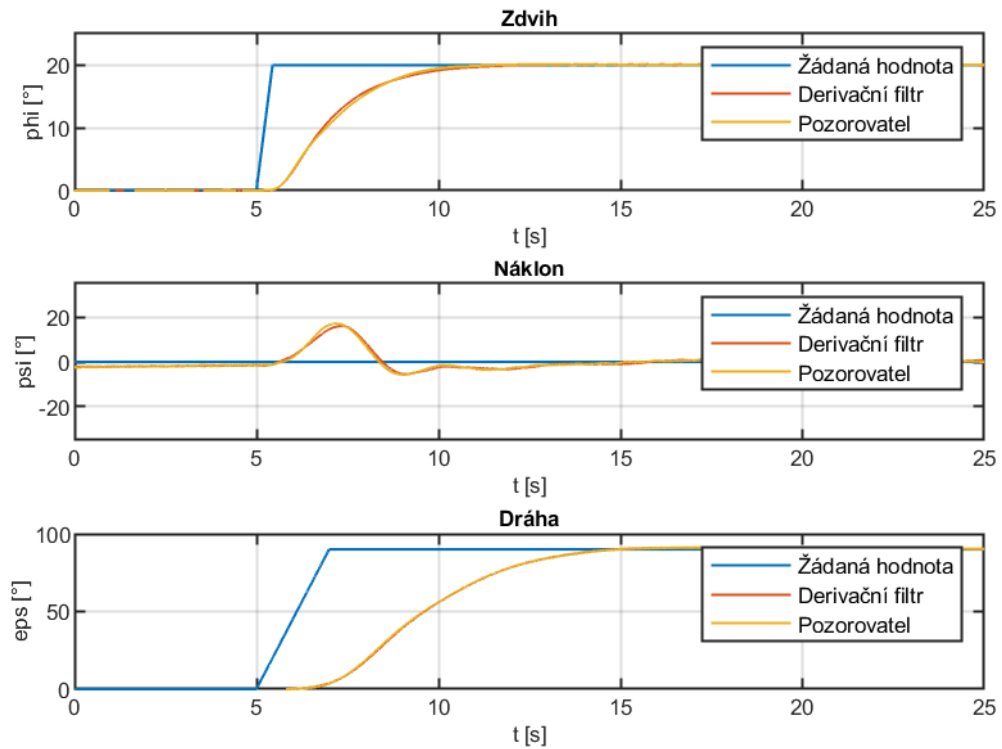
Obr. 5.3: Odezva na kombinovaný skok

5.2.2 Porovnání pozorovatele s derivací při dopočítávání zrychlení

Aby bylo možné na helikoptěře použít stavový (LQR, LQI) regulátor, je zapotřebí mít dostupné všechny hodnoty stavového vektoru. Na reálné soustavě lze měřit pouze poloha úhlů, nikoliv však úhlová rychlost. K dopočtení úhlové rychlosti lze použít stavového pozorovatele, nebo je možné měřený úhel derivovat a tím získat úhlovou rychlost. Obě tyto varianty jsou popsány v předešlých kapitolách. Na obr. 5.4 jsou zobrazeny dva průběhy reálné soustavy reagující na změnu reference z 0° na 20° pro zdvihový úhel a z 0° na 90° pro dráhový úhel. Z grafu je patrné, že stavový pozorovatel i derivace vykazují téměř shodný průběh.

5.2.3 Testování 3 druhů nastavení LQI regulátorů

Při návrhu regulátoru se vždy musí brát v úvahu, pro jaké účely je daná soustava navržena. V této práci není definováno, jak se má helikoptéra chovat. Z důvodu nedefinovaného požadovaného chování jsou vytvořeny celkem tři sady regulátorů. První regulátor, označen jako agresivní, je nastaven pro požadavek rychlého sledování reference. Na obr. 5.5 a v hodnotící tabulce 5.1 lze vidět, že agresivní nastavení dosahuje nejlepších časů ustálení. To co není vidět v grafech je fakt, že toto nastavení dosahuje sice nejlepšího hodnocení při reakci na skok, ale při testování vykazovalo slabou odolnost vůči vnějším



Obr. 5.4: Odezva na kombinovaný skok - porovnání pozorovatele s derivací

poruše. Agresivní nastavení má definovanou váhovou matici Q následovně:

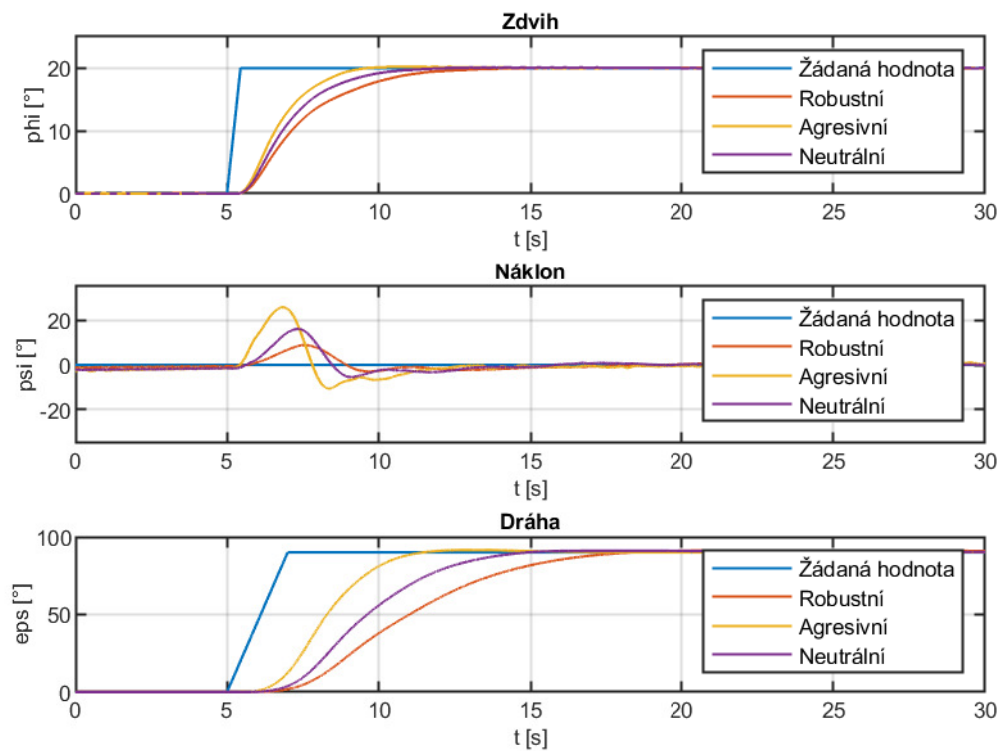
$$Q_{agr} = \text{diag} [100 \ 10 \ 20 \ 10 \ 400 \ 10 \ 200 \ 500] \quad (83)$$

Další použité nastavení je označené jako robustní. Robustní nastavení má za cíl co nejvíce odolávat vnější poruše a změnám parametrů systému (např. změna hmotnosti helikoptéry). Dle tabulky 5.1 sice robustní nastavení vykazuje nejhorší hodnocení, ale dokázalo systém daleko lépe stabilizovat v porovnání s agresivním nastavením. Robustní nastavení má definovanou váhovou matici Q následovně:

$$Q_{rob} = \text{diag} [100 \ 0 \ 20 \ 10 \ 10 \ 1 \ 50 \ 2] \quad (84)$$

Posledním nastavením je „neutrální“ nastavení, které vzniklo jako poměr mezi agresivním a robustním nastavením. Neutrální nastavení je použito pro všechna ostatní měření, jelikož dobře odolává vnějším poruchám a zároveň vykazuje celkem rychlé chování. Neutrální nastavení má definovanou váhovou matici Q následovně:

$$Q_{id} = \text{diag} [100 \ 10 \ 20 \ 10 \ 50 \ 10 \ 100 \ 20] \quad (85)$$



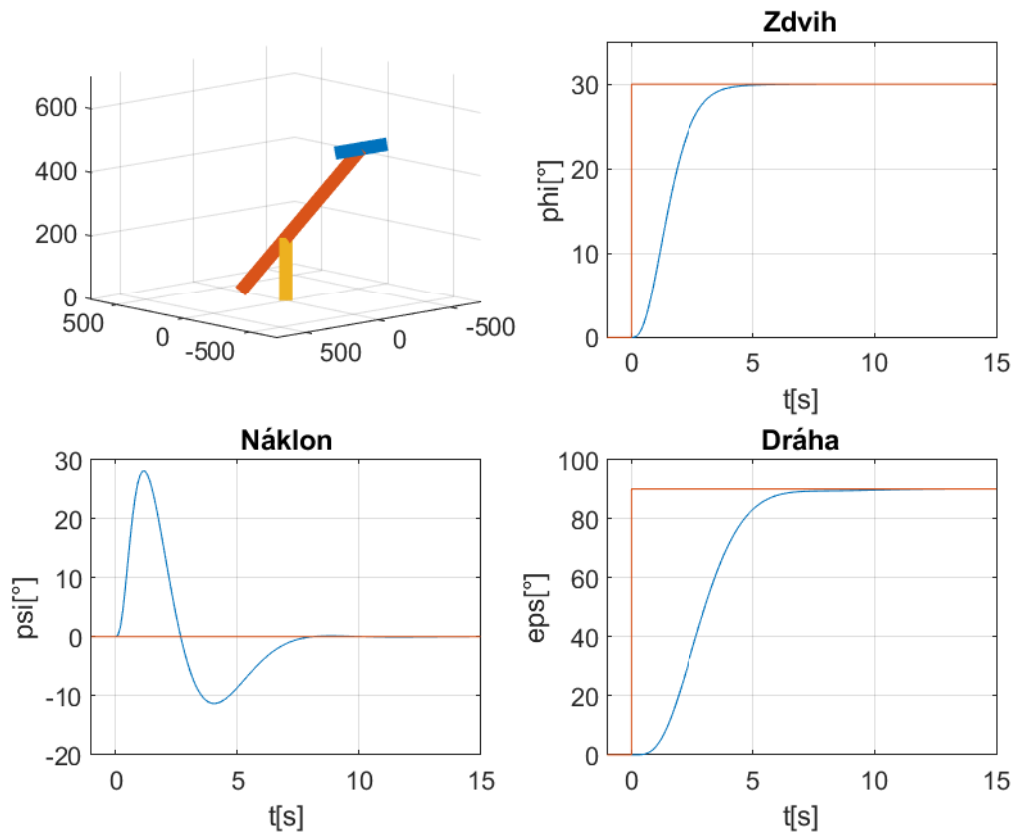
Obr. 5.5: Odezva na kombinovaný skok - porovnání třech nastavení LQI

| | Agresivní | Neutrální | Robustní |
|-----------------------|------------------|------------------|-----------------|
| σ_φ [%] | 1,07 | 0,63 | 0,2 |
| σ_ϵ [%] | 1,61 | 1,17 | 1,42 |
| T_φ [s] | 5,25 | 6,74 | 8,26 |
| T_ϵ [s] | 6,58 | 9,97 | 13,2 |
| ISE_φ [-] | 398 | 473 | 568 |
| ISE_ψ [-] | 918 | 371 | 134 |
| ISE_ϵ [-] | 10396 | 18347 | 25935 |
| ψ_{\max} [°] | 25,74 | 16,06 | 8,81 |

Tab. 5.1: Tabulka s hodnocením regulátorů

6 Simulace

Pro potřeby vizuální kontroly vytvořeného modelu, je vytvořena simulační aplikace. Simulační panel se skládá ze tří oken. Jedním oknem je 3-D graf ve kterém je vytvořena animace modelu helikoptéry. Zbylé tři okna slouží pro vykreslení 2-D grafů zaznamenávající průběh měřených úhlů. Na obr. 6.1 lze vidět výslednou simulaci.



Obr. 6.1: Výstup ze simulace

Kinematika

Aby bylo možno vytvořit animaci modelu helikoptéry, je zapotřebí popsat kinematiku celého systému. K popsání kinematiky systému je možné použít několik metod. V tomto případě je zvolena maticová metoda, která využívá transformačních matic k zjištění pohybových rovnic. Všechny transformační matice pro popsání 3-D prostoru jsou umístěny v přílohách. [29]

Ke kompletnímu popsání pohybu helikoptéry je zapotřebí znát umístění čtyřech bodů v prostoru. Těmito body jsou poloha protizávaží (K_{cw}), poloha těla helikoptéry (K_{hb}), poloha předního motoru (K_{fm}) a poloha zadního motoru (K_{bm}).

Pomocí vztahu (86) je popsána poloha protizávaží. Vztah je vytvořen z následujících matic: Natočení souřadného systému okolo osy z o úhel ϵ ($R_z(\epsilon)$), natočení souřadného

systemu okolo osy x o úhel φ ($R_x(\varphi)$) a posun souřadného systému o vzdálenost $-L_w$ ($T_y(-L_w)$).

$$K_{cw} = \begin{bmatrix} x_{cw} \\ y_{cw} \\ z_{cw} \\ a_{cw} \end{bmatrix} = R_z(\epsilon)R_x(\varphi)T_y(-L_w) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Vztah (87) popisuje polohu těla helikoptéry. Poloha těla helikoptéry se vypočítá podobně jako poloha protizávaží, s tím rozdílem, že poslední člen se neposune o $-L_w$, ale o L_a

$$K_{hb} = \begin{bmatrix} x_{hb} \\ y_{hb} \\ z_{hb} \\ a_{hb} \end{bmatrix} = R_z(\epsilon)R_x(\varphi)T_y(L_a) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Vztah (88) popisuje polohu předního motoru helikoptéry. Poloha předního motoru helikoptéry se vypočítá podobně jako poloha těla helikoptéry, jen je nutné přidat další členy. Jestli se souřadný systém již nachází na těle helikoptéry, tak je nutné ho natočit okolo osy y o úhel ψ ($R_y(\psi)$) a posunout ho ve směru osy x o vzdálenost L_h ($T_x(L_h)$). Obdobně se vypočítá i poloha zadního motoru, s tím rozdílem, že poslední člen se neposune o plus L_h , ale o mínus L_h .

$$K_{fm} = \begin{bmatrix} x_{fm} \\ y_{fm} \\ z_{fm} \\ a_{fm} \end{bmatrix} = R_z(\epsilon)R_x(\varphi)T_y(L_a)R_y(\psi)T_x(L_h) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$K_{bm} = \begin{bmatrix} x_{bm} \\ y_{bm} \\ z_{bm} \\ a_{bm} \end{bmatrix} = R_z(\epsilon)R_x(\varphi)T_y(L_a)R_y(\psi)T_x(-L_h) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Po sestavení pohybových rovnic je možné vytvořit kód, který vytvoří výslednou animaci. Níže je uvedena ukázka pseudokódu, který je možné předělat pro různé programovací jazyky.

Pseudokód

$n = \text{celkový čas} / \text{vzorkovací čas}$

Začátek cyklu => počet opakování = n

Výpočet pozic koncových bodů (K_{cw} , K_{hb} , K_{fm} a K_{bm})

Vykreslení grafu

Pauza (vzorkovací čas)

Konec cyklu

7 Závěr

Jedním z cílů této práce bylo vytvoření matematického modelu laboratorní soustavy modelu helikoptéry se třemi stupni volnosti a identifikace parametrů soustavy. V práci se podařilo aplikací Newton-Eulerových pohybových rovnic vytvořit nelineární matematický model popisující chování helikoptéry. Na soustavě byly identifikovány všechny potřebné parametry, a to i součinitele viskózního tření, které byly identifikované metodou logaritmického dekrementu. Aby bylo možné systém simulovat, byl vyvinut nelineární model helikoptéry v programu Simulink. Z důvodů potřeby návrhu regulátorů byl silně nelineární model linearizován v okolí pracovního bodu, kde jsou všechny úhly rovny nule.

Druhým cílem práce bylo navrhnout optimální algoritmus řízení pro daný systém a porovnat ho s některou z konvenčních metod návrhu řízení (např. PID). Linearizovaný systém z předchozí kapitoly byl použit pro návrh PID regulátorů. Přestože PID regulátory vykazovaly na modelu celkem dobrý průběh, při nasazení regulátorů na reálnou soustavu se nepovedlo soustavu uregulovat. Na začátku práce je shrnuta problematika robustního řízení, která ilustruje, že konvenční PID regulátory se pro návrh robustního řízení nehodí. Pro řízení byla použita vyšší forma řízení pracující na základě lineárního modelu nesoucí označení lineární kvadratický regulátor (LQR). Z důvodu odstranění trvalé regulační odchylky, kterou LQR zanechává, byla k regulátoru přidána integrační složka (LQI). Pro funkčnost LQI regulátoru je vyžadována plná zpětná vazba, která se na reálné soustavě nenachází. Problém s neúplnou zpětnou vazbou byl vyřešen dvěma způsoby. Jedním způsobem bylo nasazení stavového pozorovatele. Jako jednodušší varianta, při zachování stejné kvality regulace, se ukázala aplikace derivací na měřené úhly. Tímto způsobem byly získány úhlové rychlosti potřebné pro LQI regulátor.

Závěr práce se zabývá hodnocením chování modelu a hodnocením nastavení regulátorů. V kapitole 5.2.1 bylo porovnáno chování modelu s reálnou soustavou. Výsledným porovnáním bylo zjištěno, že matematický model vykazuje téměř shodné chování s reálnou soustavou, a proto může být použit pro návrhy regulátorů. V hodnocení byly testovány tři druhy nastavení LQI regulátoru, které lze použít pro různé účely. Závěrečné hodnocení ukazuje, že LQI regulátor je schopen úspěšně řídit tento systém se slušnými výkonovými charakteristikami i přes vysoce nelineární charakter systému.

Seznam použité literatury

Reference

- [1] ROLLINS, Leo. *Robust Control Theory* [online]. 1999 [cit. 2021-01-20]. Dostupné z: https://users.ece.cmu.edu/koopman/des_s99/control_theory/
- [2] ZHANG, Peng. CHAPTER 2 - Industrial control engineering. *Advanced Industrial Control Technology*. 1. Oxford: Oxford, 2010, s. 41-70. ISBN 978-1-4377-7807-6.
- [3] HALBAOUI, Khaled, Djamel BOUKHETALA a Fares BOUDJEM. Introduction to Robust Control Techniques. *Robust Control, Theory and Applications*. InTech, 2011, 2011-04-11. ISBN 978-953-307-229-6. Dostupné z: doi:10.5772/15213
- [4] NAMBA, R., T. YAMAMOTO a M. KANEDA. Robust PID controller and its application. *1997 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Computational Cybernetics and Simulation*. IEEE, 1997, , 3636-3641. ISBN 0-7803-4053-1. Dostupné z: doi:10.1109/ICSMC.1997.633233
- [5] SKOCZOWSKI, S., S. DOMEK, K. PIETRUSEWICZ a B. BROEL-PLATER. A Method for Improving the Robustness of PID Control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2005, **52**(6), 1669-1676. ISSN 0278-0046. Dostupné z: doi:10.1109/TIE.2005.858705
- [6] LIU, Xiaodong, Yunjie WU, Yu ZHANG a Song XIAO. A control method to make LQR robust: A planes cluster approaching mode. *Int. J. Control Autom. Syst.* 2017, **12**, 302-308. Dostupné z: doi:<https://doi.org/10.1007/s12555-012-0435-0>
- [7] FENG LIN a A.W. OLBROT. An LQR approach to robust control of linear systems with uncertain parameters. *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 1996, , 4158-4163. ISBN 0-7803-3590-2. Dostupné z: doi:10.1109/CDC.1996.577433
- [8] KUMAR, E. Vinodh a Jovitha JEROME. *Robust LQR Controller Design for Stabilizing and Trajectory Tracking of Inverted Pendulum*. Procedia Engineering, 2013, , 169-178. ISSN 1877-7058. Dostupné z: doi:<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.09.088>
- [9] APKARIN, PH.D., Jacob, Michel LÉVIS, M.S.SC. a Cameron FULFORD, M.S.SC. *LABORATORY GUIDE: 3 DOF Helicopter Experiment for LabVIEW Users* [online]. In: . s. 4-5 [cit. 2020-10-23]. Dostupné z: <https://www.quanser.com/products/3-dof-helicopter/>
- [10] STEJSKAL, Vladimír, Jaromír BROUSIL a Stanislav STEJSKAL. *Mechanika III*. 2. Praha: ČVUT, 2001. ISBN 80-01-02388-5.
- [11] NAVE, Rod. Moment of Inertia. *HyperPhysics* [online].

- Georgia: Georgia State university [cit. 2021-01-03]. Dostupné z: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mi.html>
- [12] VOJÁČEK, Antonín. Odporové tenzometry - princip, provedení, použití, historie. *Automatizace.hw.cz* [online]. 2017 [cit. 2021-01-03]. Dostupné z: <https://automatizace.hw.cz/foliove-odporove-tenzometry-princip-provedeni-pouziti+-historie.html>
- [13] The Wheatstone Bridge Circuit. *HBM* [online]. [cit. 2021-01-03]. Dostupné z: <https://www.hbm.com/en/7163/wheatstone-bridge-circuit/>
- [14] Arduino Scale With 5kg Load Cell and HX711 Amplifier. *Instructables* [online]. 2019 [cit. 2021-01-03]. Dostupné z: <https://www.instructables.com/Arduino-Scale-With-5kg-Load-Cell-and-HX711-Amplifi/>
- [15] Nonlinear Behavior and Time Variation. ELLIS, George. *Control System Design Guide: Using Your Computer to Understand and Diagnose Feedback Controllers*. 4. Butterworth-Heinemann, 2012. ISBN 978-0123859204.
- [16] NGUYEN, Quoc Chi a Ha Quang Thinh NGO. INPUT SHAPING CONTROL TO REDUCE RESIDUAL VIBRATION OF A FLEXIBLE BEAM. *Journal of Computer Science and Cybernetics*. 2016, **32**(1), 75-90. ISSN 1813-9663. Dostupné z: doi:10.15625/1813-9663/32/1/6765
- [17] State-space representation. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2020-10-23]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/State-space_representation
- [18] HOFREITER, Milan. *Základy automatického řízení*. Praha: ČVUT, 2012. ISBN 978-80-01-05007-1.
- [19] Řiditelnost a pozorovatelnost [online]. In: . [cit. 2020-10-23]. Dostupné z: http://www.polyx.com/_ari/ruzne/Controllability-Observability.pdf
- [20] BUCHI, Roland a Markus KOTTMAN. *Advanced Control: State Regulator*. MSE, 2011.
- [21] TRIANTAFYLLOU, Michael S. LINEAR QUADRATIC REGULATOR. *MIT Open Courseware: Massachusetts institute of technology* [online]. MIT, 2004 [cit. 2020-10-23]. Dostupné z: <https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-154-maneuvering-and-control-of-surface-and-underwater-vehicles-13-49-fall-2004/lecture-notes/lec19.pdf>
- [22] MURRAY, Richard M. LQR Control. *CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY: Control and Dynamical Systems* [online]. California: Caltech, 2006 [cit. 2020-10-23]. Dostupné z: <https://www.cds.caltech.edu/murray/courses/cds110/wi06/lqr.pdf>

- [23] M. GOPICHAND NAIK, T. LOVALAKSHMI a T. HARINARAYANA. Modeling and Design of Robust LQI Controller for DC-DC Buck Converter. *International Journal and Magazine of Engineering, Technology, Management and Research: A Peer Reviewed Open Access International Journal*. 2015, **12**(2), 6. ISSN 2348-4845.
- [24] PROF. ING. JIŘÍ SKALICKÝ, CSC. *Teorie řízení*. 2. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav výkonové elektrotechniky a elektroniky, 2002.
- [25] DOSTÁL, Petr a František GAZDOŠ. Kvalita regulačního pochodu. *Řízení technologických procesů* [online]. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006 [cit. 2021-01-04]. Dostupné z: <http://rtp.webzdarma.cz/rizeni08.php#kvalita>
- [26] ŠULC, Bohumil a Miluše VÍTEČKOVÁ. *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. 1. Praha: CVUT Praha, 2004. ISBN 9788001030073.
- [27] FENG, Zhengping, Jimao ZHU a Robert ALLEN. Design of LQI Control Systems with Stable Inner Loops. *Journal of Shanghai Jiatong University*. 2007.
- [28] *Quanser: 3DOF Helicopter* [online]. [cit. 2020-10-23]. Dostupné z: <https://www.quanser.com/products/3-dof-helicopter/>
- [29] BENEŠ, Petr. MECHANIKA II A. *Odbor mechaniky a mechatroniky* [online]. [cit. 2020-11-07]. Dostupné z: http://mech.fsid.cvut.cz/?page_id=514
- [30] BODIN, Erik a Fanny STENHOLM. *Modelling and Control of a 3DOF Helicopter*. Linköping, 2015. Bakalářská práce. Linköping University.

Seznam použitých veličin

| | | |
|-------------------|--|--------------------|
| φ | Úhel zdvihu | ° |
| ψ | Úhel náklonu | ° |
| ϵ | Úhel dráhy | ° |
| $\dot{\varphi}$ | Úhlová rychlost ve směru úhlu φ | rads ⁻¹ |
| $\dot{\psi}$ | Úhlová rychlost ve směru úhlu ψ | rads ⁻¹ |
| $\dot{\epsilon}$ | Úhlová rychlost ve směru úhlu ϵ | rads ⁻¹ |
| $\ddot{\varphi}$ | Úhlové zrychlení ve směru úhlu φ | rads ⁻² |
| $\ddot{\psi}$ | Úhlové zrychlení ve směru úhlu ψ | rads ⁻² |
| $\ddot{\epsilon}$ | Úhlové zrychlení ve směru úhlu ϵ | rads ⁻² |
| L_w | Vzdálenost od zdvihové osy ke středu protizávaží | m |
| L_a | Vzdálenost od zdvihové osy k helikoptěře | m |
| L_c | Vzdálenost od zdvihové osy ke středu ramena | m |
| L_p | Vzdálenost od konce ramena do středu helikoptéry | m |
| L_h | Vzdálenost od středu helikoptéry k motoru | m |
| m_w | Hmotnost protizávaží | kg |
| m_h | Hmotnost helikoptéry | kg |
| m_f | Hmotnost předního motoru | kg |
| m_b | Hmotnost zadního motoru | kg |
| m_c | Hmotnost celého ramena | kg |
| $M_{f\varphi}$ | Odporový moment ve zdvihové ose | Nm |
| $M_{f\psi}$ | Odporový moment v náklonové ose | Nm |
| $M_{f\epsilon}$ | Odporový moment v dráhové ose | Nm |
| $M_{G\varphi}$ | Gravitační moment ve zdvihové ose | Nm |
| $M_{G\psi}$ | Gravitační moment v náklonové ose | Nm |
| I_φ | Moment setrvačnosti ve směru úhlu φ | kgm ² |
| I_ψ | Moment setrvačnosti ve směru úhlu ψ | kgm ² |
| I_ϵ | Moment setrvačnosti ve směru úhlu ϵ | kgm ² |
| F_f | Tah předního motoru | N |
| F_b | Tah zadního motoru | N |
| U_f | Napětí na předním motoru | V |
| U_b | Napětí na zadním motoru | V |

Seznam obrázků a tabulek

Seznam obrázků

| | | |
|--------------|--|----|
| Obrázek 3.1 | Fotografie helikoptéry Quanser 3DOF. Převzato z [28] | 9 |
| Obrázek 3.2 | Schéma zapojení měřícího aparátu | 10 |
| Obrázek 3.3 | Free body diagram helikoptéry | 11 |
| Obrázek 3.4 | Uvolněný model helikoptéry v rovině YZ | 13 |
| Obrázek 3.5 | Uvolněný model helikoptéry v rovině XZ | 14 |
| Obrázek 3.6 | Uvolněný model helikoptéry v rovině XY | 15 |
| Obrázek 3.7 | Test 1 - chování modelu bez přidání napětí | 17 |
| Obrázek 3.8 | Test 2 - chování modelu v rovnovážné poloze | 17 |
| Obrázek 3.9 | Test 3 - chování modelu při přivedení napětí na zadní motor | 18 |
| Obrázek 3.10 | Test 4 - chování modelu při přivedení napětí na přední motor | 18 |
| Obrázek 3.11 | Wheastonův můstek | 21 |
| Obrázek 3.12 | Schéma zapojení tenzometru do arduina. Převzato z [14] | 22 |
| Obrázek 3.13 | Model měřící desky | 22 |
| Obrázek 3.14 | Sestavená měřící deska | 23 |
| Obrázek 3.15 | Graf závislosti tahu F na napětí U | 24 |
| Obrázek 3.16 | Coulombův - viskózní model tření | 25 |
| Obrázek 3.17 | Průběh kmitů na zdvihovém úhlu (φ) | 26 |
| Obrázek 3.18 | Průběh kmitů na náklonovém úhlu (ψ) | 26 |
| Obrázek 3.19 | Průběh kmitů na dráhovém úhlu (ϵ) | 27 |
| Obrázek 3.20 | Rovnovážné stavy systému | 32 |
| Obrázek 3.21 | Rozložení kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině | 33 |
| Obrázek 3.22 | Póly linearizovaného systému v komplexní rovině | 34 |
| Obrázek 4.1 | Schéma zapojení PID regulátorů k modelu helikoptéry | 38 |
| Obrázek 4.2 | Průběh PID regulace | 40 |
| Obrázek 4.3 | Schéma zapojení stavového regulátoru | 41 |
| Obrázek 4.4 | Schéma zapojení stavového regulátoru s referenčním vstupem | 42 |
| Obrázek 4.5 | Schéma zapojení LQI regulátoru | 44 |
| Obrázek 4.6 | Průběh LQI regulace | 46 |
| Obrázek 4.7 | Porovnání pólů linearizovaného systému a pólů systému LQR | 47 |
| Obrázek 4.8 | Schéma zapojení LQI regulátoru se stavovým pozorovatelem | 48 |
| Obrázek 4.9 | Graf porovnání dvou nastavení stavového pozorovatele | 49 |
| Obrázek 4.10 | Chování reálné soustavy při rozdílném derivačním koeficientu | 51 |
| Obrázek 5.1 | Odezva na skok do úhlu zdvihu | 55 |
| Obrázek 5.2 | Odezva na skok do úhlu dráhy | 56 |
| Obrázek 5.3 | Odezva na kombinovaný skok | 57 |

| | | |
|-------------|--|----|
| Obrázek 5.4 | Odezva na kombinovaný skok - porovnání pozorovatele s derivací | 58 |
| Obrázek 5.5 | Odezva na kombinovaný skok - porovnání třech nastavení LQI | 59 |
| Obrázek 6.1 | Výstup ze simulace | 60 |

Seznam tabulek

| | | |
|-------------|---|----|
| Tabulka 3.1 | Tabulka obsahující délkové parametry | 19 |
| Tabulka 3.2 | Tabulka obsahující hmotnostní parametry | 19 |
| Tabulka 3.3 | Tabulka obsahující momenty setrvačnosti | 20 |
| Tabulka 3.4 | Tabulka identifikovaných parametrů pro úhel zdvihu | 26 |
| Tabulka 3.5 | Tabulka identifikovaných parametrů pro úhel náklonu | 27 |
| Tabulka 3.6 | Tabulka identifikovaných parametrů pro úhel zdvihu | 27 |
| Tabulka 5.1 | Tabulka s hodnocením regulátorů | 59 |

Seznam použitého SW

- Matlab 2020a
- Simulink 2020
- LabView 2018
- Autodesk Fusion 360
- Inkscape 1.0
- Arduino IDE 1.8.13
- Overleaf (\LaTeX)

Přílohy

Stavové matice

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-M_g \sin(x_1^0)}{I_\varphi} & -\frac{k_{v\varphi}}{I_\varphi} & -\frac{(u_2^0+u_1^0)K_F L_a \sin(x_3^0)}{I_\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_h g L_p \sin(x_3^0)}{I_\psi} & 0 & \frac{m_h g L_p \cos(x_1^0) \cos(x_3^0)}{I_\psi} & -\frac{k_{v\psi}}{I_\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-(u_1^0+u_2^0)L_a \sin(x_1^0) \sin(x_3^0)}{I_\epsilon} & 0 & \frac{(u_1^0+u_2^0)L_a \cos(x_1^0) \cos(x_3^0)}{I_\epsilon} & 0 & 0 & -\frac{k_{v\epsilon}}{I_\epsilon} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{L_a K_F \cos(x_3^0)}{I_\varphi} & \frac{L_a K_F \cos(x_3^0)}{I_\varphi} \\ 0 & 0 \\ -\frac{L_h K_F}{I_\psi} & \frac{L_h K_F}{I_\psi} \\ 0 & 0 \\ \frac{L_a K_F \cos(x_1^0) \sin(x_3^0)}{I_\epsilon} & \frac{L_a K_F \cos(x_1^0) \sin(x_3^0)}{I_\epsilon} \end{bmatrix}$$

Transformační matice

$$T_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_y(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) & 0 \\ 0 & \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$