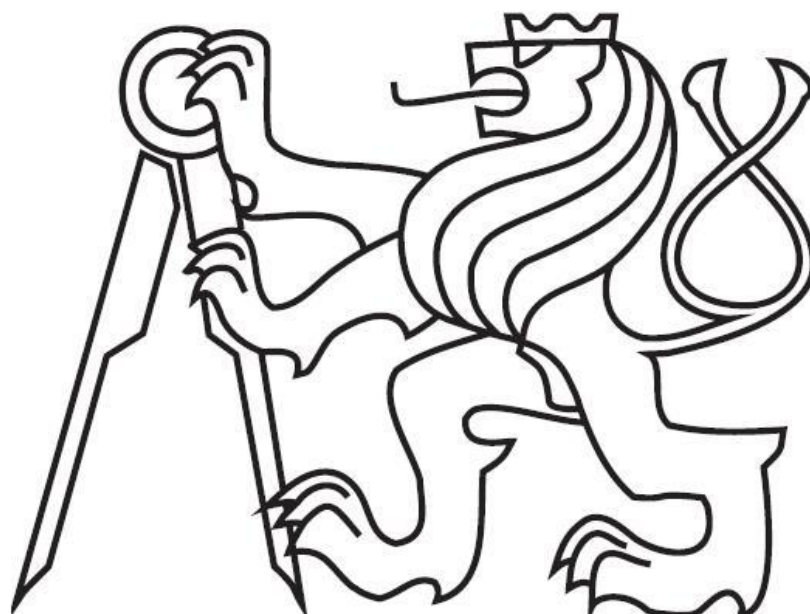


**ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

FAKULTA STAVEBNÍ



**DIPLOMOVÁ
PRÁCE**

2021

VYPRACOVAL: BC. JAN KUBÁT

VEDOUCÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE: DOC. ING. LUKÁŠ VRÁBLÍK, PH.D.

STUDIJNÍ OBOR: KONSTRUKCE POZEMNÍCH STAVEB

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: Kubát Jméno: Jan Osobní číslo: 458838
Zadávací katedra: K133 - Katedra betonových a zděných konstrukcí
Studijní program: (N3607) Stavební inženýrství
Studijní obor: (3608T008) Konstrukce pozemních staveb

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce: Analýza vlivu náhlé změny průřezu na napjatost krouceného železobetonového prvku
Název diplomové práce anglicky: Analysis of the effect of a sudden change in cross section on the stress of a reinforced concrete element stressed by torque

Pokyny pro vypracování:

1. Teoretické pozadí vlivu náhlé změny průřezu na napjatost konstrukcí.
2. Rešerše současného stavu poznání problematiky se zaměřením na kroucení.
3. Analýza problému na vhodně zvoleném příkladu.

Seznam doporučené literatury:

1. JIRÁSEK M., BAŽANT Z. P.: Inelastic analysis of structures; New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2001
 2. JENDELE L.; ATENA Program Documentation, Červenka Consulting, 2014
- dále dle konzultací.

Jméno vedoucího diplomové práce: doc. Ing. Lukáš Vráblík, Ph.D.

Datum zadání diplomové práce: 21.9.2020

Termín odevzdání diplomové práce: 3.1.2021

Údaj uveďte v souladu s datem v časovém plánu příslušného ak. roku

[Podpis]
Podpis vedoucího práce

[Podpis]
Podpis vedoucího katedry

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Beru na vědomí, že jsem povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je nutné uvést v diplomové práci a při citování postupovat v souladu s metodickou příručkou ČVUT „Jak psát vysokoškolské závěrečné práce“ a metodickým pokynem ČVUT „O dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací“.

21.9.2020

Datum převzetí zadání

[Podpis]
Podpis studenta(ky)

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Analýza vlivu náhlé změny průřezu na napjatost krouceného železobetonového prvku“ zpracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu zdrojů.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Ústřední knihovně Fakulty stavební a Fakulty architektury ČVUT.

V Praze dne:.....

.....

Jan Kubát

Poděkování:

Rád bych poděkoval panu doc. Ing. Lukáši Vráblíkovi, Ph.D, FEng. za jeho odborné vedení, skvělý přístup, užitečné rady a pomoc při zpracování této diplomové práce. Poděkování rovněž patří společnosti Červenka Consulting za poskytnutí licence (prostřednictvím fakulty stavební) k programu ATENA, použitému v této diplomové práci. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své rodině, která mě po celou dobu studia podporovala.

ABSTRAKT:

Železobetonové konstrukční prvky jsou nejčastěji namáhány ohybem a smykem, případně normálovou silou. Proto byla historicky věnována těmto typům namáhání největší pozornost a bylo dosaženo vysoké míry poznání chování takto namáhaných prvků. Často je ale zcela opomíjena skutečnost, že v mnoha případech dochází rovněž k nezanedbatelnému kroucení železobetonových prvků. Tomuto typu namáhání se věnuje jen malé množství výzkumných týmů ve světě a výsledky z nedávných let ukazují na výrazné nedostatky současných návrhových postupů, které jsou zakotveny v platných normách.

Předložená diplomová práce je zaměřena speciálně na problematiku prvků s náhlou změnou průřezu vystavených kroucením, která byla dosud naprosto stranou pozornosti. Jsou popsány teoretické základy namáhání železobetonových prvků kroucením a stručně shrnuty současné návrhové postupy. Hlavní součástí práce je poté nelineární numerická analýza prvků s proměnným průřezem, namáhaným kroucením, v programu ATENA Science. Vliv náhlé změny průřezu je porovnán s referenčními modely a hlavními sledovanými veličinami jsou únosnost při vzniku trhlin a únosnost při dosažení meze kluzu výztuže. Rovněž jsou porovnány jednotlivé pracovní diagramy. Na závěr je věnována pozornost vlivu náběhů v místě změny průřezu.

Stranou hlavních cílů práce byly předběžně rovněž zjištěny výrazné nedostatky v predikci únosnosti v kroucení pomocí Eurokódu 2. Tyto výsledky jsou prezentovány v závěru diplomové práce.

V rámci příloh jsou uvedeny vzorové příklady výpočtu kroucených železobetonových prvků dle několika návrhových postupů – příhradové analogie, Eurokódu 2 a ACI.

Klíčová slova:

Změna průřezu, kroucení, železobeton, metoda konečných prvků, nelineární analýza

ABSTRACT:

Reinforced concrete structural elements are most often subjected to bending and shear, or normal force. Therefore, historically, the most attention has been given to these types of loading and a high degree of knowledge of the behavior of such stressed elements has been achieved. However, the fact that in many cases there is also a considerable torque of reinforced concrete elements is often completely neglected. Only a small number of research teams in the worldwide deals with this type of stress, and the results of recent years show significant shortcomings of the current design practices, which are enshrined in the current design standards.

The presented master's thesis is focused mainly on the issue of elements with sudden change in the cross-section stressed by torque, which has so far been completely out of the research spotlight. The theoretical foundations of torsional loading of reinforced concrete elements are described and current design procedures are briefly summarized. The main part of the thesis is then focused on a nonlinear numerical analysis of elements with variable cross-section, stressed by torque, in the program ATENA Science. The effect of an sudden change in cross-section is compared with the reference models and the main monitored variables are the torsional load bearing capacity when the first crack occur and the torsional load bearing capacity when the yield strength of the reinforcement is reached. The individual stress-strain diagrams are also compared. Finally, an attention is paid to the influence of transition smoothening at the point of change of the cross section.

Aside from the main objectives of the thesis, significant shortcomings in the prediction of torsional strength were also preliminarily identified using Eurocode 2. These results are presented at the end of the master's thesis.

The annexes provide sample examples of the calculation of torqued reinforced concrete elements according to several design procedures – strut and tie model, Eurocode 2 and ACI.

Keywords:

Change in Cross-section, Torsion, Reinforced Concrete, Finite Elements method, Nonlinear Analysis

ZNAČKY:

Značka	Jednotka	Veličina
A	m^2	průřezová plocha
A_0	m^2	plocha uzavřená střednicí průřezu
a_g	m	velikost kameniva betonu
b	m	šířka průřezu kratší ze stran obdélníku
D_e		matice elastické tuhosti
E	Pa	modul pružnosti
F	N	zatížení
f_{cd}	Pa	návrhová válcová pevnost betonu v tlaku
f_{ck}	Pa	charakteristická válcová pevnost betonu v tlaku
f_{cm}	Pa	střední válcová pevnost v tlaku
f_{ctd}	Pa	návrhová pevnost betonu v tahu charakteristická pevnost betonu v dostředném tahu
$f_{ctk;0,05}$	Pa	(5% kvantil)
f_{ctm}	Pa	střední pevnost betonu v tahu
f_{yd}	Pa	návrhová mez kluzu podélné výztuže
f_{yk}	Pa	charakteristická mez kluzu podélné výztuže
f_{ym}	Pa	střední mez kluzu podélné výztuže
G	Pa	smykový modul
G_f	N/m	lomová energie
h	m	výška průřezu delší strana obdélníku
H	Pa	modul zpevnění materiálu
I_t	m^4	moment setrvačnosti ve volném kroucení
T	Nm	krouticí moment
t	m	tloušťka průřezu
t_{ef}	m	účinná tloušťka stěny analogického tenkostěnného průřezu
$T_{Rd;c;AT}$	kNm	krouticí moment na vzniku trhliny, zjištěn nelineární analýzou
$T_{Rd;c;EX}$	kNm	krouticí moment na vzniku trhliny, zjištěn experimentálně
$T_{Rd;max}$	kNm	maximální přípustný návrhový krouticí moment
$T_{Rd;s;AT}$	kNm	mezní krouticí moment, zjištěn nelineární analýzou
$T_{Rd;s;EC2}$	kNm	mezní krouticí moment, zjištěn výpočtem dle EC2
$T_{Rd;s;EX}$	kNm	mezní krouticí moment, zjištěn experimentálně
$T_{Rd;s;STM}$	kNm	mezní krouticí moment, zjištěn náhradním příhradovým modelem
$V_{Rd;max}$	kN	maximální přípustná návrhová posouvající síla
w_c	m	šířka trhliny

W_t	m^3	průřezový modul ve volném kroucení
x,y,z	m	složky posunu
z	m	délka střednice větve analogického tenkostěnného průřezu
ε	-	poměrné přetvoření
ε_u	-	poměrné přetvoření na mezi únosnosti
ε_y	-	poměrné přetvoření na mezi kluzu
θ	m/rad	poměrné zkroucení
ν	-	Poissonovo číslo
ν	-	redukční součinitel pro porušení betonu smykem
σ	Pa	napětí
$\sigma_{1;2;3}$	Pa	hlavní napětí
τ	Pa	smykové napětí
τ_0	Pa	mezní smykové napětí
φ	rad	pootočení
ω	-	parametr poškození

Obsah

1.	ÚVOD	12
1.1.	Předmluva	12
1.2.	Obsah práce a vymezení řešené problematiky	12
1.3.	Motivace	13
1.4.	Cíle	14
2.	TEORETICKÉ POZADÍ PROBLEMATIKY	15
2.1.	Napětí v průřezech	17
2.1.1.	Fáze před vznikem trhlin	17
2.1.2.	Vznik trhliny	19
2.1.3.	Distribuce trhlin po délce prvku	20
2.2.	Teorie plasticity	20
2.2.1.	Haighův-Westergaardův prostor	20
2.2.2.	Trescovo kritérium	22
2.2.3.	Von Misesovo kritérium	23
2.2.4.	Drucker-Pragerovo kritérium	23
2.2.5.	Rankinovo kritérium	24
2.2.6.	Menétrey-Willamovo kritérium	25
2.3.	Lomová mechanika	26
2.3.1.	Lineární lomová mechanika	27
2.3.2.	Nelineární lomová mechanika	34
2.4.	Mechanika poškození	39
2.4.1.	Pracovní diagram poškozené materiálu	41
2.4.2.	Izotropní poškození	41
2.4.3.	Ortotropní poškození	42
2.4.4.	Rozetřené trhliny (smeared cracks)	42
2.4.5.	Kombinace mechaniky poškození a teorie plasticity	43
2.5.	Metoda konečných prvků	43

2.5.1.	Úvod.....	43
2.5.2.	Síť konečných prvků.....	44
2.5.3.	Řešiče lineární soustavy rovnic.....	46
2.6.	Nelineární analýza	48
2.6.1.	Řešiče nelineárních rovnic	49
3.	SOUČASNÉ NÁVRHOVÉ POSTUPY PRO KROUCENÉ PRVKY	54
3.1.	Příhradová analogie	54
3.2.	Eurokód 2.....	55
3.3.	Model Code 2010.....	57
3.4.	ACI 318-11	58
4.	ANALÝZA VYBRANÝCH PRŮŘEZŮ	59
4.1.	Přijaté předpoklady	59
4.2.	Komentář k výsledkům.....	59
4.3.	Materiálové charakteristiky.....	60
4.3.1.	Beton.....	60
4.3.2.	Výztuž	61
4.3.3.	Zatěžovací deska	62
4.4.	Obecná nastavení modelů	62
4.5.	Citlivostní analýza	63
4.5.1.	Typ konečného prvku	65
4.5.2.	Bázové funkce.....	66
4.5.3.	Velikost konečného prvku.....	67
4.5.4.	Směr šíření trhlin	70
4.5.5.	Tahová pevnost betonu	72
4.5.6.	Lomová energie.....	73
4.6.	Validační model.....	73
4.7.	Analýza prvků proměnného čtvercového průřezu	79

4.7.1.	Vliv náběhů.....	84
4.7.2.	Vyhodnocení modelů.....	85
4.7.3.	Globální součinitel bezpečnosti	89
5.	ZÁVĚR	92
5.1.	Zhodnocení splnění cílů diplomové práce	92
5.2.	Souhm nejdůležitějších poznatků.....	92
5.3.	Náměty na rozšíření práce	93
6.	ZDROJE	94

Příloha 1 – Ukázka posouzení výztuže dle různých návrhových přístupů
Příloha 2 – Posouzení výztuže validačního modelu

1. ÚVOD

1.1. Předmluva

Kroucení je jedním ze základních druhů namáhání prutových prvků, kterému se ovšem věnována ta nejmenší pozornost, na rozdíl od normálového, smykového a ohybového namáhání. Většina výzkumu v oblasti betonových konstrukcí je v současné době zaměřena spíše na přesnější popis reologických změn betonu, či vyztužování nebo zesilování betonových konstrukcí pomocí nových materiálů na bázi uhlíkových kompozitů. Navrhováním kroucených prvků se zabývá jen malé množství výzkumných týmů a stále často vychází z experimentů provedených v 70. letech 20. století, tedy před více než 40 lety, jako např. Hsu^[7], či Leonhardt^[8].

1.2. Obsah práce a vymezení řešené problematiky

Práce je členěna do tří tématických kapitol:

- V kapitole 2 je krátce popsáno chování železobetonových konstrukcí namáhaných kroucením.
- V kapitole 3 je stručně popsán současný stav poznání ohledně navrhování železobetonových konstrukcí a porovnání různých dostupných podkladů pro jejich bezpečné navrhování.
- Kapitola 4 popisuje samotnou analýzu vybraných problémů. Je vypracována citlivostní analýza, modely jsou ověřeny pomocí validačních modelů.

V rámci diplomové práce bude uvažováno pouze volné kroucení prutů, přestože by uvážení vlivu vázaného kroucení práci obohatilo. Rozšíření práce o další velice rozsáhlou problematiku se ale ukázalo jako velice složitý a časově náročný úkol. Z důvodu naprosto odlišné metody posuzování masivních a tenkostěnných průřezů je tato práce věnovaná hlavně průřezům masivním z běžného betonu, které se ve stavební praxi vyskytují dosud zpravidla nejčastěji. Autor práce nicméně se zájmem sleduje výzkum z posledních let, zaměřený na vysokohodnotné betony, který stále častěji umožňuje navrhovat progresivní tenkostěnné konstrukce, dříve vyrobitelné pouze z oceli a jiných kovových slitin. V práci není řešena problematika předpjatých prvků, ačkoliv si je autor vědom, že se při současných trendech v architektuře stále častěji přistupuje

k tenkostěnným předpjatým konstrukcím, které jsou ze své podstaty kroucené (např. půdorysně zakřivené mosty a lávky).

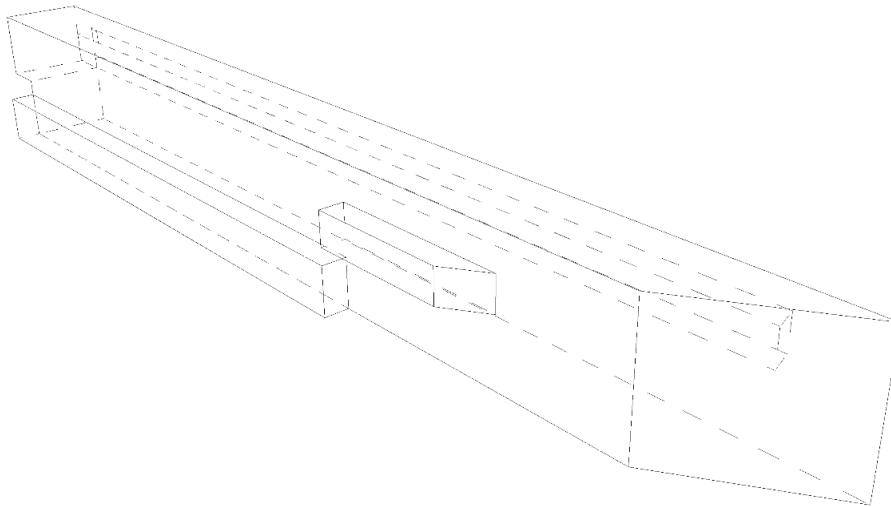
1.3. Motivace

Podnětem k vytvoření této práce a obecného prohloubení osobního poznání se stal kroucený průvlak relativně složitého proměnného průřezu, jehož chováním se autor podrobně věnoval v rámci předmětu Projekt 4C. Řešení přineslo překvapivé výsledky, které jsou blíže zkoumány v této diplomové práci.

Zadání bylo převzato z uskutečněného projektu administrativní budovy. Konstrukčním systémem objektu byl prefabrikovaný železobetonový skelet. Z důvodu uvolnění vnitřní dispozice (dle žádosti investora) docházelo k nepravidelnostem v základním modulu objektu, což mělo za následek rozdílné velikosti polí a s tím spojené nesymetrické zatížení průvlaků. V důsledku toho vznikl výrazného krouticího momentu po délce prvků.

Zkoumaným prvkem byl vnitřní průvlak, který byl ze všech prvků zatížen největším krouticím momentem. Po délce prvku navíc docházelo ke změně průřezu, mnohdy z konstrukčních důvodů nebylo možno zamezit náhlé změně, která lokálně ovlivnila napjatost. Z toho důvodu docházelo k porušení v těchto místech průvlaků, a to takovým způsobem, který nelze stanovit běžnými postupy lineární mechaniky ani bezpečně navrhnout a vyztužit doporučenými normovými postupy^[18].

Proto byl vytvořen trojrozměrný nelineární model prvku, při jehož vyhodnocení bylo zjištěno, že ke vzniku a rozvoji první trhliny dochází mnohem dříve, než jaký byl předpoklad normového postupu^[18].



obr./1/ Řešený průvlak

1.4. Cíle

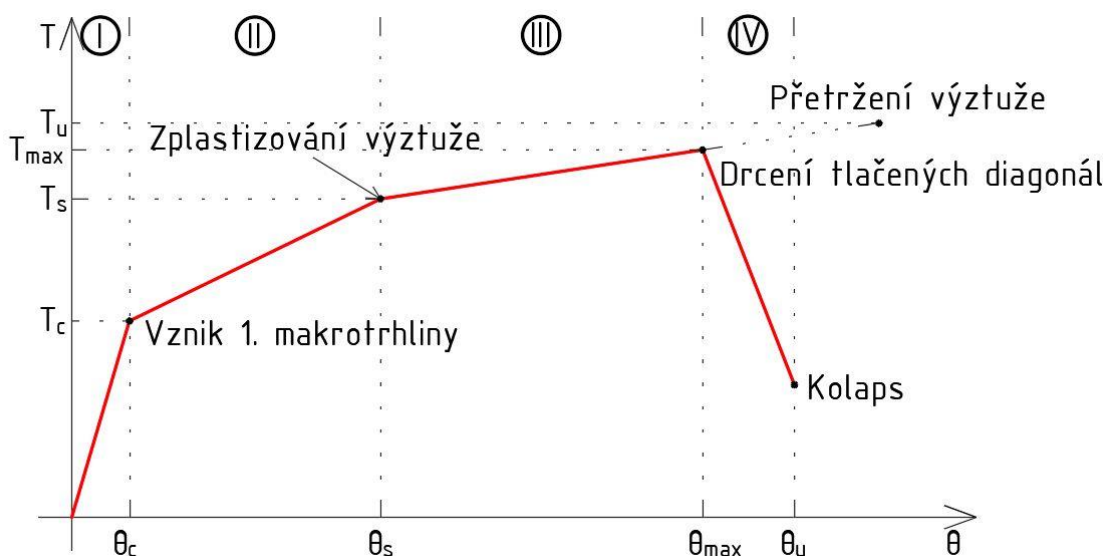
Prvním cílem této diplomové práce je popis teorie související s problematikou kroucených prvků z hlediska pružné i plastické analýzy.

Druhým cílem je vytvořit zjednodušený přehled dostupných (normových) návrhových postupů a požadavků kladených na kroucené prvky

Posledním cílem je analýza vybraných kroucených prvků s náhlou změnou geometrie, a to po provedení citlivostní analýzy a validaci výpočetního modelu.

2. TEORETICKÉ POZADÍ PROBLEMATIKY

Pro zdůraznění rozsahu problematiky, kterou se zabývá tato diplomová práce, jsou na následujícím pracovním diagramu krouceného železobetonového prvku znázorněny všechny oblasti teoretické mechaniky, které musí být pokryty pro komplexní popis a porozumění namáhání kroucením. Pracovní diagram je idealizovanou verzí skutečného chování pro teoreticky nejnáročnější případ, kdy prvek projde od pružného stavu, přes vznik a rozvoj trhlin až po zplastizování výztuže, ale před samotným přetržením výztuže dojde dříve k rozdrčení tlakových diagonál. Obecné chování vhodně navržených železobetonových prvků se od tohoto případu liší jen v menších detailech (jednotlivé fáze nejsou dokonale lineární a zpravidla nedojde k rozdrčení tlakových diagonál před přetržením výztuže).



obr./1/ Idealizovaný pracovní diagram krouceného železobetonového prvku procházejícího všemi fázemi porušení.

FÁZE I – PLNÝ PRŮŘEZ BEZ TRHLIN

Beton – přetváření dle teorie pružnosti; před vznikem makrotrhliny vznikají a rozvíjí se mikrotrhliny dle lineární lomové mechaniky a makroskopicky se projevují jako poškození materiálu.

Výztuž – není prakticky zapojena (přetváření probíhá dle teorie pružnosti).

FÁZE II – PRŮŘEZ S TRHLINAMI

Beton – makroskopický pokles tuhosti dle kombinované teorie plasticity a mechaniky ortotropního poškození, rozvoj makrotrhlin dle nelineární lomové mechaniky, vznik a rozvoj dalších mikrotrhlin dle lineární lomové mechaniky.

Výztuž – přetváření dle teorie pružnosti, zplastizování dle mezní plastické analýzy.

FÁZE III – ZPEVNĚNÍ VÝZTUŽE, VÝRAZNÉ ROZEVÍRÁNÍ MAKROTRHLIN

Beton – makroskopický pokles tuhosti dle kombinované teorie plasticity a mechaniky ortotropního poškození (trojosé tahové poškození), rozevírání makrotrhlin dle nelineární lomové mechaniky.

Výztuž – přetváření dle teorie plasticity se zpevněním.

FÁZE IV – DRCENÍ TLAKOVÝCH DIAGONÁL

Beton – dramatický pokles tuhosti dle kombinované teorie plasticity a mechaniky ortotropního poškození (trojosé tahové poškození + poškození drcením betonu).

Výztuž – přetváření dle teorie plasticity se zpevněním.

Z výše uvedeného je zcela zřejmé, že pro kompletní popis chování železobetonového krouceného prvku musí být uvažovány přinejmenším následující oblasti teoretické mechaniky:

- Teorie pružnosti
- Teorie plasticity
- Lomová mechanika (lineární i nelineární)
- Mechanika poškození

Tyto teorie jsou stručně popsány v rámci této kapitoly.

Dále by měl být zohledněn například i tzv. Size Effect, tedy jev, který se makroskopicky projevuje jako pokles pevnost prvků velkých rozměrů, ale tento jev není v rámci této diplomové práce uvažován.

2.1. Napětí v průřezech

Následující text se věnuje chování železobetonových prvků namáhaných čistým kroucením. Vliv ostatních silových a nesilových zatížení na průřez není pro přehlednost uvažován. Průběh krouticího momentu je po délce prvku uvažován jako konstantní.

Při kroucení obecného průřezu v případech běžných uložení může docházet k deplanaci neboli ztrátě rovinnosti průřezu. Vliv deplanace na napjatost není v dalším textu uvažován.

Tensor napětí při volném kroucení^[3]:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

2.1.1. Fáze před vznikem trhlin

Napětí na neporušeném masivním obdélníkovém průřezu je dostatečně přesně popsáno pomocí St. Venantovy teorie, předpokládající zachování rovinnosti průřezu. Při volném kroucení vznikají pouze smyková napětí, která nabývají svého maxima ve středu delších stran průřezu, v rozích jsou napětí nulová. V této fázi průřez působí jako celek, beton a výztuž spolu plně spolupůsobí, vliv výztuže na zvýšení tuhosti v kroucení (GI_t) je zanedbatelný.

Hodnoty maximálního napětí jsou dany vztahem (2.2).

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t} = \frac{T}{\alpha b^2 h} \quad (2.2)$$

Kde α vyjadřuje poměr mezi průřezovými rozměry, její hodnotu lze přibližně odhadnout např. dle vztahu (2.3). b je v tomto případě délka kratší strany

$$\alpha = 0,20817 + 0,05 \ln \frac{h}{b} \quad (2.3)$$

St. Venantova teorie není vhodná pro pruty s obecnou geometrií průřezu. Předpoklad o zachování rovinnosti průřezu přestává platit, dochází k deplanaci průřezu. Deplanaci je možno zabránit pomocí vnějších vlivů působících na konstrukci (např. pomocí vetknutí, změnou tuhosti po délce prutu). Zabránění deplanace je provázáno vznikem vázaného kroucení, které se vyznačuje vznikem normálových napětí od kroucení a vznik druhotných smykových napětí. Pokud je umožněna volná deplanace, hovoříme o volném kroucení. Problém

stanovení maximálního smykového napětí řeší Prandtlova funkce napětí $\varphi_{y,z}$, která má v okrajích průřezů nulovou hodnotu smykového napětí^[4]. Jednotlivé složky napětí jsou definovány vztahy (2.4).

$$\tau_{x;y} = \frac{\delta F}{\delta z}, \quad \tau_{x;z} = -\frac{\delta F}{\delta y} \quad (2.4)$$

Řešení funkce představuje obecnou vyklenutou plochu nad průřezem. Derivace (sklon) této plochy v konkrétním bodě průřezu vyjadřuje hodnotu smykového napětí od volného kroucení, viz vztah (2.4). Analytické řešení funkce je možné pouze pro elementární geometrické obrazce (kruh, elipsa, obdélník, n-úhelník). Pro obecné průřezy nelze řešení analyticky stanovit, a proto je mnohdy přistupováno k řešení pomocí numerických metod založených na přibližném řešení parciálních diferenciálních rovnic pomocí diskretizace oblasti. Nejčastěji se jedná o metodu konečných prvků.

Integrací Prandtlovy funkce napětí^[5] (dle (2.5)) přes celou plochu průřezu lze stanovit, při uvážení materiálových a geometrických charakteristik průřezu, moment tuhosti v kroucení:

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \iint_A \varphi(y, z) dA \quad (2.5)$$

Kde:

G je modul tuhosti ve smyku;

θ poměrné zkroucení průřezu.

Známe-li moment tuhosti v kroucení, je obecně možné stanovit průřezový modul v kroucení dle:

$$W_t = \frac{I_t}{k\lambda} \quad (2.6)$$

Kde:

k je koeficient průřezu;

λ charakteristický rozměr průřezu.

Koeficient průřezu je proměnný dle konkrétní geometrie průřezu a obecně je možné jeho hodnotu stanovit pouze na základě numerické analýzy průřezu. Charakteristický rozměr průřezu lze u jednoduchých průřezů stanovit jako menší z rozměrů průřezu, u kruhových průřezů se jedná o poloměr.

Pokud není zamezeno ztrátě rovinnosti průřezu, lze zapsat pole posunutí pomocí uvážení deplanační funkce ($\psi(y, z)$) ve vztahu^[14] (2.7):

$$u(x, y, z) = \theta(x) \psi(y, z) \quad (2.7)$$

Kde:

$u(x, y, z)$ je posun ve směru osy prvku;

$\theta(x)$ relativní zkroucení dle (2.8).

$$\theta(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (2.8)$$

Deplanační funkci lze definovat jako řešení parciální diferenciální rovnice (2.9):

$$\frac{\delta^2 \psi(y, z)}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \psi(y, z)}{\delta z^2} = \Delta \psi(y, z) = 0 \quad (2.9)$$

Při známém řešení deplanační funkce lze stanovit moment tuhosti v kroucení pomocí vztahu (2.10).

$$I_K = \iint_A \left(y^2 + z^2 + \frac{\delta \psi}{\delta z} y - \frac{\delta \psi}{\delta y} z \right) dA \quad (2.10)$$

2.1.2. Vznik trhliny

Po překročení maximálního přípustného smykového napětí (pevnosti materiálu), dochází ke vzniku trhlin. Pro betonové konstrukce se zpravidla za limitní považuje hodnota tahové pevnosti. Po vzniku trhlin se průřez přestává chovat lineárně. Tuhost průřezu přestává být závislá na jejím geometrickém tvaru, a začíná rozhodovat podélné a příčné vyztužení.

Přibližně lze krouticí moment na vzniku trhlin odhadnout pomocí vztahu (2.11) který zanedbává vliv víceosých podmínek plasticity a vliv vyztužení. Za předpokladu obdélníkového průřezu vzniká první makrotrhlina zpravidla ve středu nejdlejší strany průřezu.

$$T_{Rd;c} = W_t f_{ctd} \quad (2.11)$$

Pokud by byl průřez z prostého betonu, či slabě vyztuženého betonu došlo by po vzniku první trhliny k náhlému kolapsu celého prvku. Trhliny vznikají ve sklonu 45° k podélné ose prvku (tedy ve směru hlavních napětí).

2.1.3. Distribuce trhlin po délce prvku

Po vzniku prvních mikrotrhlin dochází k výraznému nárůstu poměrného zkroucení prvku, které je provázeno koncentrováním dílčích mikrotrhlin do makrotrhlin po délce prvku.

Krouticí moment začíná být přenášen podélnou a příčnou výztuží. Při dosažení krouticího momentu $T_{Ra,s}$ dochází k zplastizování výztuže, což se projeví jako neúměrný nárůst deformace vůči působícímu zatížení. Tento způsob chování je žádoucí, neboť se jedná o duktilní a předem viditelné porušení prvku.

2.2. Teorie plasticity

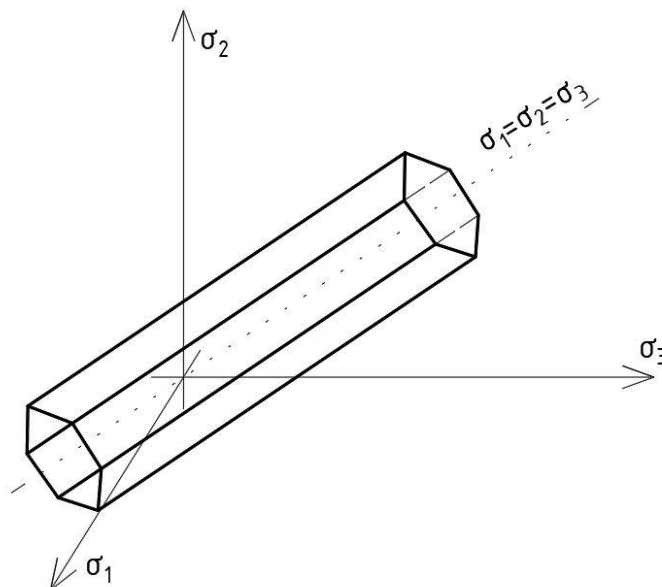
Pro jednoose namáhané prvky lze odezvu materiálu stanovit snadno pomocí podmínky vyjadřující stav napětí v materiálu v porovnání s maximálním přípustným napětím. U křehkých materiálů se jedná o napětí vedoucí k trhlině, respektive k drcení v tlaku, u duktilních prvků mluvíme o mezi kluzu, kdy dochází k výraznému poklesu tuhosti materiálu. Prvky reálných konstrukcí jsou ale mnohdy namáhané víceosým napětím, kde je stanovení odezvy materiálu mnohem složitějším problémem. Dosud nebyla vyvinuta žádná spolehlivá teorie použitelná pro všechny materiály, místo toho se při analýze chování konstrukčních prvků za obecné napjatosti vybírá ze sady metod taková, která nejlépe vystihuje chování daného materiálu. Pro konstrukce tvořené kompozitními materiály jako je například železobeton neexistuje univerzální kritérium, které by jednotně popsalo spolehlivost prvků jako celku. Často je tak použito více kritérií současně, pro každý dílčí materiál. Základní teorie plastického porušování jsou zpravidla vhodné vždy jen pro chování jednoho druhu materiálů.

Dále jsou popsány ty metody (kritéria) teorie plasticity, které jsou uplatněny v rámci této práce.

2.2.1. Haighův-Westergaardův prostor

Haighův-Westergaardův prostor je užíván k popisu chování izotropních materiálů a k posuzování jejich způsobu přetváření. Jedná se o trojrozměrný ortonormální kartézský systém, kde jednotlivé souřadnice odpovídají složkám hlavního napětí σ_1 , σ_2 a σ_3 , Obecné šestirozměrné pole napětí (3 normálové a 3 sdružené smykové složky) je tak zredukováno na tři dimenze, přičemž

superpozicí hlavních napětí je možné popsat libovolný stav napjatosti.



obr./2/ Ukázka zobrazení Trescovy podmínky plasticity v Haigh-Westergaardově prostoru

V takto definovaném prostoru lze nalézt dvě významné množiny bodů, respektive stavy napjatosti:

Hydrostatickou osu, dle (2.12), která představuje všesměrnou rovnoměrnou tahovou či tlakovou napjatost v bodě tělesa (tedy změnu objemu)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (2.12)$$

A deviatorovou rovinu, dle (2.13), která je na hydrostatickou osu kolmá a prochází počátkem souřadného systému. Kolmým průmětem bodů z Haigh-Westergaardova prostoru do deviatorové roviny lze posoudit mezní napjatost vedoucí ke stavům plasticity (tedy ke změně tvaru).

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (2.13)$$

Haighův-Westergaardův prostor je obecným nástrojem k zobrazení a práci s víceosými podmínkami plasticity. Jelikož existuje značné množství materiálů izotropních a ortotropních, které vykazují rozdílné chování, bývá přikročeno k užití podmínek plasticity vhodných k vystižení nejpřesnějšího chování materiálů.

Mezi nejčastěji používané podmínky plasticity patří:

- Von Misesovo kritérium, válec

- Trescovo kritérium, šestiboký hranol
- Gursonovo kritérium, koule
- Drucker-Pragerovo kritérium, kužel
- Mohr-Coulombovo kritérium, nepravidelný šestiboký jehlan
- Rankinovo kritérium, trojboký jehlan^[1]

2.2.2. Trescovo kritérium

Jedním z historicky nejstarších kritérií plasticity je kritérium formulované francouzským inženýrem H. Trescou v roce 1868^[2]. Navrhl, že materiál zplastizuje když jedno ze smykových napětí dosáhne určité limitní hodnoty τ_0 . Protože mezi rovinami všech orientací existuje šest lokálních maxim smykového napětí, stačí když bude splněna jedna z šesti podmínek dle (2.14).

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \tau_0, \text{ nebo } \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm \tau_0, \text{ nebo } \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \pm \tau_0 \quad (2.14)$$

Tyto tři podmínky lze zapsat v Haigh-Westergaardově prostoru pomocí jediné rovnice:

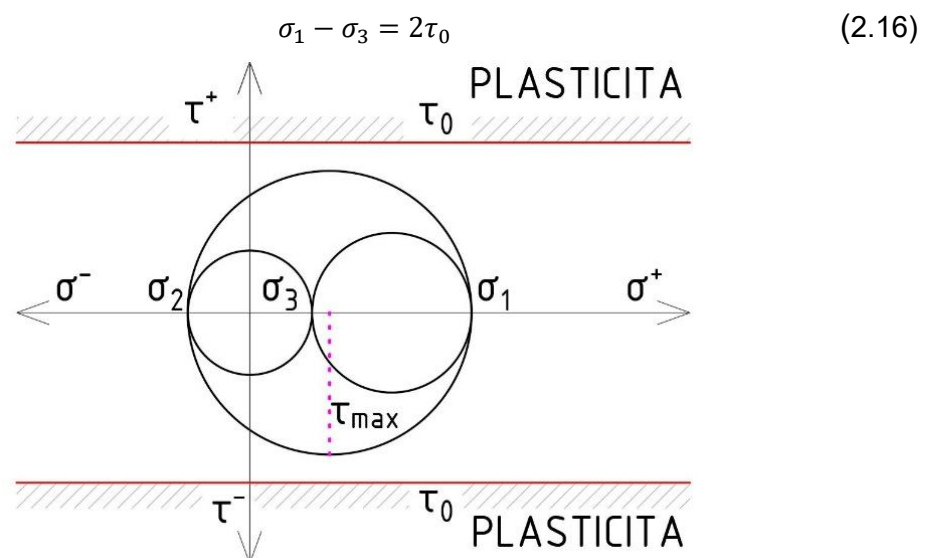
$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_0^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4\tau_0^2][(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4\tau_0^2] = 0 \quad (2.15)$$

Kde:

$\sigma_{1;2;3}$ jsou hlavní napětí;

τ_0 je mezní smykové napětí dané materiálem.

V případě uspořádání hlavních napětí dle velikosti $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, lze podmínku dále zjednodušit:



obr./3/ Zobrazení Trescova kritéria pomocí Mohrových kružnic

Plocha plasticity vzniklá z Trescova kritéria není ze své podstaty, založené na rozdílech mezi dvojicemi různých hlavních napětí, hladká, což jí v hraničních bodech mezi stejnými hlavními napětími omezuje diferenciovatelnost. Tím vzniká úskalí při numerickém řešení. Tato nevýhoda se nevyskytuje u Von Misesovy kritéria.

2.2.3. Von Misesovo kritérium

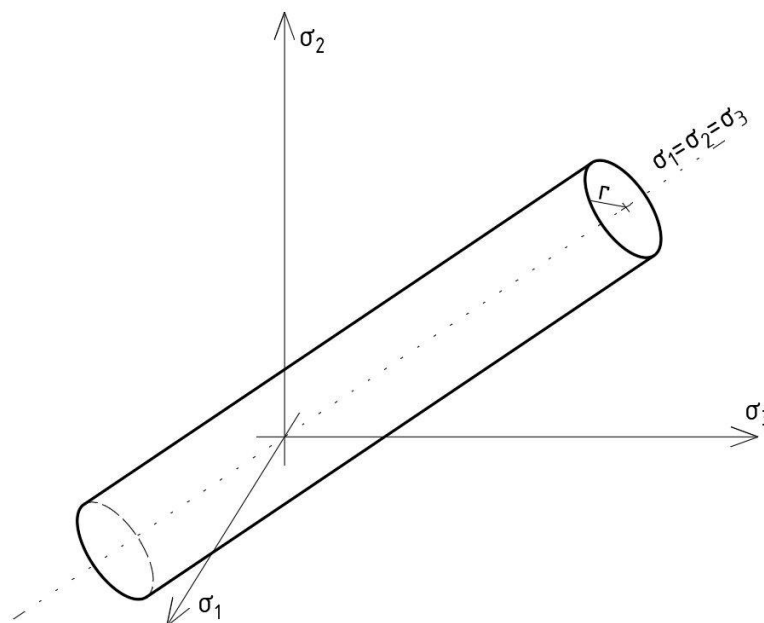
Dle Von Misesova kritéria k plastickému přetváření dochází, pokud energie uložená v pružné deformaci dosáhne kritické hodnoty.

$$\bar{\sigma}_{Mises} \equiv \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} = \tau_0 \quad (2.17)$$

Kde:

$\sigma_{1;2;3}$ jsou hlavní napětí;

Plocha tvořená Von Misesovým kritériem se dá zobrazit v Haigh-Westergaardově prostoru jako válec opsaný okolo hydrostatické osy (dle (2.12)), kde jeho základna má poloměr $r = \sqrt{2}\tau_0$



obr./4/ Von Misesova plocha plasticity

2.2.4. Drucker-Pragerovo kritérium

V materiálech s vnitřním třením, jakými jsou například písky, zeminy, šterky nebo beton, jsou smykové plochy drsné a smykové napětí potřebné k pokluzu je ovlivněno normálovým napětím kolmým na smykovou plochu.

Deviatorický řez Drucker-Pragerovou plochou plasticity lze popsat pomocí vztahu (2.18).

$$\sqrt{J_2} = \tau_0 - 3\alpha_\phi \sigma_m \quad (2.18)$$

Kde:

J_2 je druhý invariant, dle vztahu (2.19);
 $\sqrt{J_2}$ lze interpretovat jako vzdálenost od hydrostatické osy;

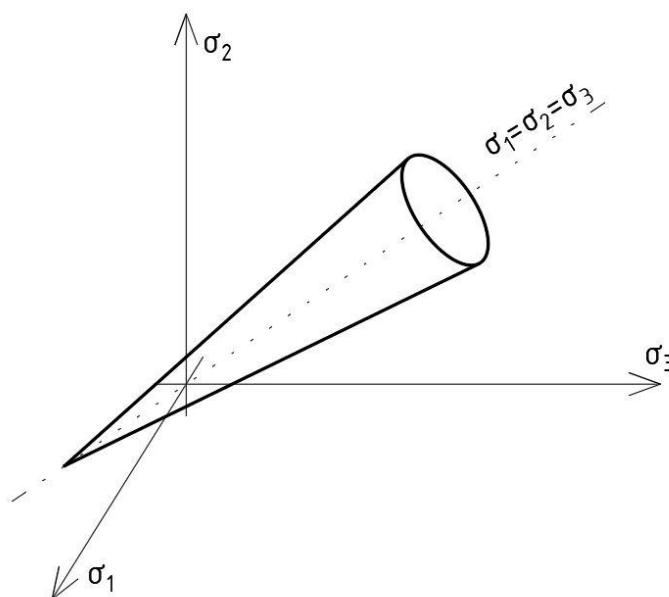
$$J_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6} \quad (2.19)$$

τ_0 maximální přípustné napětí;

α_ϕ součinitel zohledňující úhel vnitřního tření;

σ_m Střední materiálové napětí, dle (2.20). Ve zvolené deviatorické rovině je konstantní.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.20)$$



obr./5/ Drucker-Pragerova plocha plasticity

2.2.5. Rankinovo kritérium

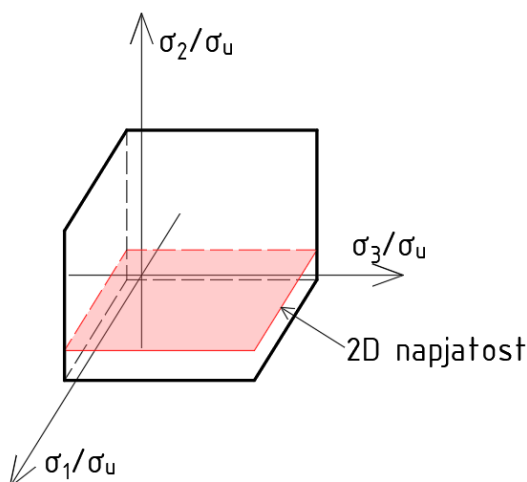
Toto kritérium je někdy nazývána jako kritérium maximálních částečných napětí. Teorie vytvořená skotským matematikem W. J. M. Rankinem předpokládá, že k porušení u křehkého materiálu dochází při překročení maximálního

přípustného tahového napětí. Rankinova teorie je vhodná pro křehké materiály jako je beton, či keramické materiály, mnohdy je užívána jen její část popisující tahovou složku v kombinaci s dalšími teoriemi pro tlaková napětí. Na obr./6/ je vidět Rankinova plocha plasticity s vyznačenou rovinou pro posouzení 2D napjatosti.

$$-\sigma_{md} \leq \sigma_1 \leq \sigma_{mt} \quad (2.21)$$

Kde:

σ_{md}	je maximální tlakové napětí;
σ_1	sledované napětí;
σ_{mt}	maximální tahové napětí;



obr./6/ Rankinova plocha plasticity

2.2.6. Menétrej-Willamovo kritérium

Zdrojem pro tuto kapitolu jsou články a publikace [9];[10].

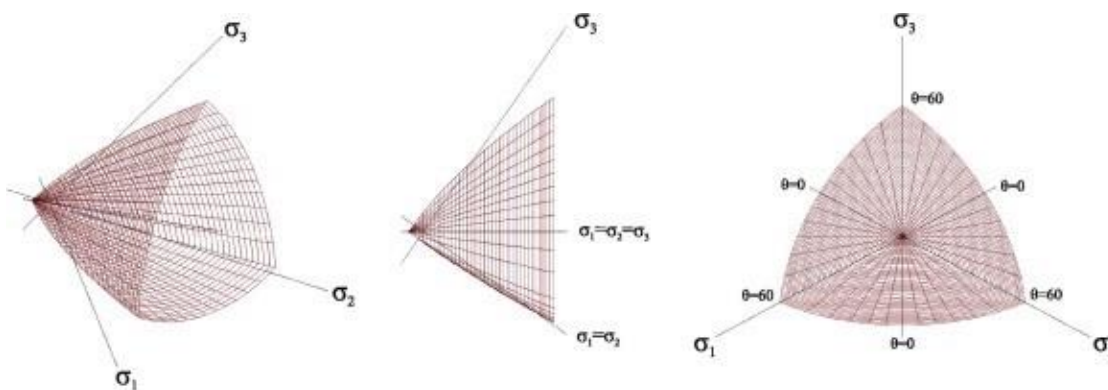
Teorie „třiosého kritéria porušení betonu a její generalizace“ byla popsána v roce 1995 švýcarským inženýrem P. Menétrejem ve spolupráci s americkým profesorem K.J. Willamem. Model vychází z izotropního chování materiálu, kde na rozdíl od Rankinova kritéria popisuje i plastické chování materiálů.

Plochu plasticity lze zobrazit v Haigh-Westergaardově prostoru (viz 2.2.1), a je dána předpisem (2.22)

$$f^p(\zeta, \rho, \theta) = \left[\sqrt{1,5} \frac{\rho}{f'_c} \right]^2 + m \left[\frac{\rho}{\sqrt{6} f'_c} r(\theta, e) + \frac{\zeta}{\sqrt{3} f'_c} \right] - c = 0 \quad (2.22)$$

Kde:

(ζ, ρ, θ)	jsou Haigh-Westgaardovy souřadnice;
f'_c	tlaková pevnost betonu;
m	materiálový parametr;
$r(\theta, e)$	Klinského eliptická funkce;
c	parametr popisující materiálové zpevnění/změkčení při tečení/drcení $c \in < 0,1 >$;



obr./7/ Zobrazení plochy plasticity Menétrey-Willam^[9]

2.3. Lomová mechanika

Zdrojem pro následující kapitolu jsou [1],[2] a [10]

Lomová mechanika je oblast, která se zabývá nespojitostmi v tělesech, které jsou způsobeny trhlinami nebo dutinami. Primárně zkoumá, za jakých podmínek a případně jakým směrem a jakou rychlostí bude nespojitost propagovat tělesem (dále bude pro jednoduchost tento jev označován jako šíření trhliny, bez ohledu na příčinu a původ nespojitosti).

Rozeznávají se dva základní typy lomů:

- Křehký (štěpný) lom – vzniká vlivem normálového napětí bez plastické deformace při vysoké koncentraci napětí, nastává náhle bez varování

- Houževnatý (tvárný) lom – vzniká vlivem smykového napětí za soustředěné plastické deformace, nastává při opakovaném cyklickém namáhání

Dvě základní podskupiny lomové mechaniky jsou:

- Lineární lomová mechanika
- Nelineární lomová mechanika

2.3.1. Lineární lomová mechanika

Předpokládá se, že napětí v kořeni trhliny narůstá nade všechny meze do nekonečna a šíření trhliny nastane, pokud je překročena jistá kritická hodnota intenzity napětí (lomová houževnatost – K_c) nebo lomové energie (G_f). Samotnou rychlost šíření trhliny nelze přesně stanovit (obecně je omezena pouze rychlostí šíření zvuku v materiálu).

2.3.1.1. Vliv řízení zatížení na způsob šíření trhliny

Experimenty mohou být řízeny dvěma základními veličinami:

- Silou;
- Deformací.

Podle toho, která veličina je řídicí a která odvozená (měřená) dochází k rozdílnému chování zkoumaných těles v okamžiku, kdy se začne trhlina šířit. Tyto jsou přehledně porovnány v tabulce.

Tabulka 1 – Porovnání řízení zatížení experimentálního tělesa silou a deformací.

Předepsaná veličina	Měřená veličina	Šíření trhliny	Pracovní diagram
Síla	Deformace	Nestabilní (dynamické)	Pouze rostoucí větve
Deformace	Síla	Stabilní (statické)	Celý včetně klesající větve

Z tabulky je patrné, že pro experimentální stanovení celého pracovního diagramu i v okamžiku šíření trhliny je nezbytné experiment řídit předepsanou deformací. U skutečných konstrukcí nicméně zcela dominuje zatížení silou (vlastní tíha, užité zatížení, sníh, vítr, ...) oproti zatížení deformací (např. pokles podpory). V těchto případech ale může být šíření trhlín rovněž stabilní za předpokladu statické neurčitosti konstrukce a schopnosti materiálu redistribuovat napětí. O stabilitě trhliny lze rozhodnout také pomocí metod nelineární lomové mechaniky, viz dále.

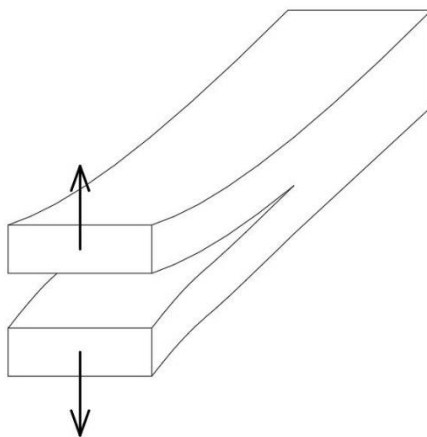
Při numerickém modelování má způsob řízení zatížení rovněž vliv na volbu použitého řešiče nelineárních rovnic. Pokud je zatížení řízeno silou, musí být v okamžiku zahájení šíření trhliny použita výpočetně náročnější metoda Arc-Length, zatímco v případě řízení zatížení posunem může být celý pracovní diagram zkoumaného tělesa vypočten i jednodušší Newton-Raphsonovou metodou více rozvedeno v kapitole 2.6.1.

2.3.1.2. Faktor intenzity napětí (K – koncepce)

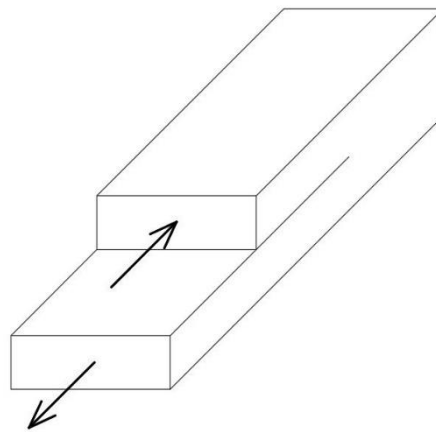
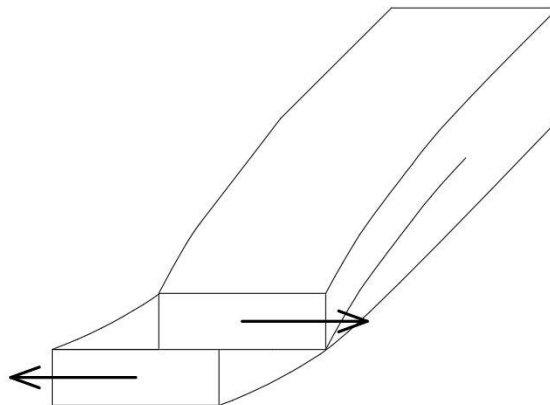
Faktor intenzity napětí je konstantou úměrnosti mezi napětím v blízkosti kořene trhliny (σ , τ) a hodnotou $1/\sqrt{r} = r^{-1/2}$ kde r je vzdálenost od kořene trhliny. Hodnota faktoru intenzity napětí je závislá na několika proměnných, především:

- Velikosti a typu namáhání (působící vzdálená síla nebo napětí);
- Velikosti a poloze trhliny;
- Velikosti tělesa;
- Módu porušení – viz dále.

Napětí směrem ke kořeni trhliny narůstá právě úměrně $r^{-1/2}$. Podle typu namáhání trhliny se rozlišují celkem 3 módy porušení:



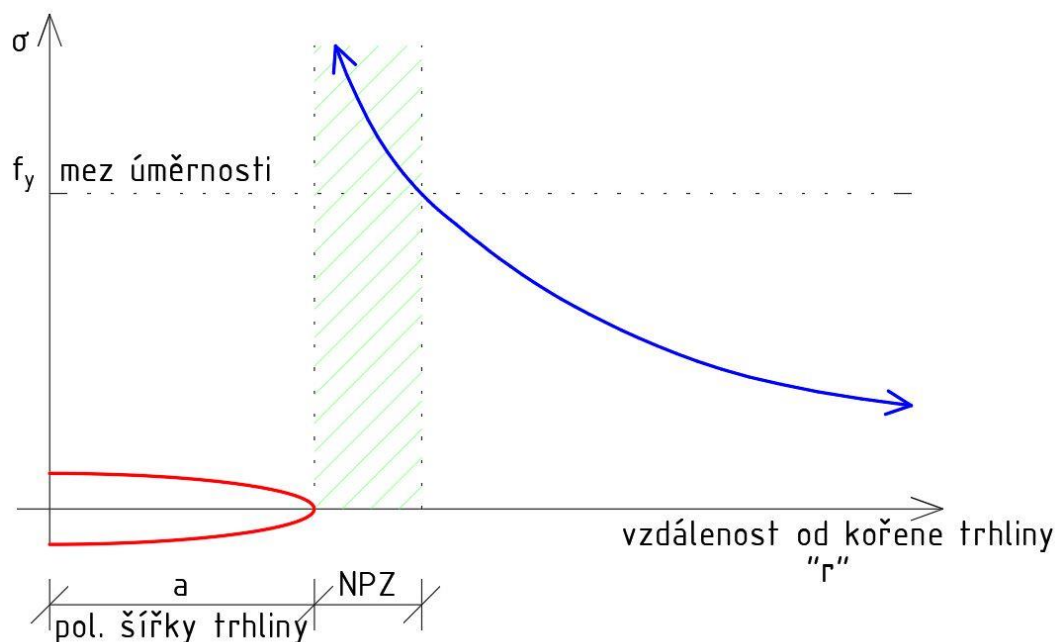
obr./8/ Múd porušení 1 - K_I - rozevírání

obr./9/ Mód porušení 2 - K_{II} - pokluzobr./10/ Mód porušení 3 - K_{III} - trhání

Každému módu porušení odpovídá jeden faktor intenzity napětí K_I , K_{II} a K_{III} . Jednotkou je $\text{Pa} \cdot \text{m} = \text{N}/\text{mm}^{3/2}$. Při namáhání prutového prvku volným kroucením vzniká smykové napětí ukloněné pod úhlem 45° od střednice prvku a dochází tak dominantně k interakci módů 2 a 3.

2.3.1.3. Nelineární procesní zóna (NPZ)

V těsné blízkosti kořene trhliny nejsou splněny předpoklady o lineárním přetváření materiálu ani předpoklady malých deformací. Oblast, ve které napětí překročí mez úměrnosti f_y daného materiálu se označuje jako nelineární procesní zóna. Pokud je velikost zóny velká (odpovídající řádově rozměrům trhliny nebo zkoumaného tělesa), pak není zpravidla nadále možné uvažovat lineární chování a musí být uplatněny metody nelineární lomové mechaniky, viz dále.



obr./11/ Průběh napětí v okolí trhliny při uvážení lineární lomové mechaniky a nelineární procesní zóna

Pokud je tato zóna dostatečně malá, lze podmínky pro šíření trhliny stále formulovat pomocí lineární lomové mechaniky. Nejpoužívanějšími kritérii jsou:

- Lokální Irwinovo kritérium;
- Globální Griffithovo kritérium.

Ačkoliv u každého z uvedených kritérií dochází k porovnání rozdílných veličin, jsou obě varianty pouze rozdílným vyjádřením téhož a platí mezi nimi jistá ekvivalence, jak bude ukázáno dále.

Irwinovo lokální kritérium

Lokální kritérium vychází z konceptu faktoru intenzity napětí. Pokud je dosaženo jisté kritické hodnoty (K_c), pak dochází k šíření trhliny. Veličina K_c [$\text{N}/\text{mm}^{3/2}$] se nazývá lomovou houževnatostí. Pro každý mód porušení lze stanovit konkrétní hodnotu lomové houževnatosti např. experimentálně, na základě stanovení zatížení/napětí, při kterém dochází k šíření trhliny. Následně dopočtená hodnota faktoru intenzity napětí, přímo odpovídá lomové houževnatosti, jelikož v okamžiku šíření trhliny platí:

$$K = K_c \quad (2.23)$$

2.3.1.4. Energetické kritérium (lomová energie G_f)

Koncepci faktoru intenzity napětí lze alternativně nahradit sledováním energie během zatěžování tělesa s trhlinou. Pokud je trhlina stabilní, pak se veškerá práce vnějších sil převádí na potenciální energii pružné deformace. V okamžiku, kdy se trhlina začne šířit, je část této energie spotřebována.

Při jednoosé napjatosti lze uvolněnou deformační energii vypočítat jako:

$$G = -\frac{1}{t} \cdot \frac{\partial W_e}{\partial a} \quad (2.24)$$

Kde:

t	je tloušťka tělesa;
∂W_e	změna práce vnějších sil;
∂a	změna délky trhliny;

Griffithovo globální kritérium

Globální kritérium je založeno na energetické bilanci. Pokud uvolňovaná energie dosáhne hodnoty potřebné k jejímu šíření, dojde ke zvětšování trhliny. Energie potřebná pro šíření trhliny se nazývá lomová energie (G_f), její jednotkou je $J/m^2 = N/m$. Matematicky lze zapsat, že k šíření trhliny dochází, pokud:

$$G = G_f \quad (2.25)$$

2.3.1.5. Ekvivalence mezi lokálním a globálním kritériem

Lze ukázat (viz např.[2]), že pro obecný případ namáhání prutové konstrukce a za předpokladu šíření trhliny v původním směru (viz dále, kapitola 2.3.1.7) lze uvolněnou deformační energii vypočítat z jednotlivých faktorů intenzity napětí pomocí vztahu:

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} + \frac{K_{III}^2}{2 \cdot G} \quad (2.26)$$

Kde:

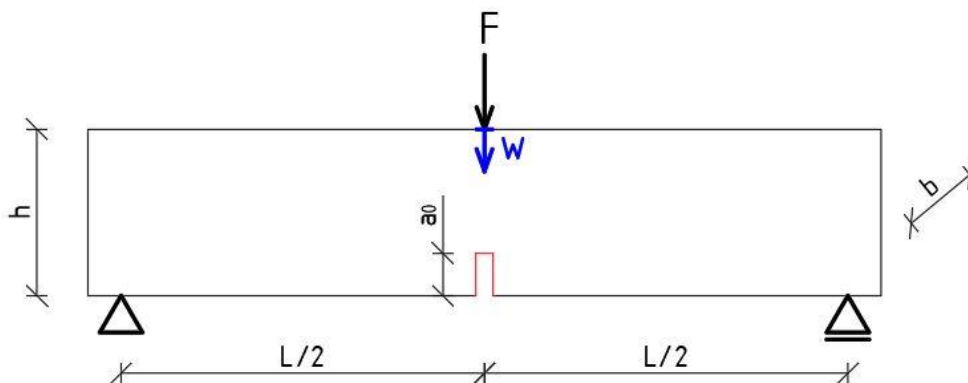
E	je modul pružnosti při namáhání osovou silou;
G	smykový modul pružnosti materiálu;

ν Poissonovo číslo.

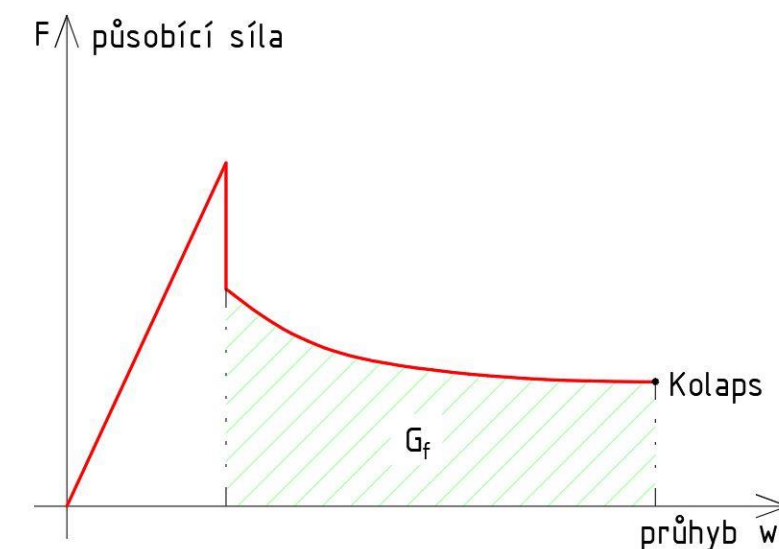
Porovnáním hodnoty G s hodnotou lomové energie G_f opět stanovíme, zdali dochází k šíření trhliny.

2.3.1.6. Praktické uplatnění lineární lomové mechaniky

V praxi je častěji užíváno Griffithovo kritérium, právě proto, že postačuje porovnání jedné hodnoty, nezávislé na směru trhliny a módu porušení na rozdíl od lokálního Irwinova kritéria. Lomová energie je v jistém smyslu považována za materiálovou konstantu. Nejčastěji se stanovuje experimentálně, např. pomocí zkoušky RILEM (tříbodový ohyb trámce s vrubem, viz obr./12/). Lomová energie je poté úměrná ploše pod křivkou klesající části pracovního diagramu.



obr./12/ Schéma uspořádání zkoušky RILEM



obr./13/ Idealizovaný pracovní diagram zkoušky RILEM s vyznačením lomové energie

Alternativně je možné lomovou energii stanovit pomocí komplexních numerických modelů, které umožňují roztržení sítě konečných prvků za předpokladu, že jsou ostatní materiálové konstanty stanoveny dostatečně přesně.

Pro betony běžných pevností byly na základě mnoha experimentálních zkoušek odvozeny empirické vztahy, například:

$$G_f = 25 \cdot f_t'^{ef} \quad \text{VOS 1983} \quad (2.27)$$

$$G_f = 73 \cdot (f_{cm})^{0,18} \quad \text{MC 2010} \quad (2.28)$$

Kde:

$f_t'^{ef}$ je efektivní pevnost betonu v tahu;

f_{cm} průměrná pevnost betonu v tlaku;

Hodnoty lomové energie stanovené při experimentech na trámčích vyrobených z betonů běžných pevností (tlaková pevnost 20-50 MPa) se pohybují v rozmezí přibližně 50-150 N/m (viz např. [11]).

2.3.1.7. Směr šíření trhliny (fixní a rotované trhliny)

Na předchozích odstavcích bylo ukázáno, za jakých podmínek se začne trhlina šířit. Je obecně přijímanou skutečností, že počáteční směr trhliny je kolmý na hlavní tah (σ_1), pokud nevznikla jako apriorní nespojitost (vada materiálu, uměle vytvořený zářez apod.) ještě před zatížením tělesa. Ovšem další směr šíření trhliny již není zcela jistý. Tento směr je ohraničen dvěma extrémními případy

- Šíření pokračující ve směru počáteční trhliny – tzv. fixní trhlina;
- Šíření ve směru aktuálního směru hlavního tahu – tzv. plně rotovaná trhlina.

Při namáhání tělesa pouze v módu 1 zpravidla dochází k šíření trhliny v jejím původním směru, při smíšeném namáhání, do kterého jsou zapojeny také módy 2 a 3 ovšem dosud neexistuje jednoznačně přijímaný model, který by bezpečně směr šíření dokázal předpovědět. Jeden z modelů, který udává uspokojivé výsledky a často se blíží výsledkům experimentu, hledá maximální normálové napětí kolmé ke spojnici bodů na kružnici a kořene trhliny, přičemž tato kružnice má střed právě v kořeni. Poloměr kružnice je zpravidla volen tak, aby se nacházela v nelineární procesní zóně, ale zároveň se napětí neblížilo

nekonečnu. Tento model je někdy označován jako **kritérium maximálního obvodového napětí**. Dalším často používaným modelem je např. **kritérium maximální hnací síly trhliny**, založený na sledování úbytku energie na jednotku délky nově vytvořené trhliny ve všech přípustných směrech šíření.

Je třeba poznamenat, že každé kritérium dává mírně odlišné výsledky. Zároveň je třeba připustit, že žádný analytický vztah nedokáže nikdy zcela bezpečně popsat šíření trhliny ve skutečném materiálu, neboť tento průběh je ovlivněn nehomogenitami a lokálními diskontinuitami, které zpravidla nejsou dopředu známé. V současné době je možné tyto vlivy alespoň částečně zohlednit při pravděpodobnostním numerickém modelování, kdy jsou každému konečnému prvku přiřazeny „náhodné“ materiálové parametry na základě předem stanovených pravidel.

2.3.1.8. Smyková pevnost po vzniku trhliny

Vzhledem ke skutečnosti, že při volném kroucení vzniká primárně smykové napětí, je nezbytné stanovit smykovou pevnost betonu nejen před, ale i po vzniku trhlín, neboť díky zaklesnutí zrn kameniva je beton stále schopen částečně přenášet smyková napětí. Tuto pevnost lze určit například pomocí vztahu odvozeného z Modifikované teorie kompresního pole (viz [12]). Tento vztah je platný za předpokladu nulového normálového napětí kolmo na trhlinu:

$$\tau_{ij} = 0,18 \cdot \frac{\sqrt{f_c}}{0,31 + 24 \cdot \frac{w_c}{a_g + 16}} \quad (2.29)$$

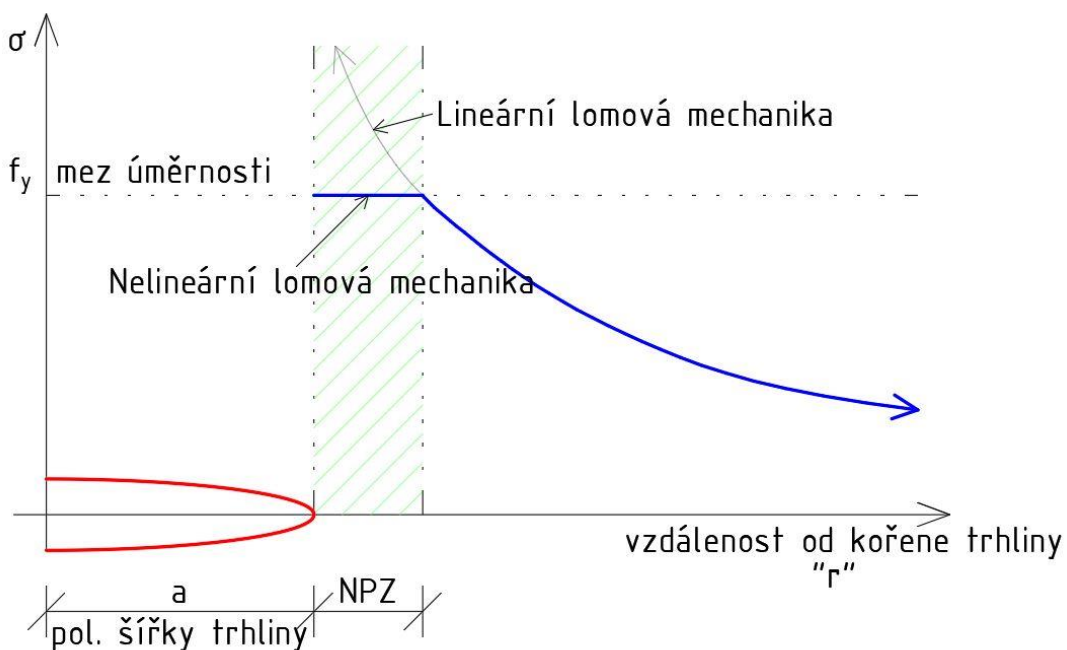
Kde:

f_c	je pevnost betonu v tlaku v MPa;
w_c	maximální šířka trhlín;
a_g	maximální velikost kameniva v mm

2.3.2. Nelineární lomová mechanika

Pokud rozměry nelineární procesní zóny řádově odpovídají rozměrům trhliny nebo celého tělesa, resp. vzdálenosti mezi kořenem trhliny a nejbližším okrajem tělesa (tzv. ligamentem), stávají se předpoklady lineární lomové mechaniky značně nepřesnými a výše uvedený popis šíření trhliny neodpovídá

skutečnosti. V takových případech musí být uvažovány metody nelineární lomové mechaniky. V nejjednodušším případě, kdy je uvažován materiál bez zpevnění, je maximální napětí omezeno mezí úměrnosti materiálu, viz obr./14/.

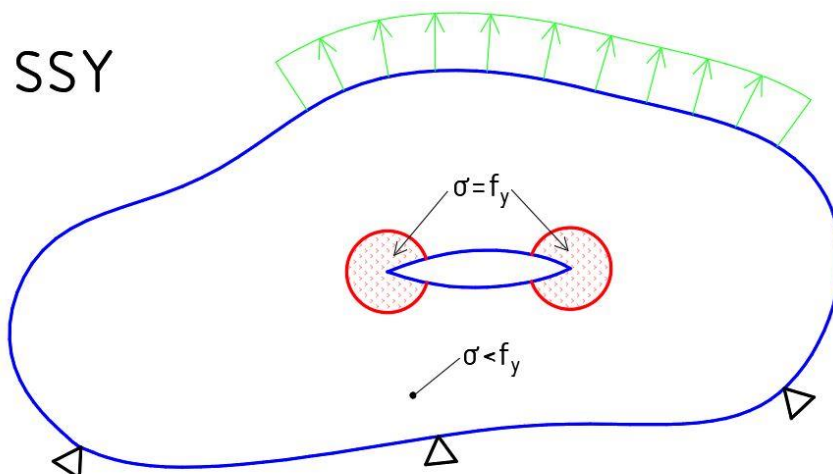


obr./14/ Průběh napětí v okolí trhliny při uvážení nelineární lomové mechaniky (materiál bez zpevnění)

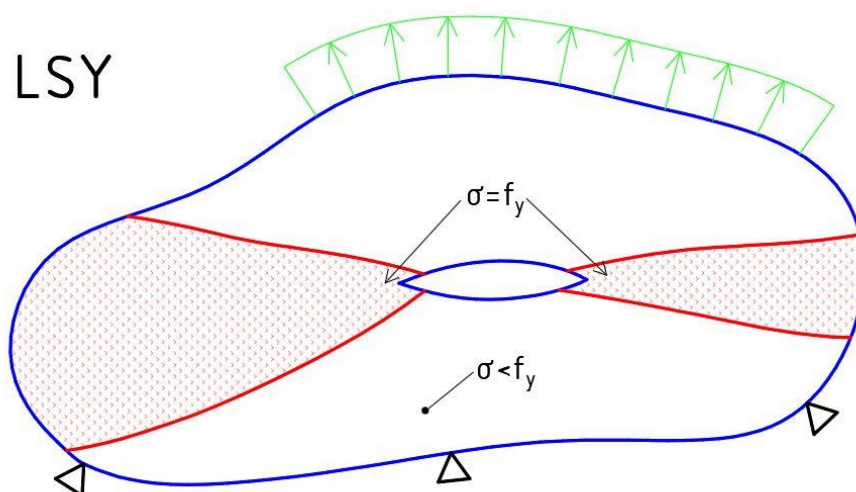
Podle velikosti zplastizované oblasti se nelineární lomová mechanika dále dělí na:

- Small scale yielding (SSY)
- Large scale yielding (LSY)

Tyto dva typy jsou schématicky zobrazeny na obr./15/, obr./16/ a stručně popsány dále.



obr./15/ Schématické znázornění SSY



obr./16/ Schématické znázornění LSY

2.3.2.1. Small scale yielding (SSY)

Předpokládá se, že zplastizovaná zóna je koncentrována v okolí kořene trhliny, její velikost řádově odpovídá velikosti trhliny, ale je výrazně menší než velikost ligamentu. Tato podmínka je zpravidla splněna pro duktilní materiály, např. kovy. Pro studování chování trhliny za předpokladu SSY bylo vyvinuto několik analytických modelů, které jsou vesměs modifikovanými verzemi modelů odvozených pro lineární lomovou mechaniku.

A. Efektivní šířka trhliny:

Nejjednodušším model je založený na skutečnosti, že lze pro jednoduché typy namáhání trhliny (především mód 1) zhruba odhadnout velikost nelineární procesní zóny, a to pomocí vztahu (2.30):

$$r_{NPZ} = 2 \cdot \alpha \cdot \left(\frac{K_I}{f_u} \right)^2 \quad (2.30)$$

Kde:

r_{NPZ}	je přibližný odhad nelineární procesní zóny;
α	koeficient závislý na tvaru tělesa (hodnota se liší podle různých autorů);

Velikost trhliny se poté fiktivně zvětší o polovinu velikosti NPZ a dále se postupuje dle metod lineární lomové mechaniky uvedených výše.

B. Riceův J-integrál:

Koncepce J-integrálu je v jistém smyslu ekvivalentní koncepci energetického kritéria G_f . Spočívá ve vytvoření křivky podél celého okolí kořene trhliny a následné integraci bilance energie vnitřních a vnějších sil na této křivce. Hodnota integrálu je nezávislá na zvolené trase (křivce), pokud:

- Je materiál dokonale pružný (připouští se i nelineární pružnost);
- Je materiál homogenní;
- Na těleso nepůsobí žádné objemové síly;
- Teplota celého tělesa je konstantní.

Z těchto podmínek vyplývá, že řešení pomocí Riceova J-integrálu je přesné pouze pro lineární lomovou mechaniku. Přesto lze ukázat, že pro menší NPZ a monotónní zatěžování je hodnota J-integrálu téměř nezávislá na zvolené křivce, pokud prochází po celé délce pružnou zónou. Trhlina se v takovém případě začne šířit, pokud je dosaženo kritické hodnoty J-integrálu (J_c):

$$J = J_c \quad (2.31)$$

Podrobnosti výpočtu jsou nad rámec této práce a lze je nalézt v literatuře věnované nelineární lomové mechanice^[2].

C. Hutchinsonův-Riceův-Rosengrenův (HRR) model

HRR model je použitelný pro materiály s lineárním zpevněním po dosažení meze kluzu. Vychází z předpokladu, že nadále platí asymptotická závislosti napětí v okolí trhliny na hodnotě $r^{-1/2}$ i pro SSY a faktor intenzity napětí (pro mód 1) ve zplastizované oblasti lze stanovit pomocí vztahu:

$$K = K_I \cdot \sqrt{\frac{H}{E}} \quad (2.32)$$

Kde:

H je modul zpevnění materiálu;

E modul pružnosti materiálu.

2.3.2.2. Large scale yielding (LSY)

Pokud zplastizovaná zóna dosahuje velkých rozměrů (limitně až k okrajům zkoumaného tělesa) není již možné chování v okolí kořene trhliny popsat pouhou úpravou vztahů lineární lomové mechaniky. LSY zpravidla nastává pro kvazikřehké materiály s nízkou pevností v tahu v porovnání s pevností v tlaku, jako je např. beton. Pro ten lze velikost NPZ odhadnout velice hrubě na 100 mm.

Spíše než otázkou, zdali se trhlina začne šířit se LSY zabývá otázkou, zdali je toto šíření stabilní nebo nestabilní, tedy zdali se trhlina bude šířit postupně nebo dojde k její propagaci rychlostí zvuku až k okraji tělesa. Níže jsou velice stručně uvedeny základní modely pro LSY.

A. Crack opening displacement (COD) model

Koncept modelu vychází z předpokladu, že před kořenem trhliny vzniká zplastizovaná oblast ve tvaru klínu, Šířka (δ) tohoto klínu (která se zpravidla odhaduje přibližnými vztahy) se porovná s jistou kritickou hodnotou a stanoví se chování trhliny:

$\delta < \delta_f$ stabilní šíření

$\delta \geq \delta_f$ nestabilní šíření rychlostí zvuku

B. Rezistenční křivka

Rezistenční křivka je grafickou reprezentací několika experimentů na tělesech různé velikosti, přičemž pro každý z experimentů je stanovena hranice stabilního šíření trhliny:

$$X = X_c \quad (2.33)$$

Kde:

X je lomový parametr;

X_c kritická hodnota lomového parametru.

Křivka se poté vykreslí jako obálka kritických hodnot lomového parametru a pro daný materiál udává oblast podmínek, za kterých dojde ke stabilnímu a nestabilnímu šíření trhliny.

C. T*-integrál

Tento model je modifikací a zobecněním Riceova J-integrálu pro LSY, při kterém dochází k odtěžování při šíření trhliny nebo je zatížení neproporcionální. Podrobnosti k tomuto modelu jsou vysoko nad rámcem této práce a lze je nalézt v literatuře^[1].

2.4. Mechanika poškození

Cílem mechaniky poškození je popis chování materiálu při vzniku, šíření a vzájemném spojování mikrotrhlin nebo jiných defektů. Je využitelná spíše v počátečním stádiu poškození materiálů, kdy jsou trhliny malé a rovnoměrně rozptýlené v dílčím objemu zkoumaného tělesa. Vliv trhlin je popisován jako snížení tuhosti a pevnosti materiálu, vlivem zavedeného parametru poškození ω . Podle povahy poškození jsou rozlišovány dva základní typy poškození.

- Izotropní poškození
- Ortotropní poškození

Při definování parametru poškození vycházíme z Hookeova zákona (2.34)

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \quad (2.34)$$

Zřejmé je že musí platit rovnost napětí mezi poškozenou a nepoškozenou částí konstrukce (2.35).

$$\bar{\sigma}\bar{A} = \sigma A \quad (2.35)$$

Samotný bezrozměrný parametr poškození ω lze definovat jako poměr původní, nominální plochy (A) snížené o efektivní plochu po poruše (\bar{A}), vydělené původní plochou (A) dle vztahu (2.36). Nabývá hodnoty z intervalu $\langle 0;1 \rangle$, kde $\omega = 0$ je materiál bez poškození a $\omega = 1$ odpovídá plně poškozenému materiálu

$$\omega = \frac{A - \bar{A}}{A} \quad (2.36)$$

Spojením (2.34)(2.35)(2.36) dostáváme (2.37), respektive (2.38) pro víceosou napjatost

$$\sigma = (1 - \omega)E\varepsilon \quad (2.37)$$

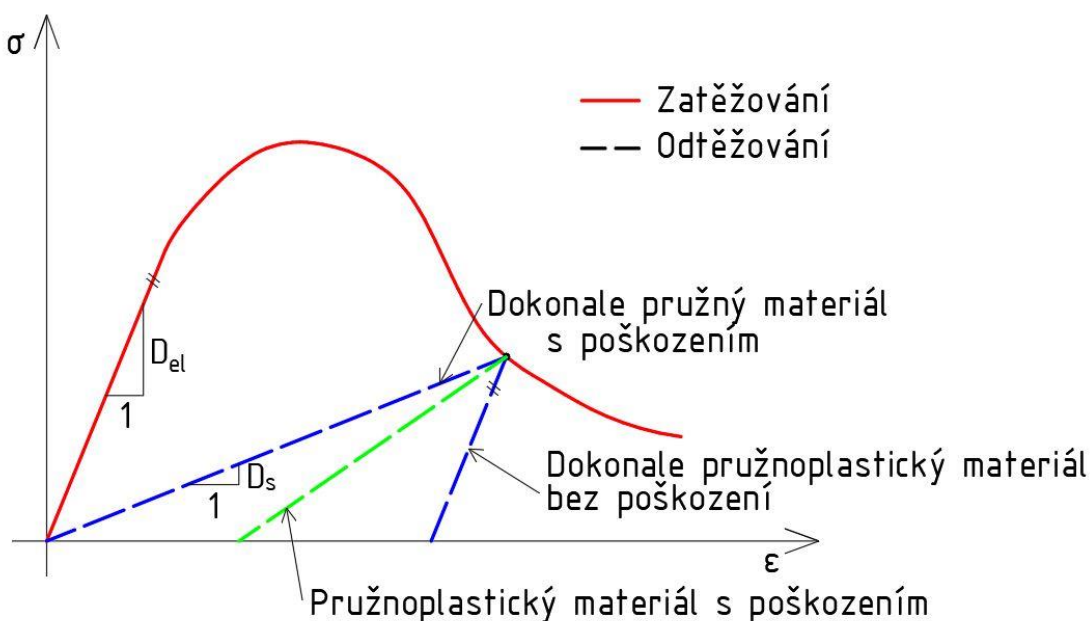
$$\sigma = (1 - \omega)D_e\varepsilon \quad (2.38)$$

Kde:

$\bar{\sigma}, \sigma$	je efektivní, nominální napětí;
\bar{A}, A	efektivní, nominální plocha průřezu;
E	Youngův modul pružnosti materiálu;
D_e	Matice elastické tuhosti.

2.4.1. Pracovní diagram poškozené materiálu

Materiál, u kterého dojde v průběhu zatěžování k poškození zpravidla vykazuje pokles tuhosti při odtižení a v idealizovaném případě po plném odtižení vymizí veškerá deformace. Na grafu je znázorněn příklad takového pracovního diagramu včetně porovnání s materiálem pružnoplastickým.



obr./17/ Idealizované pracovní diagramy poškozeného a pružnoplastického materiálu

2.4.2. Izotropní poškození

Pokud se poškození materiálu projevuje nezávisle na směru a znaménku namáhání, postačuje definice jediného parametru ω , který v poškozené oblasti tělesa snižuje celkovou tuhost. Matice pružné tuhosti je poté nahrazena tzv. maticí sečné tuhosti, která se vypočte ze vztahu:

$$[D_s] = (1 - \omega) \cdot [D_{el}] = [D_{el}] - \omega \cdot [D_{el}] \quad (2.39)$$

Praktický výpočet se provádí ve dvou krocích, kdy je nejprve odhadnuto řešení na základě předpokladu pružného chování bez poškození (tzv. prediktor) a následně je na základě energie uvolněné v trhlinách provedena oprava řešení (tzv. korektor).

2.4.3. Ortotropní poškození

Pro tělesa vystavená složité napjatosti je třeba sledovat vliv poškození v závislosti na směru namáhání. Zároveň se může rozdílně projevovat poškození při namáhání tahem a tlakem. V takovém případě jsou zpravidla definovány čtyři parametry poškození:

$\omega_{t,1}; \omega_{t,2}; \omega_{t,3}$ tahové poškození ve směru hlavních napětí

ω_c poškození drcením betonu

Ve zjednodušeném případě se předpokládá, že tlakové poškození drcením betonu se projevuje směrově nezávisle, zatímco tahová poškození jsou vyšetřována ve směru hlavních napětí.

Tahové složky se pro praktické výpočty zapisují v maticovém tvaru:

$$[\omega_t] = \begin{bmatrix} \omega_{t,1} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{t,2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{t,3} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

2.4.4. Rozetřené trhliny (smeared cracks)

Model rozetřených trhlin je alternativním označením mechaniky poškození, ale zároveň označením pro jednu z možných implementací poškození při numerické analýze využívající metodu konečných prvků. Každému konečnému prvku je poté přiřazen parametr poškození (jeden, případně více), představující zprůměrovaný efekt trhlin a drcení na pokles tuhosti tohoto konečného prvku.

Ze známých rozměrů prvku a nepružného přetvoření způsobeného poškozením lze zpětně dopočítat průměrnou šířku trhliny ($w_{c,avg}$), procházející přes daný prvek. Zjednodušeně se tedy předpokládá, že šířka trhliny je v rámci prvku konstantní.

$$w_{c,avg} = L_e \cdot \varepsilon_{cr} \quad (2.41)$$

Kde:

L_e je velikost konečného prvku kolmo na směr trhliny;

ε_{cr} poměrné přetvoření vlivem poškození materiálu;

2.4.5. Kombinace mechaniky poškození a teorie plasticity

Ačkoliv se poškození a plasticita mikroskopicky projevují zcela odlišně (zatímco první způsobuje nespojitost v materiálu, druhé zachovává spojitost v poli napětí), makroskopicky se jedná o dva velice podobné jevy, které vedou na pokles tuhosti materiálu. Při odtíženého poškozeného materiálu dochází zpravidla k vyrušení veškeré deformace (uzavření trhlin) a odtěžovací větve pracovního digramu vykazuje výrazně nižší tuhosti, zatímco při plastickém chování probíhá odtížení se stejnou tuhostí jako pružná zatěžovací větve pracovního digramu a zůstává nevratná plastická deformace (viz pracovní diagramy výše obr./17/).

Je vhodné oba modely zkombinovat do jednoho a popisovat vliv poškození i plasticity jedinou rovnicí. Tenzor napětí se pro případ izotropního poškození poté vypočte jako:

$$[\sigma] = (1 - \omega) \cdot [D_{el}] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{pl}\}) = [D_s] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{pl}\}) \quad (2.42)$$

Kde:

ε je vektor celkového přetvoření;

ε_{pl} vektor plastického přetvoření;

Pro případ ortotropního poškození jsou vztahy komplikovanější a nad rámec zaměření této práce.

2.5. Metoda konečných prvků

Následující kapitola čerpá z [10], [17] a [23].

2.5.1. Úvod

Metoda konečných prvků patří do skupiny matematických numerických metod pro řešení obyčejných a parciálních (soustav) diferenciálních rovnic. Základním principem je diskretizace kontinua na konečné množství malých oblastí (prvků). Na každém prvku jsou definovány tzv. báze funkce. Úloha malého množství diferenciálních rovnic s nekonečným počtem stupňů volnosti (neznámá funkce řešení nad celou oblastí) je převedena na velkou soustavu algebraických rovnic s konečným počtem stupňů volnosti (neznámých hodnot v uzlových bodech).

Obecně lze metodu konečných prvků chápat jako nástroj pro převod operátorové formulace úlohy na maticovou formulaci:

$$L(u) = f \stackrel{MKP}{\implies} [K] \cdot \{r\} = \{f\} \quad (2.43)$$

Kde:

L	je lineární diferenciální operátor, který funkci u přiřazuje prvek z prostoru f ;
u	funkce řešení (obecně vícerozměrná);
f	prostor funkcí f (v mechanice zpravidla zatížení);
$[K]$	matice tuhosti soustavy;
$\{r\}$	vektor neznámých posunů a pootočení;
$\{f\}$	vektor pravých stran.

V průběhu posledních desetiletí si metoda konečných prvků vydobyla dominantní postavení mezi numerickými metodami nejenom pro řešení úloh mechaniky, ale i dalších vědeckých disciplín (termodynamika, hydraulika a další) a to především díky své robustnosti, stabilitě a možnosti použití na řešení téměř libovolně složitých oblastí.

V rámci této diplomové práce je metoda konečných prvků použita při nelineární analýze zkoumaných železobetonových těles, viz kapitola 4.

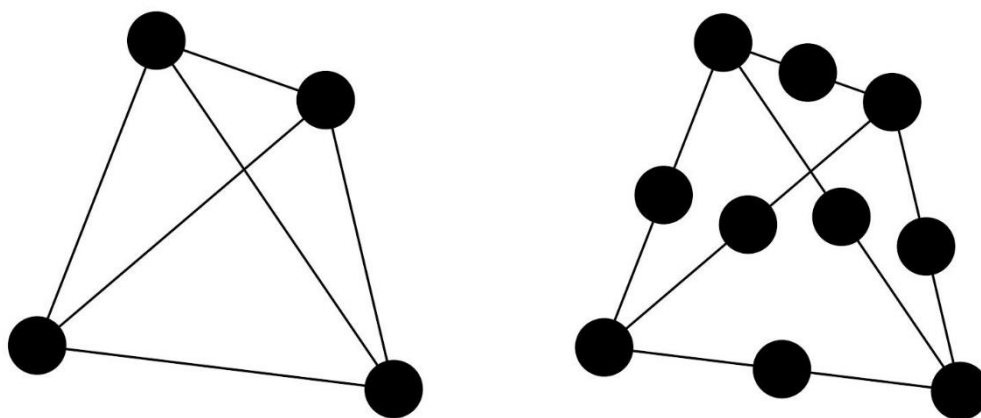
2.5.2. Síť konečných prvků

Metoda konečných prvků ke svému řešení vyžaduje diskretizaci řešené oblasti na konečný počet podoblastí – konečných prvků. Každý typ prvku lze popsat pomocí zvoleného topologického tvaru, počtu uzlů a zvolených básových funkcí.

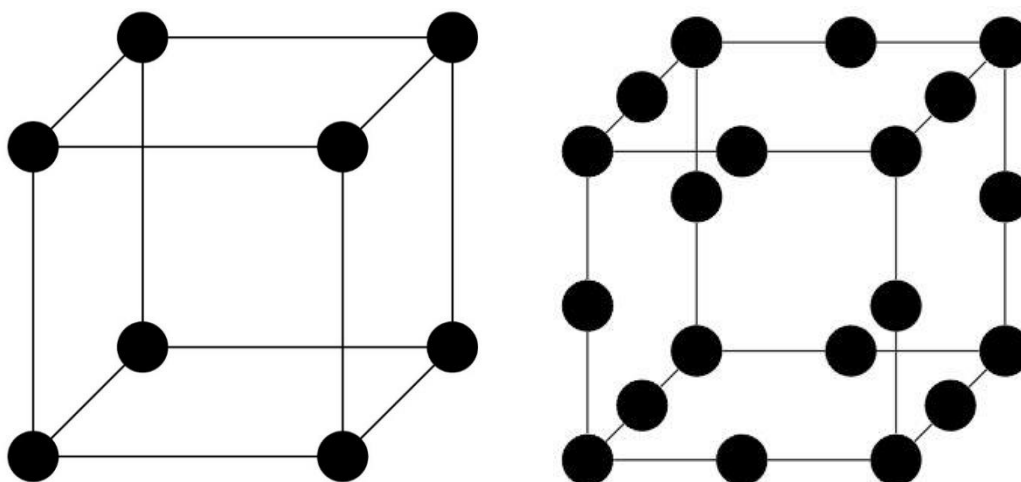
Volba a velikost konečných prvků přímo ovlivňuje kvalitu získaných výsledků, ale mají také přímý vliv na potřebnou výpočetní paměť, procesorový čas a úložné místo na disku počítače. Špatně zvolená výpočetní síť jako může vést ke zcela špatným výsledkům. Například pro případ ohýbaných prvků je všeobecně přijímáno, že musí být použito minimálně 4-6 prvků na tloušťku konstrukce^[10].

Výpočetní síť pro prostorové (3D) prvky je nejčastěji skládána ze dvou základních topografických prvků. Čtyřboký jehlan (*tetrahedral element*) je

geometricky nejjednodušším prvkem kterým je možno utvořit libovolný objem s vysokou přesností. Druhým nejčastěji voleným prvkem je obecný šestistěn (*hexahedral element*). Přesně vymodelovaná síť nemusí přinést přesné výsledky. Jeden z nejčastějších problémů při generování výpočetní sítě bývá příliš vysoký poměr mezi nejdelší a nejkratší stranou prvku. Čím vyšší je tento poměr, tím horší jsou podmínky pro sestavení strukturní matice, což může vést k numerickým problémům v řešiči soustavy. Dalším sledovaným parametrem jsou úhly svírané mezi hranami, respektive stěnami, kde čím menší (ostřejší) tento úhel je, tím je horší přesnost numerického řešení.



obr./18/ Uzly na lineárním (vlevo) a kvadratickém (vpravo)
na jehlanovém prvku



obr./19/ Uzly na lineárním (vlevo) a kvadratickém (vpravo)
na krychlovém prvku

2.5.3. Řešiče lineární soustavy rovnic

Numerické metody používané v úlohách mechaniky vedou na velké soustavy lineárních rovnic se stovkami tisíc až miliony neznámých. Tyto soustavy jsou zpravidla velmi řídké s nenulovými prvky koncentrovanými podél hlavní diagonály matice soustavy. K jejich řešení lze obecně použít matematické metody, které lze rozdělit do následujících tří skupin:

- Přímé;
- Iterativní;
- Kombinované.

Tyto metody se liší svou výpočetní náročností a přesností. Pro každý typ úlohy může být vhodná jiná metoda, přičemž rozdíly ve výpočetní náročnosti mohou být až několikanásobné. Výběr konkrétní metody proto zásadně ovlivňuje efektivitu výpočtu.

2.5.3.1. Přímé metody

Přímé metody řeší soustavu rovnic jako celek a při zanedbání numerických nepřesností způsobených počítačem při algebraických operacích je jejich řešení vždy přesné. Předem lze stanovit dobu výpočtu, ale jejich vhodnost klesá s velikostí úlohy, neboť výpočetní náročnost obecně narůstá úměrně třetí mocnině velikosti matice. Pro většinu praktických 1D a 2D úloh jsou přímé metody zpravidla vhodnější než iterativní metody. Problematická je implementace přímých metod při paralelním výpočtu.

Přímé metody lze dále rozdělit do několika skupin, podle omezení jejich použití. Nejpoužívanějšími typy jsou:

- Pro obecné matice: Gaussova eliminace, LU rozklad, LDU rozklad;
- Pro symetrické matice: LL^T rozklad (Choleského rozklad), LDL^T rozklad;

Kde:

L	je dolní trojúhelníková matice;
D	diagonální matice;
U	horní trojúhelníková matice;

L^T horní trojúhelníková matice vytvořená transpozicí dolní trojúhelníkové matice.

Velkou výhodou metod využívajících rozkladu původní matice je skutečnost, že při větším počtu pravých stran (v mechanice se zpravidla jedná o více zatěžovacích stavů) je výpočetně vysoce náročný pouze prvotní rozklad, ale následné řešení jednotlivých zatěžovacích stavů je řešeno s náročností úměrnou první mocnině velikosti matice.

2.5.3.2. Iterativní metody

Iterativní metody jsou zpravidla založeny na počátečním odhadu řešení, které je upravováno do takové doby, dokud není splněno kritérium konvergence (tedy dva po sobě jdoucí kroky iterace se neliší o více než přípustnou chybu). Jejich výpočetní náročnost se může až řádově lišit v závislosti na podmíněnosti matice soustavy a zároveň v závislosti na „přesnosti“ počátečního odhadu řešení. Zpravidla není možné předem stanovit jejich výpočetní náročnost a stanovení vhodného konvergenčního kritéria vyžaduje určitou zkušenost. Řešení není z definice přesné, pouze přibližné. Pro 3D úlohy většího rozsahu jsou iterativní metody zpravidla efektivnější než přímé metody. Velmi snadno se iterativní metody implementují pro paralelní výpočet.

Mezi základní typy iterativních metod patří:

- Metoda sdružených gradientů;
- Jacobiova metoda;
- Relaxační metoda;
- Metoda největšího spádu;
- GMRES.

Iterace musí být provedena pro každou pravou stranu samostatně. V určitých případech lze využít řešení z jednoho zatěžovacího stavu jako počáteční odhad řešení pro další zatěžovací stavy a tím výpočet urychlit.

2.5.3.3. Kombinované metody

Výše uvedené metody je možné vhodně kombinovat a získat tak skupinu metod využívající výhody přímých i iterativních řešičů. Mezi zástupce kombinovaných metod patří např. metoda PARDISO.

PARDISO je metoda cílící na řešení rozsáhlých úloh lineárních soustav s řídkými symetrickými či nesymetrickými maticemi s užitím sdílené paměti, poskytovaná společností Intel v knihovně Math Kernel Library (MKL)^{[10][25]}.

2.6. Nelineární analýza

Nelineární analýza sleduje chování materiálů a prvků, u kterých není deformace přímo úměrná působícímu zatížení. Pomocí nelineární analýzy tak lze popsat chování materiálů za mezí (lineární) úměrnosti, u kovů se jedná zpravidla o chování za mezí kluzu. U betonových konstrukcí může nelinearitu způsobit plasticita, trhliny, poškození, reologické změny a další jevy. Popsané vlivy způsobují materiálovou nelinearitu. U konstrukcí lze také pozorovat nelinearitu geometrickou. Železobetonové konstrukce jsou dosud nejčastěji navrhované jako masivní konstrukce. U masivních konstrukcí je vliv geometrických nelinearit zpravidla zanedbán nebo zaveden uvážením zvýšeného namáhání, které ale není zohledněno v samotném výpočetním modelu.

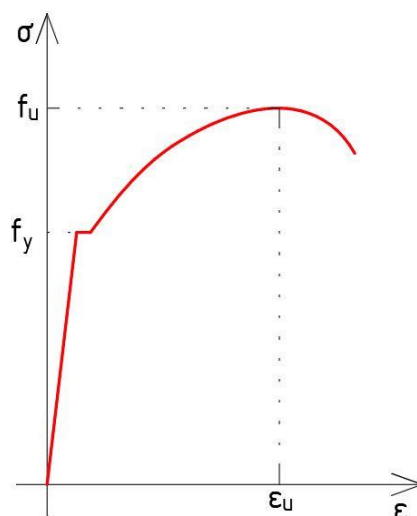
Z podstaty nelineární analýzy vyplývá že není možné aplikovat veškeré předpokládané působící zatížení na konstrukci najednou. Zatížení se rozděluje do zatěžovacích kroků, které rozdělují celkové zatížení do přírůstků zatížení a ty jsou aplikovány na konstrukci. Pro zvýšení přesnosti řešení zatěžovacích kroků dochází k jejich rozdělení na iterační kroky. Řešení iteračního kroku spočívá ve stanovení odhadu založeného na lineárním chování materiálu v prvním iteračním kroku, další iterační kroky se snaží přiblížit k řešení na základě konvergenčních kritérií (blíže popsáno v kapitole 2.6.1). Mezi nejčastější konvergenční kritéria patří:

- Kritérium přírůstku přemístění
- Kritérium nevyrovnaných sil (reziduí)
- Energetické kritérium

Typy nelineární analýzy:

1) Materiálová:

Materiálová nelineární analýza spočívá v zohlednění nelinearit materiálů, které vznikají z nehomogenit (pruty výztuže v betonu) materiálu, zohledněním plastického přetváření materiálu případně uvážením poruch v materiálu (trhlin, či jiného porušení).



obr./20/ Pracovní diagram oceli

Materiálovou nelinearitu lze zpozorovat na pracovním diagramu betonářské výztuže, kde se ocel chová lineárně, tj. deformace je přímo úměrná zatížení dle Hookova zákona, do meze kluzu f_y . Chování za meze kluzu je nutno analyzovat nelineárně.

2) Geometrická:

Geometricky nelineární analýza se uplatňuje především u výrazně štíhlých prvků. Vnitřní síly jsou stanoveny na deformované konstrukci (teorie 2. řádu), případně jsou uvažovány i nelineární geometrické rovnice (teorie 3. řádu – tzv. teorie velkých deformací). Pro masivní prvky jsou zpravidla rozdíly ve výsledcích lineární a geometricky nelineární analýzy zanedbatelné.

3) Kombinovaná nelinearita:

Poslední typ nelineární analýzy v sobě kombinuje užití geometrických a materiálových nelinearit. Jedná se tak o nejsložitější typ analýzy.

2.6.1. Řešiče nelineárních rovnic

Následující kapitola čerpá ze zdrojů [10], [22], [23] a [24].

Pro typické masivní betonové konstrukce zpravidla dominuje materiálová nelinearita, která vede na pokles tuhosti. Nejčastěji je způsobena:

- Zplastizováním materiálu (viz teorie plasticity – kapitola 2.2)
- Vznikem několika makrotrhlin (viz lomová mechanika – kapitola 2.3)
- Plošným/objemovým poškozením materiálu (viz mechanika

poškození – kapitola 2.4)

Pokud by byly tyto úlohy řešeny lineárně, došlo by k nadhodnocení působícího zatížení, respektive podhodnocení odpovídající deformace.

Dále je stručně popsána skupina metod, které umožňují „opravit“ původní lineární odhad řešení (popsáno v úvodu kapitoly 2.6) a nalézt rovnováhu nelineárních systémů.

2.6.1.1. Plná Newton-Raphsonova metoda

Základní metodou řešení nelineárních rovnic je Newton-Raphsonova metoda. Je založena na konceptu řešení úloh pomocí rozdělení do více zatěžovacích výpočetních kroků což vede na sadu nelineárních rovnic (2.44).

$$K(\vec{p})\Delta\vec{p} = \vec{q} - f(\vec{p}) \quad (2.44)$$

Kde:

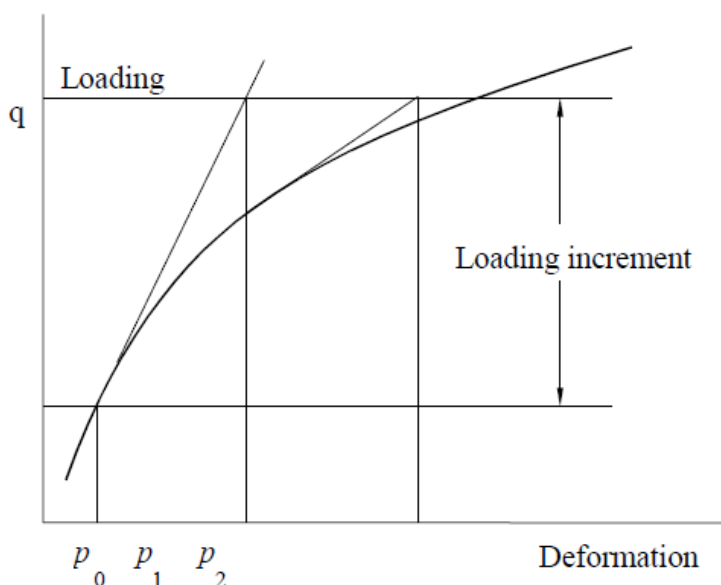
$K(\vec{p})$ je matice tuhosti, popisující přírůstky zatížení k přírůstkům deformace;

$\Delta\vec{p}$ deformační přírůstek od přírůstku zatížení;

\vec{q} vektor celkového vneseného zatížení v uzlech.

\vec{p} deformace konstrukce před zatěžovacím krokem

$f(\vec{p})$ vektor vnitřních uzlových sil.



obr./21/ Zatěžovací schéma plné Newton-Raphsonovy metody^[10]

Někdy je metoda též nazývána metoda tečen, protože řešení je hledáno ve směru tečny. Sklon této tečny udává matice tuhosti v každém iteračním kroku. Po vyřešení daného iteračního kroku dochází k přepočtu matice tuhosti, a tím i změna sklonu tečny. Řešení pomocí plné Newton-Raphsonovy metody proto tedy konverguje k přesnějšímu řešení s užitím menšího počtu iteračních kroků.

2.6.1.2. Modifikovaná Newton-Raphsonova metoda

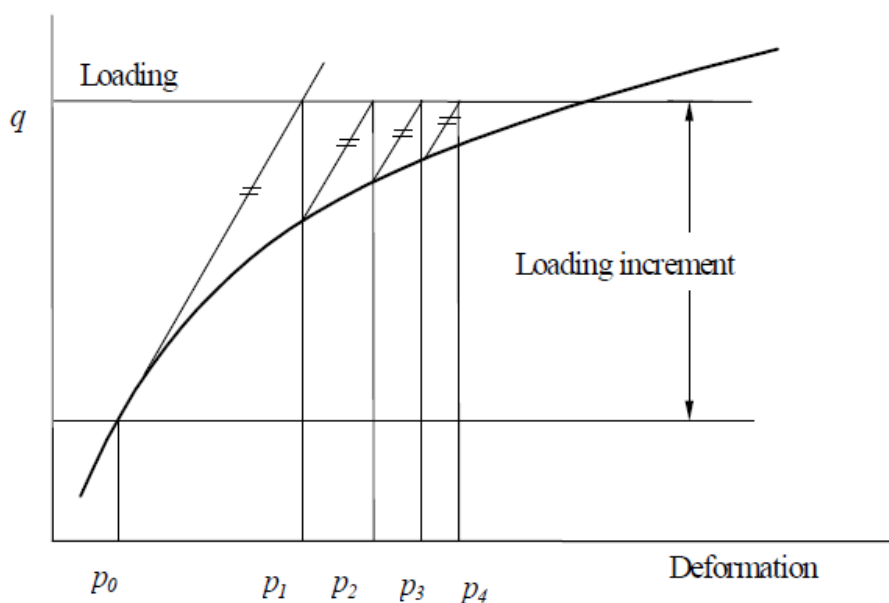
Nejvíce časově náročnou částí plné Newton-Raphsonovy metody je přepočet matice tuhosti v každém iteračním kroku. To v mnohých případech není nutné a je možné použít matici tuhosti sestavenou v první iteraci daného zatěžovacího kroku. Řešení tedy konverguje s užitím více iteračních kroků, které jsou ale řešeny mnohem rychleji.

Lze tedy přijmout zjednodušující předpoklad

$$K(\vec{p}_{l-1}) \cong K(\vec{p}_0) \quad (2.45)$$

Kde:

- K je matice tuhosti;
- p označuje výpočetní krok;
- i číslo iterace, kde 0 označuje první iteraci.



obr./22/ Zatěžovací schéma modifikované Newton-Raphsonovy metody^[10]

2.6.1.3. Metoda délky oblouku (Arc-length)

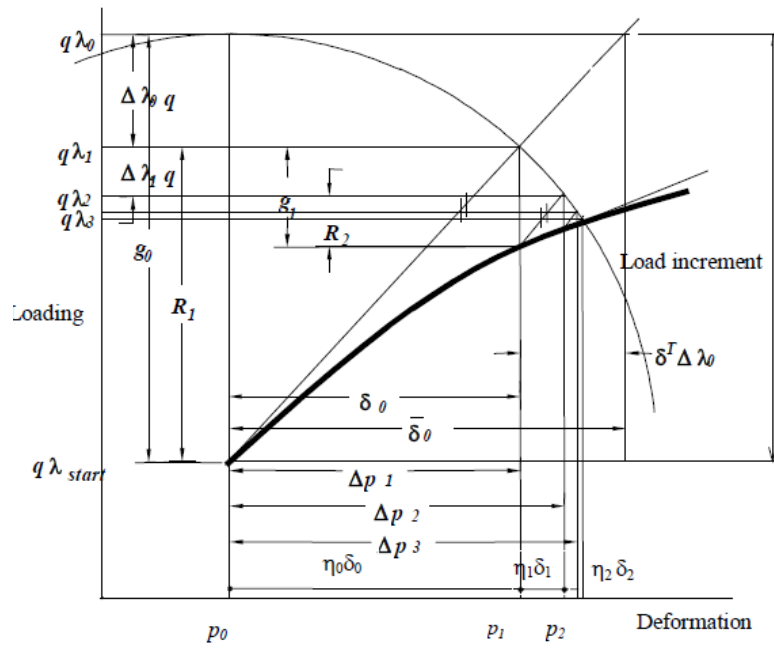
Metoda délky oblouku patří mezi nejpoužívanější metody^[10]. Díky svému vynikajícímu výkonu je nyní hojně využívána k řešení geometricky i materiálově nelineárních úloh. Hlavním důvodem popularity je její robustnost, které zaručují dobré výsledky i v případech kdy Newton-Raphsonova metoda selhává. Jedná se především o úlohy, kde je hledán pracovní diagram konstrukce i po dosažení lokálního extrémů (viz. obr./24/). V porovnání s Newton-Raphsonovou metodou jsou v metodě Arc-length iterovány přírůstky zatížení i přírůstky sil, což umožňuje snížení působícího zatížení v rámci zatěžovacího kroku, z matematického hlediska je nutné zavést nový stupeň volnosti související s úrovní zatěžování. Nový stupeň volnosti se nejčastěji značí λ .

Soustava rovnic poté nabývá tvaru:

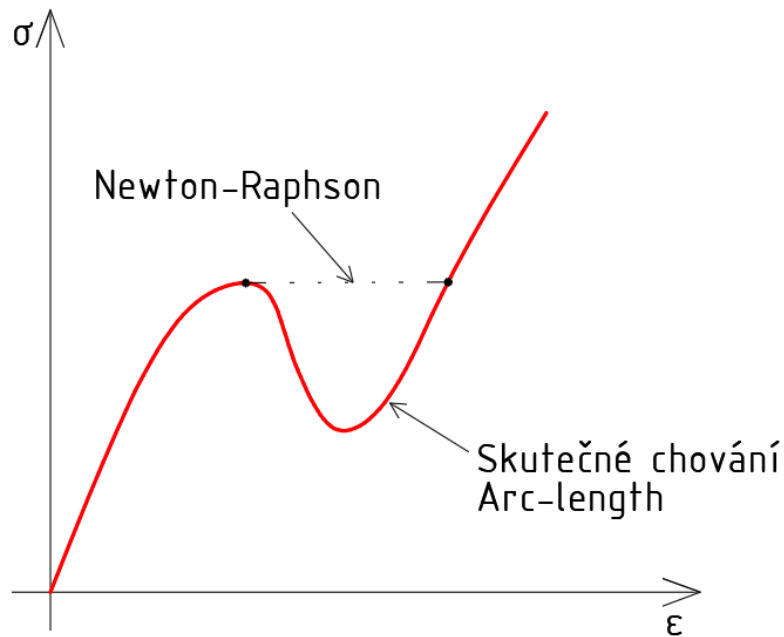
$$K(\vec{p})\Delta\vec{p} = \lambda\vec{q} - f(\vec{p}) \quad (2.46)$$

Kde:

$K(p)$	je matice tuhosti;
Δp	deformační přírůstek od přírůstku zatížení;
q	vektor popisující typ působícího zatížení.
p	deformace konstrukce před zatěžovacím krokem
$f(p)$	vektor vnitřních uzlových sil;
λ	násobitel přírůstku zatížení.



obr./23/ Schéma metody délky oblouku^[10]



obr./24/ Porovnání Newton-Raphsonovy a Arc-Length metody

3. SOUČASNÉ NÁVRHOVÉ POSTUPY PRO KROUCENÉ PRVKY

Následující kapitoly stručně popisují současné doporučené postupy k navrhování kroucených prvků. Všechny postupy mají společnou snahu o navržení bezpečné konstrukce, která poskytuje dostatečné varování před celkovým kolapsem konstrukce.

3.1. Příhradová analogie

Prostorový příhradový model pro posouzení prutových prvků namáhaných kroucením, ohybem nebo osovou silou definovali v roce 1972 Lampert a Thürlimann^[16]. Pro tvorbu náhradních příhradových modelů jsou používány dva základní prvky, táhla a vzpěry.

Stanovení maximálního přípustného kroučícího momentu poté vychází z řešení založeného na největším staticky přístupném a nejmenším kinematicky přípustném kroučícím momentu. Jedná se tedy o kroučící moment na mezi kluzu výztuže, a je dán

$$T_{Rd;s} = 2A_k \sqrt{\frac{A_{sw}f_{ywd}}{s_l} \cdot \frac{\sum A_{sl} f_{yd}}{u_k}} \quad (3.1)$$

Kde:

$T_{Rd;s}$ je maximální kroučící moment na mezi kluzu výztuže;

A_k plocha uzavřená spojnici os podélných prutů;

f_{ywd} návrhová mez kluzu betonářské smykové výztuže;

s_l podélná osová vzdálenost sestav třmínkové výztuže;

$\sum A_{sl}$ celková průřezová plocha podélné výztuže na kroucení;

f_{yd} návrhová mez kluzu podélné výztuže;

u_k obvod plochy A_k .

Jednoznačně lze stanovit úhel tlakových diagonál, který je dán poměrem mezi podélnou a příčnou výztuží:

$$\theta = \arctg \left(\sqrt{\frac{A_{sw}f_{ywd}}{s_l} \cdot \frac{u_k}{\sum A_{sl} f_{yd}}} \right) \quad (3.2)$$

3.2. Eurokód 2

Následující podkapitola je zpracována dle normy ČSN EN 1992-1-1^[18].

Principem návrhového postupu pro posouzení průřezu na účinky kroucení je náhrada skutečného průřezu za analogický tenkostěnný průřez. Náhradní průřez musí být v rovnováze z hlediska smykového toku, tj. smykový tok musí být uzavřený. V případě nutnosti posouzení složených průřezů je možno průřez rozdělit na dílčí (zpravidla obdélníkové) průřezy. Celková únosnost v kroucení se poté skládá ze součtu únosností dílčích průřezů, na které působí dílčí zatížení stanovené rozkladem celkového zatížení v poměru tuhostí dílčích prvků před vznikem trhlin.

Základním vztahem pro posouzení průřezu je:

$$\tau_{t;i,j} t_{ef;i,j} = \frac{T_j}{2A_{k,j}} \quad (3.3)$$

Kde:

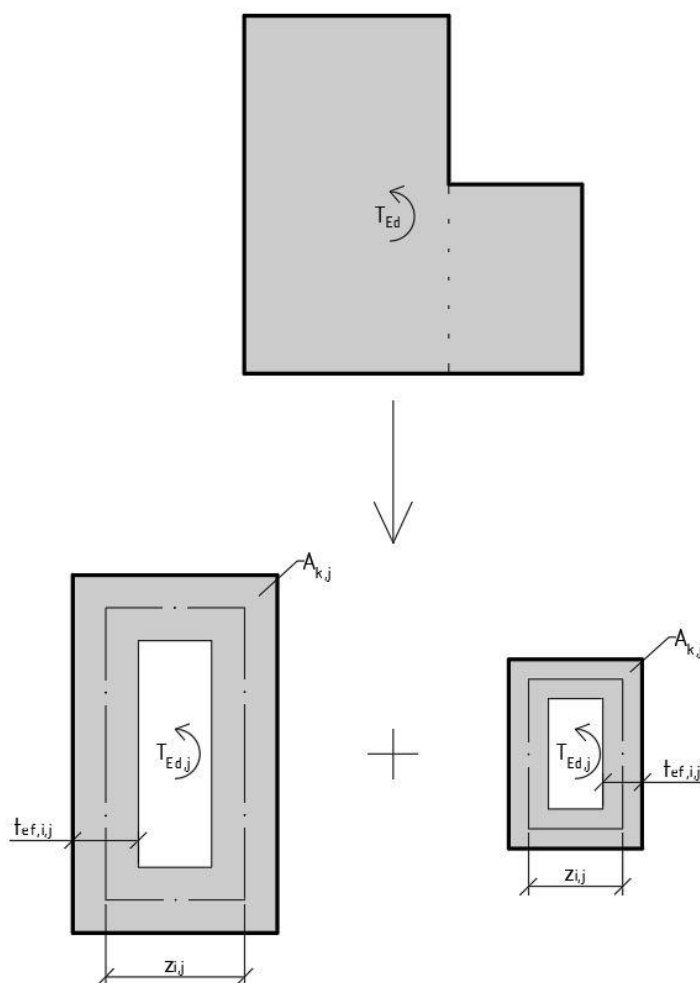
- τ je smykové napětí;
- t_{ef} účinná tloušťka stěny, stanovená jako A/u , která nesmí být menší než dvojnásobek vzdálenosti mezi středem podélné výztuže a okrajem průřezu. Uvažovaná tloušťka rovněž nesmí přesáhnout skutečnou tloušťku stěny;
- T uvažovaný dílčí působící krouticí moment;
- A_k je plocha omezená střednicemi spojených stěn průřezu.

Index i označuje pořadnici posuzované stěny náhradního průřezu. Index j označuje pořadnici posuzovaného dílčího průřezu.

$$V_{Ed;j} = \tau_{t;i,j} t_{ef;i,j} z_{i,j} \quad (3.4)$$

Kde:

- $V_{Ed;j}$ je náhradní posouvající síla;
- $z_{i,j}$ délka střednice mezi průsečíky střednicemi sousedních stěn.



Krouticí moment (volného kroucení) způsobuje smyková napětí. Je proto nutné posoudit vliv spolupůsobení s posouvající silou, aby nedošlo k drcení tlakových diagonál nebo přetržení výztuže. Musí platit podmínka (3.5)

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd,max}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rd,max}} \leq 1,0 \quad (3.5)$$

Kde:

$T_{Rd,max}$ Je návrhový krouticí moment na mezi únosnosti; stanovený dle (3.6). Přestavuje únosnost tlačných diagonál

$$T_{Rd,max} = 2v\alpha_{cw}f_{cd}A_k t_{ef,i,j} \quad (3.6)$$

$V_{Rd,max}$ maximální návrhová posouvající síla, její stanovení není součástí problematiky řešené v této práci

ν redukční součinitel při porušení betonu smykem, dle (3.7)

$$\nu = 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{ck} \text{ v MPa} \quad (3.7)$$

Vliv vázaného kroucení lze běžně pro uzavřené tenkostěnné průřezy a plné průřezy zanedbat. Tenkostěnné otevřené průřezy může být nutno posoudit na účinky vázaného kroucení. Velmi štíhlé průřezy je nutno posoudit pomocí modelů řešených metodou konečných prvků, případně modely náhradní příhradoviny. Prvky musí být posouzeny dle pravidel pro ohyb s podélnou normálovou silou a namáhání smykem.

Vliv podélné změny geometrie na prvek jako celek není v normě popsán.

3.3. Model Code 2010

Následující kapitola čerpá z *fib Model Code 2010*^[21].

Návrhový postup dle Model Code 2010 udává že, pokud se průřez nebo vyztužení náhle nemění po délce prvku, lze předpokládat že smykový tok od kroucení je konstantní po obvodu efektivního průřezu. Návrhový krouticí moment lze poté převést na ekvivalentní posouvající sílu.

$$V_{Ed;T;i} = \frac{T_{Ed}}{2A_k} z_i \quad (3.8)$$

Kde:

$V_{Ed;T;i}$ je hodnota ekvivalentní posouvající síly;

T_{Ed} návrhový krouticí moment;

A_k plocha efektivního tenkostěnného průřezu vymezeného střednicí efektivní tloušťky stěny.

t_{ef} efektivní tloušťka stěny; stanovená dle (3.9)

$$t_{ef} \leq \frac{d_k}{8} \quad (3.9)$$

z_i délka příslušné střednice průřezu.

d_k odpovídá průměru kružnice vepsané nejužší části průřezu

Vliv podélné změny geometrie na prvek jako celek není v návrhovém postupu blíže popsán.

3.4. ACI 318-11

Následující kapitola vychází z ACI 318-11^[19]

Norma je souhrnem minimálních požadavků pro bezpečný návrh železobetonových konstrukcí, kterou vydává American Concrete Institute (ACI) a je používána zejména v USA.

Průřez namáhaný kroucením je obdobně jako u evropské normy (EN-1992-1) idealizovaný jako tenkostěnná trubka. Předpokládá se, že jakmile dojde ke vzniku trhlin v železobetonovém prvku od kroucení, je jeho chování popsáno primárně pomocí zavřených třmínků a podélných prutů poblíž vnějšího okraje průřezu. Smykový tok je uvažován jako konstantní hodnotu podél náhradního tenkostěnného průřezu.

$$q = \tau \cdot t \quad (3.10)$$

Kde:

- q je smykový tok;
- τ smykové napětí;
- t tloušťka stěny tenkostěnného průřezu.

Hodnotu smykového napětí τ lze stanovit z rovnice

$$\tau = \frac{T}{2A_0 t} \quad (3.11)$$

Kde:

- τ je smykové napětí;
- T krouticí moment;
- A_0 plocha uzavřená smykovým tokem dle (3.12);

$$A_0 = 0,85A_{k;0} \quad (3.12)$$

- t tloušťka stěny tenkostěnného průřezu;
- $A_{k;0}$ plocha ohraničená osou vnějších třmínků.

Ukázka výpočtu dle ACI 318-11 je uvedena v příloze 1.

4. ANALÝZA VYBRANÝCH PRŮŘEZŮ

Výpočetní analýza je v současné době nezbytná součástí návrhu téměř každé konstrukce. V případě kroucených prvků s masivním průřezem je vhodné použít k návrhu výpočetní software, který je schopen pomocí numerické analýzy průřezu stanovit dostatečně přesně hodnoty důležité pro spolehlivý návrh.

Vzhledem ke sledované problematice, vzniku a rozvoje trhlin, byla zvolena metoda numerického nelineárního modelování v programu ATENA Science. Tento program umožňuje modelovat a sledovat reálné chování železobetonových konstrukcí, včetně vzniku a rozvoje trhlin, drcení betonu a protažení výztuže za mezí kluzu. Beton je modelován jako kvazikřehký pružnoplastický materiál s poškozením a výztuž jako duktilní pružnoplastický materiál, viz kapitola 2.

4.1. Přijaté předpoklady

S přihlédnutím na množství parametrů ovlivňujících únosnost prvku bylo přijato několik zjednodušujících předpokladů. Není-li uvedeno jinak, byly uvažovány následující předpoklady:

- Prvky byly zatíženy pouze jedním typem namáhání – kroucením, průběh krouticího momentu byl konstantní
- Materiál a vyztužení prvků bylo navrženo v souladu s požadavky aktuálně platné verze Eurokódu 2

4.2. Komentář k výsledkům

Výsledky na následujících stranách jsou prezentovány formou pracovního diagramu, který zobrazuje závislost působícího krouticího momentu T na poměrném zkroucení θ . Poměrné zkroucení je uvažováno jako průměrné, vypočtené pomocí vztahu:

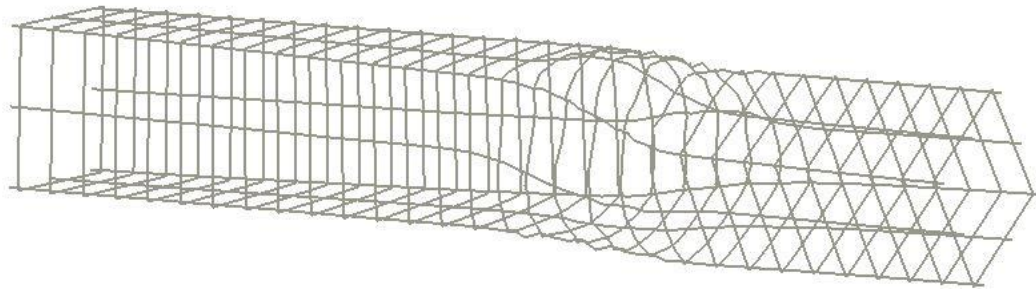
$$\theta = \frac{\varphi_x}{L} \quad (4.1)$$

Kde:

φ_x je podélné pootočení průřezu na konci prvku;

L délka prvku

Relativní pootočení v místě vzniku trhlin může být lokálně mnohem vyšší, viz obr./25/.



obr./25/ Převýšené vykreslení deformace výztuže prvku

Pracovní diagramy v kapitole 4.7 zobrazují dvě dvojice výsledků, kde první dvojice bez dalšího označení odpovídá modelu s návrhovými materiálovými charakteristikám dle Eurokódu 2, zatímco druhá dvojice odpovídá středním hodnotám materiálových vlastností dle Eurokódu 2. Dílčí materiálové vlastnosti (např. lomová energie) jsou stanoveny empirickými vztahy – viz (2.27).

4.3. Materiálové charakteristiky

Pro modely jsou uvažovány návrhové hodnoty materiálových vlastností dle Eurokódu 2. Pro stanovení vhodnosti předkládaného řešení je stanoven stupeň bezpečnosti na základě předpokládaného zatížení v okamžiku porušení dle [18], v poměru s hodnotou získanou pomocí numerických modelů.

4.3.1. Beton

Beton je uvažován třídy C40/50^[18]. Norma udává pouze obecné materiálové parametry. Ostatní parametry byly stanoveny pomocí empirických vztahů. Pro výpočetní model je uvažován materiálový prototyp CC3DNonLinCementitious2. Model poškození vychází z ortotropních rozetřených trhlin. Je užito Rankinovo kritérium pro tahové namáhání (viz. kapitola 2.2.5). Pro tlakové namáhání je uvažováno Menetrey-Willamovo kritérium plastického přetváření (viz kapitola 2.2.6)

Materiálové parametry týkající se lomových vlastností materiálů nejsou v současném vydání Eurokódu 2 specifikované, uvažované hodnoty jsou proto odvozeny z empirického vztahu:

$$G_f = 25 \cdot f_t'^{ef} \quad \text{VOS 1983} \quad (2.27)$$

Tabulka 2 – materiálové charakteristiky – beton C40/50

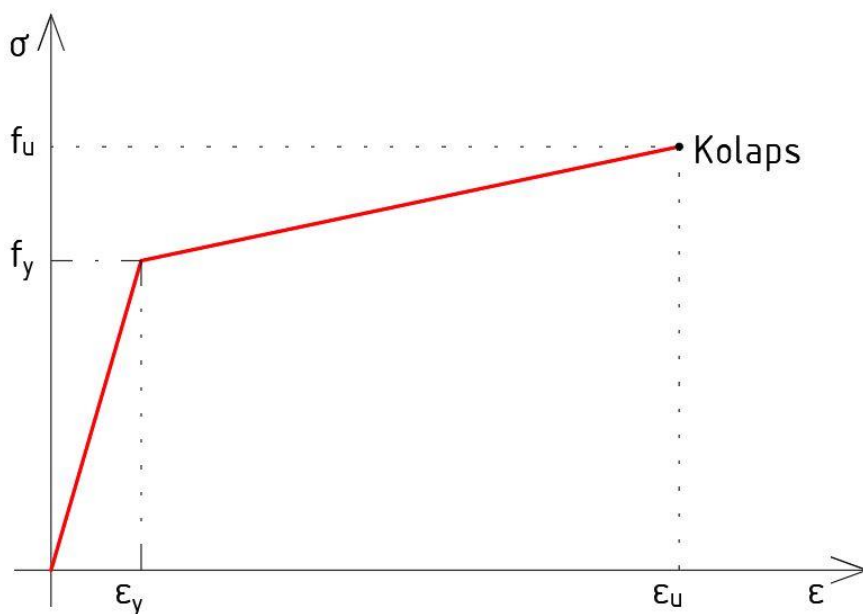
Značka	Název	Hodnota
E	Modul pružnosti	35 000 MPa
ν	Poissonovo číslo	0,2
f_t	Tahová pevnost	1,667 MPa
f_c	Tlaková pevnost	-26,667 MPa
G_f	Lomová energie	41,7 N/m
d_{max}	Maximální velikost kameniva	20 mm
	Rotace trhlin	1,0*

* odpovídá modelu s fixními trhlinami.

Ostatní materiálové vlastnosti (objemová hmotnost, součinitel teplotní roztažnosti apod.) nebyly ve výpočtu uplatněny.

4.3.2. Výztuž

Všechny modely jsou vyztuženy betonářskou výztuží B500B. Výztuž je modelována jako disktrétní, tj. všechny pruty jsou modelované na pozici kterou by skutečně zaujímaly v konstrukci. Byl zvolen materiálový prototyp CCRReinforcement umožňující popis přetváření pomocí multilineárního pracovního diagramu, který reflektuje předpokládané chování výztuže dle [18]. Zjednodušeně byl uvažován bilineární pracovní diagram viz obr./26/.



obr./26/ Bilineární pracovní diagram výztuže

Tabulka 3 – materiálové charakteristiky – vyztuž

Značka	Název	Hodnota
E	Modul pružnosti	200 GPa
ν	Poissonovo číslo	0,3
f_y	Mez kluzu	434,78 MPa
f_u	Mez pevnosti	465,93 MPa

Ostatní neuvedené materiálové vlastnosti nebyly ve výpočtu uplatněny.

4.3.3. Zatěžovací deska

Z důvodu uvažování plastického charakteru materiálů, je vhodné vnášet zatížení pomocí roznášecí desky, díky které je zatížení rovnoměrně přeneseno do betonu, bez lokálního poškození. Obdobné platí pro podpory.

Zatížení bylo do prvku vnášeno přes ocelový plech. Bylo uvažováno dokonale elastické chování materiálu bez meze kluzu

Pro všechny ocelové roznášecí desky byl uvažován materiálový prototypový model CC3DElastIsotropic s následujícími parametry:

Tabulka 4 – materiálové charakteristiky – zatěžovací deska

Značka	Název	Hodnota
E	Modul pružnosti	200 GPa

4.4. Obecná nastavení modelů

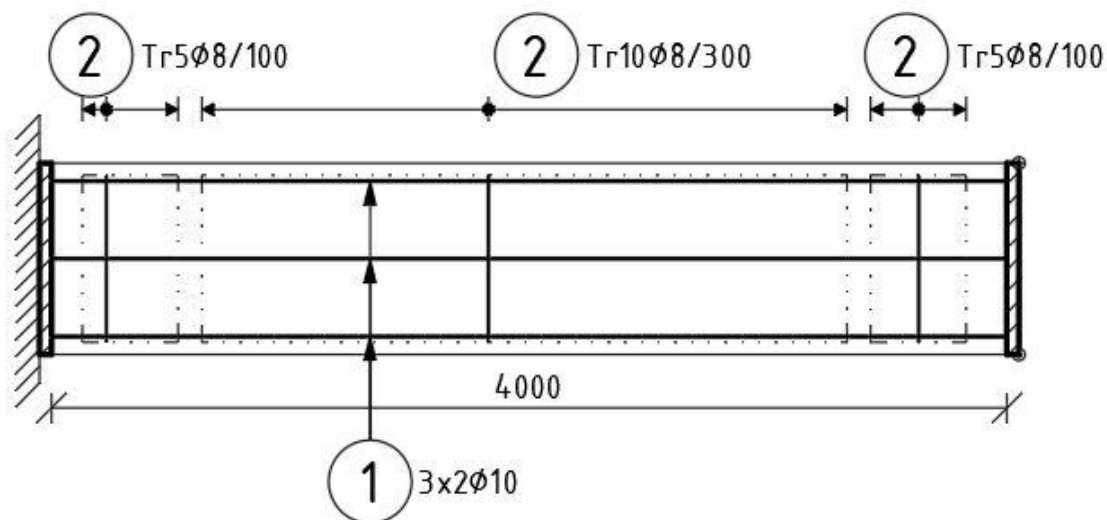
Výpočetní modely jsou zatěžovány deformací předepsanou v definovaných přírůstcích měřenou veličinou je vzniklá reakce – krouticí moment T . Zatížení působí na roznášecí desku, pevně připojenou ke volnému okraji konstrukce (viz obr./27/ a obr./29/). Působící zatížení je dopočítáno pomocí lineární analýzy, zpravidla se jedná o dvojici protiběžných sil působících na rameni, které udávají působící krouticí moment. Průběh působícího momentu je konstantní, tedy nelze předběžně předpovědět v jakém místě na konstrukci dojde k porušení. Aby byla zajištěna statická určitost konstrukce, jsou modelované pruty na konci upevněny kotevní deskou simulující vetknutí.

Zatížení deformací umožňuje řešit modely pomocí Newton-Raphsonovy metody (viz. 2.6.1), a určit i sestupnou část pracovního diagramu.

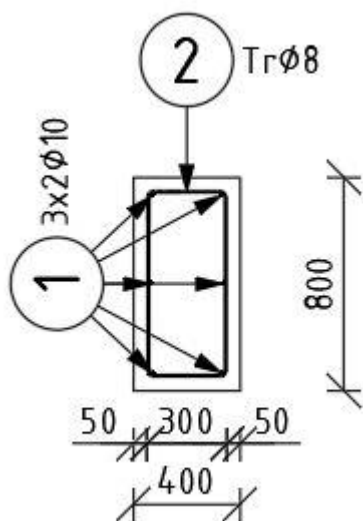
4.5. Citlivostní analýza

Před modelováním samotných prvků zaměřených na zkoumanou problematiku náhlé změny průřezu, byla vypracována citlivostní analýza pro stanovení vlivu vstupních dat na chování modelu a na výpočetní náročnost.

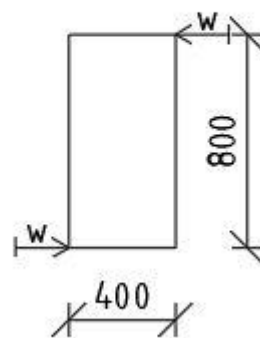
Pro model k citlivostní analýze byla vybrána železobetonová konzola vyrobená z betonu třídy C40/50, vyztužená betonářskou výztuží B500B. Užitá vyztužení splňuje konstrukční zásady.



obr./27/ Schéma konzoly

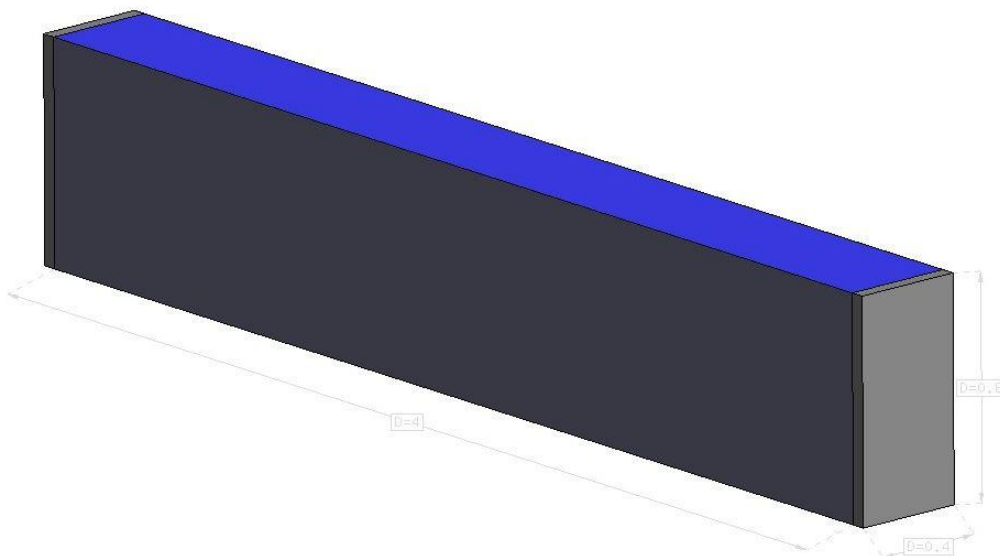


obr./28/ Řez

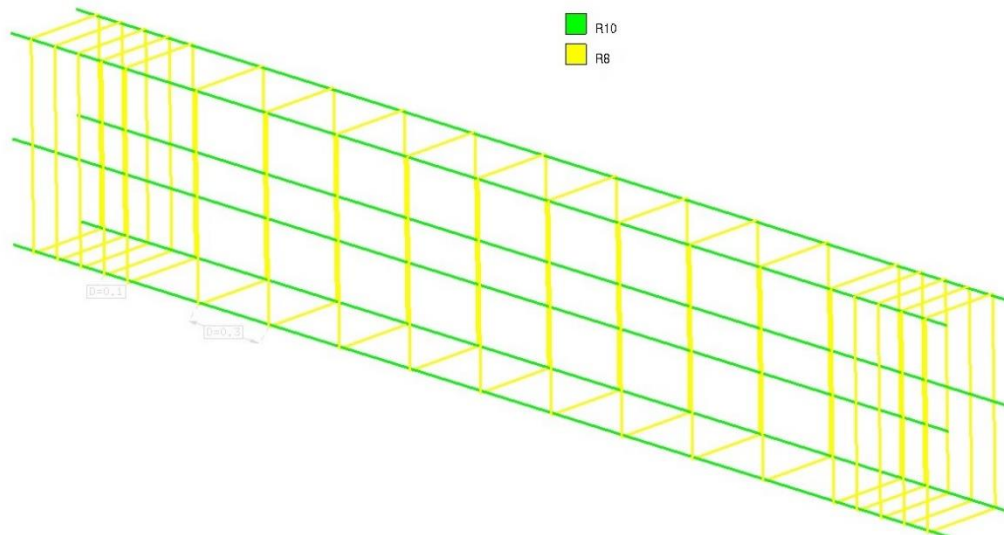


obr./29/ Schéma
zatěžování

První část citlivostní analýzy byla zaměřena na základní vstupy ovlivňující kvalitu výpočtového modelu a získaných dat. Druhá část byla věnována vlivu základních materiálových parametrů týkajících se betonu a jejich vlivu na chování prvku jako celku.



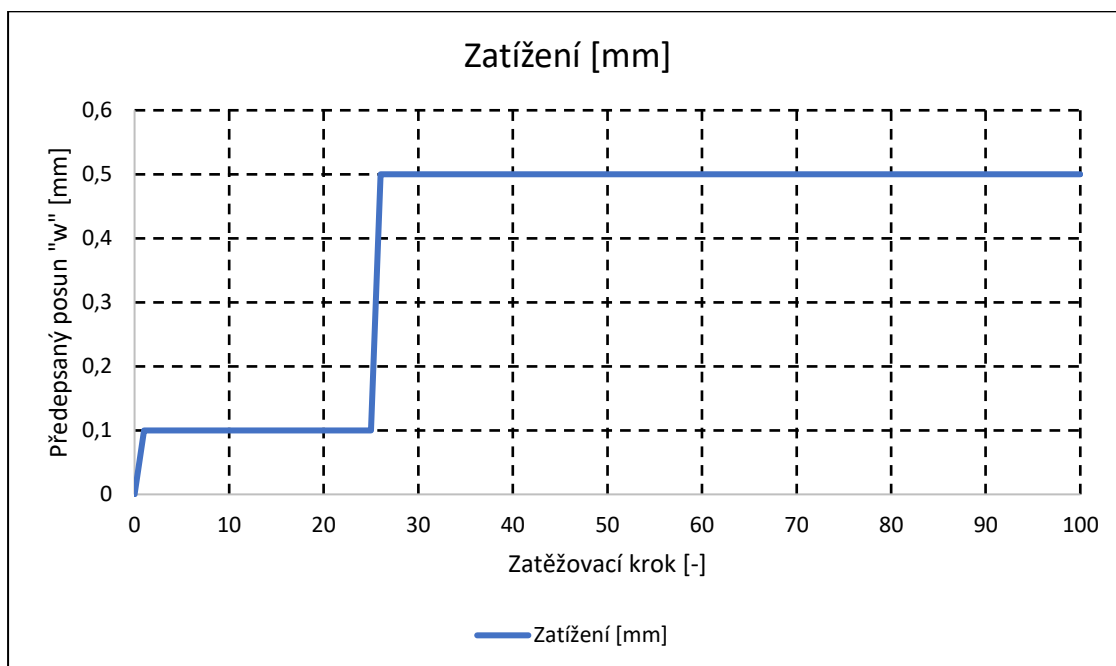
obr./30/ Schéma modelu pro citlivostní analýzu



obr./31/ Schéma vyztužení modelu pro citlivostní analýzu

Konstrukce byla zatěžována předepsaným posunem v rozích roznášecí desky, dle obr./29/. Zatěžování bylo rozděleno do dvou intervalů, první interval k zjištění momentu na vzniku trhliny užívá jemnějšího zatěžování. Po vzniku

trhliny bylo přikročeno k rychlejšímu přitěžování k dosažení meze únosnosti. Schéma zatěžování je zobrazeno na obr./32/.

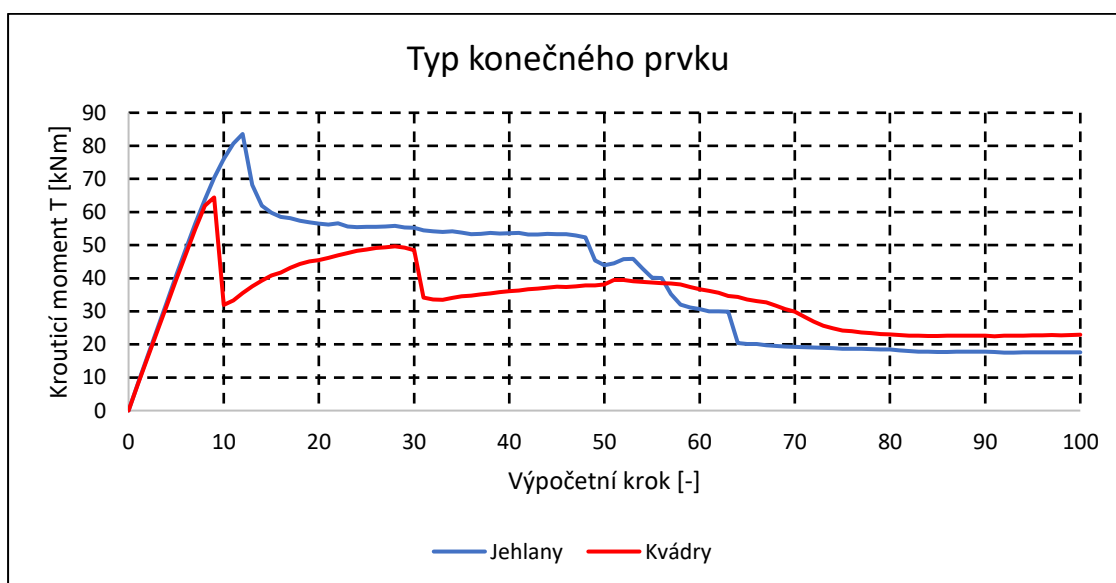


obr./32/ Zatěžování

4.5.1. Typ konečného prvku

První zkoumaná veličina je typ konečného prvku. Pro objemy těles je možné uvažovat dva základní typy:

- Jehlany – tetrahedral mesh
- Kvádry – hexahedral mesh

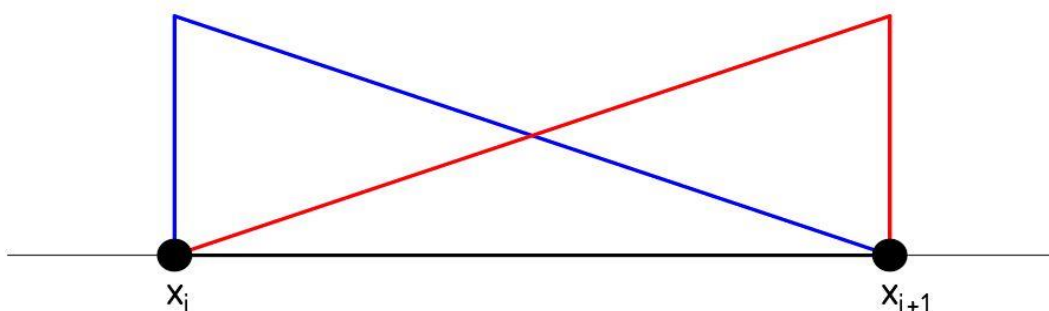


obr./33/ Vliv zvoleného typu konečného prvku

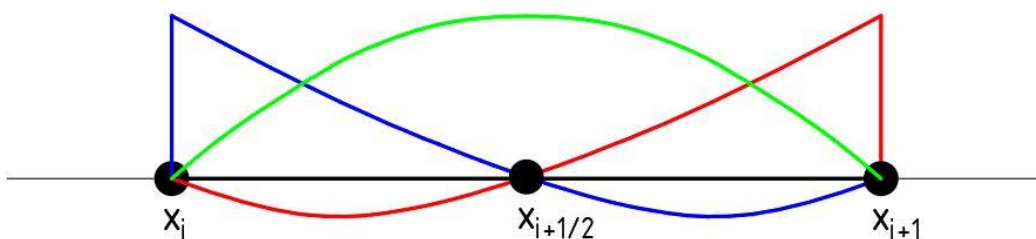
V případě kroucených prvků se ukázala síť konečných prvků tvořených jehlany jako nevhodná. Výsledky, které podává, neodpovídají předpokladům chování kroucených prvků. Je předpokládáno že po vzniku první trhliny dojde k náhlému poklesu zatížení, na hodnotu, která odpovídá zatížení přeneseném výztuží, zatížení by dále mělo růst až do okamžiku kdy je dosažena mezní únosnost výztuže. Pro všechny následné modely je tedy uvažována síť tvořená kvádry.

4.5.2. Bázové funkce

Pro některé úlohy může být vhodnější využívat konečné prvky, která aproximují pole posunů pomocí polynomů vyšších řádů. Tyto polynomy jsou nazývány bázové funkce (více viz kapitola 2.5.1), výpočetní program ATENA Science nabízí pro řešení 3D úloh užití lineárních či kvadratických bázových funkcí.



obr./34/ Ukázka 1D lineárních bázových funkcí na prvku sítě

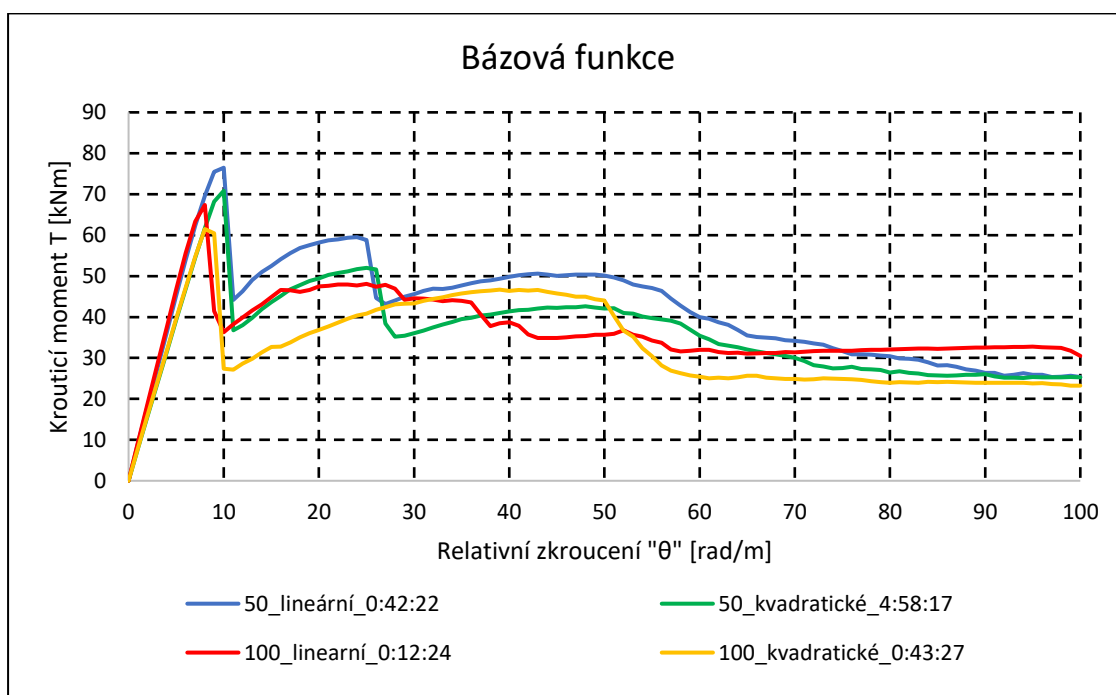


obr./35/ Ukázka 1D kvadratických bázových funkcí na prvku sítě

Zvolená bázová funkce může ovlivnit přesnost získaných výsledků, přímo však ovlivňuje počet neznámých, neboť při stejné velikosti konečných prvků na jeden osmistěn připadá při užití lineárních bázových funkcí 8 uzlů, zatímco pro

kvadratické bázové funkce 20 uzlů (vizualizace uzlů v kapitole 2.5.2)

Modely jsou pojmenovány: velikost konečného prvku_bázová funkce_ čas potřebný k řešení hh:mm:ss. Pro řešení modelů bylo výpočetnímu softwaru umožněno užívat 5 (6-1) výpočetních jader procesoru (Intel Core i7-9750H, architektura Coffee Lake, jedno vláknový takt 4,5 GHz, více vláknový 4 GHz na výpočetní jádro), rovněž byla co nejvíce uvolněna operační paměť o velikosti 15,9 GB.



obr./36/ Vliv bázové funkce

Pracovní diagram naznačuje že lineární bázové funkce způsobují tužší chování celé konstrukce v porovnání s kvadratickou bázovou funkcí. Na pracovním diagramu se to projevuje změnou sklonu v oblasti elastického chování. Tuhost konstrukce do vzniku trhlin není předmětem modelů, pro další modely je použita lineární bázová funkce, která poskytuje výsledky odpovídající předpokladům o chování konstrukce.

4.5.3. Velikost konečného prvku

Jeden z nejdůležitějších vstupů ovlivňující kvalitu výsledků, ale zároveň i dobu výpočtu, je velikost konečných prvků. Při zvyšování počtu konečných prvků, respektive zmenšování jejich velikosti, se řešení obecně více a více blíží „správnému“ analytickému řešení původní okrajové úlohy definované v diferenciálním tvaru viz 2.5. V případě výpočetního softwaru ATENA lze

přijmout horní přípustnou hodnotu, respektive spodní hodnota velikosti konečného prvku. Tou je velikost kameniva. V případě, volby konečného prvku menšího než velikost největšího zrna kameniva, nedocházelo by ke vzniku trhlin dle skutečného chování materiálu (trhliny by nevznikaly na rozhraní zrn).

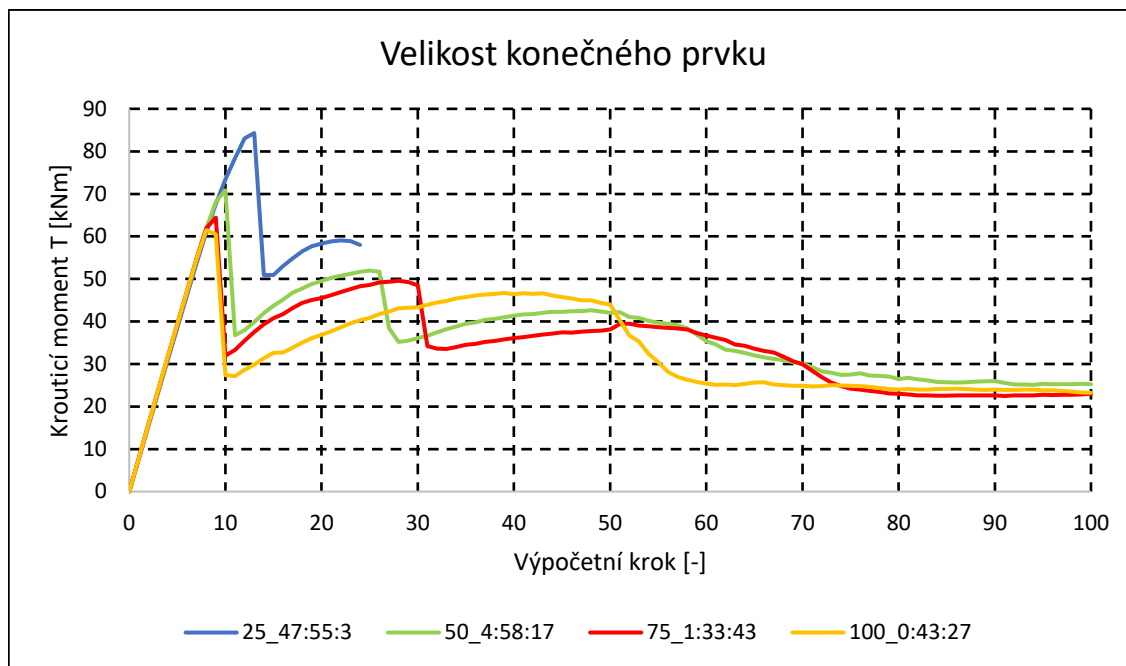
Počet konečných prvků přímo ovlivňuje počet stupňů volnosti konstrukce. Čím vyšší počet, tím rozsáhlejší je matice tuhosti. Z toho plyne vyšší časová i paměťová náročnost.

Na druhou stranu, při snižování počtu konečných prvků (zvětšování jejich velikosti) by docházelo by k nárůstu chyby, vzniklé nedostatečnou aproximací řešení, a výsledky by neodpovídaly skutečnosti. Jak bylo řečeno v kapitole 2.5.2, pro ohýbané prvky je doporučeno použít minimálně 4-6 prvků podél kratší hrany průřezu, proto byl tento předpoklad přijat rovněž jako výchozí předpoklad pro kroucené prvky a ověřen v porovnání s jemnější sítí.

Sledováno bylo jak chování konstrukce, tak čas potřebný k řešení. Modely jsou pojmenovány (velikost konečného prvku_čas potřebný k řešení hh:mm:ss).

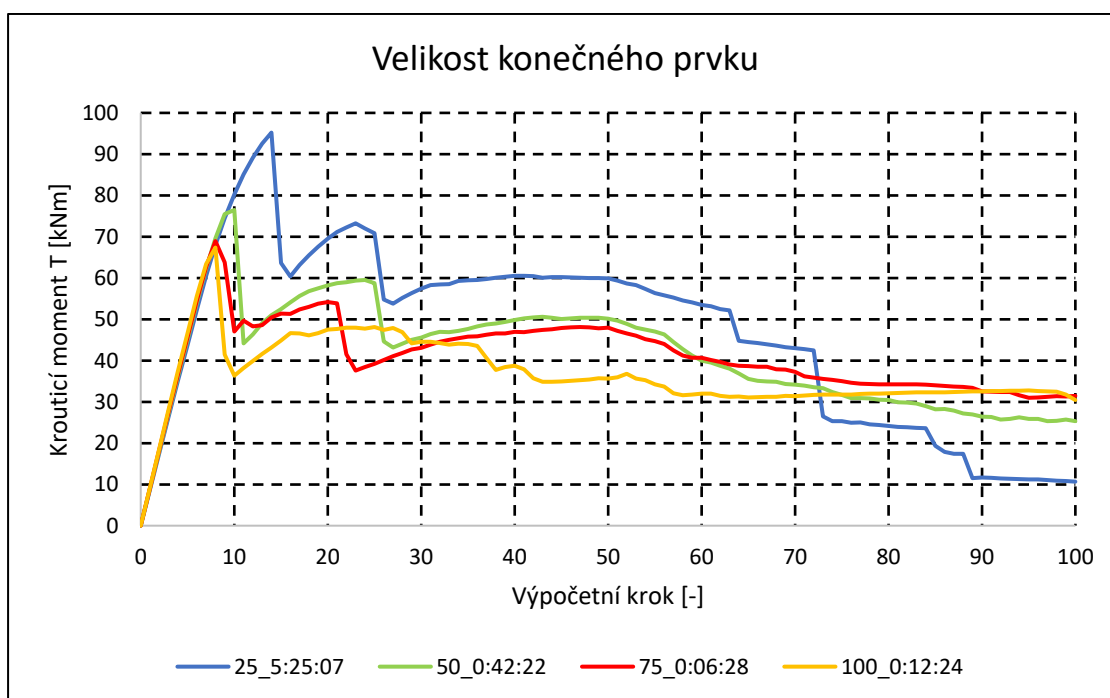
Tabulka 5 – popis modelů – velikost konečných prvků

Model	Počet konečných prvků na straně	
	Kratší (400 mm)	Delší (800 mm)
25 mm	16 ks	32 ks
50 mm	8 ks	16 ks
±75 mm	5 ks (80 mm)	11 ks (72 mm)
100 mm	4 ks	8 ks



obr./37/ Velikost konečných prvků – kvadratické bázové funkce

Model s velikostí prvků 25 mm, nebyl dořešen celý, neboť řešení celé úlohy by trvalo přibližně 11 dní a 220 GB paměti. Bylo vyřešeno 25 zatěžovacích kroků.



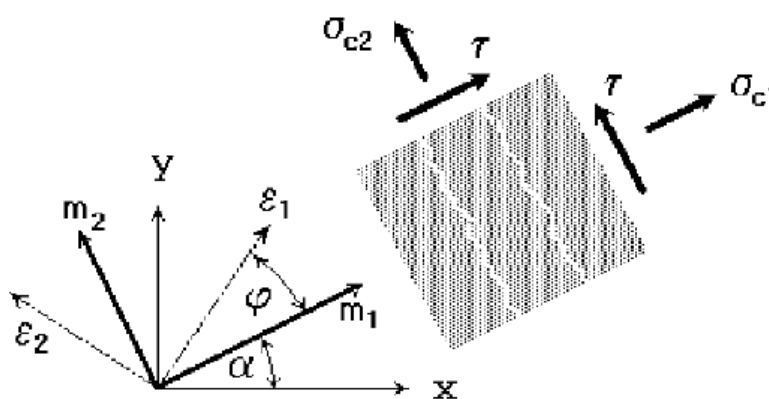
obr./38/ Velikost konečných prvků – lineární bázové funkce

Velikost konečného prvku ovlivňuje krouťicí moment na vzniku trhliny i krouťicí moment na dosažení meze kluzu výztuže, pro další modely je uvažována velikost 50 mm, tj. minimálně 8 prvků po kratší straně průřezu.

4.5.4. Směr šíření trhlin

Výpočetní modely kvazikřehkých materiálů užívající koncept rozetřených trhlin lze rozdělit do dvou skupin. Modely s fixními trhlínami a modely s rotovanými trhlínami. Pro oba modely platí že trhlina vzniká, pokud hlavní napětí překročí tahovou pevnost materiálu. Předpokládá se, že trhlíny jsou rovnoměrně rozloženy v objemu konečného prvku.

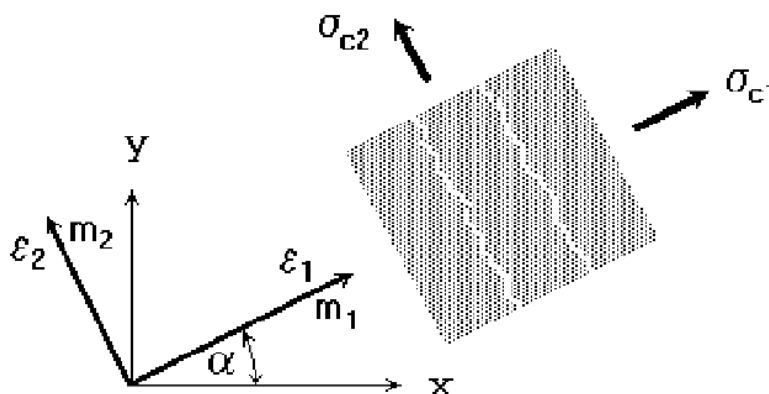
V modelu s fixními trhlínami je směr trhlíny určen pomocí směru normály hlavního tahového napětí v okamžiku vzniku trhlín, při dalším přitěžování je směr trhlíny neměnný.



obr./39/ Materiálový model s fixními trhlínami^[10]

Po vzniku trhlíny se materiál chová ortotropně, méně tuhá materiálová osa m_1 je kolmá na směr trhlíny. Ve všeobecných případech dochází k rotaci dílčích přetvoření ε_1 a ε_2 tak, že již neodpovídají původnímu směru utvořených trhlin, to způsobuje smykové napětí po porušené rovině.

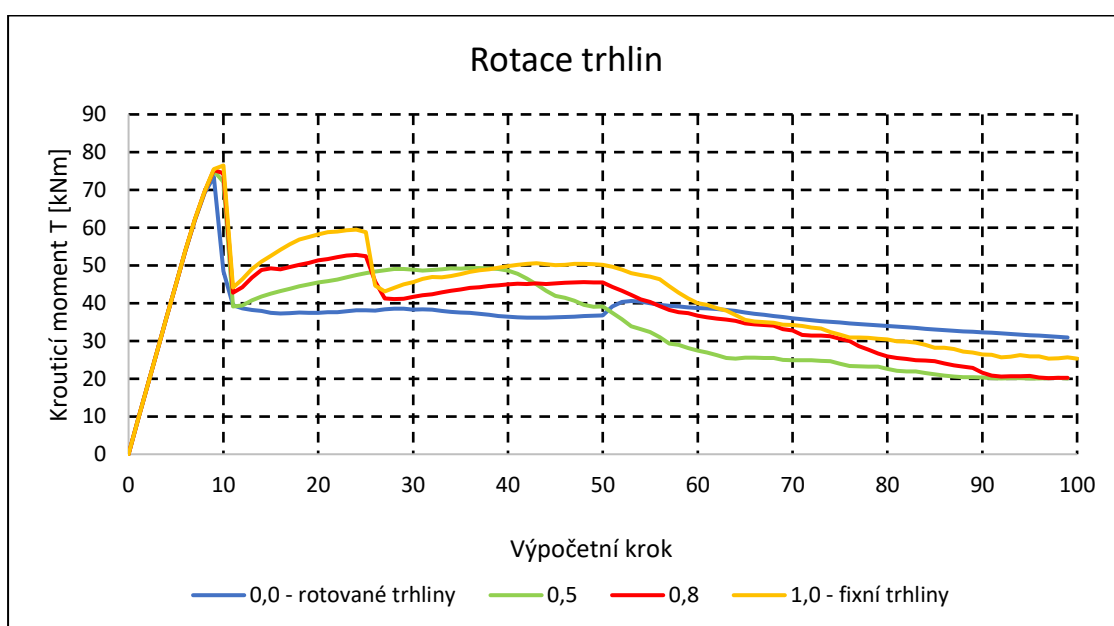
Materiálový model povolující rotaci trhlín po jejich vzniku uvažuje (dle [12]), že směr hlavních napětí souhlasí se směrem hlavních posunů. Nevznikají tedy žádná smyková napětí po rovině trhlíny a stačí popsat pouze dvě normálová napětí.

obr./40/ Materiálový model s rotovanými trhlinami^[10]

Pokud během zatěžování dojde k rotaci os hlavních napětí, dojde i k rotaci trhliny.

Materiálový model betonu v ATENA Science umožňuje předepsat chování trhlín betonu pomocí změny parametru „rotace trhlín“, který nabývá hodnot $\langle 0,1 \rangle$ kde 0 předepisuje plnou rotaci trhlín a 1 předepisuje trhliny fixní. Volba není binární a je možné zadat libovolnou hodnotu z intervalu. Hodnoty mezi 0 a 1 určují úroveň uzamčení směru trhlín. Například hodnota 0,7 fixuje směr trhlín, jakmile se rozevře tak, že zákon změkčení poklesne na 70% počáteční tahové pevnosti.^[10]

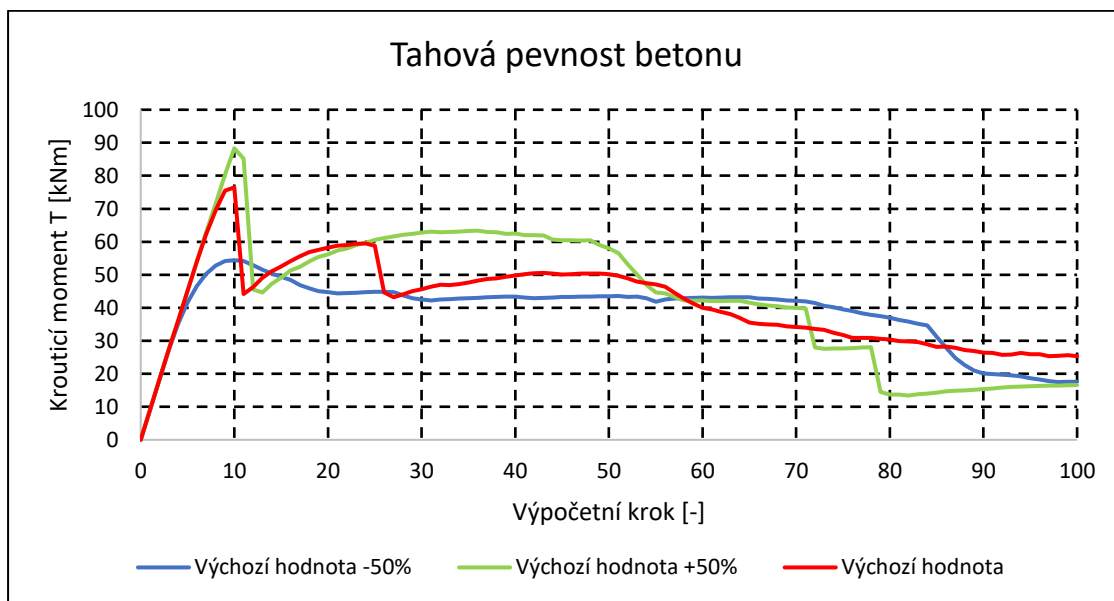
Pro citlivostní analýzu byly uvažovány hodnoty 0,0; 0,5; 0,8; 1,0.



obr./41/ Vliv rotace trhlín

Z obr. obr./41/ je patrné, že rotace trhlin neovlivňuje chování průřezu před vznikem trhliny. Po vzniku trhliny se jako vhodnější varianta ukazuje možnost fixní trhliny, která lépe odpovídá očekávanému chování prvku, kdy se utvoří více makrotrhlin (patrné jako lokální poklesy na pracovním diagramu), než dojde k rozvoji a následném kolapsu prvku v místě jedné z makrotrhlin.

4.5.5. Tahová pevnost betonu



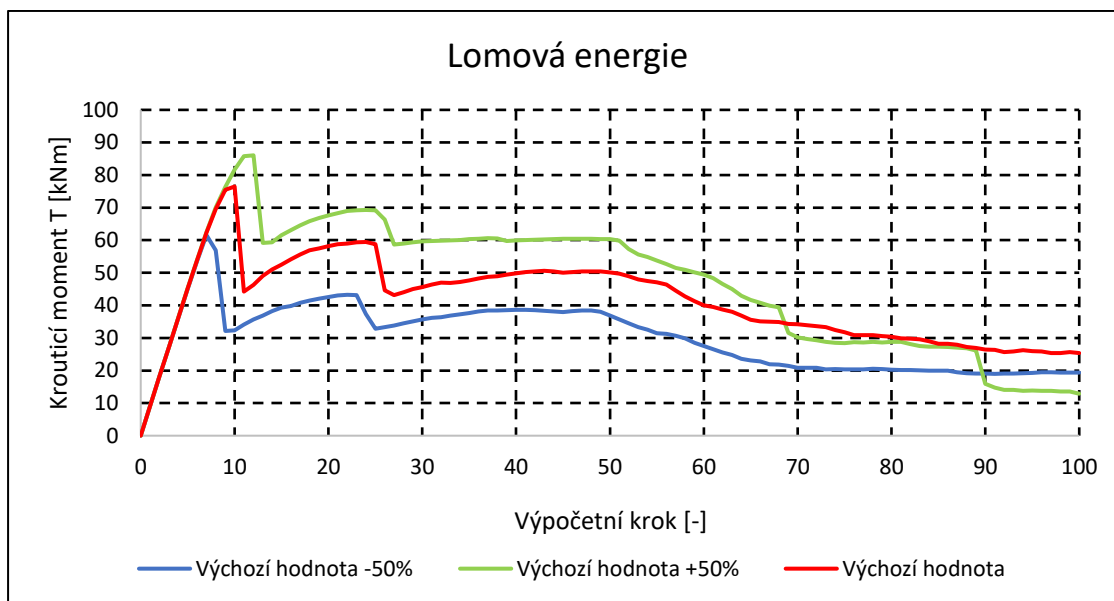
obr./42/ Vliv změny tahové pevnosti betonu

Z pracovního diagramu lze pozorovat, že snížení tahové pevnosti betonu, bez korespondující změny lomové energie se projeví poklesem kroučícího momentu na vzniku trhliny, vznik první trhliny se poté vyznačuje mírnějším poklesem kroučícího momentu. Při zvýšení tahové pevnosti dochází k zvýšení momentu na vzniku trhliny.

Pro další výpočetní modely bude uvažována hodnota odpovídající třídě betonu dle [20].

4.5.6. Lomová energie

Poslední zkoumanou vstupní veličinou byla lomová energie.



obr./43/ Vliv lomové energie

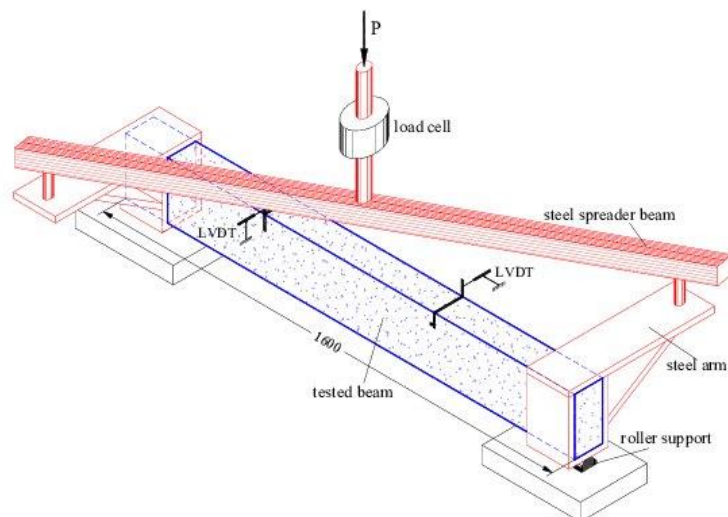
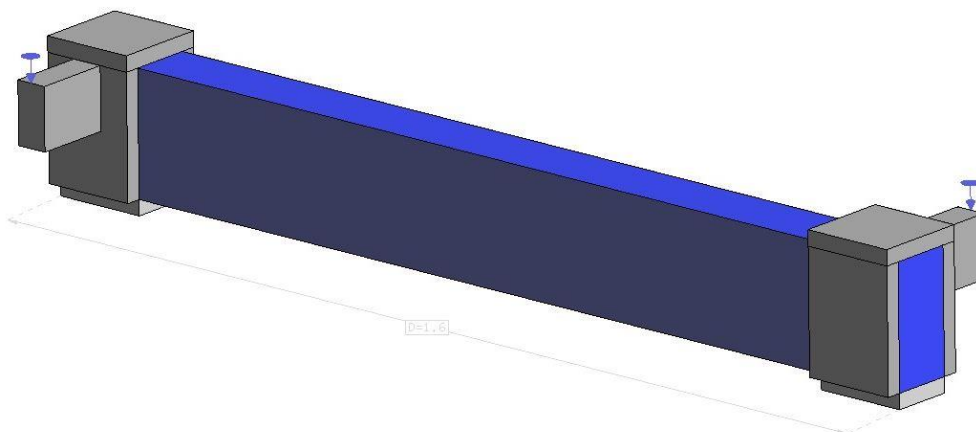
Je patrné že hodnota lomové energie ovlivňuje moment vzniku první makrotrhliny. Chování modelů je poté shodné a liší se posunem na svislé ose, kde rozdíl zůstává stejný s rozdílem momentu na vzniku trhliny, Pro následné modely byla uvažována hodnota lomové energie odpovídající tahové pevnosti betonu dle vztahu (2.27). Jedná se o důležitý parametr ovlivňující i celkovou únosnost prvku.

$$G_f = 25 \cdot f_t'^{ef} \quad \text{VOS 1983} \quad (4.2)$$

4.6. Validací model

Numerický model byl validován na výsledcích experimentů provedených C. E. Chalorisem, publikovaných v roce 2006^[6]. V něm byla sledována závislost mezi relativním zkroucením θ a krouticím momentem T prvků obdélníkového průřezu s různými poměry stran a stanoveny hodnoty únosnosti plného průřezu při vzniku trhlin a únosnosti smykové výztuže

Numerickým modelem byly co nejpřesněji napodobeny podmínky pokusu, včetně způsobu zatěžování. Došlo ke zkrácení vyložení působícího zatížení, a tedy zvýšení tuhosti zatěžovacího mechanismu, čímž byla zajištěna vyšší relevantnost výsledků.

obr./44/ Schéma zatěžovací zkoušky experimentu^[6]

obr./45/ Schéma výpočetního modelu

Experimentální program se skládal z 15 zkušebních trámců, rozšířených o zkušební tělesa pro stanovení materiálových charakteristik. Vstupní materiálové hodnoty odpovídají hodnotám zjištěným ze zkušebních tělesa, jsou proto uvažovány jako střední hodnoty. Pro účely validace byla vymodelována tři experimentální tělesa a to:

- R4-15
- R6-15
- RH6-15

Autor původního článku stanovil pro každý trámec vlastní hodnoty tlakové a tahové pevnosti betonu, zjištěné hodnoty shrnuje Tabulka 6.

Tabulka 6 – materiálové charakteristiky pro validační model, převzaté z experimentálně stanovených hodnot – beton

Skupina	f_c [MPa]	f_{sp} [MPa]	f_t [MPa]
R4	20,96	2,89	2,46
R6	24,59	3,33	2,83
RH6	24,90	3,42	2,91

Kde:

f_c Je pevnost betonu v tlaku;

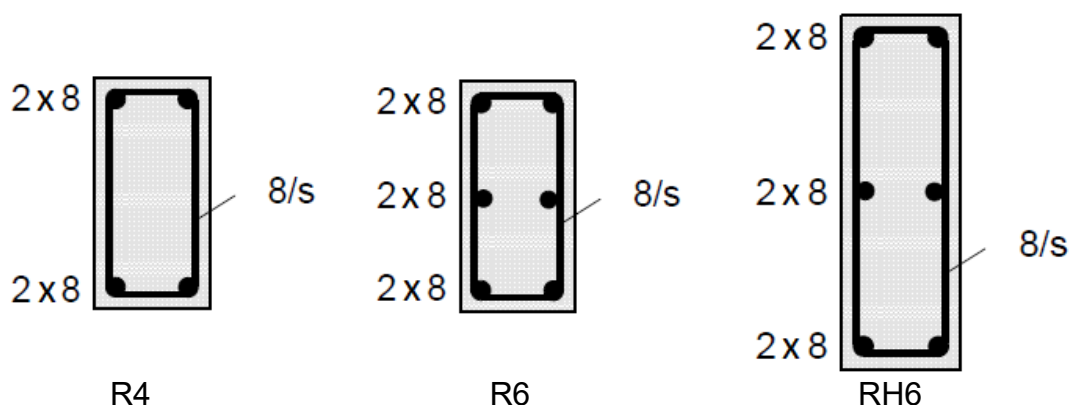
f_{sp} pevnost betonu v tahu, stanovená zkouškou příčným tahem.

f_t uvažovaná pevnost betonu v tahu, stanovená dle (4.3)

Hodnoty tahové pevnosti získané pomocí zkoušky příčným tahem (štěpením) nadhodnocují tahovou pevnost. Hodnoty jsou proto přepočteny na pevnost v prostém tahu dle doporučeného vztahu z literatury na 85 % získané zkouškou^[20].

$$f_t = 0,85f_{sp} \quad (4.3)$$

Zkušební trámce jsou vyztuženy pomocí podélných prutů a uzavřených třmínek rozdílných pevnostních tříd. Jsou použity dvě rozdílné třídy výztuže, pro podélnou výztuž a pro třmínky.



obr./46/ Schéma vyztužení experimentálních trámců, podélná osová vzdálenost byla ve všech případech 150 mm^[6].

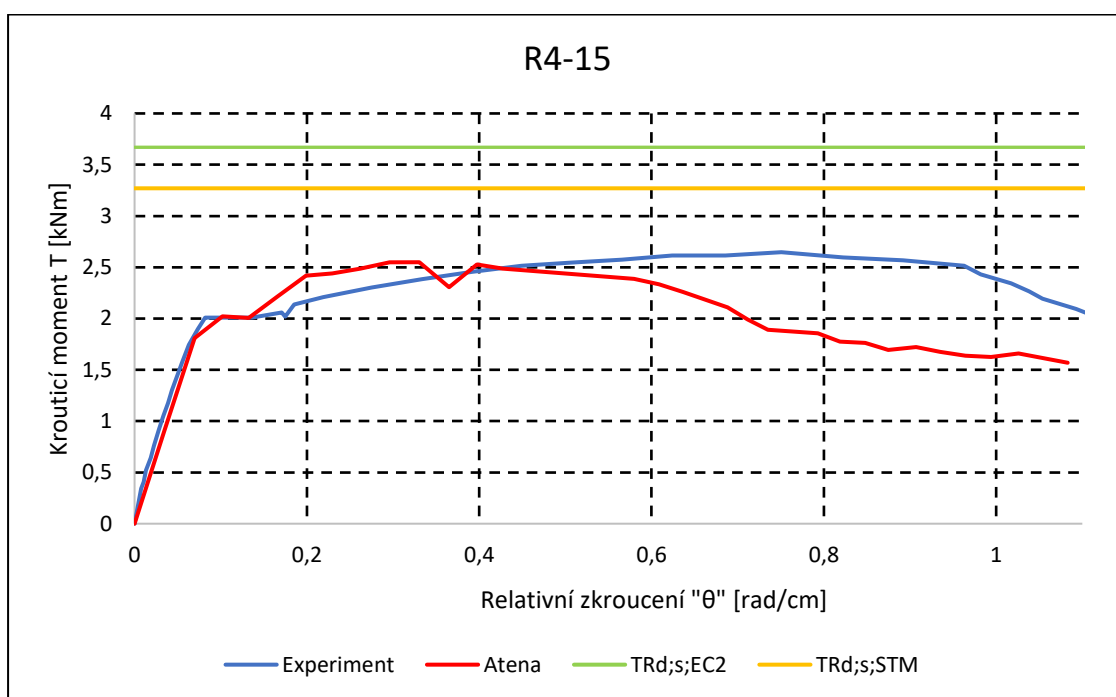
Tabulka 7 – materiálové charakteristiky pro validační model, převzaté z experimentálně stanovených hodnot– výztuž

Výztuž	f_y [MPa]	f_u [MPa]
Podélná	518	559
Třmínky	365	394

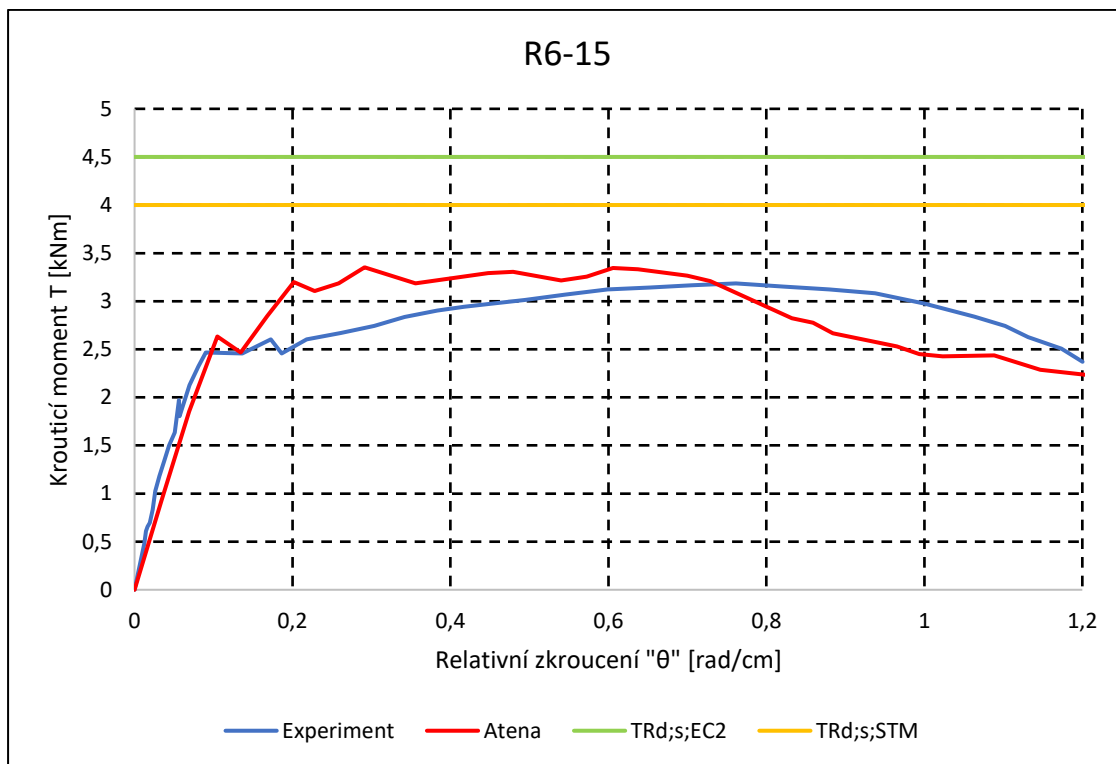
Kde:

f_y je mez kluzu výztuže;

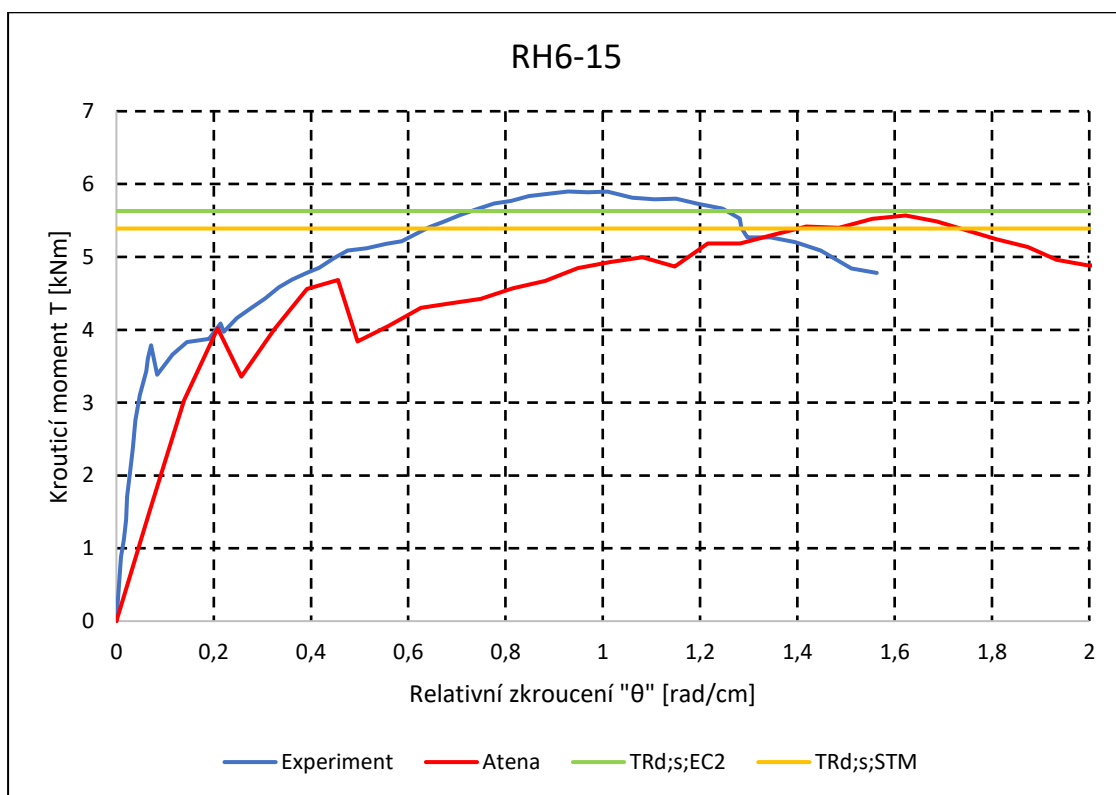
f_u mez pevnosti výztuže.



obr./47/ Srovnání výpočetního modelu vůči experimentu R4-15



obr./48/ Srovnání výpočetního modelu vůči experimentu R6-15



obr./49/ Srovnání výpočetního modelu vůči experimentu RH6-15

Tabulka 8 – validační modely srovnání

Prvek	$T_{Rd;c;EX}$ [kNm]	$T_{Rd;c;AT}$ [kNm]	$T_{Rd;s;EX}$ [kNm]	$T_{Rd;s;AT}$ [kNm]	$T_{Rd;c;EX}/T_{Rd;c;AT}$ [%]	$T_{Rd;s;EX}/T_{Rd;s;AT}$ [%]
R4-15	2,01	2,02	2,64	2,54	100 %	104 %
R6-15	2,60	2,63	3,18	3,35	99 %	95 %
RH6-15	3,55	4,02	5,86	5,57	88 %	105 %

Kde:

$T_{Rd;c;EX}$ je krouticí moment při vzniku trhliny, zjištěn experimentálně;

$T_{Rd;c;AT}$ krouticí moment při vzniku trhliny, zjištěn nelineárním výpočtem.

$T_{Rd;s;EX}$ krouticí moment na mezi únosnosti, zjištěn experimentálně;

$T_{Rd;s;AT}$ krouticí moment na mezi únosnosti, zjištěn nelineárním výpočtem.

U modelů R4-15 a R6-15 byla dosažena shoda s odchylkou do 5% mezi experimentem a nelineárním modelem, což lze považovat za dostatečnou shodu, a odchylka se pohybuje v rámci chyby která může vzniknout přibližným řešením pomocí metody konečných prvků. Pro model RH6-15 byla dosažena shoda s odchylkou 5% při stanovení únosnosti, avšak moment na vzniku trhliny byl nadhodnocen o 12%, je však možné že byla v experimentálním prvku nedokonalost vzniklá při provádění.

Pro experimentální prvky byla stanovena maximální únosnost pomocí dvou návrhových přístupů. Zjištěné hodnoty únosnosti jsou vyneseny v pracovním diagramu pomocí zelené čáry pro únosnost zjištěnou dle ČSN EN 1992-1-1^[18]. Výpočet je podrobně proveden v rámci přílohy 2.

Tabulka 9 – validační model únosnost

Prvek	$T_{Rd;s;EX}$ [kNm]	$T_{Rd;s;EC2}$ [kNm]	$T_{Rd;s;STM}$ [kNm]	$T_{Rd;s;EX}/T_{Rd;s;EC2}$ [%]	$T_{Rd;s;EX}/T_{Rd;s;STM}$ [%]
R4-15	2,64	3,67	3,27	72%	81%
R6-15	3,18	4,50	4,00	71%	80%
RH6-15	5,86	5,63	5,39	104%	109%

Kde:

$T_{Rd;s;EX}$ je krouticí moment na mezi únosnosti, zjištěn experimentálně;

$T_{Rd;s;EC2}$ krouticí moment na mezi únosnosti, stanoven výpočtem dle [18];

$T_{Rd;s;STM}$ krouticí moment na mezi únosnosti, stanoven modelem náhradní příhradové analogie.

Modely ze série R4 a R6 nedosáhly únosnosti předpokládané návrhovými postupy, jedná se o modely obdélníkového průřezu s poměrem stran 2:1. Série RH6 s poměrem stran 3:1 předpokládané únosnosti dosáhla.

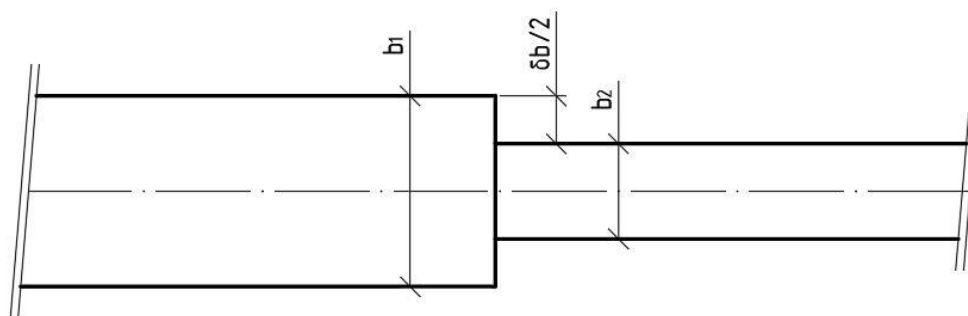


obr./50/ Způsob porušení prvku R6-15 (boční pohled)

4.7. Analýza prvků proměnného čtvercového průřezu

Po ověření parametrů výpočtu pomocí validačního modelu bylo přikročeno k modelování konkrétních prvků proměnného průřezu, tedy k hlavnímu cíli této diplomové práce. Ačkoliv je z analytického hlediska přesněji popsáno kroucení na kruhových průřezích (neboť nedeplanují), je pro numerický model zvolen čtvercový průřez, který odpovídá nejčastěji používanému průřezu betonových konstrukcí. Rovněž je možné zkoumané objemy modelovat pomocí osmistěnových konečných prvků, které se ukázaly na základě citlivostní analýzy jako nejvhodnější.

Ke snížení ostatních působících vlivů způsobených touto změnou mají oba průřezy shodnou těžišťovou osu dle obr./51/.



obr./51/ Schéma prvku v místě náhlé změny průřezu (boční pohled)

Všechny modely mají shodný větší průřez, kde $b_1 = 500 \text{ mm}$, druhý, menší průřez byl postupně zmenšován. Pro každý průřez byl stanoven průřezový modul v kroucení a jeho poměr mezi větším a menším průřezem viz. Tabulka 10. Průřezový modul v kroucení byl stanoven ze vztahu (4.4)^[13].

$$W_t = \frac{\pi^2}{24} b^2 h \frac{1 - \frac{192 b}{\pi^5 h} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{n\pi h}{2b}\right)}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi h}{2b}\right)}\right]} \quad (4.4)$$

Kde:

h je výška obdélníkového průřezu;

b je šířka obdélníkového průřezu.

Dosazením $b = h$ do (4.4), lze vztah zjednodušit a přibližně stanovit hodnotu jako (4.5).

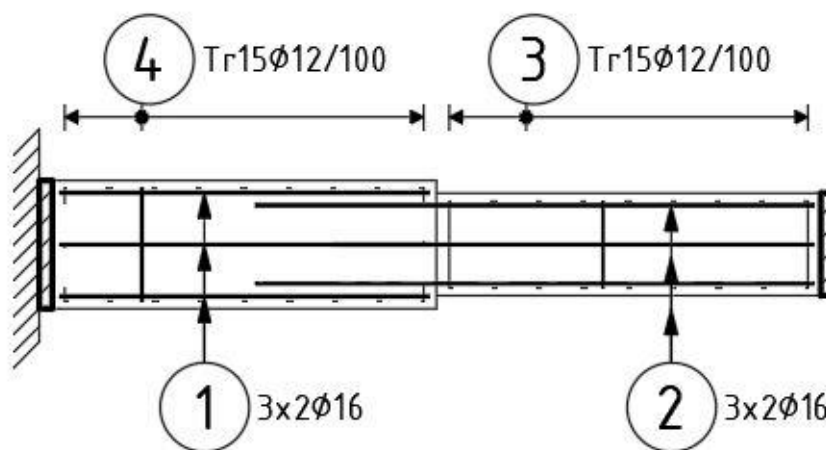
$$W_t \cong 0,2082b^3 \quad (4.5)$$

Tabulka 10 – geometrie zkoumaných modelů

ozn.	b_1	b_2	$\delta b/2$	$W_{t,1}$	$W_{t,2}$	$W_{t,2}/W_{t,1}$
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm ³]	[mm ³]	[%]
1	500	480	10	26 025 000	23 025 254	88,5
2	500	440	30	26 025 000	17 735 309	68,1
3	500	420	40	26 025 000	15 425 122	59,3
4	500	400	50	26 025 000	13 324 800	51,2

Modely jsou vyztuženy pomocí diskrétní betonářské výztuže, třídy B500B. Ve všech průřezech je navrženo shodné vyztužení. Třmínky $\varnothing 12$ po 100 mm,

podélné pruty jsou $\varnothing 16$ mm a jsou v rozích průřezu a v polovině každé strany průřezu. Ověření únosnosti průřezu pro všechny zkoumané prvky je uvedeno v příloze 1.



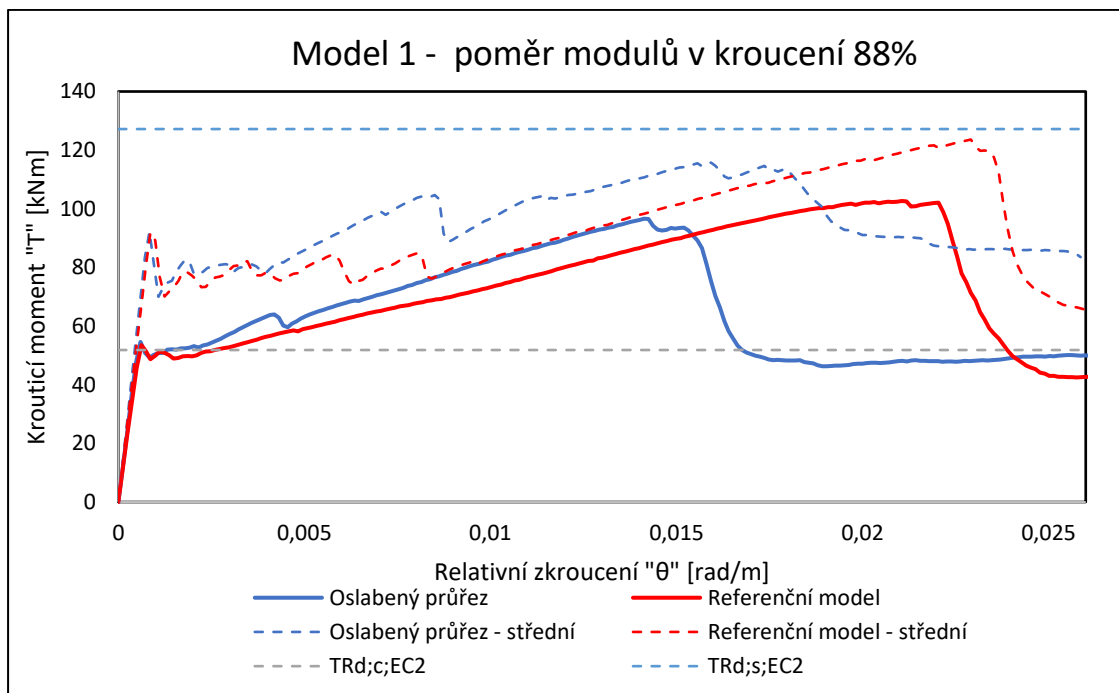
obr./52/ Schéma vyztužení modelů

Aby bylo možné stanovit jaký vliv na chování prvku má náhlá změna geometrie, jsou pro každý uvažovaný poměr modulu v kroucení vytvořeny dva modely. První model představuje skutečný model se změnou průřezu. Druhý, referenční model, slouží ke zjištění, zdali by k porušení nedošlo ve slabší části průřezu nezávisle na změně geometrie. Referenční model tedy odpovídá nosníku s konstantním průřezem shodným s menším průřezem prvního modelu. Oslabený průřez představuje model s náhlou změnou geometrie.

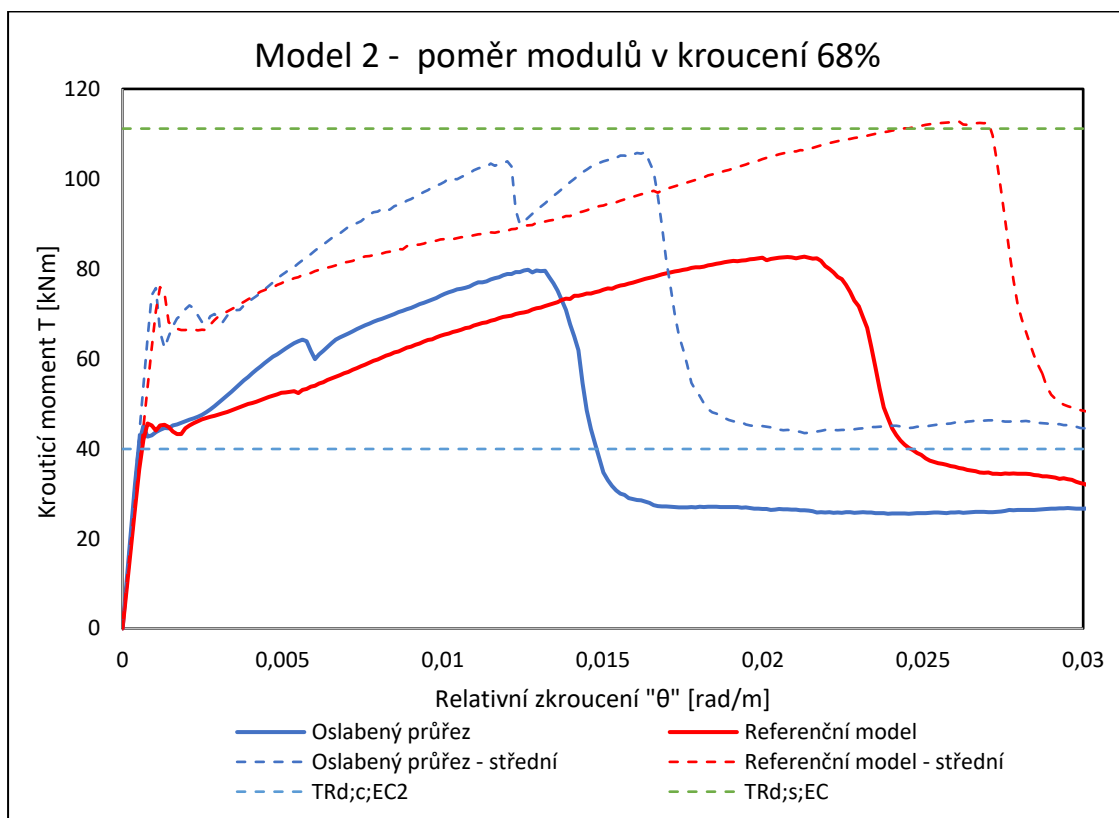
Následují pracovní diagramy zkoumaných prvků. Modely, bez dodatečného označení jsou vyřešeny s návrhovými hodnotami. Modely, u kterých je označení „střední“ jsou analyzovány se středními hodnotami. Dále jsou v pracovních diagramech vyznačeny hodnoty označující

$T_{Rd;c;EC2}$ návrhový krouticí moment na vzniku trhliny, dle Eurokódu 2

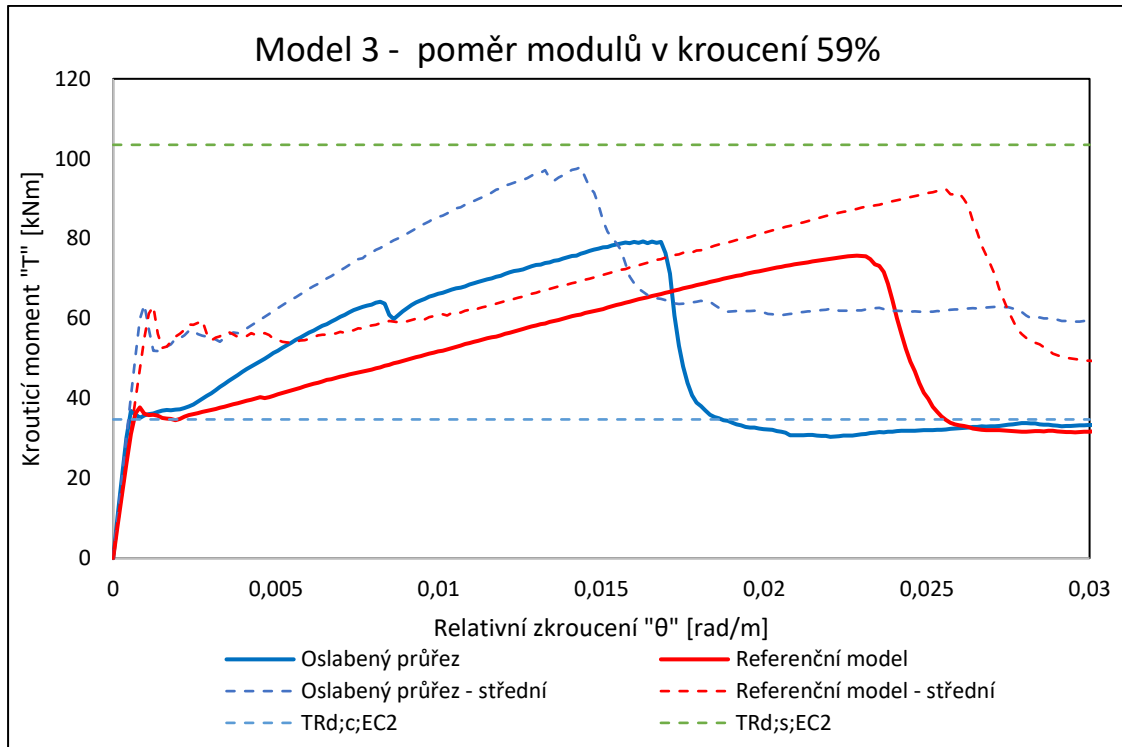
$T_{Rd;s;EC2}$ návrhový krouticí moment na mezi únosnosti, dle Eurokódu 2



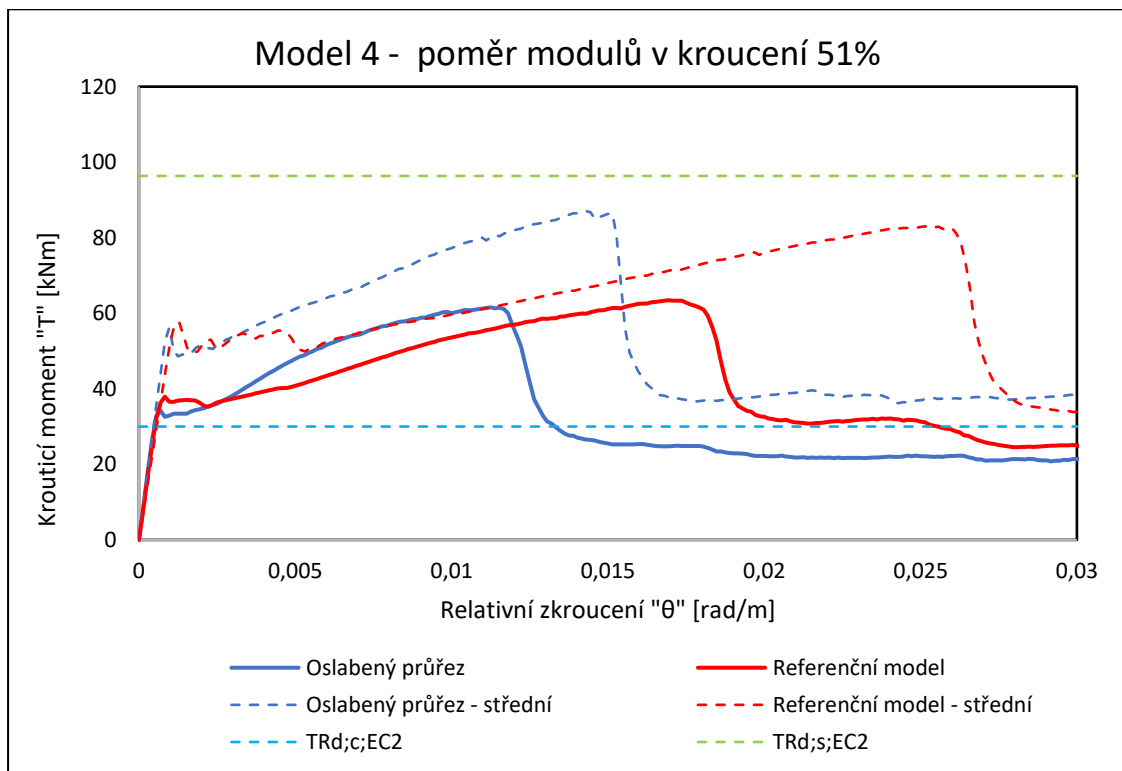
obr./53/ Pracovní diagram modelu 1



obr./54/ Pracovní diagram modelu 2



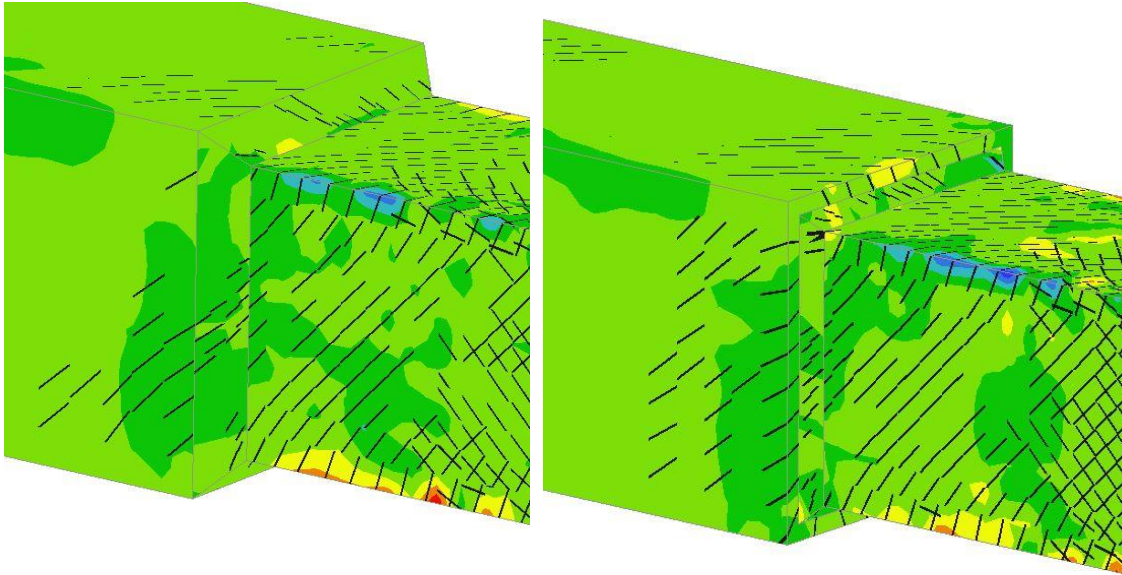
obr./55/ Pracovní diagram modelu 3



obr./56/ Pracovní diagram modelu 4

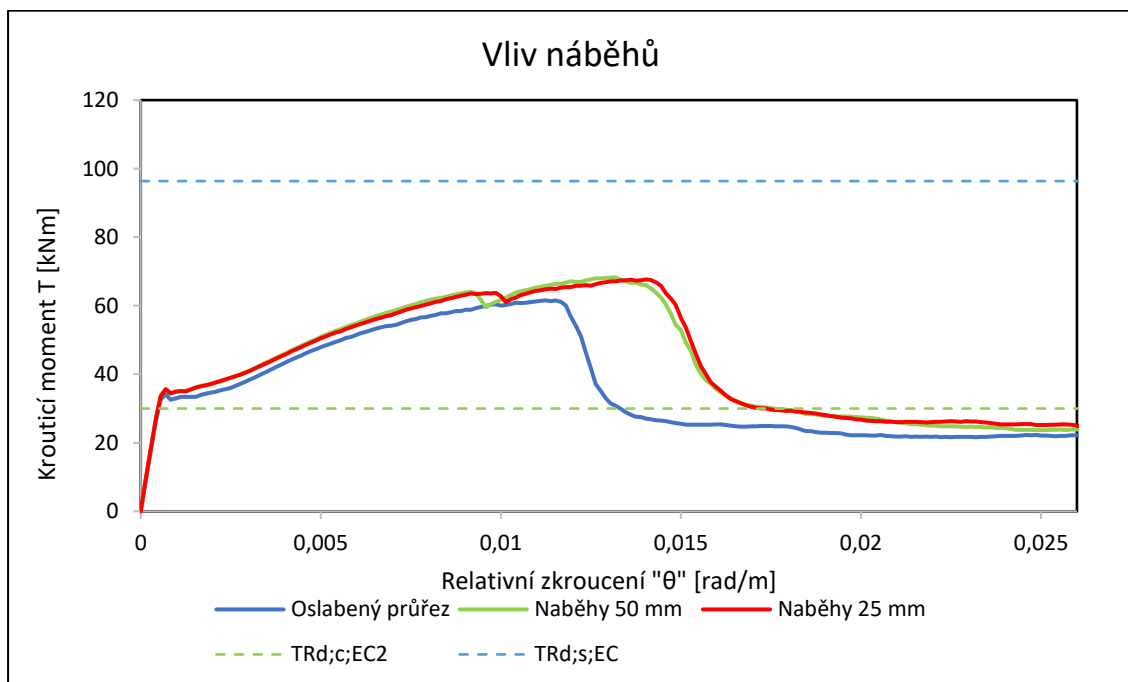
4.7.1. Vliv náběhů

Model 4 s poměrem průřezových modulů v kroucení 51 % byl dále využit pro zkoumání vlivu náběhů. Náběhy jsou modelovány jako klíny se sklonem 45° ve dvou variantách. V první variantě je předpokládán náběh 50/50 mm (na celou výšku změny průřezu), v druhé variantě 25/25 mm (na polovinu změny výšky průřezu).



obr./57/ Náběh 50 mm

obr./58/ Náběh 25 mm



obr./59/ Porovnání vlivu náběhů

Z pracovního diagramu je patrné, že i malý (poloviční) náběh pozitivně ovlivní chování kroucených prvků. Ovlivněna je jak hodnota krouticího momentu na vzniku první makrotrhliny, tak i celková maximální únosnost. Prvek rovněž vykazuje vyšší relativní zkroucení, což je obecně vhodné z hlediska bezpečnosti návrhu a včasného zpozorování poruchy konstrukce v praxi.

Tabulka 11 – porovnání modelů

Náběh	$T_{Rd;c;EC2}$ [kNm]	$T_{Rd;c;AT}$ [kNm]	$T_{Rd;c;AT}/T_{Rd;c;EC2}$ [%]	$T_{Rd;s;EC2}$ [kNm]	$T_{Rd;s;AT}$ [kNm]	$T_{Rd;s;AT}/T_{Rd;s;EC2}$ [%]
bez náběhu	30,00	32,69	109%	96,36	61,56	64%
25 mm		35,64	119%		67,68	70%
50 mm		35,70	119%		68,28	71%

4.7.2. Vyhodnocení modelů

Zjištěné výsledky lze rozdělit do dvou základních kategorií, první kategorie zkoumá krouticí moment v okamžiku vzniku první trhliny a jeho porovnání s referenční a předpokládanými hodnotami. Druhá kategorie zkoumá krouticí moment na mezi kluzu výztuže v porovnání s únosností referenčního modelu a odhadem dle různých návrhových postupů (viz kapitola 3).

Tabulka 12 – Výsledky numerických modelů – vznik trhlín

ozn.	$W_{t,2}/W_{t,1}$ [%]	$T_{Rd;c;EC2}$ [kNm]	$T_{Rd;c;AT}$ [kNm]	$T_{Rd;c;ref}$ [kNm]	$T_{Rd;c;AT}/T_{Rd;c;ref}$ [%]	$T_{Rd;c;AT}/T_{Rd;c;EC2}$ [%]	$T_{Rd;c;ref}/T_{Rd;c;EC2}$ [%]
1	88,5%	51,84	54,55	53,49	102%	105%	103%
2	68,1%	39,93	45,00	45,57	99%	113%	114%
3	59,3%	34,73	36,80	37,74	98%	106%	109%
4	51,2%	30,00	32,69	37,87	86%	109%	126%

Kde:

$T_{Rd;c;ref}$ krouticí moment vzniku trhliny zjištěný pomocí nelineární analýzy, referenční model.

$T_{Rd;c;AT}$ krouticí moment vzniku trhliny zjištěný pomocí nelineární analýzy, model oslabený skokovou změnou geometrie;

$T_{Rd;c;EC2}$ je krouticí moment při vzniku trhliny stanovený dle ČSN EN 1992-1-1;

Tabulka 12 srovnává hodnoty zjištěných předpokládaných hodnot dle norem a zjištěných nelineární analýzou. Z porovnání oslabeného a referenčního

modelu je patrné, že oslabení průřezu má vliv na krouticí moment při vzniku trhliny přibližně při rozdílu 50-60 % v průřezovém modulu v kroucení. Výsledky ukazují, že stanovení momentu při vzniku trhliny pomocí postupu popsáno v [18] relativně přesně odpovídají hodnotám zjištěných nelineární analýzou, při uvážení návrhových hodnot materiálových vlastností.

Tabulka /13/ – Výsledky numerických modelů – dosažení meze kluzu výztuže – pro návrhové hodnoty

ozn.	$W_{t,2}/W_{t,1}$ [%]	$T_{Rd;s;EC2}$ [kNm]	$T_{Rd;s;AT}$ [kNm]	$T_{Rd;s;ref}$ [kNm]	$T_{Rd;s;AT}/T_{Rd;s;ref}$ [%]	$T_{Rd;s;AT}/T_{Rd;s;EC2}$ [%]	$T_{Rd;s;ref}/T_{Rd;s;EC2}$ [%]
1	88,5%	126,67	96,62	102,66	94%	76%	81%
2	68,1%	111,17	79,79	82,69	96%	72%	74%
3	59,3%	103,68	79,30	75,73	105%	76%	73%
4	51,2%	96,36	61,56	63,44	97%	64%	66%

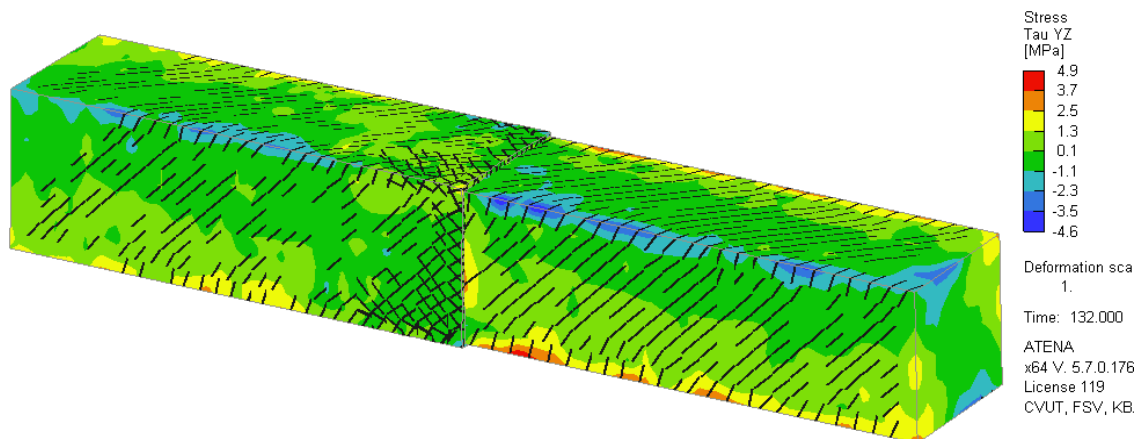
Kde:

$T_{Rd;s;ref}$ krouticí moment na mezi únosnosti zjištěný pomocí nelineární analýzy, referenční model.

$T_{Rd;s;AT}$ krouticí moment na mezi únosnosti zjištěný pomocí nelineární analýzy, model oslabený skokovou změnou geometrie;

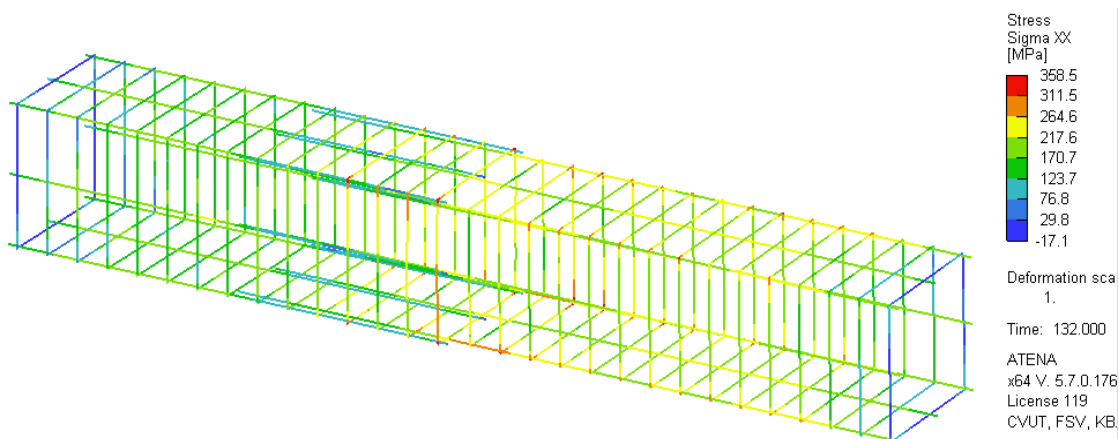
$T_{Rd;s;EC2}$ je moment únosnosti stanovený dle ČSN EN 1992-1-1;

Tabulka /13/ zobrazuje moment zjištěný nelineární analýzou s návrhovými hodnotami a porovnává je s referenčním model a s předpokládanou únosností uvažovanou dle ČSN EN 1992-1-1. Předpokládané únosnosti dle normy nedosáhl žádný ze zkoumaných modelů. Vliv náhlé změny geometrie na únosnost prvků nebyl prokázán, rozdíl únosností je v mezích statistické odchylky, resp. v mezích běžné nepřesnosti numerických modelů.



obr./60/ Porušení modelu 1 – beton

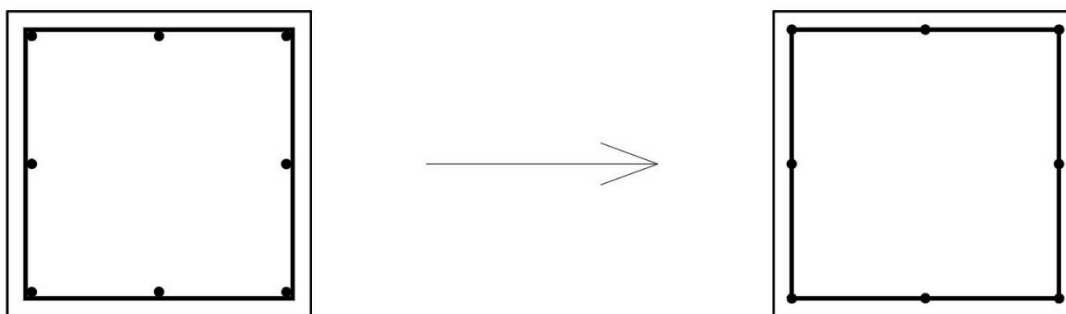
Trhliny v betonu respektují předpokládaný úhel stanovený výpočtem (tj. přibližně 45°). Patrná je zvýšená koncentrace trhlin v oblasti náhlé změny geometrie.



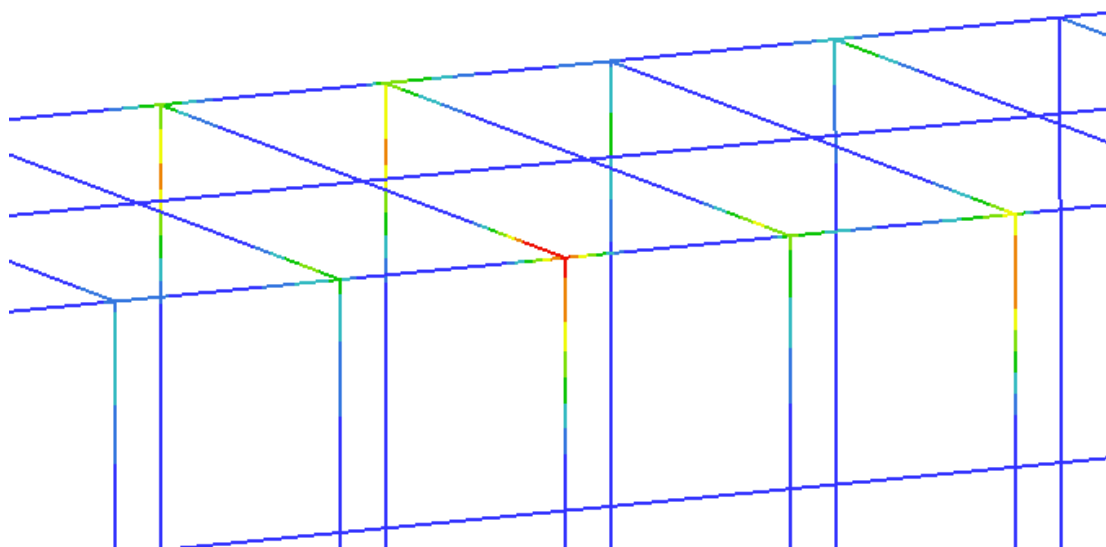
obr./61/ Model 1 – výztuž v průběhu zatěžování

Kolaps konstrukce nastává porušením výztuže. Dochází ke zplastizování rohu třmínku ve větším průřezu.

Okamžik zplastizování třmínku byl příčinou kolapsu všech řešených modelů. Pro ověření tohoto závěru byl vypracován ještě jeden referenční model, kde byla změněna poloha výztuže a metoda modelování podélného prutu vyztužení. Pruty podélné výztuže nejsou ve své skutečné poloze, ale jsou spojovány v rozích třmínků.



obr./62/ Změna vyztužení



obr./63/ Vykreslení plastického protažení na upraveném referenčním modelu

K porušení u upraveného modelu došlo rovněž v rozích třmíneků, kde po zplastizování výztuže dochází ke kolapsu. Únosnost prvku jako celku zůstává nezměněna.

Tento mechanismus poškození neodpovídá teorii příhradové analogie, která předpokládá zplastizování podélných a příčných prutů zároveň. Tato skutečnost je patrně hlavním důvodem nadhodnocení předpokládané únosnosti dle návrhových postupů. Podobné výsledky byly pozorovány pro experimentální modely, viz kapitola 4.6.

4.7.3. Globální součinitel bezpečnosti

Předchozí analýza ukazuje že modely nedosahují únosnosti, která je u nich předpokládána pomocí výpočtu dle ČSN EN 1992-1-1. Dle *fib* Model Code 2010 lze přistoupit k ověření pomocí nelineární analýzy, která musí splňovat požadavek (4.6).

$$F_d < R_d \quad (4.6)$$

Kde:

F_d je návrhové zatížení konstrukce*;

R_d návrhová únosnost konstrukce.

*zatížením je myšleno silové i nesilové působení.

Při ověření je vycházeno z ČSN EN 1992-2-1, kde je koncept globálního ověření bezpečnosti založen na nelineární analýze. Návrhovou únosnost konstrukce lze stanovit pomocí vztahu (4.7).

$$R_d = \frac{R_f}{\gamma_R}, \quad R_f = R(f_{ym}, f_{cf} \dots) \quad (4.7)$$

Kde:

R_d je návrhový odpor konstrukce;

R_f únosnost konstrukce;

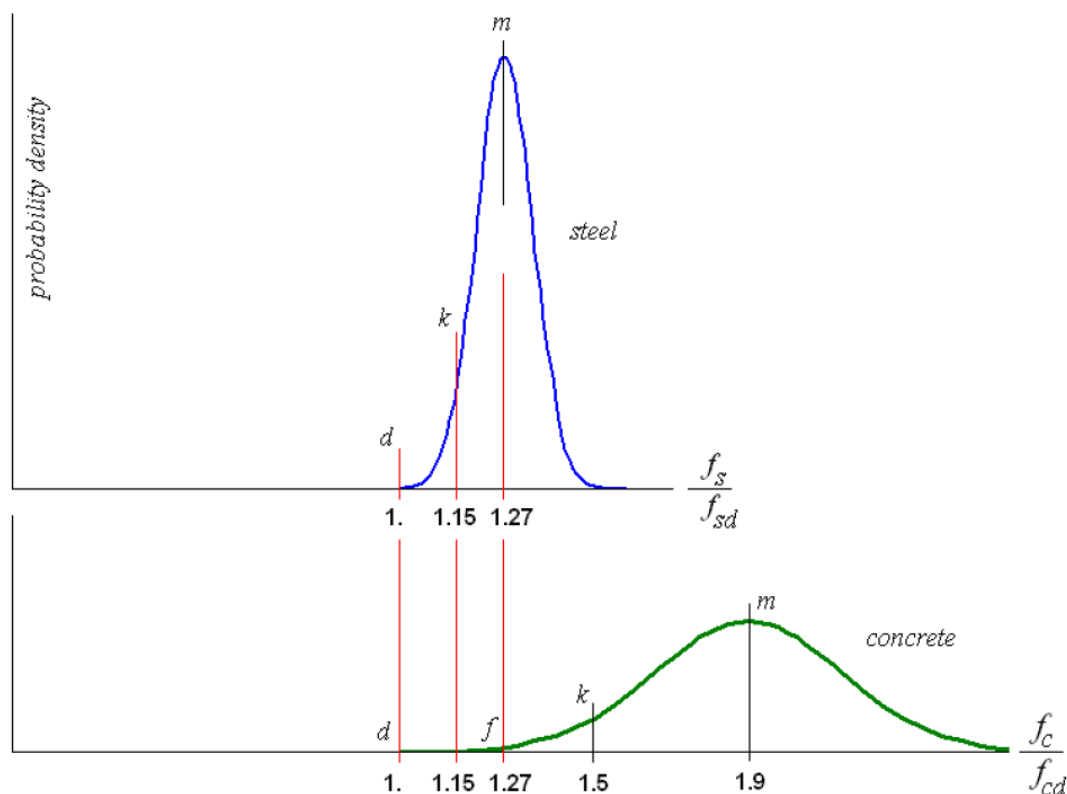
γ_f součinitel globálního odporu konstrukce;

f_{ym} střední hodnota meze kluzu výztuže, dle (4.8);

$$f_{ym} = 1,1f_{yk} \quad (4.8)$$

f_{cf} návrhová pevnost betonu.

Hodnota R_f ale nepředstavuje střední hodnotu pevnosti betonu. Pevnost betonu je snižena z důvodu většího rozptylu materiálových vlastností. Výhodou výše zmíněné metody je umožnění obou modelů porušení, oceli i betonu bez předchozí znalosti modelu porušení (dosažení meze kluzu výztuže, drcení tlačných diagonál).

obr./64/ Hustota pravděpodobnosti materiálových parametrů^[15]

Kde:

- d jsou návrhové hodnoty;
- k charakteristické hodnoty;
- m střední hodnoty;
- f hodnota redukovávané pevnosti betonu.

Na obr./64/ je zobrazeno předpokládané rozložení zjištěných materiálových parametrů, kde pro stejnou spolehlivost, $\gamma_R = 1,27$, které při srovnání hustot pravděpodobnosti odpovídá střední hodnota dosažená v oceli.

$$f_{cf} = \gamma_R f_{cd} = \gamma_s 1,1 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cong 0,85 f_{ck} \quad (4.9)$$

Uvažovaná hodnota pevnosti betonu tedy odpovídá hodnotě 85% charakteristické hodnoty pevnosti betonu.

Pro stanovení navrhovaného zatížení zkoumaných modelů F_d se vychází z návrhové únosnosti průřezu stanovené pomocí ČSN EN 1992-1-1, tedy $T_{RD,S;EC2}$. Nejvíce nepříznivý stavem je uvažování veškerého zatížení jako stálého

zatížení. Poté lze stanovit (maximální možnou) charakteristickou hodnotu zatížení dle (4.10).

$$F_k = \frac{T_{Rd;s;EC2}}{\gamma_G} \quad (4.10)$$

Kde:

F_k je charakteristická hodnota zatížení;

$T_{Rd;s;EC2}$ návrhová hodnota zatížení dle^[18];

γ_G součinitel pro stálé zatížení v nepříznivém stavu; $\gamma_G = 1,35$.

Z charakteristické hodnoty pomocí součinitele γ_f je dopočteno návrhové zatížení pro globální součinitel bezpečnosti dle (4.11).

$$F_d = \gamma_f F_k \quad (4.11)$$

Tabulka 14 – Srovnání únosnosti při užití globálního součinitele bezpečnosti

ozn.	$W_{t,2}/W_{t,1}$ [%]	F_d [kNm]	$R_{d,osl}$ [kNm]	$R_{d,ref}$ [kNm]	$R_{d,osl}/F_d$ [%]	$R_{d,ref}/F_d$ [%]
1	88,5%	119,16	112,7	121,2	95%	102%
2	68,1%	104,58	90,2	95,3	86%	91%
3	59,3%	97,54	93,1	83,6	95%	86%
4	51,2%	90,65	69,0	65,8	76%	73%

Výpočet s respektující princip globálního součinitele bezpečnosti dle Model Code 2010 prokázal, že alespoň jeden model (č.1) dosáhl požadované únosnosti ke splnění požadovaného stupně bezpečnosti konstrukce. Při zmenšování průřezu se výpočet znovu vzdaluje od požadované únosnosti.

5. ZÁVĚR

5.1. Zhodnocení splnění cílů diplomové práce

Teorie kroucení betonových prvků

V teoretické části práce je popsáno chování kroucených prvků. Je popsána napjatost průřezu před vznikem trhlin dle teorie pružnosti, a následně teorie plasticity s vybranými kritérii vhodnými pro popis materiálů, týkajících se železobetonových konstrukcí. V další kapitole je stručně popsána lomová mechanika a navazující podkapitola popisuje mechaniku poškození materiálu. V neposlední řadě byla popsána metoda konečných prvků, a numerické řešiče používané pro řešení soustav lineárních soustav a nelineárních problémů.

Současný stav poznání

V další části jsou popsány nejčastěji používané návrhové postupy pro výpočet vyztužení kroucených průřezů.

Numerická analýza kroucených prvků proměnného průřezu

Poslední část práce se týká výpočetních modelů. Na úvod jsou popsány použité materiálové modely a jejich prototypy k popisu chování, další část se zabývá citlivostní analýzou ke zhodnocení vstupních parametrů výpočtu. Zjištěné poznatky jsou validovány pomocí skutečně provedeného experimentu, převzatého ze zahraniční literatury. Poslední část práce se zabývá řešením samotné problematiky prutů s náhlou změnou geometrie a jejich porovnáním s předpoklady. Hlavní dosažené poznatky jsou uvedeny níže.

Na základě výše popsaného autor práce považuje vytyčené cíle za splněné.

5.2. Souhrn nejdůležitějších poznatků

Krouticí moment při vzniku trhlin je ovlivněn skokovou změnou geometrie, pokud je průřez oslaben o více než 40 % z hlediska průřezového modulu ve volném kroucení W_t . Pro zkoumané prvky nebyl zjištěn vliv na únosnost průřezu na mezi kluzu vyztuže. Kritický průřez pro návrh vyztužení byl vždy slabší průřez.

Náběhy v místě změny průřezu mají pozitivní vliv na celkové chování kroucených prvků s náhlou změnou geometrie. Ovlivněn je moment na vzniku první makrotrhliny, kde u zkoušených modelů došlo k nárůstu o 10%. Pozitivně byl ovlivněn i mezní moment únosnosti který dosáhl vyšších hodnot o 5%, rovněž

došlo k dosažení vyšší mezní deformace.

Při vyhodnocování výsledků bylo zjištěno, že pro čtvercové průřezy byla únosnost při dosažení meze kluzu výztuže stanovená numerickými modely nižší než předpokládaná únosnost dle Eurokódu 2. Únosnost průřezu byla přibližně o 25 % nižší než předpoklad normy. Při podrobné analýze přetváření numerických modelů bylo pozorováno přetržení třmínků bez současného zplastizování podélné výztuže. Tím nejsou splněny předpoklady analytického modelu náhradní příhradoviny, ze kterého vychází normový postup Eurokódu 2. Porovnáním experimentálně zjištěné únosnosti s předpokládanou únosností u validačních modelů byl zjištěn stejný závěr u obdélníkového průřezu s poměrem stran 2:1.

Tento závěr považuje autor za závažný, neboť předběžně ukazuje na výrazné nadhodnocení únosnosti kroucených prvků při výpočtu dle normových postupů. Vzhledem k omezenému počtu modelů ale bude nezbytné tato předběžná zjištění dále podrobně zkoumat a výsledky ověřit.

5.3. Náměty na rozšíření práce

Z poznatků získaných při vypracovávání této práce vyplývá, že některá témata je vhodné dále podrobně zkoumat. Patří mezi ně například:

- Rozšíření zde prezentovaných výpočetních modelů o další typy průřezů.
- Analýza předpjatých prvků se změnou průřezu zatížených kroucením.
- Popis vlivu vázaného kroucení.
- Popis chování při interakci více vnitřních sil (M, N, V).
- Vlastní experimentální program k potvrzení výše uvedených výsledků numerických modelů.

Zásadním směrem dalšího zkoumání by mělo být rovněž ověření naplnění předpokladů náhradní příhradové analogie při namáhání prvků kroucením a s tím související přesnost a spolehlivost návrhových postupů, které z tohoto předpokladu v současné době vychází.

6. ZDROJE

Publikace:

- [1] JIRÁSEK M., ZEMAN J.; Přetváření a porušování materiálů – Dotvarování, plasticita, lom a poškození; 2. vydání.; Praha: Česká technika, 2012; ISBN 978-80-01-05064-4
- [2] JIRÁSEK M., BAŽANT Z. P.; Inelastic analysis of structures; New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2001; ISBN 978-0-471-98716-6
- [3] MICHALEC J. a kolektiv; Pružnost a pevnost I.; 1. dotisk 3. vydání; Praha: Česká technika, 2010; ISBN 978-80-01-04224-3
- [4] KREJSAM., LAUSOVÁ L., MICHALCOVÁ V.; Pružnost a plasticita; verze 1.1; VŠB-TU Ostrava, 2011
- [5] ŠMÍŘÁK S.; Pružnost a plasticita I. Učební text pro distanční studium. VUT v Brně, akademické nakladatelství CERM; Brno, 2006; ISBN: 80-7204-468-0
- [6] CHALIORIS C. E.; Behaviour model and experimental study for the torsion of reinforced concrete members; WIT Transactions on the Built Environment conference, 2006; DOI: 10.2495/HPSM06045
- [7] HSU T.T.C., Torsion of Structural Concrete—Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members. Torsion of Structural Concrete. ACI Special Publication SP-18; 1968, Farmington Hills, Mich
- [8] LEONHARDT F, SCHELLING G. Torsionsversuche an Stahlbetonbalken. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb) 1974, Heft 239, W. Ernst u. Sons, Berlin
- [9] ČERVENKA J., PAPANIKOLAOU V.; Three dimensional combined fracture–plastic material model for concrete; International Journal of Plasticity [online]; 2008, 24(12), s. 2192-2220. DOI:10.1016/j.ijplas.2008.01.004. ISSN 07496419.
Dostupné z: linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0749641908000259
- [10] ČERVENKA V., JENDELE L., ČERVENKA J.; ATENA Program Documentation Part 1: Theory; Prague: Červenka Consulting s.r.o.; 2018
Dostupné z: cervenka.cz/assets/files/atenapdf/ATENA_Theory.pdf
- [11] UDAY N. P.: Experimental Determination of Fracture Energy by RILEM Method; The IJES; 2017; DOI: 10.9790/1813-060301106115
- [12] VECCHIO F. J., COLINS M.P.; The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear; Journal of American Concrete Institute 1986; 83-22 p. 219-231.
- [13] TIMOSHENKO S. P., GOODIER J. N.; Theory of Elasticity; 2nd edition; New York: McGraw-Hill, 1951; Engineering societies monographs
- [14] JIRÁSEK M.; Pružnost a pevnost, 9. přednáška [elektronická přednáška]; Fakulta stavební ČVUT v Praze, 1. prosince 2014

- [15] ČERVENKA V.; Global safety formats in fib Model Code 2010 for desing concrete structures; Proceedings of the 11th International Probabilistic Workshop; Brno 2013
- [16] LAMPERT P., THÜRLIMANN B.; Ultimate Strength and Design of Reinforced Concrete Beams in Torsion and Bending; Basel: Birkahaúser, 1972; ISBN 3-7643-0631-9
- [17] BROŽOVSKÝ, J.; MATERNA A.; Metoda konečných prvků ve stavební mechanice; FS VŠB-TU; Ostrava, červenec 2012

Normy:

- [18] ČSN EN 1992-1-1 ed. 2; Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby; Praha: ÚNMZ, červenec 2011
- [19] ACI 318-11; Structural concrete building code and commentary; American concrete institute (ACI); Květen 2011; ISBN 978-0-87031-744-6
- [20] ČSN EN 12390-6; Zkoušení ztvrdlého betonu – část 6: Pevnost v příčném tahu zkušebních těles; Praha: ÚNMZ, červen 2010
- [21] *fib* Model Code for Conrete Structures 2010; Ernst and Sohn; International Federation for Structural Concrete (*fib*) 2013.

Ostatní:

- [22] JENDELE L.; ATENA solvers; ATENA Advanced User Seminar, : Červenka Consulting s.r.o.; [elektronická přednáška]
- [23] KABELE P.; Metoda konečných prvků 3 - nelineární úlohy; 132YNAK; ČVUT 2009; [elektronická přednáška]
- [24] KRUIS J.; Soustavy lineárních a nelineárních rovnic a metody jejich řešení; 132YNMI; ČVUT 2012; [elektronická přednáška]
- [25] PARDISO 7.2 Solver Project (verze 12/2020), popis dle <https://pardiso-project.org/>

Použitý software:

- [A] ATENA Science 5.7.0, Cervenka Consulting (studentská verze, poskytnutá K133)
- [B] Microsoft Office
- [C] PTC MathCad Prime 5.0.0.0 (studentská verze)