

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA BIOMEDICÍNSKÉHO INŽENÝRSTVÍ

Katedra biomedicínské techniky

**Dynamický model manipulátoru pro robotickou
rehabilitaci a praktické ověření
pro rehabilitační testy**

Diplomová práce

Studijní program: Biomedicínská a klinická technika
Studijní obor: Biomedicínský inženýr

Autor práce: Bc. Monika Brousilová
Vedoucí práce: Ing. Jan Kauler, Ph.D.
Rok: 2019

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Brousilová** Jméno: **Monika** Osobní číslo: **426558**
Fakulta: **Fakulta biomedicínského inženýrství**
Garantující katedra: **Katedra biomedicínské techniky**
Studijní program: **Biomedicínská a klinická technika**
Studijní obor: **Biomedicínský inženýr**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Dynamický model manipulátoru pro robotickou rehabilitaci a praktické ověření pro rehabilitační testy.

Název diplomové práce anglicky:

Dynamic model of a manipulator for robotic rehabilitation and practical verification for rehabilitation tests.

Pokyny pro vypracování:

Pomocí dostupného programového vybavení identifikujte dynamický model: matici dynamiky, matici tíhových účinků sil a matici třecích účinků manipulátoru KUKA LBR iiwa 7 R800. Na základě porady s fyzioterapeutem navrhnete modely řízení umožňující adaptivní průběh v tahu nebo tlaku na paži pacienta v závislosti na prostorové konfiguraci pacientovy paže podle potřeb rehabilitačního experimentu. Po simulačním ověření navržených modelů řízení, fyzioterapeutem vybraný naprogramujte, realizujte, experimentálně vyhodnoťte a zdokumentujte.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Christophe Duret, Ophélie Courtial, Anne-Gaëlle Grosmaire, Emilie Hutin, Use of a Robotic Device for the Rehabilitation of Severe Upper Limb Paresis in Subacute Stroke: Exploration of Patient/Robot Interactions and the Motor Recovery Process, 2015, <https://www.hindawi.com/journals/bmri/2015/482389/>
- [2] Z. Zenn Bien, Dimitar Stefanov, Advances in Rehabilitation Robotics, ed. 1, Springer, 2004, ISBN 3-540-21986-2
- [3] SCIAVICCO Lorenzo, SICILIANO Bruno, Modelling and control of robot manipulators, ed. 1, Springer - Verlag London Limited, 2001, ISBN 1-85233-221-2

Jméno a příjmení vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Jan Kauler, Ph.D.

Jméno a příjmení konzultanta(ky) diplomové práce:

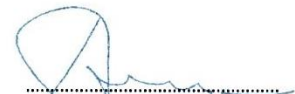
Ing. Vladimír Smutný, Ph.D - CIIRC

Datum zadání diplomové práce: **18.02.2019**

Platnost zadání diplomové práce: **20.09.2020**



prof. Ing. Peter Kneppo, DrSc.
podpis vedoucí(ho) katedry



prof. MUDr. Ivan Dylevský, DrSc.
podpis děkana(ky)

Abstrakt

Diplomová práce má několik stěžejních cílů. Zaprvé, je zaměřena na tvorbu dynamického modelu silově poddajného robotického manipulátoru KUKA LBR iiwa 7 R800 s dostupným programovým vybavením k identifikaci matice dynamiky, matice tíhových účinků sil a matice třecích účinků. Druhým cílem je po poradě s fyzioterapeutem navrhnout modely řízení v tahu či tlaku, k tomu vhodné trajektorie pohybu vedoucí pacientovu paži dle potřeb rehabilitačního experimentu. A nakonec realizace, vyhodnocení a zdokumentování rehabilitačního experimentu. Druhý a třetí cíl je založen na konzultaci s fyzioterapeutem a na současném stavu. Realizace vhodné trajektorie je v programovacím jazyku Python. Dynamický model je vytvořen v prostředí MATLAB a Simulink. Výsledkem diplomové práce je tvorba dynamického modelu, výběr vhodného řízení - impedanční řízení, a realizace vhodné trajektorie. Byl proveden, vyhodnocen a zdokumentován rehabilitační experiment na zdravé osobě.

Klíčová slova:

KUKA LBR iiwa 7 R800, dynamický model, impedanční řízení, MATLAB, ROS, rehabilitační robotika

Abstract

This master thesis has several key objectives. At first, it is focused on creating a dynamic model of force pliable robotics manipulator KUKA LBR iiwa 7 R800 with the available software to identify a matrix of dynamics, a matrix of gravitational forces, and a matrix of frictional effects. The second objective is in consultation with a physical therapist to design models of control with tense or pressure and suitable trajectory of motion able to lead patient arm according to the needs of the rehabilitation experiment. And finally, the implementation, evaluation and documentation of the rehabilitation experiment. Second and third goals are based on consultation with physiotherapists and on current state. Realisation of useful trajectory is in Python programming language. Dynamic model is created in MATLAB and Simulink environment. The result of the thesis is creation of a dynamic model, picking of right control system – impedance control system, and realisation of suitable trajectory. There was realised, evaluated and documented rehabilitation experiment on health person.

Keywords:

KUKA LBR iiwa 7 R800, dynamic model, impedance control, MATLAB, ROS, robotics rehabilitation

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu diplomové práce Ing. Janovi Kaulerovi, Ph.D. z FBMI ČVUT za trpělivost a velkým množstvím času stráveným nad diskuzemi k práci, jejímu zpracování a vyhotovení. Za ochotu se mnou jezdit na pracoviště CIIRC ČVUT a trávit tam svůj volný čas. Velmi děkuji paní Mgr. Monice Kimličkové za spolupráci a odborné rady z oblasti fyzioterapie, připomínkách při návrhu trajektorií a jejich realizaci.

Děkuji prof. Ing. Václavu Hlaváčovi, CSc. a Ing. Vladimíru Smutnému, Ph.D., kteří mi poskytli odbornou pomoc v začátcích práce a umožnili mi přístup k robotické rehabilitaci i samotnému robotovi KUKA.

Můj veliký vděk si zaslouží Bc. Ondřej Holešovský, MSc. za svou nezměrnou trpělivost při programové spolupráci na trajektoriích a pochopení softwaru robota, času, který mi pro úspěšné dokončení tohoto dílčího úseku mé práce věnoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem **Dynamický model manipulátoru pro robotickou rehabilitaci a praktické ověření pro rehabilitační testy** vypracovala samostatně a použila k tomu úplný výčet citací použitých pramenů, které uvádím v seznamu přiloženém k práci.

Nemám závažný důvod proti užití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Kladně dne.....

.....

podpis

Obsah

1	Úvod.....	1
1.1	Cíle práce a její přínosy.....	1
1.2	Struktura práce.....	2
2	Historie a současnost	3
2.1	Historie fyzioterapie, rehabilitace, od lidské síly k závěsům a robotům.....	3
2.2	Funkční svalový test:.....	5
2.2.1	Obecná část.....	5
2.2.2	Horní končetina jako celek.....	6
2.3	Pacient – robot – fyzioterapeut	7
2.4	Silově poddajný robot Kuka R800.....	9
2.5	Další roboti používaní jako terapeuti.....	11
2.5.1	Armeo	11
2.5.2	Reo Go	12
3	Dynamika a tvorba dynamického modelu.....	14
3.1	Jacobián.....	14
3.2	Dynamický model	16
3.2.1	Lagrangova formule.....	17
3.2.2	Výpočet kinetické energie.....	18
3.2.3	Výpočet potenciální energie	24
3.2.4	Rovnice pohybu.....	24
3.2.5	Nutné podmínky dynamického modelu	26
3.3	Impedanční řízení.....	26
4	Vypracování	31
4.1	Tvorba dynamického modelu	31
4.2	Matice vazebných účinků C.....	37
4.3	Návrh trajektorie jako testu k provedení	37
4.4	Realizace trajektorie.....	38
5	Výsledky.....	42
5.1	Předzpracování dat	42
5.2	Validace dynamického modelu	43
5.3	Výsledky rehabilitačního experimentu.....	45
6	Diskuze	54
7	Závěr	56

Seznam obrázků

Hobr-1: Voják (US NAVY) rehabilitující se po ztrátě dolní končetiny [2].....	4
Hobr-2: Fyzioterapeutka se dvěma dětmi po dětské obrně [2].....	5
Hobr-3: Schématické znázornění chodícího pásu a v něm upevněného pacienta [8].	8
Hobr-4: Robot Kuka LBR iiwa 7 R800 v průmyslové praxi [14]	10
Hobr-6: Dětská verze Armeo@Spring [18]	12
Hobr-7: ReoGo™ robotický systém pro funkční terapii horní končetin [19].....	13
DMobr-1: Kinematický popis článku i dle Lagrangovy formule [22].....	19
IĚobr-1: Blokové schéma řízení manipulátoru pomocí impedančního řízení [23]	29
Vobr-1: Příklad prvních tří řádků translační části matice dynamiky.	33
Vobr-2: Model v Simulinku	34
Vobr-3: Model v Simulinku – blok manipulator1	35
Vobr-4: Model v Simulinku – blok výpočet energie	35
Vobr-5: Model v Simulinku	36
Vobr-6: Model v Simulinku – blok manipulator1	36
Vobr-7: Model v Simulinku – blok výpočet energie	37
Vobr-8: Vstupní návrh trajektorií kruh a osmička.....	38
Vobr-9: Grafické znázornění trajektorie – kruh	40
Vobr-10: Grafické znázornění trajektorie – osmička	41
Robr-1: Celková energie zjednodušeného modelu	43
Robr-2: Celková energie plného modelu.....	44
Robr-3: Celková, potenciální a kinetická energie zjednodušeného modelu.....	44
Robr-4: Celková, potenciální a kinetická energie celkového modelu	44
Robr-5: Osový systém robota	45
Robr-6: Pozice koncového bodu – trajektorie kruh, bez člověka.....	47
Robr-7: Pozice koncového bodu – trajektorie kruh, s člověkem	47
Robr-8: Momenty koncového bodu – trajektorie kruh, bez člověka	48
Robr-9: Momenty koncového bodu – trajektorie kruh, s člověkem	48
Robr-10: Síly koncového bodu – trajektorie kruh, bez člověka	49
Robr-11: Síly koncového bodu – trajektorie kruh, s člověkem	49
Robr-12: Pozice koncového bodu – trajektorie osmička, bez člověka	50
Robr-13: Pozice koncového bodu – trajektorie osmička, s člověkem	50
Robr-14: Momenty koncového bodu – trajektorie osmička, bez člověka	51
Robr-15: Momenty koncového bodu – trajektorie osmička, s člověkem	51
Robr-16: Síly koncového bodu – trajektorie osmička, bez člověka	52
Robr-17: Síly koncového bodu – trajektorie osmička, s člověkem.....	52

1 Úvod

1.1 Cíle práce a její přínosy

Má diplomová práce má svůj cíl ve vytvoření dynamického modelu robota KUKA LBR iiwa 7 R800 s dostupným programovým vybavením na pracovišti profesora Hlaváče v CIIRC ČVUT. Identifikovat matici dynamiky, matici tíhových účinků sil a matici třecích účinků. Dále po poradě s fyzioterapeutem navrhnout modely řízení v tahu či tlaku, k tomu vhodné trajektorie pohybu vedoucí pacientovu paži dle potřeb rehabilitačního experimentu. Realizace, vyhodnocení a zdokumentování rehabilitačního experimentu, který validuje dynamický model.

Rehabilitační experiment přiblíží využití robota v praxi pro lepší hodnocení svalových testů a měření pokroků pacienta. Velký přínos použití silově poddajných robotů je ve chvílích, kdy je pacient hodnocen vícero fyzioterapeuty či na více pracovištích. Odpadl by tak subjektivní náhled člověka na člověka a pokrok v rehabilitaci či jeho stagnace jsou lépe měřitelné, porovnatelné a sledovatelné i z dlouhodobějšího hlediska.

Dalším využitím je možnost spolupráce jednoho fyzioterapeuta s více pacienty najednou. Roste jejich množství mezi dětmi, které se často rodí brzy a/nebo s vrozenými pohybovými vadami, nejvíce mezi mladými, kteří riskují v adrenalinových sportech a zážitcích či utrpí vážný úraz při autonehodě, i mezi staršími osobami, které jsou více a déle sportovně aktivní než v minulosti. Pro tyto skutečnosti je důležité, aby lidským fyzioterapeutům pomáhali ti robotičtí a počítač poskytl člověku přesné informace, které potřebuje.

1.2 Struktura práce

Tato práce je rozdělena na úvod (tato kapitola), historii a současnost v rehabilitaci, fyzioterapii a používání pomůcek od závěsů k robotům, svalový test (kapitola 2), dynamiku a získání dynamického modelu (kapitola 3), výsledky a vypracování (kapitola 4), diskuzi (kapitola 5) a závěr (kapitola 6).

Kapitoly 2 a 3 popisují teoretický úvod do problematiky robotické rehabilitace, současný stav i historii, seznámení se s dynamikou a jejím výpočtem a všechny potřebné kroky pro tvorbu dynamického modelu.

Praktická část v práci tkví v tvorbě modelu, napsání a otestování skriptů pro trajektorie, které poslouží rehabilitačnímu experimentu i ověření dynamického modelu. Realizaci měření, zpracování dat a získání výsledků.

2 Historie a současnost

2.1 Historie fyzioterapie, rehabilitace, od lidské síly k zívěsům a robotům

Fyzioterapie a rehabilitační lékařství jsou odvětví, která vznikala zároveň, přesto dlouho naprosto odděleně. V praxi však šlo o práci s podobnými populacemi pacientů a jejich zdravotním postižením. Vzestup a počátek vývoje obou těchto odvětví spadá do první poloviny 20. století, kdy bylo třeba se postarat o zraněné a oběma válkami handicapované lidi. [1,2] Přesto první Invalidovny, domy péče o postižené a zraněné vojáky, byly už za francouzského krále Ludvíka XIV (Hôtel des Invalides) či u nás po převzetí této myšlenky za císaře Karla V či císařovny Marie Terezie (Invalidovna v Karlíně). [3] Úplně prvotní techniky však pochází z doby Hippokratese. [2]

Rozdíl těchto odvětví tkví v jejich definici. Fyzioterapie je součástí rehabilitačního lékařství a zabývá se diagnostikou, léčbou a prevencí poruch lidského pohybového aparátu. Rehabilitační lékařství oproti tomu má za cíl nejen fyzioterapii, ale i sociální zařazení zpět do společnosti, naučení práce s vlastním postiženým tělem či jeho částí a získání co možná nejvyšší úrovně funkčních schopností a soběstačnosti. [1,2]

Rehabilitace jako taková není pouze zaměřená na tělo po fyzické stránce, ale soustředí se i na psychické poranění se zraněním spojené, kterým je například Post traumatická stresová porucha, různé druhy amnézií. Dalším důležitým významem je morální přístup a zodpovědnost společnosti k mladým lidem, kteří utrpěli jako vojáci zranění ve válce (Hobr-1), přesahuje i k chorobám z povolání či následkům pracovních úrazů. [3]

Jelikož je rehabilitace pohybového aparátu časově náročná a je třeba velmi dlouhého a četného opakování pro obnovení a zesílení nervové paměti pohybu i svalového aparátu, vznikla myšlenka použití dalších pomůcek ulehčující fyzioterapeutovi práci s pacientem.



Hobr-1: Voják (US NAVY) rehabilitující se po ztrátě dolní končetiny [2]

Zvláště při nácviu chůze, kdy bylo třeba nejméně dvou fyzicky velmi zdatných fyzioterapeutů k pohybu pacienta a dalšího, který vše kontroloval. Jako první se pro rehabilitaci chůze používal závěs, který převzal váhu pacienta, a chodící pás na suchu či pod vodou. [4] Tento systém byl o pár let později, v roce 1999, komerčně vyráběn a stal se prvním robotickým rehabilitačním systémem.



Hobr-2: Fyzioterapeutka se dvěma dětmi po dětské obrně [2]

Oproti rehabilitaci dospělých byla bez asistence závěsů rehabilitace dětí výrazně snazší a jeden fyzioterapeut dokáže se spolupracujícími dětmi cvičit i ve dvojicích či skupinách (Hobr-2).

2.2 Funkční svalový test:

2.2.1 Obecná část

Svalový test se používá k určení síly vyšetřovaných svalů, rozsahu pohybu a určení stupně svalové síly. Svalová síla je dělena na pět úrovní, první je pouhý svalový záškub, který nemusí ani být viditelný a je možné jej

dokázat pouze palpací. Druhý je schopnost pohybu bez působení gravitační síly, například v závěsu či na podložce. Dokázat překonat gravitační sílu bez dalšího zatížení je třetí stupeň. Poslední dva, čtvrtý a pátý, jsou založeny na přidání dalšího rostoucího odporu mimo gravitační síly, závaží, tlaku ruky fyzioterapeuta. Dále existuje ještě nultý stupeň svalové síly, kterým se hodnotí sval bez schopnosti stahu či záškubu, ten se však v běžné klasifikaci vyskytuje zřídka a bývá často vynecháván.

Svalový test mimo určení stupňů síly má i klasifikaci pro rozsah pohybu, kterého je pacient v daném stavu schopen. Hlavní příčiny, proč je pohyb omezen, jsou zkrácené, ztuhlé či v křeči zůstávající hlavní svaly, měkké a tvrdé části kloubu jsou anatomicky natolik pozměněny, že pohyb není možný v celém rozsahu, nebo pohyb samotný vyvolává bolest. [6]

2.2.2 Horní končetina jako celek

Horní končetina je schopná velmi mnoha pohybů a zvláště její zakončení, ruka, je díky opozici palce a malíku především nástroj k uchopování. Celá horní končetina jako celek je velmi složité zařízení, pokud vypadne jen jediná funkční jednotka, dochází k poruše souhry v rámci celé končetiny. Tento velký celek potřebuje pevné upevnění k trupu, kterým je rameno, jež se skládá ze tří kloubů (humeroskapulární, sternoklavikulární a ramenní) a dvou spojení (skapuloklavikulární a skapulotorakální), které dohromady poskytují ramenu tak velký rozsah pohybů.

Za ramenem je další kloub a to loket složený ze tří kostí. Kombinací flexe / extenze (140°) a rotace (160°) v lokti vznikají kombinované pohyby, i když ulna nemůže rotovat. Poté následuje zápěstí a ruka, které celkem tvoří 29 kostí a které dokáží sladěné dohromady dát ruce její sílu, uchopovací schopnosti i ovládání různých nástrojů.

Za ovládáním pohybů jsou nervy a nervová zakončení, jejichž poškození lze snadno odhalit i pouhým pohledem na prováděný úkon, například sevřením ruky do pěsti či uchopením hrnečku celou dlaní i prsty, jako když se o něj ohříváme, je-li nějaké poškození inervace, úkon nevypadá správně, pěst není dovřená, některý prst se od hrnečku odklání. Okolní svaly sice dokáží při malém poškození defekt částečně zakrýt, ale pohyb poté není dokonalý, není ve správném rozsahu či síle. [6]

2.3 Pacient – robot – fyzioterapeut

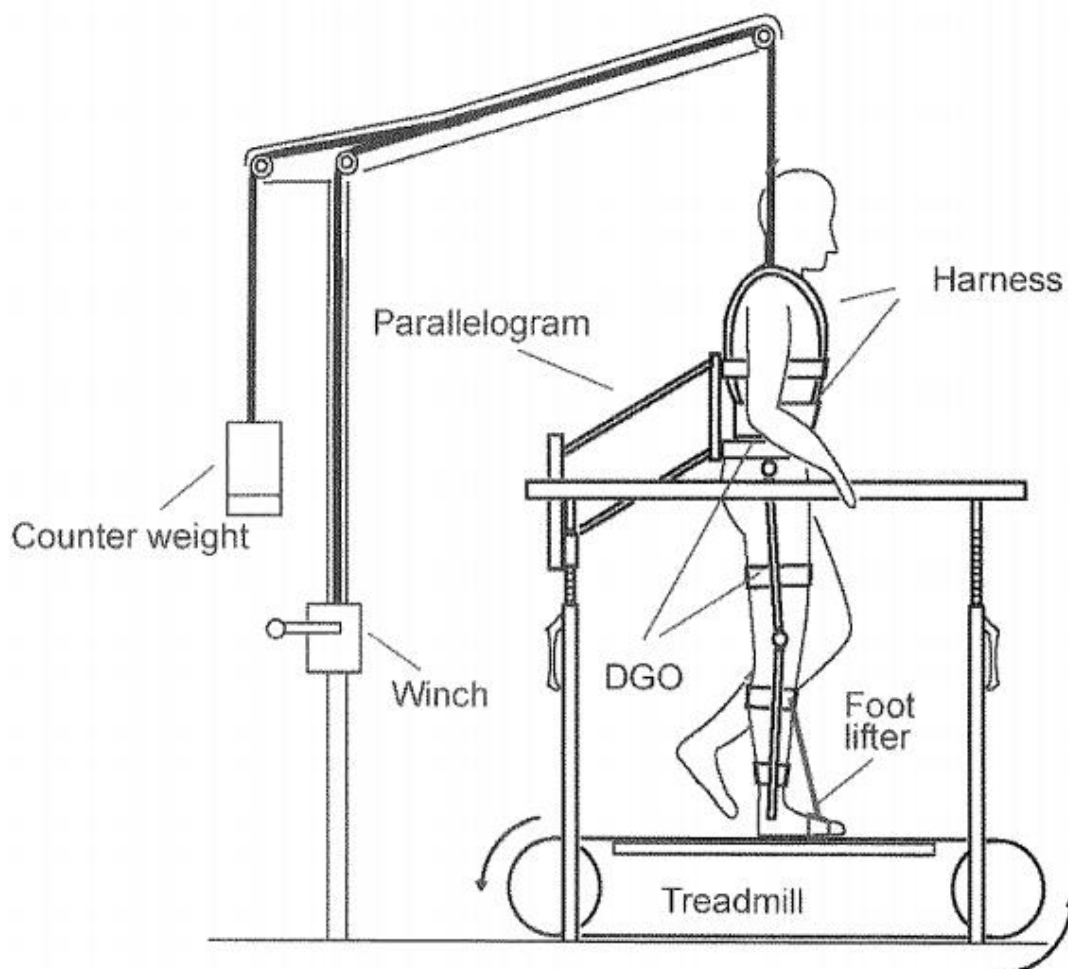
Je-li rehabilitace například chůze provozována pouze manuální silou fyzioterapeutů, má mnoho omezení. Těmito omezeními jsou proškolení fyzioterapeuta i pacienta, fyzická náročnost, krátká doba tréninku způsobená únavou fyzioterapeuta i péče o pacienta, což způsobuje mnohem kratší čas pro každý jeden trénink, než by bylo potřeba pro optimální terapeutický výsledek, zároveň ergonomicky nepříznivé postavení během tréninku způsobuje vedle únavy i časté problémy se zády či bolestí paží a rukou fyzioterapeutů.

Další nevýhodou je opakovatelnost a objektivní měření pokroků pacienta, možnost trénovat pouze s jedním pacientem. Tyto potíže odstraňuje použití závěsů a hlavně robotů a vede k většímu množství pacientů, kterým se je fyzioterapeut schopen věnovat. Což je však ještě důležitější, robotem změřená data o pacientovi, pomáhají s lepším nastavením tréninku pro optimalizování vůči jeho potřebám i zvýšení a zrychlení jeho pokroků. [7]

Často používaní roboti jako Lokomat (Hocoma AG, Švýcarsko) [8], zařízení ARTHUR a PAM [9,10] se nedokáží částečně či úplně přizpůsobit pacientovi, zvláště když je pasivní, a pohybují se dle nastavené cesty, nevrací zpět odezvu od pacienta a neudávají rozdíl mezi první a současným

tréninkem a stav v průběhu tréninku, tudíž nejsou schopné terapeutického hodnocení pacienta.

Současný výzkum terapeutických robotů se právě na toto zaměřuje, aby úsilí během tréninku plně rozvíjelo pohybový záměr a schopnosti pacienta dle jeho svalového úsilí, docházelo ke zpětné vazbě od pacienta a dle ní se robotická pomoc přizpůsobovala k pacientovu příspěvku v daném pohybu. Vývoj hledá cesty k hodnocení pacienta pomocí kloubních úhlů, rychlostí a momentů, které mohou být použity ke kvalifikaci biomechanického i neurologického stavu, parametry, jako je společný rozsah pohybu a maximální dobrovolná svalová síla, mohou obsahovat cenné informace pro terapeuta, který doprovází rehabilitační proces pacienta. [8, 11]



Hobr-3: Schématické znázornění chodícího pásu a v něm upevněného pacienta [8]

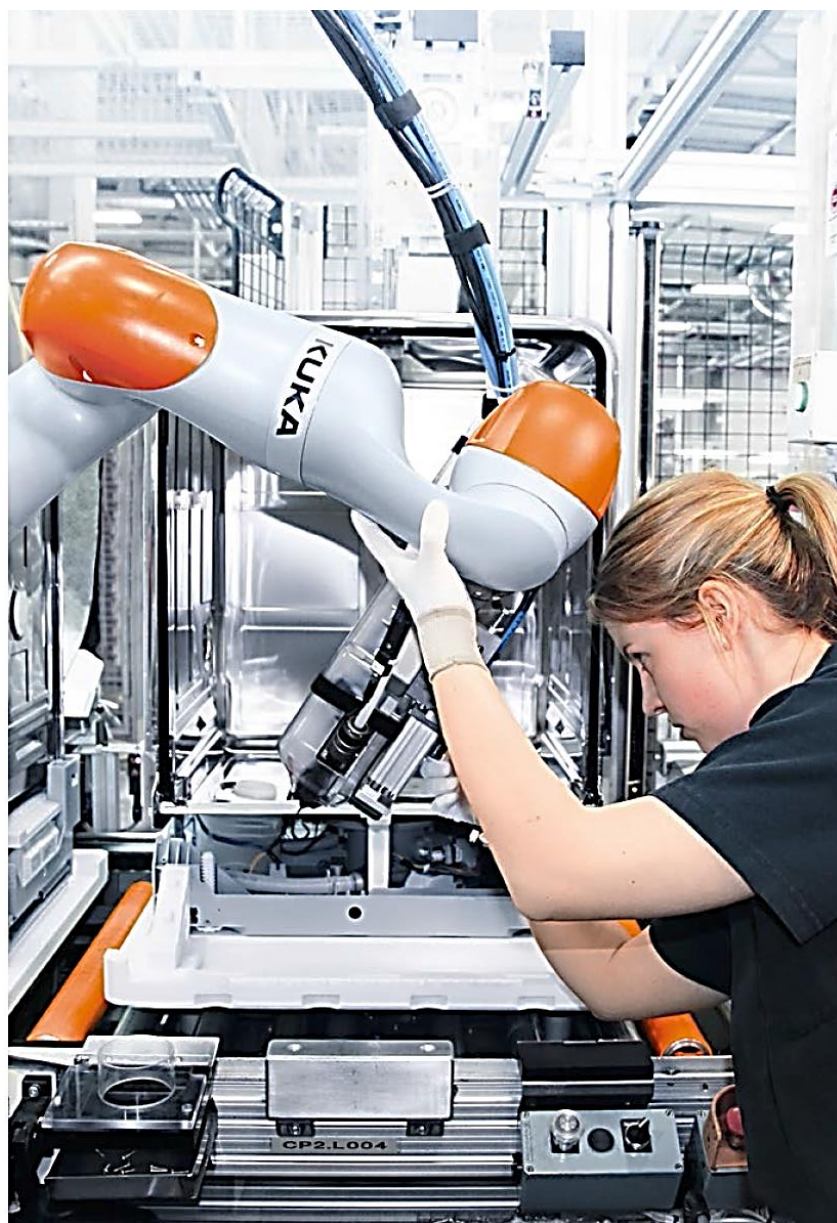
S tímto se například potýkali v [12, 13], kde tým vytvořil různé algoritmy zhodnocující a reagující na stav pacienta, v [13] šlo o dva algoritmy, které ve výsledku měly stejné výstupy, ale jeden z nich byl pacientům příjemnější. V druhé práci [12] šlo o tři algoritmy, každý postavený na jiném principu – přímá dynamika, zpětná dynamika, impedančně kontrolovaný. Z testů vyšel nejlépe impedančně kontrolovaný, který byl k danému zařízení [8] vydán komerčně k používání.

2.4 Silově poddajný robot Kuka R800

Specializace silově poddajných robotů je široká, tyto manipulátory jsou bezpečné pro práci s člověkem a původně byly vyvíjeny pro spolupráci člověka a robota v kosmu. Dokáží reagovat na kontakt a zastavit, proto byly původně určeny pro práci v průmyslu stejně jako manipulátor firmy Kuka, viz níže.

Robot použitý pro tento úkol je robotická ruka firmy Kuka, série LBR iiwa 7 (intelligent industrial work assistant – inteligentní průmyslový pracovní asistent), model R800, který má sedm kloubů, které jsou schopné rotace střídavě v ose x a y při úplném narovnání v ose z (první kloub od upevnění k podložce je schopen natáčet se v ose y, další v ose x, třetí v ose y atd.).

Tato robotická ruka má sedm stupňů volnosti, je možné ji připevnit pod libovolným úhlem (na stůl či na zed'), aniž by to mělo vliv na její schopnosti. Jelikož jde o průmyslového robota, je dobře vybavený pro ochranu člověka při práci s tímto robotickým asistentem pomocí integrovaných senzorů s vysokým stupněm ochrany IP 54 a evropských norem DIN EN 62061 SIL 2 a EN ISO 13849 úroveň d kategorie 3. [14]



Hobr-4: Robot Kuka LBR iiwa 7 R800 v průmyslové praxi [14]

K tomuto robotickému asistentu byl v pracích [15, 16] hledám pravdivý dynamický model, který by odpovídal skutečnosti a hodnotám uvedeným ve skicách na [14]. Obě práce však našly rozdíly i velikosti několika řádů, což znamená, že je třeba si dynamický model vytvořit a ověřit, ale hlavně zjistit skutečné pozice těžišť jednotlivých segmentů, čímž se zabývají v práci [17], kterou lze brát jako návod k řešení této situace.

2.5 Další roboti používaní jako terapeuti

Některá z těchto rehabilitačních zařízení mohou pracovat s i bez asistence fyzioterapeuta, ty bez asistence může pacient používat například v pokračování rehabilitace doma. Některé z těchto systémů jsou určeny pro rehabilitaci i jen částí ruky, například nácvik stisku ruky a její jemné motoriky či pro rozpořhybování úplně nepohyblivé končetiny a tedy o hrubou motoriku. Níže je příklad dvou těchto systému od firmy Hocoma je to Armeo a od firmy Motorika je to Reo Go.

2.5.1 Armeo

Rehabilitační exoskelety Armeo jsou tři, každý pro jiný druh potřeb. Armeo@Power je pro pacienty s velmi těžkým motorickým deficitem, kdy jsou neschopni žádného pohybu či jen úplně minimálního. Dalším je Armeo@Spring i ve verzi Pediatric pro děti, který nadlehčuje paži a pomáhá pacientovi používat její zbytkovou svalovou sílu, lze omezit aktivní prostor i pohyblivost, aby se nešlo za možnosti pacienta. Posledním je Armeo@Boom, který je pro kliniky s ambulantním provozem a pro domácí používání pro pacienty s mírným až středně těžkým poškozením pohyblivosti horní končetiny. Používá lehké odlehčení dle potřeb pacienta, který je schopný samostatně vést pohyb v 3D prostoru. Terapie je spojena s vizuální zpětnou vazbou a vytváří herní prostředí s úkoly, které se pacient snaží překonat za účelem pokroku ve své rehabilitaci. [18]



Hobr-6: Dětská verze Armeo@Spring [18]

2.5.2 Reo Go

Oproti tomu systém Reo Go je mnohem drobnější a je určena pro rehabilitaci od nulové pohyblivosti horní končetiny, má několik módů, které buď konají pohyb sami či sami s inicializací od pacienta, nebo jde o asistenci pohybu, který je usměrněný a řízený, případně o pouhý záznam aktivního samostatného pohybu pacientovy ruky. Díky drobnosti zařízení, je mnohem snáze přezkoumatelné i dovoluje lepší a větší rozsah rehabilitace, jelikož vlastní konstrukce pohybu nebrání. Opět jde o spojení terapie se zpětnou vazbou ve formě her, kterou jsou o něco jednodušší než u Armea. [19]



Hobr-7: ReoGo™ robotický systém pro funkční terapii horní končetin [19]

3 Dynamika a tvorba dynamického modelu

Reprezentace vztahu mezi kloubovými rychlostmi a odpovídající translační a úhlovou rychlostí koncového bodu je popsáno maticí označené jako geometrický Jacobián, který závisí na konfiguraci manipulátoru. Pokud je poloha koncového bodu vyjádřena s odkazem na nejmenší reprezentaci v pracovním prostoru, je možné počítat matici Jacobiánu přes diference přímé kinematiky s respektem ke kloubovým proměnným. Výsledkem je Jacobián, kterému se říká analytický. [20]

3.1 Jacobián

Jacobián je jedním ze základních a nejdůležitějších nástrojů pro charakterizaci manipulátoru, je užitečný pro nalezení singularity, analyzování redundance, stanovení algoritmů diferenční kinematiky, popis mapování sil působících na koncový bod a výsledné statické momenty v kloubech, pro tvorbu schémat kontroly v pracovním prostoru a pro derivování dynamických rovnic pohybu. [20]

Jacobián je matice, která transformuje změnu orientace a polohy koncového bodu na zobecněné souřadnice v jednotlivých kloubech či kinematických dvojicích. Naopak lze i převést zobecněné souřadnice na změnu polohy a orientace koncového bodu, tj.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{J-1})$$

kde $\dot{\mathbf{x}}$ jsou kartézské rychlosti koncového bodu ve vektoru, \mathbf{J} je Jacobián a $\dot{\mathbf{q}}$ je vektor zobecněných rychlostí.

Jacobián se skládá ze dvou částí, první je translační část, tj. první tři řádky, druhá je rotační část, tj. čtvrtý až šestý řádek. Počet sloupců odpovídá počtu

kloubů v daném řetězci. Pro získání Jacobiánu je třeba pro základní pohyby vynásobit jednotlivé zobecněné rychlosti ω pro každou kinematickou dvojici a diferenciálních operátorů pro translaci (DTX, DTY, DTZ) a rotaci (DRX, DRY, DRZ). Tyto součiny jsou matice rychlostí, které je nutné převést do souřadného systému posledního bodu, aby je bylo možné sečíst. Převod je uskutečněn pomocí transformačních matic a jejich inverzí. Například pro převod kinematické dvojice 4 a 5 ze souřadného systému 5 do souřadného systému 7 (J-2):

$$V54S7 = IT76 * IT65 * V54S5 * TT65 \quad (J-2) \\ * TT76.$$

Sečtením všech matic získám celkovou matici rychlosti $V70S7$, ze které se vypočítá translační rychlost koncového bodu vůči rámu $vM0$, tuto využiji pro výpočet translační části Jacobiánu. Pro rotační část Jacobiánu je nutné celkovou matici rychlosti převést do souřadného systému rámu, převod opět probíhá maticovým násobením z obou stran transformačními maticemi jako v (J-2), až vznikne $V70S0$. Dále je třeba sestavit vektor rotační a translační složky kartézských rychlostí:

$$\begin{bmatrix} \omega70_x \\ \omega70_y \\ \omega70_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V70(3, 2) \\ V70(1, 3) \\ V70(2, 1) \end{bmatrix} \quad (J-3)$$

$$\begin{bmatrix} vM0_x \\ vM0_y \\ vM0_z \end{bmatrix} = TT70 * V70S7 * rM7,$$

protože platí, že submatice úhlových rychlostí Ω_{ba_a} mezi kinematickými dvojicemi b a a v souřadném systému a je:

$$\Omega_{ba_a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\omega_{za} & \omega_{ya} \\ \omega_{za} & \mathbf{0} & -\omega_{xa} \\ -\omega_{ya} & \omega_{xa} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{J-4})$$

a rychlost je:

$$V_{ba_a} = \begin{bmatrix} \Omega_{ba_a} & v_a^{0b} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{J-5})$$

Po vytknutí zobecněných rychlostí na pravé straně v předešlých výrazech (J-4) a (J-5), je možné získat rovnici v maticovém tvaru, kde matice $J(q)$ pravá strana rovnice představuje Jacobián paže či manipulátoru:

$$\begin{bmatrix} vM\mathbf{0}_x \\ vM\mathbf{0}_y \\ vM\mathbf{0}_z \\ \omega\mathbf{70}_x \\ \omega\mathbf{70}_y \\ \omega\mathbf{70}_z \end{bmatrix} = [J(q)] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_7 \end{bmatrix}, \quad (\text{J-6})$$

Vektor kartézských rychlostí koncového bodu se poté parciálně derivuje podle zobecněných rychlostí či se použije vhodný matematický nástroj, například MATLAB funkce jacobian. [21]

3.2 Dynamický model

Odvození dynamického modelu manipulátoru hraje důležitou roli pro simulaci pohybu, analýzu struktury manipulátoru a tvorbu kontrolních algoritmů. Simulování pohybu manipulátoru dovoluje testovat různé přístupy kontroly a pohybových plánů bez potřeby fyzické přítomnosti manipulátoru u simulace. Analýza dynamického modelu může být užitečná pro mechanický design prototypů robotických paží. Výpočet sil a momentů požaduje zprvu spuštění sady několika základních pohybů, které dodají užitečné informace pro design kloubů, přenos sil a pohony. Pro

sestavění a odvození rovnic pohybu manipulátoru jsou dva přístupy. Tím dále používaným je Lagrangova formulace, která má jednoduchý koncept a systematicčnost.

3.2.1 Lagrangova formule

Dynamický model manipulátoru je soubor vztahů popisujících vazby mezi krouticími momenty kloubových pohonů a pohybem struktury.

S Lagrangovou formulací se rovnice pohybu derivují systematicky a nezávisle na referenčních souřadnicích rámu. Jednou sadou proměnných je Lagrangův operátor λ_i , kde $i = 1, \dots, n$, který se označuje jako zobecněné souřadnice. Zobecněné souřadnice jsou voleny pro efektivní popis pozice článku v n -stupních pohybu manipulátoru, Lagrangian mechanického systému je poté definován jako funkce zobecněných souřadnic:

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{U} \quad (\text{DM-1})$$

kde \mathbf{T} a \mathbf{U} jsou veškerá kinetická energie a potenciální energie systému.

Lagrangovy rovnice jsou poté vyjádřeny jako:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\lambda}_i} - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda_i} = \xi_i \quad (\text{DM-2})$$

kde ξ_i jsou zobecněné síly spojené se zobecněnými souřadnicemi λ_i , kde $i = 1, \dots, n$.

Pro manipulátory s otevřeným kinematickým řetězcem jsou zobecněné souřadnice přirozená volba s vektorem kloubových proměnných:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{q}. \quad (\text{DM-3})$$

Příspěvky k zobecněným silám jsou získány z nekonzervativních sil, což jsou kloubové zobecněné síly pohonů, třecí momenty kloubů a také zobecněné momenty způsobené silami na koncový bod při kontaktu s prostředím kolem robota.

Rovnice (DM-2) zavádí vztah mezi existujícími zobecněnými silami působícími na manipulátor a kloubovými pozicemi, rychlostí a zrychlením. Poté je možno odvodit dynamický model manipulátoru stanovením kinetické energie a potencionální energie mechanického systému.

3.2.2 Výpočet kinetické energie

Uvažuje-li se manipulátor s n rigidními články, je veškerá kinetická energie získaná sumou příspěvků vzhledem k pohybu každého článku a kloubového pohonu za předpokladu, že článek 0 je pevně fixovaný jako rám a neposkytuje žádné příspěvky:

$$T = \sum_{i=1}^n (T_{l_i} + T_{m_i}), \quad (\text{DM-4})$$

kde T_{l_i} je kinetická energie článku i a T_{m_i} je kinetická energie motoru pohánějícího kloub i .

Kinetická energie získaná z článku i je dána:

$$T_{l_i} = \frac{1}{2} \int_{V_i} \mathbf{p}_i^{*\text{T}} \mathbf{p}_i^* \rho dV, \quad (\text{DM-5})$$

kde \mathbf{p}_i^* označuje lineární vektor rychlosti a ρ je hustota elementární části v objemu dV ; V_i je objem článku i .

Základní rám (báze manipulátoru, zeď, rameno či stůl, kde je upevněn) je možné vyjádřit uvažováním vektoru pozice \mathbf{p}_i^* každé elementární částice a vektoru pozic těžišť každého článku \mathbf{p}_{c_i} :

$$\mathbf{r}_i = [\mathbf{r}_{ix} \quad \mathbf{r}_{iy} \quad \mathbf{r}_{iz}]^T = \mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_{i_1} \quad (\text{DM-6})$$

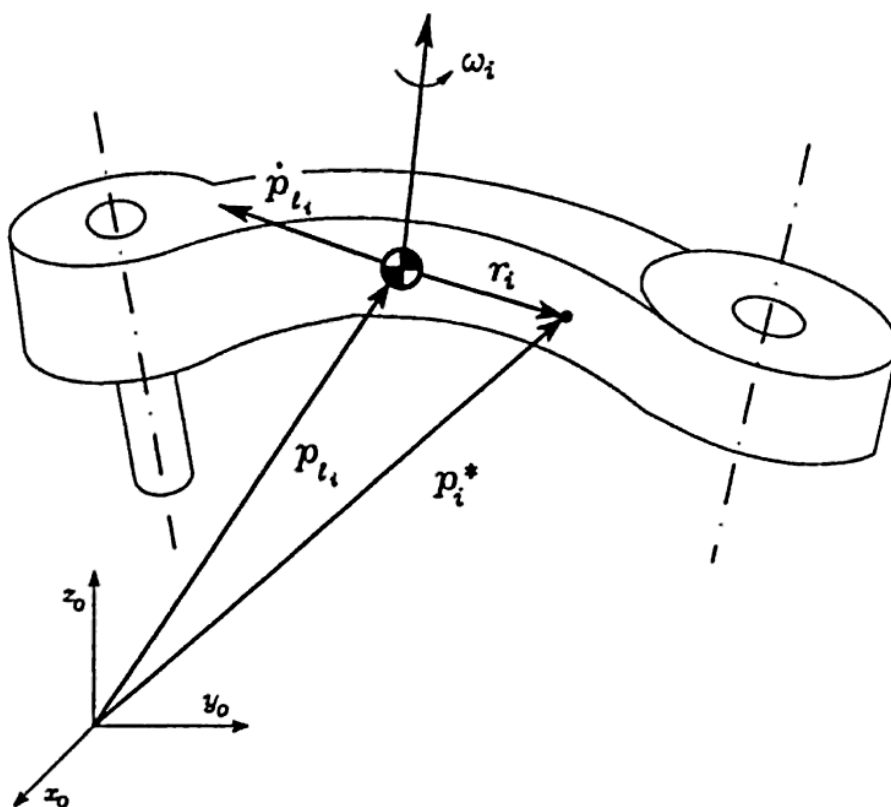
s:

$$\mathbf{p}_{i_1} = \frac{1}{m_{i_1}} \int_{V_{i_1}} \mathbf{p}_i^* \rho dV \quad (\text{DM-7})$$

kde \mathbf{m}_{i_1} je hmota článku. Důsledek bodové rychlosti článku může být vyjádřen jako:

$$\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_{i_1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i, \quad (\text{DM-8})$$

kde \mathbf{p}_{i_1} je lineární rychlost těžiště a $\boldsymbol{\omega}_i$ je úhlová rychlost článku (DMobr-1).



DMobr-1: Kinematický popis článku i dle Lagrangovy formule [22]

Substitucí ve vyjádření rychlosti z (DM-8) do (DM-5) je možné dokázat, že kinetická energie každého článku je tvořena z následujících tří příspěvků:

translační příspěvek:

rce: 4.9, p-134
$$\frac{1}{2} \int_{V_{l_i}} \dot{\mathbf{p}}_{l_i}^T \dot{\mathbf{p}}_{l_i} \rho dV = \frac{1}{2} m_{l_i} \mathbf{p}_{l_i}^T \mathbf{p}_{l_i}, \quad (\text{DM-9})$$

vzájemný příspěvek, protože dodržuje (DM-7), proto je:

$$\int_{V_{l_i}} \mathbf{p}_i^* \rho dV = \mathbf{p}_{l_i} \int_{V_{l_i}} \rho dV, \quad (\text{DM-10})$$

a rotační příspěvek:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_{l_i}} \mathbf{r}_i^T \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{r}_i \rho dV &= \quad (\text{DM-11}) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \left(\int_{V_{l_i}} \mathbf{S}^T(\mathbf{r}_i) \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \rho dV \right) \boldsymbol{\omega}_i, \end{aligned}$$

kde byl vlastní příspěvek $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{r}_i = -\mathbf{S}(\mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega}_i$. V přehledu vyjadřujícím směrovou matici \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{r}_{iz} & \mathbf{r}_{iy} \\ \mathbf{r}_{iz} & \mathbf{0} & -\mathbf{r}_{ix} \\ -\mathbf{r}_{iy} & \mathbf{r}_{ix} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{DM-12})$$

což je:

$$\frac{1}{2} \int_{V_{l_i}} \mathbf{r}_i^T \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{r}_i \rho dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_{l_i} \boldsymbol{\omega}_i. \quad (\text{DM-13})$$

Matice \mathbf{I}_i po úpravě již není diagonální:

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{i_{xx}} & -\mathbf{I}_{i_{xy}} & -\mathbf{I}_{i_{xz}} \\ \mathbf{I}_{i_{yx}} & \mathbf{I}_{i_{yy}} & -\mathbf{I}_{i_{yz}} \\ \mathbf{I}_{i_{zx}} & \mathbf{I}_{i_{zy}} & \mathbf{I}_{i_{zz}} \end{bmatrix} \quad (\text{DM-14})$$

přesto je diagonálně symetrická a reprezentuje moment setrvačnosti vzhledem k těžišti článku \mathbf{i} , kde vyjadřuje základní rám. Je třeba si uvědomovat, že pozice článku \mathbf{i} závisí na konfiguraci manipulátoru a na momentu setrvačnosti, vše přesunutě do souřadného systému rámu.

Pokud je úhlová rychlost článku \mathbf{i} vyjádřena vzhledem k článku připojeného k rámu (viz Denavit-Hartenbergova konvence), tak je:

$$\boldsymbol{\omega}_i^i = \mathbf{R}_i^T \boldsymbol{\omega}_i \quad (\text{DM-15})$$

kde \mathbf{R}_i je rotační matice pro článek \mathbf{i} v souřadném systému rámu vůči základnímu rámu. Pro článek rámu, je moment setrvačnosti konstantní.

Je-li \mathbf{I}_i^i je označen jako moment, pak je možné jej ověřit následujícím vztahem:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i^i \mathbf{R}_i^T. \quad (\text{DM-16})$$

Je-li osa článku \mathbf{i} v souřadném systému rámu shodná s centrální osou setrvačnosti, je setrvačný moment nulový, pokud zároveň odpovídá těžišti, je moment setrvačnosti diagonální osou.

Sečtením translačních a rotačních příspěvků (DM-9) a (DM-13) získáme kinetickou energii článku \mathbf{i} . Kinetická energie jako funkce zobecněných souřadnic systému je závislá vůči proměnným jednotlivých kloubů. Toho lze dosáhnout pomocí Jacobiánu. Jacobián se vypočítá pro každý článek, ne však pro koncový bod. Příspěvky koncového bodu jsou obsaženy ve

sloupcích Jacobiánu a jsou vztaženy k rychlostem kloubů pro každý jeden daný článek i .

Sloupce matic Jacobiánů:

$$\mathbf{p}_{i_i} = \mathbf{J}_p^{(i)} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{p1}^{(i)} & \dots & \mathbf{j}_{p1}^{(i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{DM-17})$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_o^{(i)} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{o1}^{(i)} & \dots & \mathbf{j}_{o1}^{(i)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

Ze vztahu (DM-17) je následně možné odvodit rotační a translační části Jacobiánu. Ve výsledku lze kinetickou energii článku i napsat jako:

$$\begin{aligned} T_{i_i} = & \frac{1}{2} \mathbf{m}_i \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_p^{(i)T} \mathbf{J}_p^{(i)} \dot{\mathbf{q}} + & (\text{DM-18}) \\ & + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_o^{(i)T} \mathbf{R}_i \mathbf{I}_i^i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_o^{(i)} \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

Příspěvky kinetické energie motorů v jednotlivých kloubech i se počítají analogicky jako pro články. Zisky statoru jsou fixní pro každý článek, kde se motor nachází, proto se počítají pouze zisky rotoru. V praxi designu mechanické struktury otevřeného kinematického řetězce manipulátoru je snaha o uložení motorků co nejbližně základně manipulátoru. Důvodem je co nejlhčí dynamické načítání prvního kloubu v řetězci. Zobecněné momenty kloubových pohonů doručené k motoru mají význam v mechanickém přenosu (gearu). Příspěvky kinetické energie získané z gearu, jsou zahrnuty do motoru. To předpokládá, že vyvolaný pohyb nenastane, tj. pohyb v kloubu i není poháněn pohybem dalších kloubů a každý kloub má svůj pohon.

Pokud označíme $\boldsymbol{\vartheta}_{m_i}$ jako úhlovou pozici rotoru, za předpokladu rigidního přenosu, dostaneme:

$$\mathbf{k}_{ri} \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_{m_i}, \quad (\text{DM-19})$$

kde \mathbf{k}_{ri} je redukční poměr gearu. V případě přítomnosti a pohybu translačního kloubu, je redukční poměr gearu rozměrově závislý. Úhlová rychlost rotoru je tedy:

$$\boldsymbol{\omega}_{m_i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{k}_{ri} \dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{z}_{m_i}, \quad (\text{DM-20})$$

kde $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$ je úhlová rychlost předcházejícího článku, který obsahuje uložení motoru, a \mathbf{z}_{m_i} označuje jednotkový vektor podél osy rotoru. Pro vyjádření kinetické energie rotoru jako funkce kloubových proměnných, je zapotřebí vyjádřit lineární rychlost rotoru v těžišti. Jednotlivé dílčí Jacobiány jsou vztaženy k rámu, ze kterého vychází, a jsou nulové, pokud je těžiště rotoru na ose rotace. Totéž platí i pro výpočet úhlové rychlosti, je-li funkcí kloubových proměnných. Proto může být kinetická energie rotoru i zapsána:

$$\begin{aligned} T_{m_i} = & \frac{1}{2} \mathbf{m}_{m_i} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_P^{(m_i)T} \mathbf{J}_P^{(m_i)} \dot{\mathbf{q}} + \\ & + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_0^{(m_i)T} \mathbf{R}_{m_i} \mathbf{I}_{m_i}^m \mathbf{R}_{m_i}^T \mathbf{J}_0^{(m_i)} \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (\text{DM-21})$$

Nakonec spojením všech proměnných jednoho článku z (DM-18) a jednoho rotoru z (DM-21) v (DM-4), je výsledná kinetická energie manipulátoru včetně pohonů dána:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ & = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (\text{DM-22})$$

kde:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_{l_i} \mathbf{J}_P^{(l_i)T} \mathbf{J}_P^{(l_i)} \mathbf{m}_{m_i} + \quad (\text{DM-23})$$

$$+J_0^{(l_i)T} R_i I_{l_i}^i R_i^T J_0^{(l_i)} + J_P^{(m_i)T} J_P^{(m_i)} + \\ +J_0^{(m_i)T} R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_0^{(m_i)}).$$

je $(n \times n)$ matice setrvačnosti, která je symetrická, pozitivně definitní a v obecné podobě má závislou konfiguraci.

3.2.3 Výpočet potenciální energie

Tak jako pro kinetickou energii, je potenciální energie manipulátoru daná sumou zisků příslušících ke každému článku a ke každému rotoru:

$$U = \sum_{i=1}^n (U_{l_i} + U_{m_i}). \quad (\text{DM-24})$$

Za předpokladu rigidního článku jsou příspěvky pouze gravitační, pokud je článek flexibilní, je třeba brát ohled i na elastické síly. Gravitační zrychlení \mathbf{g}_0 je vektor v základním rámu, tj. $\mathbf{g}_0 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{g}]^T$, je-li osa z vertikální, z (DM-7) využijeme souřadnice pro výpočet těžiště článku \mathbf{i} , podobně i pro výpočet zisků rotoru \mathbf{i} , z čehož vychází, že je potenciální energie dána:

$$U = - \sum_{i=1}^n (m_{l_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{l_i}(\mathbf{q}) \\ + m_{m_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{m_i}(\mathbf{q})) \quad (\text{DM-25})$$

a že jsou \mathbf{p}_{l_i} a \mathbf{p}_{m_i} funkcí pouze kloubové proměnné \mathbf{q} (polohy) a ne kloubové rychlosti $\dot{\mathbf{q}}$.

3.2.4 Rovnice pohybu

Spojením rovnic pro výpočet kinetické energie (DM-25) a (DM-22) v Lagrangiánu z (DM-1) pro manipulátor dostaneme:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) = \quad (\text{DM-26})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_i \dot{\mathbf{q}}_j + \\
&+ \sum_{i=1}^n (\mathbf{m}_{l_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{l_i}(\mathbf{q}) + \mathbf{m}_{m_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{m_i}(\mathbf{q})).
\end{aligned}$$

Pro získání rovnic pohybu je třeba obě části, kinetickou energii a potencionální energii, zderivovat. U zderivujeme podle \mathbf{q} a T podle $\dot{\mathbf{q}}$. Úpravou dostaneme pro $i = 1, \dots, n$ rovnice pohybu:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_j + \tag{DM-27} \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{h}_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_k \dot{\mathbf{q}}_j + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}) = \xi_i
\end{aligned}$$

kde:

$$\mathbf{h}_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{b}_{ij}}{\partial \mathbf{q}_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{b}_{ik}}{\partial \mathbf{q}_j}. \tag{DM-28}$$

Fyzikální interpretace (DM-27) odpovídá zaprvé zrychlení, zadruhé rychlosti, zatřetí určení míře závislosti. Pro zrychlení platí, že koeficient \mathbf{b}_{ii} reprezentuje vnitřní moment kloubu na ose i v dané konfiguraci manipulátoru, pokud jsou ostatní klouby zablokovány. Koeficient \mathbf{b}_{ij} je projevem zrychlení z kloubu i do kloubu j . Výraz $\mathbf{h}_{ij} \dot{\mathbf{q}}_j^2$ jsou odstředivé síly, které v sobě zahrnují promítnutí rychlosti kloubu i do kloubu j , za podmínky kdy je $\mathbf{h}_{iii} = \mathbf{0}$ a parciální derivace koeficientu \mathbf{b}_{ii} podle polohy je nulová. Výraz \mathbf{g}_i je moment generovaný kloubu v ose manipulátoru v dané konfiguraci, reprezentuje gravitační zrychlení, které na manipulátor působí.

3.2.5 Nutné podmínky dynamického modelu

Pro dynamický model jsou nezbytné dvě nutné podmínky, užitečné parametry pro identifikaci a derivační řídicí algoritmy. První takovou podmínkou je antisymetričnost matice \mathbf{C} . Antisymetričnost se projevuje tak, že prvky symetrické přes diagonálu jsou jednou na jedné straně diagonály kladné a na druhé záporné, je to speciální vlastnost čtvercových matic, jejichž transpozice je rovná záporně vzaté té samé matici, tj. $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Tato vlastnost je třeba pro rovnováhu kinetické energie a sil generovaných klouby manipulátoru.

Druhou nutnou podmínkou je linearita dynamických parametrů. Linearita modelu respektuje a charakterizuje články a rotory manipulátoru. Pro stanovení takových parametrů spojených s kinetickou a potenciální energií v příspěvcích každého rotoru článku, ve kterém je lokalizován. Je třeba, aby byl zajištěn předpoklad symetrického rozložení hmoty v ose rotace.

Pro každý moment setrvačnosti, který je v ose manipulátoru, musí být matice momentu setrvačnosti diagonální a ostatní hodnoty musí být nulové (pokud nejsou, jde o deviační momenty, které mohou pohony dostat mimo osy a tím způsobit třes či poruchu). Podstatné je splnění Lagrangiánu, které platí pro všechny zisky z kinetické a potenciální energie. Pokud některé z derivací Lagrangián nesplňují, nejsou lineární. V tom případě jsou derivace nahrazeny parciálními derivacemi dle polohy či dle polohy a rychlosti, aby se linearizovaly natolik, že budou Lagrangián splňovat dostatečně pro dynamický model. [22]

3.3 Impedanční řízení

Pro analyzování interakce manipulátoru s prostředím lze využít inverzní dynamické řízení v pracovním prostoru manipulátoru. Využití

impedančního řízení s pevnými kartézskými souřadnicemi je vhodné tam, kde je třeba udržet předepsanou trajektorii bez výchylek. Dovoluje měnit tuhost kloubů v různých úsecích trajektorie s ohledem na výkon, který manipulátor musí vykonat.

S odkazem na:

$$\mathbf{u} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (\text{IŘ-1})$$

musíme vzít v úvahu zákon pro řízení:

$$\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (\text{IŘ-2})$$

kde je \mathbf{n} z:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (\text{IŘ-3})$$

Pro vyjádření sil působících na koncový bod, je kontrola manipulátoru popsána:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{y} - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}, \quad (\text{IŘ-4})$$

z čehož je patrné, že zde existuje nelineárního spojení s výrazem pro kontaktní síly. Zvolení \mathbf{y} v:

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_P\mathbf{x} - \mathbf{M}_d\dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{IŘ-5})$$

kde \mathbf{M}_d je pozitivně definitní diagonální matice hmotnosti. Substitucí (IŘ-5) do (IŘ-4) a s ohledem na druhý zákon diferenciální kinematiky získáme vztah:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}, \quad (\text{IŘ-6})$$

který je ve formě výtěžků:

$$\mathbf{M}_d \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_D \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{K}_P \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_d \mathbf{B}_A^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{h}_A. \quad (\text{IŘ-7})$$

Kde $\mathbf{B}_A(\mathbf{q})$ představuje:

$$\mathbf{B}_A(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_A^{-T}(\mathbf{q}) \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q}) \quad (\text{IŘ-8})$$

matici setrvačnosti manipulátoru v pracovním prostoru, tak jako v:

$$\mathbf{B}_A = \mathbf{J}_A^{-T} \mathbf{B} \mathbf{J}_A^{-1}, \quad (\text{IŘ-9})$$

kde je maticí konfigurační závislosti manipulátoru a je pozitivně definitní, pokud má Jacobián \mathbf{J}_A všechny řádky nezávislé.

Výraz v (IŘ-7) zavádí vztah přes obecnou mechanickou impedanci, a to mezi vektorem výsledných sil $\mathbf{M}_d \mathbf{B}_A^{-1} \mathbf{h}_A$ a vektorem posunutí $\tilde{\mathbf{x}}$ v pracovním prostoru. Tato impedance může být přisouzena mechanickému systému charakterizovanému maticí hmotnosti \mathbf{M}_d , maticí tlumení \mathbf{K}_D a maticí tuhosti \mathbf{K}_P , které dovolují specifikovat dynamické chování v pracovním prostoru.

Přítomnost matice \mathbf{B}_A^{-1} dělá systém spojitý. Pokud je třeba udržet linearitu a nespojitost během interakce s prostředím, je nezbytné měřit obecné kontaktní síly, čehož může být dosaženo působením adekvátní síly na senzory, které jsou obvykle namontovány na zápěstí či posledním článku manipulátoru.

Použitím:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h} \quad (\text{IŘ-10})$$

spolu s:

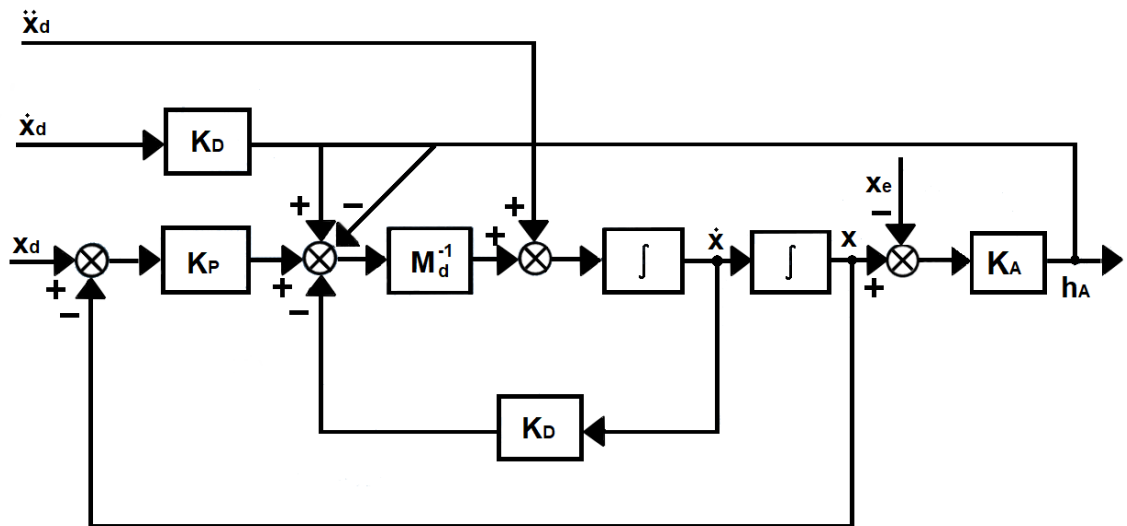
$$\mathbf{y} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{M}_d^{-1}(\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_P\mathbf{x} - \mathbf{M}_d\mathbf{J}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}_A), \quad (\text{IŘ-11})$$

a s předpokladem chyby volného silového měření, získáme:

$$\mathbf{M}_d\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_P\mathbf{x} = \mathbf{h}_A. \quad (\text{IŘ-12})$$

Významným projevem úpravy výrazu (IŘ-10) je, že se v něm po přidání výrazu $\mathbf{J}^T\mathbf{h}$ dokonale kompenzují kontaktní síly, což poskytuje manipulátoru konečnou tuhost s respektem na vnější podmínky. Pro zajištění odpovídajícího chování manipulátoru, je výraz $-\mathbf{J}_A^{-1}\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{h}_A$ zaveden v (IŘ-11), což dovoluje charakterizovat manipulátor s lineární impedancí s ohledem na ekvivalent síly \mathbf{h}_A , tak jako v (IŘ-12).

Výsledné blokové schéma manipulátoru v kontaktu s elastickým prostředím s impedanční kontrolou je na (IŘobr-1).



IŘobr-1: Blokové schéma řízení manipulátoru pomocí impedančního řízení [23]

Chování systému v (IŘ-12) je v rovnováze a je analogické při porovnání vůči kontrole specifikované \mathbf{K}_P . Vztah (IŘ-12) dovoluje kompletní charakterizaci systému dynamiky přes aktivní impedanci specifikovanou

maticemi $\mathbf{M}_d, \mathbf{K}_D, \mathbf{K}_P$. Tyto matice jsou obvykle považovány za diagonální, s čímž souvisí, že impedance je konfigurace nezávislosti a týká se silových komponent. Pokud jde o přímou závislost konfigurace manipulátoru, je vyjadřována momentovými komponenty jako matice \mathbf{T}_A .

Mimoto, podobnou sestavou aktivních a pasivních řízení, je koncept pasivní impedance, který může být zaveden, pokud je interakce síly \mathbf{h}_A generována jako kontakt s prostředím, tj. vlastní hmotností, tuhostí a tlumením. V tomto případě je systém manipulátor – prostředí považován za mechanický systém tvořený dvěma paralelními impedancemi. Poté je dynamické chování podmiňované relativní hmotnou mezi nimi. Jak bylo řečeno dříve, lze předpokládat, že konstrukce mechanického zařízení s vhodnou pasivní impedancí dovoluje manipulátoru lépe zvládnout zadaný úkol, pokud má pevnou trajektorii. [23]

4 Vypracování

4.1 Tvorba dynamického modelu

Pro tvorbu dynamického modelu jsem musela začít úplně od počátku, tj. získat údaje o rozměrech a hmotnostech jednotlivých článků robota, získat momenty setrvačnosti vztažené k centru hmoty (COM) každého článku z literatury [14, 15]. Poté jsem musela začít sestavovat skript pro získání celkového Jacobiánu a uvažovat všech sedm rotačních kinematických dvojic (kloubů). Ovšem k pozdějšímu výpočtu matice dynamiky jsem potřebovala všechny dílčí Jacobiány, které jsem získala postupným odebráním kinematických dvojic od konce manipulátoru směrem k rámu.

K vytvoření Jacobiánu jsem potřebovala získat základní matice rychlostí pro všech sedm kloubů. Poté pro sestavení translační i rotační části Jacobiánu, je nutno vypočítat vektor kartézské rychlosti koncového bodu vůči rámu a celkovou matici rychlosti článku sedm vůči rámu převedenou do souřadného systému rámu. Pro převod souřadného systému jedné matice rychlostí do jiného souřadného systému jsem využívala transformační matice a inverzní matice pro jednotlivé kinematické dvojice, (viz rovnice (J-2)) [24].

Jako další krok k dosažení Jacobiánů jsem musela sestavit vektory pro rotační a translační složku kartézských rychlostí. Rotační část získám z výsledné matice rychlosti v souřadném systému 0 (rámu) a vyberu prvky o pozicích v matici (3,2), (1,3) a (2,1), které představují položky vektoru kartézských úhlových rychlostí. Translační část kartézského vektoru rychlostí vyjadřuje translační pohyb koncového bodu vůči rámu pro složky x , y , z (viz rovnice (J-3)).

Po získání Jacobiánů jsem začala pracovat na sestavení matice dynamiky. Matice dynamiky je odvoditelná ve smyslu Lagrangových rovnic druhého druhu pomocí kinetické rotační a kinetické translační energie celého manipulátoru. Přičemž kinetická translační energie W_{KT} (ve skriptu značena jako I_{iT} - myšleno i -tá iterace sumy) je dána vztahem [25]:

$$W_{KT} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\sum_{i=1}^7 m_i J_{iT}^T(\mathbf{q}) J_{iT}(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}}. \quad (\text{V-1})$$

Část v hranatých závorkách vztahu (V-1) představuje translační část matice dynamiky.

Kinetická rotační energie W_{KR} (ve skriptu značena jako I_{iR} - myšleno i -tá iterace sumy) je dána vztahem [25]:

$$W_{KR} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\sum_{i=1}^7 J_{iR}^T(\mathbf{q}) \mathbf{S}_{i0} \mathbf{I}_i \mathbf{S}_{i0}^T J_{iR}(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}}. \quad (\text{V-2})$$

Část v hranatých závorkách vztahu (V-2) představuje rotační část matice dynamiky. J_{iR} a J_{iT} jsou rotační a translační části Jacobiánů, které transformují zobecněné rychlosti $\dot{\mathbf{q}}$ na kartézské rychlosti, protože kinetická energie je vždy vztažena vůči rámu. Hmotnost článků představuje proměnná m_i . \mathbf{S}_{i0} představuje natočení i -tého článku vůči rámu a \mathbf{I}_i je matice momentů setrvačnosti i -tého článku. Násobením zleva a zprava směrovými maticemi \mathbf{S}_{i0} momentu setrvačnosti \mathbf{I}_i vyjádřím, kolem jaké osy se bude článek otáčet. Pokud osa není kolineární ani s jednou z hlavních os symetrie článku, vznikají deviační momenty, které se projeví nenulovými prvky mimo diagonálu v $\mathbf{S}_{i0} \mathbf{I}_i \mathbf{S}_{i0}^T$.

Poté následovala nejnáročnější část, složení matice dynamiky z její translační a rotační části. Bylo zapotřebí, abych správně sečetla s respektováním rozměru do jednotlivých buněk matice příslušné buňky ze všech translačních, resp. rotačních kinetických energií, které jsem

v předchozí části získala. Níže je příklad pro první tři řádky translační části matice dynamiky.

```

%% translacni casti D / translation parties D
D_translacni(1,1) = simplify(I1t(1,1)+I2t(1,1)+I3t(1,1)+I4t(1,1)+I5t(1,1)+I6t(1,1)+I7t(1,1));
D_translacni(1,2) = simplify(I2t(1,2)+I3t(1,2)+I4t(1,2)+I5t(1,2)+I6t(1,2)+I7t(1,2));
D_translacni(1,3) = simplify(I3t(1,3)+I4t(1,3)+I5t(1,3)+I6t(1,3)+I7t(1,3));
D_translacni(1,4) = simplify(I4t(1,4)+I5t(1,4)+I6t(1,4)+I7t(1,4));
D_translacni(1,5) = simplify(I5t(1,5)+I6t(1,5)+I7t(1,5));
D_translacni(1,6) = simplify(I6t(1,6)+I7t(1,6));
D_translacni(1,7) = simplify(I7t(1,7));

D_translacni(2,1) = simplify(I2t(2,1)+I3t(2,1)+I4t(2,1)+I5t(2,1)+I6t(2,1)+I7t(2,1));
D_translacni(2,2) = simplify(I2t(2,2)+I3t(2,2)+I4t(2,2)+I5t(2,2)+I6t(2,2)+I7t(2,2));
D_translacni(2,3) = simplify(I3t(2,3)+I4t(2,3)+I5t(2,3)+I6t(2,3)+I7t(2,3));
D_translacni(2,4) = simplify(I4t(2,4)+I5t(2,4)+I6t(2,4)+I7t(2,4));
D_translacni(2,5) = simplify(I5t(2,5)+I6t(2,5)+I7t(2,5));
D_translacni(2,6) = simplify(I6t(2,6)+I7t(2,6));
D_translacni(2,7) = simplify(I7t(2,7));

D_translacni(3,1) = simplify(I3t(3,1)+I4t(3,1)+I5t(3,1)+I6t(3,1)+I7t(3,1));
D_translacni(3,2) = simplify(I3t(3,2)+I4t(3,2)+I5t(3,2)+I6t(3,2)+I7t(3,2));
D_translacni(3,3) = simplify(I3t(3,3)+I4t(3,3)+I5t(3,3)+I6t(3,3)+I7t(3,3));
D_translacni(3,4) = simplify(I4t(3,4)+I5t(3,4)+I6t(3,4)+I7t(3,4));
D_translacni(3,5) = simplify(I5t(3,5)+I6t(3,5)+I7t(3,5));
D_translacni(3,6) = simplify(I6t(3,6)+I7t(3,6));
D_translacni(3,7) = simplify(I7t(3,7));

```

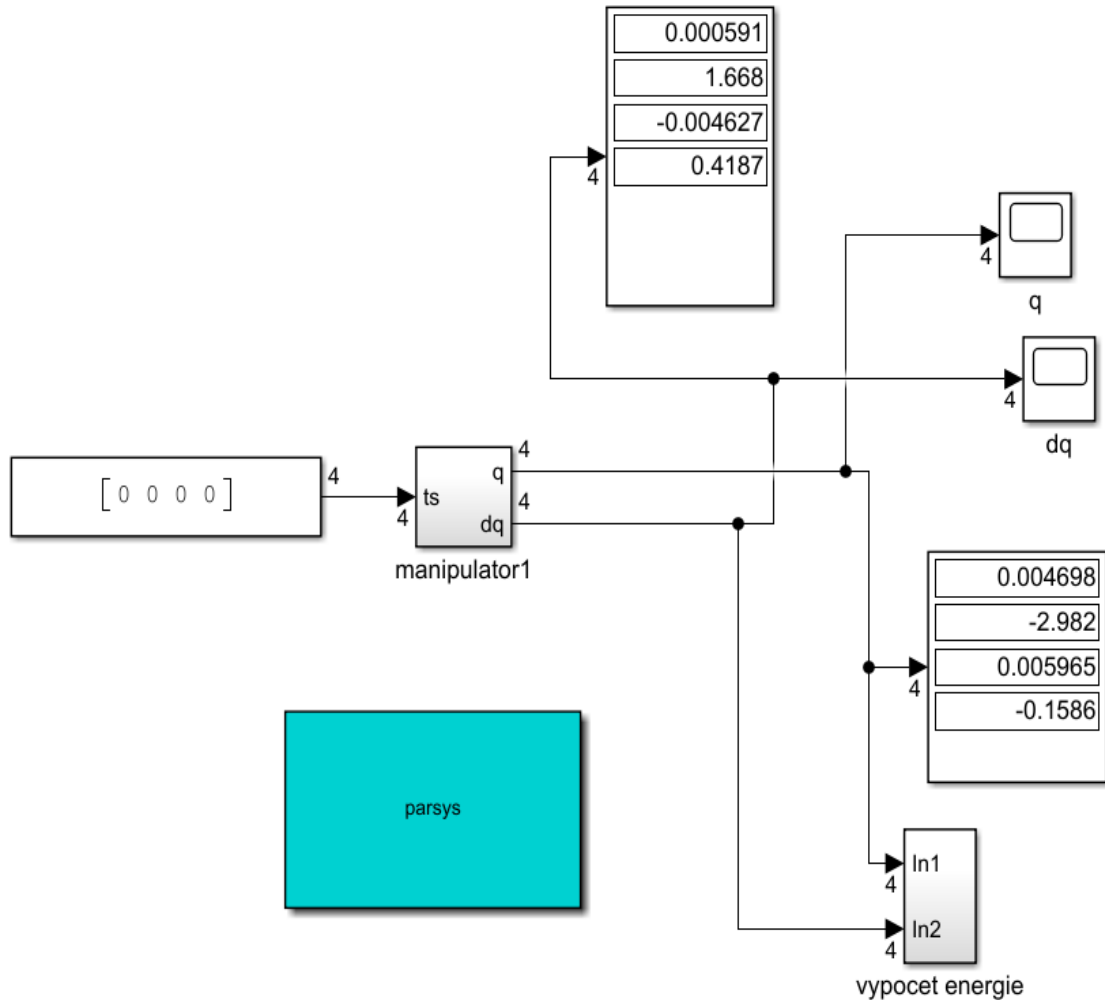
Vobr-1: Příklad prvních tří řádků translační části matice dynamiky.

Stejný postup jako na obrázku (Vobr-1) byl potřeba pro celou matici dynamiky pro obě její složky, tj. rotační a translační, které bylo poté potřeba sečíst a uložit, což kvůli výpočetní náročnosti dílčích úseků zabralo velké množství hodin.

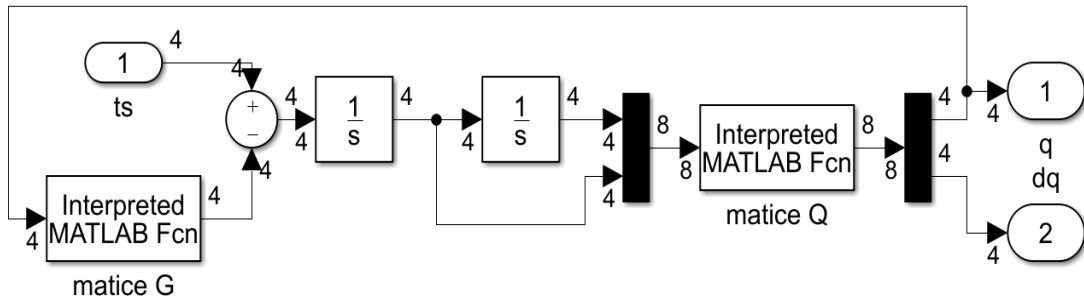
Pro získání pohybových rovnic (V-3) v maticovém tvaru potřebuji matici setrvačných účinků, což je matice dynamiky D , matici tíhových účinků G a matici vazebních účinků sil C :

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q). \quad (V-3)$$

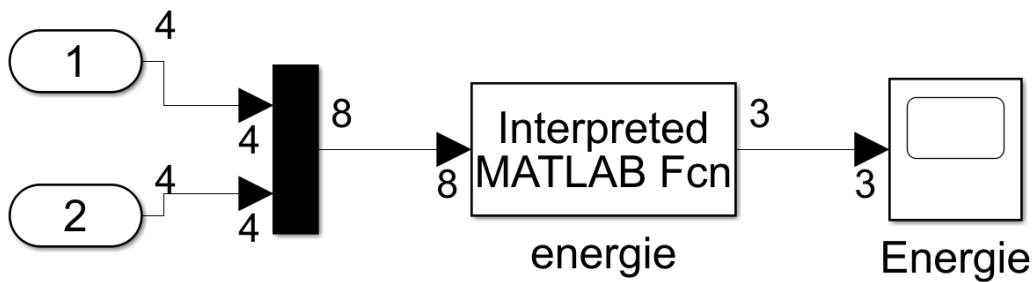
Tento dynamický model jsem poté sestavila v prostředí MATLAB Simulink (Vobr-2), (Vobr-3) a (Vobr-4), kde je pro prvotní představu zjednodušená varianta se čtyřmi články. Články 1, 2 a 7 byly zanedbány a nahlížela jsem na ně jako pokračování článku 3, v případě článků 1 a 2, a článku 6, v případě článku 6.



Vobr-2: Model v Simulinku

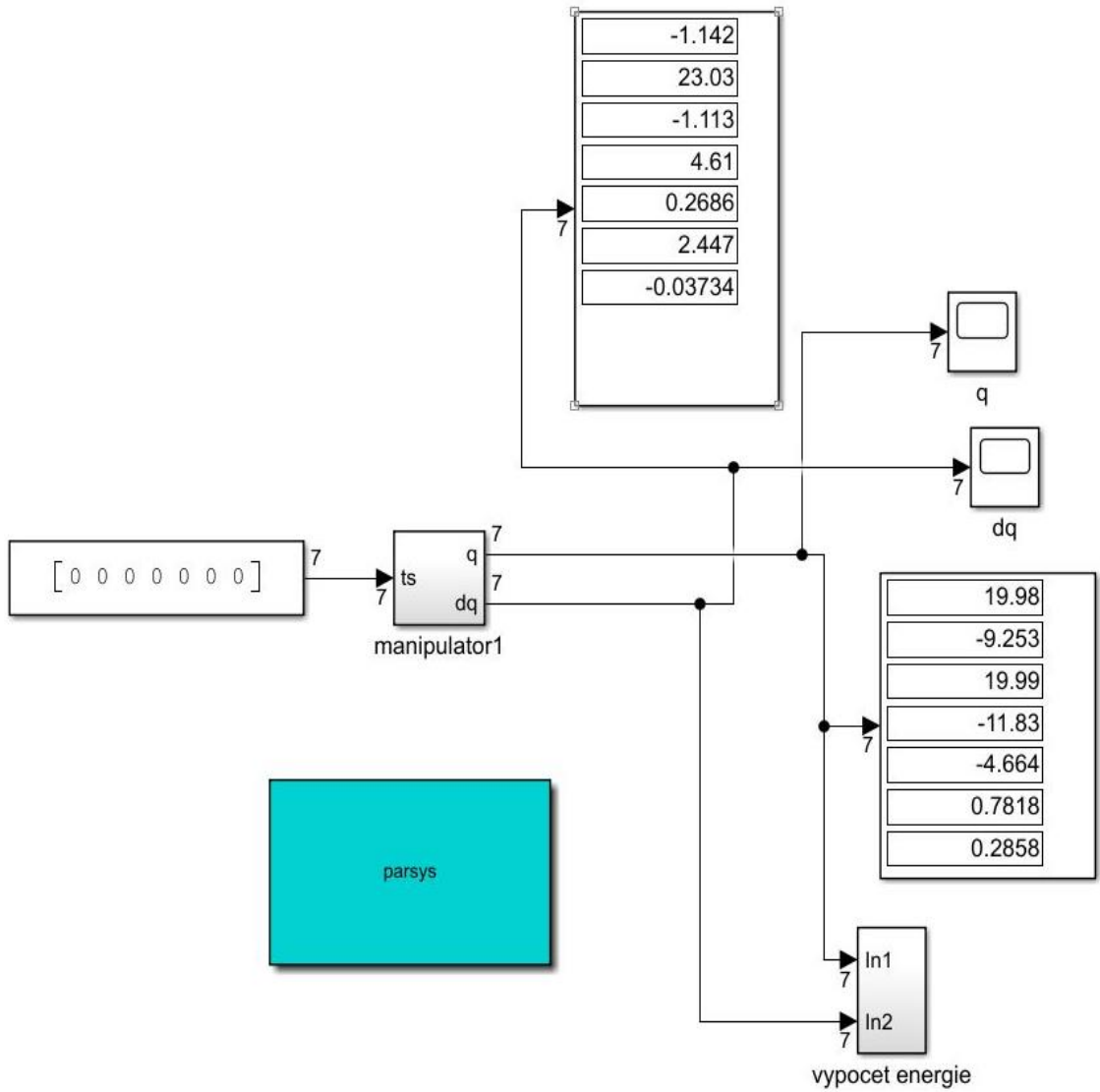


Vobr-3: Model v Simulinku – blok manipulator1

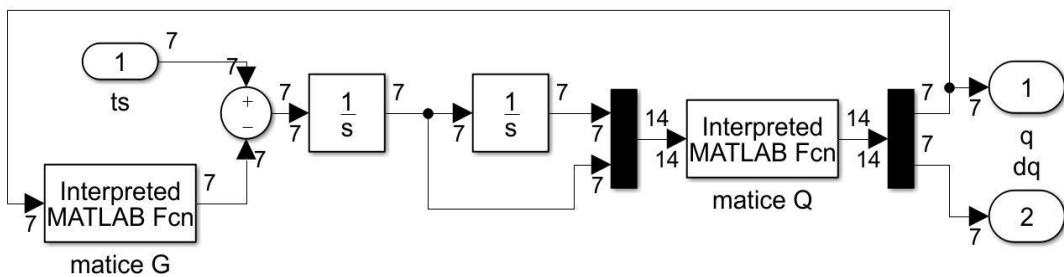


Vobr-4: Model v Simulinku – blok výpočet energie

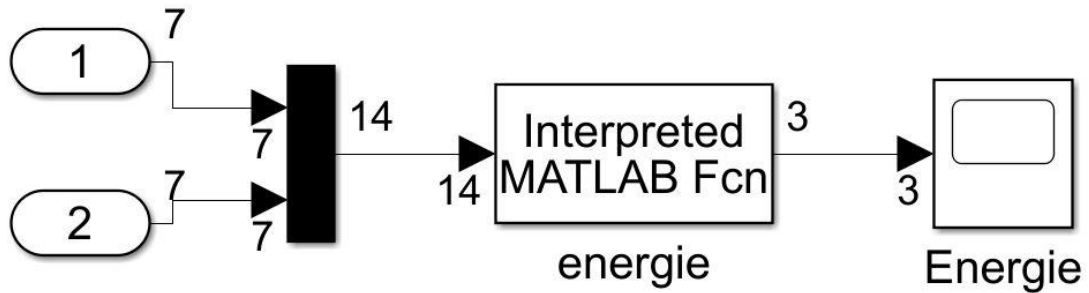
Plná varianta dynamického modelu se všemi sedmi články je níže, (Vobr-5), (Vobr-6) a (Vobr-7). Její nevýhodou a důvodem k vytvoření zjednodušené varianty bylo dlouhé načítání proměnných ze skriptu parsys.m, který se spouští poklepnáním na takto pojmenovaný azurový blok před spuštěním samotné simulace. Kratší a menší varianta parsys.m pro zjednodušený čtyř-kloubový model, zjednodušila hledání a odstraňování chyb na úrovni syntaxe i vstupních parametrů jednotlivých bloků.



Vobr-5: Model v Simulinku



Vobr-6: Model v Simulinku - blok manipulator1



Vobr-7: Model v Simulinku – blok výpočet energie

4.2 Matice vazebných účinků C

Do modelu jsem nezahrnula matici C, která se odvozuje od matice dynamiky D jako parciální derivace jednotlivých prvků matice dynamiky dle příslušných zobecněných poloh, které představují Christoffelovy symboly ch_{ijk} :

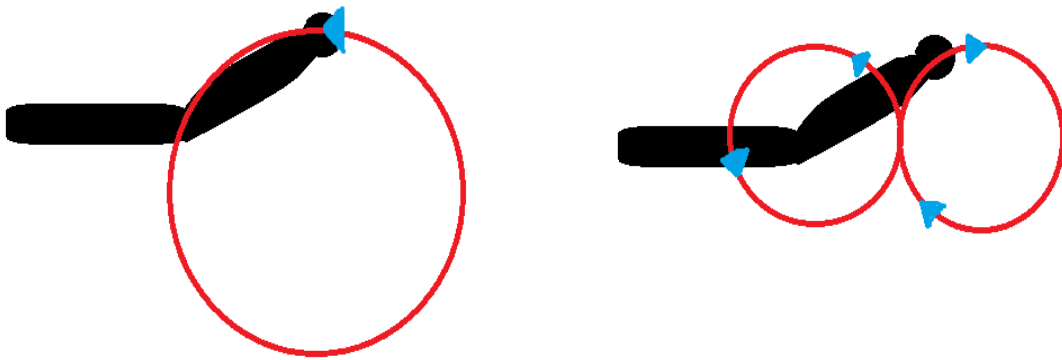
$$ch_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (V-4)$$

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^7 ch_{ijk}(q) \dot{q}_i.$$

Christoffelovy symboly ch_{ijk} jsou následně násobeny příslušnou zobecněnou rychlostí, čímž získám jednotlivé prvky c_{kj} z C matice. Ta představuje vazebné účinky, tudíž nekoná práci (nemá vliv na kinetické ani potenciální energie), proto lze model ověřit a vytvořit i bez ní.

4.3 Návrh trajektorie jako testu k provedení

Po tvorbě dynamického modelu bylo pro mě dalším úkolem vytvořit po konzultaci návrh trajektorie či trajektorií pro rehabilitační experiment. Navržené trajektorie jsem zvolila dvě Na (Vobr-8) je jejich návrh, který je dále v realizaci popsán.



Vobr-8: Vstupní návrh trajektorií kruh a osmička

4.4 Realizace trajektorie

Po návrhu trajektorie následuje z cílů práce tvorba trajektorií, které robot bude vykonávat, aby bylo možné naměřit pacientův úspěch v rehabilitaci či stagnující stav. Tuto trajektorii jsem po konzultaci s fyzioterapeutem zvolila následující: první opisuje kruh s počátkem trajektorie v 90° . Jako druhá vhodná trajektorie, která by se mohla vyzkoušet, je ležatá osmička, která začíná ve středu (Vobr-8: Vstupní návrh trajektorií kruh a osmička).

Zprvu byla snaha udělat několik pevných bodů, póz robota. Tyto pózy jsem tvořila v kombinaci programů RVIZ a MoveIt v Robotickém operačním systému v Linuxu. Z těchto pevných bodů si měl robot vzít konfigurace natočení kloubů a mezi nimi pomocí dostupného softwarového vybavení vykreslit trajektorii. Při pokusech s touto variantou virtuálně v programu RVIZ to vypadalo jako úspěšná volba.

Poté jsem však při spuštění skriptů zjistila, že trajektorie je příliš kostrbatá, objevují se místa, kde se robot musí přeskupovat, aby dané polohy koncového bodu dosáhl. Toto tvoří situace, které by pacientovi zlomily ruku či ji vykloubily, pokud by byla ke koncovému bodu pevně uchycena.

Z tohoto důvodu jsem přešla na variantu sestrojít rovnice pro danou trajektorii koncového bodu. Tato trajektorie musí být tvořena dostatečným množstvím bodů, aby je bylo možné interpolovat s nejnižší možnou chybou, a trajektorie byla hladká.

Tyto body opsané koncovým bodem se pro mě staly kartézskými souřadnicemi koncového bodu a následně byly převedeny do kloubových souřadnic pro každý kloub robotického manipulátoru. K tomuto účelu bylo nevhodnější trajektorii zpracovat objektově v Pythonu, který je snazší než objektové C++ na naučení v krátkém čase, nejsou potřeba knihovny, ale potřebné funkce lze využít z dostupných pro kontrolu z programů RVIZ a MoveIt či jsem je mohla dle potřeb definovat.

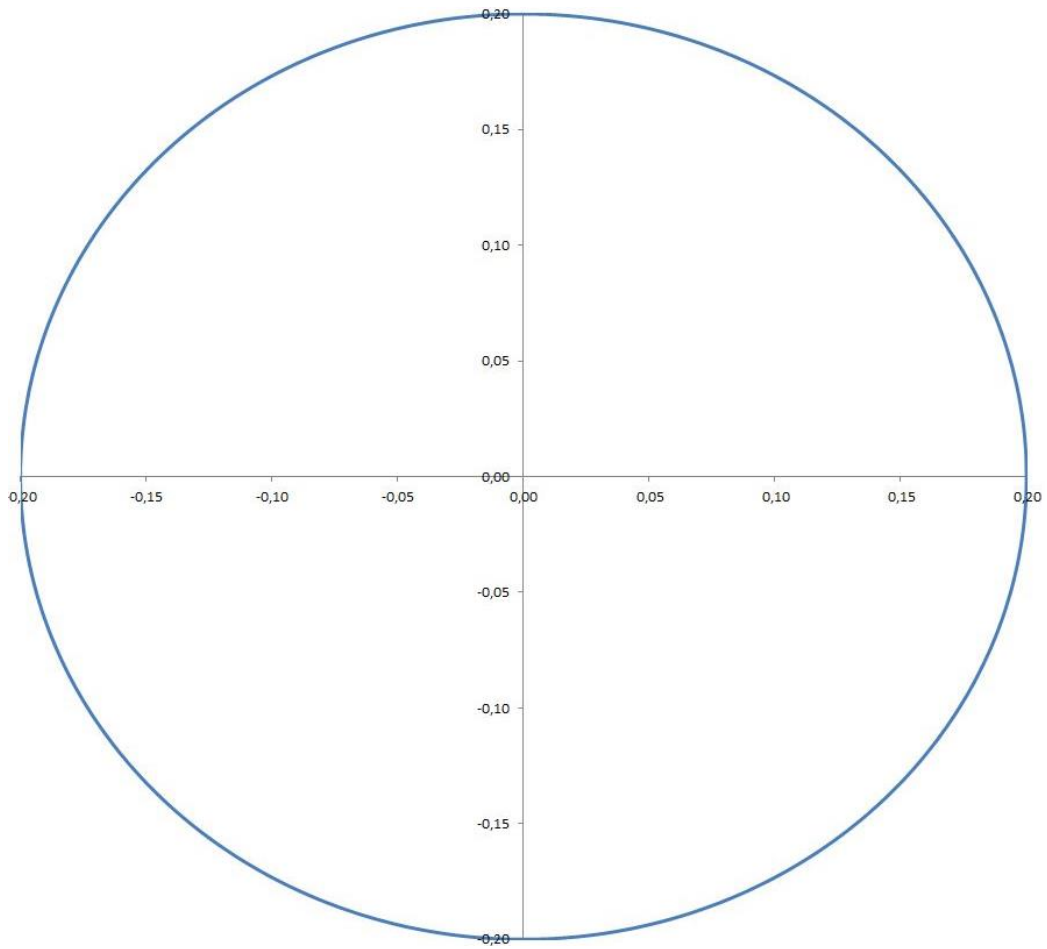
Obě trajektorie jsem vytvořila kombinací sinových a kosinových funkcí, které tvoří souřadnice koncového bodu po obvodu kruhu a po tvaru ležaté osmičky. Jejich grafické znázornění je vyobrazeno dále a odpovídá návrhu doporučeným fyzioterapeutem.

Kruhová trajektorie je tvořena 500 + 1 body pro dostatečnou hladkost a plynulost s krokem $\frac{2}{500}\pi$. Složila jsem ji z rovnic:

$$z = 0,2\sin(t) \quad (V-3)$$

$$y = 0,2\cos(t),$$

kde t nabývá hodnot v intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$. Kruhová trajektorie je graficky znázorněna na obrázku níže (Vobr-9). Velikosti hodnot na osách odpovídají metrům, tj. poloměr kružnice je 20 centimetrů.



Vobr-9: Grafické znázornění trajektorie – kruh

Druhou trajektorii ve tvaru ležaté osmičky jsem se stejným krokem a počtem bodů vytvořila z rovnic:

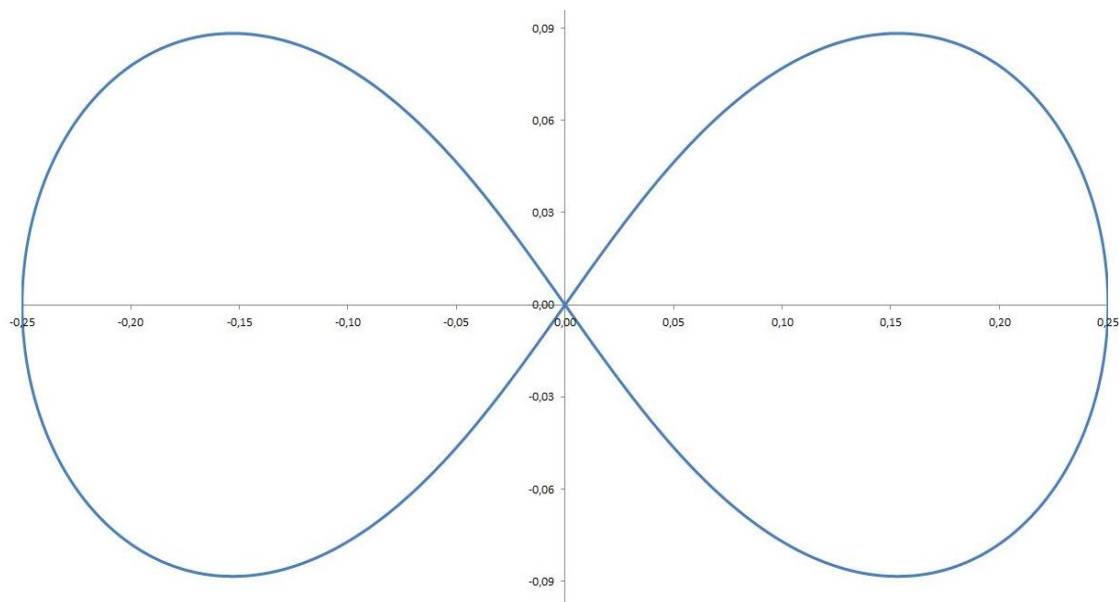
$$z = \frac{1}{2} r \sin(2t) \quad (V-4)$$

$$y = r \cos(t).$$

Rovnice r , působí především v krajních hodnotách, které vyhlazuje do hezkých obloučků:

$$r = \frac{1}{2(3 - \cos(2t))}. \quad (V-5)$$

Tato trajektorie je graficky znázorněna níže (Vobr-10). Velikosti hodnot na osách odpovídají metrům, tj. osmička je vysoká 18 centimetrů a dlouhá 50 centimetrů.



Vobr-10: Grafické znázornění trajektorie – osmička

5 Výsledky

V této kapitole jsou popsány výsledky od předzpracování až po celkové zhodnocení všech parametrů, které byly třeba k tvorbě a ověření dynamického modelu a rehabilitačnímu experimentu.

5.1 Předzpracování dat

Původní data naměřená během experimentu jsem musela převést z rosbag, do kterého jsou data nahrána v Robotickém operačním systému, do souborů čitelných a zpracovatelných MATLABem, vybrat z daných struktur potřebné informace a teprve je dále zpracovávat. Jelikož je velká část softwaru používaná pro kontrolu a spolupráci s robotem KUKA vytvořená přímo pracovníky v CIIRC, nefungují funkce z Robotického toolboxu pro MATLAB, jelikož se komunikační prostředí a hlavičky souborů liší.

Z tohoto důvodu bylo zapotřebí využít již existující sady funkcí z repozitáře intranetu CIIRC GitLab. Tento repozitář dokáže po úpravě několika parametrů, Robotický toolbox nahradit či doplnit (záleží na verzi MATLABu a operačním systému). Přesto způsobuje přetečení paměti pro velké soubory, kterými 36 až 41 sekundové soubory jsou. Pro porovnání se soubory, které jsou jako příklad pro testování funkcí z repozitáře, které mají čtvrtinovou délku a třetinový počet zpráv, přesto zaberou i několik minut na zpracování.

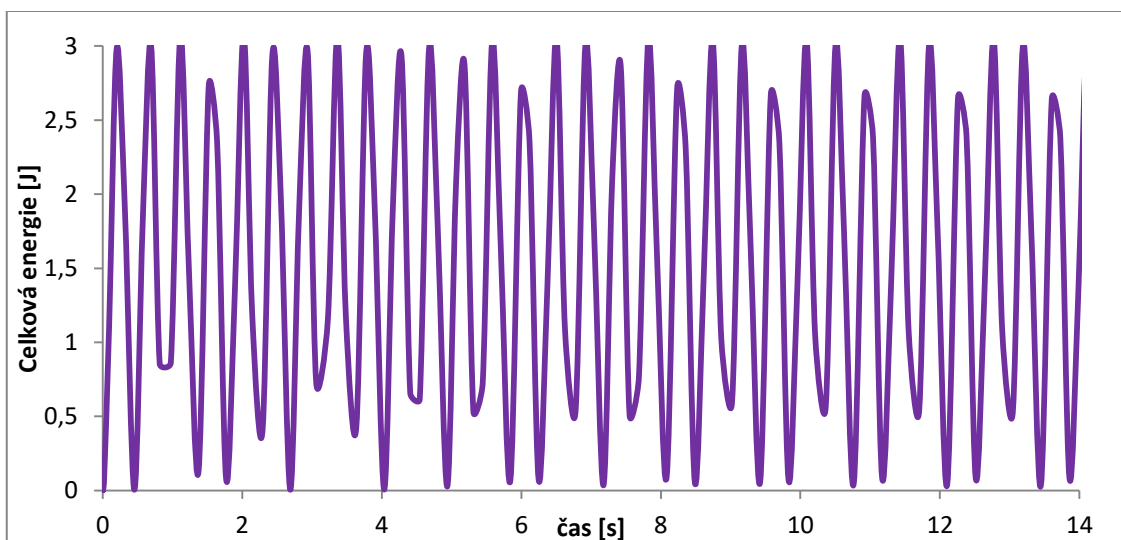
Musela jsem začít hledat další cestu, kterou získat naměřená data. Zkoušela jsem převod pomocí různých skriptů a funkcí, které jsou dostupné v repozitářích GitHub či volně na internetu, přesto byly všechny pokusy neúspěšné kvůli nečitelnosti hlaviček, jiným názvům zpráv a

topiců. Nakonec fungoval balíček `rqt_plot` s funkcí na vykreslení dat, který je v Robotickém operačním systému implementován.

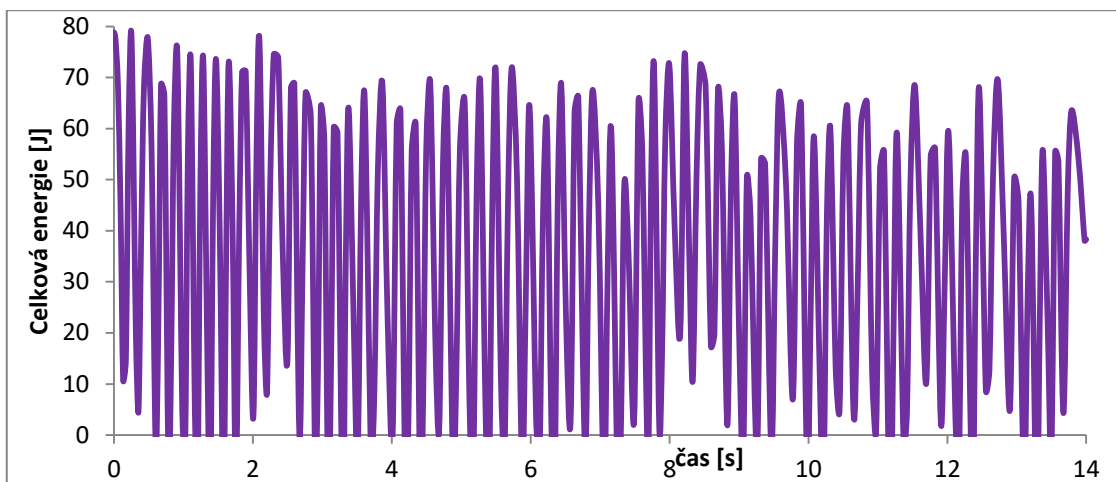
5.2 Validace dynamického modelu

Pro validaci dynamického modelu jsem potřebovala dvě sady dat. První sadou jsou data získaná z prostředí Simulink, druhou sadou jsou data získaná z robota. Data z robota bych pro validaci modelu získala tak, že robot sám bez vnějšího ovlivnění prošel celou trajektorií. Záznam momentů v jednodolných kloubech bych poté porovnála se simulací z prostředí Simulink. Jelikož jsem data získala jen v podobě grafů, musela jsem si ohledně validace modelu vystačit pouze s nimi a s teoretickou validací.

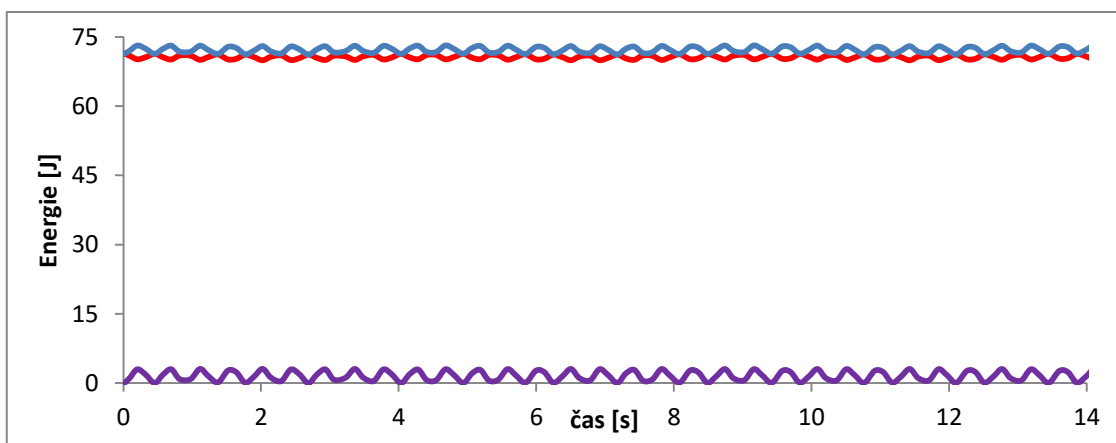
Na (Robr-1) a (Robr-2) jsou vykresleny průběhy celkové energie pro zjednodušený čtyř-kloubový model a pro plný sedmi-kloubový model. Na dalších dvou grafech (Robr-3) a (Robr-4) je také energie modelů: fialově celková energie, modře potenciální energie a červeně kinetická energie. Pro úspěšnou teoretickou validaci je nezbytné, aby si kinetická a potenciální energie byly v protifázi, což odpovídá na obou grafech, viz (Robr-3) a (Robr-4), a aby byl průběh konstantní.



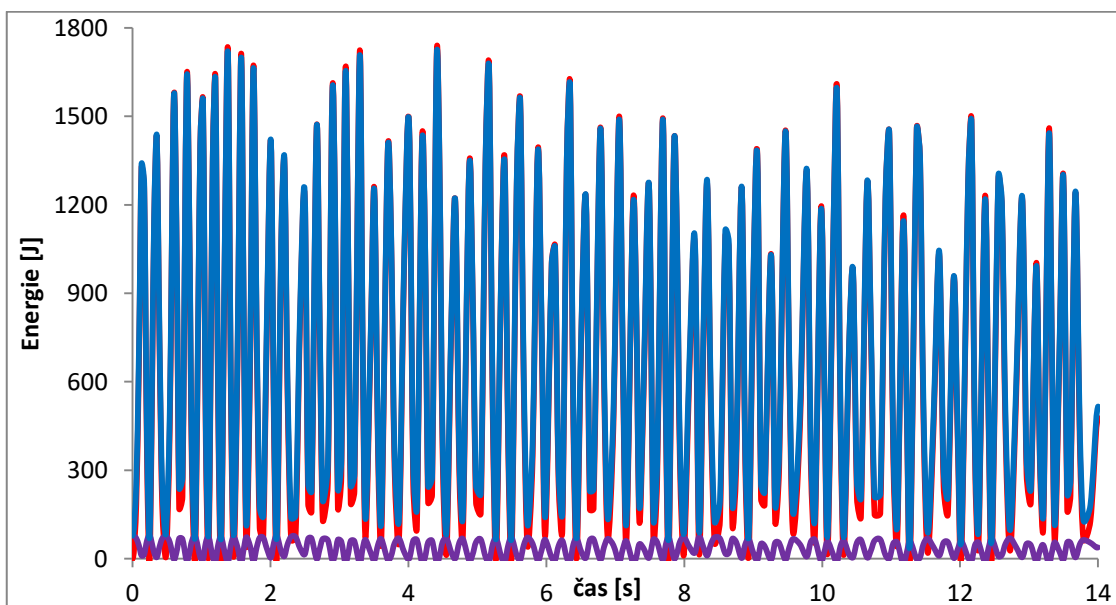
Robr-1: Celková energie zjednodušeného modelu



Robr-2: Celková energie plného modelu



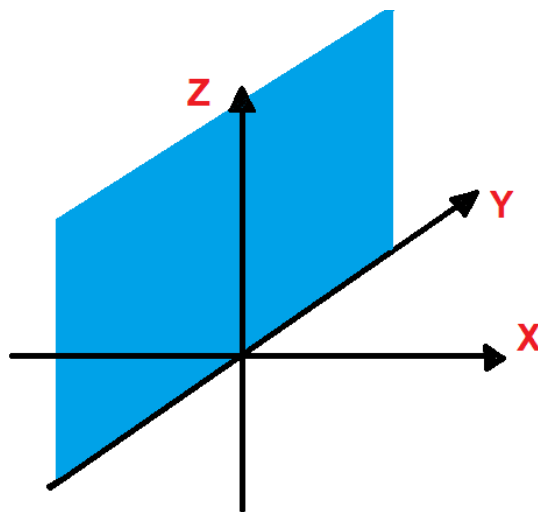
Robr-3: Celková, potenciální a kinetická energie zjednodušeného modelu



Robr-4: Celková, potenciální a kinetická energie celkového modelu

5.3 Výsledky rehabilitačního experimentu

Ve skriptu pro trajektorii je možné volit mezi dvěma variantami poddajnosti. První variantou je průběh s konstantním průběhem tlaku a v tahu na paži pacienta, což znamená, že se parametr stiffness neměnil v rámci celé trajektorie. Druhou variantou je adaptivní průběh, kdy se parametr stiffness mění v průběhu trajektorie, což znamená, že se vliv na pacientovu paži mění. Tento konstantní či adaptivní odpor byl v celé trajektorii stejný, resp. proměnlivý, při působení pacienta na koncový bod i při průchodu samotného robota. Byla snaha, aby se pohyb udržoval v rovině YZ, síla F_x je tedy minimální a stejná pro oba typy průchodů. Je nutné zmínit, že osový systém je trochu jiný, viz (Robr-5), modře je rovina YZ, ve které se trajektorie uskutečňují.



Robr-5: Osový systém robota

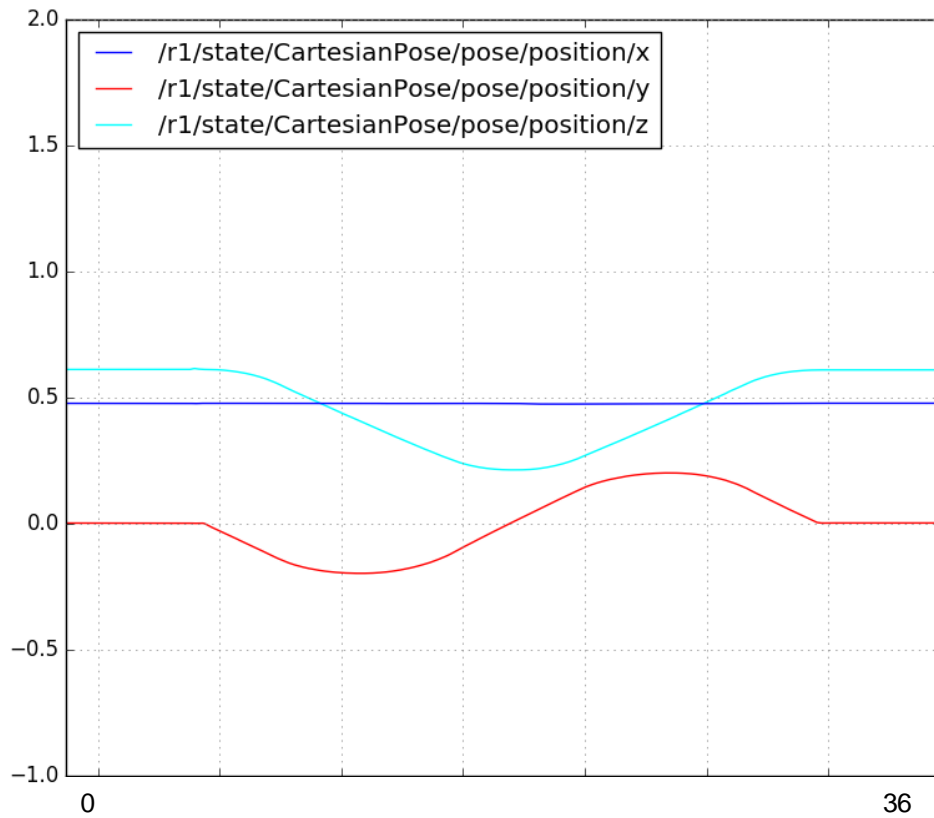
Porovnání je vždy mezi daty z trajektorie, kterou prošel robot sám, a poté s trajektorií, kterou prošel při působení člověka – mne – na koncový bod. Rovné hladké úseky představují čas, kdy než se robot dal do pohybu od počátku měření či než se ukončilo měření, díky čemuž jsou znát nenulové momenty a síly k udržení robota vůči gravitaci v dané poloze.

Při pohledu na grafy pozic pro obě trajektorie je na křivkách patrné chvění, pokud člověk do trajektorie zasahoval, čemuž odpovídá snaha manipulátoru, udržet se v žádané trajektorii, i když je z ní člověkem vychylován, což senzory zaznamenaly a projevuje se mírným třesem.

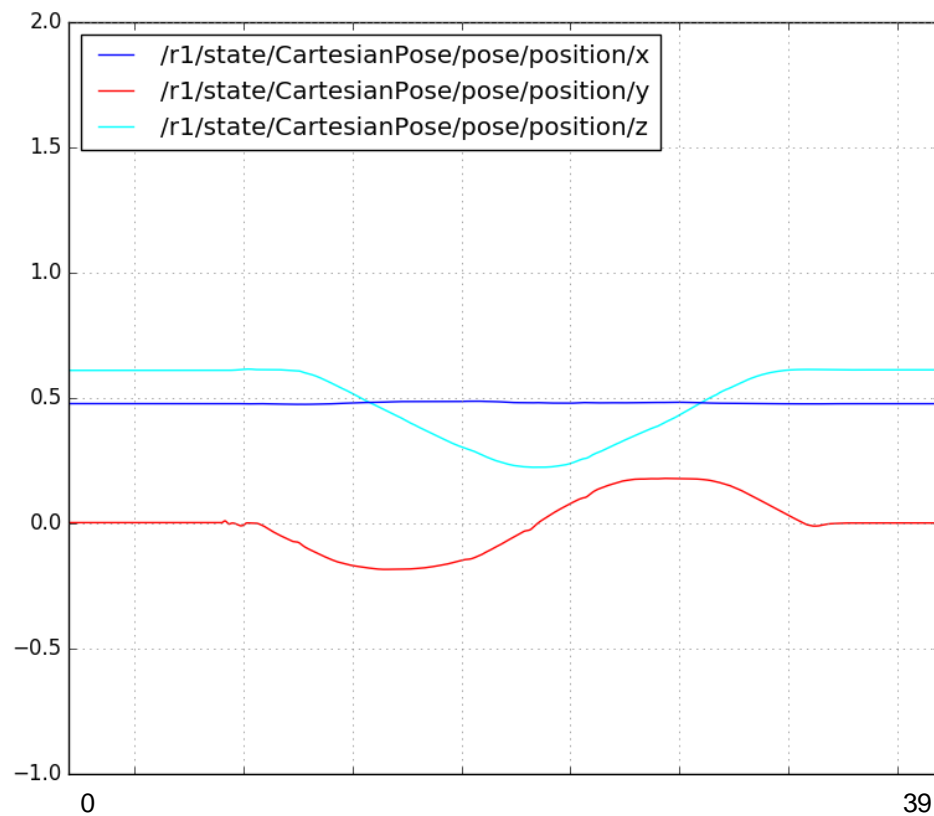
Když je nastavena konstantní tuhost (stiffness), projeví se to tím, že se vliv pacienta na koncový bod bude kompenzovat větším odporem. To znamená, že úměrně k větší snaze robota vychýlit z trajektorie, bude odpovídat větší snaha robota v trajektorii zůstat, pokud se nepřekonají meze kloubů, kdy sám pro vlastní bezpečnost vypne, bude se maximálně snažit, aby odchylka od trajektorie byla minimální, čemuž budou odpovídat momenty a síly. Pro přirovnání, kdyby byl limit kloubů dostatečně velký, tak by člověk při maximální snaze robota vychýlit měl pocit, jako by tlačil vůči zdi domu a snažil se ho posunout.

Pokud je nastavena proměnlivá tuhost, bude se tuhost měnit a jejím nastavením lze dosáhnout toho, že při opisování trajektorie budou na pacientovu paži působit v různých částech trajektorie různé síly, které lze použít pro trénink svalů i měření jejich svalové síly. Působící síly budou od svalů pacienta, gravitace i robota, pokud by pacient dle požadavků fyzioterapeuta působil jedním směrem v rovině YZ konstantně či se o to snažil, přesně by působení robota ovlivňovalo určité svaly jeho paže.

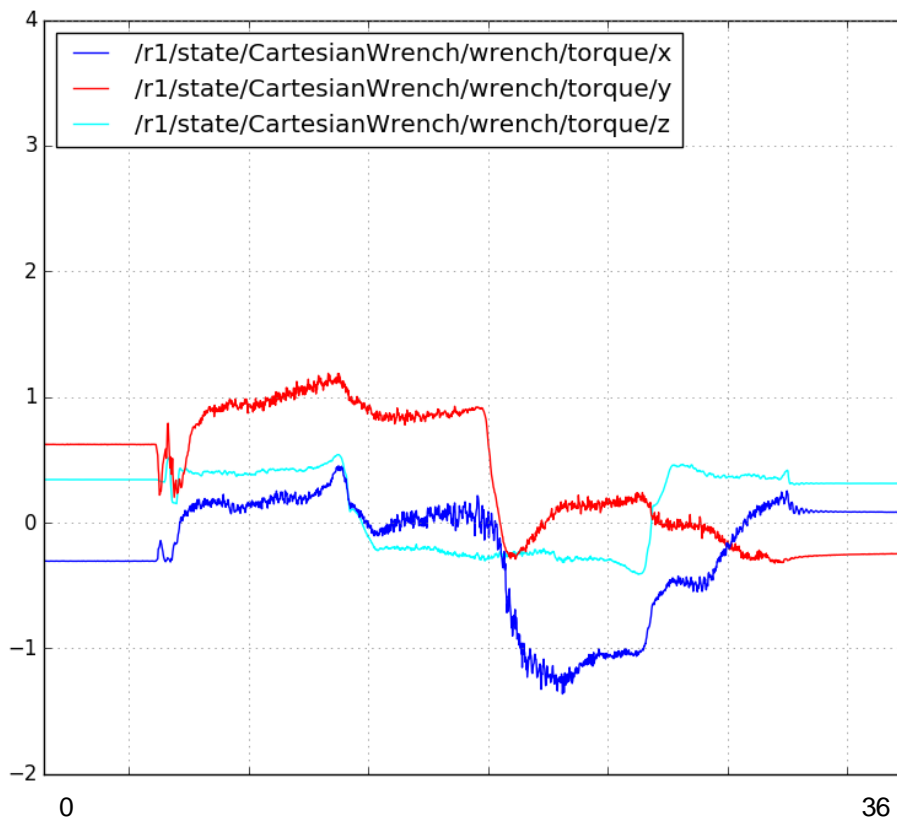
Na grafech níže jsou vykreslené pozice koncových bodů, síly a momenty působící na koncový bod pro obě trajektorie – kruh a osmička, kdy byl průběh v tahu či tlaku na paži pacienta konstantní. Pro všechny grafy je na ose x čas, který ukazuje pouze nulu a konečnou hodnotu. Na ose y jsou u pozic koncového bodu jednotkou metry, pro momenty jsou jednotkou Newton metry a pro síly jsou to Newtony.



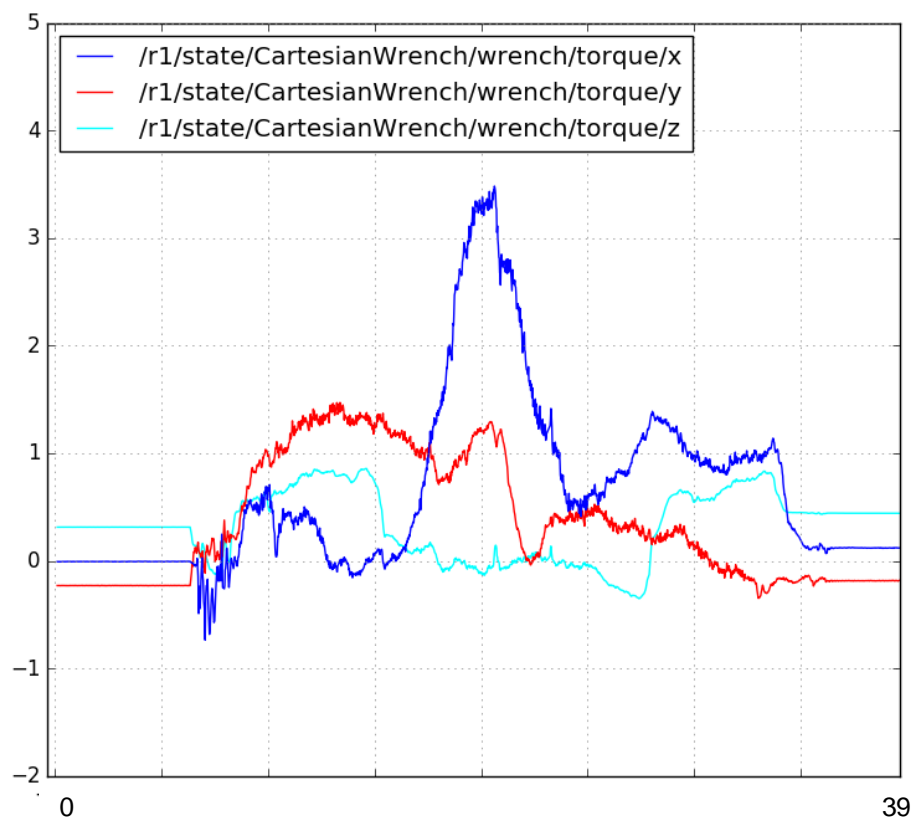
Robr-6: Pozice koncového bodu – trajektorie kruh, bez člověka



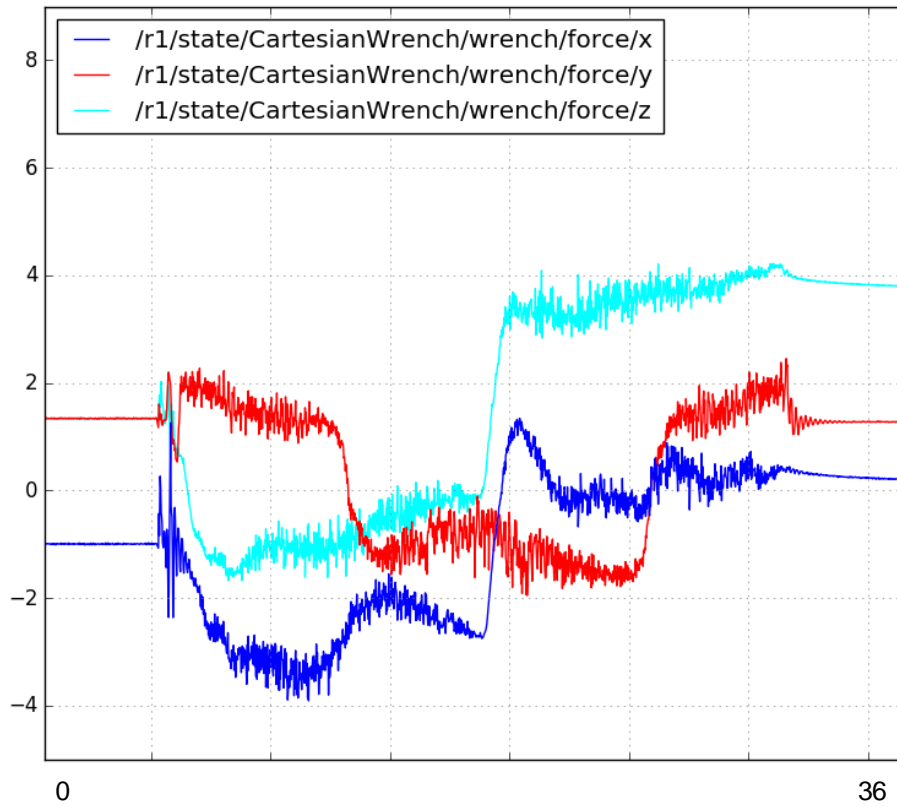
Robr-7: Pozice koncového bodu – trajektorie kruh, s člověkem



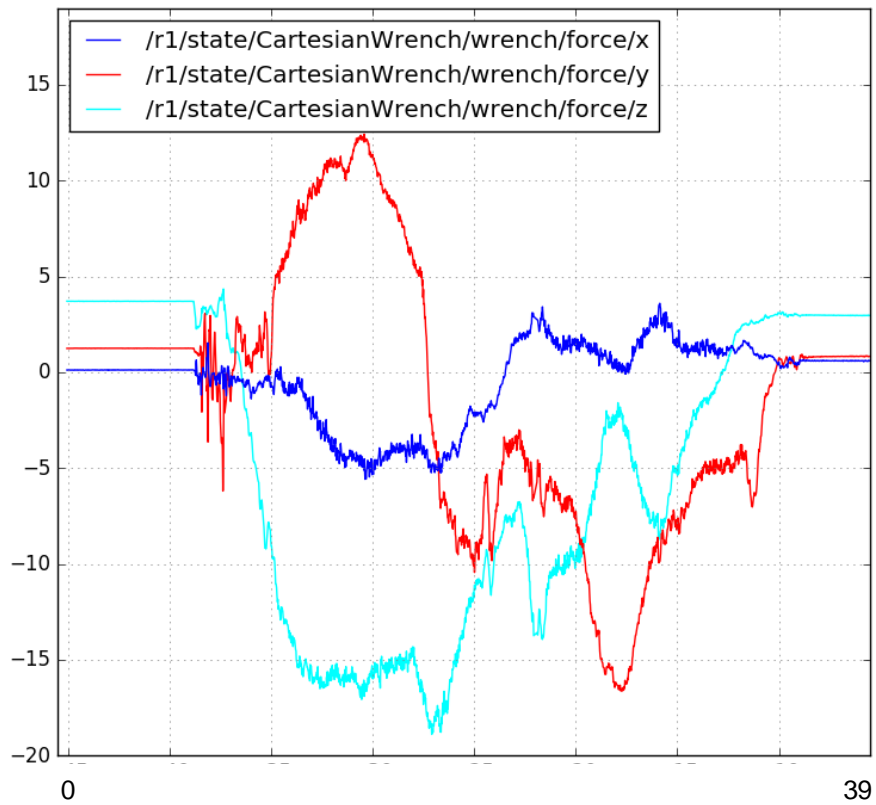
Robr-8: Momenty koncového bodu – trajektorie kruh, bez člověka



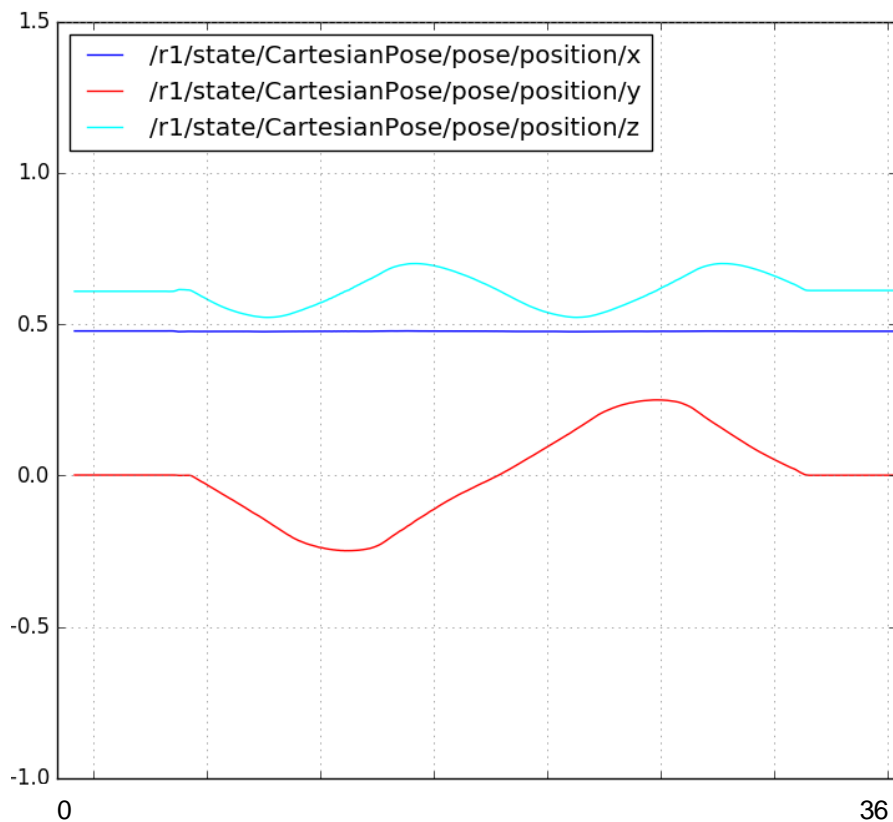
Robr-9: Momenty koncového bodu – trajektorie kruh, s člověkem



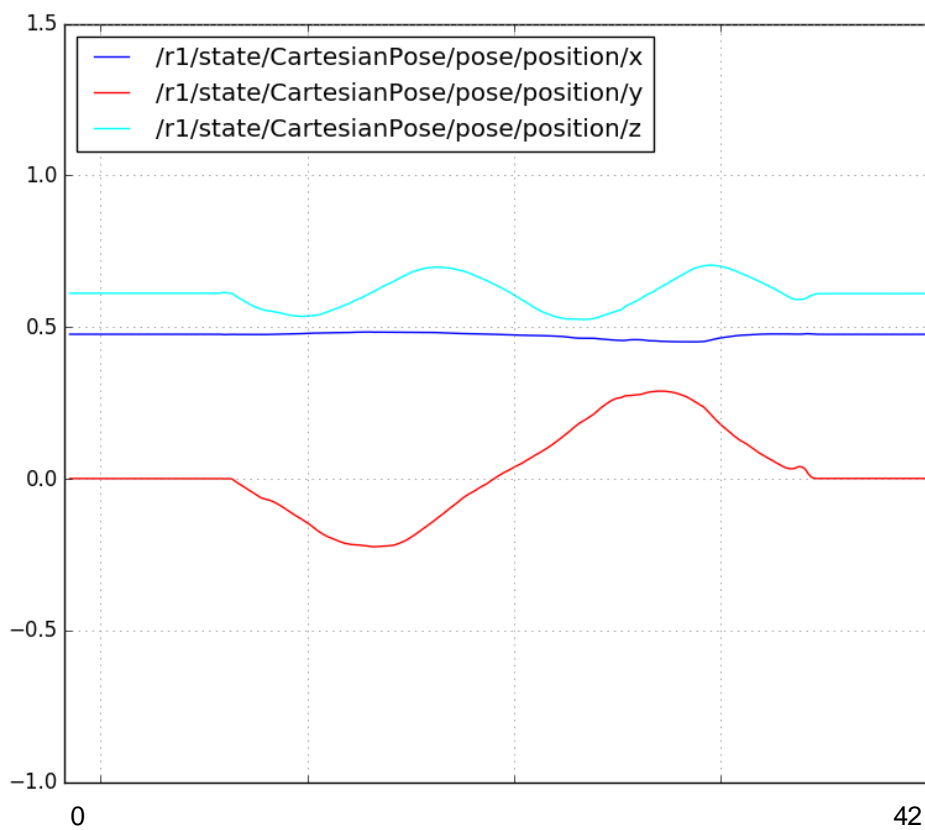
Robr-10: Síly koncového bodu – trajektorie kruh, bez člověka



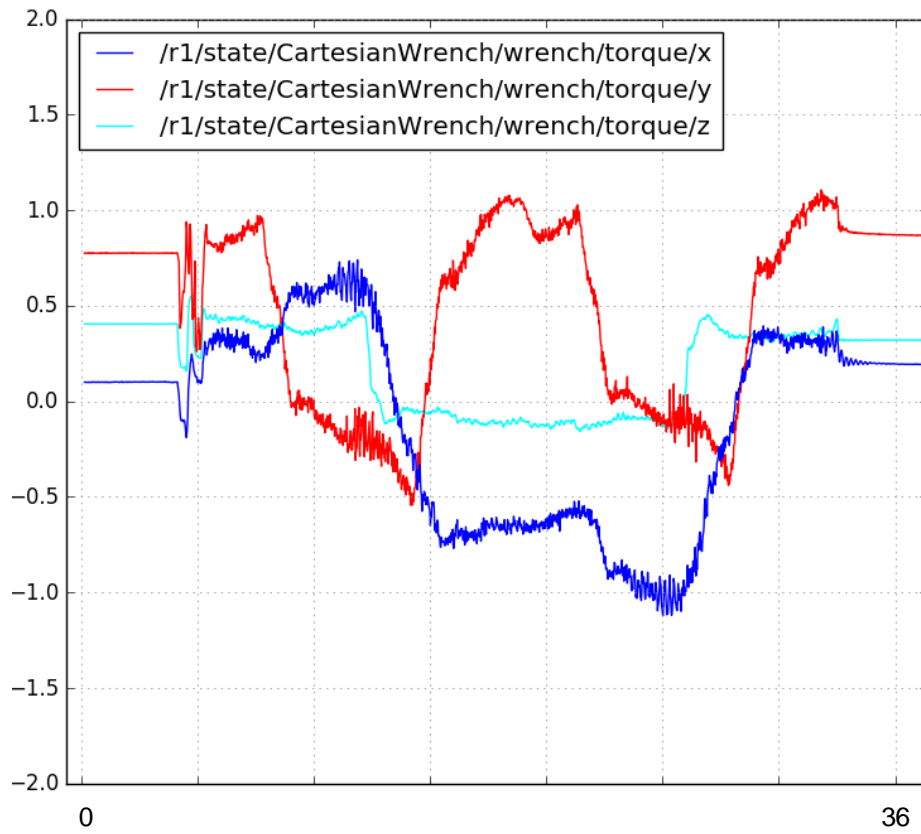
Robr-11: Síly koncového bodu – trajektorie kruh, s člověkem



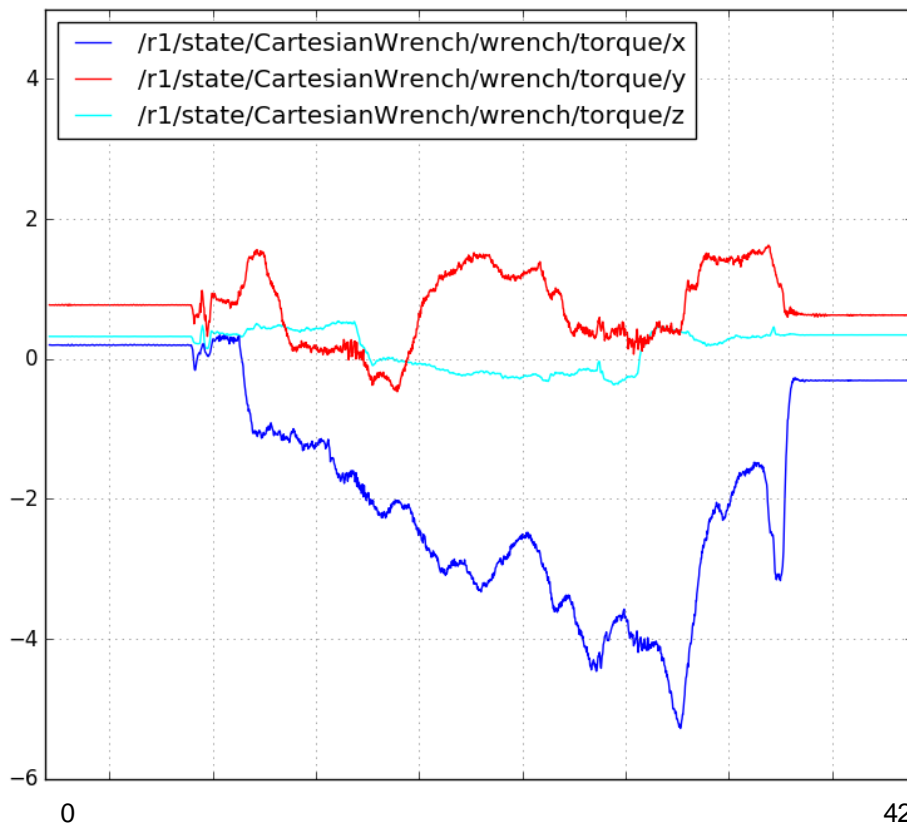
Robr-12: Pozice koncového bodu – trajektorie osmička, bez člověka



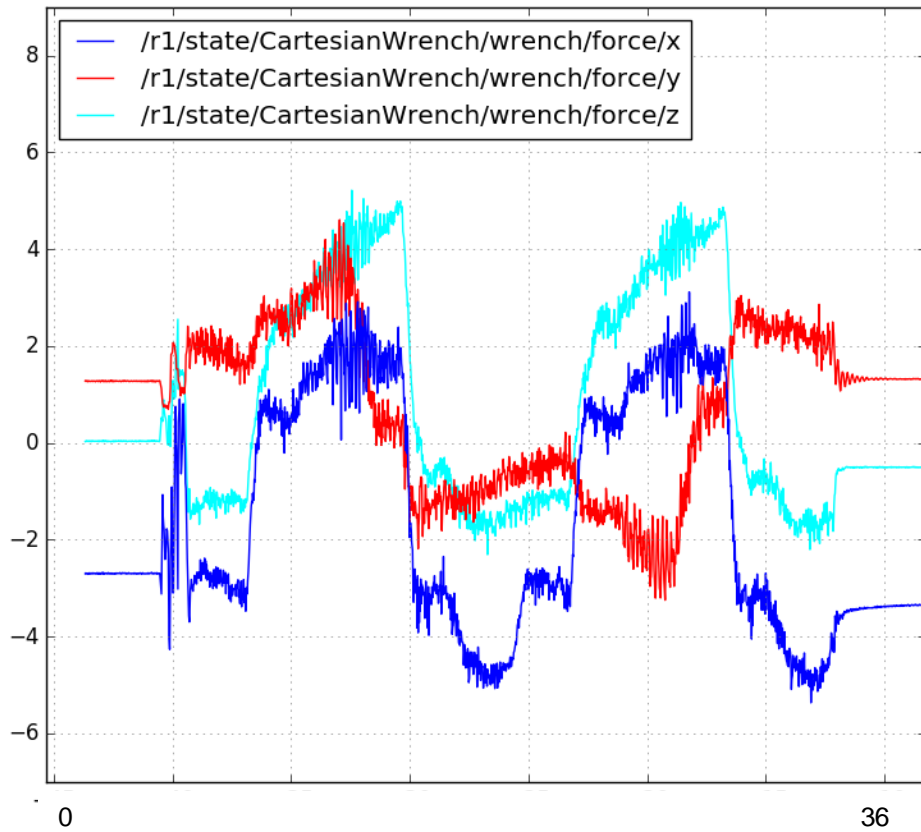
Robr-13: Pozice koncového bodu – trajektorie osmička, s člověkem



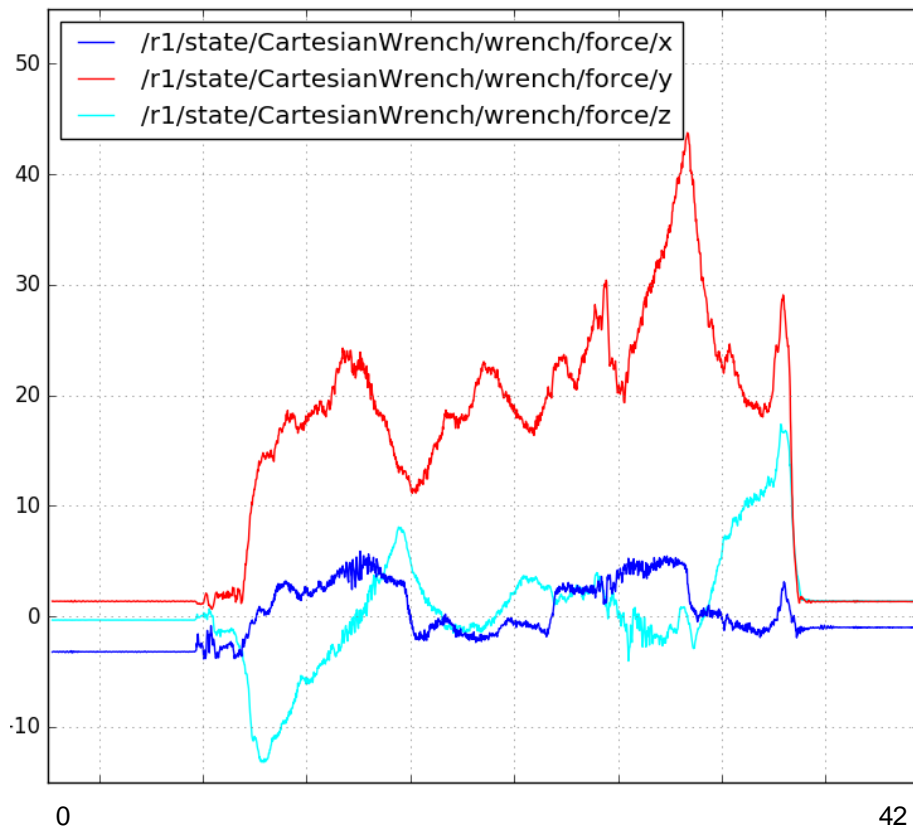
Robr-14: Momenty koncového bodu – trajektorie osmička, bez člověka



Robr-15: Momenty koncového bodu – trajektorie osmička, s člověkem



Robr-16: Síly koncového bodu – trajektorie osmička, bez člověka



Robr-17: Síly koncového bodu – trajektorie osmička, s člověkem

První zdokumentovaný experiment předpokládá pacientovo aktivní spolupráci, působení konstantní síly ve směru roviny YZ, přičemž koncový bod je ve spojení s pacientem, drží madlo v dlani. Místem, kde dochází k pružnému přetahování mezi pacientem a robotem, je právě koncový bod. Tento koncový bod je silově poddajný v osách x , y , z a má konstantní poddajnost po celé kruhové, resp. osmičkové trajektorii. Kartézské síly koncového bodu robota jsou v každém časovém okamžiku rozkládány do kloubů pacienta a jeho svalů, tak jak požaduje fyzioterapeut.

Různým jednotlivým bodům trajektorie odpovídá různá konfigurace kloubů robota i pacientovy ruky, protože je v každém okamžiku zapojována jiná skupina pacientových svalů a každý sval s jinou měrou. V každém takovém bodě se dle dané konfigurace paže i robota rozkládají síly dodané robotem i pacientem zpět do robota i pacienta a jejich kloubů.

Přepnutím do možnosti měnit (adaptovat) silovou poddajnost koncového bodu robota během pohybu s pacientovou paží po kruhové trajektorii, pokud pacient vykazuje konstantní sílu v rovině YZ, je možné zajistit jakési odlehčení pro danou svalovou skupinu v rámci dané fáze trajektorie. Při každé konfiguraci paže pacienta dochází také k zapojování jiných svalů, takže lze otestovat různé svaly a svalové skupiny či je naopak trénovat nebo vůči zátěži odlehčovat.

6 Diskuze

Hlavním cílem bylo vytvořit dynamický model a prakticky jej ověřit. Ověření probíhalo pomocí dvou trajektorií, kterými byl model ověřen. Zároveň byly tyto trajektorie označeny za vhodné, pokud by byly použity v praxi pro rehabilitační účely, měření pokroku pacienta, který by nebyl zasažen subjektivním názorem fyzioterapeuta či ovlivněn střídáním se několika fyzioterapeutů mezi mnoha pacienty, například v rehabilitačních ústavech.

Tvorba dynamického modelu byla časově náročná, protože kontrola jednotlivých úseků MATLABovských skriptů někdy trvala i hodinu, než se MATLAB dostal k žádané hodnotě. Toto bylo zvláště znát při tvorbě matice dynamiky D , kdy bylo nutné postupovat po řádcích, v některých případech dokonce po jednotlivých buňkách matice, aby se čas potřebný pro výpočet snížil i nedošlo chybě z nedostatku paměti potřebné pro výpočet, což se stalo mnohokrát. Zvláště při jejím vyčíslování, kdy průměrný čas na buňku odpovídal 200 sekundám, pro představu, buněk matice dynamiky v plném modelu je 49.

Samotný model v Simulinku při testování funkčnosti zprvu pro nejkratší variantu, manipulátor se dvěma články, fungoval svižně a bez potíží. Následná úprava na sedm kloubů způsobila, že se simulace protáhla na dlouhé minuty, přestože měla trvat několik sekund. Také se objevilo plno chyb, které krátká simulace nezaznamenala či které se skryly v příliš jednoduchém zadání. Z tohoto důvodu jsem přešla na zjednodušenou variantu se čtyřmi klouby se známými vlastnostmi manipulátoru, na které se chyby a změny v nastavení upravily a odstranily. Následný návrat k plnému modelu ukázal, že simulace nesmí být delší než 14 sekund, jinak přetéká paměť a vytváří se v simulaci nesmysly v podobě různých výkyvů,

které jsou s každou simulací jiné, jde o pouhý nepohodlný šum přetékající paměti pro proměnné.

Z výše uvedeného plyne mé doporučení, že MATLAB je pro vytvoření modelu příznivější, ale pokud je Jacobián i matice D větší či je robot náročnější konstrukce, bylo by vhodnější použít výkonný počítač, běžný herní nestačí, či zkusit využít možnosti kompilace do jiného programovacího jazyka, aby se snížila náročnost výpočtů.

Mírné chvění, výkyvy, na grafech (Robr-1) a (Robr-2) pro celkovou energii, která by měla být úplně konstantní, je nejspíše z důvodu převzatých momentů setrvačnosti z [15], které nejspíš vlivem zaokrouhlování či drobnými nepřesnostmi způsobují, že polohy těžišť a matic setrvačnosti si úplně neodpovídají, což se na modelu projevuje. To potvrzuje i (Robr-4), kdy se sice přelévá hodně energie, ale rozdíl potenciální a kinetické energie je vůči tomu malý.

Grafy průběhů trajektorií výrazně rozlišují, kdy trajektorii procházel robot sám a kdy na jeho koncový bod bylo působeno, z čehož se dá vizuálně odečíst působení pacienta na koncový bod. Síly i momenty při působení člověka jsou i několikanásobně větší, přesto stále opisují hodnoty získané z trajektorie, kdy ji robot opisoval sám. Složka z osy x je obvykle stejná při působení i nepůsobení člověka na koncový bod a minimální, jelikož byl záměr, aby trajektorie udržela rovinu YZ , nebylo taženo ve směru osy x .

7 Závěr

V diplomové práci jsem splnila zadání a stanovené cíle. Navázala jsem velmi volně na diplomovou práci mé předchůdkyně, která teoreticky i prakticky dokázala využitelnost silově poddajného robota KUKA LBR iiwa 7 R800 pro robotickou rehabilitaci, při hledání dynamického modelu tohoto manipulátoru a jeho ověření.

V úvodu této práce jsem se zaměřila na přehled pokroku od historie do současného stavu v oborech fyzioterapie, rehabilitačního lékařství a robotické rehabilitace, která se používá stále častěji a jejího vývoje. Nastudovala jsem a aplikovala výpočet Jacobiánu a tvorbu dynamického modelu. Dynamický model jsem ověřila simulací i porovnáním dat ze simulace vůči záznamu z experimentu.

Ve spolupráci s pracovištěm v CIIRC ČVUT vedeným profesorem Hlaváčem jsem měla k dispozici dva manipulátory silově poddajného robota KUKA LBR iiwa 7 R800, které v sobě nemají původní softwarové vybavení Sunrise dodané firmou KUKA, ale pracují v programovém rozhraní Robotického Operačního Systému (ROS) v prostředí Linuxu (Ubuntu) a skriptech psaných v programovacích jazycích C++ a Python.

Vytvořila jsem programové vybavení a postup, jak podle požadavků na experiment navržený fyzioterapeutem měnit odpor koncového bodu během pohybu po požadované trajektorii s cílem působit na pacientovu paži v souladu s cíli cvičení od fyzioterapeuta. Sestavila jsem a naprogramovala dvě trajektorie v programovacím jazyku Python, které robotický manipulátor vykonával, aby vedl paži měřené osoby, kterou jsem byla já. Ve skriptu lze přepínat mezi oběma trajektoriemi a možnostmi, kdy je tuhost konstantní a kdy je proměnlivá. Skripty, impedanční řízení, dostupné z tabla ovladače dostupného ke každému z obou manipulátorů, a

údaje ze senzorů v podobě sil a momentů v jednotlivých kloubech mi dovolily udělat rehabilitační experimenty, přestože na zdravé osobě (na mně), nikoliv na pacientovi.

Napsala jsem veškeré potřebné skripty pro tvorbu dynamického modelu v MATLABu. Dynamický model jsem poté navrhla, sestavila a otestovala v prostředí MATLAB Simulink, získané hodnoty jsem převedla do grafů, které mi na základě teoretické validace potvrdily správnost modelu.

Kdyby byly trajektorie využity tak, jak byly navrženy a otestovány, mají široké uplatnění při pokročilých fázích rehabilitace a testování pokroku ve chvíli, kdy už není tak znatelný vizuálně. Přesto se navržené metody nehodí pro někoho, kdo teprve s rehabilitací začíná a nemá žádnou či velmi malou svalovou sílu, protože experiment vyžaduje, aby byl pacient schopen působit rovnoměrnou silou či vytvářet konstantní kartézskou rychlost při pohybu koncovým bodem. Též madlo neodpovídá tomu, aby jím pacient manipulovat, pokud jej nedokáže pevně sevřít v dlani.

Ze všeho výše uvedeného plyne, že jedním ze dvou hlavních přínosů této úlohy by mohla být objektivizace měření pokroku či stagnace zlepšení pacienta v pokročilých fázích rehabilitace, pokud by výsledky této práce byly uvedeny do praxe, druhým je vytvoření funkčního a správného dynamického modelu manipulátoru.

Reference:

- [1] Physical medicine and rehabilitation. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018, 20 February 2018 [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Physical_medicine_and_rehabilitation
- [2] Physical therapy. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018, 9 March 2018 [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Physical_therapy
a dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Fyzioterapie>
- [3] Klinika Rehabilitačního Lékařství. Historie Oboru Rehabilitace [online]. 1. lékařská fakulta Univerzity Karlovy a Všeobecná fakultní nemocnice v Praze [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: <http://reha.lf1.cuni.cz/node/11>
- [4] FINCH, Lois, Hugues BARBEAU a Bertrand ARSENAULT. Influence of Body Weight Support on Normal Human Gait: Development of a Gait Retraining Strategy. *Physical Therapy*. 1991, 71(11), 842-855. DOI: 10.1093/ptj/71.11.842. ISSN 0031-9023. Dostupné také z: <https://academic.oup.com/ptj/article/2728732/>
- [5] PODĚBRADSKÝ, Jiří a Radana PODĚBRADSKÁ. Fyzikální terapie: Manuál a algoritmy: manuál a algoritmy. Praha: Grada, 2009. ISBN 978-80-247-2899-5.
- [6] JANDA, Vladimír. Funkční svalový test. Vyd. 1. čes. Praha: Grada, 1996. ISBN 80-716-9208-5.
- [7] DIETZ, Volker, Roland MÜLLER a Gery COLOMBO. Locomotor activity in spinal man: significance of afferent input from joint and load receptors. *Brain*. 2002, (125), 2626 - 2634. Dostupné také z: https://www.researchgate.net/profile/Gery_Colombo/publication/11036855_Locomotor_activity_in_spinal_man_Significance_of_afferent_input_from_joint_load_receptors/links/00b49528d2626bc0ed000000.pdf
- [8] COLOMBO, Gery a Volker DIETZ. Treadmill training of paraplegic patients using a robotic orthosis. *Journal of Rehabilitation Research and Development*. 2000, 6(37), 693-700. Dostupné také z: https://www.researchgate.net/profile/Matthias_Joerg/publication/12015151_Treadmill_training_of_paraplegic_patients_using_a_robotic_orthosis/links/54fd71a70cf2c3f52424d3a6.pdf
- [9] REINKENSMEYER, D., J.H. WYNNE a S.J. HARKEMA. A robotic tool for studying locomotor adaptation and rehabilitation. *Proceedings of the Second Joint 24th Annual Conference and the Annual Fall Meeting of the Biomedical Engineering Society* [Engineering in Medicine and Biology. IEEE, 2002, 2353-2354. DOI: 10.1109/IEMBS.2002.1053318. ISBN 0-7803-7612-9. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1053318/>
- [10] IEEE (autoři neuvedeni). Robotic gait training: toward more natural movements and optimal training algorithms. 2004. DOI: 10.1109/IEMBS.

2004.1404333. ISBN 10.1109/IEMBS.2004.1404333. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1404333/>

[11] RIENER, R., G. COLOMBO a L. LUNENBURGER. Overview of Robot-Aided Gait Biofeedback and Assessment. The First IEEE/RAS-EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechanics, 2006. BioRob 2006. IEEE, 2006, 965-970. DOI: 10.1109/BIROB.2006.1639216. ISBN 1-4244-0040-6. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1639216/>

[12] JEZERNIK, S., G. COLOMBO a M. MORARI. Automatic Gait-Pattern Adaptation Algorithms for Rehabilitation With a 4-DOF Robotic Orthosis. IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2004, 20(3), 574-582. DOI: 10.1109/TRA.2004.825515. ISSN 1042-296X. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1303704/>

[13] JEZERNIK, S, R SCHÄRER, G COLOMBO a M MORARI. Adaptive robotic rehabilitation of locomotion: a clinical study in spinally injured individuals. Spinal Cord. 2003, 41(12), 657-666. DOI: 10.1038/sj.sc.3101518. ISSN 1362-4393. Dostupné také z: <http://www.nature.com/articles/3101518>

[14] KUKA.Robotics. KUKA LBR iiwa brochure, anglické vydání. 2017. Dostupné také z: <http://www.kuka-robotics.com/usa/en/downloads/>

[15] HAYAT, A. A., V. ABHISHEK a S. K. SAHA. Dynamic Identification of Manipulator: Comparison between CAD and Actual Parameters. ELSEVIER. 2015, 2nd international and 17th National Conference on Machines and Mechanisms (iNaCoMM2015-94), 1 - 10. Dostupné také z: <https://pdfs.semanticscholar.org/6bda/201198dc42f77e8f6132c492daed947308e0.pdf>

[16] STÜRZ, Yvonne R., Lukas M. AFFOLTER a Roy S. SMITH. Parameter Identification of the KUKA LBR iiwa Robot Including Constraints on Physical Feasibility. DOI: 10.1016/j.ifacol.2017.08.1208. ISBN 10.1016/j.ifacol.2017.08.1208. Dostupné také z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2405896317317147>

[17] SANTONI , Alessandro. A ROS-based Workspace Control and Trajectory Planner for a Seven Degrees Of Freedom Robotic Arm: Software interfaces for Obstacle Avoidance, OctoMap Visual Sensing and Target Recognition features. [online]. Italy, 2016 [cit. 2018-05-03]. Dostupné z: http://amslaurea.unibo.it/10919/1/Alessandro_Santoni_Thesis_%28abstract_ITA%29.pdf. Bachelor Thesis. Univerity of Bologna (UniBO).

[18] Armeo [online]. Praha: Stargen EU s.r.o. [cit. 1. 7. 2018]. Dostupné z: <http://www.stargen-eu.cz/rehabilitace/horni-koncetina/armeo/>.

[19] Reo GO [online]. Praha: BTL zdravotnicka technika, a.s. [cit. 1. 7. 2018]. Dostupné z: <https://www.btl.cz/produkty-porkocile-rehabilitacni-systemy-reo-go>.

[20] SCIAVICCO, Lorenzo a Bruno SICILIANO. Modelling and control of robot manipulators. New York: Springer, c2000, 79 - 104. ISBN 1-85233-221-2.

- [21] Kauler, J. Přednáška 3: Inverzní úloha kinematiky, Jacobián kinematického řetězce, Newtonova iterační metoda s Jacobiánem [online]. Kladno: FBMI. [cit. 23. 4. 2019]. Dostupné z: https://predmety.fbmi.cvut.cz/sites/default/files/predmet/1969/prednasky/17PBBRBL_20150423_030919_6230e38772558c206108ba2a166a79df.pdf
- [22] SCIAVICCO, Lorenzo a Bruno SICILIANO. Modelling and control of robot manipulators. New York: Springer, c2000, 131 - 148. ISBN 1-85233-221-2.
- [23] SCIAVICCO, Lorenzo a Bruno SICILIANO. Modelling and control of robot manipulators. New York: Springer, c2000, 276 - 280. ISBN 1-85233-221-2.
- [24] Kauler, J. Přednáška 1: Kinematická dvojice, třídy a rozdělení kinematických dvojic, kinematické řetězce, kinematické řetězce průmyslových robotů, obecný pohyb těles, transformační matice pohybu, charakteristické matice základních pohybů těles [online]. Kladno: FBMI. [cit. 23. 4. 2019]. Dostupné z: https://predmety.fbmi.cvut.cz/sites/default/files/predmet/1969/prednasky/17PBBRBL_20150422113803c1a13a711f60c55f9e4409f733bfb598.pdf.
- [25] Kauler, J. Přednáška 5: Odvození matic v pohybové rovnici, validace pohybové rovnice pomocí energií systému [online]. Kladno: FBMI. [cit. 23. 4. 2019]. Dostupné z: https://predmety.fbmi.cvut.cz/sites/default/files/predmet/1969/prednasky/17PBBRBL_20150423_032103_ad88734cd4bd2f8b53affee21289a73b.pdf