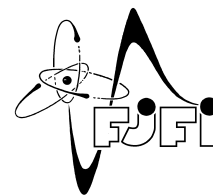




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



# **Aplikace femtoskopie ve srážkách těžkých iontů**

## **Applications of femtoscopy in heavy-ion collisions**

Bakalářská práce

Autor: **Jakub Štěrba**  
Vedoucí práce: **prof. Dr. Boris Tomášik**  
Akademický rok: 2019/2020

- Zadání práce -



- Zadání práce (zadní strana) -

### *Poděkování:*

Chtěl bych tímto poděkovat svému školiteli prof. Dr. Borisi Tomášikovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost, obětavost, odborné i lidské zázemí a užitečné rady při vedení mé bakalářské práce. Dále děkuji Ing. Jakubu Cimermanovi za praktickou podporu.

### *Čestné prohlášení:*

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu §60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 7. srpna 2020

Jakub Štěřba

*Název práce:*

**Aplikace femtoskopie ve srážkách těžkých iontů**

*Autor:* Jakub Štěrba

*Obor:* Experimentální jaderná a částicová fyzika

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* prof. Dr. Boris Tomášik, ČVUT, FJFI, Experimentální jaderná a částicová fyzika

*Abstrakt:* Při srážkách těžkých iontů vzniká velmi horká hmota, která při dostatečně vysoké hustotě energie může přejít do stavu kvark-gluonového plazmatu. Jelikož je energie na počátku srážky nerovnoměrně rozdělena, dochází k anizotropickému vývoji hmoty. Pro dobrý popis a předpovědi chování této hmoty je třeba podrobného modelu, k jehož zdokonalování je nutné porovnávat výsledky z namodelovaných dat s výsledky experimentů. Jedněmi z pozorovatelných veličin umožňujících popis fireballu jsou korelační poloměry. Tyto veličiny dávají informaci o rozměrech fireballu v čase jeho rozpadu a nepřímo (přes jejich závislost na hybnosti) o jeho expanzi v okamžiku vymrznutí. V experimentu HADES se sice nedosahuje energií a teplot potřebných ke vzniku kvark-gluonového plazmatu, ale produkuje se hmota ve stavu zvýšené teploty, která je stejně tak adekvátní k systematickému studiu jaderné hmoty při vysokých teplotách. V této práci jsou používány simulované události srážek Au+Au při  $\sqrt{s_{NN}} = 2,4$  GeV z UrQMD a z těchto událostí jsou analyzovány pionové korelační funkce.

*Klíčová slova:* anizotropie, experiment HADES, korelační poloměry, kvark-gluonové plazma, srážky těžkých iontů

*Title:*

**Applications of femtoscopy in heavy-ion collisions**

*Author:* Jakub Štěrba

*Abstract:* In heavy-ion collisions a hot and dense matter is created, which, if sufficient energy density is reached, can pass into the state of quark-gluon plasma. Due to uneven distribution of energy in collision, anisotropic evolution of the matter is noticeable. For the right description and meaningful predictions of behaviour of the matter, there is a need for accurate model, the results of which should be compared to experimental data for its further improvement. Some of the observables describing the fireball are correlation radii. These observables are giving us a piece of information about the size of the fireball at the point of its decay and indirectly (via the dependence of momentum) another piece of information about its expansion at the point of the freeze-out. There is not enough energy and temperature reached in the HADES experiment, but the matter in state of increased temperature is produced. This matter is equally adequate for systematic studies of nuclear matter in the state of high temperature. In this bachelor thesis simulated events of Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.4$  GeV from UrQMD are used and pion correlation functions are analyzed.

*Key words:* anizotropie, correlation radii, experiment HADES, heavy-ion collisions, quark-gluon plasma

# Obsah

Úvod	7
<b>1 Relativistické jaderné srážky</b>	<b>8</b>
1.1 Fázový diagram silně interagující hmoty	8
1.2 Dynamický vývoj	9
<b>2 Femtoskopie</b>	<b>10</b>
2.1 Korelační poloměry	10
2.1.1 Odvození korelačních poloměrů v kartézských souřadnicích	10
2.1.2 Azimutální závislost korelačních poloměrů	12
2.1.3 $S$ -matice	13
<b>3 UrQMD model</b>	<b>14</b>
<b>4 Experiment HADES</b>	<b>16</b>
4.1 Konfigurace experimentu	16
4.1.1 Terčík a počáteční detektor	17
4.1.2 Detektor RICH	17
4.1.3 Driftovací komory	17
4.1.4 Supravodivý magnet	17
4.1.5 Detektor měřící dobu letu	17
4.1.6 Pre-shower detektory	18
<b>5 Výsledky měření kolaborace HADES</b>	<b>19</b>
5.1 Úhlově integrovaná analýza pro centrální srážky	19
5.2 Úhlově závislá analýza	19
<b>6 Femtoskopie pro HADES s UrQMD</b>	<b>22</b>
6.1 CRAB	22
6.1.1 Jak CRAB funguje	22
6.2 Úhlově integrované korelační poloměry	23
6.2.1 Prokládání křivkou	23
6.2.2 Variance	23
6.2.3 Vrstevnicový graf	23
6.3 Úhlově závislé korelační poloměry	23
<b>Výsledky</b>	<b>27</b>
<b>Závěr</b>	<b>30</b>

# Úvod

Zkoumání silně interagující hmoty je jednou z klíčových fyzikálních otázek současné vědy, obzvláště pak studium této hmoty v extrémních podmínkách, tj. při velkých tlacích, teplotách, tedy vysokých hustotách energie. Lze ji pozorovat při kolizích neutronových hvězd a stála při formování hmoty (i antihmoty) při zrodu všehomíra. Na Zemi její výzkum probíhá hlavně prostřednictvím srážek těžkých iontů. Experimenty ALICE, ATLAS a CMS na urychlovači LHC v CERNu a experiment STAR v americkém BNL jsou hlavními přispěvateli k poznatkům o tomto stádiu hmoty, ač se jeho výzkumu věnuje i velké množství menších experimentů, jmenovitě např. experiment HADES v německém Darmstadtu.

V experimentech vzniká kvark-gluonové plazma nebo horká hmota při srážkách těžkých iontů, kdy se během srážky dosáhne vysoké hustoty energie, jako tzv. „fireball“. V některých případech je možné přirovnání této hmoty ke kapce, protože má kolektivní chování a lze ji popisovat pomocí hydrodynamických modelů - má svoji viskozitu a při jejím vývoji se projevují rozličné druhy toků. Kromě hydrodynamických modelů existují i další typy, transportní modely, které přistupují k popisu mikroskopicky a simulují chování jednotlivých částic ve fireballu. Právě teoretické modely jsou stěžejní při popisu a předpovědi chování těchto extrémních stavů hmoty. K jejich správnosti je třeba porovnávat výsledky získané z modelů s experimentálními daty a porozumění vzájemným nesouladům.

Na druhou stranu, některé veličiny lze pozorovat nezávisle na použitém modelu, příkladem nám mohou být korelační poloměry. Ty jsou založeny, jak název napovídá, na vzájemné korelaci částic produkovaných při vývoji horké hmoty a popisují rozměry stejně vyvíjejících se oblastí, ve kterých jsou lokální rozdělení hybností částic podobné. Právě jejich studiu se budeme věnovat v této práci.

V první kapitole se seznámíme s relativistickými jadernými srážkami a detailnějším popisem kvark-gluonového plazmatu a horké hmoty. Druhá kapitola je zaměřena na základy femtoskopie, odvození korelačních poloměrů v úhlově integrované i úhlově závislé formě. Třetí kapitola krátce popisuje model UrQMD. Čtvrtá kapitola je věnována experimentu HADES a jeho konfiguraci, přičemž v páté kapitole jsou stručně uvedeny výsledky měření kolaborace HADES ze srážek Au+Au při energii 1,23 AGeV. Poslední, šestá, kapitola je věnována vlastní práci při reprodukci výsledků kolaborace HADES s využitím modelu UrQMD a výsledkům práce.

# Kapitola 1

## Relativistické jaderné srážky

Jedním ze základních stavebních kamenů Standardního modelu elementárních interakcí je kvantová chromodynamika (QCD), jež popisuje silnou interakci. Hlavními prvky v QCD jsou kvarky a gluony, tedy částice nesoucí barevné náboje, a tedy silně interagující.

Jak píše autor v článku [11]: Ve snaze pro popis silně interagující hmoty jsou zásadní dva poznatky. Prvním z nich je fázový diagram QCD hmoty, druhým je pak stavová rovnice (EOS), oba popisující vztah mezi tlakem, hustotou a teplotou.

Fyzice relativistických těžkých iontů, tedy studiu srážek těžkých jaderných projektilů při relativistických energiích (podrobněji popsanych v [12]), daly za vznik dvě odvětví fyziky - klasická jaderná fyzika a klasická částicová fyzika. Při takových srážkách, za vysokých tlaků a teplot srážkou způsobených, vzniká z původní „chladné“ jaderné hmoty v základním stavu tzv. „fireball“, tedy horká kapka tvořená hadronovou anebo partonovou hmotou. Při dosažení dostatečné teploty je tento stav hmoty označován jako kvark-gluonové plazma. Při nižších teplotách může vzniknout fireball, avšak k přechodu do kvark-gluonového plazmatu nedochází.

### 1.1 Fázový diagram silně interagující hmoty

Studium kvark-gluonového plazmatu ukazuje, že se tento stav hmoty chová jako silně vázaná kapalina s téměř nulovou viskozitou. Teoretické studium v neporuchové QCD naznačuje, že QCD hmota má bohatou fázovou strukturu. Tuto strukturu by měl popisovat právě fázový diagram.

Fázový diagram silně interagující hmoty ukazuje v jaké fázi se nachází hmota při určité teplotě a baryochemickém potenciálu (Obr. 1.1), tedy potenciálu vyjadřujícím jaké množství energie je třeba pro zvýšení baryonového čísla v systému o jedna, a podle kterého je možné zjistit poměr hustoty baryonů vůči hustotě antibaryonů, tedy  $\exp(\frac{2\mu_B}{T})$ . Zavádí se terminologie typická pro grandkanonický Gibbsův soubor - objem hadronové a partonové hmoty  $V$  a teplota  $T$ . V takovém souboru se však při relativistických energiích nezachovává počet částic, a to kvůli produkci či anihilaci, které se v mikroskopickém měřítku odehrávají. Pravděpodobnostní distribuční funkce ale musejí respektovat zachovávací se kvantová čísla podivnosti a půvabu a nenulové baryonové číslo. Partiční funkce vycházející z lagrangiánu QCD se upraví členem obsahujícím baryochemický potenciál, tedy  $\exp(-\frac{E}{T} - \frac{\mu_i}{T})$ , kde  $E$  je celková energie.

Při nízkých energiích srážky je baryochemický potenciál  $\mu_B$  vysoký. Například (podle [11]) u srážek dvou těžkých jader při energii  $\sqrt{s} = 15$  GeV obsahuje fireball téměř stejné množství kvarků vzniklých jako kvark-antikvarkové páry při kolizi a kvarků, které do kolize vstupovaly, což vede k vysokému  $\mu_B$ . Na druhou stranu při energiích např. na LHC tvoří vstupující kvarky jen malé procento z celkového počtu, vedoucí pak k nízkému  $\mu_B$ .

K fázovým přechodům však nemusí docházet pouze za podmínek vysoké teploty, ale také stlačením, tedy zvýšením baryonové hustoty. Extrémní případy jsou pak znatelné na Obr. 1.1, kde jsou spojeny křivkou fázového přechodu. Fázový přechod je očekáván prvního druhu, až do dosažení kritického bodu. Za kritickým bodem je fázový přechod rychlý plynulý.

Pro vysoký  $\mu_B$  se pak očekává další fáze QCD hmoty - barevná supravodivost.

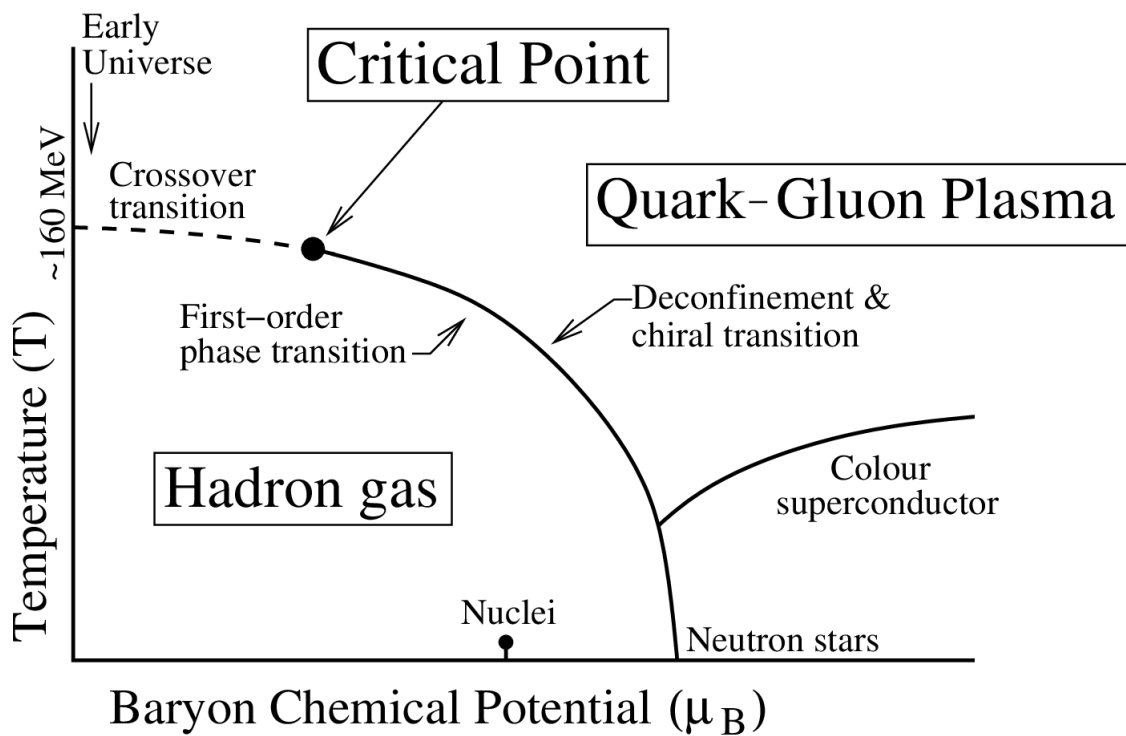
## 1.2 Dynamický vývoj

Vývoj horké hmoty lze shrnout do tří základních kroků. První krok se odehrává při vzájemném proniknutí dvou jader. Během jejich srážky dochází k neelastickým rozptylům, což přenáší energii (a tedy i stupně volnosti) z podélného směru do příčné roviny. V tomto kroku nedochází k tepelné rovnováze.

Druhá fáze je odlišná pro kvark-gluonové plazma a pro horkou silně interagující hmotu, která nemá dostatečnou hustotu energie k přeměně na plazma. V případě kvark-gluonového plazmatu dochází při neelastických srážkách dvou protichůdných svazků k zvyšování hustoty energie partonové hmoty s centrem v oblasti střední rapidity. Jelikož plazma silně interaguje se sprškami partonů (tzv. jetů) a zpomaluje je, zpomaluje se i dynamický vývoj plazmatu. V této fázi již dochází k termalizaci. U horké hmoty s nižší hustotou energie dochází ke zhuštění energie hadronové hmoty, avšak k jetům při tak nízkých energiích srážek nedochází. Její termalizovaný vývoj tedy není jety ovlivněn.

Třetí fází je hadronizace a vymrznutí (freeze-out). Při hadronizaci se kvark-gluonové plazma mění na plyn hadronů (silně interagující hmota, která není ve fázi kvark-gluonového plazmatu, již ve stavu hadronového plynu je), z něhož se po vymrznutí formují finální hadrony a hadronové rezonance a jejich výtěžek zůstává stejný v poměru.

Horká hmota vzniklá při nižších energiích, při kterých se nedosahuje potřebné hranice teploty pro vznik kvark-gluonového plazmatu, však také projevuje kolektivní chování. Tudiž i u srážek s nižší energií je možné studovat stavovou rovnici a vlastnosti silně interagující hmoty.



Obr. 1.1: Fázový diagram silně interagující hmoty v závislosti na teplotě  $T$  a baryochemickém potenciálu  $\mu_B$ , plná čára ukazuje oblast fázového přechodu prvního druhu, přerušovaná čára za kritickým bodem (critical point) je oblastí rychlého plynulého přechodu.  $T \rightarrow \sim 160$  MeV při  $\mu_B \rightarrow 0$ . V oblastech pod křivkou je hmota ve stavu hadronového plynu, nad ní ve fázi kvark-gluonového plazmatu. Pro velké  $\mu_B$  se pak předpokládá další stádium hmoty - barevná supravodivost. [13]

# Kapitola 2

## Femtoskopie

### 2.1 Korelační poloměry

Pokud se v ultrarelativistických srážkách, kterým jsme se věnovali v Kapitole 1, dosáhne dostatečné hustoty energie, proběhne fázový přechod do kvark-gluonového plazmatu. Při studiu kvark-gluonového plazmatu nás tedy zajímá, jak určit jeho hustotu energie, přičemž jeho celkovou energii lze zjistit pomocí kalorimetrů a spektrometrů.

Velikost reakční zóny (oblasti výskytu kvark-gluonového plazmatu) se měří pomocí femtoskopie, tedy nepřímého (prostorového i časového) měření rozměrů zdroje částic díky korelacím mezi částicemi, která je založena na měření jejich intenzity.

Aby bylo možné femtoskopické pozorování nejlépe interpretovat, je výhodné je studovat nezávisle na modelu.

#### 2.1.1 Odvození korelačních poloměrů v kartézských souřadnicích

Vyjdeme-li z [2] je korelační funkce dána vztahem

$$C(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{\bar{N}^2}{\bar{N}^2 - \bar{N}} \frac{P_2(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{P_1(\vec{p}_1)P_1(\vec{p}_2)}, \quad (2.1)$$

kde  $P_1$  je jednočásticová distribuční funkce,  $P_2$  odpovídající dvoučásticová distribuční funkce a  $\bar{N}$  je průměrný počet částic vyprodukovaných ve srážce.

Korelační funkci lze převést na tvar

$$C(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 1 \pm \frac{|\int d^4x S[x, \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)] \cdot e^{iq \cdot x}|^2}{P_1(\vec{p}_1)P_1(\vec{p}_2)}, \quad (2.2)$$

kde  $\vec{q} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$  je vzájemná hybnost páru a  $S[x, \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)]$  je emisní funkce, tedy funkce úměrná pravděpodobnosti vzniku páru s průměrnou hybností  $\frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ . Znaménko + odpovídá bosonům, znaménko – fermionům.

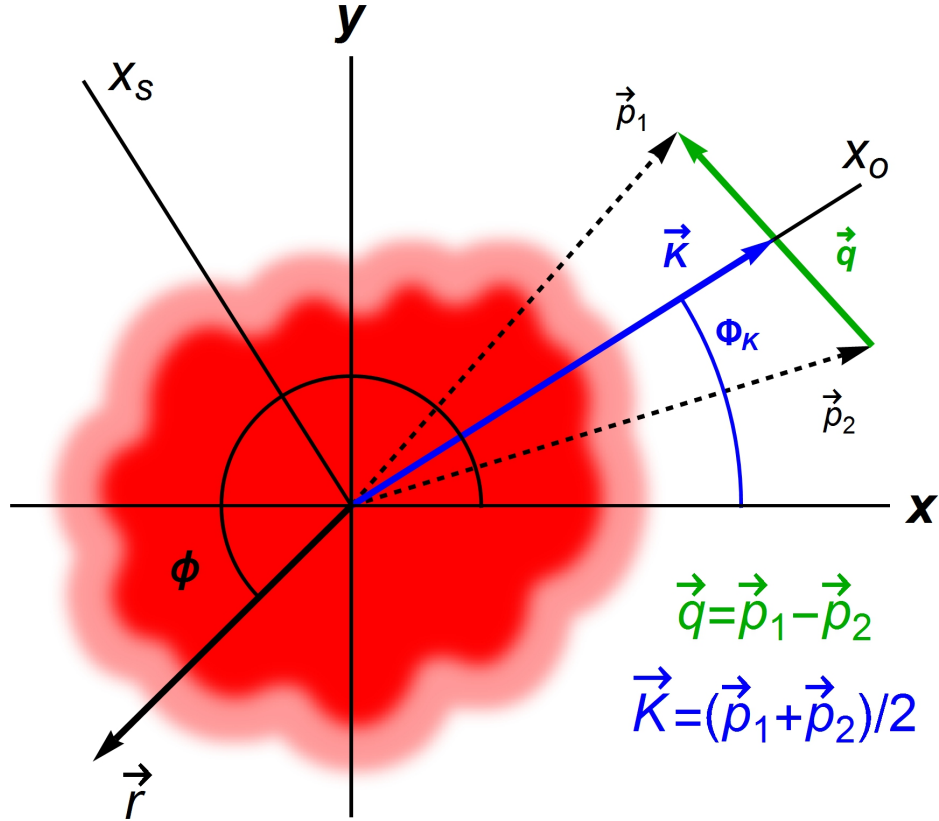
Aby se odvození zjednodušilo, přechází se k tzv. on-shell hybnosti páru

$$C(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \simeq C(q, K) = 1 \pm \frac{|\int d^4x S(x, K) \cdot e^{iq \cdot x}|^2}{|\int d^4x S(x, K)|^2}, \quad (2.3)$$

kde  $\vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$  představuje průměrnou hybnost páru a  $K_0 = \sqrt{m^2 + |\vec{K}|^2}$ .

Používáme-li konvencí zavedené souřadnice ve tvaru: longitudinální, tzv. *long* (ozn. *l*) je rovnoběžný se směrem dráhy svazku, směr *out* (ozn. *o*) rovnoběžný s vektorem průměrné hybnosti páru  $\vec{K}$ , který je kolmý ke směru dráhy svazku a směr *side* (ozn. *s*) je zbývajícím kolmým směrem. Důležitou poznámkou je, že každý produkovaný pár má vlastní souřadnicový *o* – *s* – *l* systém.





Obr. 2.1: Názorné zavedení  $o-s-l$  souřadnicového systému v příčné rovině,  $x$  a  $y$  odpovídají kartézským souřadnicím, osa  $z$  míří kolmo na příčnou rovinu,  $\vec{p}_1$  a  $\vec{p}_2$  odpovídají hybnostem částic z páru,  $\vec{K}$  pak odpovídá jejich průměrné hybnosti a  $\phi_K$  úhlu svíranému  $\vec{K}$  a reakční rovinou ( $xz$ ). *Out* směru ( $x_o$ ) odpovídá směr  $\vec{K}$ , *long* směr zůstává shodný s osou  $z$  a *side* směr ( $x_s$ ) je doplněn jako poslední kolmý směr. [14]

Pro on-shell podmínku

$$q^\mu \cdot K_\mu = 0 \Rightarrow q^0 K^0 = \vec{q} \vec{K} \Rightarrow q^0 = \vec{q} \frac{\vec{K}}{K^0} = \vec{q} \vec{\beta}, \quad (2.4)$$

můžeme psát

$$q^\mu \cdot x_\mu = \vec{\beta} \cdot \vec{q} t - q_o x - q_s y - q_l z. \quad (2.5)$$

Díky symetrii korelační funkce v  $\vec{q}$  a limitám, kdy pro  $q \rightarrow 0$  je  $C \rightarrow 1 \pm 1$  předpokládáme korelační funkci ve tvaru

$$C(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 1 \pm \exp \left[ - \sum_i q_i^2 R_i^2 - \sum_{i \neq j} q_i q_j R_{ij}^2 \right], \quad (2.6)$$

kde  $R_i$  i  $R_{ij}$  závisí na průměrné hybnosti páru  $\vec{K} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ . Aby byl vrchol korelační funkce v  $\vec{q} = 0$ , pak musí platit podmínka  $2|R_{ij}|^2 < R_i^2 + R_j^2$ .

Použitím (2.5) pak lze exponenciálu v korelační funkci (2.3) rozepsat Taylorovým rozvojem v  $q$  a úpravami tohoto vztahu uvedenými v příloze dostáváme vztahy pro korelační poloměry porovnáním koeficientů u  $q_i q_j$

$$\begin{aligned} R_s^2 &= \langle y^2 \rangle, \\ R_o^2 &= \langle (x - \beta_\perp t)^2 \rangle - \langle x - \beta_\perp t \rangle^2, \\ R_l^2 &= \langle (z - \beta_l t)^2 \rangle - \langle z - \beta_l t \rangle^2, \\ R_{ol}^2 &= \langle (x - \beta_\perp t)(z - \beta_l t) \rangle - \langle x - \beta_\perp t \rangle \langle z - \beta_l t \rangle, \end{aligned} \quad (2.7)$$

kde zavádíme

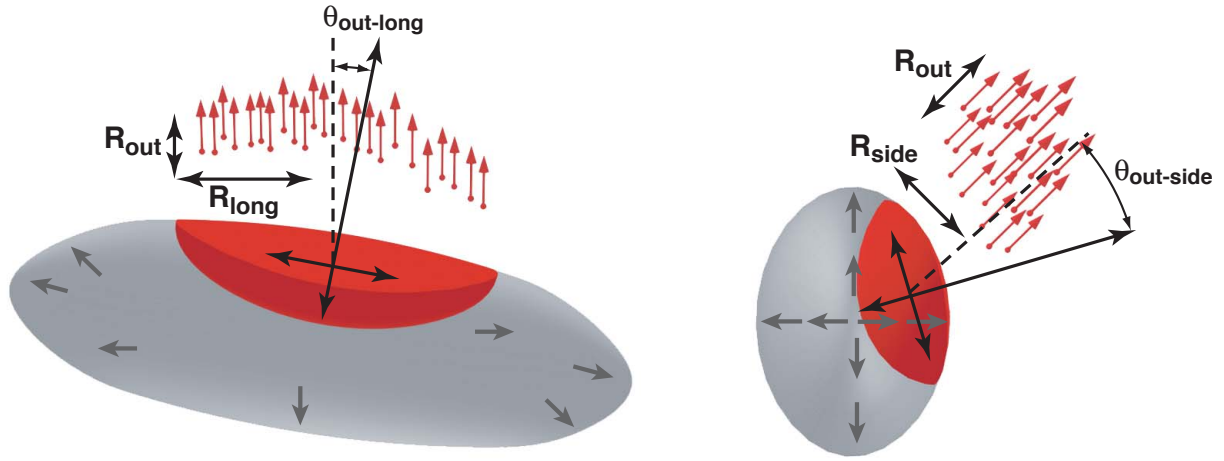
$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int d^4x S(x, K) f(x)}{\int d^4x S(x, K)}. \quad (2.8)$$

Zavedli jsme zde válcovou symetrii, při které jsou členy lineární v  $q_s$  rovny nule. Ve výsledku zbyl tak jediný křížný člen - *outlong*.

### 2.1.1.1 Význam korelačních poloměrů

Korelační poloměry však nutně nemusí měřit geometrické proporce celého zdroje, nýbrž délky homogenity pro průměrné hybnosti studovaných párů částic. Představu si můžeme zavést pomocí obrázku Obr. 2.2. Oblast homogenity ve zmíněném smyslu je oblast, do jejíž hranice ještě zdroj dokáže emitovat částice s danou hybností. Přesáhneme-li tuto hranici, budou částice emitovány s jinou hybností a oblast již přestane být homogenní.

Oblasti homogenity jsou důsledkem toku přítomného ve fireballu. Z předchozího plyne, že geometrické proporce zdroje by se pomocí femtoskopie měřily pouze v případě, kdyby fireball neexpandoval.



Obr. 2.2: Pohled na zdroj ze směrů *out – long* a *out – side*, červené oblasti odpovídají oblastem homogenity, červené šipky pak toku hybnosti. Černými oboustrannými šipkami jsou označeny korelační poloměry v daných směrech. [10]

### 2.1.2 Azimutální závislost korelačních poloměrů

Při srážkách s konečným srážkovým parametrem závisí korelační poloměry nejen na velikosti průměrné hybnosti páru, ale i na natočení vůči reakční rovině v rovině příčné. Azimutální závislost korelačních poloměrů je dvojího druhu. Explicitní, kdy velikost poloměrů závisí pouze na natočení v příčné rovině a implicitní, kdy se projevují různé velikosti různých oblastí homogenit při pohledu z různých úhlů  $\phi$ . Označme úhel  $\phi = \angle(k_T, b)$  a

$$\mathbb{D}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Potom pro  $\vec{x}$  v soustavě spojené se srážkovým parametrem a  $\vec{q}$  v soustavě  $o - s - l$

$$\mathbb{D}_\phi \vec{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \cos \phi + \tilde{y} \sin \phi \\ -\tilde{x} \sin \phi + \tilde{y} \cos \phi \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}_\phi \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_\perp \\ 0 \\ \beta_l \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

a korelační funkci lze zapsat jako

$$C(\vec{K}, \vec{q}) = 1 + |\langle e^{i\vec{q}(\mathbb{D}_\phi \vec{x} - \mathbb{D}_\phi \vec{\beta} \vec{t})} \rangle|, \quad (2.11)$$

z níž lze spočítat kvadráty korelačních poloměrů

$$R_{\mu\nu}^2 = -\frac{\partial^2 C(\vec{K}, \vec{q})}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \Big|_{q=0} = \langle [(\mathbb{D}_\phi \vec{x})_\mu - (\mathbb{D}_\phi \vec{\beta})_\mu \vec{t}] [(\mathbb{D}_\phi \vec{x})_\nu - (\mathbb{D}_\phi \vec{\beta})_\nu \vec{t}] \rangle, \quad (2.12)$$

a tedy dostáváme azimutální závislosti kvadrátů korelačních poloměrů ve tvaru

$$\begin{aligned} R_s^2(K_\perp, \phi, Y) &= \langle \tilde{x}^2 \rangle \sin^2 \phi + \langle \tilde{y}^2 \rangle \cos^2 \phi - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle \sin 2\phi, \\ R_o^2(K_\perp, \phi, Y) &= \langle \tilde{x}^2 \rangle \cos^2 \phi + \langle \tilde{y}^2 \rangle \sin^2 \phi + \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle \sin 2\phi \\ &\quad - 2\beta_\perp \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle \cos \phi - 2\beta_\perp \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle \sin \phi + \beta_\perp^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle, \\ R_l^2(K_\perp, \phi, Y) &= \langle \tilde{z}^2 \rangle - 2\beta_l \langle \tilde{t}\tilde{z} \rangle + \beta_l^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle, \\ R_{os}^2(K_\perp, \phi, Y) &= \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle \cos 2\phi + \frac{1}{2}(\langle \tilde{y}^2 \rangle - \langle \tilde{x}^2 \rangle) \sin 2\phi \\ &\quad + \beta_\perp \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle \sin \phi - \beta_\perp \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle \cos \phi, \\ R_{ol}^2(K_\perp, \phi, Y) &= (\langle \tilde{x}\tilde{z} \rangle - \beta_l \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle) \cos \phi - \beta_\perp \langle \tilde{t}\tilde{z} \rangle \\ &\quad + (\langle \tilde{y}\tilde{z} \rangle - \beta_l \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle) \sin \phi + \beta_l \beta_\perp \langle \tilde{t}^2 \rangle, \\ R_{sl}^2(K_\perp, \phi, Y) &= (\langle \tilde{y}\tilde{z} \rangle - \beta_l \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle) \cos \phi - (\langle \tilde{x}\tilde{z} \rangle - \beta_l \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle) \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

### 2.1.3 S-matice

Uvážíme-li pouze explicitní azimutální závislost, tedy že variance ve vztazích (2.13) nezávisí na úhlu natočení, lze vztahy (2.13) parametrizovat zdroj do  $S$ -matice

$$\begin{aligned} R_s^2 &= S_{11} \sin^2 \phi + S_{22} \cos^2 \phi - S_{12} \sin 2\phi, \\ R_o^2 &= S_{11} \cos^2 \phi + S_{22} \sin^2 \phi + S_{12} \sin 2\phi \\ &\quad - 2\beta_\perp S_{01} \cos \phi - 2\beta_\perp S_{02} \sin \phi + \beta_\perp^2 S_{00}, \\ R_l^2 &= S_{33} - 2\beta_l S_{03} + \beta_l^2 S_{00}, \\ R_{os}^2 &= S_{12} \cos 2\phi + \frac{1}{2}(S_{22} - S_{11}) \sin 2\phi \\ &\quad + \beta_\perp S_{01} \sin \phi - \beta_\perp S_{02} \cos \phi, \\ R_{ol}^2 &= (S_{13} - \beta_l S_{01}) \cos \phi - \beta_\perp S_{03} + (S_{23} - \beta_l S_{02}) \sin \phi + \beta_l \beta_\perp S_{00} \\ R_{sl}^2 &= (S_{23} - \beta_l S_{02}) \cos \phi - (S_{13} - \beta_l S_{01}) \sin \phi, \end{aligned} \quad (2.14)$$

tedy korelačního tenzoru, jehož vlastními čísly  $\sigma_t^2, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$  jsou délky homogenity.

Pominutí implicitní závislosti je opodstatněné pro měření při nízkých energiích, tedy i malých tocích. Lze tak předpokládat, že částice pocházejí ze stejného zdroje. Pomocí prvků  $S$ -matice je možné spočítat úhel natočení zdroje v reakční rovině jako

$$\theta_s = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2S_{13}}{S_{33} - S_{11}} \right). \quad (2.15)$$

## Kapitola 3

# UrQMD model

Ultra-Relativistic Quantum Molecular Dynamics (UrQMD) model (detailněji popsán v [5, 9]) je Monte-Carlo simulace hadronových a jaderných srážek při energiích od  $\sqrt{s} = 2$  GeV (oblast energií SIS) až po energie na úrovni RHIC, tedy  $\sqrt{s} = 200$  GeV. Jedná se o transportní model simulující mimo jiné vznik a vývoj horké hmoty a využívá se k jejímu studiu. Představuje řešení souboru parciálních integro-diferenciálních rovnic časového vývoje pro různé hustoty ve fázovém prostoru  $f_i(x, p)$  pro různé částice ( $i$  značí druh částice). Řeší se pak Boltzmannova rovnice

$$\frac{df_i(x, p)}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial f_i(x, p)}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial f_i(x, p)}{\partial x} + \frac{\partial f_i(x, p)}{\partial t} = \text{St}f_i(x, p), \quad (3.1)$$

kde  $x$  je pozice a  $p$  hybnost dané částice a  $\text{St}f_i(x, p)$  představuje kolizní člen.

Terčík i projektil jsou modelovány jako Fermiho plyn, přičemž nukleony odpovídají gaussovskému rozdělení hustoty. Vlnová funkce je tak definována jako produkt všech takových gaussovských rozdělení. Na každé jádro je ve výchozím stavu kladeno pět podmínek: jádro je v klidu, v konfiguračním prostoru má střed v nule, jeho vazebná energie je dána Bethe-Weizsäckerovou formulí, je v základním stavu a pro jeho poloměr platí běžně užívaný vztah  $R(A) \sim r_0 A^{1/3}$ .

Počáteční hybnost nukleonu je pak náhodně zvolena v intervalu od nuly, až po Fermiho hybnost  $p_F = \hbar c(3\pi\rho)^{1/3}$ , kde  $\rho$  odpovídá lokální nukleonové hustotě.

Interakce mezi nukleony je popsána nerelativistickým Skyrmeho potenciálem spolu s Yukawovým a coulombickým potenciálem. Skyrmeho potenciál má tvar

$$V^{Sk} = \frac{1}{2!} t_1 \sum_{i \neq j} \delta(\vec{x}_i - \vec{x}_j) + \frac{1}{3!} t_2 \sum_{i \neq j \neq k} \delta(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \delta(\vec{x}_j - \vec{x}_k), \quad (3.2)$$

kde  $\vec{x}_i$  odpovídá souřadnici v kvantovém fázovém prostoru. Potenciál obsahuje členy dvoučásticové interakce, odpovídající přitažlivému potenciálu, a tříčásticové interakce, která je zodpovědná za odpudivou interakci.

Dvoučásticový člen v Skyrmeho potenciálu lze upravit do tvaru

$$V_j^{Sk2} = t_1 \rho_j^{int}(\vec{r}_j), \quad (3.3)$$

kde  $\vec{r}_j$  je klasický parametr Gaussovy funkce v rozdělení nukleonové hustoty, či baryonové hustoty, a  $\rho_j^{int}$  je zavedena jako interagující hustota. Tříčásticový člen, který závisí kvadraticky od nukleonové hustoty, nebo baryonové hustoty, lze zobecnit pro libovolný exponent  $\gamma$  u  $\rho_j^{int}$  jako

$$V_j^{Sk3} \simeq t_\gamma (\gamma + 1)^{-\frac{3}{2}} (\rho_j^{int})^\gamma. \quad (3.4)$$

Celkový hamiltonián používaný UrQMD má pak tvar

$$H_{UrQMD} = \sum_{j=1}^N E_j^{kin} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left( E_{jk}^{Sk2} + E_{jk}^{Yuk} + E_{jk}^{Coul} \right) + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N E_{jkl}^{Sk3}. \quad (3.5)$$

Tyto potenciálové interakce jsou však brány v potaz pouze pro baryony nebo nukleony se vzájemnou hybností menší než 2 GeV/c kvůli obtížnému zavádění relativistických polí.

U baryon-baryonové srážky je při nízkých energiích uvažována záměna elektrického a baryonového náboje, podivnosti a čtyřhybnosti v  $t$ -kanálu, zatímco mezon-baryonové nebo mezon-mezonové interakce jsou popisovány pomocí rezonančních formací či rozpadem, tedy reakce v  $s$ -kanálu. Mezon-baryonové reakce jsou v  $t$ -kanálu brány v potaz jen pro srážky  $\sqrt{s} > 3$  GeV a rostou k sjednocenému typu mezon-baryonové a mezon-mezonové interakce od  $\sqrt{s} = 6$  GeV.

Při vysokých energiích může být produkováno velké množství různých druhů částic. Člen popisující srážky implementovaný v modelu UrQMD obsahuje více než padesát druhů baryonů a pět mezonových nonetů. Rovněž jsou v modelu zakomponovány i antičástice pomocí sdružení náboje, aby byla zajištěna baryon-antibaryonová symetrie. Extrémně silné mezonové rezonance (pro  $m > 2$  GeV) však nejsou v modelu explicitně implementovány. V hadron-hadronových srážkách mohou být produkovány všechny částice, přičemž tyto částice mohou mezi sebou dále interagovat. Implementovány jsou také různé rozpadové kanály pro všechny nukleonové,  $\Delta$  a hyperonové rezonance až do hmotnosti 2.25 GeV/ $c^2$ . Při vyšších energiích se využívá hadronové univerzality a pro rozpad mezistavů se používá strunový model.

## Kapitola 4

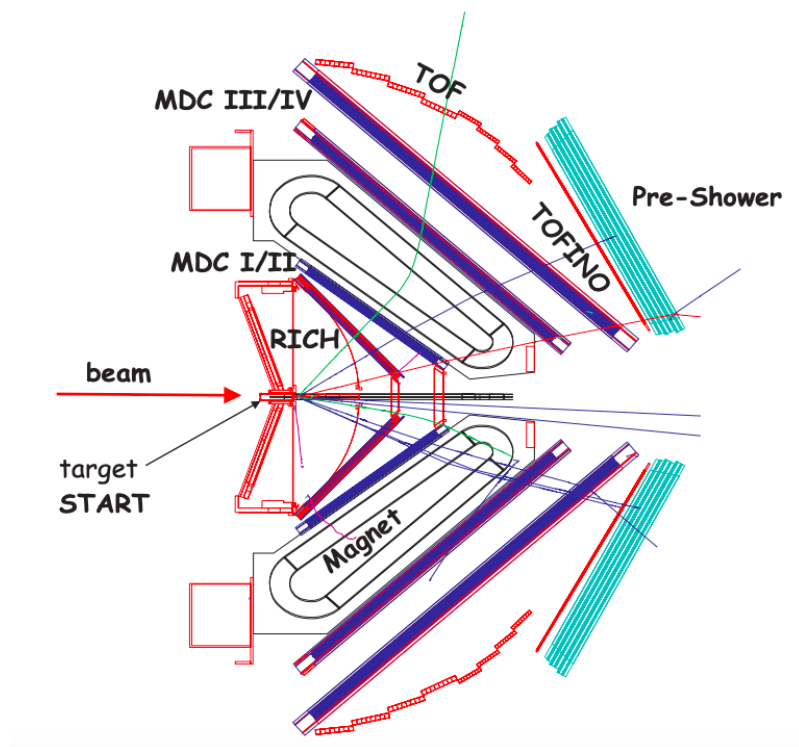
# Experiment HADES

Experiment HADES (High Acceptance Di-Electron Spectrometer) je terčkový experiment (detailně popsáný v [17] a zvláště pak [16]) při Schwerionensynchrotronu (SIS) v GSI v německém Darmstadtu postavený primárně pro studium struktury jader při energiích srážek v rozmezí 1-2 AGeV. Primární zaměření HADESu je dielektronová spektroskopie, kdy po sražení dvou jader vznikají rezonance s krátkou dobou života, které se později rozpadají do elektron-positronového páru. Ačkoliv byl HADES navrhnut právě pro dielektronovou spektroskopii, je schopný s vysokou účinností měřit i ostatní nabitě částice s dobrým rozlišením hybnosti.

### 4.1 Konfigurace experimentu

HADES se skládá z šesti identických detektorových bloků naskládaných do kruhu kolem dráhy svazku. Akceptance spektrometru je asi 85%, kdy pokrývá polární úhly v rozmezí  $18^\circ - 85^\circ$ . Jako celek se experiment skládá z více než 82000 jednotlivých detektorů. Během měření HADES produkuje přibližně 400 MB dat za sekundu, z nichž je snaha filtrovat právě elektron-positronové páry.

Podívejme se na jednotlivé komponenty detektoru, který je znázorněn na Obr. 4.1.



Obr. 4.1: Názorné schéma konfigurace experimentu HADES v příčném řezu.[16]

### 4.1.1 Terčák a počáteční detektor

Terčák je umístěn bezprostředně na začátku detektoru vstříc svazku urychlovaných částic. Ionty jsou urychlovány na rychlost odpovídající zhruba devadesáti procentům rychlosti světla v lineárním urychlovači UNILAC a v kruhovém urychlovači SIS. Terčák je složený z patnácti tenkých kovových fólií za sebou, postupně uspořádaných do kruhu.

Aby bylo možné měřit rychlost produkovaných částic, počáteční detektor přiřazuje signál každé částici svazku v průběhu jejího letu skrz terčák. Za terčkem je umístěn diamantový detektor, který takový signál opět separuje.

### 4.1.2 Detektor RICH

Detektor RICH (Ring Imaging Cherenkov) označují autoři v [17] „třešničkou na dortu“ experimentu HADES. Slouží k detekci relativistických elektronů a pozitronů v rozpětí hybností 0.1 GeV/c až 1.5 GeV/c produkovaných ve srážkách a filtruje je od ostatních produkovaných částic. Detektor sestává z komory naplněné plynným perfluorbutanem, ve kterém se elektrony a pozitrony pohybují rychleji než světlo, pročež emitují záření známé jako Čerenkovovo záření. Díky tomu je možné elektrony a pozitrony rozlišit od ostatních těžších, a tudíž pomalejších částic.

### 4.1.3 Driftovací komory

První část magnetického spektrometru se skládá ze čtyř tzv. mnohovláknových driftovacích komor (MDC), dvou ve směru a dvou proti směru pole supravodivého magnetu. Tyto komory jsou naplněny butanem a heliem a napříč jimi jsou napnuty dráty sloužící jako anody, dávající za vznik elektrickému poli. Nabitě částice prolétávající komorou tak ionizují plyn uvnitř, čímž vyvolávají signál na přilehlém drátu.

Každá komora se skládá z šesti lichoběžníkových částí připevněných k sobě, uvnitř kterých vedou zmíněné dráty. Vzájemně překřížené sestavení drátů zapříčiňuje překryv vyvolaných signálů, pročež je pak možné určit, jak částice MDC prošla.

Zjištěním driftovacího času, tedy časového úseku od ionizace plynu po vyvolání signálu na anodovém drátu, je možné rekonstruovat trajektorii částice s vysokou přesností, která je důležitá pro zjištění úhlu, pod kterým částice opustila oblast terčáku.

### 4.1.4 Supravodivý magnet

Díky driftovacím komorám a supravodivému magnetu, sestávajícího z šesti cívek ve tvaru toru, každé uložené ve vlastní vakuové komoře, je možné určit hybnosti nabitých částic vytvořených během srážky.

Supravodivý magnet vytváří kruhové magnetické pole, které působením na prolétávající nabitě částice způsobuje zakřivení jejich trajektorií. Úhel, o který se trajektorie částice odchýlí od původního směru, je úměrný změně hybnosti částice. Tento úhel je možné získat z MDC, které detekují polohu částice před průletem magnetem a po jejím průletu.

K vytvoření dostatečně silného magnetického pole je magnet chlazen pomocí helia na 4.7 K, což zapříčiňuje snížení odporu cívek téměř k nule. Veškerá energie se tedy může přeměnit v magnetické pole a aparatura netrpí příliš velkými tepelnými ztrátami. Magnetická indukce magnetu je udržována pod hodnotou  $B = 0.9$  T.

### 4.1.5 Detektor měřící dobu letu

Tento detektor zjišťuje dobu letu částice, tedy časový interval letu od terčáku, kde v počátečním detektoru zanechá signál, až k „time of flight“ detektoru. Ten je rozdělen na dvě části, TOFINO (pro dopřednou oblast) a TOF (pro větší polární úhly). Z doby letu částice je pak možné spočítat její rychlost.

Díky „time of flight“ detektoru je možné vybrat například srážky podle centrality. „Time of flight“

detektor společně s MDC a supravodivým magnetem poskytují dostatečné informace k rozlišení částic a jejich identifikaci.

#### **4.1.6 Pre-shower detektory**

Aby bylo možné rozlišit elektron-pozitronové páry s minimální chybou, jsou na HADESu bezprostředně za TOFINO zavedeny pre-shower detektory. Tyto detektory slouží k tomu, aby jednoznačně identifikovaly elektrony a pozitrony i po průchodu detektorem RICH.

Pre-shower detektory jsou složeny z několika vrstev detekčních systémů prokládaných vrstvami olova. Když elektron nebo pozitron dorazí do vrstvy olova, rozpadá se na gama částici a elektron, který se pak v další vrstvě olova rozpadá znovu. Takováto sprška je produkována pouze elektrony a pozitrony, jiné částice projdou vrstvami olova, aniž by spršku způsobily.



## Kapitola 5

# Výsledky měření kolaborace HADES

Experiment HADES začal v dubnu 2012 nabírat data srážek zlato-zlato, kdy byl svazek urychlen na kinetickou energii 1,23 GeV na nukleon. Z toho pak vyplývá hodnota srážkové energie na nukleon  $\sqrt{s_{NN}} = 2,4$  GeV. Experiment byl spuštěn po 557 hodin, kdy v urychlovači obíhal svazek s  $1,2 - 1,5 \cdot 10^6$  ionty za sekundu při frekvenci triggeru 8 kHz. Běh experimentu skončil na začátku května téhož roku a výsledky byly zveřejněny 16. října 2019. Výsledky uvedené níže je možné podrobněji dohledat v [1].

### 5.1 Úhlově integrovaná analýza pro centrální srážky

Na obrázku Obr. 5.1 jsou ukázány výsledky kolaborace HADES z úhlově nezávislé femtoskopické analýzy pro centrální srážky, tj. centralita 0-10%. Graf vykresluje závislost korelačních poloměrů ve třech směrech *out*, *side*, *long* pro pionové páry  $\pi^+\pi^+$  (červeně) a  $\pi^-\pi^-$  (černě) na průměrné hybnosti páru  $k_t$ . V závislosti je při nízkých  $k_t$  patrný coulombický efekt interakce pionů s fireballem (fireball se kladně nabíjí), při vyšších hodnotách  $k_t$  již tento efekt není příliš výrazný. Podle autorů [1] se nejvíce coulombická interakce projevuje u  $R_s$ , nejméně pak u  $R_l$ .

### 5.2 Úhlově závislá analýza

Výsledky úhlově závislé analýzy pro pionové páry  $\pi^-\pi^-$  při váženém průměru příčné hybnosti  $\bar{k}_t = 170$  MeV/c a při centralitě 10-30% je možné vidět na obrázku Obr. 5.2. Obrázek zobrazuje azimutální závislosti kvadrátů korelačních poloměrů v příslušných směrech na úhlu od reakční roviny pro páry  $\pi^-\pi^-$  v intervalu příčné hybnosti  $p_t = 300 - 400$  MeV/c. Modré křivky znázorňují proložení závislostmi (2.14).

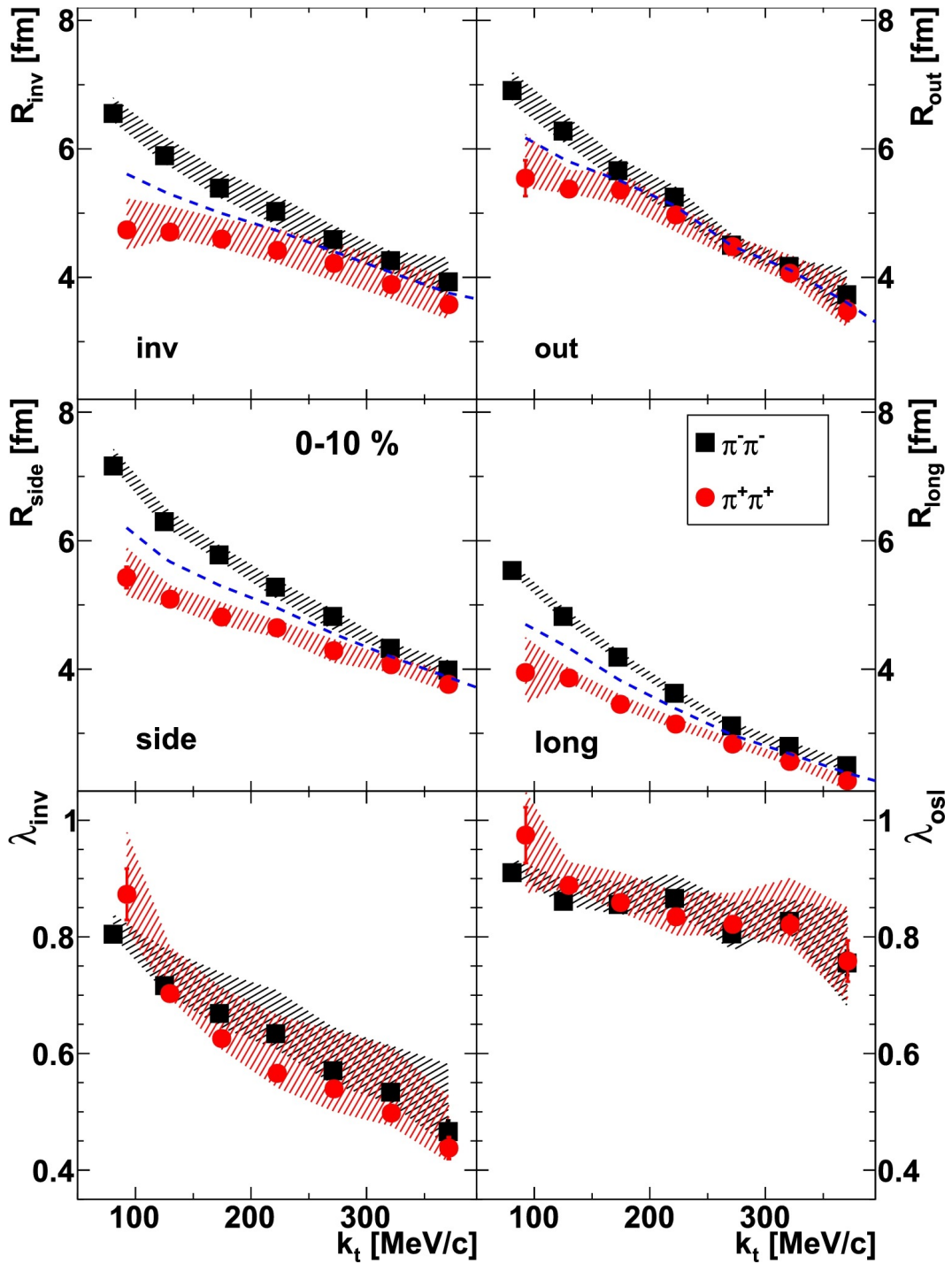
Po korekci poloměrů na konečný bin<sup>1</sup> bylo možné proložení azimutálních závislostí vztahy (2.14) zrekonstruovat  $S$ -matice

$$S^{corr} = \begin{pmatrix} 10.12 \pm 0.64 & -0.91 \pm 0.25 & -0.18 \pm 0.27 & 0.09 \pm 0.14 \\ -0.91 \pm 0.25 & 18.60 \pm 0.40 & -0.13 \pm 0.36 & 2.49 \pm 0.13 \\ -0.18 \pm 0.27 & -0.13 \pm 0.36 & 31.87 \pm 0.44 & -0.06 \pm 0.14 \\ 0.09 \pm 0.14 & 2.49 \pm 0.13 & -0.06 \pm 0.14 & 16.12 \pm 0.13 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

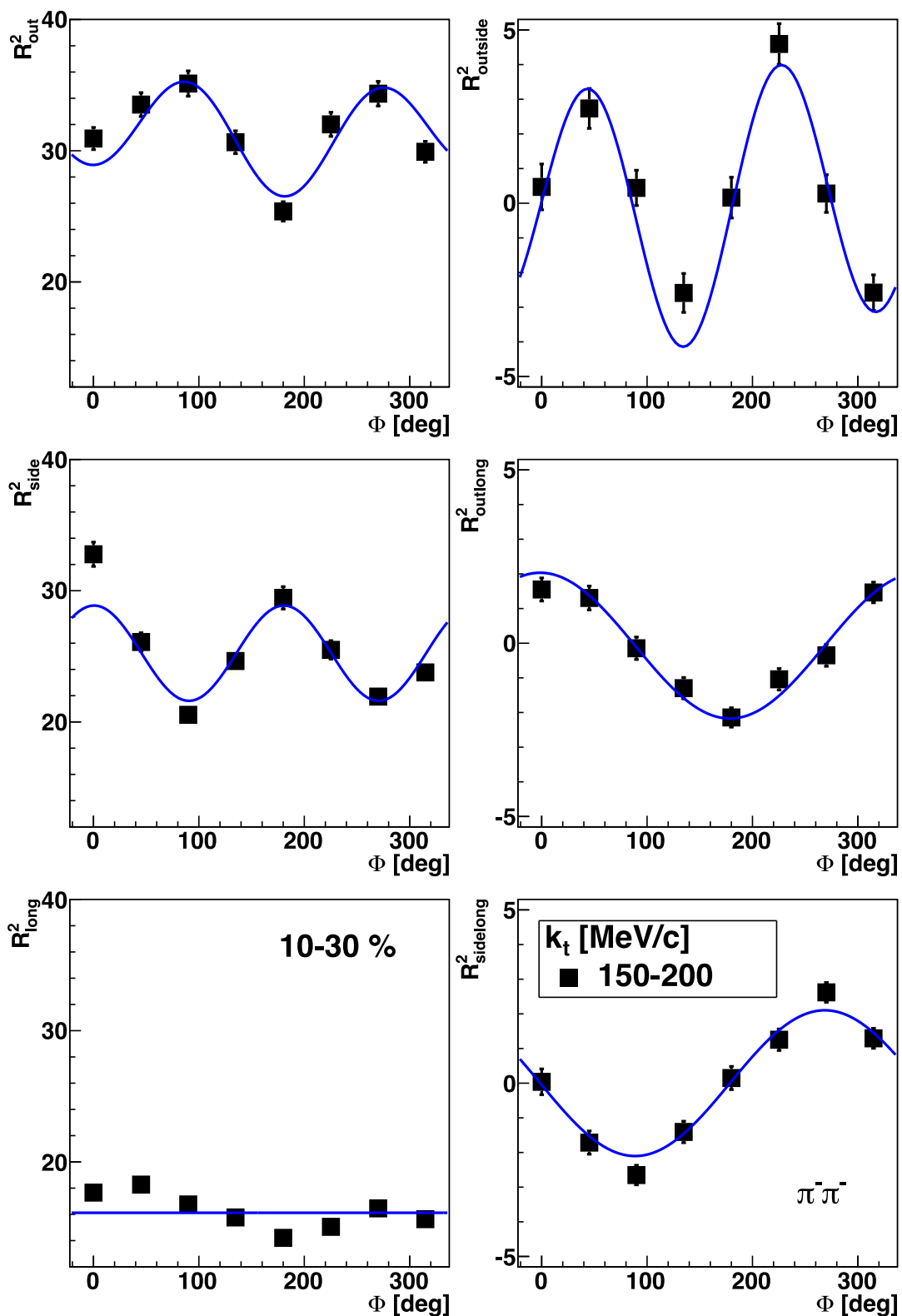
kdy po stanovení natočení zdroje v reakční rovině  $\theta_s = (-32 \pm 2)^\circ$  byla matice  $S^{corr}$  diagonalizována

$$S^{diag} = \begin{pmatrix} 10.12 \pm 0.64 & -0.73 \pm 0.23 & -0.18 \pm 0.27 & 0.56 \pm 0.18 \\ -0.73 \pm 0.23 & 20.15 \pm 0.35 & -0.15 \pm 0.31 & 0.00 \pm 0.23 \\ -0.18 \pm 0.27 & -0.15 \pm 0.31 & 31.87 \pm 0.44 & 0.02 \pm 0.22 \\ 0.56 \pm 0.18 & 0.00 \pm 0.23 & 0.02 \pm 0.22 & 14.58 \pm 0.24 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Podrobnějšímu postupu se budeme věnovat v následující kapitole.



Obr. 5.1: Závislosti korelačních poloměrů na průměrné příčné hybnosti párů  $k_T$  (v obrázku ozn.  $k_t$ ) při centralitě 0-10%, červeně jsou označena data pro páry  $\pi^+\pi^+$ , černě pro  $\pi^-\pi^-$ . V grafu je patrná coulombická interakce (popsána v textu). Modrá přerušovaná čára představuje zkonstruované poloměry pro neutrální piony. [4]



Obr. 5.2: Závislosti druhých mocnin korelačních poloměrů na úhlu natočení od reakční roviny  $\phi$  pro pionové páry  $\pi^-\pi^-$  při centralitě 10-30% a  $k_T = 150 - 200$  MeV/c. Body v závislosti obsahují pouze statistickou chybu. Modrá křivka odpovídá proložení bodů vztahy (2.14). [1]

# Kapitola 6

## Femtoskopie pro HADES s UrQMD

V německém FIAS byla pomocí UrQMD modelu namodelována data srážek Au+Au při energii 1,23 AGeV a centralitě 0-10%. Namodelováno bylo celkem 1886000 událostí, v nichž se počet nabitých pionů pohyboval okolo 30 pionů na událost. Takto připravená data bylo třeba upravit do požadovaného tvaru pro další zpracování. Jako první jsme ze všech vyprodukovaných částic vybrali pouze nabitě piony  $\pi^+$  i  $\pi^-$  spolu s jejich charakteristikami, tj. pořadí, id částice (spolu s informací o znaménku náboje), složky hybnosti částice ve směrech  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , energii částice, hmotnost částice, prostorové souřadnice a čas poslední interakce.

Do výše uvedeného tvaru bylo třeba data převést kvůli dalšímu zpracování programem CRAB.

### 6.1 CRAB

Program CRAB (Correlation After Burner) se využívá k vytvoření korelací mezi částicemi z poloklasických simulací, tzn. ze simulací neobsahujících kvantový popis. Program čte body fázového prostoru a spolu se znalostí srážkového parametru generuje korelační funkci.

CRAB je schopný zavést kvantové korekce pro coulombickou interakci dvou částic i pro silnou interakci mezi libovolným počtem parciálních vln a lze doplnit i korekci pro interakce Breit-Wignerova tvaru.

#### 6.1.1 Jak CRAB funguje

CRAB je založený na vztahu pro korelační funkci

$$C(\vec{P}_{tot}, \vec{q}) = 1 + \frac{\int d^4x_1 d^4x_2 S_1(x_1, \vec{p}_1) S_2(x_2, \vec{p}_2) |\phi_{rel}(x'_2 - x'_1)|^2}{\int d^4x_1 d^4x_2 S_1(x_1, \vec{p}_1) S_2(x_2, \vec{p}_2)}, \quad (6.1)$$

kde čárka odkazuje na souřadnice v klidové soustavě páru. Na korelační funkci pak tedy můžeme nahlížet jako na průměrnou váhu druhé mocniny vlnové funkce, která je rovna jedné pro neinteragující částice.

Princip výběru párů ke korelaci (jak uvádí autor v dokumentaci pro CRAB [15]) je následující. Nejdříve CRAB spočte čítel vybráním náhodných párů částic ze srážek se stejným srážkovým parametrem. CRAB přistupuje k různým částicím z různých událostí se stejným srážkovým parametrem jako by byly ze stejných událostí, což je stěžejní pro dostatečnou statistiku. Čítel je vážen součinem počtu částic každého druhu, pravděpodobností, že událost s daným srážkovým parametrem projde filtrem přes srážkové parametry a podílem druhé mocniny počtu událostí s daným srážkovým parametrem a druhé mocniny počtu částic použitých pro daný srážkový parametr.

Jmenovatel je při výpočtu vážen podobným způsobem jako čítel, avšak v případě jmenovatele je vybírán pár částic ze srážek s jiným srážkovým parametrem.

Nepřesnosti pro všechny biny v korelační funkci jsou určovány pro každý bin z odchylky kvadratického průměru váhy vlnové funkce a k těmto nepřesnostem se dále do čitatele i do jmenovatele přidává faktor  $1/N^{1/2}$  za fluktuace počtu párů.

Pokud všechny částice pocházejí z výpočtu pro srážkový parametr  $b = 0$ , pak není jmenovatel počítán a je místo něho použit počet párů z čitatele. Příspěvek  $1/N^{1/2}$  k neurčitosti se pak zanedbává.

## 6.2 Úhlově integrované korelační poloměry

Pomocí programu CRAB byly z dat nasimulovaných v UrQMD vygenerovány trojrozměrné korelační funkce, prointegrované přes úhel, v závislosti na relativní hybnosti páru  $\vec{q}$  pro každý z  $k_T$  binů, v intervalu  $k_T = 87,5 - 487,5$  MeV/c po 25 MeV/c. V CRABu bylo nastaveno omezení na rapiditu  $|y| < 0,35$  kvůli omezení detektoru HADES. Pro určení korelačních poloměrů byly použity dvě metody.

### 6.2.1 Prokládání křivkou

První metoda je založena na prokládání třírozměrné korelační funkce třídimenziální Gaussovou funkcí, kde daný korelační poloměr je úměrný parametru  $R_o$ , resp.  $R_s$ , resp.  $R_l$  ze vztahu

$$C(\vec{q}, \vec{k}_T) = 1 + \lambda \cdot e^{-q_o^2 R_o^2 - q_s^2 R_s^2 - q_l^2 R_l^2}, \quad (6.2)$$

který byl obecně odvozen v Kapitole 2, rovnice (2.6), a kde  $\lambda$  je parametr Gaussovy funkce. Křížné členy vymizí díky válcové symetrii a člen  $R_o$  vymizí díky symetrii v rapiditě. Aby byl výsledek v požadovaných jednotkách, femtometrech, je nutné parametr  $R_o$ , resp.  $R_s$ , resp.  $R_l$  vynásobit konstantou  $\hbar c = 197,3$  MeV·fm.

### 6.2.2 Variance

Druhý způsob získání korelačních poloměrů je výpočtem středních hodnot variancí, odvozených v Kapitole 2, vztahy (2.7), přímo z nasimulovaných dat. Platí tedy

$$\begin{aligned} R_o^2 &= \langle (\tilde{x} - \beta_\perp \tilde{t})^2 \rangle, \\ R_s^2 &= \langle \tilde{y}^2 \rangle, \\ R_l^2 &= \langle \tilde{z}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (6.3)$$

kde  $\tilde{x}_i = x_i - \bar{x}_i$  je souřadnice korigovaná o střední hodnotu,  $\bar{x}_i$  je průměrná hodnota dané souřadnice a  $\beta_l = 0$  díky omezení na střední rapiditu.

### 6.2.3 Vrstevnicový graf

Pro lepší pohled na měřenou oblast bylo vhodné sestrojít vrstevnicové grafy závislosti počtu částic na jejich poloze v příčné rovině. Natočením vektoru příčné hybnosti každé částice do směru osy  $x$  (tedy směru *out*) a boostem souřadnice  $x$  každé částice ve tvaru  $x - \beta_\perp t$ , kde  $\beta_\perp = \frac{p_T}{p_o}$ , byly ve výsledku zkonstruovány vrstevnicové grafy zobrazující počet částic v daném místě boostované příčné roviny pro každý z  $k_T$  binů (Příloha, Obr. A.1 pro  $\pi^+\pi^+$ , Obr. A.2 pro  $\pi^-\pi^-$ ). Z těchto grafů je možné vidět chování korelačních poloměrů  $R_o$  a  $R_s$  s rostoucím  $k_T$  (pro vyšší hodnoty  $k_T$  jsou rozměry menší a naopak)<sup>2</sup>.

## 6.3 Úhlově závislé korelační poloměry

Jako v předchozím případě byly pomocí programu CRAB vygenerovány trojrozměrné korelační funkce v závislosti na vzájemné hybnosti  $\vec{q}$  rozdělené do úhlových binů podle velikosti úhlu svíraného reakční rovinou a průměrnou hybností páru  $\vec{K}$ . Tyto korelační funkce byly proloženy předpisem korelační funkce ve tvaru

$$C(\vec{q}, \vec{k}_T, \phi) = 1 + \lambda \cdot \exp\left[-\sum_i q_i^2 R_i^2 - \sum_{i \neq j} q_i q_j R_{ij}^2\right], \quad (6.4)$$

<sup>2</sup>Musíme se však omezit jen na prvních pár vrstevnic (žlutá oblast).

kde  $i, j \in \{o, s, l\}$ . Oproti rovnici (6.2) je třeba uvažovat i křížné členy. Výsledné poloměry po korekci na konečněrozměrný bin, podle [1]

$$R_{i,n}^{2,corr} = R_{i,n}^{2,meas} \frac{n\Delta/2}{F_n \sin(n\Delta/2)}, \quad (6.5)$$

kde  $\Delta$  je šířka binu,  $n$  řád opravy<sup>3</sup> a rozlišení  $F_n$  je v našem případě rovno jedné, byly proloženy zjednodušenými vztahy (2.14), kde díky omezení na střední rapiditu  $\beta_l = 0$ . Máme tedy

$$\begin{aligned} R_s^2 &= S_{11} \sin^2 \phi + S_{22} \cos^2 \phi - S_{12} \sin 2\phi, \\ R_o^2 &= S_{11} \cos^2 \phi + S_{22} \sin^2 \phi + S_{12} \sin 2\phi \\ &\quad - 2\beta_{\perp} S_{01} \cos \phi - 2\beta_{\perp} S_{02} \sin \phi + \beta_{\perp}^2 S_{00}, \\ R_l^2 &= S_{33} + \beta_l^2 S_{00}, \\ R_{os}^2 &= S_{12} \cos 2\phi + \frac{1}{2}(S_{22} - S_{11}) \sin 2\phi \\ &\quad + \beta_{\perp} S_{01} \sin \phi - \beta_{\perp} S_{02} \cos \phi, \\ R_{ol}^2 &= S_{13} \cos \phi - \beta_{\perp} S_{03} + S_{23} \sin \phi \\ R_{sl}^2 &= S_{23} \cos \phi - S_{13} \sin \phi. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Z těchto vztahů je pak možné sestavit celou  $S$ -matici a dále pomocí jejích prvků spočítat úhel natočení zdroje v reakční rovině podle vzorce (2.15).

---

<sup>3</sup> $n = 0$  pro  $R_l$ ,  $n = 1$  pro  $R_{ol}$ ,  $R_{sl}$  a  $n = 2$  pro  $R_o$ ,  $R_s$  a  $R_{os}$

# Výsledky

## Úhlově integrované korelační poloměry

V grafech (Obr. 6.1) jsou vyneseny závislosti korelačních poloměrů na průměrné příčné hybnosti páru  $k_T$  ve třech různých případech. Modře jsou zobrazeny závislosti získané prokládáním trojrozměrné korelační funkce trojrozměrnou Gaussovou funkcí, vztah (6.2). Černě znázorněná data odpovídají korelačním poloměrům spočteným z variancí (6.3) přímo z nasimulovaných poloh a hybností produkovaných pionů a červeně jsou vynesena data z HADESu, která jsme získali odečtením z obrázku v [4].

Poloměry získané analýzou dat z UrQMD poměrně korespondují s chováním výsledků kolaborace HADES, avšak coulombická interakce se zůstatkem jádra nebyla v simulaci implementována. U závislostí pro  $\pi^-\pi^-$  je tak patrná odchylka od dat z HADESu. Největší rozdíl mezi daty z UrQMD a výsledky kolaborace HADES je pozorovatelný u  $\pi^-\pi^-$ ,  $R_s$  při nízkých  $k_T$ . To je však nejspíš způsobeno tím, že korelační funkce má jiný tvar než Gaussova funkce. Ze stejného důvodu se pak od naměřených poloměrů liší i variance.

## Úhlově závislé korelační poloměry

Jako další byla zkoumána azimutální závislost korelačních poloměrů. Grafy pro závislosti v jednotlivých směrech po korekci na konečněrozměrný bin je možné pro jednotlivé náboje vidět na Obr. 6.2 ( $\pi^+\pi^+$ ) a Obr. 6.3 ( $\pi^-\pi^-$ ).  $S$ -matice pro daný náboj byly získány proložení všech závislostí (6.6):

$$S_{\pi^+}^{corr} = \begin{pmatrix} 24.46 \pm 0.23 & -0.04 \pm 0.07 & -0.05 \pm 0.07 & 2.28 \pm 0.11 \\ -0.04 \pm 0.07 & 22.40 \pm 0.09 & -0.20 \pm 0.06 & -0.06 \pm 0.07 \\ -0.05 \pm 0.07 & -0.20 \pm 0.06 & 22.49 \pm 0.09 & -0.01 \pm 0.07 \\ 2.28 \pm 0.11 & -0.06 \pm 0.07 & -0.01 \pm 0.07 & 16.63 \pm 0.09 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

$$S_{\pi^-}^{corr} = \begin{pmatrix} 30.78 \pm 0.28 & -0.07 \pm 0.09 & -0.18 \pm 0.09 & 2.30 \pm 0.14 \\ -0.07 \pm 0.09 & 24.15 \pm 0.12 & -0.02 \pm 0.07 & -0.03 \pm 0.09 \\ -0.18 \pm 0.09 & -0.02 \pm 0.07 & 24.42 \pm 0.11 & -0.19 \pm 0.09 \\ 2.30 \pm 0.14 & -0.03 \pm 0.09 & -0.19 \pm 0.09 & 19.84 \pm 0.11 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

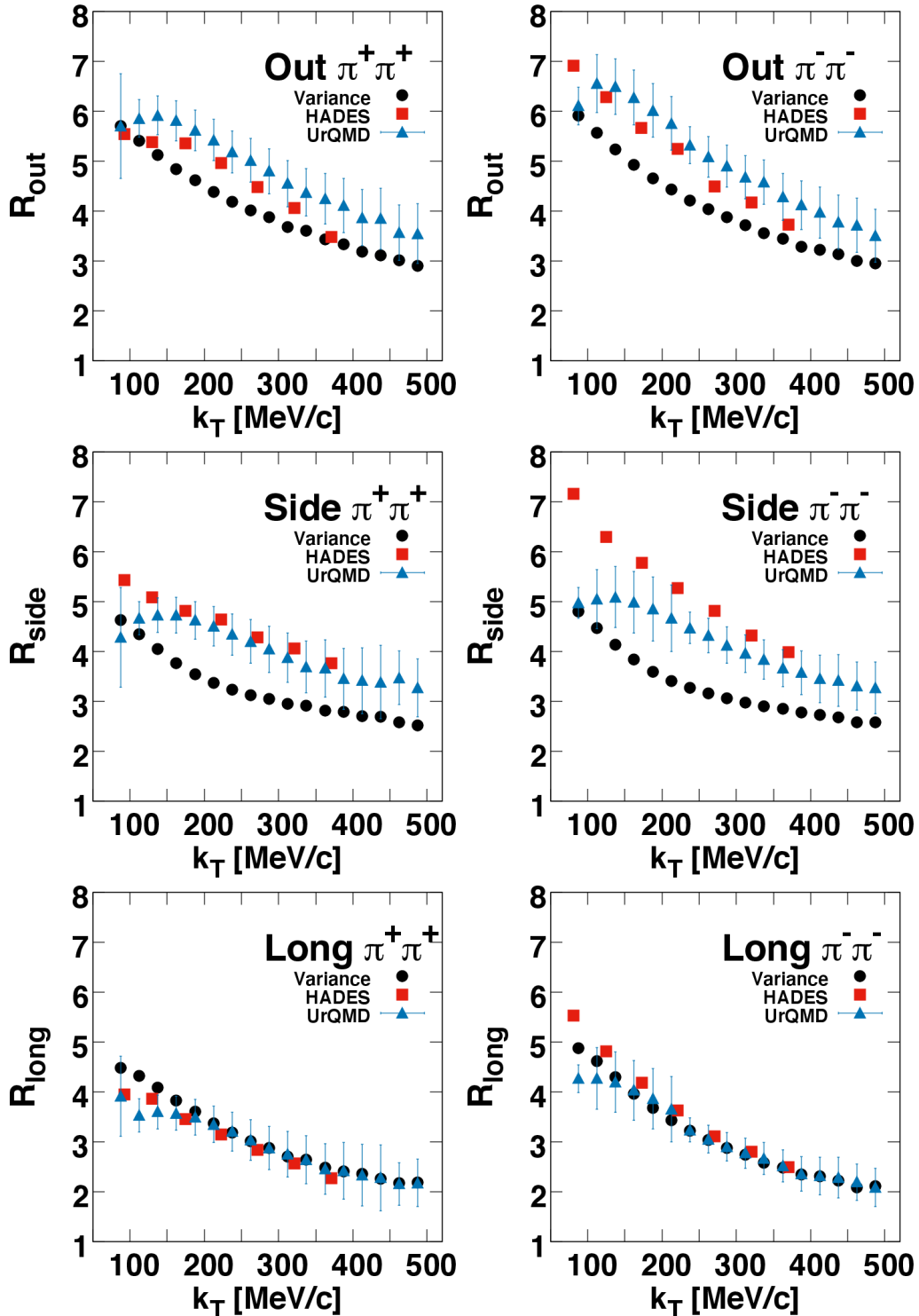
Z  $S$ -matice je pak možné určit pomocí rovnice (2.15) úhel natočení zdroje  $\theta_s$  v reakční rovině, pro kladně nabitě piony  $\theta_s^+ = (0.6 \pm 0.7)^\circ$  a pro záporně nabitě  $\theta_s^- = (0.4 \pm 1.1)^\circ$ .

Mimodiagonální prvky jsou malé, a lze je tak považovat za nulové, což odpovídá teoretické předpovědi. V  $S$ -matici se však nachází jeden překvapivý prvek,  $S_{03}$ , který je výrazně nenulový, což je v nesouladu s experimentálními výsledky z HADESu. To by mohlo být způsobeno nižší statistikou výstupu z UrQMD (tzn. menším počtem událostí) a širokým binem v  $k_T$  (přes celý  $k_T$  interval<sup>4</sup>, na rozdíl od binu ve výsledcích kolaborace HADES  $k_T = 150 - 200$  MeV), avšak chyby prvku  $S_{03}$  nenaznačují menší přesnost. Ze stejného důvodu, a případně proto, že implicitní azimutální závislosti korelačních poloměrů nelze zanedbat, některé proložené závislosti nekopírují data zcela přesně. Spolu s faktem, že se liší centralita srážek braných v úvahu, jsou i průběh závislostí a jejich oscilace odlišné od Obr. 5.2.

Pro názornost byl sestaven vrstevnicový graf závislosti počtu částic na poloze v reakční rovině,

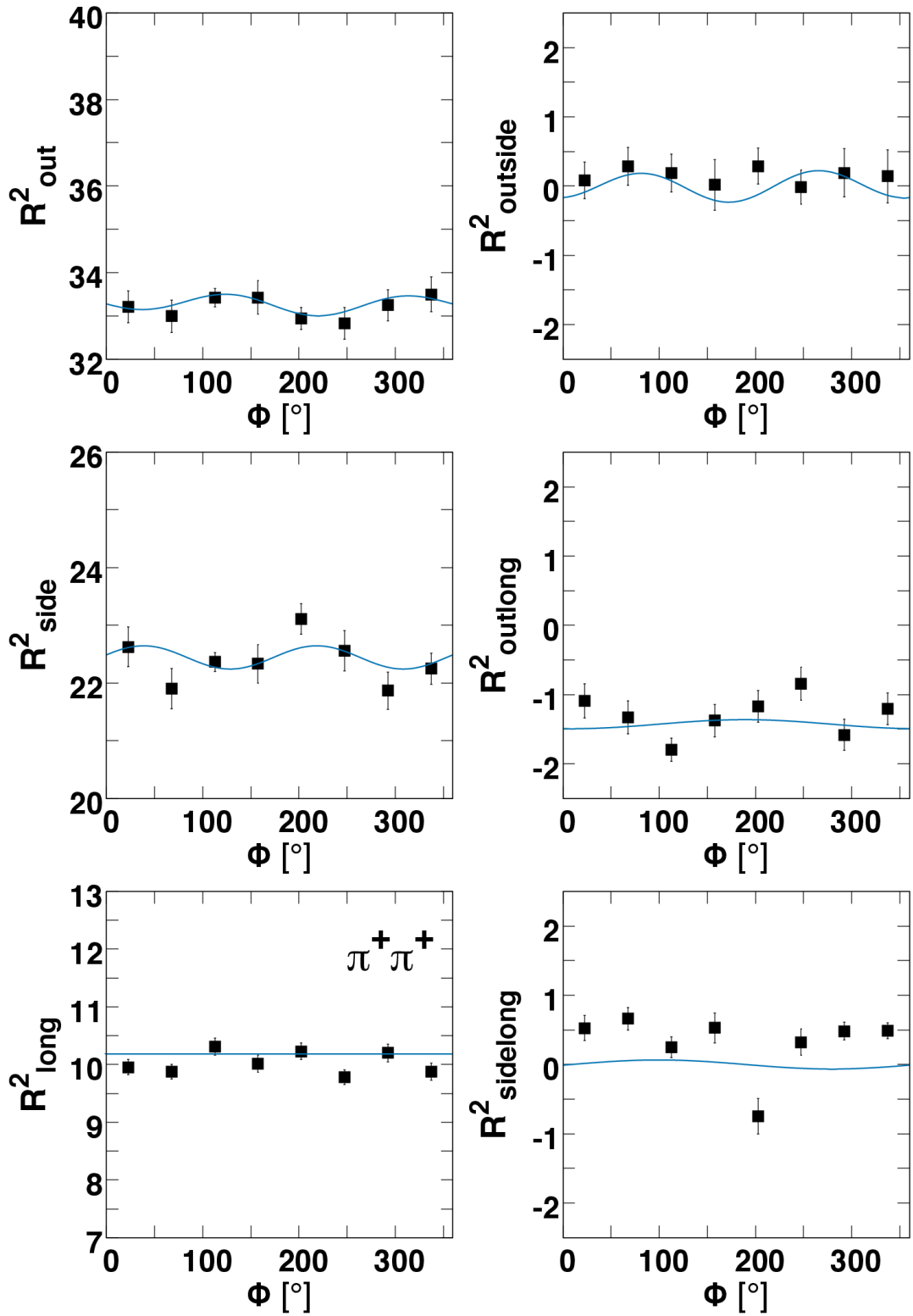
<sup>4</sup>Spektra v  $p_T$  pro jednotlivé náboje jsou zobrazena na Obr. A.3 v příloze.

pro obě nábojové konfigurace (horní dva grafy na Obr. 6.4), ukazující natočení zdroje. Dále byla vykreslena stejná závislost s boostovanou  $x$ -ovou souřadnicí,  $x-\beta_T t$ . Pro porovnání byl vykreslen i vrstevnicový graf korelační funkce a jejího proložení Gaussovou funkcí v binu  $\phi = (0 - 45)^\circ$ , tedy téměř při pohledu v reakční rovině (Obr. 6.5). Vzájemně různé natočení je způsobeno rozdílnými argumenty grafů, tj. korelační funkce byla do grafu vynesena jako funkce vzájemné hybnosti  $q$ . To odpovídá i popisu v článku [8]. Dále je na vykreslení závislosti počtu páru na poloze v reakční rovině možné pozorovat zkroucení (tzv. twist) při vývoji zdroje. Tento jev je detailněji popsán v [6].

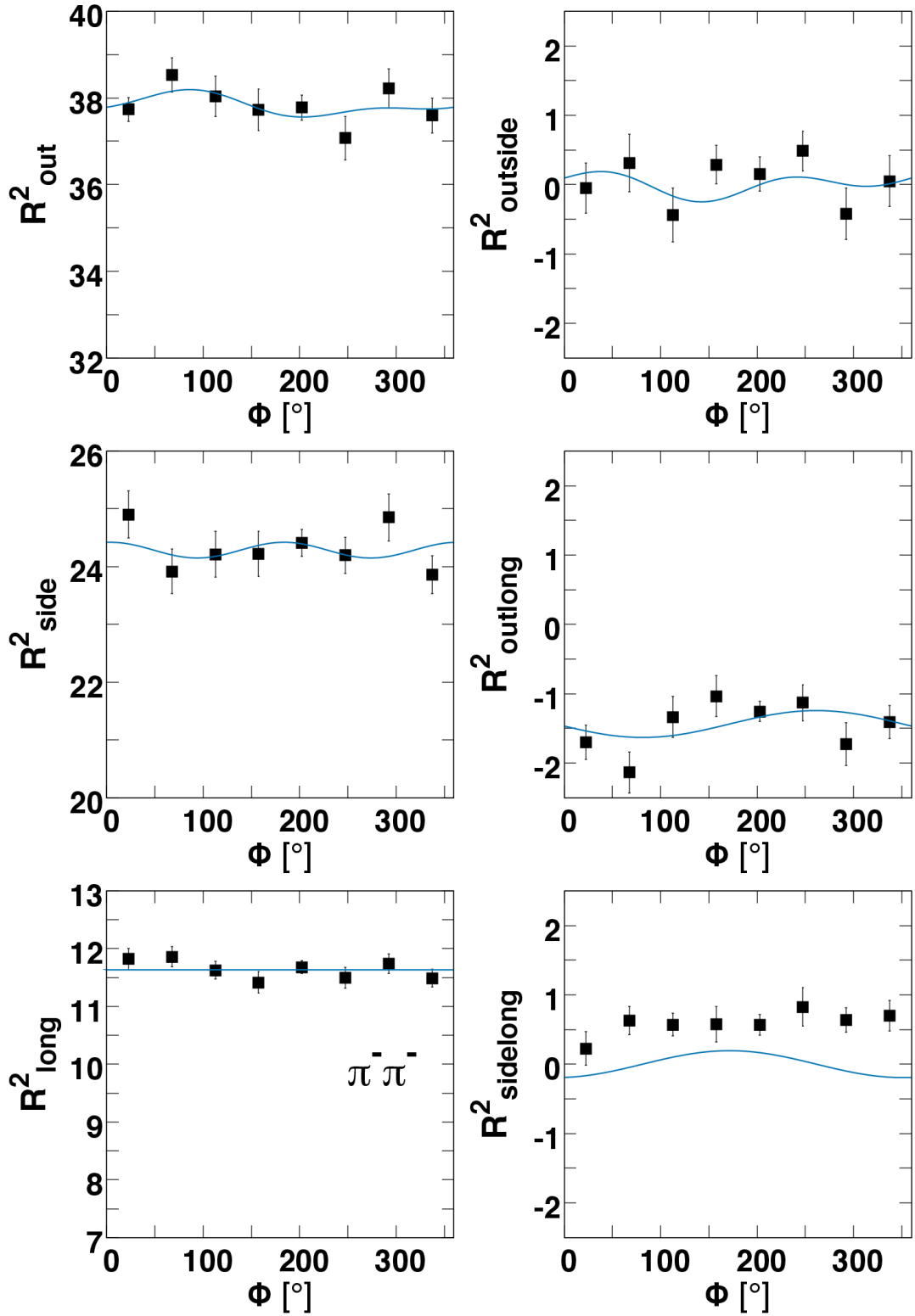


Obr. 6.1: Závislosti korelačních poloměrů na průměrné příčné hybnosti  $k_T$ , modré body odpovídají poloměrům získaných z dat nasimulovaných UrQMD, červené body odpovídají výsledkům kolaborace HADES z [4], černé body jsou pak vypočtené variance (6.3).

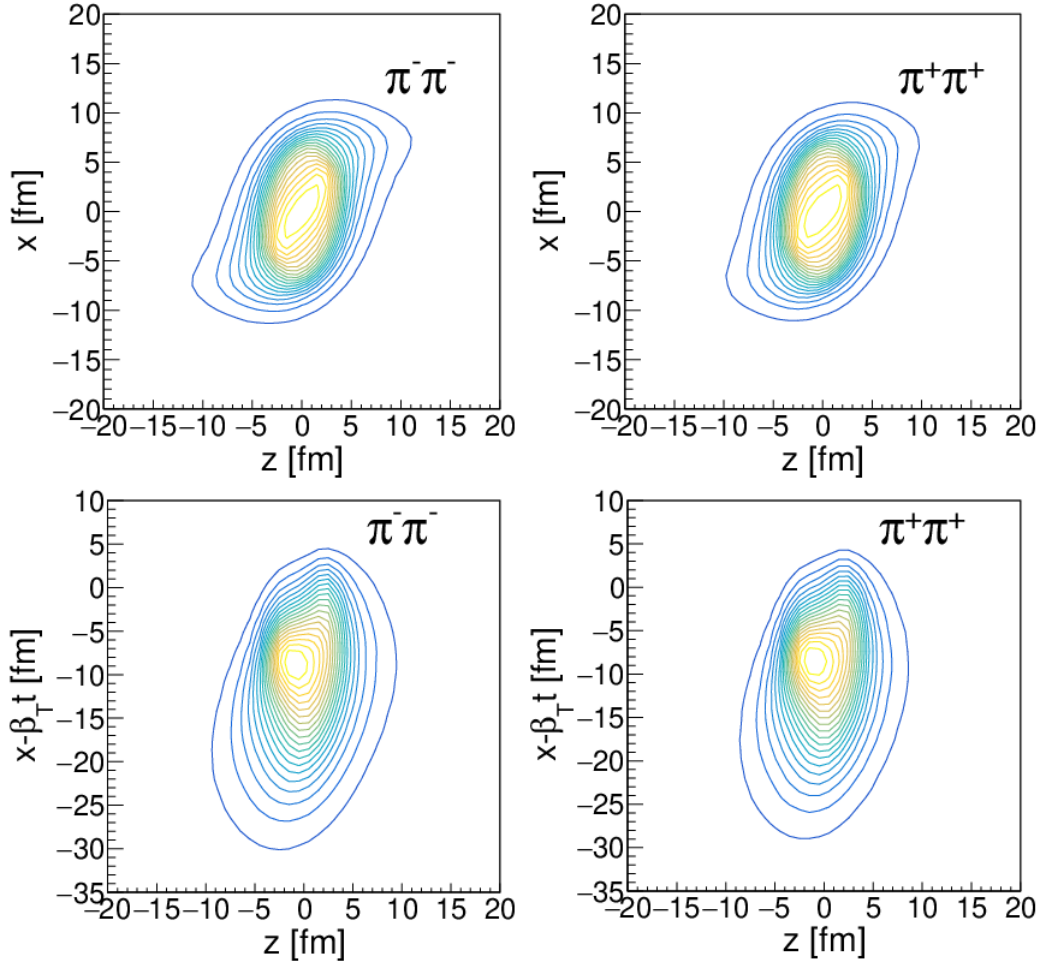




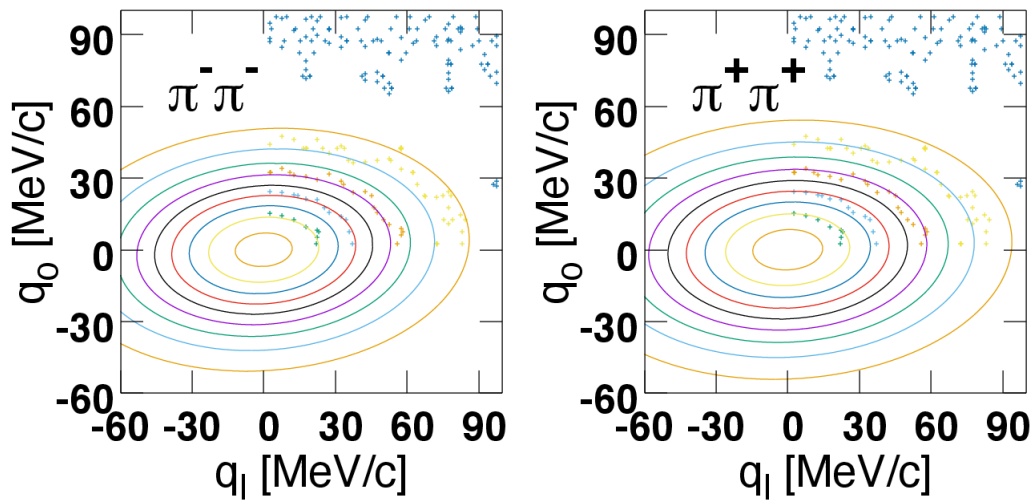
Obr. 6.2: Závislosti kvadrátů korelačních poloměrů na úhlu natočení od reakční roviny  $\phi$  pro  $\pi^+\pi^+$  při centralitě 0-10% přes celý  $k_T$  interval. Modrá křivka odpovídá proložení vztahy (6.6) při užití prvků matice (6.7).



Obr. 6.3: Závislosti kvadrátů korelačních poloměrů na úhlu natočení od reakční roviny  $\phi$  pro  $\pi^- \pi^-$  při centralitě 0-10% přes celý  $k_T$  interval. Modrá křivka odpovídá proložení vztahy (6.6) při užití prvků matice (6.8).



Obr. 6.4: Vrstevnicový graf závislosti počtu částic na poloze v reakční rovině pro obě nábojové konfigurace (horní grafy). Grafy ukazují natočení zdroje v reakční rovině. Spodní dva grafy odpovídají stejné závislosti s boostovanou  $x$ -ovou souřadnicí,  $x - \beta_T t$ .



Obr. 6.5: Vrstevnicový graf korelační funkce a jejího proložení Gaussovou funkcí v binu  $\phi = (0 - 45)^\circ$  pro obě nábojové konfigurace.

# Závěr

Pomocí transportního modelu UrQMD jsme provedli podobné měření korelačních poloměrů nabitých pionů jako kolaborace HADES ze srážek Au+Au při energii 1,23 AGeV. Byla provedena jak azimutálně integrovaná, tak i azimutálně závislá analýza pro centrální srážky.

U azimutálně integrované analýzy korelační poloměry poměrně korespondují s poloměry prezentovanými kolaborací HADES, avšak coulombická interakce se zůstatkem jádra nebyla v UrQMD implementována. Jsou proto mezi výsledky z UrQMD a kolaborace HADES patrné odchylky a původ podobných efektů u simulace UrQMD je zatím nejasný. Pro nízká  $k_T$  se korelační poloměry přibližují hodnotám vypočtených variancí kvůli negaussovskému tvaru korelační funkce.

Při azimutálně závislé analýze jsme v některých závislostech korelačních poloměrů narazili na nesoulad dat a průběhu proložení předpisem pro korelační poloměry. To může být způsobeno nižší statistikou výstupu UrQMD (v porovnání s experimentem HADES), uvažováním azimutálních závislostí přes celý interval příčné hybnosti páru  $k_T$ , anebo proto, že implicitní azimutální závislosti korelačních poloměrů nelze zanedbat. Dále se při azimutálně závislé analýze objevil v  $S$ -matici neobvykle velký prvek  $S_{03}$ . To může být rovněž způsobeno důvody uvedenými výše, nebo nesouladem simulace a experimentu. V simulaci je možné vidět korelaci mezi časem a podélnou souřadnicí, zatímco experiment nic takového neukazuje. Podélná expanze a produkce částic tedy může být v simulaci a v experimentu odlišná.

# Literatura

- [1] J. Adamczewski-Musch *et al.* [HADES], *Identical pion intensity interferometry at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.4$  GeV: HADES collaboration*, Eur. Phys. J. A **56** (2020) no.5, 140 doi:10.1140/epja/s10050-020-00116-w [arXiv:1910.07885 [nucl-ex]].
- [2] S. Chapman, P. Scotto and U. W. Heinz, *Model independent features of the two particle correlation function*, Acta Phys. Hung. A **1** (1995), 1-31 [arXiv:hep-ph/9409349 [hep-ph]].
- [3] B. Tomasik and U. A. Wiedemann, *Central and noncentral HBT from AGS to RHIC*, [arXiv:hep-ph/0210250 [hep-ph]] (2002).
- [4] J. Adamczewski-Musch *et al.* [HADES], *Identical pion intensity interferometry in central Au + Au collisions at 1.23 A GeV*, Phys. Lett. B **795** (2019), 446-451 doi:10.1016/j.physletb.2019.06.047 [arXiv:1811.06213 [nucl-ex]].
- [5] M. Bleicher, E. Zabrodin, C. Spieles, S. A. Bass, C. Ernst, S. Soff, L. Bravina, M. Belkacem, H. Weber, H. Stoecker and W. Greiner, *Relativistic hadron hadron collisions in the ultrarelativistic quantum molecular dynamics model*, J. Phys. G **25** (1999), 1859-1896 doi:10.1088/0954-3899/25/9/308 [arXiv:hep-ph/9909407 [hep-ph]].
- [6] G. Graef, M. Lisa and M. Bleicher, *Twisted emission geometry in noncentral Pb + Pb collisions measurable via azimuthally sensitive Hanbury-Brown–Twiss correlations*, Phys. Rev. C **89** (2014) no.1, 014903 doi:10.1103/PhysRevC.89.014903 [arXiv:1302.3408 [hep-ph]].
- [7] M. A. Lisa *et al.* [E895], *Azimuthal dependence of pion interferometry at the AGS*, Phys. Lett. B **496** (2000), 1-8 doi:10.1016/S0370-2693(00)01280-6 [arXiv:nucl-ex/0007022 [nucl-ex]].
- [8] M. A. Lisa, U. W. Heinz and U. A. Wiedemann, *Tilted pion sources from azimuthally sensitive HBT interferometry*, Phys. Lett. B **489** (2000), 287-292 doi:10.1016/S0370-2693(00)00952-7 [arXiv:nucl-th/0003022 [nucl-th]].
- [9] S. A. Bass, M. Belkacem, M. Bleicher, M. Brandstetter, L. Bravina, C. Ernst, L. Gerland, M. Hofmann, S. Hofmann, J. Konopka, G. Mao, L. Neise, S. Soff, C. Spieles, H. Weber, L. A. Winkelmann, H. Stoecker, W. Greiner, C. Hartnack, J. Aichelin and N. Amelin, *Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions*, Prog. Part. Nucl. Phys. **41** (1998), 255-369 doi:10.1016/S0146-6410(98)00058-1 [arXiv:nucl-th/9803035 [nucl-th]].
- [10] M. A. Lisa, S. Pratt, R. Soltz and U. Wiedemann, *Femtосcopy in relativistic heavy ion collisions*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **55** (2005), 357-402 doi:10.1146/annurev.nucl.55.090704.151533 [arXiv:nucl-ex/0505014 [nucl-ex]].
- [11] R. Stock, *Relativistic Heavy Ion Physics · Introduction*, doi:10.1007/978-3-642-01539-7\_1 [arXiv:0907.5071 [nucl-ex]].
- [12] W. Florkowski, *Phenomenology of ultra-relativistic heavy-ion collisions*, World Scientific (2010).
- [13] R. S. Bhalerao, *Relativistic heavy-ion collisions*, doi:10.5170/CERN-2014-001.219 [arXiv:1404.3294 [nucl-th]].

- [14] C. Plumberg and U. Heinz, *Hanbury-Brown–Twiss correlation functions and radii from event-by-event hydrodynamics*, Phys. Rev. C **98** (2018) no.3, 034910 doi:10.1103/PhysRevC.98.034910 [arXiv:1611.03161 [nucl-th]].
- [15] S. Pratt, *CRAB 3.0 $\alpha$* , National Superconducting Cyclotron Laboratory, Michigan State University, East Lansing, MI 48824 [pratt@nscl.msu.edu](mailto:pratt@nscl.msu.edu) (517) 333-6438
- [16] G. Agakishiev *et al.* [HADES], *The High-Acceptance Dielectron Spectrometer HADES*, Eur. Phys. J. A **41** (2009), 243-277 doi:10.1140/epja/i2009-10807-5 [arXiv:0902.3478 [nucl-ex]].
- [17] GSI Helmholtz Centre for Heavy Ion Research, *HADES experiment*, [Cit. 29.7.2020], dostupné z: [https://www.gsi.de/en/researchaccelerators/research\\_an\\_overview/hades\\_experiment.htm](https://www.gsi.de/en/researchaccelerators/research_an_overview/hades_experiment.htm)

# Přílohy

## Odvození korelačních poloměrů

Zavedeme

$$P(p) = \int d^4x S(x, p). \quad (\text{A.1})$$

Použitím  $o - s - l$  souřadnicového systému a on-shell podmínky

$$q^\mu \cdot K_\mu = 0 \Rightarrow q^0 K^0 = \vec{q} \vec{K} \Rightarrow q^0 = \vec{q} \frac{\vec{K}}{K^0} = \vec{q} \vec{\beta}, \quad (\text{A.2})$$

můžeme přepsat podmínku (2.5)

$$q^\mu \cdot x_\mu = \vec{\beta} \cdot \vec{q} t - q_o x - q_s y - q_l z = -q_o(x - \beta_\perp t) - q_s y - q_l(z - \beta_l t). \quad (\text{A.3})$$

Dosažením do (2.3) lze exponenciála rozepsat Taylorovým rozvojem v  $q$

$$e^{iq \cdot x} \simeq 1 - i[q_o(x - \beta_\perp t) - q_s y - q_l(z - \beta_l t)] - \frac{1}{2}[q_o(x - \beta_\perp t) - q_s y - q_l(z - \beta_l t)]^2. \quad (\text{A.4})$$

Ve vztahu (2.3) upravíme čitatel se zavedením notace  $x^\mu \rightarrow (t, x, y, z)$ ,  $x'^\mu \rightarrow (t', x', y', z')$

$$\begin{aligned} & \left| \int d^4x S(x, K) e^{iqx} \right|^2 \simeq \\ & \int d^4x S(x, K) \{1 - i[q_o(x - \beta_\perp t) - q_s y - q_l(z - \beta_l t)] - \frac{1}{2}[q_o(x - \beta_\perp t) - q_s y - q_l(z - \beta_l t)]^2\} \\ & \int d^4x' S(x', K) \{1 - i[q_o(x' - \beta_\perp t') - q_s y' - q_l(z' - \beta_l t')] - \frac{1}{2}[q_o(x' - \beta_\perp t') - q_s y' - q_l(z' - \beta_l t')]^2\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

roznásobením do druhého řádu v  $q_i$  máme

$$\begin{aligned} & \int d^4x \int d^4x' S(x', K) S(x, K) - \\ & - i \int d^4x S(x, K) [q_o(x - \beta_\perp t) - q_s y - q_l(z - \beta_l t)] \int d^4x' S(x', K) + \\ & + i \int d^4x S(x, K) \int d^4x' S(x', K) [q_o(x' - \beta_\perp t') - q_s y' - q_l(z' - \beta_l t')] + \\ & + \int d^4x S(x, K) [q_o(x - \beta_\perp t) - q_s y - q_l(z - \beta_l t)] \int d^4x' S(x', K) [q_o(x' - \beta_\perp t') - q_s y' - q_l(z' - \beta_l t')] - \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x S(x, K) [q_o(x - \beta_\perp t) - q_s y - q_l(z - \beta_l t)]^2 \int d^4x' S(x', K) - \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x S(x, K) \int d^4x' S(x', K) [q_o(x' - \beta_\perp t') - q_s y' - q_l(z' - \beta_l t')]^2, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

a využitím (A.1)

$$\begin{aligned}
& P(K)^2 - P(K) \int d^4x \left( \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j (x_i - \beta_i t)(x_j - \beta_j t) \right) S(x, K) + \\
& + \int d^4x S(x, K) \int d^4x' S(x', K) \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j (x_i - \beta_i t)(x'_j - \beta_j t'),
\end{aligned} \tag{A.7}$$

kde  $i, j \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \{o, s, l\}$  a  $\beta_s = 0$ . Záměnou sumy a integrálu dostáváme

$$\begin{aligned}
& P(K)^2 - \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j P(K) \int d^4x (x_i - \beta_i t)(x_j - \beta_j t) S(x, K) + \\
& + \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j \int d^4x S(x, K) \int d^4x' S(x', K) (x_i - \beta_i t)(x'_j - \beta_j t') = \\
& = P(K)^2 - \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j \left\{ P(K) \int d^4x (x_i - \beta_i t)(x_j - \beta_j t) S(x, K) + \right. \\
& \left. + \int d^4x S(x, K) (x_i - \beta_i t) \int d^4x' S(x', K) (x'_j - \beta_j t') \right\}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Pak můžeme korelační funkci ve tvaru (2.3) rozepsat

$$\begin{aligned}
C(x, K) \approx 1 + \frac{1}{P(K)^2} \left[ P(K)^2 - \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j \left\{ P(K) \int d^4x S(x, K) (x_i - \beta_i t)(x_j - \beta_j t) + \right. \right. \\
\left. \left. + \int d^4x S(x, K) (x_i - \beta_i t) \int d^4x' S(x', K) (x'_j - \beta_j t') \right\} \right],
\end{aligned} \tag{A.9}$$

a dosazením opět z (A.1)

$$C(x, K) \approx 1 + 1 - \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j \left\{ \frac{\int d^4x S(x, K) (x_i - \beta_i t)(x_j - \beta_j t)}{\int d^4x S(x, K)} - \frac{\int d^4x S(x, K) (x_i - \beta_i t)}{\int d^4x S(x, K)} \frac{\int d^4x' S(x', K) (x'_j - \beta_j t')}{\int d^4x' S(x', K)} \right\}. \tag{A.10}$$

Zavedením vztahu

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int d^4x S(x, K) f(x)}{\int d^4x S(x, K)} \tag{A.11}$$

lze korelační funkci přepsat jako

$$C(x, K) \approx 2 - \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j \{ \langle (x_i - \beta_i t)(x_j - \beta_j t) \rangle - \langle (x_i - \beta_i t) \rangle \langle (x_j - \beta_j t) \rangle \}. \tag{A.12}$$

Přepsáním exponenciály v (2.6) do tvaru  $\exp[-\sum_{i,j=1}^3 q_i q_j R_{ij}^2]$  a rozvinutím do Taylorova rozvoje v  $q$  platí pro korelační funkci

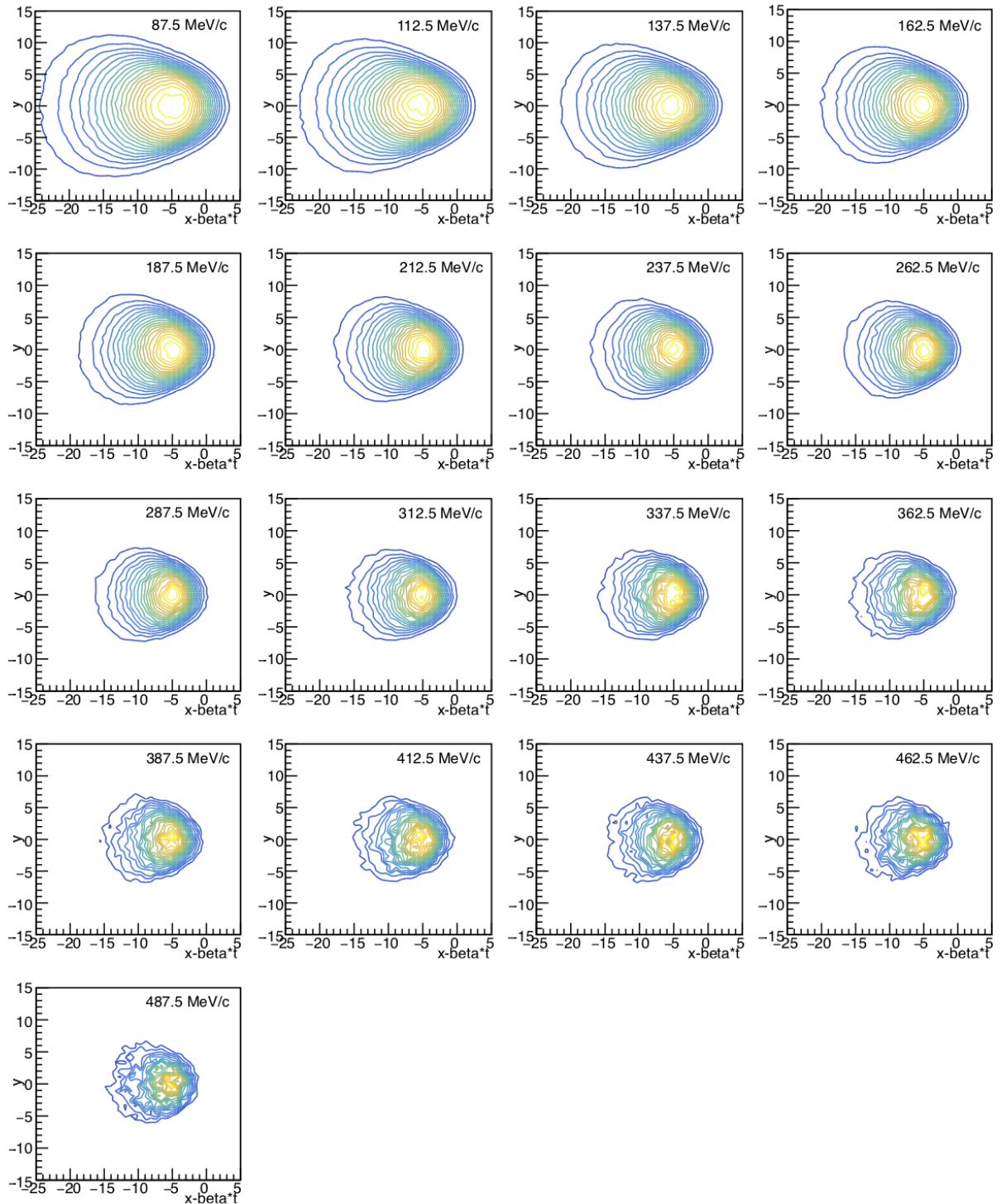
$$C(x, K) \approx 1 + 1 - \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j R_{ij}^2 = 2 - \sum_{i,j=1}^3 q_i q_j R_{ij}^2. \tag{A.13}$$

Porovnáním sumandů dostáváme obecný předpis pro korelační poloměry

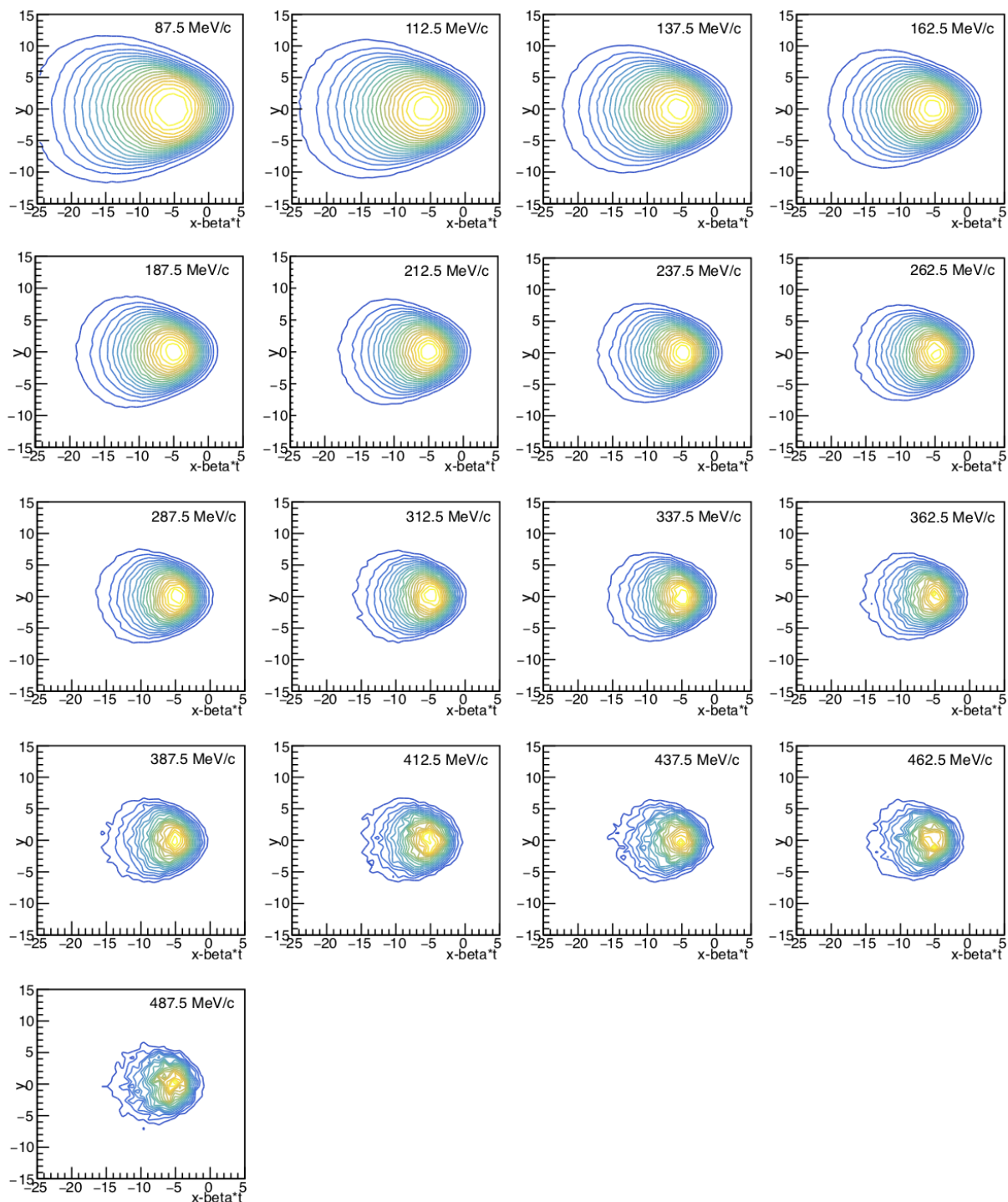
$$R_{ij}^2 = \langle (x_i - \beta_i t)(x_j - \beta_j t) \rangle - \langle (x_i - \beta_i t) \rangle \langle (x_j - \beta_j t) \rangle. \tag{A.14}$$



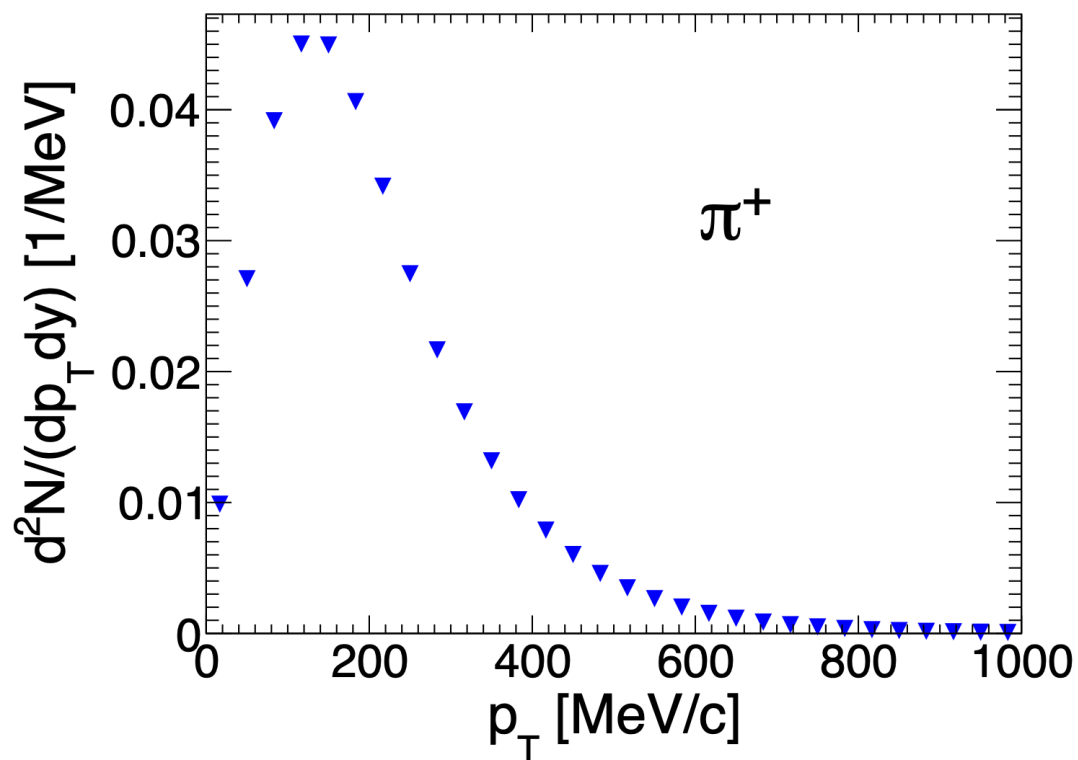
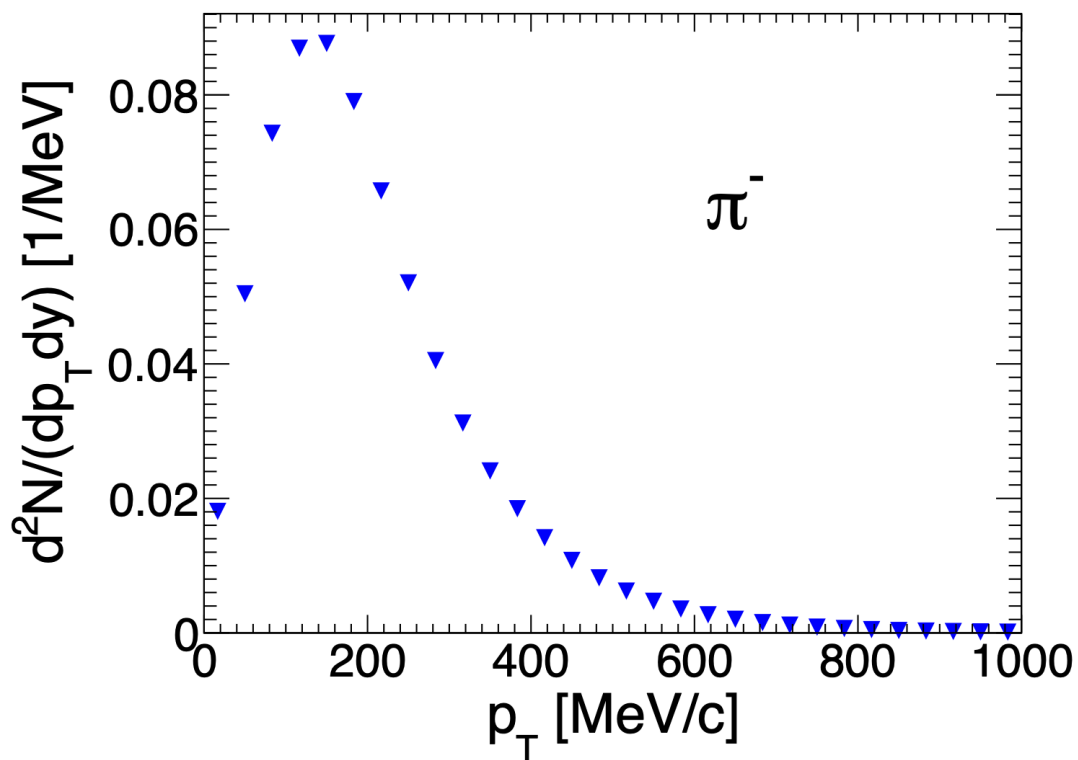
## Vrstevnicový graf



Obr. A.1: Vrstevnicový graf (popsaný v 6.2.3) pro  $\pi^+\pi^+$  závislosti počtu částic v rovině  $y$ ,  $(x - \beta_{\perp}t)$ . Hodnoty v pravém horním rohu každého grafu odpovídají počáteční  $k_T$  v daném binu. Šířka jednoho binu je 25 MeV/c. Velikosti korelačních poloměrů v daném směru odpovídají přibližně žluté oblasti.



Obr. A.2: Vrstevnicový graf (popsaný v 6.2.3) pro  $\pi^-\pi^-$ , závislosti počtu částic v rovině  $y, (x - \beta_{\perp} t)$ . Hodnoty v pravém horním rohu každého grafu odpovídají počáteční  $k_T$  v daném binu. Šířka jednoho binu je 25 MeV/c. Velikosti korelačních poloměrů v daném směru odpovídají přibližně žluté oblasti.



Obr. A.3: Spektrum pionů v  $p_T$ , horní graf odpovídá  $\pi^-$ , dolní  $\pi^+$ . Spektrum je rozděleno do třiceti binů v  $p_T$  a  $|y| < 0,35$ .