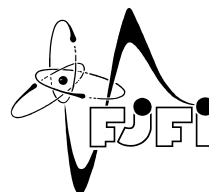




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Prstencový zdroj gravitace jako limita tlustého toroidu

Ring source of gravitation as a limit of thick toroid

Bakalářská práce

Autor: **Patrik Šnauko**

Vedoucí práce: **doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.**

Akademický rok: 2019/2020

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli doc. Oldřichu Semerákovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd...) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 3. srpna 2020

Patrik Šnauko

Název práce:

Prstencový zdroj gravitace jako limita tlustého toroidu

Autor: Patrik Šnauko

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Ústav teoretické fyziky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Abstrakt: Hledání gravitačního pole kolem statického a axiálně symetrického zdroje vede v Newtonově teorii i v obecné relativitě na Laplaceovu rovnici pro gravitační potenciál. V obecné relativitě však řešení závisí ještě na další metrické funkci, a ta někdy velmi neintuitivně deformuje prostor v blízkosti zdroje (kde jsou velké gradienty potenciálu). Jako příklad takového chování uvádíme prostoročas statického homogenního kruhového prstence, popsany tvz. Bachovým-Weylovým řešením. Citujeme z literatury několik překvapivých vlastností tohoto řešení, a poté ilustrujeme jeho geometrii na průběhu jednoduchých metrických výrazů.

Klíčová slova: Bachovo-Weylovo řešení, Greenova funkce, Laplaceova rovnice, metrické funkce, separace proměnných, statické axiálně symetrické prostoročasy, Weylova metrika

Title:

Ring source of gravitation as a limit of thick toroid

Author: Patrik Šnauko

Abstract: The search of the gravitational field around a static and axisymmetric source leads to the Laplace equation for a lapse function, in the Newtonian theory of gravitation. However, in general relativity, the solution of the problem depends on the second metric function, which has no analog in Newtonian theory and which can massively deform spacetime in the vicinity of the source. As an example, consider the spacetime of static homogenous ring, which is described by Bach-Weyl's solution. Let us cite some surprising results about the properties of the solution from literature. Finally, we demonstrate the geometry of some simple metric expressions by contour plots of these functions.

Key words: Bach-Weyl's solution, Green function, Laplace equation, metric functions separation of variables, static axisymmetric spacetime, Weyl's metric

Obsah

Úvod	7
1 Toroid a Laplaceova rovnice	9
1.1 Sférické souřadnice	10
1.2 Toroidální souřadnice	11
1.3 Popis toroidu	13
1.4 Výpočet pole na ose symetrie	14
1.5 Rozvoj potenciálu ve sférických a toroidálních souřadnicích	15
1.5.1 Sférické souřadnice	15
1.5.2 Toroidální souřadnice	16
1.6 Řešení ve Weylových souřadnicích	17
1.6.1 Shrnutí speciálních funkcí a značení použitých v tomto oddíle	17
1.6.2 Převod problému z toroidálních souřadnic do Weylových	18
1.6.3 Limita pro tenký toroid	18
2 Geometrické charakteristiky Bachova-Weylova prstence	19
2.1 Řešení pro tenký homogenní prstenec	19
2.2 Geometrie Bachova-Weylova prstence	20
2.2.1 Od BW řešení ke Curzonovu řešení	21
2.2.2 Geometrické vlastnosti BW řešení	22
2.2.3 Gravitační zrychlení	26
2.2.4 Kretschmannův invariant	26
3 Zobrazení kontur vybraných geometrických charakteristik	29
3.1 Potenciál - metrická funkce ν	29
3.2 Funkce $\lambda - \nu$	30
3.3 Funkce $\lambda - \nu - \mu$	33
Závěr	35

Úvod

Einsteinova obecná teorie relativity, dokončená v roce 1915, je mimořádně elegantní a také empiricky velmi úspěšnou teorií gravitace. Oproti předchozí teorii Newtonově popisuje gravitační interakci jako projev zakřivení prostoročasu. To ovšem znamená, že chování prostoročasového podloží se stává součástí řešení jakékoli gravitační úlohy, a tím pádem bývá úloha oproti newtonovskému popisu podstatně obtížnější. Vzhledem k tomu, že geometrie prostoročasu je ovlivněna přítomnou hmotou-energií, ale zároveň naopak ovlivňuje chování zdrojů této hmoty-energie, nelze se divit, že gravitační zákon reprezentovaný Einsteinovými rovnicemi je nelineární. Nelinearita je prakticky nejobtížnější vlastností obecné relativity.

Ačkoli existují i velmi jednoduchá (typicky vysoce symetrická) řešení Einsteinových rovnic, i u nich se většinou vyskytují specifické — a často dost neintuitivní — rysy spojené s nelinearitou teorie. Jedním z takovýchto překvapením byla i předpověď existence “černých děr”, spojená již s historicky prvním řešením rovnic, objeveným Karlem Schwarzschildem jen měsíc po dokončení teorie. V této práci se zabýváme jiným příkladem jednoduchého prostoročasu, který má nicméně oproti svému newtonovskému protějšku velmi zvláštní geometrické vlastnosti — prostoročasem statického homogenního kruhového lineárního prstence.

Pole tenkého kruhového prstence patří do třídy statických a axiálně symetrických vakuových (případně elektro-vakuových) řešení, která byla popsána vhodnými souřadnicemi a jednoduchou metrikou Hermannem Wylem v r. 1917 ([1]). Weylova metrika obsahuje dvě neurčené funkce, přičemž jedna z nich má význam odpovídající Newtonově gravitačnímu potenciálu (ve Weylových souřadnicích cylindrického typu také splňuje stejnou rovnici, totiž Laplaceovu či Poissonovu). Na rozdíl od newtonovské situace, kde je pole potenciálem plně popsáno, vystupuje však ve Weylových řešeních ještě druhá metrická funkce, která nesplňuje lineární rovnici, a jejíž nalezení v uzavřeném analytickém tvaru není obecně možné. Tato funkce je podstatná pro geometrické vlastnosti meridionální roviny, tedy roviny kolmé k oběma základním symetriím Weylových prostoročasů — časové a azimutální symetrii, a pro kompaktní (husté) zdroje může geometrii značně zdeformovat oproti naivní eukleidovské představě.

Pole homogenního kruhového lineárního prstence je v Newtonově teorii (nebo podobně v elektrostatičce) popsáno známým potenciálem určeným úplným eliptickým integrálem 1. druhu. V rámci Weylových řešení obecné relativity, jak jsme řekli, je možno tento výsledek přímo převzít jako vyjádření pro první metrickou funkci. V případě prstence je dokonce možno najít i druhou metrickou funkci analyticky, jak ukázali Bach a Weyl v roce 1922 ([2]); obecně relativistickému řešení se proto říká Bachův-Weylův prstenec. Druhá metrická funkce však v okolí prstence deformuje meridionální „rovinu“ velmi silně, takže některé geometrické parametry se chovají neintuitivně. Prstenec se kupříkladu nachází v konečné vlastní vzdálenosti, pokud se k němu přichází z „vnější“ poloroviny (oproti jeho poloměru), kdežto „zevnitř“ je v nekonečné vlastní vzdálenosti. Speciálně tedy vychází nekonečný jeho vlastní poloměr.

V této práci ilustrujeme zmíněnou zvláštnost na obrázcích průběhu zvolených geometrických charakteristik. Práce je členěna do celkem tří kapitol, kde v první kapitole se budeme věnovat především

řešení Laplaceovy rovnice v různých souřadných systémech a limitnímu chování těchto řešení. Druhá kapitola se zabývá jednoduchými geometrickými charakteristikami ilustrujícími singulární chování BW prstence. Nakonec, ve třetí kapitole, provedeme vyobrazení kontur některých dalších vybraných geometrických charakteristik.

Metrika a základní poznatky

V celé práci budeme vycházet z Weylovy metriky stejně jako v článku [1].

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} \rho^2 d\phi^2 + N^{-2} e^{2\lambda} (d\rho^2 + dz^2), \quad (1)$$

kde často označujeme $N =: e^v$ - důvod pro toto označení bude zřejmý níže. Pro metrickou funkci v potom totiž, po dosazení do Einsteinových rovnic, vyjde známá Laplaceova rovnice. Metrika potom přejde do tvaru

$$ds^2 = -e^{2v} dt^2 + e^{-2v} \rho^2 d\phi^2 + e^{2\lambda-2v} (d\rho^2 + dz^2). \quad (2)$$

Na této metrice je výhodné, že metrické funkce v a λ jsou pouze funkcemi ρ a ϕ . (viz odkaz na článek) Kromě toho koeficient u $d\rho^2$ a dz^2 je stejný.

Provedeme-li dosazení metriky (2) do Einsteinových rovnic, dostaneme následující:

1. pro metrickou funkci v jsme získali Laplaceovu rovnici

$$\Delta v = 0, \quad (3)$$

2. pro druhou metrickou funkci λ jsme dostali integrál

$$\lambda = \int_{osa}^{\rho,z} \rho [(v_{,\rho}^2 - v_{,z}^2) d\rho + 2v_{,\rho} v_{,z} dz]. \quad (4)$$

Kapitola 1

Toroid a Laplaceova rovnice

V celé následující kapitole budeme vycházet ze článku [3], pouze podrobněji popíšeme mezikroky. Díky analogii mezi newtonovskou teorií gravitace (resp. elektrostatikou) budeme v dalším textu mluvit o metrické funkci v jako o potenciálu. Ten nás také bude v následující podkapitole zajímat. Pro vyřešení Laplaceovy rovnice (3) využijeme kombinaci dvou způsobů:

1. pomocí volby vhodných souřadných systémů a následné separace, tedy rozepsání potenciálu do součiny jiných funkcí jednotlivě závislých na jednotlivých proměnných. Tento způsob převede partiální diferenciální rovnici na vzájemně nezávislé obyčejné diferenciální rovnice.
2. pomocí integrace Greenovy funkce

$$v(\mathbf{x}) = -M \int_{\Omega} \frac{w(\mathbf{y})d^3\mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|},$$

kde Ω je zdroj a M je jeho hmotnost, značku $\|\cdot\|$ zde používáme pro eukleidovskou normu, tedy $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}$. Kde navíc, aby M mohla představovat celkovou hmotnost zdroje, musí být splněna normalizační podmínka pro hustotu

$$\int_{\Omega} w(\mathbf{y})d^3\mathbf{y} = 1.$$

Ještě zmiňme několik poznámek před samotnou separací v různých souřadných systémech:

- Značky x, y, z si v celém textu vyhrazujeme pro značení kartézských souřadnic - tedy standardní značení.
- „Weylovo z = kartézské z “.
- pro „Weylovo“ ρ platí následující:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- V různých souřadných systémech nebudeme rozlišovat azimutální souřadnici ϕ - samotné výsledky na ní totiž nebudou záviset díky axiální symetrii.

V následujících dvou odstavcích budeme dokazovat důležitý důsledek axiální symetrie, a sice: „Známe-li řešení na ose symetrie, můžeme ho rozšířit do celého prostoru.“

1.1 Sférické souřadnice

Bud' te sférické souřadnice zadány následujícími vztahy s kartézskými:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}\tag{1.1}$$

pro $r \in [0, \infty)$; $\theta \in [0, \pi)$; $\phi \in [0, 2\pi)$.

Zabývejme se nyní důkazem následujícího tvrzení:

Věta 1.1.1. *Mějme nějaký axiálně symetrický a statický prostoročas. Necht' je známé řešení Laplaceovy rovnice (3) na ose symetrie ve sférických souřadnicích. Potom toto řešení lze v daných souřadnicích jednoznačně rozšířit na celý prostoročas.*

Důkaz. Provedeme konstrukci. Laplaceův operátor nabývá ve sférických souřadnicích podoby

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2},\tag{1.2}$$

budeme-li předpokládat řešení ve tvaru

$$v(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} G(\theta) F(\phi),$$

po dosazení do rovnice (1.2) dostaneme tři nezávislé obyčejné diferenciální rovnice:

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\phi^2} = -m^2\tag{1.3}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dG}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] G = 0\tag{1.4}$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0,\tag{1.5}$$

kde $l \in \mathbb{N}_0 \wedge m \in \{-l, \dots, 0, \dots, l\}$. To je z důvodu, aby se řešení rovnice (1.3) chovalo „slušně“ - tedy, aby nedivergovalo. Předchozí postup lze dohledat například v [4] nebo [5]. Obecné řešení Laplaceovy rovnice ve sférických souřadnicích potom splňuje:

$$v(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (B_{l,m} r^l + C_{l,m} r^{-(l+1)}) Y_{l,m}(\theta, \phi),\tag{1.6}$$

kde $Y_{l,m}$ jsou kulové funkce ([5], [6]). Z požadavku axiální symetrie dostaneme $m = 0$. Řešení totiž kvůli axiální symetrii nesmí záviset na souřadnici ϕ . Potom kulové funkce přejdou v Legendreovy polynomy P_l ([5], [6]). Ty mají tu vlastnost, že pro sudé indexy se jedná o sudé funkce a pro liché indexy se jedná o liché funkce. To lze nahlédnout například z Rodriguezovy formule, kterou můžeme

dohledat třeba v [4]. Z požadavku existence ekvatoriální roviny (a z ní plynoucí reflexní symetrie) může výsledné řešení nakonec obsahovat pouze sudé indexy. Celkem tedy máme řešení:

$$v(r, \theta) = -M \sum_{n=0}^{\infty} (B_{2n} r^{2n} + C_{2n} r^{-(2n+1)}) P_{2n}(\cos \theta) \quad (1.7)$$

Speciálně, řešení na ose symetrie, tj.: $r := z, \theta = 0$, máme

$$v(z, 0) = -M \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} z^{2n} + C_{2n} z^{-(2n+1)}, \quad (1.8)$$

jelikož $P_{2n}(\cos 0) = P_{2n}(1) = 1$ ze zavedení Legendreových polynomů.

A tedy, budeme-li znát řešení na ose symetrie (1.8), lze jej na celý prostor rozšířit jednoznačným způsobem, a sice podle následujícího schématu:

1. provedeme nahrazení $z \rightarrow r$,
2. vynásobíme sumand sudými Legendreovými polynomy $P_{2n}(\cos \theta)$,

tím získáme řešení platné v celém prostoru. □

Podobné úvahy jako v tomto oddíle provedeme pro další sadu souřadnic - pro toroidální souřadnice.

1.2 Toroidální souřadnice

Vztahy mezi kartézskými a toroidálními souřadnicemi jsou následující:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \sinh \mu \cos \phi}{\cosh \mu - \cos \eta}, \\ y &= \frac{a \sinh \mu \sin \phi}{\cosh \mu - \cos \eta}, \\ z &= \frac{a \sin \eta}{\cos \mu - \cos \eta}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

kde $\mu \in [0, \infty)$; $\eta \in [0, 2\pi)$; $\phi \in [0, 2\pi)$.

Věta 1.2.1. *Mějme nějaký axiálně symetrický a statický prostoročas. Necht' je známé řešení Laplaceovy rovnice (3) na ose symetrie v toroidálních souřadnicích. Potom toto řešení lze v daných souřadnicích jednoznačně rozšířit na celý prostoročas*

Důkaz. Jedná se opět o konstrukční záležitost. Myšlenka je stejná jako v případě sférických souřadnic, liší se jenom technické detaily, které jsou vázány na daný souřadný systém. Laplaceův operátor v toroidálních souřadnicích nabyde tvaru:

$$\Delta v = \frac{1}{g_{\mu\mu}^{3/2}} \left[\frac{1}{\sinh \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{g_{\mu\mu}} \sinh \mu \frac{\partial v}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{g_{\eta\eta}} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\sqrt{g_{\mu\mu}}}{\sinh^2 \mu} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \right], \quad (1.10)$$

kde pro metrické koeficienty platí:

$$g_{\mu\mu} = g_{\eta\eta} = \left(\frac{a}{\cosh \mu - \cos \eta} \right)^2; \quad g_{\phi\phi} = \left(\frac{a \sinh \mu}{\cosh \mu - \cos \eta} \right)^2.$$

Položíme-li $v(\eta, \phi, \mu) = \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} S(\eta, \phi, \mu)$, dostaneme z rovnice (1.10)

$$\frac{1}{\sinh \mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sinh \mu \frac{\partial S}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\sinh^2 \mu} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} + \frac{1}{4} S = 0, \quad (1.11)$$

rovnici (1.11) separujeme položením $S(\eta, \phi, \mu) = N(\eta, \phi)M(\mu)$. Jelikož ϕ a η jsou periodické souřadnice, projeví se ve výsledném součinu v sumandu řady faktory $\cos(ka)$, $\sin(ka)$, kde $k \in \mathbb{N}_0 \wedge a \in \{\eta, \phi\}$. Pro zbylou funkci $M = M(\mu)$ dostaneme rovnici:

$$\frac{1}{\sinh \mu} \frac{d}{d\mu} \left(\sinh \mu \frac{dM}{d\mu} \right) + \left[\left(\frac{1}{4} - n^2 \right) - \frac{m^2}{\sinh^2 \mu} \right] M = 0, \quad (1.12)$$

kde řešeními jsou Legendreovy funkce $P_{n-1/2}^m(\cosh \mu)$, $Q_{n-1/2}^m(\cosh \mu)$ ([6]). Obecné řešení Laplaceovy rovnice v toroidálních souřadnicích potom dostaneme:

$$v(\eta, \phi, \mu) = \sqrt{\cosh \mu - \cos \eta} \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)] \cdot [c_n \cos(n\eta) + d_n \sin(n\eta)] \cdot [A_{mn} P_{n-1/2}^m(\cosh \mu) + B_{mn} Q_{n-1/2}^m(\cosh \mu)], \quad (1.13)$$

které se ale na základě axiální symetrie a invarianci vůči zrcadlení zjednoduší následujícími způsoby:

1. $m = 0 \Leftrightarrow$ axiální symetrie - tím vypadnou siny pro ϕ ,
2. $d_n = 0 \Leftrightarrow$ invariance vůči zrcadlení osy z ,
3. $B_{mn} = 0 \Leftrightarrow$ funkce $Q_{n-1/2}^m$ mají pro $\mu \rightarrow 0$ logaritmickou singularitu, vizte například [4].

Obecné řešení vně anuloidu potom lze psát ve tvaru:

$$v(\mu, \eta) = -\frac{M}{a} \sqrt{2(\cosh \mu - \cos \eta)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\eta) P_{n-1/2}(\cosh \mu). \quad (1.14)$$

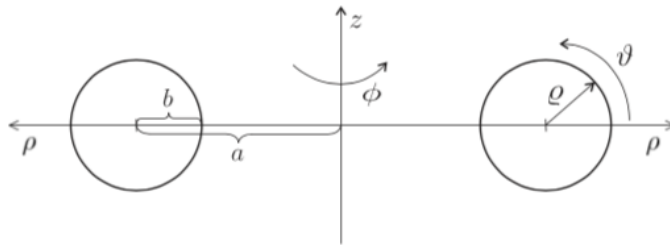
Speciálně na ose symetrie, což v tomto případě znamená: $\mu = 0$, dostáváme:

$$v(0, \eta) = -\frac{M}{a} \sqrt{2(1 - \cos \eta)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\eta). \quad (1.15)$$

Vidíme tedy, že pokud nějakým způsobem získáme toto řešení, lze ho na celý prostor prodloužit obdobně jako v případě sférických souřadnice. \square

Budeme-li pokračovat v úvahách, na které nás přivede rovnice (1.15), zjistíme, že můžeme poměrně snadno získat koeficienty A_n . Je totiž známým výsledkem funkcionální analýzy, že množina $\{\cos(nx); n \in \mathbb{N}_0\}$ je ortogonální množinou na intervalu $[0, 2\pi]$ vůči následovně zadanému skalárnímu součinu

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f \cdot g.$$



Obrázek 1.1: Schéma k popisu toroidu. Převzato ze článku [3].

Platí

$$\frac{1}{\varepsilon_n} := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 1 & n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Potom, jestliže obě strany rovnice (1.15) vynásobíme výrazem $\cos(m\eta)$, dostaneme

$$-\frac{av(0, \eta) \cos(m\eta)}{M \sqrt{2(1 - \cos \eta)}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(m\eta) \cos(n\eta). \quad (1.16)$$

Nyní provedeme výše zmíněný skalární součin na obou stranách rovnice (1.16), zaměníme navíc pořadí sumace a integrace, dostáváme

$$-\frac{a}{M} \int_0^{2\pi} \frac{v(0, \eta) \cos(m\eta)}{\sqrt{2(1 - \cos \eta)}} d\eta = A_m \frac{1}{\varepsilon_m}, \quad (1.17)$$

odtud dostáváme pro koeficienty A_m konečný vztah

$$A_m = -\frac{a\varepsilon_m}{M} \int_0^{2\pi} \frac{v(0, \eta) \cos(m\eta)}{\sqrt{2(1 - \cos \eta)}} d\eta. \quad (1.18)$$

1.3 Popis toroidu

Toroid je popsán dvěma parametry - vnějším poloměrem a a vnitřním poloměrem b , kde jistě $a > b$. Vnitřek anuloidu popíšeme souřadnicemi $(\varrho, \vartheta, \phi)$, kde $\varrho \in [0, b]$; $\vartheta \in [0, 2\pi]$; $\phi \in [0, 2\pi]$. Vztahy mezi těmito a kartézskými souřadnicemi jsou následující:

$$\begin{aligned} x &= (a + \varrho \cos \vartheta) \cos \phi, \\ y &= (a + \varrho \cos \vartheta) \sin \phi, \\ z &= \varrho \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (1.19)$$

odkud máme pro metrické koeficienty:

$$g_{\varrho\varrho} = \varrho^2; \quad g_{\vartheta\vartheta} = 1; \quad g_{\phi\phi} = (a + \varrho \cos \vartheta)^2,$$

odtud pro objem a povrch anuloidu dostaneme

$$dV = \sqrt{g} \, d\varrho d\vartheta d\phi = \varrho(a + \varrho \cos \vartheta) d\varrho d\vartheta d\phi \Rightarrow V = 2\pi^2 ab^2, \quad (1.20)$$

$$dS = \sqrt{g} \Big|_{\varrho=b} d\varrho d\vartheta d\phi = b(a + \varrho \cos \vartheta) d\varrho d\vartheta d\phi \Rightarrow S = 4\pi^2 ab. \quad (1.21)$$

1.4 Výpočet pole na ose symetrie

V tomto oddíle se budeme zabývat výpočtem gravitačního pole na ose symetrie. Víme totiž - díky větám o jednoznačném rozšíření - že tato řešení potom můžeme snadno rozšířit na celý prostoročas. K výpočtu použijeme metodu integrace Greenovy funkce, která má v kartézských souřadnicích tvar

$$v(\mathbf{x}) = -M \int_{\Omega} \frac{w(\mathbf{y}) d^3\mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}.$$

Zdrojem Ω je zde právě toroid. Využijeme tedy dále vztahů mezi kartézskými souřadnicemi a souřadnicemi popisujícími toroid (1.19). Dále, zvolíme-li bod ležící na ose z , má souřadnice $(0, 0, z)$. V tomto bodě nyní budeme počítat transformovaný integrál z Greenovy funkce, konkrétně

$$v(z) = -2\pi M \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^b \frac{w(\varrho)\varrho(a + \varrho \cos \vartheta)}{\sqrt{(a + \varrho \cos \vartheta)^2 + (z - \varrho \sin \vartheta)^2}} d\varrho d\vartheta, \quad (1.22)$$

kde faktor 2π jsme dostali po integraci přes azimutální úhel ϕ , na kterém integrand nezávisí. Pro jednoduchost dále předpokládáme závislost hustoty w pouze na souřadnici ϱ . Hustota se tedy mění uvnitř anuloidu, ale nemění se v závislosti na úhlu ϑ . V integraci budeme postupovat „postupně“. Definujme nejdříve parciální potenciál $v^{(\varrho)}$ vztahem

$$v^{(\varrho)}(z) = -2\pi M \varrho \int_0^{2\pi} \frac{(a + \varrho \cos \vartheta)}{\sqrt{(a + \varrho \cos \vartheta)^2 + (z - \varrho \sin \vartheta)^2}} d\vartheta. \quad (1.23)$$

Konečný výsledek pro anuloid potom dostaneme pro zadání konkrétní hustoty $w = w(\varrho)$ integrací přes souřadnici ϱ :

$$v(z) = \int_0^b w(\varrho) v^{(\varrho)}(z) d\varrho. \quad (1.24)$$

Přímá integrace (1.22) není možná, proto integrand rozvineme do mocninné řady v termínech $\frac{\varrho}{a}$ a integrujeme člen po členu

$$v^{(\varrho)}(z) = -2\pi M \left[-2\pi a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P_{2n}(0))^2}{2n-1} \frac{\varrho^{2n+1}}{(a^2 + z^2)^{n+1/2}} \right], \quad (1.25)$$

z čehož po úpravě dostaneme

$$v^{(\varrho)}(z) = 4\pi^2 a M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P_{2n}(0))^2}{2n-1} \frac{\varrho^{2n+1}}{(a^2 + z^2)^{n+1/2}}, \quad (1.26)$$

jak už je zmíněno ve článku [3]. Navíc, z Rodriguezovy formule, pro Legendreovy polynomy platí

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n},$$

celkem tedy můžeme (1.26) přepsat do tvaru

$$v^{(\varrho)}(z) = \pi^2 a M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n-1} (2n-1)} \left(\frac{\varrho}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^{2n+1}, \quad (1.27)$$

což lze zapsat pomocí eliptického integrálu druhého druhu jako

$$v^{(\varrho)}(z) = -8\pi a M \frac{\varrho}{\sqrt{a^2 + z^2}} E \left(\frac{\varrho^2}{a^2 + z^2} \right). \quad (1.28)$$

Opět ve shodě se článkem [3]. Nyní tedy máme spočtený potenciál na ose symetrie - podle vět jej lze jednoznačně rozšířit do celého prostoročasu.

1.5 Rozvoj potenciálu ve sférických a toroidálních souřadnicích

1.5.1 Sférické souřadnice

Jestliže funkci (1.28) rozvedeme do řady ve smyslu důkazu věty o jednoznačném prodloužení pro sférické souřadnice, dostaneme

$$v^{(\varrho)}(r, \theta) = \begin{cases} -M \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\varrho)} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) & r < a \\ -M \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\varrho)} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+1} P_{2n}(\cos \theta) & r > a \end{cases}, \quad (1.29)$$

kde rozdělení na dva případy je způsobeno konvergencí sumandu. Totiž v každém z případů jsme museli na dané vyšetřované oblasti jednu ze sad koeficientů $A_n^{(\rho)}$ nebo $B_n^{(\rho)}$ položit rovnu nule, aby sumand vůbec konvergoval. Přímým výpočtem (například v SW Maple) potom zjistíme, že pro koeficienty rozvoju platí

$$B_n^{(\varrho)} = C_n^{(\varrho)} = (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} 4\pi^2 \varrho {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + n; 1; \frac{\varrho^2}{a^2} \right) = P_{2n}(0) 4\pi^2 \varrho {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + n; 1; \frac{\varrho^2}{a^2} \right), \quad (1.30)$$

konkrétní výsledky pro koeficienty B_{2n}, C_{2n} získáme ze vztahu (1.24) pro konkrétně zadanou hustotu. Symbol ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$ představuje zobecněnou hypergeometrickou funkci ([5]).

Označíme-li $B_{2n} = C_{2n} =: D_{2n}$ a spočteme limitu pro tenký toroid, tj. $b \rightarrow 0$, dostaneme

$$D_0^{(\varrho)} = 4\pi^2 \varrho {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{\varrho^2}{a^2} \right) \simeq 4\pi^2 \varrho - \frac{\pi^2 \varrho^3}{a^2}. \quad (1.31)$$

Zvolíme-li například hustotu $w = \frac{1}{V}$, dostaneme pro koeficient D_0 podle vztahu (1.24)

$$D_0 = \lim_{b \rightarrow 0} \int_0^b \frac{1}{V} D_0^{(\varrho)} d\varrho = \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi^2 a b^2} \int_0^b 4\pi^2 \varrho d\varrho \right) = \frac{1}{a}, \quad (1.32)$$

kde jsme ve druhé rovnosti využili vztahu pro objem anuloidu.

Vzhledem k tomu, že už v nultém členu nepřispěje druhý člen do limity z integrálu v (1.32) - po

integraci totiž v čitateli výrazu zbude výraz úměrný b^j , kde $j \in \mathbb{N}$, který ale pro $b \rightarrow 0$ vymizí, ostatní členy D_{2n} , pro $n > 0$ nepřispějí žádným nenulovým členem. Platí proto

$$D_n = D_0. \quad (1.33)$$

S přihlédnutím k předchozí rovnosti dostaneme po dosazení (1.32) do (1.30) výsledek

$$v_{BW}(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{M}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) & r < a \\ -\frac{M}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos \theta) & r > a \end{cases},$$

což je podle článku [3] řešení pro nekonečně tenký Bachův-Weylův prstenc.

1.5.2 Toroidální souřadnice

Na ose z , kde $\mu = 0$, platí:

$$z = \frac{a \sin \eta}{1 - \cos \eta} = a \cot \frac{\eta}{2}, \quad (1.34)$$

a tedy

$$\frac{a^2}{a^2 + z^2} = \sin^2 \frac{\eta}{2}, \quad (1.35)$$

potom (1.28) nabude v toroidálních souřadnicích tvaru:

$$v^{(\varrho)}(\eta) = -8\pi M \varrho \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) E\left(\frac{\varrho^2}{a^2} \sin^2 \frac{\eta}{2}\right). \quad (1.36)$$

Vztah (1.18) můžeme přepsat do tvaru

$$A_n^{(\varrho)} = 4\varrho \frac{1}{\varepsilon_n} \int_0^{2\pi} \cos(n\eta) E\left(\frac{\varrho^2}{a^2} \sin^2 \frac{\eta}{2}\right) d\eta, \quad (1.37)$$

jelikož platí

$$\sqrt{2(1 - \cos \eta)} = 2 \sin \frac{\eta}{2}.$$

Dle článku ... lze vztah (1.37) přepsat do tvaru

$$A_n^{(\varrho)} = (-1)^n \frac{4\pi^2 \varrho \varepsilon_n a}{M} {}_3F_2^{\text{reg}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1-n, 1+n, \frac{\varrho^2}{a^2}\right), \quad (1.38)$$

kde symbol ${}_3F_2^{\text{reg}}$ představuje regularizovanou hypergeometrickou funkci. Její vztah k obyčejné hypergeometrické funkci je dán (vizte opět třeba [5])

$${}_3F_2^{\text{reg}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1-n, 1+n, \frac{\varrho^2}{a^2}\right) = \frac{{}_3F_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1-n, 1+n, \frac{\varrho^2}{a^2}\right)}{\Gamma(1-n)\Gamma(1+n)}.$$

Konečný tvar koeficientů A_n dostaneme integrací přes konkrétně zadanou hustotu

$$A_n = \int_0^b w(\varrho) A_n^{(\varrho)} d\varrho. \quad (1.39)$$

1.6 Řešení ve Weylových souřadnicích

1.6.1 Shrnutí speciálních funkcí a značení použitých v tomto oddíle

Shrnutí vlastností následujících speciálních funkcí vychází z kombinace zdrojů [4], [5] a [6].

1. Funkce $T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(n \arccos x)$ se nazývají Čebyševovy polynomy a platí pro ně rekurentní vztah

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad (1.40)$$

kde evidentně: $T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$.

2. Funkce $S_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(n \arccos x)$ jsou s Čebyševovými polynomy svázány následujícím vztahem:

$$S_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \frac{dT_n(x)}{dx}, \quad (1.41)$$

odkud vidíme, že pro ně platí stejný rekurentní vztah jako právě pro Čebyševovy polynomy, tedy:

$$S_n(x) = 2xS_{n-1}(x) - S_{n-2}(x), \quad (1.42)$$

kde $S_0(x) = 0$; $S_1(x) = \sqrt{1-x^2}$.

3. Funkce $P_{n-\frac{k}{2}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývají přidružené Legendreovy funkce a jsou daný přidruženou Legendreovou rovnicí (zde bude odkaz). Platí:

$$P_{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2n-1} \left[4(n-1)xP_{n-\frac{3}{2}}(x) - (2n-3)P_{n-\frac{5}{2}}(x) \right], \quad (1.43)$$

pro derivaci platí

$$\frac{dP_{n-\frac{1}{2}}(x)}{dx} = \frac{n-\frac{1}{2}}{x^2-1} \left[xP_{n-\frac{1}{2}}(x) - P_{n-\frac{3}{2}}(x) \right]. \quad (1.44)$$

Dále zavedeme následující značení:

$$\begin{aligned} \delta_{\pm} &= \sqrt{z^2 + (a \pm \rho)^2} \\ \Delta &= \delta_+ \delta_- = \sqrt{(a^2 + \rho^2 + z^2)^2 - 4a^2 \rho^2} \\ \Delta_{\pm} &= \frac{\rho^2 + z^2 \pm a^2}{\Delta} \end{aligned} \quad (1.45)$$

1.6.2 Převod problému z toroidálních souřadnic do Weylových

Vztah mezi Weylovými a toroidálními souřadnicemi je dán vztahy

$$\mu = \operatorname{argcosh} \left(\frac{\rho^2 + z^2 + a^2}{\sqrt{(a^2 + \rho^2 + z^2)^2 - 4a^2\rho^2}} \right) = \operatorname{argcosh}(\Delta_+) \quad (1.46)$$

$$\eta = \arccos \left(\frac{\rho^2 + z^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + \rho^2 + z^2)^2 - 4a^2\rho^2}} \right) = \arccos(\Delta_-), \quad (1.47)$$

s přihlédnutím ke značení z minulého odstavce, potom z řešení v toroidálních souřadnicích vyplývá, že ve Weylových souřadnicích nabude řešení tvaru

$$v(\rho, z) = \frac{-2aM}{\sqrt{\Delta}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(\Delta_-) P_{n-\frac{1}{2}}(\Delta_+). \quad (1.48)$$

K určení druhé metrické funkce λ budeme potřebovat znát také parciální derivace potenciálu. Pro ty platí:

$$v_{,\rho}(\rho, z) = \frac{aM}{\rho\sqrt{\Delta^5}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\Delta(1-2n)(\rho^2 - (a^2 + z^2))T_n(\Delta_-)P_{n-\frac{3}{2}}(\Delta_+) \right] + \left[(\Delta^2 + 2n(\rho^4 - (a^2 + z^2)^2))T_n(\Delta_-) - 8naz\rho^2 S_n(\Delta_-) \right] P_{n-\frac{1}{2}}(\Delta_+) \quad (1.49)$$

$$v_{,z}(\rho, z) = \frac{2aMz}{\sqrt{\Delta^5}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\Delta(1-2n)T_n(\Delta_-)P_{n-\frac{3}{2}}(\Delta_+) \right] + 2n \left[(\rho^2 + a^2 + z^2)T_n(\Delta_-) + \frac{a}{z}(\rho^2 - (a^2 + z^2))S_n(\Delta_-) \right] P_{n-\frac{1}{2}}(\Delta_+) \quad (1.50)$$

1.6.3 Limita pro tenký toroid

Díky (1.38) platí

$$A_0^{(\varrho)} = 4\pi^2 \varrho {}_3F_2^{\operatorname{reg}} \left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; 1; \frac{\varrho^2}{a^2} \right) \approx 2\pi^2 \varrho - \frac{\pi^2 \varrho^3}{4a^2}, \quad (1.51)$$

integrací a limitou $b \rightarrow 0$, podobně jako ve sférických souřadnicích, dostaneme pro volbu hustoty $w = \frac{1}{V}$

$$A_0 = \frac{1}{2a}. \quad (1.52)$$

Dosazením do potenciálu potom získáme

$$v_{\text{BW}}(\rho, z) = -\frac{M}{\sqrt{\Delta}} P_{-\frac{1}{2}}(\Delta_+) = -\frac{2M}{\pi\sqrt{\Delta}} K \left(\frac{1-\Delta_+}{2} \right) = -\frac{2M}{\pi\delta_-} K \left(\frac{\delta_-^2 - \delta_+^2}{\delta_-^2} \right), \quad (1.53)$$

což je znovu podle článku [3] jiný způsob vyjádření pro Bachův-Weylův prstenec. Tento způsob vyjádření pro BW prstence bude také nastíněn v následující kapitole.

Kapitola 2

Geometrické charakteristiky Bachova-Weylova prstence

2.1 Řešení pro tenký homogenní prsteneček

V následujícím oddíle budeme diskutovat Bachovo-Weylovo řešení pro tenký homogenní prsteneček. Budeme zde vycházet z článku [2]. Provedeme jen drobné úpravy ve značení a v práci s geometrizovanými jednotkami. Opět vyjdeme z metriky (2). Po dosazení dostáváme rovnici pro metrickou funkci ν , a sice

$$\Delta\nu = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho\nu_{,z})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho\nu_{,\rho})}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (2.1)$$

Pro metrickou funkci λ dostávám z Einsteinových rovnic

$$\lambda_{,z} = 2\rho\nu_{,z}\nu_{,\rho}, \quad (2.2)$$

$$\lambda_{,\rho} = \rho(\nu_{,\rho}^2 - \nu_{,z}^2). \quad (2.3)$$

Tři výše uvedené vztahy právě odpovídají rovnicím (3) a (4), které byly představeny v úvodu práce. Dále víme, že newtonovský potenciál pro nekonečně tenký prsteneček hmotnosti M je

$$\nu = -\frac{GM}{c^2 R}, \quad (2.4)$$

kde G je gravitační konstanta a c je rychlost světla. Kvůli práci v geometrizovaných jednotkách pokládáme

$$G = c = 1.$$

Celkem proto pro newtonovský potenciál dostáváme

$$\nu = -\frac{M}{R}, \quad (2.5)$$

kde

$$R = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{\delta_-^2 \cos^2 \omega + \delta_+^2 \sin^2 \omega}}. \quad (2.6)$$

Zde využíváme značení (1.45) zavedené v první kapitole. Díky známému vztahu

$$\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1,$$

a díky symetriím integrandu můžeme vyjádření pro R upravit do tvaru eliptického integrálu K - který je k dohledání v [5] nebo [6], krátce si jej také představíme v následujícím oddíle - tedy

$$R = \frac{4}{\delta_-} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta_-^2 - \delta_+^2}{\delta_-^2}\right) \sin^2 \omega}}. \quad (2.7)$$

Označíme-li navíc $k := \frac{\delta_-^2 - \delta_+^2}{\delta_-^2}$, můžeme psát

$$R = 4K(k). \quad (2.8)$$

Celkem potom z rovnic (2.5), (2.7) a (2.8) dostáváme vyjádření pro metrickou funkci ν ve tvaru.

$$\nu = -\frac{2MK(k)}{\pi\delta_-}. \quad (2.9)$$

Tvar metrické funkce λ zde pouze zmíníme, nebudeme jej odvozovat. Odvození je k dohledání například ve článku [2] nebo [7]. Pro metrickou funkci λ máme vyjádření ve tvaru

$$\lambda = -\frac{M^2}{4\pi^2 a^2 \rho} \cdot \left[(\rho + a)(E - K)^2 + \frac{(\rho - a)(E - k'^2 K)^2}{k'^2} \right]. \quad (2.10)$$

2.2 Geometrie Bachova-Weylova prstence

V této sekci budeme vycházet především z článku [7]. Dopustíme se jen drobných změn ve značení, aby se na některé výsledky lépe odkazovalo a aby značení odpovídalo předchozímu textu.

Je samozřejmé, že zobrazení skutečnosti závisí na použitých souřadnicích. V obecné relativitě je tento fakt o to závažnější, že prostoročas je podle ní zakřivený, takže ani souřadnice, na které jsme zvyklí v eukleidovském prostoru nebo Minkowského prostoročasu, ztrácejí bezprostřední geometrický význam. „Skutečné“, geometrické či fyzikální vlastnosti prostoročasu jsou takové, které na souřadnicích nezávisí. Nejjednoduššími takovými jsou invarianty, a dále veličiny, které by v principu mohl naměřit nějaký fyzikální pozorovatel. Velmi přirozenými charakteristikami tohoto typu jsou vlastní čas a vlastní vzdálenost. Vlastní čas je nejkratším možným fyzikálním časem, který lze naměřit mezi dvěma časupodobně odlehlými událostmi; jedná se o čas naměřený v soustavě, ve které se obě události staly na stejném místě. Naopak vlastní vzdálenost je nejdelší vzdálenosti, kterou je možné naměřit mezi dvěma prostorupodobně odlehlými událostmi; je to jejich vzdálenost naměřená vzhledem k soustavě, ve které se obě události odehrály ve stejném čase. Obě veličiny se počítají jako integrace odmocniny z příčného členu (časové, resp. některého z prostorových) základního invariantu - prostoročasového intervalu (neboli „metriky“). V našem případě je metrika pouze diagonální a má tvar

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{\rho\rho}d\rho^2 + g_{zz}dz^2.$$

2.2.1 Od BW řešení ke Curzonovu řešení

Pro BW prstenec platí:

$$\frac{1}{N} = \exp\left(\frac{2MK(k)}{\pi\delta_-}\right) \quad (2.11)$$

$$\lambda = -\frac{M^2}{4\pi^2 a^2 \rho} \cdot \left[(\rho + a)(E - K)^2 + \frac{(\rho - a)(E - k'^2 K)^2}{k'^2} \right] \quad (2.12)$$

kde M je hmotnost prstence a a je jeho poloměr. Dále

$$E := E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)} d\alpha$$

je úplný eliptický integrál 2. druhu a

$$K := K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} d\alpha$$

je úplný eliptický integrál 1. druhu. Dále platí

$$k'^2 = 1 - k^2$$

a pro náš konkrétní problém (BW prstenec) je

$$k^2 = 1 - \frac{\delta_+^2}{\delta_-^2} = \frac{4a\rho}{\delta_-^2} \Rightarrow k'^2 = \frac{\delta_+^2}{\delta_-^2}.$$

V limitě pro $a \rightarrow 0^+$ dostaneme z BW řešení tzv. Curzonovo řešení (zde bude odkaz), totiž platí-li

$$N = \exp\left(-\frac{2MK(k)}{\pi\delta_-}\right) \wedge k = \frac{4a\rho}{\delta_-^2},$$

potom

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} N &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \exp\left(-\frac{2MK(k)}{\pi\delta_-}\right) = \exp\left(\frac{-2M\frac{\pi}{2}}{\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{N}(a \rightarrow 0^+) = \exp\left(\frac{M}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

kde jsme využili faktu, že

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} K\left(\frac{4a\rho}{\delta_-^2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad (2.14)$$

rovněž platí

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} E\left(\frac{4a\rho}{\delta_-^2}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.15)$$

Odtud dostáváme pro druhou metrickou funkci

$$\lambda(a \rightarrow 0^+) = -\frac{1}{2} \left(\frac{M\rho}{\rho^2 + z^2} \right)^2, \quad (2.16)$$

kde vztahy (2.13) a (2.16) představují zmíněné Curzonovo řešení. To je zajímavé tím, že se jedná v podstatě o jediný bod a člověk by tedy čekal, že bude splňovat sférickou symetrii jako Schwarzschildovo řešení, což tak z rovnic zjevně není.

Zdůvodníme ještě, že vztahy (2.14) a (2.15) skutečně platí díky Lebesgueově větě o záměně limity a integrálu. Naplnění předpokladu o majorantě ukážeme pro (2.15). Zbývajícím případem by se dělal obdobně. Platí

$$\sqrt{1 - k^2 \sin \alpha} \leq 1 \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \wedge g(\alpha) = 1 \Rightarrow g \in \mathcal{L}\left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

tím jsme našli integrovatelnou majorantu a dostáváme platnost vztahu (2.15).

2.2.2 Geometrické vlastnosti BW řešení

V následujícím odstavci se budeme věnovat už zmíněným geometrickým vlastnostem. Mimo vztahů (2.11) a (2.12), které zde budeme potřebovat, připomeňme ještě tvar Weylovy metriky (2), se kterou pracujeme:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + \rho^2 e^{-2\nu} d\phi^2 + e^{2\lambda-2\nu} (d\rho^2 + dz^2),$$

kde $N := e^\nu$ a ν má, jak jsme viděli v 1. kapitole, význam potenciálu díky paralele s newtonovskou teorií gravitace. Budeme zde také hojně využívat toroidální souřadnice, které jsme popsali vztahy (1.9). Jak jsme již na začátku práce poznamenali, kartézské x a Weylovo z se shodují. Mezi kartézskými x, y a Weylovým ρ je vztah $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Odtud potom dostáváme mezi Weylovými a toroidálními souřadnicemi následující vztahy

$$\rho = \frac{a \sinh \mu}{\cosh \mu - \cos \eta}, \quad (2.17)$$

$$z = \frac{a \sin \eta}{\cosh \mu - \cos \eta}, \quad (2.18)$$

kde $\mu \in [0, \infty)$ představuje nový poloměr a $\eta \in [0, 2\pi)$ novou latitudinální souřadnici. Metrika při této transformaci přejde do tvaru

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \frac{a^2 \sinh^2 \mu d\phi^2 + e^{2\lambda} (d\mu^2 + d\eta^2)}{N^2 (\cosh \mu - \cos \eta)^2}. \quad (2.19)$$

2.2.2.1 Malý obvod

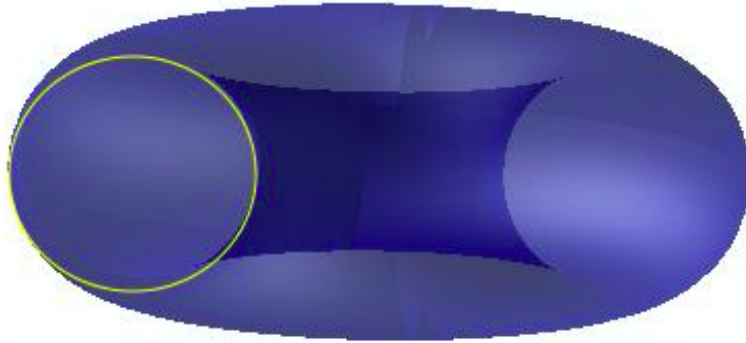
Co myslíme malým obvodem je nejlépe patrné z obrázku 2.1. Jedná se o veličinu, kterou naměří takoví pozorovatelé, kteří čas t z metriky použijí jako svůj vlastní.

Malý obvod bude zjevně záviset pouze na latitudinální souřadnici. Jedná se totiž o statický prostoročas - tedy nebude vystupovat souřadnice t . Díky výchozímu předpokladu axiální symetrie nebude vystupovat ani souřadnice ϕ . Na souřadnici ρ záviset nebude zjevně, jelikož ji fixujeme na jistou hodnotu ρ_0 , kde chceme malý poloměr počítat. Metrika se potom redukuje na

$$ds^2 = g_{\eta\eta} d\eta^2,$$

odtud integrací a dosazením konkrétního tvaru koeficientu dostáváme pro metriku - jakožto invariant (označme $s := l_s$)

$$l_s = 2 \int_0^\pi \sqrt{g_{\eta\eta}} d\eta = 2a \int_0^\pi \frac{e^\lambda}{N(\cosh \mu - \cos \eta)} d\eta. \quad (2.20)$$



Obrázek 2.1: Žlutě je na obrázku v kartézských souřadnicích znázorněno to, co míníme malým obvodem.

Malý obvod, označme jej L_s , dostaneme jako

$$L_s = \lim_{\mu \rightarrow \infty} l_s.$$

Zjevně integrand (2.20) je kladný. Integrand se potom pro $\mu \rightarrow \infty$ chová jako $2e^{\lambda-\nu-\mu}$. Pro náš případ BW prstence dostaneme s ohledem na vztahy (2.11) a (2.12), že integrand se chová (při $\mu \rightarrow \infty$) jako

$$2e^{\lambda-\nu-\mu} \sim 2 \exp\left(-\frac{2M^2 \cos \eta}{\pi^2 a^2} \mu^2 e^\mu\right),$$

a tedy máme:

1. pro $\cos \eta > 0$ integrand rychle vymizí, obdobě pro $\cos \eta = 0$ integrál konverguje. Skutečně,

$$l_s \sim a \int_0^\pi 2 \exp(1) = 2a \int_0^\pi 1 = 2\pi a,$$

2. pro $\cos \eta < 0$ integrand naopak diverguje.

Zde poznamenejme, že skutečně nejdříve nastavujeme hodnotu cosinu, a poté teprve provádíme limitu.

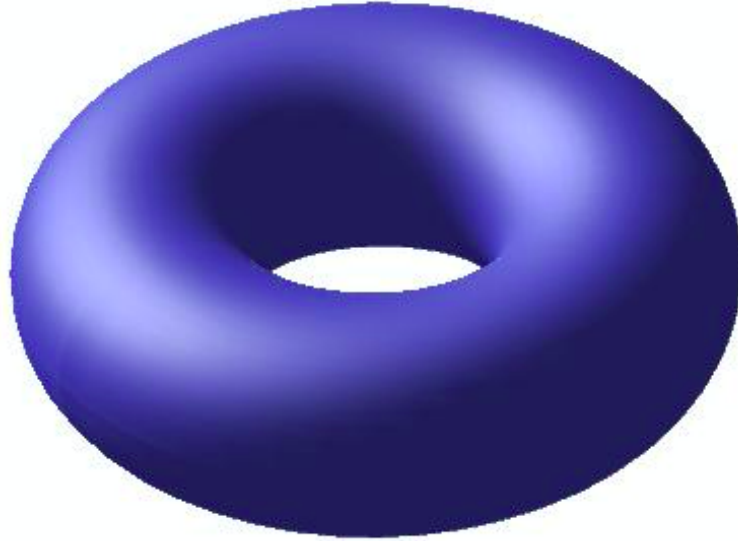
Případ 1 podle vztahu (2.17) znamená, že se k prstenci přibližujeme „zvnějšku“. Tedy platí $\rho > a$. Naopak případ 2 je - opět podle (2.17) - přiblížení zvnitřku. Tedy platí $\rho < a$.

Z výše uvedených úvah tedy vidíme, že „vnější poloobvod“ vymizí, naproti tomu „vnitřní“ bude divergovat. Celkem tedy jejich součet bude divergovat a dostaneme, že malý obvod je nekonečný.

2.2.2.2 Velký obvod

Co míníme velkým obvodem, je opět nejlépe patrné z obrázku 2.2. Bude nás nyní zajímat případ, kdy jsou souřadnice t, z, ρ konstantní. Jelikož prostoročas, který uvažujeme, je dle předpokladu axiálně symetrický, platí

$$g_{ii,\phi} = 0, \quad i \in \{t, \rho, \phi, z\} \Rightarrow g_{\phi\phi,\phi} = 0.$$



Obrázek 2.2: Pro ilustraci velkého obvodu - opět v kartézských souřadnicích.

Jinými slovy metrická funkce nezávisí na souřadnici ϕ . Metrika se nám v tomto případě redukuje pouze na tvar

$$ds^2 = g_{\phi\phi}d\phi^2,$$

odsud integrací, dále z faktu, že metrická funkce $g_{\phi\phi}$ nezávisí na ϕ a protože $\phi \in (0, 2\pi]$ dostaneme (při označení $s := l_l$)

$$l_l = 2\pi \sqrt{g_{\phi\phi}} = \frac{2\pi\rho}{N} = 2\pi\rho e^{-\nu} = 2\pi \frac{ae^{-\nu} \sinh \mu}{\cosh \mu - \cos \eta}, \quad (2.21)$$

kde poslední rovnost je pouze převod do toroidálních souřadnic (2.17), (2.18). Odtud velký poloměr (označme jej L_l) opět dostaneme jako

$$L_l = \lim_{\mu \rightarrow \infty} l_l$$

Provedením limity v toroidálních souřadnicích zjišťujeme

$$L_l = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{a \sinh \mu}{\cosh \mu - \cos \eta} \exp \left(\frac{\sqrt{2}MK(\sqrt{1 - e^{-2\mu}})}{\pi a \frac{\exp(\frac{\mu}{2})}{\sqrt{\cosh \mu - \cos \eta}}} \right) = a \lim_{\mu \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{MK(\sqrt{1 - e^{-2\mu}})}{\pi a} \right) = \infty.$$

Pozorný čtenář si jistě všimne, že jsme ve druhé rovnosti použili matematicky nesprávnou notaci, a sice „částečné limitování“. Toho jsme využili kvůli zpřehlednění a především zkrácení zápisu, namísto dlouhého zápisu, při kterém bychom museli vypisovat všechny dílčí limity a odůvodňovat aritmetikou limit. Rovněž jsme použili záměnu limity a integrálu pro integrál K - tuto bychom zdůvodnili obdobně jako při počítání Curzonova řešení pro BW prsteneček podle Lebesgueovy věty. Celkem tedy vidíme, že i velký obvod je nekonečný.

2.2.2.3 Vlastní poloměr a vlastní vzdálenosti

S přihlédnutím k faktu, že střed prstence leží na ose, kde je souřadnice $z = 0$ a souřadnice ϕ, t fixujeme, redukuje se nám metrika na

$$ds^2 = g_{\rho\rho}(z = 0) d\rho^2,$$

přičemž $\rho \in (0, a]$, odtud integrací dostaneme (při označení $s := r$)

$$r = \int_0^a \sqrt{g_{\rho\rho}(z = 0)} d\rho = \int_0^a \left(\frac{e^\lambda}{N}\right)(z = 0) d\rho = \int_0^\infty \sqrt{g_{\mu\mu}(\eta)} d\mu = a \int_0^\infty \frac{e^\lambda}{N(\cosh \mu - \cos \eta)} d\mu, \quad (2.22)$$

kde jsme v předposlední rovnosti převedli integrál do toroidálních souřadnic (2.17), (2.18). Ze vztahu (2.17) jsou patrné nové meze. Jak již bylo v oddíle 2.2.2.1 pro $\mu \rightarrow \infty$ se integrand (2.20) - a tedy i (2.22), protože se jedná o stejné integrandy - chová jako $2e^{\lambda-\nu-\mu}$, a tak

$$2e^{\lambda-\nu-\mu} \sim 2 \exp\left(-\frac{2M^2 \cos \eta}{\pi^2 a^2} \mu^2 e^\mu\right).$$

Následuje tedy analogická diskuze jako v oddíle 2.2.2.1.

1. Je-li $\cos \eta \geq 0 \Leftrightarrow \rho \geq a$, potom je vzdálenost měřená z jakéhokoli z těchto směrů konečná.
2. Je-li $\cos \eta < 0 \Leftrightarrow \rho < a$, potom jsou tyto vzdálenosti nekonečné,

z těchto úvah vyplývá, že vlastní poloměr prstence je nekonečný.

2.2.2.4 Osa symetrie, ekvatoriální rovina

Základní požadavek, který máme na ose symetrie, je požadavek lokální plochosti horizontálních rovin, kde $z = konst.$ - což znamená, že se geometrie těchto rovin se nám jeví eukleidovsky. Toto je zajištěno, jestliže je druhá metrická funkce $\lambda = 0$.

Vzdálenosti počítané kolem osy symetrie jsou všude konečné. Jelikož na ose symetrie je $\rho = 0$, dále při fixování souřadnic t, ϕ z metriky zbude

$$ds^2 = g_{zz}(\rho = 0) dz^2,$$

odsud dostaneme, při označení těchto vzdáleností $ds =: D$,

$$D = \sqrt{g_{zz}(\rho = 0)} = \left(\frac{1}{N}\right)(\rho = 0). \quad (2.23)$$

Pro BW prstenec dostáváme

$$\left(\frac{1}{N}\right)(\rho = 0) = \exp\left(\frac{M}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right).$$

Důležitou veličinou v popisu BW prstence je eliptický integrál $K(k)$, který diverguje pro $k = 1$. V ekvatoriální rovině máme pro modulus

$$k = \frac{2\sqrt{a\rho}}{\rho + a}.$$

Odtud zjevně modulus nabude hodnoty 1 právě tehdy, když $\rho = a$, tedy na samotném prstenci. Všude jinde je modulus menší.

2.2.2.5 Shrnutí poznatků

V následujícím odstavci ještě jednou zrekapitulujeme, k čemu jsme došli v předešlých úvahách o základních geometrických veličinách pro BW řešení.

1. **Malý obvod** se choval různě podle toho, z jakého směru jsme se k němu přibližovali. Pro $\rho \geq a$ byl tento obvod konečný, naopak pro $\rho < a$ jsme dostali nekonečno. Dohromady je tedy malý obvod nekonečný.
2. Pro **velký obvod** zde nehrálo roli rozlišení směrů. Rovněž vyšel nekonečný.
3. **Vzdálenosti** se pro BW řešení chovaly podobně jako malý obvod. V závislosti na směru vyšly konečné (v případě $\rho \geq a$) nebo nekonečné (v případě $\rho < a$). Důsledkem tohoto pozorování byl nekonečný **poloměr** BW prstence.
4. **Vzdálenosti podél osy** nám vyšly vždy konečné.

2.2.3 Gravitační zrychlení

Zabývejme se další, trochu složitější, geometrickou veličinou, která ale možná bude vhodným prostředkem pro pochopení podivného chování BW prstence při jejím zobrazování - gravitačním zrychlením. Jedná se vlastně o veličinu analogickou k intenzitě pole v newtonovské teorii - je totiž odvozena z prvních derivací metrické funkce N a to vztahem

$$\kappa^2 := g^{\mu\nu} N_{,\mu} N_{,\nu} = \frac{N^2}{e^{2\lambda}} \left((N_{,\rho})^2 + (N_{,z})^2 \right). \quad (2.24)$$

Podíváme-li se, jak tato veličina vypadá na ose symetrie ($\rho = 0$), dostaneme

$$\kappa^2(\rho = 0) = \frac{M^2 z^2}{(z^2 + a^2)^3 \exp\left(\frac{4M}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)}.$$

Vidíme, že pro bod $z = 0$ tato intenzita vymizí.

2.2.4 Kretschmannův invariant

Jelikož pracujeme ve vakuovém prostoročasu, je Ricciho tenzor nulový. Jakékoli další zužování Ricciho tenzoru - tedy skalární křivost - je tedy také triviálně nulové. Uvést Kretschmannův invariant je proto rozumné především z toho důvodu, že se jedná o nejjednodušší geometrickou charakteristiku křivosti prostoročasu. Než se ale dostaneme k samotnému Kretschmannovu skaláru, připomeňme si ještě cestu k „základním stavebním kamenům obecné teorie relativity“.

2.2.4.1 Cesta k levé straně Einsteinových rovnic

„Levá strana je krásná - z mramoru vystavěná. Pravá je škaredá - ze dřeva,“ Albert Einstein o polních rovnicích. Tímto výrokem Einstein mínil to, že budeme-li požadovat, aby levá strana závisela nanejvýš na druhých derivacích metriky, je cesta k jejímu tvaru v podstatě „neúprosná“. Výrok se nevztahuje jen k samotné pravé straně, ale především k rovnosti, která mezi nimi je a která je netriviální.

Připomeňme si nyní cestu k levé straně Einsteinových rovnic - respektive veličiny, které v ní vystupují. Nejdříve začněme s rovnicí pro paralelní přenos. Uvažujme nějaký vektor V , který budeme mít přenášet podél křivky γ v obecném prostoročase. Označme $\{x^\mu\}_{\mu=0}^3$ „globální souřadnice“, dále mějme nějaký lokální inerciální systém (podle principu ekvivalence), ve kterém souřadnice označíme $\{\xi^\alpha\}_{\alpha=0}^3$. Dále označme p parametr křivky γ - tečný vektor γ tedy bude $\frac{dx^\sigma}{dp}$. Podle principu ekvivalence, v lokálním inerciálním systému dostáváme situaci stejnou jako v plochem Minkowského prostoročase, tedy

$$\frac{dV^\mu}{dp} = 0,$$

odtud dostaneme rovnici pro paralelní přenos

$$\frac{dV^\mu}{dp} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} V^\rho \frac{dx^\sigma}{dp} = 0,$$

což přepíšeme

$$\frac{dV^\mu}{dp} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu V^\rho \frac{dx^\sigma}{dp} = 0, \quad (2.25)$$

kde jsme označili

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}.$$

$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ nazýváme složky afinní konexe. Jistě platí

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\alpha = g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\rho\sigma}. \quad (2.26)$$

Tento vztah nazýváme Christoffelovými symboly 2. druhu. Dále pro derivaci metriky platí

$$g_{\mu\nu, \rho} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\nu\rho\mu},$$

tedy derivaci metriky lze vyjádřit pouze pomocí složek afinní konexe. Uděláme-li cyklickou záměnou indexů u metriky a vztahy sečteme, dostaneme vztah pro vyjádření složek afinní konexe pomocí metriky - tzv. Christoffelovy symboly 1. druhu

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu, \rho} + g_{\rho\mu, \nu} - g_{\nu\rho, \mu}). \quad (2.27)$$

Kdybychom si rozepsali transformační vztahy pro rovnici paralelního přenosu (2.13), zjistili bychom, že je v souladu s principem obecné kovariance, přičemž s veličinami V^ρ , $\frac{dx^\sigma}{dp}$ není problém - mají vektorový charakter. Naproti tomu zbylé dvě veličiny $\frac{dV^\mu}{dp}$, $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ nemají tenzorový charakter. Nicméně jejich netenzorovost je „správně nastavena“ a v rovnici se vyruší. Tento netenzorový charakter nás povede k zavedení „nové“ derivace. Předpokládejme nyní, že víme, jak vektor V vypadá i v blízkém okolí křivky γ , podél které ho přenášíme. Potom můžeme psát

$$\frac{dV^\mu}{dp} = V^\mu_{, \sigma} \frac{dx^\sigma}{dp},$$

kde $\frac{dx^\sigma}{dp}$ má jistě tenzorový charakter, jelikož ale celý výraz $\frac{dV^\mu}{dp}$ má netenzorový charakter, plyne odtud, že netenzorovost je schovaná ve výrazu $V^\mu_{, \sigma}$. Rovnici pro paralelní přenos (2.25) můžeme s předchozím poznatkem přepsat do tvaru

$$(V^\mu_{, \sigma} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu V^\rho) \frac{dx^\sigma}{dp} = 0.$$

Výraz $\frac{dx^\sigma}{dp}$ má tenzorový charakter, celá rovnice má také tenzorový charakter, proto i závorka musí mít tenzorový charakter. Kovariantní derivaci vektoru tedy zavedeme:

$$V^\mu_{;\sigma} := V^\mu_{,\sigma} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} V^\rho. \quad (2.28)$$

Obdobně zavedeme kovariantní derivaci kovektoru:

$$W_\alpha ;\beta := W_\alpha ,\beta - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} W_\sigma. \quad (2.29)$$

Vezmeme-li nyní dva kovektory a provedeme-li pro ně „komutátor“ druhých kovariantních derivací, dostaneme

$$V_{\nu ;\kappa\lambda} - V_{\nu ;\lambda\kappa} = (\Gamma^\sigma_{\nu\lambda ,\kappa} - \Gamma^\sigma_{\nu\kappa ,\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\kappa} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\kappa}) V_\sigma,$$

což přepíšeme

$$V_{\nu ;\kappa\lambda} - V_{\nu ;\lambda\kappa} = R^\sigma_{\nu\kappa\lambda} V_\sigma, \quad (2.30)$$

kde jsme označili

$$R^\sigma_{\nu\kappa\lambda} := \Gamma^\sigma_{\nu\lambda ,\kappa} - \Gamma^\sigma_{\nu\kappa ,\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\kappa} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\nu\kappa} \quad (2.31)$$

Tato veličina je zjevně tenzor 4. řádu (kvůli tomu, že byl odvozen z kovariantní derivace). Nazveme ji Riemannovým tenzor. Je vidět, že k tomu, abychom měli Riemannův tenzor, není potřeba mít na varietě metriku. Metrika ale bude potřeba k tomu, abychom měli plně kovariantní tvar tohoto tenzoru - budeme pomocí ní totiž snižovat index. Tedy

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = g_{\mu\sigma} R^\sigma_{\nu\kappa\lambda},$$

odtud po úpravách dostáváme

$$R_{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\mu\lambda ,\nu\kappa} + g_{\nu\kappa ,\mu\lambda} - g_{\mu\kappa ,\nu\lambda} - g_{\nu\lambda ,\mu\kappa}) + g_{\rho\sigma} (\Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\kappa} - \Gamma^\rho_{\mu\kappa} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}). \quad (2.32)$$

Sám Riemannův tenzor v Einsteinových polních rovnicích sice nevystupuje, ale vystupují tam jeho zúžení - Ricciho tenzor

$$R_{\nu\lambda} := g^{\mu\kappa} R_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (2.33)$$

a Ricciho skalární křivost, což je zúžení Ricciho tenzoru:

$$R := g^{\nu\lambda} R_{\nu\lambda}. \quad (2.34)$$

Riemannův tenzor pro nás ale bude v této práci důležitý - a proto jsme zde cestu k němu připomněli - zejména kvůli zavedení Kretschmannova invariantu.

2.2.4.2 Kretschmannův invariant

Definujeme Kretschmannův skalár vztahem

$$K := R_{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\mu\nu\kappa\lambda}, \quad (2.35)$$

kde $R_{\mu\nu\kappa\lambda}$ je výše zavedený Riemannův tenzor. Nyní opět podle článku [7] pro BW prstenec dostaneme na ose, kde $\rho = 0$, hodnotu Kretschmannova skaláru

$$K(\rho = 0) = \frac{12M^2[(2z^2 - a^2) \sqrt{z^2 + a^2} - 2Mz^2]^2}{(z^2 + a^2)^6 \exp \frac{4M}{\sqrt{z^2 + a^2}}}. \quad (2.36)$$

Hodnota Kretschmannova skaláru v bodě $\rho = z = 0$ je

$$K_{\text{in}} = \frac{12M^2}{a^6 \exp \frac{4M}{a}}, \quad (2.37)$$

což pro $a \rightarrow 0^+$ vymizí.

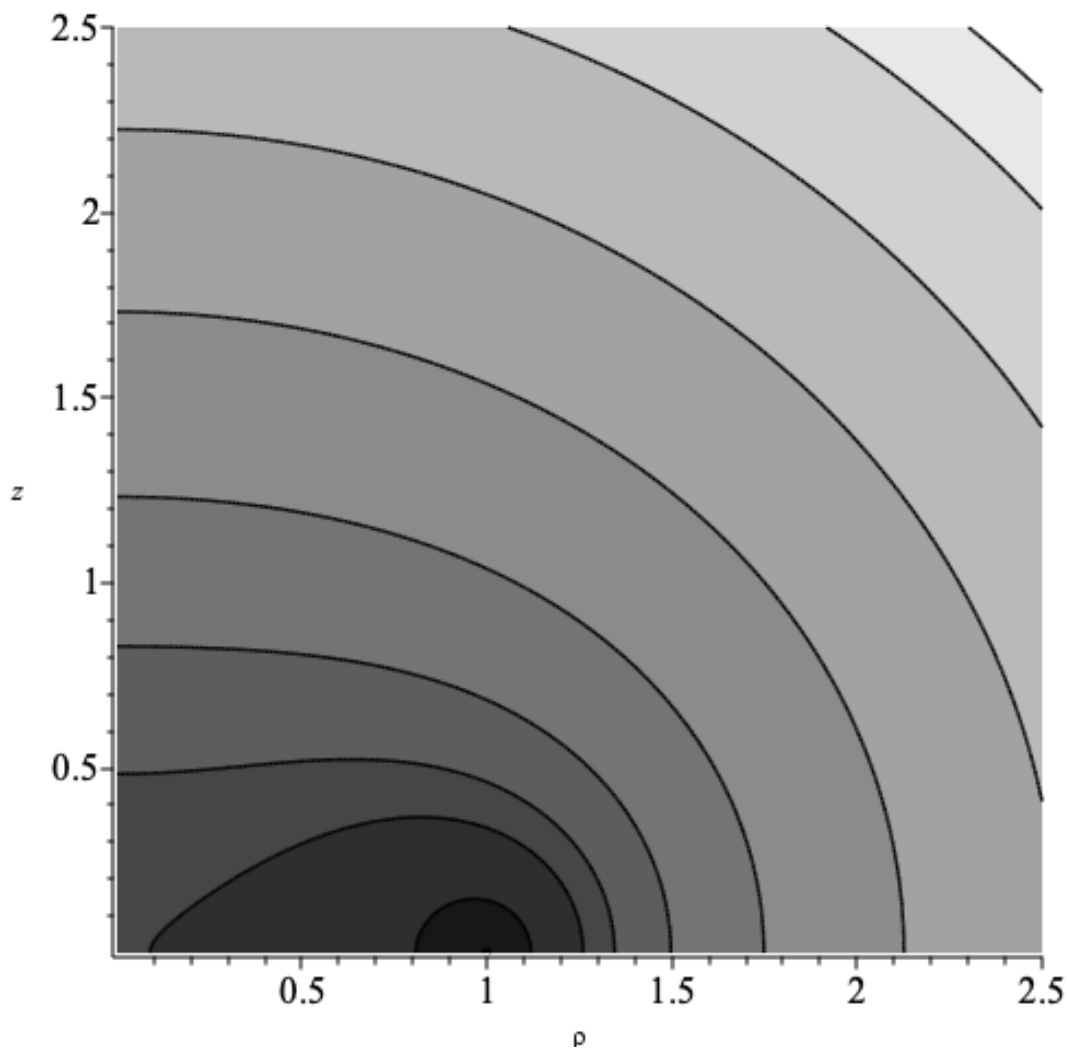
Kapitola 3

Zobrazení kontur vybraných geometrických charakteristik

V článku [7] se autor zabýval zobrazováním několika geometrických charakteristik, které ilustrovaly ono „podivné“ chování BW prstence. Tím zde myslíme například to, že při pohledu „zvnější“ se zdá být v konečné vzdálenosti, ale při pohledu „zevnitř“ v nekonečné. Mezi charakteristiky, které ke zobrazení zvolil v tomto článku patřilo například gravitační zrychlení nebo Kretschmannův invariant. Nebyly zde však zobrazeny samotné metrické funkce ν a λ . Nebyl zde také zobrazen rozdíl $\lambda - \nu - \mu$, který udává právě nekonečný poloměr prstence. Na zobrazení těchto charakteristik se zde zaměříme my.

3.1 Potenciál - metrická funkce ν

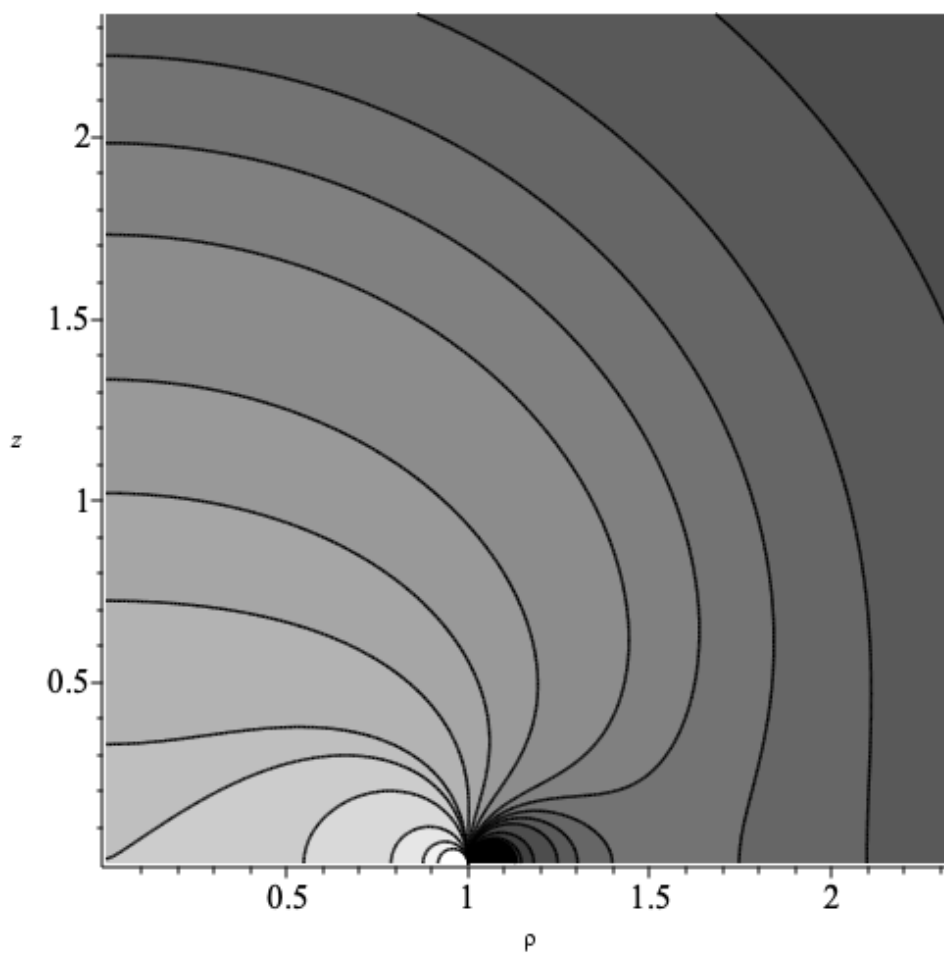
Metrická funkce ν , nebo tedy potenciál, jak bylo zmíněno v sekci 2.1 je možno plně převzít z newtonovské teorie. Funkce je vyjádřena pomocí eliptického integrálu - viz (2.9). Díky analogii s newtonovskou teorií gravitace (nebo také elektrostatikou), zde není důvod předpokládat, že by se tato funkce chovala zvláště. Kontury potenciálu jsou zobrazeny na obrázku 3.1. Zobrazováním potenciálu se sice nezabýval článek [7], nicméně v článku [8] už potenciál zobrazen byl. My se ovšem zaměříme na ještě trochu detailnější zobrazení. Z obrázku je vidět, že ve větší vzdálenosti od zdroje už kontury vypadají jako části soustředných kružnic, kdežto v blízkosti zdroje - tedy v $\rho = 1$ jsou křivky deformovány více.



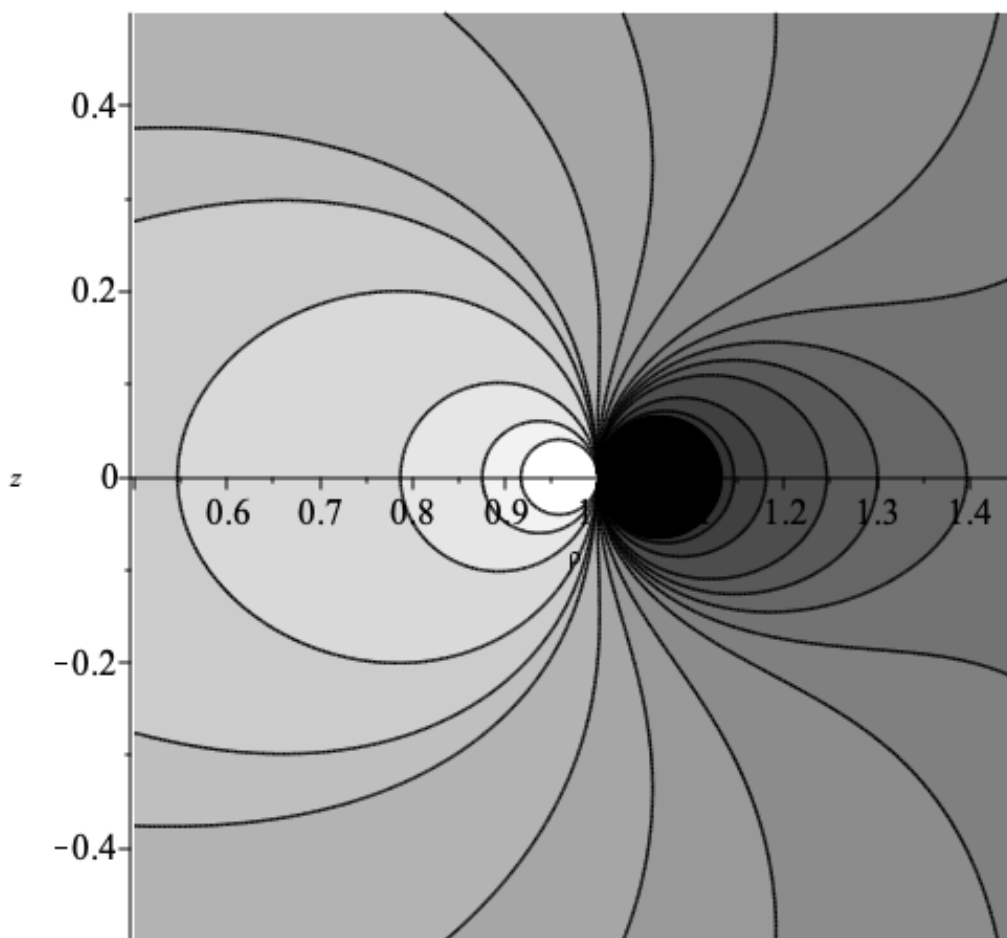
Obrázek 3.1: Kontury metrické funkce ν pro volbu $a = 1, M = 1$.

3.2 Funkce $\lambda - \nu$

Před zobrazením samotného rozdílu $\lambda - \nu - \mu$ uděláme ještě jakýsi mezikrok a podíváme se, jak vypadají kontury funkce $\lambda - \nu$ - na obrázku 3.2. Kontury dál od zdroje se chovají podobně jako v případě potenciálu ν , proto provedeme ještě přiblížení na obrázku 3.3, abychom viděli chování blíže singularity - prstence. Zde je vidět uzávírání křivek v blízkosti prstence. Pozorujeme zde také rozdílnost chování „vně“ prstence, tedy napravo od bodu $\rho = 1$ a „uvnitř“ prstence, tedy nalevo od bodu $\rho = 1$.



Obrázek 3.2: Kontury rozdílu metrických funkcí $\lambda - \nu$ pro volbu $a = 1, M = 1$.

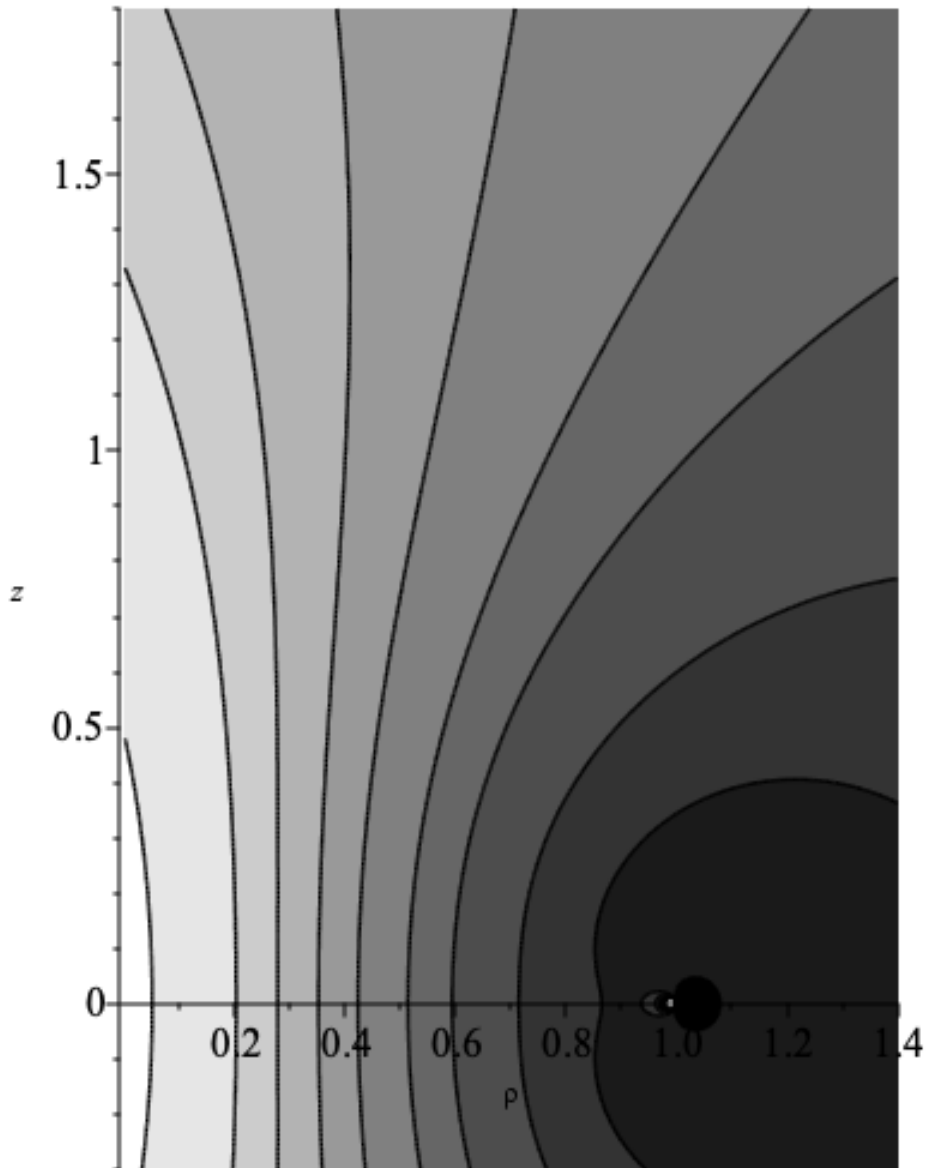


Obrázek 3.3: Kontury metrické funkce v pro volbu $a = 1, M = 1$ - přiblížení.

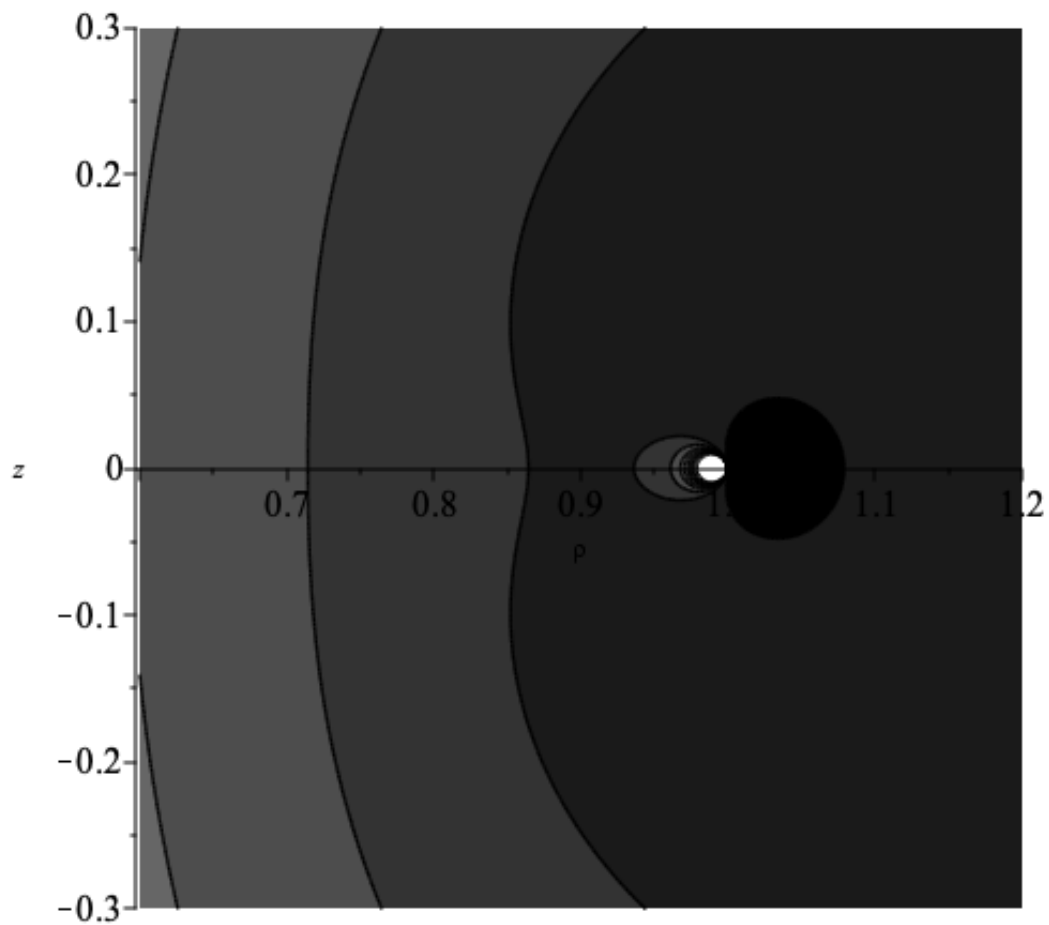
3.3 Funkce $\lambda - \nu - \mu$

Poslední zobrazovanou funkcí, jak jsme již zmínili, bude funkce $\lambda - \nu - \mu$. Důvod pro zobrazení této funkce je ten, že integrand (2.22) se asymptoticky chová jako $\exp(\lambda - \nu - \mu)$. Zobrazíme proto právě argument exponenciály. Kontury samotné exponenciály by byly stejné, ale měly by „divočejší“ průběh. Z praktických důvodů proto zobrazíme pouze argument.

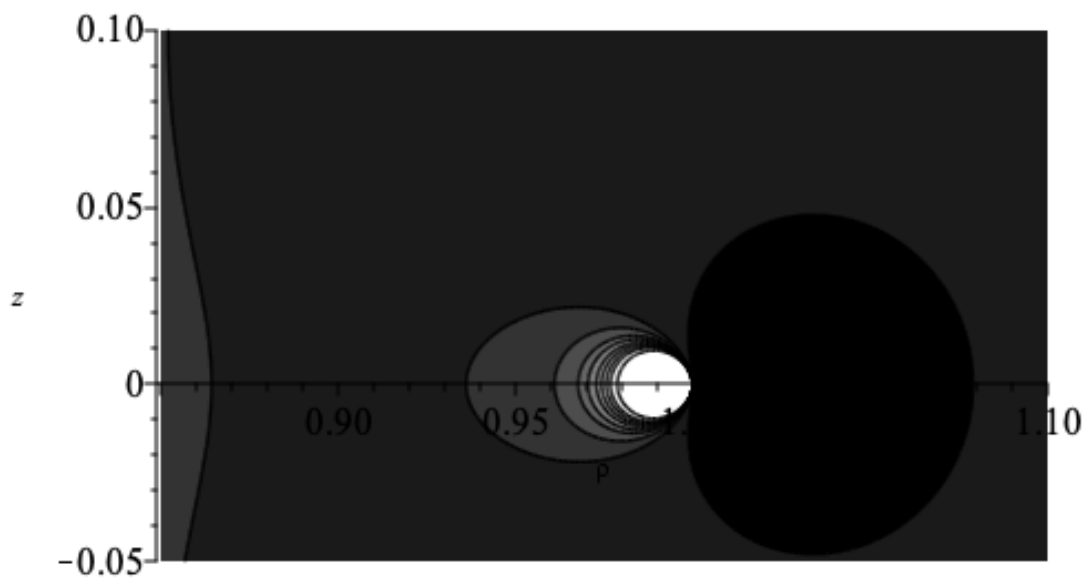
Průběh kontur této funkce je patrný z obrázku 3.4. Člověk by si také mohl všimnout, že zajímavá oblast je opět kolem prstence, tedy $\rho = 1$. Podívejme se proto na dvě přiblížení této oblasti - obrázky 3.5 a 3.6.



Obrázek 3.4: Kontury funkce $\lambda - \nu - \mu$ pro volbu $a = 1, M = 1$ - první přiblížení.



Obrázek 3.5: Kontury funkce $\lambda - \nu - \mu$ pro volbu $a = 1, M = 1$ - druhé přiblížení.



Obrázek 3.6: Kontury metrické funkce $\lambda - \nu - \mu$ pro volbu $a = 1, M = 1$ - třetí přiblížení.

Závěr

V této práci z oblasti obecné relativity jsme se snažili přispět k pochopení prostorové geometrie v blízkosti tzv. Bachova-Weylova tenkého prstence (viz články [1], [2], [3], [7], [8]). Ačkoli se jedná o přímočarý protějšek jednoduchého, homogenního kruhového prstence z newtonovské teorie gravitace (popř. elektrostatiky), podle Einsteinových rovnic je tento zdroj v rámci meridionálního řezu silně anizotropní. Jeho geometrické charakteristiky (zejména chování vlastní vzdálenosti od něj) se dokonce zdají vylučovat intuitivně přijatelnou geometrickou interpretaci.

V první kapitole jsme podle [3] ukázali, že Bachův-Weylův prstenc je možno považovat za limitní případ toroidu s určitým vnitřním poloměrem (pokud tento poloměr jde k nule). V druhé kapitole jsme ilustrovali zvláštní deformaci geometrie kolem tohoto zdroje na vybraných geometrických charakteristikách, vycházející z prací [7,8]. Jako doplnění těchto článků jsme ve třetí kapitole vykreslili průběhy metrických funkcí, které za zmíněnou deformaci zjevně nesou odpovědnost.

Na tuto práci by nyní mohlo navázat studium chování tlustého toroidu při zmenšování jeho vnitřního poloměru. Na odpovídajících sekvencích průběhů geometrických charakteristik okolní geometrie by mělo být vidět, jak zvláštní deformace “vzniká”. Potřebné kroky jsme již vyzkoušeli, bude však třeba sofistikovanějšího postupu při integraci nutné k nalezení “druhé” metrické funkce λ (přímočarý numerický výpočet patřičného křivkového integrálu program Maple neprovede).

Konečným cílem by měla být uspokojivá interpretace Bachova-Weylova řešení, spočívající např. ve vnoření tohoto řešení (přesněji jeho vhodných řezů) do vhodné nadvariety — ideálně izometrické vnoření do třírozměrného eukleidovského prostoru, na němž budou patrné “skutečné” geometrické poměry v okolí jeho prstencové singularity. Je však možné, že případná taková interpretace jen potvrdí, že v limitě nekonečně malého vnitřního poloměru *nelze* Bachovo-Weylovo řešení považovat za přijatelnou aproximaci toroidálního zdroje v obecné relativitě. Vzhledem k jednoznačnosti řešení Laplaceovy rovnice (jíž je řešení určeno) pak ovšem vzniká otázka, zda v třídě statických a axiálně symetrických řešení přijatelný prstencový zdroj vůbec existuje. Odpověď na tuto otázku by byla velmi vítaná při aproximaci zdrojů častých v astrofyzikálních úlohách.

Literatura

- [1] WEYL, Hermann. Republication of: 3. On the theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation* [online]. 2012, 44(3), 779-810 [cit. 2020-07-25]. DOI: 10.1007/s10714-011-1310-7. ISSN 0001-7701. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10714-011-1310-7>
- [2] BACH, Rudolf a Hermann WEYL. Republication of: New solutions to Einstein's equations of gravitation. B. Explicit determination of static, axially symmetric fields. By Rudolf Bach. With a supplement on the static two-body problem. By H. Weyl. *General Relativity and Gravitation* [online]. 2012, 44(3), 817-832 [cit. 2020-07-25]. DOI: 10.1007/s10714-011-1312-5. ISSN 0001-7701. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10714-011-1312-5>
- [3] ŠÁCHA, J. a O. SEMERÁK. Toroidal source around a static black hole. *Czechoslovak Journal of Physics* [online]. 2005, 55(2), 139-155 [cit. 2020-07-24]. DOI: 10.1007/s10582-005-0026-x. ISSN 0011-4626. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10582-005-0026-x>
- [4] MORSE, P. M. a H. HESHBECK. *Methods of theoretical physics. 1.* New York: McGraw-Hill Book Company, 1953. ISBN 978-0070433168.
- [5] OLIVER, F. W. J., D. W. LOZIER, R. F. BOISVERT a C. W. CLARK. *NIST Handbook of Mathematical Functions. 1.* New York: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-0-521-19225-5. Upravít citaci
- [6] The Mathematical Functions Site [online]. Wolfram Research, 1998 [cit. 2020-07-26]. Dostupné z: <https://functions.wolfram.com>
- [7] SEMERÁK, O. Static axisymmetric rings in general relativity: How diverse they are. *Physical Review D* [online]. 2016, 94(10) [cit. 2020-07-24]. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.104021. ISSN 2470-0010. Dostupné z: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.104021>
- [8] D'AFONSECA, L A, P S LETELIER a S R OLIVEIRA. Geodesics around Weyl–Bach's ring solution. *Classical and Quantum Gravity* [online]. 2005, 22(17), 3803-3814 [cit. 2020-07-24]. DOI: 10.1088/0264-9381/22/17/028. ISSN 0264-9381. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/22/17/028>
- [9] WEYL, Hermann. Republication of: 5. Comment on the axially symmetric solutions to Einstein's equations of gravitation. *General Relativity and Gravitation* [online]. 2012, 44(3), 811-815 [cit. 2020-07-25]. DOI: 10.1007/s10714-011-1311-6. ISSN 0001-7701. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10714-011-1311-6>
- [10] NEUGEBAUER, Gernot, David PETROFF a Bahram MASHHOON. Editorial notes to: 3. On the theory of gravitation. By Hermann Weyl and to. *General Relativity and Gravitation* [online].

2012, 44(3), 771-777 [cit. 2020-07-25]. DOI: 10.1007/s10714-011-1309-0. ISSN 0001-7701. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10714-011-1309-0>