Posudek oponenta

Jméno studenta: Patrik Šnauko
Název práce: Prstencový zdroj gravitace jako limita tlustého toroidu

Posuzovaná bakalářská práce z oblasti obecné relativity se věnuje tzv. Bachovu-Weylovu řešení polních rovnic – obecně relativistickému protějšku hmotného singulárního prstence známého z Newtonovy teorie. Jedná se o speciální případ vakuového, statického a axiálně symetrického prostoročasu, který je matematicky snadno uchopitelný, avšak nesnadný v interpretaci. Ukazuje se totiž, že analog newtonovského potenciálu v obecné relativitě splňuje pro tento typ prostoročasů stejnou (Laplaceovu) rovnici, jejíž řešení jsou dobře známa. Co je však nové oproti Newtonově teorii je druhá metrická funkce, která významně ovlivňuje geometrii prostoročasu v blízkosti samotného prstence. Předkládaná práce si vytyčila za cíl přispět k pochopení těchto neintuitivních deformací na základě pohledu na prstenec jako limitního případu tlustého (nesingulárního) toroidu.

V první kapitole se student zabývá řešením Laplaceovy rovnice ve sférických, toroidálních i Weylových souřadnicích. Za pomoci literatury dokazuje významný důsledek axiální symetrie, totiž, že řešení Laplaceovy rovnice na ose symetrie lze jednoznačně rozšířit do celého prostoru. Výklad je veden srozumitelně a logicky navazuje. Dále tohoto výsledku využívá a cituje již konkrétní řešení Laplaceovy rovnice odpovídající tlustému hmotnému toroidu v různých souřadnicích. Následně provádí limitu tenkého toroidu a dochází k Bachově-Weylově řešení.

V druhé kapitole je studentem vhodně využito toroidálních souřadnic k zachycení směrové podstaty prstencové singularity a jsou zde uvedeny explicitní výrazy jednoduchých geometrických charakteristik BW prstence. Z textu prvních dvou kapitol je patrné, že student projevil pochopení studované oblasti, která není součástí úvodního kurzu obecné relativity, a je schopen s výsledky dále pracovat. Celkový dojem ovšem kazí množství překlepů a drobných chyb z nepozornosti, absence některých citací či občasných krkolomných formulací – viz. připomínky v bodech níže.

Závěr práce je věnován rozšíření výsledků z literatury o vykreslení průběhů metrických funkcí a jejich rozdílů. Obrázky mají ilustrovat zmiňované patologie v blízkosti singulárního prstence. Nejsou však ideální – zejména v tištěné verzi u obr. 3.5 a 3.6 nelze dobře vidět ekvipotenciály – černá barva se zde slévá v celém grafu a odlišitelná je pouze očekávaná divergence při přiblížení se k prstenci z vnitřní strany. Technická kvalita obrázků též není optimální.

Studentovi se již bohužel nepodařilo splnit původní záměr práce, který by mohl přinést zajímavější vhled do vzniku patologií – totiž prostudovat chování geometrie (nesingulárního) toroidu při zmenšování jeho poloměru.

Dále několik připomínek a poznámek:

- Metrické funkce metriky (2) jsou funkcemi ρ, z a ne ρ, ϕ.
- Ve výrazu pro z v (1.9) má být ve jmenovateli $\cosh\mu - \cos\eta$; chybí zde zmínka o charakteru a. Ve výrazu (1.18) chybí $\frac{1}{\pi}$, viz. [3]; v rovnici (1.37) chybí a v čitateli.
- Obrázek 1.1 není v textu citován.
- V (1.21) se neintegruje podle ϱ a za druhým rovná se by mělo být dosazeno $\varrho = b$; bylo by také vhodné zmínit, že g je determinant z metriky.
- Podle definic eliptických integrálů na str. 21 není ve všech vzorcích s eliptickými integrály správně argument – má tam být odmocnina z toho, co je uváděno v práci; na str. 20 nad rovnicí (2.8) by mělo být v definici k^2.
- Na str. 16 nad rovnicí (1.38) chybí citace (v práci jsou tři tečky). Podobně na str. 17 ve třetím bodě chybí odkaz na literaturu (v práci je uvedeno „zde bude odkaz“); stejně tak na str. 21 u citace Curzonova řešení.
- Ve vyjádření (2.9) má být ve jmenovateli δ_+ – chyba se vyskytuje i dále, ale díky následné limitě $a \to 0^+$ neovlivňuje další výsledky.

- V sekci 2.2.2.1 o malém obvodu se diskutuje, proč se neintegruje přes souřadnici ρ – zde by měla být spíše diskuze o souřadnici μ, jelikož se používá metrika v toroidálních souřadnicích.
- U obrázku 2.2 by bylo vhodné na toroidu zvýraznit velký obvod.
- Na str. 23 v prvním bodě má být exp(0) místo exp(1).
- Ve vztahu (2.23) chybí na pravé straně dz, případně by muselo být $D = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}$.
- V rovnici (2.31) nemá být mezi $\Gamma\Gamma$ tečka, ale až za nimi.
- V obecné relativitě je potřeba dodržovat mezery mezi indexy, zvláště pak jsou-li snižovány a zvyšovány pomocí metriky – týká se zejména sekce 2.2.4.
- U obrázků 3.1 až 3.6 chybí popis významu barev.
- „Pedagogické poznámky“: Bylo by vhodné na začátek nebo konec přidat část s notacemi a používanou konvencí (značení derivací, užitá konvence eliptických integrálů, ...). Na str. 12 se pokládá $S(\eta, \phi, \mu) = N(\eta, \phi)M(\mu)$, což může trochu mást, protože v kontextu práce se M vyskytuje jako hmotnost. Podobně, ve stejném odstavci, je použito a v argumentu $\sin(ka)$ a $\cos(ka)$ v jiném významu, než ve zbytku práce. V rovnici (2.10) se najednou vyskytuje k', jehož hodnota je ozřejmena až v dalším oddíle na další straně; stejně tak argument eliptických integrálů E a K. Na str. 24 je „... při počítání Curzonova řešení pro BW prstenec ...“ poněkud krkolomná formulace (Curzonovo řešení je limitou BW řešení). Na str. 26 ve 3. bodě bych doplnil, že se jedná o vzdálenosti v ekvatoriální rovině; na str. 27, že se *paralelně* přenáší podél γ.
- Pozor na chyby typu „Einsteinových rovnice“, „Riemannovým tenzor“, apod.
- Typografické neduhy: používání spojovníku (-) místo pomlčky (–); první řádek prvního odstavce se neodsazuje; podivné mezery u parciálních derivací.

Případné otázky při obhajobě:

1. Na konci sekce 2.2.1 se zmiňujete o Curzonovu řešení s tím, že ač se jedná o jediný bod, není toto řešení sféricky symetrické. Jak tedy vypadá správné sféricky symetrické řešení?
2. V sekci 2.2.2.1 konstatujete, že malý obvod naměří pozorovatelé s vlastním časem t. Kteří to jsou?
3. Proč je výhodné ve výrazu pro metrickou funkci λ (4) integrovat od osy symetrie? Ukažte odpovídající vlastnost λ.

Předloženou práci tímto **doporučuji** uznat jako bakalářskou a navrhuji hodnocení stupněm **C (dobře)**.

Dne 17.8. 2020 vypracoval Mgr. Petr Kotlařík.