Posudek oponentky na bakalářskou práci

Ramina Khusnutdinova: Reprezentace čísel v lineárním rekurentním systému

Redundantní číselné soustavy jsou významné tím, že umožňují provádět aritmetické operace s čísly pomocí efektivních algoritmů. Například už v dvojkové soustavě přidáním cifry -1 k obvyklým $0, 1$ vznikne tzv. signed binary system, pro který lze najít algoritmus sčítání v konstantním čase (nezávislém na velikosti sčítaných čísel). Použijeme-li nestandardní číselnou soustavu, lze docílit redundance i při minimální možné abecedě cifer, která umožní reprezentovat všechna přirozená čísla. Například u Fibonacciho číselné soustavy stačí cifry $0, 1$ a i tak je tento systém redundantní. Bakalářská práce se zabývá popisem jednoho konkrétního číselného systému založeného na posloupnosti $(G_n)_{n\geq 1}$ dané lineární rekurencí $G_{n+2} = 2G_{n+1} + G_n$, $n \geq 0$, $G_0 = G_1 = 1$. V tomto systému lze každé přirozené číslo reprezentovat posloupností cifer z množiny $\{0, 1, 2\}$. V práci je tento systém nazýván vtipně Raminacci system. Musím poznamenat, že standardně přijímaný název tato soustava nemá, v literatuře lze ale nalézt pojmenování Pell number system.

Úkolem bylo navrhnout algoritmus, který k danému přirozenému číslu n nalezne všechny jeho reprezentace a zkoumat funkci $R(n)$, která k n přiřazuje počet všech jeho reprezentací v systému. Podobná úloha byla řešena pro Fibonacciho soustavu, jak se ale v této práci ukazuje, rozhodně se nejedná o přímou analogii. Například ve Fibonacciho soustavě mají jedinou reprezentaci pouze členy posloupnosti $(F_n - 1)_{n\geq 1}$, kdežto ve studovaném případě je čísel s jedinou reprezentací daleko více.

Studentka splnila zadání. Naprogramovala hladový algoritmus, který k danému číslu najde radixově největší reprezentaci a dále algoritmus, který z této hladové réprezentace najde všechny ostatní reprezentace daného čísla v systému. V práci je dále uvedeno několik zajímavých pozorování ohledně funkce $R(n)$. Pozoruhodný je zejména popis čísel s jednoznačnou reprezentací pomocí tzv. Smarandache crescendo pyramidal sequence. Dále je odvozen počet reprezentací samotných členů posloupnosti $(G_n)_{n\geq 1}$. Nakonec jsou uvedena dvě pozorování ohledně symetrie grafu funkce $R(n)$. Všechny tyto výsledky jsou zajímavé a podněcují celou řadu otázek a problémů k dalšímu zkoumání.

Text bakalářské práce je srozumitelný, překlepy/chyby jsou jen v minimální míře. V tomto ohledu hodnotím práci kladně. Na druhou stranu by bylo rozhodně možné projekt pojmout obšírněji, například zahrnout podrobnější rešerši ohledně vlastností systémů založených na lineární rekurenci, pro porovnání citovat výsledky o redundanci ve Fibonacciho soustavě, a případně se pokusit některá svá pozorování rigorózně dokázat.

Ke studentce bych měla následující otázky:

- Jedním z úkolů zadání bylo odhadnout složitost algoritmu pro generování všech reprezentací daného přirozeného čísla. Můžete uvést alespoň horní odhad složitosti?
- Ve vztahu (2.5) uvádíte předpis pro maximální cifru M v systému zadaném posloupností $(G_n)_{n\geq 1}$. Toto číslo ale obecně nemusí být celé a například pro vaši posloupnost je rovno $G_2/G_1 = 3$. Asi je třeba tvrzení o maximální cifře opravit. Jak?
- Dává smysl porovnávat hodnoty funkce $R(n)$ pro čísla n, jejichž hladový rozvoj má pevnou délku k, tedy čísla $G_k, G_k + 1, \ldots, G_{k+1} - 1$. Tvoří $R(G_k), \ldots, R(G_{k+1} - 1)$ symetrickou posloupnost? Kolik je v tomto úseku čísel s jedinou reprezentací? Můžete najít

$$\max\{R(G_k), \ldots, R(G_{k+1} - 1)\} \quad \text{a} \quad \operatorname{argmax}_{G_k \leq i < G_{k+1}}(R(i))?$$

Celkově hodnotím, že práce dosahuje požadované úrovně a navrhuji udělit známku

C – Dobře.

V Praze dne 16. srpna 2020

Prof. Ing. Zuzana Masáková, Ph.D.