

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STROJNÍ

Ústav přístrojové a řídicí techniky



Bakalářská práce

Laboratorní zařízení pro testování tlumení kmitání
závaží změnou délky závěsu

Laboratory setup for testing oscillations damping by
adjusting the cable length

Poděkování

Rád bych poděkoval své rodině a přítelkyni za jejich podporu po celou dobu mého studia.

Dále bych poděkoval svému vedoucímu práce Ing. Jaroslavu Buškovi, Ph.D. za trpělivost a ochotu při vedení této bakalářské práce. Děkuji mu za cenné rady a konzultace.

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci vypracoval samostatně s použitím literárních zdrojů a informací, které uvádím v seznamu použité literatury a zdrojů.

Datum:

Podpis:



ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Ira** Jméno: **Tomáš** Osobní číslo: **473562**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav přístrojové a řídicí techniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Laboratorní zařízení pro testování tlumení kmitání závaží změnou délky závěsu

Název bakalářské práce anglicky:

Laboratory setup for testing oscillations damping by adjusting the cable length

Pokyny pro vypracování:

- 1) Proveďte rešerši na metody tlumení kmitání závaží změnou délky závěsu.
- 2) Vytvořte fyzikální model a realizujte jednoduché řízení.
- 3) Navrhněte koncepci laboratorního zařízení pro ověření funkčnosti.
- 4) Zhodnoťte dosažené výsledky.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Stilling D.S.D., Szyszkowski W. Controlling angular oscillations through mass reconfiguration: variable length pendulum case Int.J.Non-linearMech.,vol.37,no.1, pp. 89-99, 2002.
[2] Vyhřídál T., Anderle M., Bušek J., Niculescu S.I. Time-delay algorithms for damping oscillations of suspended payload by adjusting the cable length IEEE/ASME Transactions on mechatronics, vol.22, no.5, pp. 2319-2329, October 2017

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D., U12110.3

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **30.04.2020**

Termín odevzdání bakalářské práce: **27.08.2020**

Platnost zadání bakalářské práce: _____

Ing. Jaroslav Bušek, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

_____ Datum převzetí zadání

_____ Podpis studenta

Anotace

Cílem této bakalářské práce je představit algoritmy pro tlumení kmitání závaží změnou délky závěsu kyvadla a vytvořit fyzikální model pro popis laboratorního zařízení. Práce dále obsahuje simulační ověření algoritmů na dané dynamické soustavě, návrh laboratorního zařízení pro ověření funkčnosti algoritmů a následné zhodnocení výsledků.

Klíčová slova

tlumení, kmitání, proměnná délka kyvadla

Abstrakt

The aim of the bachelor thesis is to introduce algorithms for oscillations damping by adjusting the cable length and build a dynamic model of the laboratory setup. Validate the control algorithms on the dynamic system by simulation. Design the laboratory setup for testing oscillations damping by adjusting the cable length and evaluate the achieved results.

Keywords

damping, oscillation, variable length pendulum

Obsah

Úvod	1
1 Teoretická část	2
1.1 Matematické kyvadlo s proměnnou délkou závěsu	2
1.1.1 Matematické kyvadlo	2
Pohybové rovnice kyvadla s proměnou délkou závěsu	3
1.2 Coriolisova síla	3
1.3 Tlumení kmitání využitím Coriolisovy síly	4
1.4 Tlumení kmitání použitím omezené délky závěsu	4
1.5 Energetický přístup	5
1.6 Algoritmy pro řízení tlumení kmitání	6
1.6.1 Přímovazební řízení	6
Řízení tlumení kmitání periodickou změnou délky závěsu	6
Soustava s lineárním tlumičem	6
1.6.2 Zpětnovazební řízení	8
Zpětnovazební řízení s jednoduchým dopravním zpožděním	8
Zpětnovazební řízení s dvojitým dopravním zpožděním	9
Zpětnovazební řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem	9
Zpětnovazební řízení bez dopravního zpoždění	9
2 Praktická část	10
2.1 Fyzikální model laboratorního zařízení	10
2.1.1 Schéma laboratorního zařízení	10
2.1.2 Nelineární matematický model	10
2.2 Nelineární model vnitřní	13
2.2.1 Linearizace stavového modelu v ekvilibriu	14
2.3 Simulační model v MATLAB & Simulink	17
2.3.1 Nelineární simulační model	17
Impulsní funkce	18
2.3.2 Linearizovaný simulační model	19
Impulsní funkce linearizovaného modelu	19
2.4 Návrh řízení laboratorního zařízení	20
2.4.1 Regulace délky závěsu a polohy vozíku	20
PD-regulátor	20
Návrh PD-regulátorů	21
Implementace PD-regulátorů na linearizovaném modelu	23
Implementace PD-regulátorů na nelineárním modelu	24
2.5 Implementace algoritmů pro řízení tlumení kmitání	25
2.5.1 Implementace algoritmů pro řízení tlumení kmitání na linearizovaném modelu	25
2.5.2 Implementace algoritmů pro řízení tlumení kmitání na nelineárním modelu	26
Přímovazební algoritmus	26
Zpětnovazební algoritmus s dopravním zpožděním	27
Zpětnovazební řízení s dopravním zpožděním a konst. přírůstkem	28
Zpětnovazební řízení bez dopravního zpoždění	29

Porovnání algoritmů	30
2.6 Návrh řízení laboratorního zařízení	31
Závěr	32
Seznam použitých symbolů a značek	33
Seznam použité literatury a zdrojů	35
Seznam obrázků	36
Seznam příloh	37

Úvod

V dnešní moderní a rychle se rozvíjející době sehrává stále více velkou úlohu jeřábová technika. Je nedílnou součástí každé stavby výškových budov, kde často čelí obtížným manipulačním úkolům. Dosáhne-li totiž břemeno požadované pozice, dochází k jeho rozkmitání, které znemožňuje jeho umístění. Také je hojně využívána v lodní dopravě, kde se pro nakládání a vykládání nákladu používají lodní jeřáby. Tyto jeřáby často pohybují s mnohatunovým nákladem, kde kmitání břemene může přivést do nebezpečné situace nejen samotný náklad, ale také posádku a loď. Další rychle se rozvíjející oblastí jsou bezpilotní letouny (UAVs) s vertikálním startem. Během několika posledních let zažily velký rozvoj nejen v oblasti komerčního využití, ale také se využívají pro vojenské účely a pro pomoc při přírodních katastrofách. Často tyto letouny bývají vystaveny úkolům, při kterých nesou zavěšené břemeno, u kterého je kmitání nežádoucí.

Cílem této bakalářské práce je seznámení s metodami tlumení kmitání závaží změnou délky závěsu a navržení laboratorního zařízení pro ověření funkčnosti těchto algoritmů. Dále má za cíl vytvořit matematický a simulační model laboratorního zařízení a realizovat jeho řízení.

V teoretické části se čtenář seznámí s problematikou kmitání kyvadla s proměnnou délkou závěsu a jevy s tímto pohybem spojenými a dále s algoritmy, které využívají periodickou změnu závěsu k tlumení kmitání. V praktické části pak nalezne zformulování fyzikálního modelu laboratorního zařízení a jeho linearizaci, vytvoření simulačních modelů, návrh řízení a simulační ověření vybraných algoritmů. Poslední podkapitola je věnována návrhu laboratorního zařízení, na kterém bude možno tyto algoritmy testovat.

1 Teoretická část

Teoretická část je věnována fyzikálnímu popisu problematiky kmitání kyvadla a jevům s tímto pohybem spojeným. Dále využítí fyzikálních jevů, které vznikají při pohybu kyvadla s proměnnou délkou závěsu a které mohou být využity ke tlumení kmitání. Nejvíce pozornosti je v této kapitole věnováno algoritmům pro řízení tlumení kmitání změnou délky závěsu kyvadla.

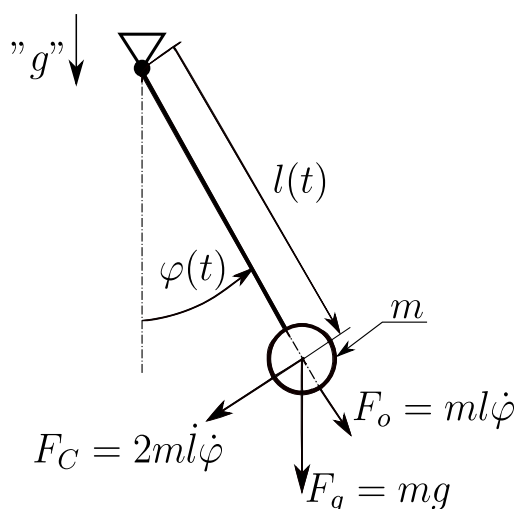
1.1 Matematické kyvadlo s proměnnou délkou závěsu

Dětská houpačka bývá obvykle popisována jako kyvadlo s proměnnou délkou závěsu, kde zesílení nebo naopak tlumení kmitání je realizováno intuitivním pohybem dítěte. Dítě se snaží rozhoupat houpačku pohybem svého těla vpřed a vzad, tedy mění vzdálenost svého těžiště od osy otáčení [2]. Tento způsob změny polohy hmoty vzhledem k ose otáčení je jedinečným způsobem pro řízení kmitání mechanických soustav [13].

Tohoto efektu je využito při návrhu tlumení kmitání závaží zavěšeného na závěsu, u kterého je měněna jeho délka. Správné pochopení tlumení kmitání změnou polohy hmoty vůči ose otáčení je důležité pro efektivní návrh řízení tlumení oscilací.

1.1.1 Matematické kyvadlo

Jistou idealizací zavěšeného břemena na laně je matematické kyvadlo. Matematické kyvadlo se skládá z hmotného bodu o hmotnosti m zavěšeného na nehmotném závěsu délky l , který je připevněn k ose otáčení, jak je ukázáno na obrázku 1. Dále je zanedbáno tření v ose otáčení a odpor prostředí.



Obrázek 1: Kyvadlo s proměnnou délkou závěsu s vyznačenými silami

Pohybové rovnice kyvadla s proměnnou délkou závěsu

Tento systém má dva stupně volnosti. Jeden ve směru radiálním, který je popsán souřadnicí $l(t)$ a druhý ve směru tečném, kterému je přiřazena souřadnice $\varphi(t)$. Použitím Lagrangeovy rovnice druhého druhu lze získat pohybové rovnice, které mohou být podle [13] zapsány jako

$$ml(t)\ddot{\varphi}(t) + 2m\dot{l}(t)\dot{\varphi}(t) + mg \sin(\varphi(t)) = 0 \quad (1a)$$

$$\text{nebo } \ddot{\varphi}(t) + 2\frac{\dot{l}(t)\dot{\varphi}(t)}{l(t)} + \frac{g}{l(t)}\sin(\varphi(t)) = 0 \quad (1b)$$

$$m\ddot{l}(t) - ml(t)\dot{\varphi}^2(t) - mg \cos(\varphi(t)) = F_1(t). \quad (2)$$

Předpokládáme-li neproměnnou délku závěsu a malé výchylky, tj. $\varphi \leq 5^\circ$ a využijeme-li aproximace $\sin(\varphi) \approx \varphi$, lze řešení rovnice (46) zapsat jako

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\Omega t), \quad (3)$$

kde φ_0 je amplituda kmitů.

Úhlová frekvence kmitů je dána

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4)$$

Periodu kmitu určíme z

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5)$$

Neomezíme-li se pouze na malé výchylky kyvadla, skutečná perioda dle [1] je určena

$$\bar{T}(\varphi_0) = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)}} d\varphi. \quad (6)$$

1.2 Coriolisova síla

Rovnice (45) a (46) popisují rotační pohyb kyvadla, který je způsoben polohou a zrychlením hmoty m . Druhý výraz v rovnici (46) popisuje efekt Coriolisovy síly, která vzniká pohybem hmoty m . Pohyb kyvadla s proměnnou délkou závěsu je tedy ovlivněn jednak gravitační silou a jednak Coriolisovou silou [6].

Coriolisova síla vzniká při dvou současných pohybech. V tomto případě se jedná o pohyb rotační, popsán souřadnicí $\varphi(t)$, a pohyb posuvný ve směru radiálním, popsán souřadnicí $l(t)$. Tato síla má směr kolmý na směr rychlosti $\dot{l}(t)$, jak je ukázáno na obrázku 1. Její velikost je určena jako

$$F_C(t) = 2m\dot{l}(t)\dot{\varphi}(t). \quad (7)$$

1.3 Tlumení kmitání využitím Coriolisovy síly

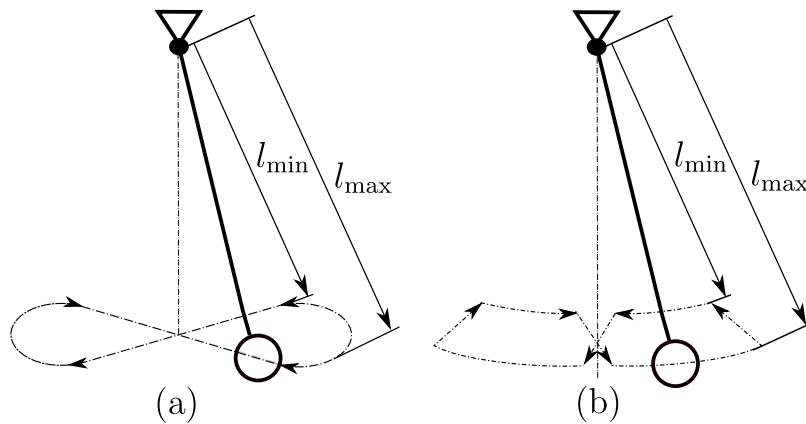
Zatímco dítě rozhoupává houpačku intuitivně, tedy snaží se kmitání posílit, naši snahou je naopak kmitání tlumit. Pro potřeby řízení tlumení kmitání je nutné najít algoritmus, který je možno implementovat. Tímto problémem se ve své práci zabýval Denis S. Stilling [6].

V této práci je ukázáno, že pokud je délka závěsu řízena správně, Coriolisova síla může být využita ke tlumení oscilací kyvadla. Musí být brán v úvahu směr Coriolisovy síly, který musí být synchronizován s pohybem kyvadla. V případě, že závěs je prodlužován, tedy $\dot{l}(t) > 0$, bude amplituda oscilací klesat. V opačném případě, kdy je závěs zkracován, tedy $\dot{l}(t) < 0$, Coriolisova síla zesiluje kmitání. V situaci, kdy závěs má konstantní délku, tj. $\dot{l}(t) = 0$, Coriolisova síla je eliminována a kyvadlo kmitá s konstantní amplitudou. Když je kyvadlo prodlužováno bez ohledu na směr rychlosti, bude mít Coriolisova síla vždy směr proti pohybu kyvadla. Přesně opačný jev je pozorován při zkracování závěsu. Proto zkracování, respektive prodlužování závěsu kyvadla, vytváří Coriolisovu sílu, která zesiluje, respektive tlumí oscilace.

1.4 Tlumení kmitání použitím omezené délky závěsu

Podle předchozího odstavce by se mohlo intuitivním řešením pro tlumení kmitů nabízet nepřetržité prodlužování kyvadla. Tento způsob však není možné v praxi realizovat, a proto je délka kyvadla omezena mezi dolní a horní hranici

$$l_{\min} \leq l(t) \leq l_{\max} \quad \wedge \quad \dot{l}_{\min} < \dot{l}_{\max} \quad (8)$$



Obrázek 2: Tlumení kmitání využitím
(a) obecné trajektorie a (b) optimálnější trajektorie závaží

Důsledkem nerovnice (8) je, že v určitém okamžiku je nutné kyvadlo zkrátit, což má za následek naopak posílení kmitání, a to je v případě tlumení oscilací zcela nežádoucí. Pro tlumení kmitání je tudíž důležitá sekvence pohybu během kyvu kyvadla, která by se měla podle článku [7] skládat ze dvou částí:

1. Závaží o hmotnosti m se pohybuje směrem od osy otáčení (prodlužování kyvadla), když velikost úhlové rychlosti a Coriolisovy síly je maximální. To odpovídá dolní pozici kyvadla ($\varphi(t) = 0$). Tento pohyb zvětšuje tlumící efekt.

2. Závaží o hmotnosti m se pohybuje směrem k ose otáčení (zkracování kyvadla), když velikost úhlové rychlosti a Coriolisovy síly je minimální, což odpovídá maximální úhlové výchylce kyvadla vzhledem k rovnovážné poloze. Takto popsany pohyb zmenšuje zesílení kmitání.

Hlavní myšlenkou tlumení kmitání tedy je prodlužování závěsu ($\dot{l}(t) > 0$), když absolutní hodnota úhlové rychlosti ($|\dot{\varphi}(t)|$) se blíží své maximální hodnotě, tj. když $\varphi(t) = 0$. Ke zkracování závěsu ($\dot{l}(t) < 0$) by mělo docházet, když úhlová rychlost je nulová ($\dot{\varphi}(t) = 0$).

Trajektorie tohoto pohybu je zobrazena na obázku 2, který obsahuje dvě možnosti trajektorií, po kterých se závaží může pohybovat. Optimálnější trajektorie se více shoduje s teoretickým předpokladem popsáním v bodech 1-2 pro tlumení kmitání, ale je obtížně realizovatelná z důvodu náročnosti matematického popisu daného pohybu a z důvodu nároků na aktuátory zajišťující tento pohyb. Proto je v této práci věnována pozornost pouze obecné strategii.

1.5 Energetický přístup

Zesilující, respektive zeslabující efekt způsobený přerozdělováním hmoty vůči ose otáčení může být také dle článku [6] vysvětlen využitím zákona zachování mechanické energie.

Celková mechanická energie matematického kyvadla je dána součtem kinetické energie E_k a polohové energie E_p . Tato energie může být přeměněna na jinou formu energie v závislosti na vykonané práci systémem. Energetická bilance tohoto systému může být zapsána jako

$$(E_k + E_p)_{t_1} + W_{1-2} = (E_k + E_p)_{t_2}, \quad (9)$$

kde t_1 a t_2 jsou časové intervaly, mezi kterými je vykonána práce W_{1-2} . Má-li se zkrátit, respektive prodloužit délka kyvadla, musí na závěs o délce $l(t)$ působit vnější síla $F_1(t)$, která způsobí změnu polohy závaží o Δs . Uvažujeme-li dráhy $s_1 = s_1(t_1)$ a $s_2 = s_2(t_2)$, je poté vykonaná práce síly $F_1(t)$ na tomto intervalu dána

$$W_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} F_1 ds = F_1 \Delta s. \quad (10)$$

V případě zkracování kyvadla platí

$$\Delta s = s_2 - s_1 > 0 \quad (11)$$

a poté pro mechanickou práci lze psát

$$W_{1-2} = F_1 \Delta s > 0. \quad (12)$$

Dosazením výrazu (12) do rovnice (9) lze vidět, že celková energie v čase t_2 se zvětšuje s hodnotou $F\Delta s$. To má za důsledek zesílení kmitání.

Obdobným způsobem lze dokázat případ, kdy dochází k prodlužování závěsu. V tomto případě je mechanická energie $W_{1-2} = F_1 \Delta s < 0$. Tedy celková energie soustavy se zmenšuje. To má naopak za důsledek tlumení kmitání.

Zvětšování nebo zmenšování celkové energie systému v důsledku změny délky závěsu kyvadla vede ke zvětšení nebo zmenšení amplitudy kmitání. Změnou délky závěsu jsme tedy schopni tlumit kmitání kyvadla a tento jev lze tedy vysvětlit i pomocí energetického přístupu.

1.6 Algoritmy pro řízení tlumení kmitání

Tato podkapitola představuje algoritmy pro tlumení kmitání změnou délky závěsu. Je zde nastíněno odvození jednotlivých algoritmů. Celá odvození jsou obsažena v jednotlivých článcích, které jsou vždy uvedeny u daných algoritmů.

1.6.1 Přímovazební řízení

Řízení tlumení kmitání periodickou změnou délky závěsu

Pro tlumení kmitání periodickou změnou délky závěsu je aplikován přístup, který použili ve své práci Stilling and Szyszkowski [7].

Předpokládejme, že délka závěsu bude oscilovat s malou amplitudou Δl okolo střední hodnoty l_0 a s úhlovou frekvencí, která je dvakrát větší než je střední hodnota úhlové frekvence kmitů kyvadla $\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$. Pohyb závaží je podle článku [6] dán

$$l(t) = l_0 - \Delta l \sin(2\Omega t). \quad (13)$$

Trajektorie tohoto harmonického pohybu je ukázána na obrázku obrázku 2(a).

Soustava s lineárním tlumičem

Stilling a Szyszkowski se v [7] zabývají změnou celkové mechanické energie soustavy během jednoho kyvu kyvadla s proměnnou délkou závěsu a porovnávají ji s rovnocennou soustavou obsahující lineární (viskózní) tlumič.

Uvažujeme-li systém s jedním stupněm volnosti, tvořeným pružinou a lineárním tlumičem, který volně kmitá podél souřadnice y . Poté takovýto systém lze popsat diferenciální rovnicí druhého řádu jako

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0 \quad (14a)$$

$$\text{nebo } \ddot{y}(t) + 2\xi\Omega\dot{y}(t) + \Omega^2y(t) = 0, \quad (14b)$$

kde $\xi = \frac{c}{2m\Omega}$ reprezentuje tlumicí poměr a $\Omega = \frac{k}{m}$ je vlastní úhlová frekvence netlumených kmitů.

Energii, kterou tlumič pohltí během jednoho cyklu, lze získat z rovnice (14a) vynásobením každého členu přírůstkem dy . Takto vynásobená rovnice (14a) popisuje

energetickou bilanci systému tlumič-pružina. Pro pohyb z polohy y_1 do polohy y_2 může být tato bilance vyjádřena v integrálním tvaru jako

$$-\int_{y_1}^{y_2} (c\dot{y})dt = \int_{y_1}^{y_2} (m\ddot{y} + ky)dy. \quad (15)$$

Levá strana rovnice (15) odpovídá disipované energii, pravá strana rovnice může být explicitně integrována, z čehož dostaneme kinetickou a potenciální energii systému. Zintegrováním rovnice (15) přes jednu periodu má tato rovnice tvar

$$\Delta E = -\int_0^\tau (c\dot{y}^2)dy = \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 + ky^2) - E(0), \quad (16)$$

kde ΔE je přeměněná energie během jedné periody a $E(0)$ je počáteční hodnota energie soustavy.

Pro případ malých hodnot tlumicího poměru ($\xi \ll 1$) může být výchylka v čase aproximována podle článku [7] jako lineární harmonický oscilátor

$$y(t) = A \cos(\Omega t). \quad (17)$$

Přeměněná energie během jednoho kmitu je dána rovnicí

$$\Delta E = -\int_0^\tau (c\dot{y}^2)dt = -A^2 c\pi\Omega \frac{1 - e^{\frac{-4\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}{4\xi} \cong -A^2 c\pi\Omega. \quad (18)$$

Energii lineárního oscilátoru lze vyjádřit

$$E(0) = \frac{1}{2}kA^2. \quad (19)$$

S využitím tlumicího poměru ξ je disipovaná energie normovaná vzhledem k počáteční hodnotě energie jako

$$\frac{\Delta E}{E(0)} = \frac{A^2 c\pi\Omega}{\frac{1}{2}kA^2} = -4\pi\xi. \quad (20)$$

Stejně tak, jako byla odvozena normovaná energie pro soustavu tlumič-pružina, může být odvozena normovaná energie pro kyvadlo s proměnnou délkou závěsu.

Autoři článku [7] vychází z linearizované rovnice pro popis úhlové výchylky kyvadla v čase. Vynásobením této rovnice přírůstkem $d\varphi$ a následnou úpravou do tvaru

$$d\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right) + d\left(\frac{g}{l}(1 - \cos(\varphi))\right) + 2\frac{\dot{l}}{l}\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{2l}(1 - \cos \varphi)\right)dt = 0, \quad (21)$$

je disipovaná energie během jednoho cyklu určena

$$\Delta E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos(\varphi)) - E(0) = -2\int_0^\tau \frac{\dot{l}}{l}\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{2l}(1 - \cos \varphi)\right)dt, \quad (22)$$

kde $E(0)$ je počáteční hodnota energie soustavy.

Normovanou hodnotu disipované energie lze psát jako

$$\frac{\Delta E}{E(0)} = -4\pi\xi_{EQ}. \quad (23)$$

Dosazením (22) do rovnice (23) lze získat ekvivalentní tlumicí poměr

$$\xi_{EQ} = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_0^\tau \frac{\dot{l}}{l}\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{2l}(1 - \cos \varphi)\right)dt}{\left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos(\varphi))\right]_{t=0}}. \quad (24)$$

Omezíme-li se opět pouze na malé výchylky $\varphi \ll 1$ a malý tlumicí efekt, lze vyjádřit ekvivalentní tlumicí poměr, který byl odvozen v [7] jako

$$\xi_{\text{EQ}} \cong \frac{3\Delta l}{4l_0}. \quad (25)$$

Podle článku [12] je tato aproximace vhodná pro hodnoty $\frac{\Delta l}{l_0} \in [0, 0.25]$.

Problémem tohoto ovládání je harmonický signál (13). Tlumení kmitání je zajištěno pouze v případě, že změna délky kyvadla je správně synchronizována se skutečnou úhlovou frekvencí $\bar{\Omega}$. Toho je v důsledku rozdílu mezi přibližnou Ω a skutečnou $\bar{\Omega}$ úhlovou frekvencí systému obtížné dosáhnout. Jak je ukázáno v článku [12], synchronizace je možná pouze během několika period, poté dochází k nežádoucímu zesílení kmitání.

Aby bylo dosaženo synchronizace délky kyvadla s řídicím signálem, je v práci Stillinga a Szyszkowského [7] navržen ekvivalentní tlumicí poměr, ve kterém je v každém časovém okamžiku přepočítávána úhlová frekvence

$$\xi'_{\text{EQ}} \cong \frac{3\Delta l \sin(2\Omega\Delta t)}{4l_0 \cdot 2\Omega\Delta t}. \quad (26)$$

Dalším řešením problému synchronizace pohybu kyvadla a řídicího signálu je přidání fázového posuvu ψ_i do rovnice (13) dle článku [9]

$$l(t) = l_0 - \Delta l \sin(2\Omega t + \psi_i), \quad (27)$$

kde ψ_i je fázový posun mezi $\varphi(t)$ a $l(t)$ získaný během předchozí periody ($i - 1$). Ekvivalentní tlumicí poměr pro i -tou periodu je dán jako

$$\xi_i \cong \frac{3\Delta l}{4l_0} \cos(\psi_i). \quad (28)$$

1.6.2 Zpětnovazební řízení

Řízení algoritmem (27) je časově náročné a obtížně implementovatelné. Proto je v článku [12] navrženo zpětnovazební řízení z měřeného úhlu $\varphi(t)$.

Zpětnovazební řízení s jednoduchým dopravním zpožděním

V článku [12] je pro návrh algoritmu uvažována malá hodnota tlumicího poměru ($\xi < 1$). Pro tuto hodnotu lze aproximovat výchylku v čase jako

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\xi\Omega t} \cos(\Omega t), \quad (29)$$

kde φ_0 je amplituda harmonického pohybu.

Vyjádřením funkce kosinus z rovnice (29), dosazením do upraveného algoritmu (13), kde funkce sinus je vyjádřena pomocí goniometrických vzorců funkcí kosinus, se autoři dostávají k nelineárnímu algoritmu s dopravním zpožděním ve tvaru

$$l(t) = l_0 - \Delta l 2e^{-\xi \frac{\pi}{2}} \alpha(t) \varphi(t) \varphi(t - \tau_1), \quad (30)$$

kde dopravní zpoždění $\tau_1 = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{T}{4}$ a $\alpha(t) = \varphi_0^{-2} e^{2\xi\Omega t}$.

Zpětnovazební řízení s dvojitým dopravním zpožděním

Obdobným způsobem se autoři článku [12] dostávají i k algoritmu s dvojitým dopravním zpožděním. Funkci sinus z rovnice (13) lze vyjádřit pomocí jiných goniometrických vzorců, než bylo využito pro odvození algoritmu s jednoduchým dopravním zpožděním. Po řadě úprav lze získat algoritmus s dvojitým dopravním zpožděním ve tvaru

$$l(t) = l_0 - \Delta l \alpha(t) e^{-\xi \frac{\pi}{2}} \left(\varphi^2(t - \tau_2) - e^{-\xi\pi} \varphi^2(t - \tau_2 - \tau_1) \right), \quad (31)$$

kde $\tau_1 = \frac{\pi}{2\Omega}$, $\tau_2 = \frac{\pi}{4\Omega}$ a $\alpha(t) = \varphi_0^{-2} e^{2\xi\Omega t}$.

Zpětnovazební řízení s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem

Ve snaze odstranit časově závislou exponenciální složku z (31) v důsledku obtížnosti implementace algoritmu je v [12] opět pomocí goniometrických funkcí vyjádřen exponenciálně časově nezávislý řídicí algoritmus

$$l(t) = l_0 - \Delta l \frac{2e^{-\xi \frac{\pi}{2}} \varphi(t) \varphi(t - \tau_1)}{\varphi^2(t) + e^{-\xi\pi} \varphi^2(t - \tau_1)}, \quad (32)$$

kde $\tau_1 = \frac{\pi}{2\Omega}$.

Obdobně je odvozen algoritmus pro případ s dvojitým dopravním zpožděním

$$l(t) = l_0 - \Delta l \frac{\varphi^2(t - \tau_2) - e^{-\xi\pi} \varphi^2(t - \tau_2 - \tau_1)}{\varphi^2(t - \tau_2) + e^{-\xi\pi} \varphi^2(t - \tau_2 - \tau_1)}, \quad (33)$$

kde $\tau_1 = \frac{\pi}{2\Omega}$, $\tau_2 = \frac{\pi}{4\Omega}$.

Zpětnovazební řízení bez dopravního zpoždění

Pro úplnost je v [12] odvozeno řízení bez dopravního zpoždění ve tvaru

$$l(t) = l_0 + \Delta l \frac{2\varphi(t) \left(\xi\varphi(t) + \frac{1}{\Omega} \dot{\varphi}(t) \right)}{\varphi^2(t) + \left(\xi\varphi(t) + \frac{1}{\Omega} \dot{\varphi}(t) \right)^2}. \quad (34)$$

Tento algoritmus je srovnatelný s algoritmy s dopravním zpožděním. Jistou nevýhodou je zde potřeba snímače úhlové rychlosti.

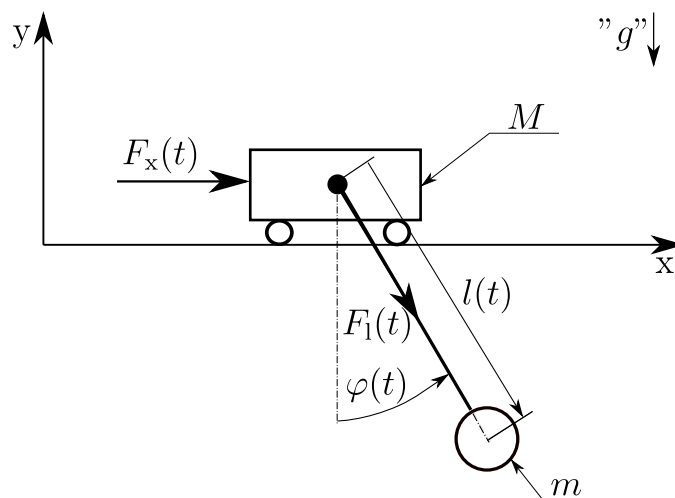
2 Praktická část

Tato kapitola je věnována zformulování fyzikálního modelu laboratorního zařízení a linearizaci tohoto modelu, vytvoření simulačního modelu jak nelineárního, tak linearizovaného a jejich následné verifikaci. Dále obsahuje návrh řízení dané laboratorní úlohy a následnou implementaci na obou simulačních modelech.

2.1 Fyzikální model laboratorního zařízení

2.1.1 Schéma laboratorního zařízení

Pro ověření funkčnosti algoritmů tlumení kmitání změnou délky kyvadla je navrženo laboratorní zařízení dle schématu.



Obrázek 3: Schéma laboratorní úlohy

Laboratorní úloha se skládá z vozíku o hmotnosti M , na který působí síla $F_x(t)$ ve směru osy x a dále ze závaží o hmotnosti m zavěšeném na závěsu proměnné délky $l(t)$. Síla způsobující změnu délky závěsu je označena $F_1(t)$. Úhel, který svírá závěs s vertikální osou, je označen $\varphi(t)$.

2.1.2 Nelineární matematický model

Chceme-li nějaký objekt řídit, je nutné vytvořit matematický model pro odhadnutí chování tohoto objektu pro různé strategie řízení [4].

Pro vytvoření matematického modelu jsou uvažovány následující předpoklady: hmotnost závěsu je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti vozíku M a hmotnosti závaží m , závěs je absolutně tuhý, pohyb kyvadla a vozíku je uvažován jako dvojrozměrný, vliv poruchových veličin je zanedbán.

Pro vytvoření matematického popisu systému, tedy pro sestavení pohybových rovnic, je využito Lagrangeovy rovnice druhého druhu rozšířené o Rayleighovy disipativní funkce. Výhodou této metody je skutečnost, že jedinou dynamickou veličinou, kterou je nutno vyjádřit, je energie soustavy, což bývá zpravidla jednoduché [5].

Langrangeova rovnice druhého druhu rozšířena o Rayleigho disipativní funkci je podle [8] dána jako

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{\text{nc}}, \quad (35)$$

pro $j = 1, 2, \dots, n$, q_j jsou nezávislé zobecněné souřadnice, Q_j^{nc} je práce vnějších nekonzervativních zobecněných sil, L je Langrangeova funkce, která je dána rozdílem kinetické a potenciální energie

$$L = E_k - E_p, \quad (36)$$

a Rayleigho disipativní funkce D , která je pro lineární tlumení definována jako

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}^2(t), \quad (37)$$

kde c je koeficient lineárního tlumení a $x(t)$ je výchylka v čase t .

Z důvodu vyjádření kinetické a potenciální energie, musí být nejdříve zvolen vhodný souřadný systém. V tomto případě je vybrán pravoúhlý kartézský souřadný systém. Poloha vozíku v čase je popsána souřadnicí $x(t)$, horizontální poloha kyvadla souřadnicí $x_p(t)$ a vertikální poloha $y_p(t)$. Výchylka kyvadla je dána souřadnicí $\varphi(t)$ a délka závěsu $l(t)$, kde kladný směr je zvolen dle obrázku 3.

Soustava tvořena vozíkem a kyvadlem s proměnnou délkou závěsu má tři stupně volnosti. Za vektor nezávislých zobecněných souřadnic je zvolen $\mathbf{q}(t) = [x(t), \varphi(t), l(t)]^T$ a za vektor vnějších nekonzervativních zobecněných sil $\mathbf{F}(t) = [F_x(t), 0, F_l(t)]^T$. Poloha vozíku je popsána $(x_c, y_c)^T = (x, 0)^T$ a poloha závaží

$$(x_p, y_p)^T = (x + l(t) \sin(\varphi(t)), -l(t) \cos(\varphi(t)))^T. \quad (38)$$

Kinetickou energii soustavy lze určit pomocí Königovy věty

$$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} I_s \dot{\varphi}^2, \quad (39)$$

kde v_s je rychlost středu hmotnosti tělesa a I_s moment setrvačnosti tělesa vzhledem ke středu hmotnosti. Pro matematické kyvadlo je uvažováno $I_s = ml^2$.

Kinetickou energii soustavy lze poté psát jako

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} m v_s^2(t) + \frac{1}{2} m l^2(t) \dot{\varphi}^2(t), \quad (40)$$

$$\text{kde } v_s^2(t) = \dot{x}_p^2(t) + \dot{y}_p^2(t). \quad (41)$$

Dosazením (38) do (41) a poté do (40) a následnou úpravou dostávám kinetickou energii soustavy popsanou pouze nezávislými zobecněnými souřadnicemi

$$E_k = \frac{1}{2} \left((M + m) \dot{x}^2(t) + m l^2(t) \dot{\varphi}^2(t) + m \dot{l}^2(t) + m l^2(t) \dot{\varphi}^2(t) \right) + m \dot{x}(t) \left(\dot{l}(t) \sin(\varphi(t)) + l^2(t) \dot{\varphi}^2(t) \cos(\varphi(t)) \right). \quad (42)$$

Potenciální energie soustavy se skládá pouze z potenciální energie kyvadla, kterou lze vyjádřit jako

$$E_p = -mgl(t) \cos(\varphi(t)). \quad (43)$$

Dosazením rovnic (43) a (42) do rovnice (36) získávám Lagrangeovu funkci ve tvaru

$$L = \frac{1}{2} \left((M + m)\dot{x}^2(t) + ml^2(t)\dot{\varphi}^2(t) + m\dot{l}^2(t) + ml^2(t)\dot{\varphi}^2(t) \right) - mgl(t) \cos(\varphi(t)) + m\dot{x}(t) \left(\dot{l}(t) \sin(\varphi(t)) + l^2(t)\dot{\varphi}^2(t) \cos(\varphi(t)) \right). \quad (44)$$

Vyjádřením Rayleighovy disipativní funkce pro vnější síly $F_x(t)$ a $F_1(t)$ podle (37) a zderivováním Lagrangeovy funkce L podle (35) dostávám vlastní pohybové rovnice ve tvaru

$$(M + m)\ddot{x}(t) + m \sin(\varphi(t))\ddot{l}(t) + 2m \cos(\varphi(t))\dot{l}(t) + ml(t) \cos(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) - ml(t) \sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)^2 + c_x\dot{x}(t) = F_x(t) \quad (45)$$

$$ml^2(t)\ddot{\varphi}(t) + 2ml(t)\dot{l}(t)\dot{\varphi}(t) + ml(t) \cos(\varphi(t))\ddot{x}(t) + mgl(t) \sin(\varphi(t)) = 0 \quad (46)$$

$$m\ddot{l}(t)m\ddot{x}(t) \sin(\varphi(t)) - ml(t)\dot{\varphi} - mgl(t) \cos(\varphi(t)) + c_l\dot{l}(t) = F_1(t). \quad (47)$$

Soustava rovnic (45–47) tvoří tzv. nelineární model vstup-výstup, někdy také označovaný jako model vnější.

Tuto soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu lze přepsat do tvaru, který je výhodnější pro následující implementaci. Obecný dynamický systém, který je řízen a je možno ho popsat diferenciální rovnicí druhého řádu, má tvar

$$\ddot{q} = f(\dot{q}, q, u, t). \quad (48)$$

Po úpravě soustavy rovnic (45–47) do tvaru (48) dostávám

$$\ddot{x}(t) = M^{-1} \left(F_x(t) - F_1(t) \sin(\varphi(t)) + c_l\dot{l}(t) \sin(\varphi(t)) - c_x\dot{x}(t) \right) \quad (49)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \left(ml^2(t) \right)^{-1} \left(-2ml(t)\dot{l}(t)\dot{\varphi}(t) - mgl(t) \sin(\varphi(t)) - ml(t) \cos(\varphi(t)) \left((M)^{-1} \left(F_x(t) F_1(t) \sin(\varphi(t)) + c_l\dot{l}(t) \sin(\varphi(t)) - c_x\dot{x}(t) \right) \right) \right) \quad (50)$$

$$\ddot{l}(t) = m^{-1} \left(ml(t)\dot{\varphi}(t)^2 + mg \cos(\varphi(t)) - c_l\dot{l}(t) + F_1(t) - m \sin(\varphi(t)) \left((M)^{-1} \left(F_x(t) - F_1(t) \sin(\varphi(t)) + c_l\dot{l}(t) \sin(\varphi(t)) - c_x\dot{x}(t) \right) \right) \right). \quad (51)$$

2.2 Nelineární model vnitřní

Nelineární model vnitřní neboli stavový popisuje daný systém zevnitř. Zahrnuje tedy nejen vstupní veličiny $\mathbf{u}(t)$ a výstupní veličiny $\mathbf{y}(t)$, ale i vnitřní neboli stavové veličiny $\mathbf{x}(t)$. Obecně jsou tyto veličiny vektory. Nelineární stavový model, který nezávisí na posunu v čase, tedy je v čase neproměnný, má podle [10] tvar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (52a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (52b)$$

kde \mathbf{f} je stavová funkce, \mathbf{h} je funkce vstupů.

Rovnice (52a) je označována jako stavová rovnice, která popisuje, jak se stavy systému vyvíjí v čase. Výstupní rovnice (52b) popisuje, jak se vyvíjí výstupy modelu v čase, kde $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ je n -rozměrný stavový vektor, kde n je počet stavových proměnných, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$ je m -rozměrný vektor vstupů, kde m je počet vstupů a $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)]^T$ je p -rozměrný vektor výstupů, kde p je počet výstupů.

Stavový popis systému umožňuje popsat dynamický systém n -tého řádu pomocí soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu jako n -rozměrný vektor [3].

Laboratorní úloha má více vstupů a výstupů, tedy tzv. MIMO (multi-input/multi-output) systém. Proto veličiny vystupující ve stavovém modelu jsou vektory daných rozměrů. K popisu soustavy nelineárním stavovým modelem je zvolen stavový vektor jako

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \\ l(t) \\ \dot{l}(t) \end{bmatrix} \quad (53)$$

a vektor výstupů a vstupů je dán

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \\ l(t) \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_1(t) \end{bmatrix} \quad (55)$$

Dále je zavedena následující volba stavových veličin

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) = y_1(t) & x_2(t) &= \dot{x}(t) = \dot{y}_1(t) & x_3(t) &= \varphi(t) = y_2(t) \\ x_4(t) &= \dot{\varphi}(t) = \dot{y}_2(t) & x_5(t) &= l(t) = \dot{y}_3(t) & x_6(t) &= \dot{l}(t) = \dot{y}_3(t) \\ u_1(t) &= F_x(t) & u_2(t) &= F_1(t). \end{aligned} \quad (56)$$

Tato volba stavových veličin vede na stavový nelineární model ve tvaru

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (57a)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) = M^{-1} \left(u_1(t) - u_2(t) \sin(x_3(t)) + c_1 x_6(t) \sin(x_3(t)) - c_x x_2(t) \right) \quad (57b)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t) \quad (57c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) = & \frac{-2x_4(t)x_6(t)}{x_5(t)} - \frac{\cos(x_3(t))}{x_5(t)M} \left(u_1(t) - u_2(t) \sin(x_3(t)) + \right. \\ & \left. + c_1 x_6(t) \sin(x_3(t)) - c_x x_2(t) \right) - \frac{g}{x_5(t)} \sin(x_3(t)) \end{aligned} \quad (57d)$$

$$\dot{x}_5(t) = x_6(t) \quad (57e)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6(t) = & -\frac{\sin(x_3(t))}{M} \left(u_1(t) - u_2(t) \sin(x_3(t)) + c_1 x_6(t) \sin(x_3(t)) - \right. \\ & \left. - c_x x_2(t) \right) + x_5(t)x_4^2(t) + g \cos(x_3(t)) - \frac{c_1 x_6(t)}{m} + \frac{u_2(t)}{m} \end{aligned} \quad (57f)$$

$$y_1(t) = x_1(t) \quad (57g)$$

$$y_2(t) = x_3(t) \quad (57h)$$

$$y_3(t) = x_5(t). \quad (57i)$$

Stavový nelineární model laboratorního zařízení je možné v maticovém zápisu zapsat jako

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \\ \dot{x}_6(t) \end{bmatrix} = \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ f_2(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ f_3(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ f_4(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ f_5(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ f_6(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \end{bmatrix} \quad (58a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{h} \left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} h_1(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ h_2(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ h_3(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ h_4(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ h_5(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \\ h_6(x_1(t), \dots, x_6(t), u_1(t), u_2(t)) \end{bmatrix}. \quad (58b)$$

2.2.1 Linearizace stavového modelu v ekvilibriu

Stavový model popisující chování soustavy vozík-kyvadlo s proměnnou délkou závěsu je silně nelineární. Tyto modely jsou obtížně použitelné pro přímý návrh řízení. Snahou je tedy tyto systémy linearizovat.

Při řízení systémů, u kterých se pohybujeme se vstupními i výstupními veličinami regulované soustavy v okolí ustáleného stavu, tzv. ekvilibria (rovnovážného bodu) \mathbf{P}_0 , používáme tzv. linearizaci v ekvilibriu. Linearizace je nahrazení nelineárního modelu v okolí pracovního bodu jeho lineární odchylkovou aproximací. Tedy v okolí tohoto bodu rozvíjíme nelineární funkce v Taylorovy řady, ve kterých zanedbáváme členy vyšších řádů. Pro malé odchylky od ekvilibria dostáváme lineární aproximaci nelineárního modelu [10].

Nelineární model v okolí ekvilibria je aproximován lineárním modelem, který má pro časově neměnný systém tvar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (59a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (59b)$$

kde matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} a \mathbf{D} jsou Jacobiho matice, což jsou matice prvních derivací. Pro lineární aproximaci v ekvilibriu jsou po dosazení pracovního bodu $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)$ konstantami. Tyto matice jsou dány jako

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{P}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{P}_0} \quad (60)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{P}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\mathbf{P}_0} \quad (61)$$

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{P}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \frac{\partial g_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{P}_0} \quad (62)$$

$$\mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{P}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \frac{\partial g_p}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\mathbf{P}_0}, \quad (63)$$

kde \mathbf{f} je stavová funkce, \mathbf{g} je funkce vstupů.

Pracovní bod $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p)$ je zvolen jako $\mathbf{x}_p = [0, 0, 0, l^*, 0, 0]^T$ a $\mathbf{u}_p = [0, -mg]^T$. Po zderivování (57a-57f) podle (60-63) a po vyčíslení Jacobiho matic v pracovním bodě lze tyto matice psát jako

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c_x}{M} & \frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_x}{lM} & \frac{mg}{lM} - \frac{g}{l^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-c_l}{m} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{lM} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Lineární stavový popis systému vozík-kyvadlo s proměnnou délkou závěsu má následující tvar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c_x}{M} & \frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_x}{lM} & \frac{mg}{lM} - \frac{g}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-c_l}{m} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{lM} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (68a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (68b)$$

2.3 Simulační model v MATLAB & Simulink

2.3.1 Nelineární simulační model

Nelineární matematický model tvořený soustavou diferenciálních rovnic (49–51) je převeden na simulační model tak, jak je ukázáno na obrázku 4.

V tomto případě je pro přepsání soustavy diferenciálních rovnic použit MATLAB Function blok, ve kterém je využito indexového zápisu funkce. Vektor vstupů $\mathbf{U} = [F_x, F_1]^T$ se skládá z napínací síly $F_1 = -mg$ a síly F_x , kde je použit jako testovací vstupní signál tzv. Diracův impuls (jednotkový impuls) $\delta(t)$, pro který platí

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t \neq 0 \end{cases}. \quad (69)$$

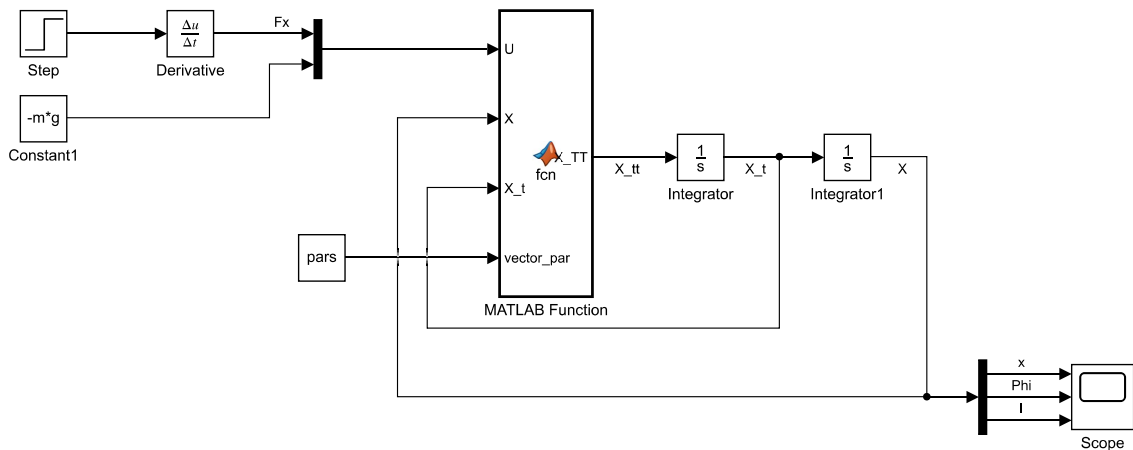
K vytvoření tohoto signálu je využito vztahu mezi jednotkovým skokem $\mathbf{1}(t)$ a Diracovým impulsem $\delta(t)$

$$\delta(t) = \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt}, \quad (70)$$

kde jednotkový skok $\mathbf{1}(t)$ je definován jako

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}. \quad (71)$$

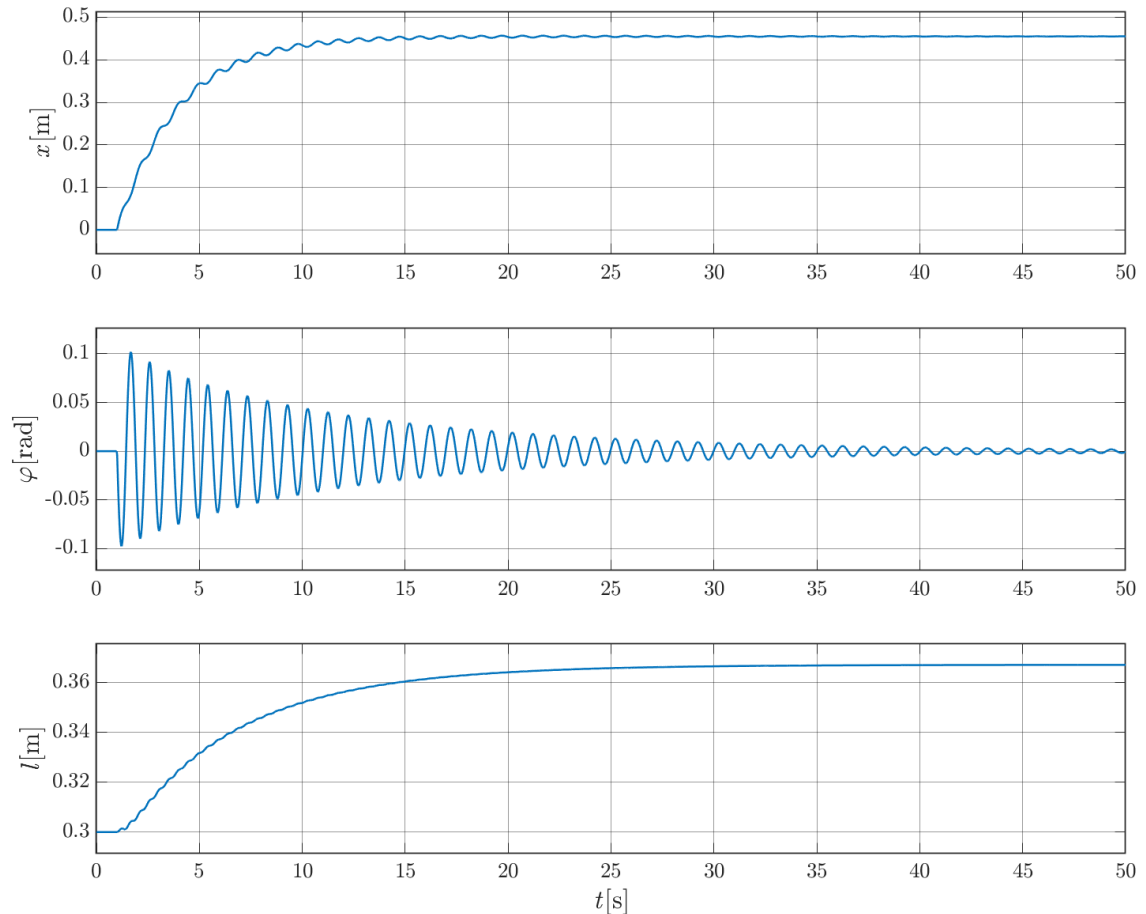
V následujících simulacích je uvažováno gravitační zrychlení $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$. Parametry systému pro simulaci jsou následující: hmotnost vozíku $M = 0.2 \text{ kg}$, hmotnost závaží $m = 0.1 \text{ kg}$, koeficient lineárního tlumení $c_x = c_1 = 0.1 \text{ Nsm}^{-1}$, délka závěsu $l = 0.3 \text{ m}$ a počáteční podmínky jsou zvoleny $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0, 0, 0.3, 0]^T$.



Obrázek 4: Nelineární simulační model

Impulsní funkce nelineárního modelu

Zavedeme-li Diracův impuls na vstup dynamického systému, pak vznikne na výstupu tohoto systému odezva, tzv. impulsní funkce, též váhová funkce [4]. Impulsní funkce systému vozík-kyvadlo s proměnnou délkou závěsu má následující tvar.



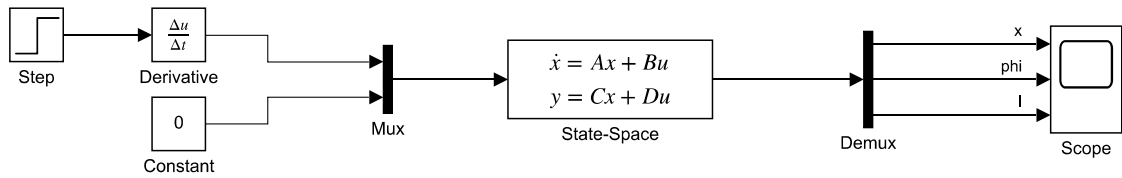
Obrázek 5: Impulsní funkce nelineárního modelu

Z těchto impulsních funkcí lze ověřit správnost matematického, resp. simulačního modelu.

Z grafu výchylky vozíku $x = x(t)$ je možné vidět, že dochází k vychýlení, které je způsobeno impulsem působícím na vozík. Z grafu je také patrný lehký pohyb vozíku zpět způsobený pohybem závaží kyvadla. Po určité době dochází vlivem tření k zastavení vozíku. Na druhém grafu, tj. zobrazení výchylky závěsu v čase $\varphi = \varphi(t)$, lze pozorovat kmitavý pohyb kyvadla s proměnnou délkou závěsu, které se chová jako tlumený harmonický oscilátor. Na posledním grafu závislosti $l = l(t)$ lze vidět prodlužování závěsu ze zvolené počáteční hodnoty délky závěsu. Délka závěsu se stabilizuje opět vlivem tření na ustálené hodnotě. Simulační model se tedy chová tak, jak je očekáváno.

2.3.2 Linearizovaný simulační model

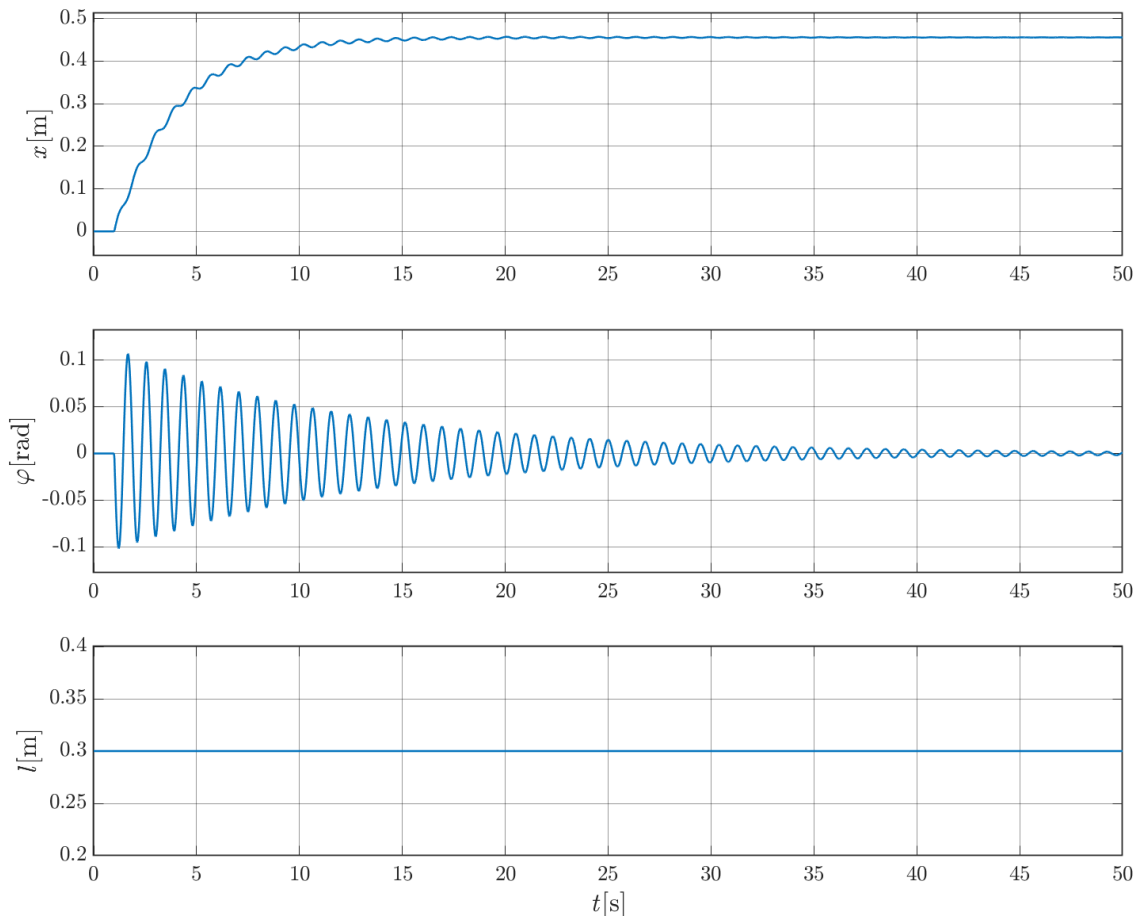
K vytvoření linearizovaného simulačního modelu v prostředí MATLAB & Simulink je použit State space blok, ve kterém jsou definovány matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} a \mathbf{D} vytvořené v kapitole 2.2.1. Jako testovací signál je opět použil Diracův impuls.



Obrázek 6: Linearizovaný simulační model

Impulsní funkce linearizovaného modelu

Odezva linearizovaného modelu na Diracův impuls je zobrazena na obrázku 7.



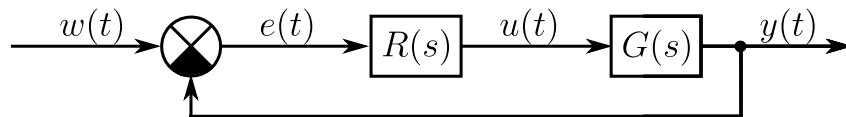
Obrázek 7: Impulsní funkce linearizovaného modelu

Porovnáním impulsní funkce nelineárního a linearizovaného modelu lze vidět rozdíl v grafu závislosti délky závěsu l na čase. Tento rozdíl je způsoben linearizací nelineárního modelu v okolí pracovního bodu, který byl zvolen právě $l^* = 0.3$ m.

2.4 Návrh řízení laboratorního zařízení

2.4.1 Regulace délky závěsu a polohy vozíku

Regulace je proces, jehož cílem je udržovat danou fyzikální veličinu na požadované hodnotě, popř. v požadovaných mezích využitím zpětné vazby. Hodnotu regulované veličiny $y(t)$ porovnává regulátor, jehož přenos je označen $R(s)$ s žádanou hodnotou $w(t)$, přičemž podle jejich okamžitého rozdílu, tzv. regulační odchylky $e(t) = w(t) - y(t)$ nastavuje regulátor akční veličinu $u(t)$ tak, aby se regulační odchylka odstranila. Princip zpětnovazebního řízení je schématicky ukázán na obrázku 8, kde přenos soustavy je označen jako $G(s)$.



Obrázek 8: Schéma zpětnovazebního řízení

PD-regulátor

Pro účel řízení polohy vozíku a délky kyvadla jsou v této práci navrženy dva PD-regulátory.

Ideální proporcionálně-derivační regulátor je tvořen dvěma složkami, a to proporcionální (P) a derivační (D). Proporcionální složka regulátoru nastavuje hodnotu akční veličiny $u(t)$ proporcionálně neboli úměrně k regulační odchylce $e(t)$. Derivační složka přináší prediktivní charakter, neboť dle $\dot{e}(t)$ lze předpovídat budoucí vývoj regulační odchylky. V kombinovaném regulátoru D-složka zlepšuje dynamiku a stabilitu systému, ale také zesiluje vysoké frekvence zpětnovazebního systému, tedy především nežádoucí šum. Ve většině aplikací je nutné derivační složku upravit pomocí filtru. Přenos ideálního PD-regulátoru je dán

$$R(s) = r_p + r_d s, \quad (72)$$

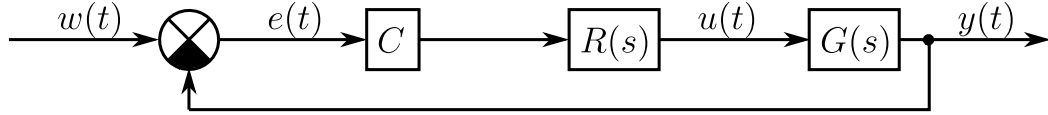
kde r_p je proporcionální konstanta neboli zesílení a r_d je derivační konstanta. Po přidání filtru prvního řádu můžeme rovnici (70) přepsat jako

$$R(s) = r_p + \frac{r_d N}{1 + \frac{N}{s}}, \quad (73)$$

kde N je filtrační koeficient, který se obvykle volí $N = 5$ až 20 . Při hodnotách $N \geq 10$ se vlastnosti regulátoru blíží vlastnostem ideálního regulátoru a v tomto případě se při seřizování filtr neuvazuje [4].

Návrh PD-regulátorů

Pro návrh PD-regulátorů je využita metoda Root Locus (RL) neboli geometrické místo kořenů. Tato metoda vykresluje polohu pólů uzavřené smyčky v závislosti na jednom reálném parametru. Obvykle je tímto parametrem zesílení zpětné vazby C . Tato metoda také napomáhá představně, jak se póly pohybují při změně tohoto parametru. [11] Schéma, se kterým tato metoda pracuje, je zobrazeno na následujícím obrázku.



Obrázek 9: Schéma uzavřené smyčky metody RL

Přenos PD-regulátoru včetně hledaného parametru C metodou Root Locus, je určen

$$R_C(s) = C(s - z_1), \quad (74)$$

kde C je hledaný parametr a z_1 je nula přenosu.

Při návrhu PD-regulátorů je uvažované malé vzájemné ovlivnění vozíku a závěsu se závažím, jehož vliv na seřízení regulátorů je v této práci zanedbán. Malé vzájemné ovlivnění je dáno tím, že hmotnost vozíku je větší než hmotnost závaží $M > m$. V důsledku tohoto předpokladu je daný MIMO systém rozdělen na dva samostatné SISO systémy. Při návrhu regulátoru, který řídí délku závěsu, je uvažován nehybný vozík, který je upevněn k lineárnímu vedení.

Pro vytvoření těchto dvou SISO systémů a určení jejich přenosů je použito prostředí MATLAB, které vytvořilo dané přenosy ze stavového popisu systému popsaného v kapitole 2.2.1.

Přenos SISO systému, který řídí délku závěsu kyvadla, je dán

$$G_1(s) = \frac{\mathcal{L}\{l(t)\}}{\mathcal{L}\{F_1(t)\}} = \frac{10}{s^2 + 2s}. \quad (75)$$

Přenos druhého systému je potom

$$G_2(s) = \frac{\mathcal{L}\{x(t)\}}{\mathcal{L}\{F_x(t)\}} = \frac{5s^2 + 163.2}{s^4 + 0.5s^3 + 49s^2 + 16.35s}. \quad (76)$$

Vhodnost volby PD-regulátorů může být vidět z přenosů uzavřeného regulačního obvodu (URO) jednotlivých SISO systémů. Přenos uzavřeného regulačního obvodu, který řídí délku závěsu je dán

$$G_{F_1l}(s) = \frac{R(s)G_1(s)}{1 + R(s)G_1(s)} = \frac{10(r_p + r_d s)}{s^2 + 2s + 10(r_p + r_d s)}. \quad (77)$$

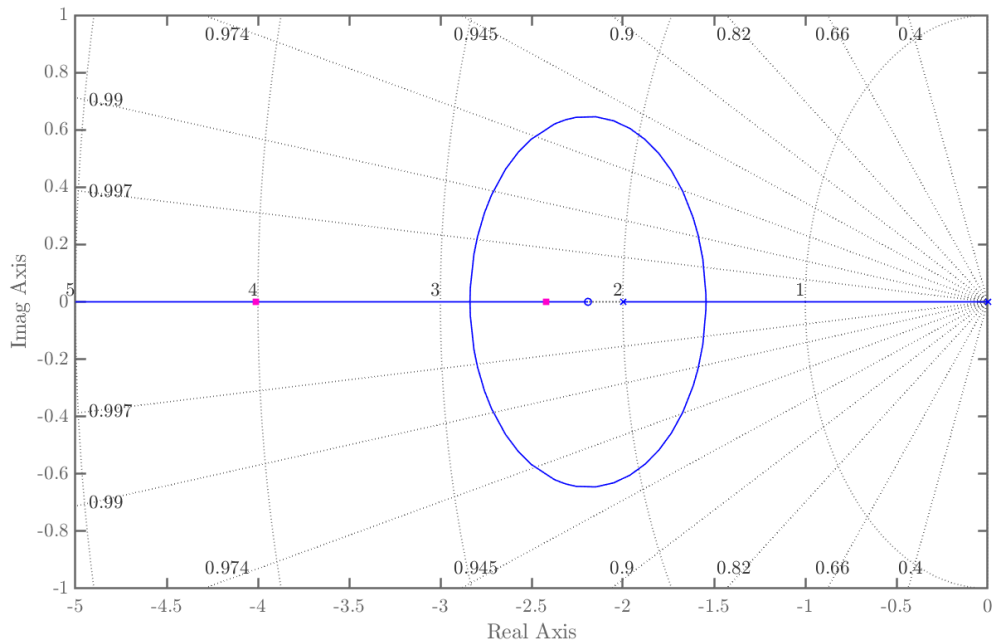
Statická citlivost je $G_{F_1l}(0) = 1$. Pro uvedený případ je tedy trvalá regulační odchylka e_s nulová.

Přenos URO, který řídí polohu vozíku je

$$G_{F_{xx}}(s) = \frac{R(s)G_2(s)}{1 + R(s)G_2(s)} = \frac{(r_p + r_d s)(5s^2 + 163.2)}{s^4 + 0.5s^3 + 49s^2 + 16.35s + (r_p + r_d s)(5s^2 + 163.2)}. \quad (78)$$

Statická citlivost přenosu $G_{F_{xx}}(0)$ je opět rovná jedné a trvalá regulační odchylka e_s je nulová.

Pro návrh regulátoru metodou RL je použit grafický nástroj v aplikaci Control System Toolbox v prostředí MATLAB. Výsledný přenos regulace délky závěsu je v grafické podobě zobrazen na následujícím obrázku.



Obrázek 10: Zobrazení pólů a nul metodou RL při regulaci délky l

Při takovémto rozmístění pólů a nul regulačního obvodu je přenos PD-regulátoru dán

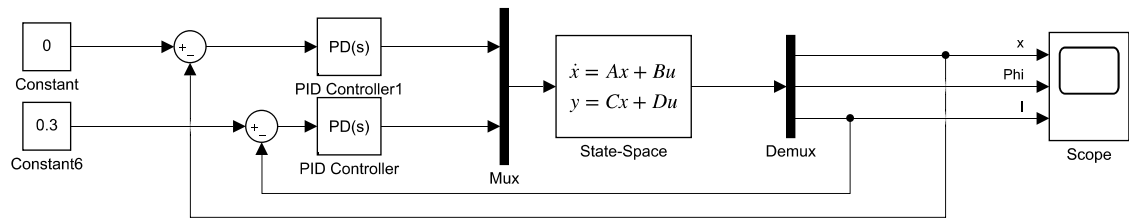
$$R_1(s) = 0.44(s + 2.2). \quad (79)$$

Druhý PD-regulátor je také seřízen pomocí grafického nástroje v prostředí MATLAB. Přenos regulátoru pro řízení polohy vozíku je poté

$$R_2(s) = 4(s + 2). \quad (80)$$

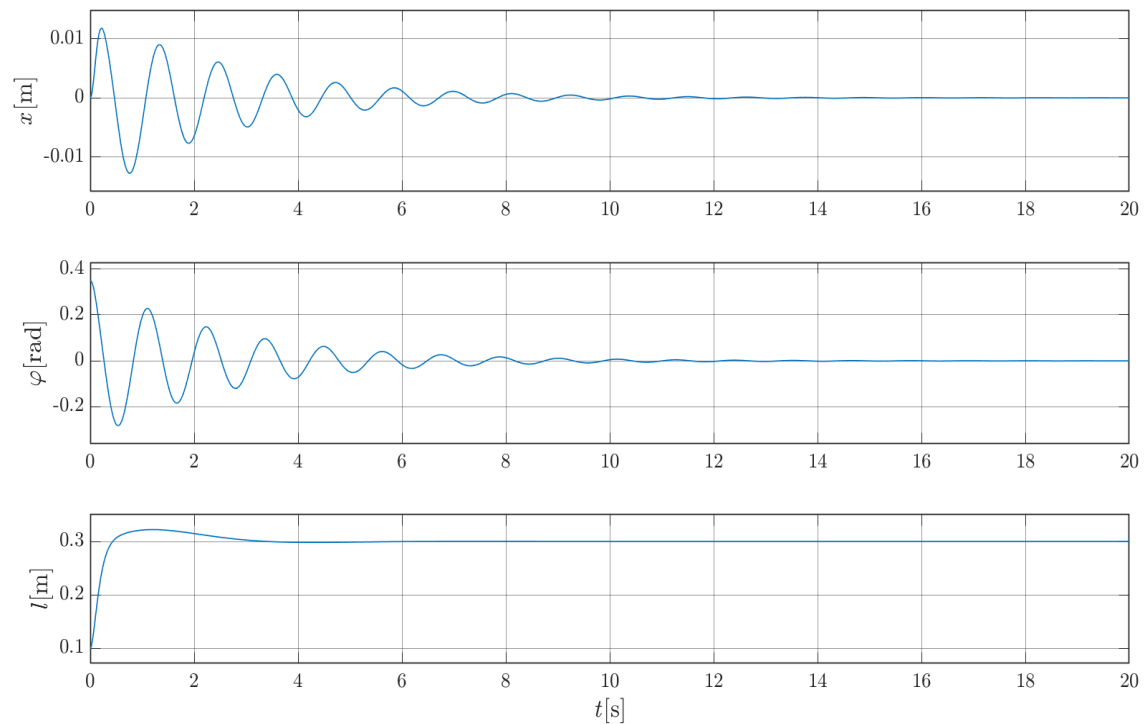
Implementace PD-regulátorů na linearizovaném modelu

Seřízené PD-regulátory jsou poté zpětnovazebně připojeny na linearizovaný model. Tento regulační obvod má v prostředí MATLAB & Simulink následující podobu.



Obrázek 11: Regulační obvod s regulovaným linearizovaným systémem

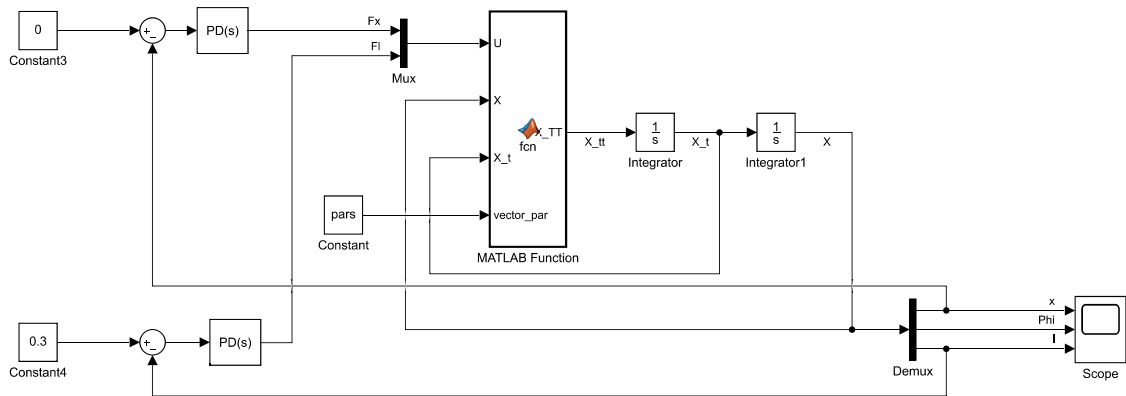
Takovýto systém se při počátečních podmínkách $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0.4, 0, 0.1, 0]^T$ chová následovně.



Obrázek 12: Odezva regulačního obvodu s regulovaným lin. systémem

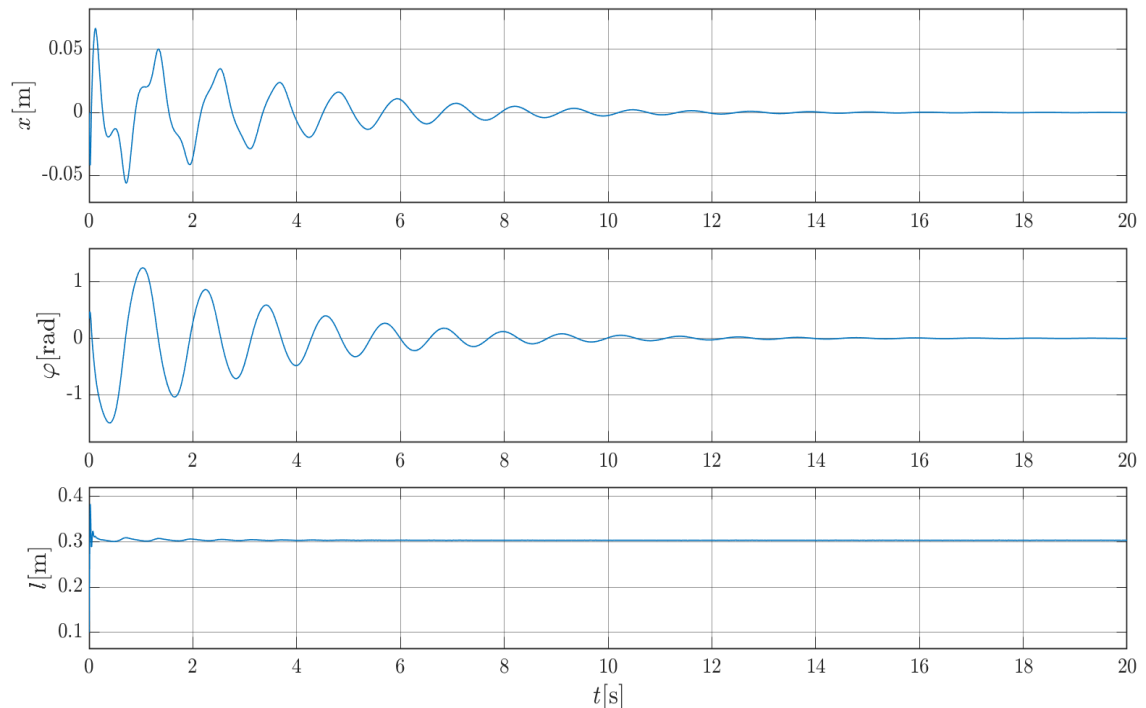
Implementace PD-regulátorů na nelineárním modelu

Z důvodu ověření algoritmů pro tlumení kmitání na nelineárním modelu jsou oba PD-regulátory navržené pro linearizovaný systém připojeny i na nelineární model. Při použití regulátoru délky závěsu, který byl seřízen pro linearizovaný model vznikne při připojení k nelineárnímu modelu trvalá regulační odchylka. Z tohoto důvodu je tento regulátor navržen v MATLAB & Simulink metodou „pokus omyl“. Parametry takto seřízeného regulátoru jsou následující: $r_p = 210$, $r_d = 16$ a $N = 80$. Regulační obvod s regulovaným nelineárním systémem má následnou podobu.



Obrázek 13: Regulační obvod s regulovaným nelineárním systémem

Odezva tohoto regulačního obvodu při stejných počátečních podmínkách, jaké byly použity u linearizovaného modelu, tedy $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0.4, 0, 0.1, 0]^T$ má následující tvar.



Obrázek 14: Odezva regulačního obvodu s regulovaným nelin. systémem

2.5 Implementace algoritmů pro řízení tlumení kmitání

Následující podkapitola je věnována aplikaci algoritmů pro řízení tlumení kmitání na daném laboratorním zařízení. Vybrané algoritmy z podkapitoly 1.6 jsou implementovány na linearizovaném i nelineárním modelu. Jednotlivé algoritmy jsou připojeny na daný model s následujícími hodnotami parametrů: počáteční výchylka závěsu $\varphi_0 = 0.35 \text{ rad} \approx 20^\circ$, střední hodnota délky závěsu $l_0 = 0.3 \text{ m}$ a tlumicí poměr $\xi = 0.1$. Tyto hodnoty jsou zvoleny tak, aby bylo možné použít aproximaci tlumicího poměru, který je dán rovnicí (25), tedy aby platilo $\frac{\Delta l}{l_0} \in [0, 0.25]$. Při takto zvolených hodnotách je poměr $\frac{\Delta l}{l_0} \approx 0.13$. U každého algoritmu je zobrazen průběh úhlové výchylky φ a průběh délky závěsu l . Průběhy s připojeným algoritmem jsou v grafech zobrazeny modrou čarou. Tyto průběhy jsou porovnány se soustavou, ke které není připojen algoritmus (červená čára).

2.5.1 Implementace algoritmů pro řízení tlumení kmitání na linearizovaném modelu

Vybrané algoritmy byly připojeny na linearizovaný model. Ani jeden z algoritmů, který je popsán dále, nejevil na daném laboratorním zařízení žádné tlumicí účinky.

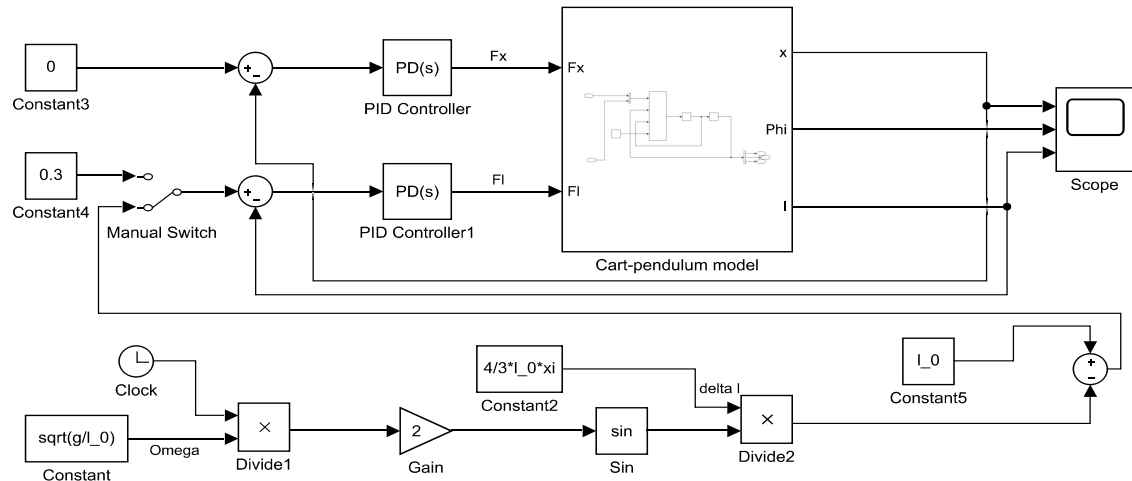
2.5.2 Implementace algoritmů pro řízení tlumení kmitání na nelineárním modelu

Přímovazební algoritmus

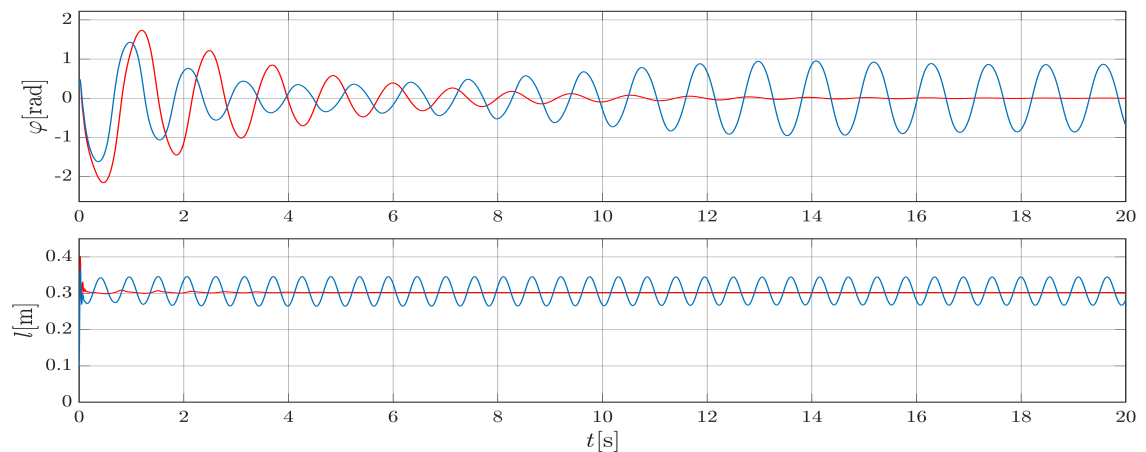
Přímovazební algoritmus popsany rovnicí (13), který byl navržen v článku [6], má následující tvar

$$l(t) = l_0 - \Delta l \sin(2\Omega t),$$

kde Δl je určeno z rovnice (25). Připojením tohoto algoritmu na nelineární model vznikne systém, který v prostředí MATLAB & Simulink vypadá následovně.



Obrázek 15: Simulační model přímovazebního řízení nelineárního modelu



Obrázek 16: Přímovazební řízení nelineárního modelu

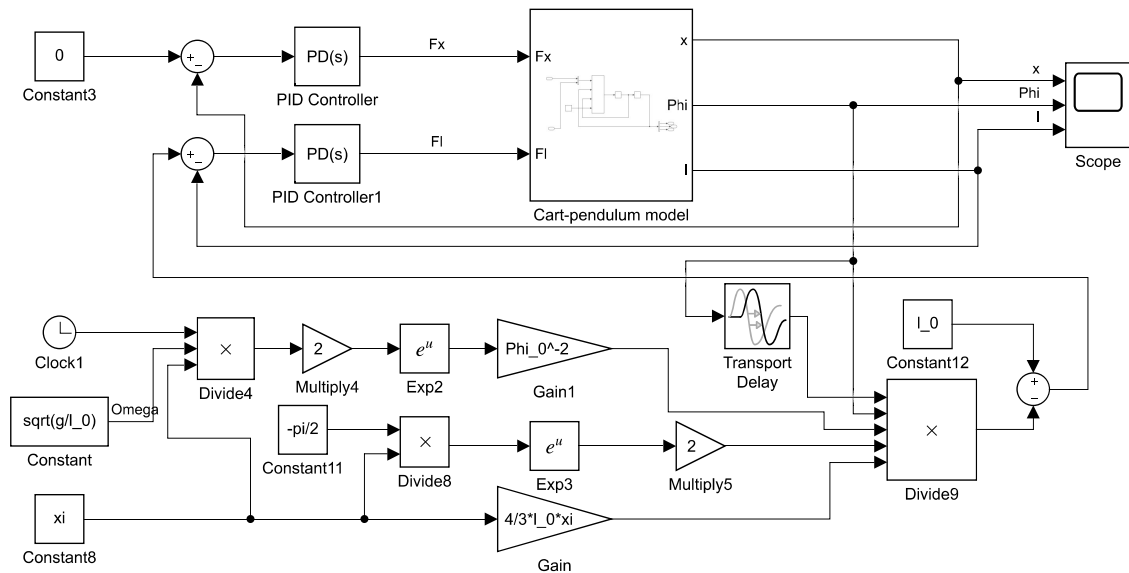
Na obrázku 16 lze vidět to, co bylo zmíněno autory v článku [12]. K tlumení kmitání dochází pouze během několika prvních period a poté dochází k zesilování kmitání, které je způsobeno rozdílem mezi skutečnou a přibližnou úhlovou frekvencí. Další nevýhodou tohoto algoritmu je nutnost omezení se pouze na malé hodnoty úhlové výchylky $\varphi_0 < 1$ a tlumicího poměru $\xi < 0.2$. Pro vyšší hodnoty nejsou pozorovány tlumicí účinky. Toto je dáno použitím přibližné hodnoty ekvivalentního tlumicího poměru.

Zpětnovazební algoritmus s dopravním zpožděním

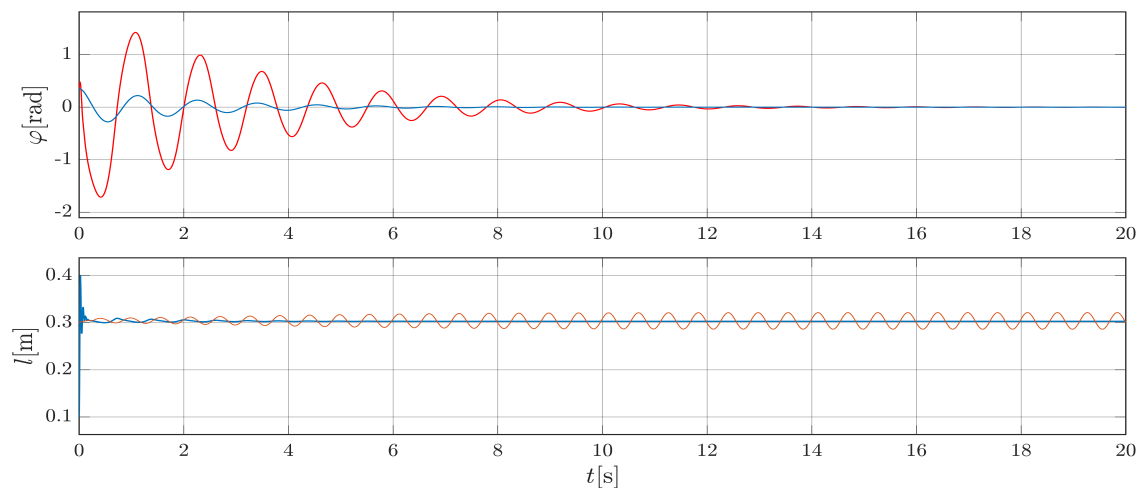
Zpětnovazební algoritmus s jednoduchým dopravním zpožděním odvozen v článku [12] a popsán rovnicí (30) má tvar

$$l(t) = l_0 - \Delta l 2e^{-\xi \frac{\pi}{2}} \varphi_0^{-2} e^{2\xi \Omega t} \varphi(t) \varphi\left(t - \frac{\pi}{2\Omega}\right).$$

Připojením tohoto algoritmu na nelineární model vznikne systém, který v prostředí MATLAB & Simulink vypadá následovně.



Obrázek 17: Simulační model zpětnovazební řízení s dopravním zpožděním nelineárního modelu



Obrázek 18: Zpětnovazební řízení s dopravním zpožděním nelineárního modelu

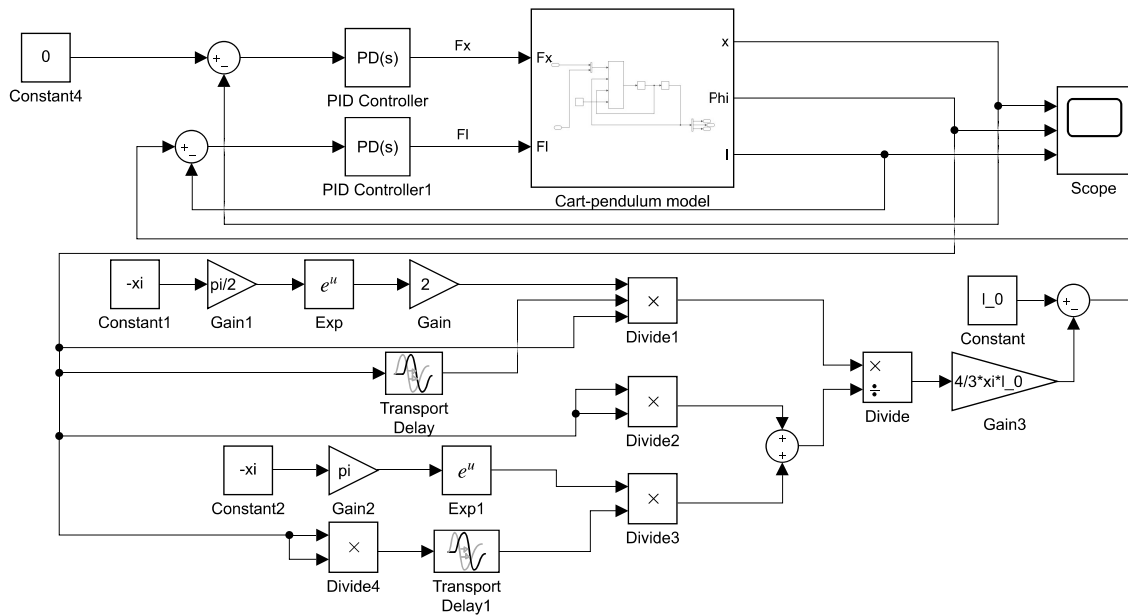
Porovnáním průběhu úhlové výchylky na obrázku 18 soustavy, na které byl aplikován zpětnovazební algoritmus s jednoduchým dopravním zpožděním (modrá čára) a soustavy bez algoritmu (červená čára), lze vidět dobrou schopnost tohoto algoritmu tlumit kmitání. Tento algoritmus je vhodný i pro vyšší hodnoty tlumicího poměru, kde lze pozorovat výraznější tlumicí efekt.

Zpětnovazební řízení s dopravním zpožděním a konst. přírůstkem

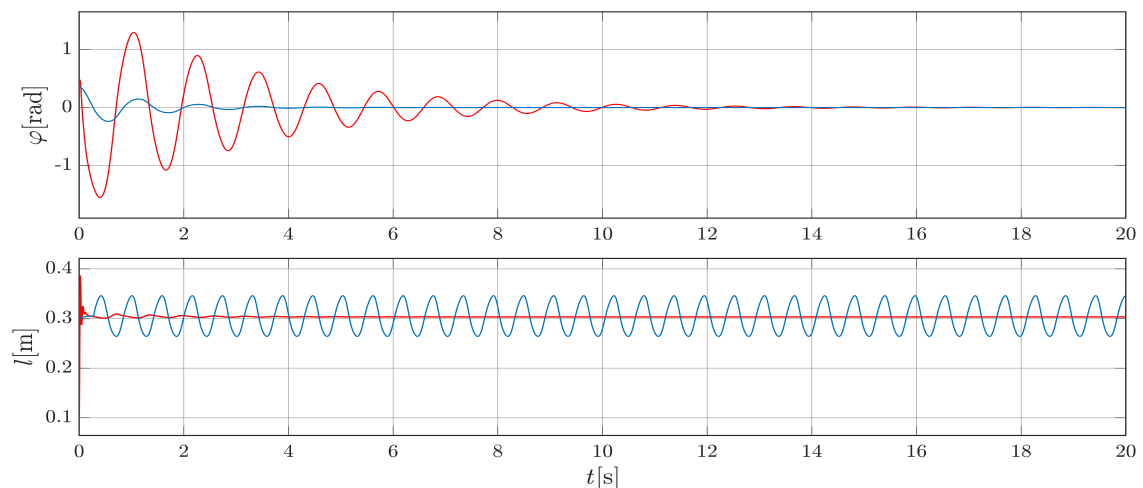
Další algoritmus, který byl odvozen v článku [12], je popsán rovnicí (32). Tato rovnice má tvar

$$l(t) = l_0 - \Delta l \frac{2e^{-\xi\frac{\pi}{2}}\varphi(t)\varphi(t - \frac{\pi}{2\Omega})}{\varphi^2(t) + e^{-\xi\pi}\varphi^2(t - \frac{\pi}{2\Omega})}$$

Připojením tohoto algoritmu na nelineární model vznikne systém, který v prostředí MATLAB & Simulink vypadá následovně.



Obrázek 19: Simulační model zpětnovazební řízení s dop. zpožděním a konst. přírůstkem nelineárního modelu



Obrázek 20: Zpětnovazební řízení s dop. zpožděním a konst. přírůstkem nelineárního modelu

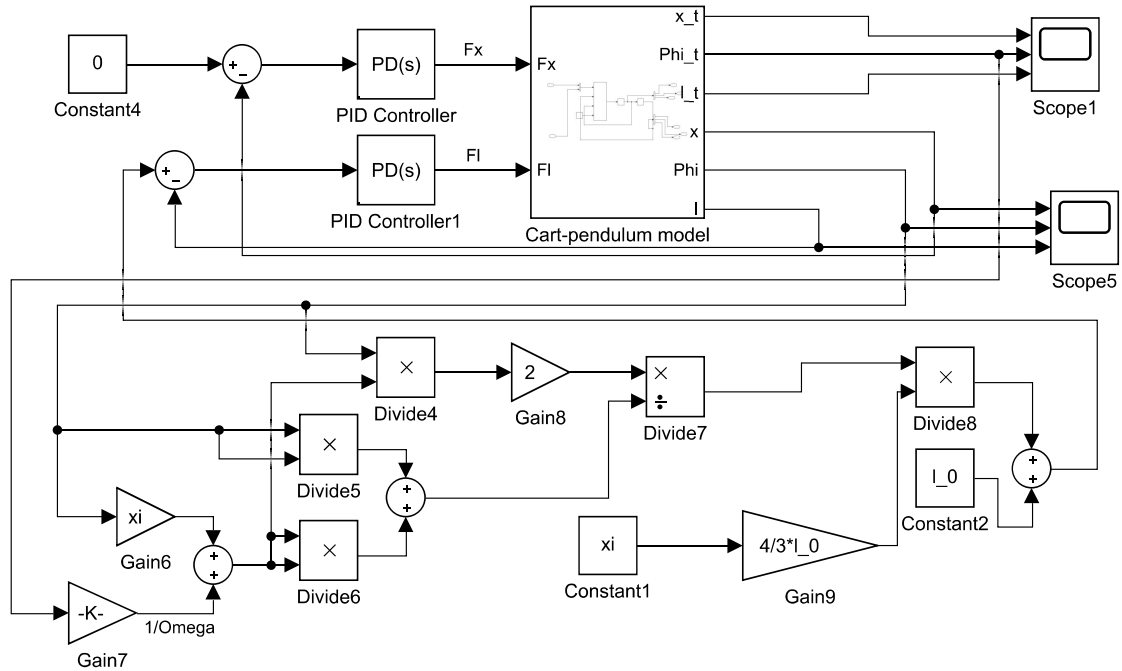
Tento algoritmus s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem vykazuje velmi dobrou schopnost tlumení kmitání. Na průběhu délky závěsu l lze vidět konstantní průběh amplitudy délky závěsu. Algoritmus vykazuje dobrý tlumicí efekt i pro vyšší hodnoty tlumicího poměru ξ .

Zpětnovazební řízení bez dopravního zpoždění

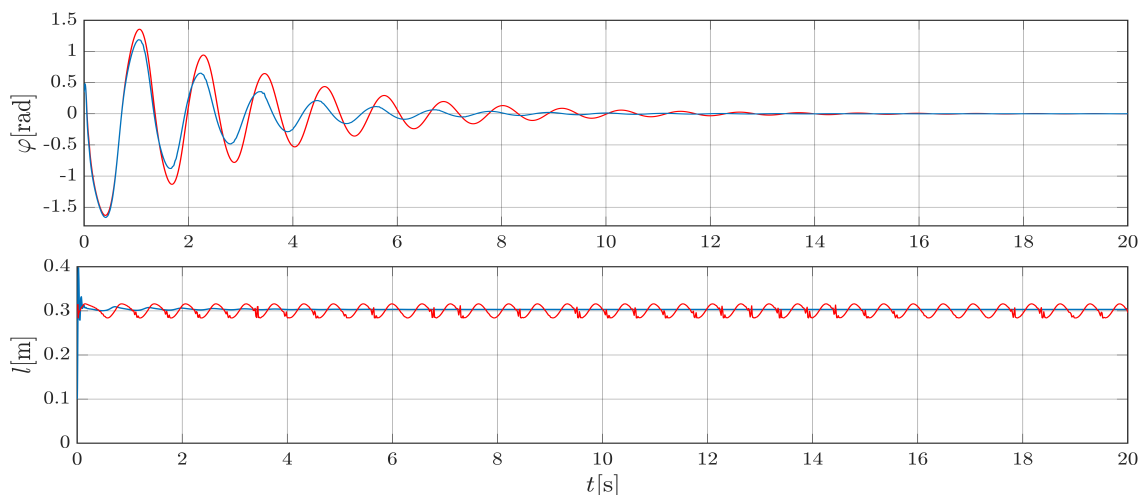
Jako poslední algoritmus, který byl vybrán, je zpětnovazební algoritmus bez dopravního zpoždění. Je dán rovnicí (34)

$$l(t) = l_0 + \Delta l \frac{2\varphi(t) \left(\xi\dot{\varphi}(t) + \frac{1}{\Omega}\ddot{\varphi}(t) \right)}{\varphi^2(t) + \left(\xi\dot{\varphi}(t) + \frac{1}{\Omega}\ddot{\varphi}(t) \right)^2}.$$

Připojením tohoto algoritmu na nelineární model vznikne systém, který v prostředí MATLAB & Simulink vypadá následovně.

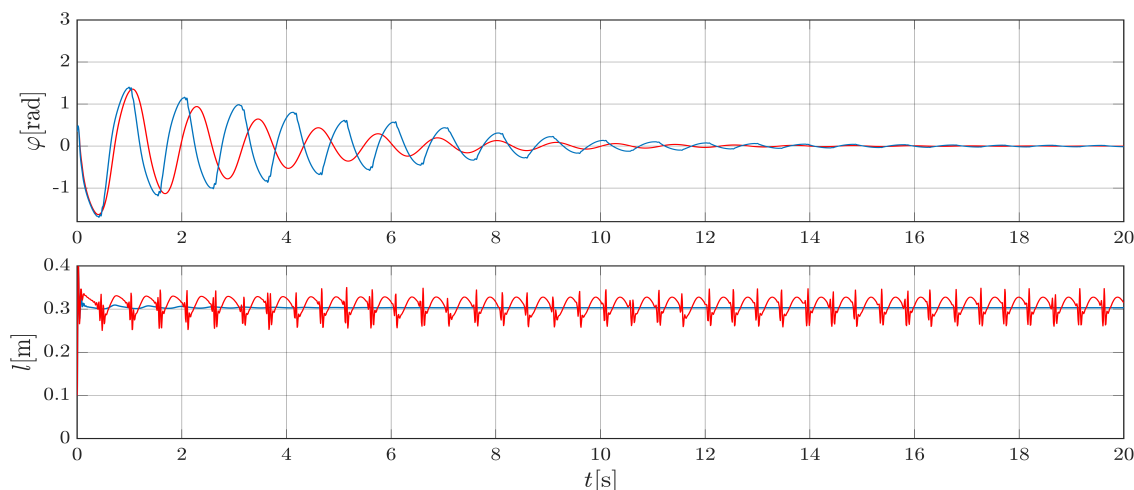


Obrázek 21: Simulační model zpětnovazebního řízení bez dopravního zpoždění



Obrázek 22: Zpětnovazebního řízení bez dopravního zpoždění pro $\xi = 0.04$

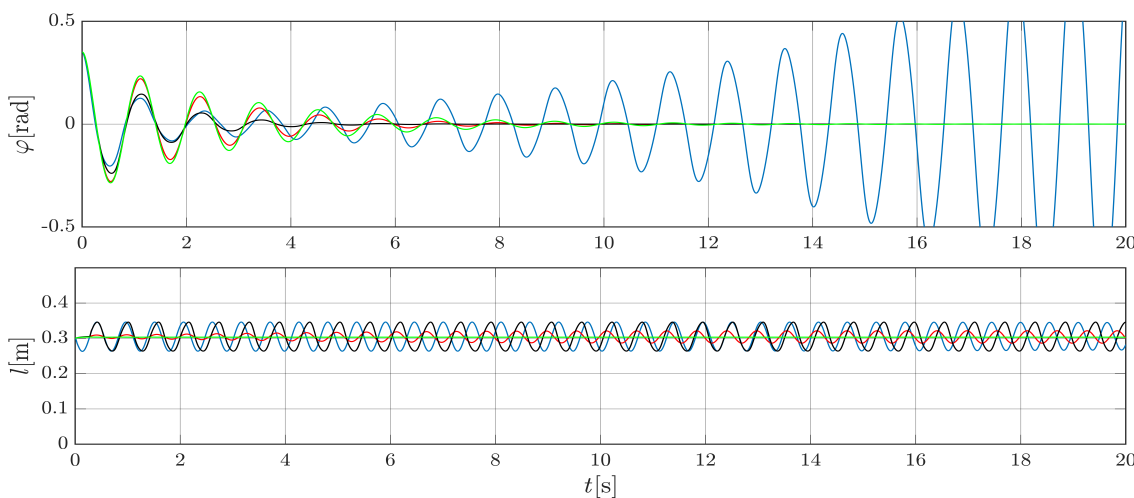
U tohoto algoritmu je provedena simulace pro hodnotu tlumicího poměru $\xi = 0.04$ a $\xi = 0.06$. Pro vyšší hodnoty tlumicího poměru $\xi > 0.4$ dochází ke ztrátě periodicity signálu l a nastává posílení kmitání závěsu.



Obrázek 23: Zpětnovazební řízení bez dopravního zpoždění pro $\xi = 0.06$

Porovnání algoritmů

Následující graf zobrazuje porovnání jednotlivých algoritmů pro hodnotu tlumicího poměru $\xi = 0.1$. Jsou zde porovnávány následující algoritmy: přímovazební algoritmus (modrá čára), zpětnovazební algoritmus s jednoduchým dopravním zpožděním (červená čára), zpětnovazební algoritmus s dopravním zpožděním a kons. přírůstkem (černá čára) a soustava bez připojeného algoritmu (zelená čára). Zpětnovazební řízení bez dopravního zpoždění zde není zobrazeno z důvodu rozkmitání závaží na vysoké hodnoty úhlové výchylky φ pro hodnotu tlumicího poměru $\xi = 0.1$. Podle obrázku 24 lze říci, že největší tlumicí efekt má algoritmus s dopravním zpožděním a kons. přírůstkem, kde dochází k úplnému utlumení kmitání po pěti sekundách. Naopak jako nejhorší se jeví přímovazební algoritmus, kde dochází po několika periodách k posílení kmitání. Z průběhu délky závěsu l je patrné, že přímovazební a zpětnovazební algoritmus s dopravním zpožděním a kons. přírůstkem mají shodnou amplitudu kmitání Δl . Na druhou stranu nejmenší amplitudu kmitání Δl vykazuje řízení s jednoduchým dopravním zpožděním, kde je vidět i zpožděný nástup amplitudy kmitání závaží Δl .

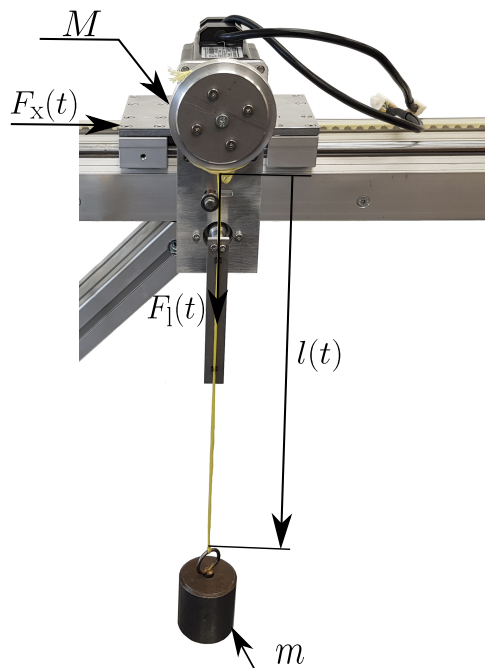


Obrázek 24: Porovnání algoritmů

2.6 Návrh řízení laboratorního zařízení

Cílem této práce je mimo jiné navrhnout laboratorní zařízení pro testování tlumení kmitání závaží změnou délky závěsu. Laboratorní zařízení je navrženo podle schématu z obrázku 3.

Zkracování, resp. prodlužování závěsu, je umožněno pomocí servomotoru, který se nachází na pohyblivém vozíku. Akční zásah tohoto aktuátoru je na obrázku 3 označen jako $F_1(t)$. Na hřídeli tohoto servomotoru je nasazena velká kladka, přes kterou je veden závěs, který je dále napnut přes malou kladku a malou mezerou mezi dvěma čepy. Tyto čepy zajišťují vedení provázku tak, aby bylo minimalizováno jeho zvlnění. Malá kladka pak obstarává optimálnější odvíjení a navíjení závěsu. Vozík, na kterém je upevněn servopohon, se pohybuje po kolejnicích a je připevněn k ozubenému řemenu, který je poháněn dalším servomotorem. Působení tohoto pohonu je na obrázku 3 zobrazeno jako $F_x(t)$. Pro potřebu měření úhlové výchylky kyvadla může být na dané laboratorní zařízení přidán snímač úhlu natočení. Takto popsané laboratorní zařízení je zobrazeno na obrázku 24.



Obrázek 25: Laboratorní zařízení

Vozík laboratorního zařízení může představovat jeřábovou kočku, která se pohybuje po výložníku v případě věžového jeřábu, jehož uplatnění lze nalézt zejména ve stavebnictví, nebo po nosníku portálového jeřábu.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámení s metodami tlumení kmitání závaží změnou délky závěsu a návržení laboratorního zařízení pro ověření funkčnosti těchto algoritmů. Dále měla práce za cíl vytvořit matematický a simulační model laboratorního zařízení a realizovat jeho řízení.

V této bakalářské práci bylo nejprve představeno několik algoritmů pro tlumení kmitání závaží změnou délky závěsu. V dalším kroku byl vytvořen fyzikální model laboratorního zařízení pro ověření funkčnosti těchto algoritmů. Dále byl tento nelineární model linearizován v okolí vhodně zvoleného pracovního bodu. Oba tyto modely byly převedeny na simulační modely v prostředí MATLAB & Simulink, kde byla ověřena jejich správnost. Následoval návrh řízení laboratorní úlohy, kde byly pro regulaci polohy vozíku a délky závěsu zvoleny PD-regulátory. Tyto regulátory byly pro linearizovaný model seřizeny metodou Root Locus. Takto seřizené regulátory byly implementovány i na nelineární systém. Zde však vznikla trvalá regulační odchylka, a proto byly regulátory pro nelineární model navrženy metodou pokus omyl. Vybrané algoritmy byly implementovány na linearizovaný model, kde ovšem nevykazovaly žádný tlumící efekt. Ty samé algoritmy byly poté aplikovány na nelineární model, kde byl tlumící efekt výrazný. Jako nejlepší volba z vybraných algoritmů pro tlumení kmitání laboratorního zařízení se jevil algoritmus s dopravním zpožděním a konstantním přírůstkem. Nakonec bylo navrženo laboratorní zařízení pro ověření různých metod tlumení kmitání závaží změnou délky závěsu.

Seznam použitých symbolů a značek

t	čas
s	operátor Laplaceovy transformace
\dot{x}, \ddot{x}	první, resp. druhá derivace proměnné x podle času
$\frac{d}{dt}$	derivace podle času
∂	parciální derivace
$G(s)$	přenos systému
$R(s)$	přenos regulátoru
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Laplaceova transformace funkce $f(t)$
A	amplituda harmonického pohybu
\mathbf{A}	matice systému
\mathbf{B}	vstupní matice
c	konstanta tlumení
c_1	koeficient lineárního tlumení síly $F_l(t)$
c_x	koeficient lineárního tlumení síly $F_x(t)$
C	parametr zesílení zpětné vazby
\mathbf{C}	výstupní matice
D	Rayleighova disipativní funkce
\mathbf{D}	výstupní matice
e	regulační odchylka
ΔE	přeměněná energie během jedné periody
E_k	kinetická energie
E_p	potenciální energie
$E(0)$	počáteční hodnota energie soustavy
\mathbf{f}	stavová funkce
$F_C(t)$	Coriolisova síla
$F_1(t)$	síla působící v závěsu kyvadla
$F_x(t)$	síla působící na vozík
g	tíhové zrychlení
\mathbf{h}	funkce vstupů
I_s	moment setrvačnosti tělesa vzhledem ke středu hmotnosti
k	tuhost pružiny
l	délka závěsu
$l(t)$	proměnná délka závěsu
Δl	amplituda pohybu kyvadla
l_0	střední hodnota pohybu břemene
l^*	pracovní bod
l_{\min}	minimální délka závěsu kyvadla
l_{\max}	maximální délka závěsu kyvadla
L	Lagrangeova funkce
m	hmotnost závaží
M	hmotnost vozíku
N	filtrační koeficient
\mathbf{P}_0	pracovní bod
q_j	nezávislé zobecněné souřadnice

Q_j^{nc}	práce vnějších nekonzervativních zobecněných sil
r_d	derivační konstanta D-regulátoru
r_p	proporcionální konstanta P-regulátoru
Δs	změna polohy břemene
s_1	dráha v čase t_1
s_2	dráha v čase t_2
T	perioda kyvadla
\bar{T}	skutečná perioda kyvadla
u	akční veličina
\mathbf{u}	vektor vstupů
w	žádaná hodnota
W_{1-2}	práce vykonaná mezi časovými úseky t_1 a t_2
$x(t)$	poloha vozíku
$\mathbf{x}(t)$	stavový vektor
y	výstupní veličina
$y(t)$	výchylka pružiny
$\mathbf{y}(t)$	vektor výstupů
z_1	nula přenosu PD-regulátoru
ξ	tlumicí poměr
$\delta(t)$	Diracův impuls
$\varphi(t)$	úhlová výchylka závěsu
φ_0	počáteční úhlová výchylka závěsu
ψ_i	fázový posun získán během i -té periody
Ω	úhlová frekvence netlumených kmitů
$\bar{\Omega}$	střední hodnota úhlové frekvence netlumených kmitů
$\mathbf{1}(t)$	jednotkový skok

Seznam použité literatury a zdrojů

- [1] Gregory L. Baker, James A. Blackburn et al. *The pendulum: a case study in physics*. Oxford University Press, 2005.
- [2] William B. Case a Mark A. Swanson. „The pumping of a swing from the seated position“. In: *American Journal of Physics* 58.5 (1990), s. 463–467.
- [3] Gene F. Franklin et al. *Feedback control of dynamic systems*. Pearson London, 2015.
- [4] Milan Hofreiter. *Základy automatického řízení*. ČVUT v Praze, 2018.
- [5] Karel Juliš a Rudolf Brepta. *Mechanika : 2. díl : Dynamika*. Praha: SNTL, 1987.
- [6] Denise S. Stilling. „Vibration attenuation by mass redistribution.“ In: (2002).
- [7] Denise S. Stilling a Walerian Szyszkowski. „Controlling angular oscillations through mass reconfiguration: a variable length pendulum case“. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37.1 (2002), s. 89–99.
- [8] Daniel Stutts. „Analytical Dynamics: Lagrange’s Equation and its Application—A Brief Introduction“. In: *Missouri University of Science and Technology, Rolla, MO, accessed Aug 28 (1995)*, s. 2017.
- [9] W. Szyszkowski a Denise S. Stilling. „On damping properties of a frictionless physical pendulum with a moving mass“. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40.5 (2005), s. 669–681.
- [10] Michael Šebek. *Automatické řízení: 1-Úvod*. 2019. URL: http://www.polyx.cz/_ari/slajdy/Bas-ARI-01-Intro.pdf.
- [11] Michael Šebek. *Automatické řízení: 8-Geometrické místo kořenů aneb Root Locus*. 2019. URL: http://www.polyx.com/_ari/slajdy/Bas-ARI-08-RL.pdf.
- [12] Tomáš Vyhlídal et al. „Time-delay algorithms for damping oscillations of suspended payload by adjusting the cable length“. In: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 22.5 (2017), s. 2319–2329.
- [13] Xin Xin a Yannian Liu. *Control design and analysis for underactuated robotic systems*. Springer Science & Business Media, 2014.

Seznam obrázků

Obrázek 1	Kyvadlo s proměnnou délkou závěsu s vyznačenými silami . . .	2
Obrázek 2	Tlumení kmitání využitím (a) obecné trajektorie a (b) optimál- nější trajektorie závaží	4
Obrázek 3	Schéma laboratorní úlohy	10
Obrázek 4	Nelineární simulační model	17
Obrázek 5	Impulsní funkce nelineárního modelu	18
Obrázek 6	Linearizovaný simulační model	19
Obrázek 7	Impulsní funkce linearizovaného modelu	19
Obrázek 8	Schéma zpětnovazebního řízení	20
Obrázek 9	Schéma uzavřené smyčky metody RL	21
Obrázek 10	Zobrazení pólů a nuly metodou RL při regulaci délky l	22
Obrázek 11	Regulační obvod s regulovaným linearizovaným systémem . . .	23
Obrázek 12	Odezva regulačního obvodu s regulovaným lin. systémem	23
Obrázek 13	Regulační obvod s regulovaným nelineárním systémem	24
Obrázek 14	Odezva regulačního obvodu s regulovaným nelin. systémem . . .	24
Obrázek 15	Simulační model přímovazebního řízení nelineárního modelu . .	26
Obrázek 16	Přímovazební řízení nelineárního modelu	26
Obrázek 17	Simulační model zpětnovazebního řízení s dopravním zpožděním nelineárního modelu	27
Obrázek 18	Zpětnovazební řízení s dopravním zpožděním nelineárního modelu	27
Obrázek 19	Simulační model zpětnovazebního řízení s dop. zpožděním a konst. přírůstkem nelineárního modelu	28
Obrázek 20	Zpětnovazební řízení s dop. zpožděním a konst. přírůstkem ne- lineárního modelu	28
Obrázek 21	Simulační model zpětnovazebního řízení bez dopravního zpoždění	29
Obrázek 22	Zpětnovazebního řízení bez dopravního zpoždění pro $\xi = 0.04$.	29
Obrázek 23	Zpětnovazebního řízení bez dopravního zpoždění pro $\xi = 0.06$.	30
Obrázek 24	Porovnání algoritmů	30
Obrázek 25	Laboratorní zařízení	31

Seznam příloh

Příloha 1	Deklarace proměnných
Příloha 2	Nelineární simulační model
Příloha 3	Linearizovaný simulační model
Příloha 4	Regulační obvod s regulovaným linearizovaným systémem
Příloha 5	Regulační obvod s regulovaným nelineárním systémem
Příloha 6	Simulační model přímovazebního řízení nelineárního modelu
Příloha 7	Simulační model zpětnovazebního řízení s dopravním zpožděním nelineárního modelu
Příloha 8	Simulační model zpětnovazebního řízení s dop. zpožděním a konst. přírůstkem nelineárního modelu
Příloha 9	Simulační model zpětnovazebního řízení bez dopravního zpoždění
Příloha 10	Výkres horizontální desky
Příloha 11	Výkres spodní části L
Příloha 12	Výkres svislé části L
Příloha 13	Výkres desky kladky
Příloha 14	Výkres válce s osazením
Příloha 15	Výkres kyvadla
Příloha 16	Výkres kladky