České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky
Obor: Matematické inženýrství, zaměření Matematická fyzika

Relativistické superintegrabilní systémy

Relativistic superintegrable systems

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracovala: Tereza Lehečková
Vedoucí práce: doc. Ing. Libor Šnobl, Ph.D.
Rok: 2020

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA JADERNÁ A FYZIKÁLNĚ INŽENÝRSKÁ
PRAHA 1 - STARÉ MĚSTO, BŘEHOVÁ 7 - PSČ 115 19

Katedra: fyziky *Akademický rok:* 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: Tereza Lehečková

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Matematické inženýrství, zaměření Matematická fyzika

Název práce: (česky) Relativistické superintegrabilní systémy

Název práce: (anglicky) Relativistic superintegrable systems

Pokyny pro vypracování:

1) Prostudovat základní pojmy z oblasti superintegrabilních klasických mechanických systémů, viz [1].

2) Seznámit se s hamiltonovskou formulací relativistické mechaniky hmotných bodů, mj. takzvanou kalibrací světelného kužele, viz [2,3] a další.

3) Prověřit výsledky týkající se relativistických superintegrabilních systémů s magnetickým polem publikované v článcích [4,5].

4) Pokusit se najít relativistické obdoby některých známých nerelativistických superintegrabilních systémů s magnetickým polem, studovaných např. v [6].

Doporučená literatura:

[1] W. Miller Jr., S. Post and P. Winternitz: Classical and quantum superintegrability with applications. J. Phys. A: Math. Theor. 46 423001 (2013)

[2] W. Thirring: Classical mathematical physics - Dynamical systems and field theories. Springer-Verlag, 1997

[3] H. Goldstein, C.P. Poole, J. L. Safko: Classical Mechanics, Pearson Education Ltd. 2014

[4] L. Ansell, T. Heinzl and A. Ilderton: Superintegrable relativistic systems in scalar background fields. J. Phys. A: Math. Theor. 51 495203 (2018)

[5] T. Heinzl and A. Ilderton: Superintegrable relativistic systems in spacetime-dependent background fields. J. Phys. A: Math. Theor. 50 345204 (2017)

[6] A. Marchesiello and L. Šnobl: Superintegrable 3D systems in a magnetic field corresponding to Cartesian separation of variables. (2017)

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Ing. Libor Šnobl, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Datum zadání bakalářské práce: 25.10.2019

Termín odevzdání bakalářské práce: 07.07.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

....

garant oboru

....

vedoucí katedry

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
-1-

....

děkan

V Praze dne 25.10.2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd....) uvedené v přiloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne ....

....
Tereza Lehečková

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce doc. Ing. Liboru Šnoblovi, Ph.D. za ochotu a trpělivost při zodpovídání četných dotazů a čtení předchozí verze textu. Dále také za to, že mi vyšel vstříc ohledně výběru tématu a způsobu jeho zpracování.

Tereza Lehečková

Název práce:
Relativistické superintegrabilní systémy

Autor: Tereza Lehečková

Obor: Matematické inženýrství, zaměření Matematická fyzika
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Ing. Libor Šnobl, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT v Praze

Konzultant: –

Abstrakt: Tato práce se zabývá (super)integrabilitou speciálně relativistických systémů s (elektro)magnetickým polem v relativistické obdobě Hamiltonova formalismu. Nejprve shrnuje potřebný aparát z několika matematicko-fyzikálních oblastí. Dále vykládá relativistický Hamiltonův formalismus (vlastnosti, zavedení, formy). Poté shrnuje výsledky a metody dvou nedávno publikovaných článků o relativistické superintegrabilitě [1, 2]. Studuje také relativistické obdoby vybraných systémů z článků [3, 4, 5, 6] (hledání integrálů pohybu, příbuzné systémy, porovnání s klasickou situací,řešení apod.), diskutuje některé otázky týkající se popisu v různých formách, nerelativistické limity apod. Závěrem zkoumá několik obecných tříd systémů v tzv. frontální formě a podmínek jejich (super)integrability.

Klíčová slova: superintegrabilita, integrál pohybu, formy relativistické dynamiky

Title:
Relativistic superintegrable systems

Author: Tereza Lehečková

Abstract: This project deals with the (super)integrability of special relativistic systems with (electro)magnetic fields using a relativistic analogy of Hamilton's formalism. First, the necessary apparatus from several mathematical-physical areas is summarized. After that, the relativistic Hamilton's formalism (properties, implementation, forms) is explained. Then, the results and methods of two recently published articles on relativistic superintegrability [1, 2] are summarized. Also relativistic analogues of selected systems from the articles [3, 4, 5, 6] are also studied (search for constants of the motion, related systems, comparison with the classical situation, solutions, etc.), some questions concerning the description in various forms, non-relativistic limits, etc. are discussed. Finally, several general classes of systems in front form and conditions of their (super)integrability are investigated.

Key words: superintegrability, constant of the motion, forms of relativistic dynamics

Obsah

Úvod

Problematika integrabilních, resp. superintegrabilních systémů je rychle se rozvíjejícím matematicko-fyzikálním odvětvím. Integrabilita umožňuje řešit systémy (alespoň teoreticky) v kvadraturách, superintegrabilita pak umožňuje (opět alespoň v principu) částečně či plně algebraické řešení. Hojně je studována (super)integrabilita klasická a kvantová, naproti tomu o relativistické (super)integrabilitě toho dosud mnoho napsáno nebylo. Přirozeným důvodem je to, že teorie (super)integrabilních systémů je vybudována v termínech hamiltonovské mechaniky, kdežto relativistická dynamika se takto nepopisuje. Přesto existují způsoby, jak zavést (alespoň speciálně) relativistickou obdobu Hamiltonova formalismu. S touto metodou přišel poprvé Dirac v [7]. Od jeho dob však byla využívána a rozvíjena spíše sporadicky, v oblastech kvantové teorie pole, tzv. metodách kvantizace. V nedávné době se však objevilo její využití i na poli studia superintegrabilty a to v článcích [1, 2]. Tyto články se věnují systémům s elektromagnetickým polem a systémům se skalárním potenciálem, což jsou obě oblasti, kde lze, máme-li již k dispozici formalismus, přejít od klasické fyziky k relativistické poměrně snadno.

V tomto textu, po předložení nejdůležitějších pojmů, vztahů a notace z několika oblastí potřebných pro další práci v kapitole 1, projdeme v kapitole 2 současné znalosti o formulacích hamiltonovské relativistické dynamiky (předpoklady, způsob konstrukce, možné formy a konkrétní formalismus atd.). V kapitole 3 již přejdeme ke konkrétním příkladům, totiž k rekapitulaci metod a výsledků článků [1, 2]. S těmito teoretickými znalostmi pak přistoupíme k nerešeršní části práce – kapitole 4. V ní se nejprve pokusíme prozkoumat některé otázky ohledně obecné teorie, která by mohla být výhodná při studiu konkrétních systémů i získání lepšího vhledu do problematiky. Dále se v ní pokusíme najít relativistické obdoby vybraných superintegrabilních systémů s (elektro)magnetickým polem z článků [3, 4, 5, 6], prozkoumat je a porovnat s klasickou situací. Nakonec se ještě vrátíme k obecnějšímu popisu a pokusíme se najít některé třídy relativistických (super)integrabilních systémů.

Kapitola 1

Potřebné pojmy, vztahy a notace

V práci budou využívány pojmy z relativistické fyziky, teorie superintegrabilních systémů a v jisté míře také aparát diferenciální geometrie a teorie grup. Byť mají tyto oblasti mnoho styčných ploch, plynulé navázání z jedné na druhou je obtížné. Proto bude tato kapitola spíše seznamem definic a tvrzení, nežli souvislým textem. Před roztříděním pojmů z jednotlivých kapitol je třeba učinit úmluvy ohledně notace, jelikož v textu bude práce s indexy hojná a nezbytná.

Úmluva 1: V textu bude využíváno (upravené) Einsteinovy sumační konvence, tedy přes dvojici shodných indexů u veličin v součinu se sčítá

$$f_k f^k := \sum_{k=1} f_k f^k. \tag{1.1}$$

Podle tohoto pravidla budeme postupovat i pokud indexy budou na stejných pozicích či pokud bude výraz ve složitějším tvaru, který lze na tvar odpovídající konvenci přímo upravit (např. součin mnohočlenů). Objeví-li se výraz odpovídající konvenci, v němž se nesčítá, bude na to upozorněno.

Úmluva 2: Budou-li v indexaci či označení použita řecká písmena (např. x^μ), znamená to složky či členy od 0 do 3, dané aktuální užívanou kalibrací (viz dále), tj. v případě (ko)vektorů jde o všechny složky, včetně časové. Použití písmena j znamená složky či členy 1, 2, 3, půjde o prostorové složky dané kalibrace. Použití písmena i, znamená složky či členy 1, 2. Bude-li použito jiné latinské písmeno (např. x^k), znamená to složky či členy z jiné indexové množiny (dané kontextem).

1.1 Integrabilita, superintegrabilita a související pojmy

Začneme rekapitulací těch základních definic a tvrzení hamiltonovské mechaniky, jež jsou pro text nezbytné. Převzaty jsou z [8] a částečně budou ještě precizovány v sekci 1.4.

Definice 1: Buďte $f = f(q^k, p_k, t)$, $g = g(q^k, p_k, t)$ funkce na rozšířeném fázovém prostoru. Pak jejich *Poissonovou závorkou* v souřadnicích (q^k, p_k) nazveme

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q^k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q^k}\frac{\partial f}{\partial p_k}. \tag{1.2}$$

Definice 2: Funkci $Q = Q(q^k, p_k, t)$ na fázovém prostoru nazveme *integrálem pohybu*, dále jen *IP*, právě tehdy, když se její hodnota zachovává podél každé fázové trajektorie soustavy $(q^k(t)^{tr}, p_k(t)^{tr})$ určené řešením Hamiltonových kanonických (pohybových) rovnic s libovolnou počáteční podmínkou, tj. když

$$Q(q^k(t)^{tr}, p_k(t)^{tr}) = \text{konst.} \tag{1.3}$$

Ekvivalentní s touto podmínkou je známé vyjádření nulovosti časového vývoje, daného totální časovou derivací funkce $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

Tvrzení 1: Funkce $Q = Q(q^k, p_k, t)$ je IP, právě když její totální časová derivace podél libovolné fázové trajektorie je rovna nule v důsledku pohybových rovnic, tj. pokud

$$0 = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial q^k}\dot{q}^k + \frac{\partial Q}{\partial p_k}\dot{p}_k + \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial q^k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial p^k} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \tag{1.4}$$

$$= \{Q, H\} + \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Nyní přejdeme k pojmům týkajícím se (super)integrabilních systémů. Text vychází z [9].

Definice 3: Buďte Q, F dva IP. O nich řekneme, že jsou v *involuci*, právě tehdy, když

$$\{Q, F\} = 0. \tag{1.5}$$

Množina IP je v involuci, jsou-li v involuci každé dva její členy.

Definice 4: Buď $M = \{f_k(q^m, p_m) | k \in \hat{N}\}$ množina N lokálně definovaných, lokálně analytických funkcí na oblasti $2n$ dimenzionálního fázového prostoru. Řekneme, že M je *funkcionálně nezávislá*, právě když matice $(\frac{\partial f_k}{\partial q^m}, \frac{\partial f_k}{\partial p_m})$, rozměru N x $2n$, má na celé oblasti hodnost N. Není-li M funkcionálně nezávislá, říkáme, že je *funkcionálně závislá.* Obdobně, pokud f_k závisí též na čase (viz dále).

Z této definice také plyne, že pro funkcionálně závislou množinu (tedy množinu, pro níž je hodnost matice menší než N) lokálně existuje nenulová funkce F taková, že $F(f_1, ..., f_N) = 0$, na celé oblasti. Nyní již můžeme přistoupit k definici (super)integrability samotné.

Definice 5: Hamiltonovský systém s n stupni volnosti nazveme *integrabilním*, právě tehdy, když obsahuje n IP, které jsou v involuci a funkcionálně nezávislé.

Definice 6: Hamiltonovský systém s n stupni volnosti nazveme *superintegrabilním*, právě tehdy, když je integrabilní a existuje dalších $k \in \widehat{n-1}$ takových, že všechny IP systému $(n+k)$ jsou nezávislé. Je-li $k = 1$, nazveme systém *minimálně superintegrabilní* a je-li $k = n-1$, nazveme systém *maximálně superintegrabilní.*

Zdůrazněme, že involuce se již v této definici nepožaduje (dokonce ani není možné, aby byly všechny IP v superintegrabilním systému v involuci). Někdy se využívá jiná i definice, vypouštějící předpoklad integrability, tj. involuce n integrálů. Není známo [9], zda toto vede k odlišným systémům, či zda involuce už je důsledkem existence dostatečně mnoha integrálů.

Dále je třeba okomentovat skutečnost, že definice 4, 5 a 6 pracují s funkcemi nezávislými na čase. Je to obvyklý přístup, neboť (super)integrabilita s IP mající v sobě čas není příliš dobře prozkoumána a články zabývající se touto problematikou se obvykle na časové IP vůbec nezaměřují. Pro systémy maximálně superintegrabilní podle definice 6 platí, že je lze (teoreticky) vyřešit čistě algebraicky, pro integrabilní pak to, že je lze (teoreticky) vyřešit analyticky. Pro systémy mající časové IP je však situace složitější a není vždy jasné, kolik IP je vlastně na tyto vlastnosti potřeba. V této práci se ovšem s touto situací setkáme opakovaně, přistupovat k jednotlivým případům proto budeme individuálně. Co se funkcionální (ne)závislosti týče, stačí nám Jacobiho matici z definice 4 obohatit o sloupec s časovými derivacemi.

1.2 Speciální teorie relativity

Nejprve opět přicházejí notační úmluvy.

Úmluva 3: V textu budeme používat metrický tenzor v Minkowského prostoročase v kartézských souřadnicích tvaru

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{1.6}$$

Úmluva 4: Budeme se držet tradiční notace, kdy horní indexace značí kontravariantní veličinu, kdežto dolní kovariantní. Skalární součin dvou vektorů a a b značíme

$$a \cdot b = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu, \tag{1.7}$$

a analogicky pro kovektory. Písmeno v indexu značí celý čtyřvektor (všechny složky), číslo či konkrétní označení pouze příslušnou složku. Nemůže-li dojít k nedorozumění, nebo potřebujeme pouze velikost (čtyř)vektoru, lze index vynechat a značíme pouze a. Prostorové vektory značíme $\mathbf{a}$.

Úmluva 5: Výrazem $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ budeme označovat složky kovektoru $(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$, tedy čtyřrozměrného gradientu. Analogické značení platí i pro složky z jiné indexové množiny –

viz úmluva 2. (To také znamená, že $\partial^\mu = (\partial_0, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3)$.)

Úmluva 6: V textu používáme jednotky, v nichž rychlost světla $c = 1$.

Nyní připomeneme základní pojmy relativistického elektromagnetismu. Následující způsoby zavedení veličin jsou v podstatě jedinými funkčními možnostmi (a rozšířeními klasických definic). Tyto obecně známé postupy (ani jejich široké důsledky) však nejsou tématem tohoto textu, proto jsou zavedení vyslovena jako definice. Převzata jsou z [10] a [11]. Ještě poznamenejme, že používáme přirozenou parametrizaci funkcí vlastním časem τ.

Definice 7: Mějme elektromagnetické pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ a elektromagnetické potenciály φ, $\boldsymbol{A}$ tak, že: $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. Pak *čtyřpotenciál* zavádíme jako

$$(A^\mu) = (\varphi, \mathbf{A}), \tag{1.8}$$

resp. v níže hojně využívané kovektorové formě jako $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$ a přechod mezi kalibracemi jako

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial_\mu \Lambda, \tag{1.9}$$

kde Λ je libovolná, dostatečně hladká, skalární funkce.

Definice 8: *Tenzor elektromagnetického pole* zavádíme jako

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{1.10}$$

resp. explicitně pomocí složek pole jako

$$\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Nyní v rychlosti probereme zavedení lagrangeovské mechaniky v Minkowského prostoročase, které je relativně přímočaré. To bude částečně výchozí pro komplikovanější hamiltonovský popis. Informace vychází z [11] a [12]. Na toto zavedení neexistuje jednotný postup, nicméně existují jisté omezující podmínky, kterým musí vyhovovat. Za jistých okolností (např. právě pro částici v elektromagnetickém poli, se kterou budeme pracovat především), lze však lagrangián nalézt poměrně dobře. Potřebujeme ale nejprve zobecnění některých principů klasické mechaniky do Minkowského prostoročasu. K jejich vyjádření se dojde postupnými kroky, které zde není prostor detailně rozebírat, zde je proto uvedeme jen jako definice tvrzení, která nebudeme dokazovat, důkladnější rozbor je v [11].

Tvrzení 2: d'Alembertův princip lze v Minkowského prostoročase vyjádřit jako

$$\left(F_\mu - \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) \delta x^\mu = 0, \tag{1.12}$$

kde F je výslednice vtištěných sil a δx značí virtuální posunutí. p_μ zde i dále značí složky čtyřhybnosti a x^μ složky polohy/souřadnice. Roli času zde opět přebírá vlastní čas.

Zapíšeme-li navíc vazbu systému jako $\psi(x^\mu) = 0$, s vazbovou silou $\lambda\partial_\mu\psi$, kde λ je Lagrangeův multiplikátor, dostaneme vazbovou podmínku

$$(\partial_\mu\psi)\delta x^\mu = 0. \tag{1.13}$$

Sečtením s rovnicí vyjadřující d'Alembertův princip dostáváme Lagrangeovy rovnice 1. druhu

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = F_\mu + \lambda\partial_\mu\psi. \tag{1.14}$$

(Spolu s rovnicí vazby a invariancí skalárního součinu čtyřrychlosti dají 6 rovnic pro 6 neznámých).

Definice 9: Akci v Minkowského prostoročase zavádíme jako

$$S := \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x^\mu(\tau), u^\mu(\tau))\mathrm{d}\tau, \tag{1.15}$$

kde L je zatím neznámý relativistický Lagrangián a u^μ je čtyřrychlost. Rovnice Hamiltonova principu má pak tvar

$$\delta S = 0. \tag{1.16}$$

Stejně jako v nerelativistickém případě dostaneme provedením této variace a vhodnými úpravami výraz variovaný podle x^μ pod integrálem podle τ. Ten musí, podle základního lematu variačního počtu, být nulový, má-li být nulová celá variace. (Provedení a úpravy jsou poměrně zdlouhavé, lze je nalézt opět v [11]). Tento výraz (resp. výrazy, rozepíšeme-li složky) představuje relativistickou obdobu Euler-Lagrangeových rovnic:

Tvrzení 3: Euler-Lagrangeovy rovnice v Minkowského prostoročasu mají tvar

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} + \left(\frac{\partial L}{\partial u^\nu}u^\nu - L\right)u_\mu\right) = 0. \tag{1.17}$$

(Tj. variace akce vyjde jako $\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2}(LS)\delta x^\mu \mathrm{d}\tau$, kde LS je levá strana (1.17).)

Nyní se již dostáváme k samotnému L. Implicitně jsme na něj již tvrzeními nakladli požadavek lorentzovské invariance, neboť jinak by Euler-Lagrangeovy rovnice měly v každé soustavě jiný tvar. To, že nemůže být roven obdobě klasického rozdílu kinetické a potenciální energie $T - V$ je jasné ze stejného důvodu – kinetická energie má různý tvar v různých soustavách.

Postup nalezení L bude následující: zintegrujeme rovnici d'Alemberova principu od τ_1 do τ_2, přičemž virtuální posunutí nechť v koncových bodech vymizí. Pak získáme

$$0 = \int_{\tau_2}^{\tau_1}\left(F_\mu - \frac{dp_\mu}{d\tau}\right)\delta x^\mu \mathrm{d}\tau = ... = \int_{\tau_2}^{\tau_1}(F_\mu \delta x^\mu d\tau - m_0\delta d\tau), \tag{1.18}$$

kde m_0 je klidová hmotnost. Symbol ... značí několik úprav, lze je nalézt v [11], (postupuje se přes per-partes). Porovnáním s rovnicí Hamiltonova principu

$$0 = \delta \int_{\tau_2}^{\tau_1} L d\tau = \int_{\tau_2}^{\tau_1} (\delta L d\tau + L \delta d\tau) \tag{1.19}$$

můžeme vidět, mimo jiné, že lagrangián volné částice lze zavést prostě jako

$$L = -m_0. \tag{1.20}$$

Případ, kdy je přítomna síla F už specifikujeme pro sílu Lorenzovu, nicméně základní snahou je upravit integrál z d'Alembertova principu do tvaru $\delta \int_{\tau_2}^{\tau_1} G d\tau$, neboť toto G pak musí být úměrné lagrangiánu.

Mějme tedy částici v elektromagnetickém poli, tedy pod vlivem síly $F_\mu = F_{\mu\nu} u^\nu$. Pak dostaneme (rozepíšeme zde pro ilustraci kroky, podrobnější rozbor opět v [11])

$$\int_{\tau_2}^{\tau_1} (F_\mu \delta x^\mu \mathrm{d}\tau - m_0 \delta \mathrm{d}\tau) = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \left(q \left(\delta A_\nu u^\nu - \frac{\mathrm{d}A_\mu}{\mathrm{d}\tau} \delta x^\mu \right) \mathrm{d}\tau - m_0 \delta \mathrm{d}\tau \right) = \tag{1.21}$$

$$\overset{PP}{=} \int_{\tau_2}^{\tau_1} \left(q \left(\delta A_\nu u^\nu + A_\mu \frac{\mathrm{d}\delta x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \right) \mathrm{d}\tau - m_0 \delta \mathrm{d}\tau \right) = \int_{\tau_2}^{\tau_1} (q(\delta A_\nu u^\nu \mathrm{d}\tau + A_\mu \mathrm{d}\delta x^\mu) - m_0 \delta \mathrm{d}\tau) =$$

$$= \int_{\tau_2}^{\tau_1} (q(\delta A_\nu u^\nu \mathrm{d}\tau + A_\mu \delta(u^\mu \mathrm{d}\tau)) - m_0 \delta \mathrm{d}\tau) = \int_{\tau_2}^{\tau_1} (q\delta(A_\nu u^\nu \mathrm{d}\tau - m_0 \delta \mathrm{d}\tau) =$$

$$= \delta \int_{\tau_2}^{\tau_1} (q A_\nu u^\nu - m_0) \mathrm{d}\tau.$$

To tedy znamená, že relativistický lagrangián částice v elektromagnetickém poli můžeme definovat jako

$$L = q A_\nu u^\nu - m_0. \tag{1.22}$$

V budoucnu však většinou budeme pracovat se systémy a jednotkami kde m_0 a q budou jednotkové.

1.3 Grupy, algebry a transformace

Abychom mohli pracovat s konformní a především Poincarého grupou (sekce 2.2. a dále), která bude klíčová jak pro zavedení hamiltonovské relativistické dynamiky, tak pro hledání některých IP, potřebujeme zavést několik pojmů z teorie grup a souvisejících oblastí. Text sekce vychází z přednášek DRG [13] a [14].

Definice 10: Buďte G množina a $\star : G \times G \longrightarrow G$ zobrazení. Pak platí-li pro $\forall a, b, c \in G$,
1/ $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$,
2/ $\exists e \in G$ tak, že $e \star a = a \star e = a$,

3/ $\exists a^{-1}$ tak, že $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$,
nazýváme dvojici $\mathbf{G} := (G, \star)$ *grupou.*

Definice 11: Podmnožinu grupy $\mathbf{G}$, která je sama grupou vzhledem ke grupové operaci $\star$ zavedené na G, nazveme její *podgrupou.*

Definice 12: Grupu $\mathbf{G}$ nazveme *abelovskou*, platí-li $a \star b = b \star a$ pro všechna $a, b \in G$.

Definice 13: Grupu nazveme *Lieovou*, pokud zobrazení $\star$ a zobrazení $^{-1}$ přiřazující $g \in G$ jeho inverzní prvek jsou spojitá a nekonečněkrát diferencovatelná.

Abelovské grupy v mnohém připomínají vektorové prostory a jejich teorie se tak od teorie obecně nekomutativních grup značně liší. Lieovy grupy jsou zase grupy mající zároveň strukturu hladké variety, díky čemuž mají řadu význačných vlastností. Nyní přijdou pojmy týkající se algeber, jež jsou s Lieovými grupami těsně spojeny.

Definice 14: *Algebrou* nazýváme vektorový prostor A nad tělesem T, na kterém je zároveň definována operace násobení $[\ ] : A \times A \to A$, jež je bilineární, tj. $[a, (\beta b + \gamma c)] = \beta[a, b] + \gamma[a, c]$ a $[(\beta b + \gamma c), a]$ analogicky pro každé $a, b \in A$ a $\beta, \gamma \in T$.

Definice 15: Algebru A nazveme *Lieovou*, pokud násobení $[\ ]$ navíc splňuje $[a, b] = -[b, a]$ (antisymetrii) a $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ (Jacobiho identitu) pro každá a, b, c $\in A$. Zobrazení $[\ ]$ pak nazýváme *Lieovou závorkou.*

Tvrzení 4: Funkce na fázovém prostoru spolu s Poissonovou závorkou tvoří Lieovu algebru.

Tímto jsme nastínili první propojení pojmů této podkapitoly s ústředním tématem práce. Druhé se, jak již bylo zmíněno, skrývá v popisu Poincarého grupy. Tato je, stejně jako např. konformní grupa, grupou transformací. Zbytek pojmů bude využit hlavně v tomto kontextu.

Dalším pojmem pevně svázaným s pojmem grupy jsou *generátory grupy* – členy nejmenšího souboru jejích prvků, ze kterých lze získat celou grupu pomocí vzájemného násobení. V případě Lieových grup je ale situace mírně odlišná a pro rigorózní popis bychom museli vyslovit řadu dalších definic, které dále přímo nevyužijeme. Proto učiníme jen tuto poznámku: Lieova grupa má přiřazenou Lieovu algebru, a lze definovat exponenciální zobrazení zobrazující z této algebry do grupy. Díky tomuto vztahu se pak generátory chápou jako lineárně nezávislé prvky algebry. Právě v tomto duchu budeme nakládat s generátory Poincarého grupy. Nyní již k dalším pojmům.

Definice 16: *Akcí grupy* $\mathbf{G}$ na množině A nazveme zobrazení $\cdot : \mathbf{G} \times A \to A$ takové, že

1/ $(\forall g_1, g_2 \in \mathbf{G})(\forall a \in A)(g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 \star g_2) \cdot a)$
2/ $(\forall a \in A)(e \cdot a = a)$,
kde e je grupová jednotka.

Nyní se můžeme vrátit k fyzikálnímu rozměru problematiky. Zde již vidíme např. působení rotace na vektor jako násobení příslušnou maticí. S tím souvisí i pojem reprezentace, v užívaném kontextu ji však nebude třeba rozebírat.

Definice 17: *Grupou transformací* množiny A nazveme grupu vzájemně jednoznačných zobrazení množiny A na sebe.

Definice 18: Grupu $(G, \star)$ s topologií na G nazveme *topologickou*, pokud grupové násobení a inverze jsou spojitá zobrazení.

Definice 19: Topologickou grupu $\mathbf{M}$ nazveme *lokálně n-parametrickou*, pokud je zároveň *lokálně n-parametrickým topologickým prostorem* (tj. pokud pro každé $p \in M$ existuje jeho otevřené okolí U a zobrazení φ takové, že $\varphi : U \to \varphi(U) = \varphi(U)^\circ \subset R^n$ je homeomorfismus).

K takovým (Lieovým) grupám transformací již můžeme vztáhnout známý teorém Noetherové, jehož budeme také hojně využívat. Jelikož se ale bude vyskytovat (a vlastně už vyskytl v sekci 1.1) v několika různých formách, uvedeme jeho poněkud vágní, obecnou formu.

Tvrzení 5: Každé spojité (lokálně) n-parametrické grupě transformací systému odpovídá n integrálů pohybu tohoto systému.

1.4 Diferenciální geometrie a blízké oblasti

I přes to, že v dalším textu se vyskytují pojmy a objekty mající přímý vztah k diferenciální geometrii, prakticky se pracuje pouze s několika konkrétními vztahy a vždy stejným způsobem. Pojmy diferenciální geometrie jsou ale velmi provázané a není příliš dobře možné vykládat je izolovaně. Připomeneme tedy pouze definice těch nejdůležitějších a výklad souvisejících významně zestručníme. Jsou však dobře známe a lze je najít v literatuře. Konkrétně např. v zatím nepublikovaných skriptech GMF1 (ekvivalentní výklad v [15]) a [16], ze kterých text vychází.

Prvním nezbytným pojmem je přirozeně varieta. Tu lze zavést více způsoby, všechny však potřebují tzv. diferencovatelnou strukturu, tj. maximální atlas třídy C^∞.

Definice 20: Topologický Hausdorffův parakompaktní prostor (M, τ), vybavený diferencovatelnou strukturou nazýváme *diferencovatelná varieta* (nebo *hladká varieta*). Varietu dimenze $n-1$ vnořenou do prostoru dimenze n nazýváme *nadplochou.*

S pojmem nadplochy budeme pracovat hojně, proto další definice rovnou směřujeme k jednomu z těchto využití.

Definice 21: Buďte $M \subset R^n$ varieta, $\mathbf{G}$ grupa transformací R^n. Pak existuje-li podgrupa $\mathbf{G}$ ponechávající M nezměněnou, nazýváme ji *grupou stability M.*

Dále, jelikož budeme pracovat v Minkowského prostoročase, se přirozeně setkáme s vektory a kovektory (a jejich poli). Z hlediska diferenciální geometrie jde o (tečné) vektory či vektorová pole v prvním a o (diferenciální) 1-formy v druhém případě. Definujeme tedy tyto pojmy a uvedeme jejich transformace.

Definice 22: *Tečný vektor* X k varietě M v bodě $r \in M$ je třída ekvivalence křivek $[\gamma]$ vycházejících z bodu $p \in M$, přičemž $\gamma(t) \sim \tilde{\gamma}(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \tilde{\gamma}) \mid_{t=0}$ pro $\forall f \in C^\infty(M)$. Ekvivalentně ho lze definovat jako zobrazení $X : C^\infty(M) \to \Re$ splňující podmínky:
1/ $X(af+g) = aXf + Xg$
2/ $X(fg) = f(r)(Xg) + (Xf)g(p)$
3/ $\forall f, g : (\exists U = U^0 \ni r, f_{|U} = g_{|U}) \Rightarrow Xf = Xg$
pro $\forall f, g \in C^\infty(M), a \in \Re$.

Připomínáme, že *křivky na varietě* jsou zobrazení $\gamma : \Re \to M$, kdežto *funkce na varietě* zobrazení $f : M \to \Re$. Prostor všech tečných vektorů v daném bodě T_pM se nazývá *tečný prostor*, diskrétní sjednocení tečných prostorů pro všechny $p \in M$ je pak *tečný bundle* TM. Souřadnicová báze T_pM s lokálními souřadnicemi $x^k, k \in \widehat{n}$ je $\{\frac{\partial}{\partial x_k}\}_{k \in \widehat{n}}$. Proto lze vektory psát ve tvaru $X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, kde $X^k = X^k(x)$ může být libovolná funkce souřadnic. Klíčová pro nás bude transformace – díky těmto vztahů vektory transformujeme do nových souřadnic y^l jako

$$X = X^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k} = X^k(y)\frac{\partial y^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^l}. \tag{1.23}$$

Vektorové pole pak definujeme jako řez tečného bundlu, tj. jde o zobrazení přiřazující každému bodu na varietě jistý vektor z tečného prostoru v tomto bodě. Množinu všech vektorových polí značíme $\mathcal{X}(M)$. Důležitým pojmem je též *tok vektorového pole* Ψ_t, což je zobrazení zobrazující bod z variety $p \equiv \gamma(t_0)$, kde $\gamma(t)$ je integrální křivka daného vektorového pole, na bod variety $\gamma(t_0 + t)$.

Prostor duální k T_pM, tj. T_p^*M se nazývá *kotečný prostor* a jeho prvky jsou 1-formy, lineární funkcionály na vektorech z T_pM. Diskrétní sjednocení je *kotečný bundle* T^*M. Oba prostory TM, T^*M mají strukturu fibrovaného prostoru.

Definice 23: *Diferenciální 1-forma* ω na varietě M je řez kotečného fibrovaného prostoru, prostor všech diferenciálních 1-forem značíme $\Omega^1(M)$.

Stejně lze, jako k-lineární antisymetrické zobrazení $(T_pM)^k \to \Re$, definovat diferenciální k-formy a prostor diferenciálních k-forem, sjednocení těchto prostorů pro všechna přípustná k (maximálně dim M) a řezy těchto prostorů. Přirozenou souřadnicovou bází $T_p^*(M)$ je $\{dx^k\}_{k\in\hat{n}}$, báze prostoru diferenciálních 2-forem pak $\{dx^k \wedge dx^l\}_{k,l\in\hat{n},k<l}$ a analogicky pro vyšší formy.

Kovektory jsou 1-formy. Obdobně jako pro vektory (a se stejnou notací) je $\{dx^k\}_{k\in\hat{n}}$ souřadnicovou bází T_p^*M a transformace probíhá podle

$$\omega = \omega_k(x)dx^k = \omega_k(y)\frac{\partial x^k}{\partial y^l}dy_l. \tag{1.24}$$

Analogicky se pak transformují tenzory libovolných řádů (definice následuje), jednoduše transformujeme jejich jednotlivé složky podle toho, zda jsou kontravariantní či kovariantní. V textu se setkáme pouze s tenzorem elektromagnetického pole (definice 8) a metrickým tenzorem (definice 25).

Definice 24: *Kovariantní tenzor T k-tého řádu* na varietě M je k-lineární zobrazení $T : (\mathcal{X}(M))^k \to C^\infty(M)$ takové, že $T(X_1, ...X_k)(p)$ závisí pouze na hodnotách těchto vektorových polí v bodě p. *Kontravariantní tenzor S k-tého řádu* na varietě M je k-lineární zobrazení $S : (\Omega^1(M))^k \to C^\infty(M)$ takové, že $S(\omega_1, ...\omega_k)(p)$ závisí pouze na hodnotách těchto 1-forem v bodě p.

Definice 25: *Metrikou $g \in T_2^0(M)$* na varietě M nazýváme 2-krát kovariantní symetrický tenzor nedegenerovaný v každém bodě $p \in M$.

Ještě je třeba definovat tzv. pushforward vektoru a pullback formy. Bez těch se dále, při převádění těchto objektů, neobejdeme.

Definice 26: Mějme hladké zobrazení mezi dvěma varietami $\phi : M \to N$, $f \in C^\infty$, $X \in T_pM$, $\omega \in T^*_{\phi(p)}N$. Pak *tečné zobrazení (pushforward)* v bodě $p \in M$ indukované zobrazením ϕ je zobrazení $\phi^* : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ definované vztahem $(\phi_*(X))f = X(f \circ \phi)$. *Kotečné zobrazení (pullback)* v bodě $\phi(p) \in N$ indukované zobrazením ϕ je zobrazení $\phi_* : T^*_{\phi(p)}N \to T_p^*M$ definované vztahem $\phi^*(\omega)X = \omega(\phi_*(X))$.

V lokálních souřadnicích platí

$$\phi^*(X) = X^k\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^k}\mid_p \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\mid_{\phi(p)},\ \ \phi_*(\omega) = \omega_\alpha\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^k}\mid_p dx^k\mid_p, \tag{1.25}$$

kde x^k jsou souřadnice na M, y^k souřadnice na N.

Nyní uděláme skok a přesuneme se rovnou k pojmu Lieovy derivace. Ta charakterizuje změnu geometrického objektu podél nějakého vektorového pole X, tj. v jeho směru. Definice využívá tečné a kotečné zobrazení indukované tokem vektorového pole. O něco stručněji lze definici Lieovy derivace zapsat pomocí Lieova přenosu definovaného pro bod p a bod $\tilde{p} = \Psi_t(p)$jako $\tilde{f}(\tilde{p}) = f(p)$ pro funkci, $\tilde{Y}(\tilde{p}) = \Psi_t^*(Y(p))$ pro vektorové pole a $\omega(p) = \Psi_t^*(\tilde{\omega}(\tilde{p}))$.

Definice 27: Definujeme *Lieovu derivaci ve směru vektorového pole* X pro
a/ funkci $f \in C^\infty(M)$ jako $\mathcal{L}_X f := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(\Psi_X^{t*}) - f(p)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(f(\tilde{p}) - \tilde{f}(\tilde{p})\right)$
b/ formu ω jako $\mathcal{L}_X \omega := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\Psi_X^{t*}\omega - \omega\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\omega(\tilde{p}) - \tilde{\omega}(\tilde{p})\right)$
c/ vektorové pole Y jako $\mathcal{L}_X Y := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(Y - \Psi_{X*}^t(Y)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(Y(\tilde{p}) - \tilde{Y}(\tilde{p})\right)$.

Z definice vidíme, že $\mathcal{L}_X f = Xf$, tj. pro skalární funkce je Lieova derivace totožná se směrovou. Jelikož budeme Lieovu derivaci hojně využívat, uvedeme i její souřadnicové vyjádření, resp. vzorec pro vektorové pole a 1-formu. Zcela analogicky se pak zavádí pro tenzory (konkrétně to uvidíme v kapitole 3).

$$\mathcal{L}_X Y = \left(X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} - Y^l \frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^l}, \tag{1.26}$$

$$\mathcal{L}_X \omega = \left(X^k \frac{\partial \omega_l}{\partial x^k} + \omega_l \frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right) dx^l \tag{1.27}$$

Na závěr kapitoly ještě propojíme dříve zavedené pojmy z teoretické mechaniky s diferenciální geometrií, to již spíše formou krátké rekapitulace. Předtím ještě připomeňme, že operace *vnější derivace* d formy, která převádí $(k-1)$-formu na k-formu a operaci *vložení vektoru do formy* i_X, který naopak z k-formy udělá $(k-1)$-formu, tj např. z 2-formy ω 1-formu $(i_X\omega)_\alpha = \omega_{\alpha\beta}X^\beta$.

Velmi stručně k Lagrangeově mechanice: její přirozenou arénou je tečný bundle TQ konfigurační variety Q představující všechny možné polohy systému. Souřadnice na tečném bundlu (dim= $2n$) jsou $(q^n, \dot{q}^n)$. Existuje význačná tzv. *Lagrangeova 1-forma* $\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} dq^j$ definovaná na TQ (tj. je to prvek $T^*(TQ)$). Pomocí ní lze elegantněji zapsat Lagrangeovy rovnice a další vztahy. Časový vývoj určují integrální křivky tzv. lagrangeovského dynamického pole X.

Důležitá je interpretace transformací. Bodová transformace na Q tvaru $q^l \to g'^k(q^l, \epsilon)$ je generována vektorovým polem na Z_Q na Q, pro které $Z_Q^k = \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} |_{\epsilon=0}$. (Tj. např. pro translaci v ose x máme $x' = x + \epsilon \Rightarrow Z_Q = \frac{\partial}{\partial x}$.) Rozšířením tohoto pole na TQ získáme pole Z generující tok $(\Psi_\epsilon, \Psi_{\epsilon*})$. Ukazuje se (viz [16]), že tvar Z je určeno jednoznačně jako $Z = Z_Q^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^m} \dot{q}^m \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$. Teorém Noetherové se pak elegantně zformuje: $\mathcal{L}_Z L = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_X g = 0$, kde $g = \theta_L(Z)$, tj. slovy: Nemění-li se hodnota lagrangiánu podél integrálních křivek vektorového pole Z, pak funkce g má podél integrálních křivek X konstantní hodnoty (což je přesně definice IP). Vrátíme-li se k příkladu translace, tak pro vůči ní invariantnímu L platí $\theta_L(Z) = m\dot{x}$, tj. zachovává se x-ová hybnost.

Prostředím Hamiltonovy mechaniky je kotečný bundle T^*Q. Legendrova duální transformace mezi L a H, resp. rychlostmi $\dot{q}^n$ a (kanonickými) hybnostmi p_n odpovídá izomorfismus mezi TQ a T^*Q. Důležité dále bude, že transformaci lze bezproblémově provést pouze pokud hessián lagrangiánu je nenulový. Legendrovým obrazem Lagrangeovy 1-formy je tzv. *kanonická*, či *Cartanova, 1-forma* $\theta_0 = p_j dq^j$, jež existuje na celém T^*Q (tj. je to prvek $T^*(T^*Q)$), nezávisí na konkrétní formě lagrangiánu a je jednoznačně určena fibrovanou strukturou T^*Q.

Další významnou formou pro hamiltonovskou mechaniku *kanonická*, či *Cartanova*, *symplektická* 2-forma (je nedegenerovaná a její vnější derivace je nulová), forma ω, v souřadnicích T^*Q vyjádřená jako $\omega = d\theta_0 = dp_j \wedge dq^j$. Složky této formy jsou členy tzv. *symplektické matice* $\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, kde I je identická matice (rozměru $n \times n$). Pomocí těchto objektů lze Hamiltonovy rovnice zapsat jako $\omega_{\alpha\beta}\dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha}$, kde $(z^1, ..., z^{2n}) = (q^1, ..., q^n, p_1 ..., p_n)$, a Poissonovu závorku jako $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z^\beta}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial g}{\partial z^\alpha} = \omega(X_f, X_g)$. Samotný časový vývoj systému je dán integrálními křivkami tzv. dynamického vektorového pole $X_H = \dot{z}^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta} = \omega^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial z^\beta}$, ještě stručnější zápis Hamiltonových rovnic je $i_X\omega = dH$. Velmi elegantní zápis také dostává teorém Noetherové - ten zní $\mathcal{L}_{X_g}H = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}_{X_H}g = 0$ (to díky vztahům $\mathcal{L}_{X_g}f = \{f, g\} \Rightarrow \mathcal{L}_{X_g}f = -\mathcal{L}_{X_f}g$, které ale není prostor dokazovat).

Pro úplnost ještě uveďme, že v případě explicitně časově závislých systémů pracujeme (v klasické mechanice) na skalárním součinu kotečného bundlu s $\Re$, kde $\Re$ je parametrizováno časovou souřadnicí t. To je v jistém smyslu v kontrastu s teorií relativity, kde je prostoročas čtyřrozměrnou varietou se všemi souřadnicemi (včetně časové) rovnocennými.

Kapitola 2

Hamiltonovská formulace relativistické dynamiky

Základním kamenem pro popis systému (jak klasického, tak kvantového) a výzkum jeho případné (super)integrability je Hamiltonův formalismus. Jeho analogii bychom tak potřebovali nalézt i v případě relativistického systému. Byť existuje i jiný způsob popisu relativistické dynamiky (prostoročasové geodetiky), bude hamiltonovský popis v této práci klíčový právě z toho důvodu, že teorie superintegrabilních systémů je vybudována v jeho termínech. Prvním pokusem vybudovat tuto teorii je slavný Diracův článek [7], na něj bylo částečně navázáno např. [17]. Je však třeba poznamenat, že historická motivace (a tedy i tyto zdroje) směřovala spíše k extenzi do kvantové mechaniky a proto se také většina dostupných zdrojů týká především metod kvantizace a kvantové teorie pole. Tam se používají dvě z níže zmíněných forem hamiltonovské formulace relativistické dynamiky a ne vždy je postup takový, jaký potřebujeme zde.

2.1 Problém s kanonickým Hamiltoniánem

Důvodem, proč nelze relativistický hamiltonovský popis zavést jednoduše zobecněním toho klasického je, že pokusíme-li se zkonstruovat kanonický hamiltonián, zjistíme, že je identicky roven nule. Podívejme se na to, proč tomu tak je. Demonstrovat to budeme na nejjednodušším případu – volné částici. Z postupu však bude jasné, že k problému dojde vždy. Informace vychází především z [18] (zde i dále jsou používány první dvě kapitoly) a [12].

Nejprve pár poznámek k relativistické akci (1.15) volné částice. Zde máme, jak již bylo uvedeno, $L = -m_0$, což je konstanta a můžeme ji tedy před integrál vytknout. Dále, díky vztahu mezi $\mathrm{d}\tau$ a intervalem $\mathrm{d}s = \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}$, ji lze psát pomocí $\mathrm{d}s$ a získat tak přirozené vyjádření akce volné částice jako délky její světočáry.

$$S = -m_0 \int_1^2 \mathrm{d}s = m_0 \int_2^1 \mathrm{d}s \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} = \int_2^1 L(s)\mathrm{d}s,, \tag{2.1}$$

kde v druhé rovnosti jsme použili invarianci druhé mocniny čtyřrychlosti, kterou nyní (pro názornost dalších kroků) značíme jako $\dot{x}$, tj. $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = 1$. Lagrangián v této parametrizaci jsme označili jako $L(s) = -m_0 = -\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} m_0$ Předpokládáme navíc $\dot{x}^0 > 0$ (kvůli kauzalitě – reálná částice prošlá jistým bodem Minkowského prostoročasu se musí vždy nacházet v budoucí části světelného kuželu tohoto bodu).

Spočteme-li nyní kanonickou čtyřhybnost (tj. postupujeme formálně shodně jako v klasické situaci), dostáváme

$$p_\mu^K = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{\partial (m_0 \sqrt{\dot{x}^2})}{\partial \dot{x}_\mu} = m_0 \dot{x}_\mu, \tag{2.2}$$

kde index na pravé straně je skutečně vespod (při derivaci skalárního součinu stojí před druhou mocninou dané složky čtyřrychlosti znaménko odpovídající příslušné složce metrického tenzoru). Znaménko minus v první rovnici zajišťuje korektní přechod k nerelativistické limitě. Pro volnou částici se tedy hybnost a kanonická hybnost shodují. Důležité zde však je, že (kanonické) hybnosti zjevně nejsou nezávislé. Platí totiž invariance druhé mocniny čtyřhybnosti

$$p^2 = m_0^2 \dot{x}^2 = m_0^2, \tag{2.3}$$

někdy nazývaná podmínka hmotnostního hyperboloidu (definuje tuto nadplochu). Právě tato skutečnost vede k tomu, že kanonický hamiltonián vymizí:

$$H_K := \dot{q}^K p_K - L(q^K, \dot{q}^K, t) = -p_\mu \dot{x}^\mu - L = -m_0 \dot{x}^2 + m_0 \dot{x}^2 = 0, \tag{2.4}$$

kde index K značí kanonické veličiny, nejde o sčítací index. Minus opět kvůli korektnosti limity.

Toto pozorování je jistě triviální, nicméně k jeho odůvodnění je třeba rozebrat jednu skutečnost. Tou je, že lagrangián tvaru v (2.1) je homogenní funkcí prvního stupně ve čtyřrychlosti, tj. $L(a\dot{x}^\mu) = aL(\dot{x}^\mu)$. To však znamená, že přejdeme-li k reparametrizaci světočáry $s \to s' : x^\mu(s) \to x^\mu(s'(s))$, lze jacobián $\mathrm{d}s'/\mathrm{d}s$ vytknout před lagrangián. Proveďme to rovnou v integrandu akce. Máme tak

$$S = \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s L\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right) = \int_{s_1'}^{s_2'} \mathrm{d}s' \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'} \frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}s} L\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s'}\right) \equiv S', \tag{2.5}$$

tedy výsledkem je opět výraz vyjadřující akci. To znamená, že je akce reparametrizačním invariantem. Tato invariance je generována právě podmínkou (2.3). Z téhož důvodu je lagrangián sám singulární (jeho hessián $W^{\mu\nu} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\mu \partial \dot{x}_\nu}$ je degenerovaný a jak je vidět platí $W^{\mu\nu}\dot{x}_\mu = 0$.)

Jak tedy vidíme, přechodem k relativistickému popisu získáváme podmínky či vazby (invarianty dané druhou mocninou čtyřvektorů), kterých se zbavit nelze (na rozdíl od běžně se vyskytujících vazeb klasických nelze volit souřadnice tak, abychom tyto vazby zahrnuli přímo do nich), což vede k uvedenému problému. To však neznamená, že generátor časového vývoje (jakkoli je to v relativistické fyzice pojem problematický sám o sobě) zkonstruovat nelze, či dokonce, že neexistuje. Je pouze nutné tuto konstrukci pojmout značně odlišně. Než se k ní však dostaneme, je třeba připomenout některé vlastnosti transformací v Minkowského prostoročase.

2.2 Poincarého grupa

Poincarého grupa, jindy také obecná Lorentzova či nehomogenní Lorentzova (neboť ji lze získat také rozšířením Lorentzovy grupy), je ve speciální relativitě grupa transformací zachovávajících interval. Jde tedy o grupu izometrií Minkowského prostoročasu. Jedná se o 10-parametrickou, Lieovu, neábelovskou grupu transformací, zahrnující translace a Lorentzovy transformace (tj. rotace a tzv. boosty) a přirozeně všechna jejich složení. Informace v této části vychází z [18, 19, 20, 10, 21].

Infinitezimální forma Poincarého transformace je popsána polem

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + \omega_{\mu\nu} x^\nu, \ \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \tag{2.6}$$

kde $a_\mu, \ \omega_{\mu\nu}$ jsou infinitezimální konstanty.

Zde ještě poznamenejme, že existuje ještě přepis pro transformace zahrnující i prostoročasové reflexe, někdy též brané jako součást Poincarého transformací

$$\xi_\mu = \alpha_\mu + \beta^\nu_\mu x_\nu, \text{ kde } \beta^{\nu\mu} g_{\mu\sigma} \beta^{\sigma\rho} = g^{\nu\rho}, \ \alpha_\mu, \ \beta^\nu_\mu = \text{konst.} \tag{2.7}$$

Ty ale nevyhovují přirozenému požadavku, aby transformace odpovídaly tomu, co vidí nějaký jiný lorentzovský pozorovatel (tj. ten, který má jinou polohu a rychlost) a aby šly tyto transformace vyjádřit i infinitezimálně. Omezíme se proto na ortochronní transformace, jejichž infinitezimální formu definuje právě (2.6).

Klíčové pro naši věc budou, ze dvou důvodů, generátory Poincarého grupy. Prvním důvodem je teorém Noetherové. Z něho plyne, že každé elementární transformaci odpovídá, pokud je daná transformace symetrií uvažovaného systému systému, jedna zachovávající se veličina. Toho lze hojně využívat a u některých, dostatečně symetrických, systémů tak získat integrály pohybu velmi snadno. Druhým je, že ze znalosti generátorů lze snadněji identifikovat podgrupy této grupy. Ty budou potřeba pro hamiltonovský popis jako takový, jak uvidíme dále.

Generátory lze ztotožnit s veličinami příslušnými elementárnímu souboru transformací. Konkrétně se čtyřhybností pro translace a se složkami čtyřtenzoru momentu hybnosti pro zbylé transformace (ten je antisymetrický, nezávislých složek je tedy skutečně šest), kde prvky nultého řádku/sloupce odpovídají vlastním či speciálním Lorentzovým transformacím, tzv. boostům a zbytek prostorovým rotacím. Vyjádřením pomocí vektoru momentu hybnosti $\mathbf{L} := \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ a $\mathbf{K} := x^0\mathbf{p} - p^0\mathbf{x}$ máme

$$L^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}M^{jk}, \tag{2.8}$$

$$K^i = M^{0i}, \tag{2.9}$$

kde generátory translací, tedy složky čtyřhybnosti, jsou značeny P^μ, generátory Lorentzových transformací, tedy složky čtyřtenzoru momentu hybnosti $M^{\mu\nu}$. Přičemž jsme využili zápis s kontravariantními veličinami (což je pouze volba formy, stejně tak značení generátorů velkým písmenem má původ pouze ve snaze držet se ve zdrojích užívané notace.). Pro pořádek uvádíme, že $p^\mu = (p_0 = p^0, \mathbf{p})$. Prostor těchto veličin (tj. funkcí) je vektorovým prostorem vybaveným Lieovou závorkou v podobě Poissonovy závorky

$$\{f, g\} = \frac{\partial g}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu} \tag{2.10}$$

což znamená, že jde o Lieovu algebru. Tato se nazývá Poincarého algebra a je dána Poissonovými závorkami jednotlivých veličin:

$$\{P^\mu, P^\nu\} = 0, \tag{2.11}$$

$$\{M^{\mu\nu}, P^\rho\} = g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu, \tag{2.12}$$

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\} = g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}, \tag{2.13}$$

Je zde třeba několika poznámek. První se týká toho, proč je Poissonova závorka definována „naopak“ resp. s minusem. Důvod je kanonická 1-forma tvaru $-g_{\mu\nu}p^\mu dx^\nu$, jež skutečně vytváří Poissonovu závorku tvaru (2.10), jde však spíše o formální rozdíl. Výpočet vztahů (2.11)-(2.13) to však nijak nekomplikuje. Fundamentální Poissonovy závorky zde budou

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0,\ \{p^\mu, p^\nu\} = 0,\ \{x^\mu, p^\nu\} = -g^{\mu\nu}. \tag{2.14}$$

Další poznámka se týká faktu, že všechny generátory, tak jak byly zavedeny, mají všechny složky kontravariantní, stejně jako jsou kontravariantní veličiny v jejich vyjádření (2.8) a (2.9). Je to kvůli konsistenci a jednoduchosti relací (2.11)- (2.13) (ačkoli fyzikální význam čtyřhybnosti má p_μ a význam souřadnice x^μ). Relace je samozřejmě možné zcela analogicky zapsat pro generátory pouze se spodními indexy (nebo kombinací). Dále stojí za upozornění, že (2.12) má kvůli tvaru metrického tenzoru jen jeden člen, (2.13) také (resp. tento má maximálně dva, které lze však, díky antisymetrii, vyjádřit jedním) např.

$$\begin{aligned}\{M^{12}, M^{13}\} &= \{\varepsilon_{312}L^3, \varepsilon_{213}L^2\} = \varepsilon_{312}\varepsilon_{213}\{x^1p^2 - x^2p^1,\ x^3p^1 - x^1p^3\} = \\ &= -\{x^1p^2 - x^2p^1,\ x^3p^1 - x^1p^3\} = -M^{32} = M^{23},\end{aligned} \tag{2.15}$$

což skutečně odpovídá jedinému nenulovému členu příslušného (2.13) $-g^{11}M^{23}$. Poslední poznámkou je, že algebru lze popsat ekvivalentně i jednoduššími relacemi pomocí (2.8) a

(2.9), avšak za cenu ztráty kovariantního tvaru.

Ještě pro úplnost uvedeme tvar matic příslušných k jednotlivým generátorům. Místo Poissonovy závorky lze totiž použít taktéž komutátory matic příslušných veličin a získat relace zcela analogické (2.11)-(2.13). Generátoru P^μ odpovídá translace v souřadnici s indexem μ, tj. přičtení vektoru s konstantní a jedinou nenulovou složkou μ. Generátoru M^{ij} odpovídá prostorová rotace, otáčející příslušné prostorové osy, tj. např. pro $i = 2, j = 3$ je rotace okolo osy x^1:

$$R^x_{00} = R^x_{11} = 1, R^x_{22} = R^x_{33} = \cos\varphi, R^x_{32} = -R^x_{32} = \sin\varphi,\ \text{jinde}\ R^x_{\mu\nu} = 0. \tag{2.16}$$

Zde je ještě třeba poznamenat, že pokud bychom připustili i reflexe, získali bychom další sadu matic, s $det = -1$ (na rozdíl od rotací mající $det = 1$, stejně jako transformace následující). Ty však, jak už bylo uvedeno, vylučujeme. Konečně generátoru M^{0i} odpovídá speciální Lorentzova transformace (boost) ve směru souřadnice x^i, tedy např pro $i = 1$ máme

$$B^x_{00} = B^x_{11} = \gamma, B^x_{01} = B^x_{10} = -\beta\gamma, B^x_{22} = B^x_{33} = 1,\ \text{jinde}\ B^x_{\mu\nu} = 0, \tag{2.17}$$

kde byl boost zapsán v obecném tvaru, v používaných jednotkách, kde $c = 1$ se samozřejmě zjednodušuje. Další možný způsob jeho vyjádření je pomocí rapidit: $\gamma = \cosh U$, $\gamma\beta = \sinh U$, kde rapidita $U := \operatorname{arctanh} u/c$.

Velmi důležitou charakteristikou Poincarého grupy jsou její podgrupy, jelikož však budou důležité hlavně v kontextu následující kapitoly, nebudeme je na tomto místě rozebírat.

Poslední důležitou informací k Poincarého grupě (kterou však použijeme až v kapitole 3) je, že je sama podgrupou grupy konformní. Tato grupa je 15-parametrickou grupou transformací, které zachovávají úhly (tedy interval obecně ne). Je definována polem

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + \omega_{\mu\nu}x^\nu + \lambda x_\mu + c_\mu(x^\kappa x_\kappa) - 2(c^\kappa x_\kappa)x_\mu,\ \text{kde}\ \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}, \tag{2.18}$$

kde, jak vidíme, vůči Poincarého transformaci přibyly poslední tři členy. První z nich představuje dilatace, přičemž λ je konstanta. Poslední dva členy odpovídají speciálním konformním transformacím, kde c_μ jsou též konstanty.

2.3 Hamiltonovský popis

Vrátíme se nyní k začátku této kapitoly, a podrobněji rozebereme, jak se lze vyhnout problému s nulovým kanonickým hamiltoniánem v (2.4). Jak už bylo uvedeno, původcem potíží je vlastně reparametrizační invariance generovaná podmínkou (2.3) (takovýchto vazeb samozřejmě nalezneme libovolné množství, tato však svazuje dynamické veličiny, pročež má specifické postavení). Informace vychází z [18, 19, 7, 12].

Klíčovým pozorováním je, že na reparametrizační invarianci lze nahlížet jako na kalibrační symetrii v tom smyslu, že jakoukoli světočáru lze popsat nekonečným množstvím parametrizací (stejně jako např. na určitý tvar (tenzoru) elektromagnetického pole vede nekonečné množství (čtyř)potenciálů). Pak tedy jednotlivé světočáry jsou vlastně třídami ekvivalence (daná třída je tvořena všemi světočárami, jež se liší pouze kalibrací, tj. parametrizací). Metoda, jak určitou světočáru popsat a zkoumat, se pak nabízí – je jí kalibrační fixace. Jelikož parametrizace, z níž jsme původně vycházeli je parametrizace pomocí vlastního času, ke kalibrační fixaci je třeba přistupovat analogicky – tj. fixace bude volbou časové souřadnice (v podstatě souřadnicového času). Máme-li už souřadnici, s níž pracujeme jako s časem, tedy parametrem, dynamický vývoj systému bude popsán pomocí počáteční podmínky a generátoru časového vývoje, jež bude spojovat stavy v jednotlivých časech, stejně, jak je tomu v klasické fyzice. Tímto ztratíme kovariantní popis, jelikož prostorové a časová souřadnice již nejsou rovnocenné, nepracujeme s vlastním časem, jež je invariantem, nýbrž s časovou souřadnicí různou pro různé pozorovatele. Získáme však fungující popis hamiltonovský.

Postup prakticky začne tak, že zvolíme obecné souřadnice q^μ, jež obecně mohou být křivočaré, a vybereme jednu, kterou budeme považovat za časovou. Tu označíme q^0, rovnice $q^0 = 0$ pak definuje nadplochu konstantního času (nebo ekvivalentně počáteční podmínku), dále označovanou jako Σ:

$$\Sigma = \{x | q^0 = 0\}. \tag{2.19}$$

Otázkou nyní je, jaké jsou podmínky či omezení pro možný výběr času a tedy i nadplochy definované konstantním časem. Abychom získali dobře definovaný hamiltonovský popis, je třeba splnit dvě podmínky, totiž existenci a jednoznačnost. To znamená, že každá světočára musí danou nadplochou konstantního času projít (protože světočáry, alespoň zde, nezanikají) a musí jí projít právě jednou (v daném časovém okamžiku je částice/systém pouze jednou). Na tomto místě se hodí uvést, že lze ukázat, že v nerelativistickém případě existuje právě jedna takováto volba (za časovou souřadnici lze zvolit pouze čas sám).

Existenční kriterium je poměrně snadné splnit, je třeba aby nadplocha protla celý světelný kužel (tedy nemůže být např. rovnoběžná s jeho osou, nesmí obsahovat časupodobné směry). Co se jednoznačnosti týče, lze ji podle teorie kalibračních fixací (užívané v kvantizaci) vyjádřit pomocí nenulovosti Faddeev-Popovova „operátoru“ FP, tj. Poissonovou závorkou mezi podmínkou volící danou kalibrační fixaci (zde (2.19)) a podmínkou generující invarianci (v tomto případě (2.3), ve zmíněné elektromagnetické analogii by to byl Gaussův zákon), to celé vyčíslené na dané nadploše. Detailní popis významu FP je mimo rozsah této práce, a ani v článcích, z níž vychází, popsaný není, uvedeme tedy ve shodě s nimi rovnou rovnici

$$\mathrm{FP} := \{q^0, \theta\}_{|\Sigma} = \{q^0, p \cdot p\}_{|\Sigma} = -\frac{\partial q^0}{\partial x^\mu} \frac{\partial (p \cdot p)}{\partial p_\mu} \,|_\Sigma = -2p^\mu \frac{\partial q^0}{\partial x^\mu} \,|_\Sigma = -2N \cdot p, \tag{2.20}$$

kde objekt definovaný jako

$$N^\mu(x) := \partial^\mu q^0 \,|_\Sigma \tag{2.21}$$

je normálou k Σ (např. [18]), tj. její skalární součin s každým tečným vektorem je nulový. Čteme-li nyní (2.20) zprava, je vidět že její nenulovost skutečně jednoznačnost zaručuje (v infinitezimálním vyjádření), znamená totiž, obecně, že trajektorie není rovnoběžná se Σ.

Ještě však přidáme jednu podmínku: od nadplochy konstantního času je totiž přirozené požadovat, aby byly všechny její body ekvivalentní. To je vyjádřeno podmínkou tranzitivity, tj.

$$\forall x, y \in \Sigma, \exists g \in G_\Sigma \text{ tak, že } x = gy, \tag{2.22}$$

kde G_Σ je grupa stability nadplochy Σ.

Tím bychom vyřešili požadavky na hamiltonovský popis, jelikož jsme ale v STR, splnit musíme i podmínky vyplývající z toho. Pro jakýkoli dynamický relativistický popis třeba, aby obsahoval nějakou realizaci Poincarého algebry (2.11)-(2.13) – pouze to garantuje, že popis zůstává „poincaréovsky invariantní“, tak jako běžný Minkowského popis. Přidání tohoto požadavku zúží počet přípustných Σ právě na pět přičemž grupy jejich stability jsou podgrupami Poincarého grupy. Základní realizací Poincarého algebry je již uvedená v minulé sekci (tj. generátory jsou přímo složky čtyřhybnosti a momentu čtyřhybnosti), lze ale (a bude třeba dále – konec následující sekce) nalézt i jiné realizace.

Nyní shrneme formalismus, pomocí kterého dojdeme od Σ k hamiltoniánu. Jsou-li podmínky splněny a máme-li vybrané souřadnice q^μ, je třeba převést do nich metrický tenzor, který v nich bude obecně nekonstantní. Značit ho budeme $h(x)$:

$$h_{\alpha\beta}(x) = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial q^\beta}. \tag{2.23}$$

Tím jsme zároveň zavedli novou metriku. Světočáru a lagrangián lze v souladu s předchozím napsat jako

$$L = -m_0 \sqrt{u^2} = -m_0 \sqrt{h_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta}, \tag{2.24}$$

kde $\dot{q}^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial \tau}$, přičemž jako τ nyní označujeme tu souřadnici, která je časová (tj. q^0) vyjádřená pomocí Minkowského souřadnic. Kanonické hybnosti jsou pak

$$p_\alpha = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}. \tag{2.25}$$

Dále musíme spočítat normálu $N^\mu = \partial^\nu \tau$, tu můžeme počítat v původních Minkowského souřadnicích. Je spojena s jednotkovým vektorem ve směru τ, tvaru $n^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$ vztahem $n^\mu N_\mu = 1$. hamiltonián pak bude, v souladu s FP relací (2.20) dán skalárním součinem

$$H = N^\mu p_\mu, \tag{2.26}$$

(předfaktor -2 je možné vynechat, výsledek vyjadřujeme v nových souřadnicích), resp. p_τ. Tuto složku pak vyjádříme z podmínky (2.3) pomocí ostatních složek (i tato podmínka je převedena do nových souřadnic). K tomuto kroku se ještě vrátíme, až vyložíme konkrétní Diracovy rovnice Σ v sekci 2.5 (obecně totiž patrně výsledek FP a p_τ shodné být nemusí, přesto že se tak většinou uvažují, jiná anomálie se zase vyskytne u světlupodobné Σ)

Závěrem ještě uvedeme vzorce, které musí splňovat generátory, aby byly kinematické - tj. takto vyšetřujeme grupu stability. Nadplocha zůstává zachována (resp. zobrazuje se při transformaci sama na sebe $\Leftrightarrow$ daný generátor je kinematický) pokud akce transformace příslušné tomuto generátoru na ni dá nulu. To nastává, pokud [19]

$$\partial^\mu \tau(x) = 0, \text{ resp. } (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)\tau(x) = 0, \tag{2.27}$$

pro nějaké μ, resp. μ, ν. P^μ resp. $M^{\mu\nu}$ je v takovém případě kinematický generátor. Většinou lze toto vyjádření získat přímo v původních, Minkowského souřadnicích. Generátory, pro které toto neplatí se nazývají dynamické (nebo, Diracovým názvoslovím, hamiltoniány), nadplochu mění, vyjadřují tedy nějaký vývoj.

2.4 Konkrétní možné volby Σ

Následující text vychází z [7], [18], [19], [21], a [12]. Jak již bylo uvedeno, existuje pouze pět možných korektních voleb Σ (resp. skupin voleb - viz dále), tyto skupiny odpovídají pěti podgrupám Poincarého grupy. Historicky bylo skutečně motivací zvolit nadplochu tak, aby aplikace nějaké části Poincarého transformací ji ponechala nezměněnou. Tento přístup užil P. M. Dirac ve svém slavném článku [7], kde nalezl tři možnosti. Po dokončení klasifikace podgrup Poincarého grupy přidali Leutwyler a Stern zbylé dvě (článek [17]) Shrneme nejprve ve výčtu nadplochy Σ a časové souřadnice τ odpovídající těmto kalibracím:

$$x^0 = 0 \text{ , } \tau = x^0 \text{ (instantní)}, \tag{2.28}$$

$$x^0 + x^3 = 0, \ \tau = x^0 + x^3 \text{ (frontální)}, \tag{2.29}$$

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = a^2, \ \tau = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 - a^2} \text{ (bodová)}, \tag{2.30}$$

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 = a^2, \ \tau = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - a^2}, \text{ (H1)} \tag{2.31}$$

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = a^2, \ \tau = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - a^2}, \text{ (H2) ,} \tag{2.32}$$

kde pro hyperbolické formy, jak budeme souhrnně označovat bodovou, H1 a H2 formu, požadujeme $a \in R$, $x^0 > 0$. Toto označení plyne z toho že jejich Σ je třírozměrný hyperboloid. Názvy prvních tří forem jsou přímými překlady Diracových označení. Ještě je nezbytné upozornit na to, že τ jsou uvedeny v jednotkách, kde $c = 1$, pokud by tomu tak nebylo, je třeba všechny souřadnice ve všech τ dělit c (tj. např. u bodové formy bude $\tau = \sqrt{(t)^2 - (x^1/c)^2 - (x^2/c)^2 - (x^3/c)^2 - (a/c)^2}$. Odtud také vidíme, že limita všech τ pro $c \to \infty$ je t, což koresponduje s faktem že v klasické fyzice je možná pouze jedna volba času (galileovský čas t). Běžně používané jsou instantní a frontální forma, méně často, i když stále používaná, je údajně bodová forma (alespoň podle uvedených zdrojů, ty však příklady neposkytují), poslední dvě formy se v podstatě nepoužívají.

Množiny transformací odpovídající kinematickým generátorů jednotlivých kalibrací, jsou právě podgrupami Poincarého grupy a zároveň grupami stability jednotlivých Σ. Obecně je výhodné, aby daná kalibrace byla co nejsymetričtější, a tedy měla co nejvyšší počet kinematických generátorů. To je zřejmě jedním z důvodů nepoužívání dvou novějších kalibrací (2.31), (2.32) – tyto mají shodně pouze čtyři kinematické generátory.

Dynamické generátory, naproti tomu, popisují časový vývoj (příslušné transformace Σ mění) a jeden z nich se ztotožňuje s hamiltoniánem. O hledání hamiltoniánu jsme se již zmínili (a ještě se k němu vrátíme). Existuje však i jiný postup, Diracův [7], kterým lze najít i ostatní dynamické generátory. Ty totiž musíme vyjádřit pomocí kinematických a taktéž do nich zahrnout interakční (viz [18] a [7]), případně polní, členy tak, aby výsledná vyjádření stále splňovala realizace Poincarého algebry (2.11)-(2.13). To klade na tyto členy striktní podmínky, které se však zvláště při popisu interakcí mohou ukázat značně složité. Postup nicméně probíhá tak, že se příslušné generátory zapíší klasicky, pomocí čtyřhybností a jejich momentů a k nim se přidá člen $\lambda(p^\mu p_\mu - m_0^2)$ (a případně interakční členy), kde λ je Lagrangeův multiplikátor, specifický pro každý generátor. Pak postupujeme tak, abychom splnili rovnice Poincarého algebry a abychom vyloučili závislost na časových složkách.

2.5 Instantní, frontální a bodová kalibrace

Následující informace vychází z [7, 18, 19, 21, 12], rozebereme zde důkladněji Diracovy formy. Hamiltoniány budeme ukazovat na volné částice, později (kapitola 3) ale uvidíme, že rozšíření je přímočaré).

Podívejme se nejprve na instantní formu (2.28). Její výhoda spočívá v tom, že se v podstatě chová jako hamiltonovský popis v klasickém případě, práce s ní je tedy jaksi přirozená, jednoduchá (taktéž proto, že se při ní nemění metrický tenzor) a navíc je vhodná pro určení nerelativistické limity. Značnou nevýhodou je skutečnost, že v hamiltoniánu je odmocnina, což ztěžuje výpočty i interpretaci. Nadplocha odpovídající konstantnímu času je kolmá k ose světelného kužele. Normála a FP je

$$N^I = (1, 0, 0, 0), \;\; FP^I = -2p_0 \tag{2.33}$$

tedy časupodobná. Poissonova závorka má tvar

$$\{A, B\}^I = \frac{\partial A}{\partial x^j}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial x^j} \tag{2.34}$$

(připomínáme, že $j = 1, 2, 3$). Hamiltonián a časový vývoj veličiny A je pak

$$H^I = p_0 = \sqrt{m_0^2 + p_j^2}, \;\; \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} - \{A, H^I\}^I, \tag{2.35}$$

kde p_0 jsme vyjádřili pomocí ostatních složek čtyřhybnosti z (2.3). Na závěr se podívejme na podmínku (2.27) – tu splňují všechna P^j a M^{kj} pro $j, k = 1, 2, 3$. Těchto šest generátorů je tedy kinematických.

Další kalibrací je frontální forma (2.29). Její výhodou je nejvyšší počet kinematických generátorů a to, že hamiltonián není vyjádřen odmocninou. Nadplocha konstantního času je tečná k plášti světelného kužele, stejně jako u instantní formy je tedy „rovná“. Drobnou nevýhodou však může být i jistá nekonzistence zavedení a značení v jednotlivých zdrojích. Zde budeme používat následující: definujeme

$$x^p = x^0 + x^3,\ x^m = x^0 - x^3, \tag{2.36}$$

a stejně pro libovolný čtyřvektor. Složky x^1, x^2 zůstávají beze změny. (Hojně se používá např značení $+, -, \perp$, kde $(x^1, x^2) = x^\perp$, to je ale poněkud nepřehledné). Skalární součin se pak zapíše jako

$$x \cdot y = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = -x^1y^1 - x^2y^2 + \tag{2.37}$$

$$+\frac{x^p + x^m}{2}\frac{y^p + y^m}{2} - \frac{x^p - x^m}{2}\frac{y^p - y^m}{2} = \frac{1}{2}x^py^m + \frac{1}{2}x^my^p - x^1y^1 - x^2y^1.$$

To tedy znamená, že metrický tenzor se mění na

$$-1 = g_{11} = g_{22},\ \frac{1}{2} = g_{pm} = g_{mp},\ \text{jinak } g_{\mu\nu} = 0, \tag{2.38}$$

který již není diagonální. Z tvaru skalárního součinu (porovnáme (2.37) s $x \cdot y = x^py_p + x^my_m + y^1y_1 + y^2y_2 \Rightarrow y^m/2 = y_p, y^p/2 = y_m$), nebo alternativně z pullbacku 1-formy vidíme, že kovektory se transformují shodně až na konstantu 1/2, tedy např. $p_p = (p_0 + p_3)/2, p_m = (p_0 - p_3)/2$). Zdůrazňujeme, že některé zdroje zavádí x^p a x^m vydělené $\sqrt{2}$ (tj. přeškálované tak, aby složky metrického tenzoru měly velikost 1). Upozorňujeme také, že kdybychom používali metrický tenzor s opačnou signaturou, vyjdou vztahy pro kovektory s minusem.

Normála k Σ a FP bude

$$N^F = g \cdot \partial = (1, 0, 0, -1),\ FP^F = -4p_m, \tag{2.39}$$

přičemž je důležité, že její velikost bude nulová, je tedy světlupodobná. FP by mohla být nulová pro nehmotné částice pohybující se ve směru -x^3, těmi se však zaobírat nebudeme. Světlupodobnost je ale problematická i v další věci. Normála totiž leží na nadploše Σ a odpovídá tak „kinematickému“ směru. Proto zavádíme hamiltonián v souladu se zdroji (např. [1]) v termínech druhého světlupodobného vektoru $n^\mu = (1, 0, 0, 1)$. Pak je $n \cdot p = 2p_p$ a právě tato složka pro nás bude hamiltoniánem. Poissonova závorka bude

$$\{A, B\}^F = \frac{\partial A}{\partial x^j}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial x^j}, \tag{2.40}$$

kde $j = m, 1, 2$ zde i dále při použití této formy, hamiltonián a časový vývoj veličiny A bude tedy

$$H^F = p_p = \frac{1+p_i^2}{4p_m}, \quad \frac{dA}{dx^p} = \frac{\partial A}{\partial x^p} - \{A, H^F\}^F, \tag{2.41}$$

kde časovou složku hybnosti jsme opět vyjádřili z (2.3):

$$1 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_0 p_3 - p_0 p_3 = \tag{2.42}$$

$$= -p_1^2 - p_2^2 + 4\left(\frac{p_0+p_3}{2}\frac{p_0-p_3}{2}\right) = -p_1^2 - p_2^2 + 4p_m p_p$$

Prohlédneme-li si opět podmínku (2.27), zjistíme, že mnohem lépe ji prozkoumáme v nových souřadnicích. Z toho plyne sedm kinematických generátorů, zapsaných v nových souřadnicích jako $P^m, P^i, M^{12}, M^{im}, M^{pm}$.

Poslední popsanou formou bude bodová (2.30). Jediným zdrojem je článek [19], Dirac [7] sice bodovou formu rozebírá, ne však způsobem příliš užitečným pro naši věc. Je jasné, že kvůli tomu, že je Σ hyperboloid, bude třeba křivočarých souřadnic a tím bude i postup formalismu, nastíněný v minulé sekci složitější (na rozdíl od instantní a frontální formy, kde jsme ho, vzhledem k jednoduchosti a přímé souvislosti s již vyloženým, nerozepisovali). V článku jsou popsány jen nejdůležitější výsledky, zde projdeme i mezikroky. Nejprve je třeba parametrizovat nadplochu. Pro jednoduchost, stejně jako v článku, zvolíme $a = 0$. To ale můžeme udělat, pouze budeme-li dále předpokládat $\tau > 0$. V opačném případě by (2.30)) přešla ve světelný kužel, mající jen čtyři kinematické generátory a není tranzitivní. Za tohoto předpokladu tedy

$$x^0 = \tau \cosh\omega, \; x^1 = \tau \sinh\omega \sin\theta \cos\phi, \; x^2 = \tau \sinh\omega \sin\theta \sin\phi, \; x^3 = \tau \sinh\omega \cos\theta. \tag{2.43}$$

Jak uvidíme v sekci 4.1.2, všechny tři hyperbolické formy mají shodnou parametrizaci x^0, to může být výhodné při studiu systémů v nich a porovnávání jejich vyjádření. Dále nalezneme metriku světočáry, resp. metrický tenzor. Z formule (2.23) máme diagonální prvky:

$$h_{\tau\tau} = \cosh^2\omega - \sinh^2\omega(\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta) = 1 \tag{2.44}$$

$$h_{\omega\omega} = \tau^2\sinh^2\omega - \tau^2\cosh^2\omega(\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta) = -\tau^2$$

$$h_{\theta\theta} = -\tau^2\sinh^2\omega(\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta) = -\tau^2\sinh^2\omega$$

$$h_{\phi\phi} = -\tau^2\sinh^2\omega\sin^2\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = -\tau^2\sinh^2\omega\sin^2\theta.$$

Naopak prvky mimo diagonálu jsou všechny nulové. Nebudeme to do detailů rozepisovat, ukážeme pouze jeden příklad:

$$h_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \mu = \nu, \text{ např. :} \tag{2.45}$$

$$h_{\tau\omega} = \cosh\omega\tau\sinh\omega - \tau\sinh\omega\cosh\omega(\cos^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta) = 0.$$

Dále určíme lagrangián z (2.24):

$$L^B = -m_0\sqrt{1-\tau^2\left(\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2+\sinh^2\omega\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2+\sinh^2\omega\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right)} \tag{2.46}$$

a normálu:

$$N^\mu_B = \partial^\nu \tau_B = \partial^\nu\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2} = \tag{2.47}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2}}(x^0,x^1,x^2,x^3) \Leftrightarrow N^\mu_B = \frac{x^\mu}{\tau_B} = n^\mu_B.$$

Z toho také vidíme, že žádné z P^μ není kinematickým generátorem. Naopak jsou jimi všechny $M^{\mu\nu}$, protože

$$(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\tau_B = \frac{1}{\tau}(x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu) = 0. \tag{2.48}$$

A tedy máme šest kinematických generátorů. Nyní se dostáváme k výpočtu hamiltoniánu: převedeme si hybnosti do nových souřadnic jako

$$p_0 = \frac{\partial x^0}{\partial\tau}p_\tau + \frac{\partial x^0}{\partial\omega}p_\omega = \cosh\omega p_\tau + \tau\sinh\omega p_\omega, \tag{2.49}$$

$$p_1 = \sinh\omega\sin\theta\cos\phi p_\tau + \tau\cosh\omega\sin\theta\cos\phi p_\omega + \tau\sinh\omega\cos\theta\cos\phi p_\theta - \tau\sinh\omega\sin\theta\sin\phi p_\phi,$$

$$p_2 = \sinh\omega\sin\theta\sin\phi p_\tau + \tau\cosh\omega\sin\theta\sin\phi p_\omega + \tau\sinh\omega\cos\theta\sin\phi p_\theta + \tau\sinh\omega\sin\theta\cos\phi p_\phi,$$

$$p_3 = \sinh\omega\cos\theta p_\tau + \tau\cosh\omega\cos\theta p_\omega - \tau\sinh\omega\sin\theta p_\theta$$

a v souladu s [19] určíme hamiltonián jako $N^\mu p_\mu = \frac{x^\mu p_\mu}{\tau}$, když ale toto rozepíšeme, zjistíme, že výsledkem není p_τ:

$$H^B = N^\mu p_\mu = \frac{x^\mu p_\mu}{\tau} = \cosh^2\omega p_\tau + \tau\sinh\omega\cosh\omega p_\omega + \tag{2.50}$$

$$+\sinh^2\omega\sin^2\theta\cos^2\phi p_\tau + \tau\cosh\omega\sinh\omega\sin^2\theta\cos^2\phi p_\omega + \tau\sinh^2\omega\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi p_\theta -$$

$$-\tau\sinh^2\omega\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi p_\phi + \sinh^2\omega\sin^2\theta\sin^2\phi p_\tau + \tau\cosh\omega\sinh\omega\sin^2\theta\sin^2\phi p_\omega +$$

$$+\tau\sinh^2\omega\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi p_\theta + \tau\sinh^2\omega\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi p_\phi + \sinh^2\omega\cos^2\theta p_\tau +$$

$$+\tau\cosh\omega\sinh\omega\cos^2\theta p_\omega - \tau\sinh^2\omega\sin\theta\cos\theta p_\theta =$$

$$= (\cosh^2\omega + \sinh^2\omega)p_\tau + 2\tau\sinh\omega\cosh\omega p_\omega = \cosh(2\omega)p_\tau + \tau\sinh(2\omega)p_\omega.$$

Získali jsme kombinaci dvou různých složek hybnosti. Ta se však z podmínky (2.3) vyjádřit nedaří, nemáme tedy přímé vyjádření hamiltoniánu a je otázkou, jak dále postupovat. Protože se takto chovají všechny hyperbolické formy, nastíníme tyto otázky v sekci 4.1.2. Jelikož naprostá většina zdrojů pracuje pouze s instantní a frontální formou, ztotožňují ve výkladu časovou složku hybnosti s výsledkem FP, zároveň vypadá logicky, že částí hybnosti „směřující do časového směru“/generující časový vývoj by měla být právě p_τ. U hyperbolických forem je však (patrně kvůli křivosti) situace komplikovanější.

Toto ještě neznamená, že forma je neužitečná (lze např. vyjádřit původní dynamické generátory a s těmi pak pracovat [7]) nicméně pro naše účely (a ve formalismu, jaký jsme použili) patrně použitelná nebude. Co je také zajímavé, je skutečnost, že v metrickém tenzoru a tedy i hamiltoniánu (a lagrangiánu) se explicitně vyskytuje τ. Je tedy jasné, že hamiltonián sám nebude IP ani pro volnou částici.

Kapitola 3

Popis a supeintegrabilita relativistických systémů s elektromagnetickým polem

Ústředním tématem této práce jsou, i přes jisté množství potřebné obecné teorie předkládaného výše, superintegrabilní relativistické systémy s (elektro)magnetickým polem. Hlavním výchozím bodem pro nerešeršní část tak jsou dva články [1, 2], jež se tímto tématem zabývají a budou také hlavními zdroji této kapitoly. Jelikož se články zabývají vzájemně mírně odlišnou problematikou, i potřebný teoretický úvod obsahuje částečně odlišné druhy poznatků. Tato kapitola bude souhrnem obsahu článků a jejich metod, spolu s podrobnějším rozepsáním příkladů použitých postupů, jež jsou v článcích jen naznačeny.

3.1 Článek [1]

Článek hledá relativistické obdoby pěti známých systémů s obecným elektromagnetickým polem. Pracuje tak přirozeně se čtyřpotenciálem. Nejprve se podíváme na to, jak vypadá vyjádření integrálů pohybu, příslušejících k Poincarého grupě. Deseti elementárním transformacím v ní obsaženým odpovídá deset možných noetherovských integrálů pohybu tvaru $\xi^\mu(x)p_\mu$. Jejich totální derivaci podle vlastního času (případně jiného parametru akce) získáme z vyjádření lagrangiánu (1.22), přičemž pracujeme se systémy, pro které $m_0 = 1 = -q$ (od teď již dále, všude).

3.1.1 Potřebná teoretická fakta a odvození

Mějme relativistickou částici v poli s čtyřpotenciálem. Její lagrangián je

$$L = -\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} - \dot{x}^\mu A_\mu. \tag{3.1}$$

Akce je stacionární (Euler-Lagrangeova rovnice, kapitola 2) pro trajektorii splňující

$$\dot{p}_\mu = \dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu. \tag{3.2}$$

kde p_μ je klasicky získaná kanonická hybnost

$$p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} + A_\mu, \tag{3.3}$$

přičemž $\sqrt{\dot{x}^2}$ je, jak již víme, podél trajektorií konstantní (a bude fixováno jako 1, pro úplnost jej ale píšeme). Totální časová derivace noetherovského „náboje“ bude [1], s využitím (3.2),:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\xi^\mu p_\mu\right) = \xi^\mu \dot{p}_\mu + p_\mu \dot{\xi}^\mu = \dot{x}^\nu(\xi^\mu \partial_\mu A_\nu + A_\mu \partial_\nu \xi^\mu) =: \dot{x}^\nu \mathcal{L}_\xi A_\nu, \tag{3.4}$$

kde $\mathcal{L}_\xi A_\nu$ značí Lieovu derivaci A_ν vzhledem k vektorovému poli ξ (zde pole generující příslušnou Poincarého transformaci).

Čtyřpotenciál je nazýván symetrickým, je-li A_μ vůči akci Lieovy derivace invariantní až na kalibrační transformaci, tj. existuje skalární funkce Λ tak, že

$$\mathcal{L}_\xi A_\nu = \partial_\nu \Lambda. \tag{3.5}$$

Tento požadavek je lokálně ekvivalentní invarianci tenzoru elektromagnetického $F_{\mu\nu}$ pole vůči akci Lieovy derivace, tedy

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} := \xi^\sigma \partial_\sigma F_{\mu\nu} + F_{\sigma\nu}\partial_\mu \xi^\sigma + F_{\mu\sigma}\partial_\nu \xi^\sigma = 0. \tag{3.6}$$

Dosadíme-li sem vyjádření $F_{\mu\nu}$ (1.10), vidíme, že rovnice je pro takový čtyřpotenciál skutečně splněna. Právě rovnici (3.6) budeme využívat k nalezení případných integrálů pohybu spojených s Poincarého symetriemi. Jak totiž vidíme, rovnici (3.4) lze využitím $\frac{d}{d\tau} = \dot{x}_\mu \partial_\mu$ a (3.5) přepsat jako

$$\frac{d}{d\tau}(\xi^\nu p\nu - \Lambda) = 0, \tag{3.7}$$

což znamená, že máme integrál pohybu

$$Q = \xi^\nu p_\nu - \Lambda. \tag{3.8}$$

Pro hledání dalších integrálů pohybu již budeme potřebovat hamiltonián a tedy potřebujeme vybrat kalibraci. Článek [1] pracuje především ve frontální formě. Využívá ji všude, krom systému prezentujícím undulátor, kde je využita forma instantní. Jak již bylo zmíněno, hamiltonián u jednotlivých forem je dán „časovou“ složkou čtyřhybnosti k nim příslušnou. Její vyjádření pomocí ostatních souřadnic a hybností získáme z podmínky (2.3). Zde musíme udělat jistou vyjasňovací odbočku: v předchozích sekcích jsme zatím vždy pracovali s volnou částicí, což znamená že souřadnicová hybnost, pro kterou platí (2.3) a kanonická hybnost byly shodné. To, co se objevuje v hamiltoniánu má být ale právě hybnost kanonická. Podmínku tak musíme zapsat tak, že v ní za souřadnicové hybnosti napíšeme jejich vyjádření pomocí kanonických, tj. v přítomnosti pole z (3.3) $p_\mu = p_\mu^K - A_\mu$. Z toho pak vyjádříme časovou složku p_μ^K, která bude hamiltoniánem. Pro instantní formu tak máme

$$H = p_0^K = \sqrt{m_0^2 + (p_j^K - A_j)^2} + A_0. \tag{3.9}$$

To samé nyní proveďme pro frontální formu. Zde již však zasáhne skutečnost, že normála (2.39) leží na nadploše. Hamiltonián je proto, jak bylo již uvedeno v sekci 2.5, určen druhým světlupodobným vektorem a tedy je to p_p (čímž zde myslíme hybnost konjugovanou k x^p). Podmínka (2.3) dává, navážeme-li na předposlední rovnost v (2.42)

$$m_0^2 = p_\mu p^\mu = -p_1^2 - p_2^2 + 4\left(\frac{p_0+p_3}{2}\frac{p_0-p_3}{2}\right) = -(p_i^K - A_i)^2 + \tag{3.10}$$

$$+4\left(\frac{p_0^K - A_0 + p_3^K - A_3}{2}\frac{p_0^K - A_0 - p_3^K + A_3}{2}\right) = -(p_i^K - A_i)^2 + 4(p_p^K - A_p)(p_m^K - A_m)$$

a tedy hamiltonián částice v poli bude

$$H = p_p^K = \frac{(p_i^K - A_i)^2 + m_0^2}{4(p_m^K - A_m)} + A_p, \tag{3.11}$$

Vhodnou kalibrací čtyřpotenciálu lze ještě zjednodušit jmenovatel (volíme-li ji tak, aby A_m bylo nulové).

Dále již nebudeme rozlišovací index K používat, neboť nyní již vždy budeme pracovat pouze s kanonickými hybnostmi.

3.1.2 Symetrie čtyřpotenciálu vůči Poincarého transformacím

Nyní již přistoupíme ke konkrétním systémům a metodám v článku probíraným. První věc, kterou ukážeme přímo na příkladu, bude hledání Poincarého symetrií čtyřpotenciálu. Začneme s postupem v instantní formě, který je v článku využit pro systém 3.3. – undulátor. To je systém s magnetickým polem oscilujícím v prostoru, tedy tvaru

$$\boldsymbol{B} = B_0(\cos(\omega x^3), \sin(\omega x^3), 0). \tag{3.12}$$

V klasickém případě je superintegrabilní. Nyní je možné vybrat různé kalibrace (a tedy různé tvary čtyřpotenciálu). V článku je kalibrace zvolena tak, aby nenulové byly pouze transverzální složky (A_1, A_2), což přináší výrazné zjednodušení výpočtů. Konkrétně

$$A_1 = b_0\cos(\omega x^3),\ A_2 = b_0\sin(\omega x^3),\ \text{kde } b_0 = \frac{B_0}{\omega}. \tag{3.13}$$

Z toho vypočteme tenzor elektromagnetického pole. Jediné nenulové složky budou

$$B_2 = F_{13} = \omega b_0 \sin(\omega x^3) = -F_{31}\ ,\ B_1 = F_{23} = -\omega b_0\cos(\omega x^3) = -F_{32}. \tag{3.14}$$

Pro Lieovu derivaci nejprve musíme vyjádřit ξ^μ (jelikož v sekci 2.2 jsme pracovali s ξ_μ). To znamená povýšení indexu:

$$\xi^\mu = g^{\mu\nu}\xi_\nu = a^\mu + \omega^\mu_\kappa x^\kappa, \tag{3.15}$$

toto nyní rozepíšeme:

$$\begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\\ \xi^2\\ \xi^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^0+\omega_{01}x^1+\omega_{02}x^2+\omega_{03}x^3\\ a^1+\omega_{01}x^0-\omega_{12}x^2-\omega_{13}x^3\\ a^2+\omega_{02}x^0+\omega_{12}x^1-\omega_{23}x^3\\ a^3+\omega_{03}x^0+\omega_{13}x^1+\omega_{23}x^2\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Na tomto místě provedeme úpravu značení. Jelikož jsme ponechali značení v původních ω (tedy s dolními indexy) a využili jen polovinu (antisymetrické) matice, takto vyjádřené ξ nyní zafixujeme a $\omega_{\mu\nu}$, které se v něm vyskytují přejmenujeme na $c_{\mu\nu}$, které již budeme chápat prostě jako konstanty (nikoli složky matice) a tedy jejich indexy jsou pouze rozlišovací, tedy $c_{\mu\nu}$ a $c_{\nu\mu}$ mají stejný význam a budou ponechány vždy dole. (Důvodem tohoto kroku je umenšení možných chyb vzniklých značením a to, že symbol ω je sice tradičním značením u Poincarého transformace, ale také hojně používaným symbolem, např. pro úhlovou rychlost oscilací). Nyní se vrátíme k undulátoru a rozepíšeme Lieovu derivaci podle ξ po složkách. Nejprve upozorníme na viditelný fakt, totiž že diagonální složky, tj $\mathcal{L}_\xi F_{\mu\mu}$ budou díky antisymetrii nulové automaticky (u všech systémů), a dále $\mathcal{L}_\xi F_{\nu\mu}$ a $\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu}$ poskytnou ekvivalentní výrazy. Ostatní zde mají tvar

$$\mathcal{L}_\xi F_{01} = F_{31}\partial_0\xi^3 = -\omega b_0\sin(\omega x^3)c_{30}, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{02} = F_{32}\partial_0\xi^3 = \omega b_0\cos(\omega x^3)c_{30}, \tag{3.18}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{03} = F_{13}\partial_0\xi^1 + F_{23}\partial_0\xi^2 = \omega b_0\sin(\omega x^3)c_{10} - \omega b_0\cos(\omega x^3)c_{20}, \tag{3.19}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{12} = F_{23}\partial_1\xi^3 + F_{13}\partial_2\xi^3 = \omega b_0\sin(\omega x^3)c_{32} - \omega b_0\cos(\omega x^3)c_{31}, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{13} = \xi^3\partial_3F_{13} + F_{13}\partial_1\xi^1 + F_{23}\partial_1\xi^2 + F_{13}\partial_3\xi^3 = \tag{3.21}$$

$$= (a^3+c_{30}x^0+c_{31}x^1+c_{32}x^2+c_{33}x^3)\omega^2b_0\cos(\omega x^3) + \omega b_0\sin(\omega x^3)c_{11}$$
$$-\omega b_0\cos(\omega x^3)c_{21} - \omega b_0\cos(\omega x^3)c_{33}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{23} = \xi^3\partial_3F_{23} + F_{13}\partial_2\xi^1 + F_{23}\partial_2\xi^2 + F_{23}\partial_3\xi^2 = \tag{3.22}$$

$$= (a^3+c_{30}x^0+c_{31}x^1+c_{32}x^2+c_{33}x^3)\omega^2b_0\sin(\omega x^3) - \omega b_0\sin(\omega x^3)c_{12}$$
$$-\omega b_0\cos(\omega x^3)c_{22} + \omega b_0\cos(\omega x^3)c_{23},$$

Požadujeme-li, aby byly všechny složky Lieovy derivace nulové, vidíme, že (vzhledem k nezávislostí funkcí sin, cos a x^μ) musí být všechny složky c krom c_{21} nulové. c_{21} je určena hodnotou a^3 (resp. naopak). Členy a^0, a^1 a a^2 se naopak v rovnicích nevyskytují vůbec, lze je tedy volit libovolně. Podmínka plynoucí z posledních dvou rovnic je pak

$$a^3\omega - c_{21} = 0. \tag{3.23}$$

Pro tři složky a tak můžeme rovnou říci, že jim příslušející veličiny jsou IP, tedy

$$Q_1 = p_1,\ Q_2 = p_2,\ Q_3 = p_0 = H. \tag{3.24}$$

Z podmínky (3.23) dostaneme, že příslušné ξ (ozn. ξ_4, tj. ξ mající nenulové pouze konstanty obsaženy (3.23), přičemž a^3 volíme jako jednotkové) bude tvaru

$$\xi_4^0 = 0,\ \xi_4^1 = -\omega x^2,\ \xi_4^2 = \omega x^1,\ \xi_4^3 = 1, \tag{3.25}$$

kde jsme zvolili konkrétní bázi (zafixování a^3 na 1, jinak je před každým vyjádřením ještě libovolná ale shodná konstanta), stejně jako v prvních třech ξ resp. IP. V této bázi máme

$$Q_4 = -\xi^\mu p_\mu = \omega(x^1 p_2 - x^2 p_1) + p_3. \tag{3.26}$$

Je vidět (resp. lze okamžitě ověřit), že první tři poincaréovské IP jsou v involuci a všechny čtyři jsou nezávislé.

Jako další ukážeme, jak získat poincaréovské integrály ve formě frontální. K tomu potřebujeme vyjádřit transformaci v souřadnicích této formy. Technicky se jedná o pushforward vektorového pole ξ. V tomto případě se jednoduše sčítá první a třetí řádek (3.16), abychom získali ξ^p a odečítá první od třetího abychom dostali ξ^m. Pak jen vše přepíšeme do frontálních souřadnic. Tedy (detailně rozepisujeme jen ξ^p):

$$\begin{pmatrix} \xi^p \\ \\ \xi^m \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 + \omega_{01}x^1 + \omega_{02}x^2 + \omega_{03}x^3 + a^3 + \omega_{03}x^0 + \omega_{13}x^1 + \omega_{23}x^2 = \\ = a^p + x^1(\omega_{01} + \omega_{13}) + x^2(\omega_{02} + \omega_{23}) + x^p\omega_{03} \\ a^m + x^1(\omega_{01} - \omega_{13}) + x^2(\omega_{02} - \omega_{23}) - x^m\omega_{03} \\ a^1 - x^2\omega_{12} + \frac{1}{2}x^p(\omega_{01} - \omega_{13}) + \frac{1}{2}x^m(\omega_{01} + \omega_{13}) \\ a^2 + x^1\omega_{12} + \frac{1}{2}x^p(\omega_{02} - \omega_{23}) + \frac{1}{2}x^m(\omega_{02} + \omega_{23}) \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Opět takto vyjádřené ξ budeme považovat za dané a aby nedocházelo k chybné interpretaci, pevné konstanty ω opět přejmenujeme na $c_{\mu\nu}$, pouze ve smyslu rozlišení jedné konstanty od druhé, nikoli jako složky matice, přičemž význam $c_{\mu\nu}$ a $c_{\nu\mu}$ považujeme (na rozdíl od původních ω) za shodný. Způsob zapsání odpovídá obvykle užívané bázi poincaréovských IP ve frontální formě, tj. pracuje se konstantami danými závorkami či samostatnými členy ω v (3.27) (tj. např. $(\omega_{02} - \omega_{23})$ se považuje za jednu konstantu), kterých je, jak je vidět, správně 10.

Nyní můžeme pracovat s konkrétním systémem. Jako příklad vezmeme systém 3.2 z článku, TM-mode model („a toy model of transferse magnetic (TM) laser beam near the beam axis“ [1]). Jeho čtyřpotenciál, odpovídající poli

$$\boldsymbol{E} = \varepsilon(x^p)(x^1, x^2, x^p),\ \boldsymbol{B} = \varepsilon(x^p)(x^2, -x^1, 0), \tag{3.28}$$

je

$$A_p = -\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{2(x^p)^2} f(x^p),\ A_m = -\frac{f(x^p)}{2},\ A_1 = \frac{x^1}{x^p} f(x^p),\ A_2 = \frac{x^2}{x^p} f(x^p), \tag{3.29}$$

kde $\varepsilon(x^p) = f'(x^p)/x^p$. Nenulové složky tenzoru elektromagnetického pole tedy budou (počítá se zcela shodně jako u instantní formy):

$$F_{pm} = -\frac{1}{2} f'(x^p) = -F_{mp},\ F_{p1} = \frac{x^1 f'(x^p)}{x^p} = -F_{1p},\ F_{p2} = \frac{x^2 f'(x^p)}{x^p} = -F_{2p}. \tag{3.30}$$

Složky Lieovy derivace (opět zcela analogický postup jako u instantní formy), které nejsou identicky nulové automaticky, jsou:

$$\mathcal{L}_\xi F_{12} = F_{p2}\partial_1\xi^p + F_{1p}\partial_2\xi^p = \frac{x^2 f'(x^p)}{x^p}(c_{10} + c_{31}) + \frac{x^1 f'(x^p)}{x^p}(c_{20} + c_{32}), \tag{3.31}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{m1} = F_{mp}\partial_1\xi^p) = \frac{1}{2}f'(x^p)(c_{10} + c_{31}) \tag{3.32}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{m2} = F_{mp}\partial_2\xi^p = \frac{1}{2}f'(x^p)(c_{20} + c_{32}), \tag{3.33}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{pm} = \xi^p\partial_p F_{pm} + F_{pm}\partial_p\xi^p + F_{pm}\partial_m\xi^m + F_{p1}\partial_m\xi^1 + F_{p2}\partial_m\xi^2 = \tag{3.34}$$

$$= -(a^p + x^1(c_{01} + c_{13}) + x^2(c_{02} + c_{23}) + x^p c_{03})\frac{1}{2}f''(x^p) - \frac{1}{2}f'(x^p)c_{30} + \frac{1}{2}f'(x^p)c_{03} +$$

$$+\frac{x^1 f'(x^p)}{x^p}\frac{1}{2}(c_{01} + c_{13}) + \frac{x^2 f'(x^p)}{x^p}\frac{1}{2}(c_{02} + c_{23})$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{p1} = \xi^p\partial_p F_{p1} + \xi^1\partial_1 F_{p1} + F_{p1}\partial_p\xi^p + F_{pm}\partial_1\xi^m + F_{p2}\partial_1\xi^2 = \tag{3.35}$$

$$= (a^p + x^1(c_{01} + c_{13}) + x^2(c_{02} + c_{23}) + x^p c_{03})x^1\frac{f''(x^p)x^p - f'(x^p)}{(x^p)^2} + \frac{x^1 f'(x^p)}{x^p}c_{03} +$$

$$+(a^1 + \frac{1}{2}x^p(c_{01} - c_{13}) + \frac{1}{2}x^m(c_{01} + c_{13}) - x^2 c_{12})\frac{f'(x^p)}{x^p} - \frac{1}{2}f'(c_{01} - c_{13}) + \frac{x^2 f'(x^p)}{x^p}c_{12}$$

$$\mathcal{L}_\xi F_{p2} = \xi^p\partial_p F_{p2} + \xi^2\partial_2 F_{p2} + F_{p2}\partial_p\xi^p + F_{pm}\partial_2\xi^m + F_{p1}\partial_2\xi^1 = \tag{3.36}$$

$$= (a^p + x^1(c_{01} + c_{13}) + x^2(c_{02} + c_{23}) + x^p c_{03})x^2\frac{f''(x^p)x^p - f'(x^p)}{(x^p)^2} + \frac{x^2 f'(x^p)}{x^p}c_{03} +$$

$$+(a^2 + \frac{1}{2}x^p(c_{02} - c_{23}) + \frac{1}{2}x^m(c_{02} + c_{23}) + x^1 c_{12})\frac{f'(x^p)}{x^p} - \frac{1}{2}f'(c_{02} - c_{23}) - \frac{x^1 f'(x^p)}{x^p}c_{12}.$$

Požadujeme-li opět nulovost, vidíme, že jediná translace, na kterou není žádná podmínka je a^m, to znamená, že

$$Q_1 = p_m \tag{3.37}$$

je IP. Naopak všechna ostatní a musí být nulová, stejně jako c_{03}. Dále je vidět, že není žádná podmínka na c_{12}, ve všech případech, kdy se v rovnicích vyskytuje, se tyto členy odečtou. Příslušné ξ (ozn. ξ_1) bude

$$\xi_1^p = \xi_1^m = 0,\ \xi_1^1 = -Ax^2,\ \xi_1^2 = Ax^1, \tag{3.38}$$

což tedy dává

$$Q_2 = \xi_1^\mu p_\mu = x^1 p_2 - x^2 p_1, \tag{3.39}$$

což je z-ový moment hybnosti. Stejná situace jako u c_{12} je i $(c_{01} - c_{31})$ a $(c_{02} - c_{32})$, vždy se odečtou. Naproti tomu podmínky

$$c_{01} + c_{31} = 0,\ c_{02} + c_{32} = 0 \tag{3.40}$$

splněny být musí. Tím máme pokryté všechny konstanty vyskytující se v ξ. Z podmínek (3.40) máme

$$\xi_2^p = \xi_2^2 = 0,\ \xi_2^m = 2x^1,\ \xi_2^1 = x^p \tag{3.41}$$

a

$$\xi_3^p = \xi_3^1 = 0,\ \xi_3^m = 2x^2,\ \xi_3^2 = x^p, \tag{3.42}$$

což opět značí IP ve tvaru

$$Q_3 = 2x^1 p_m + x^p p_1,\ Q_4 = 2x^2 p_m + x^p p_2. \tag{3.43}$$

Tyto čtyři IP jsou všechny, které lze získat z Poincarého grupy.

Na tomto místě je třeba upozornit, že jelikož mají oba vybrané systémy čtyři IP z Poicarého symetrií, činí je to, samo o sobě, minimálně superintegrabilními (i přes to, že TM-mode model má v těchto IP čas, potřebujeme ve výsledku pouze jednu integraci na vyřešení systému) V článku se však vyskytují i systémy (4.1 a 4.2), kde počet takových IP na superintegrabilitu nestačí. Naopak v případě systému 3.1. je počet IP z Poincarého symetrií dokonce pět. Vztah mezi počtem IP celkově, jejich počtem z Poincarého symetrií a tvarem systému jak v relativistické formě tak v původní klasické je jistě velmi složitý a bude pouze zlehka diskutován později.

3.1.3 Ansatz pro tvar IP

Další metodou, použitou v článku pro systémy 3.2 a 4.1 (v obou případech frontální kalibrace), je vyslovení předpokladu existence dalšího IP tvaru

$$Q = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3,\ \text{kde } c_i = c_i(x^1, x^2, x^p, x^m, p_m), \tag{3.44}$$

tedy hledání veličiny polynomiální v p_i. Důvodů výběru takového předpokladu je patrně více. Tvar hamiltoniánu samotného ve frontální formě v nich polynomiální je (na rozdíl od ostatních veličin), proto je logické zvolit si za výchozí právě p_i. Dalším důvodem je možnost využít zkušenosti s nerelativistickými obdobami (přítomnost nějakého IP, který by se mohl přenést i do relativistické formy). Proč se jedná o polynom prvního stupně je patrně skryto v menší výpočetní náročnosti (možnosti explicitního výpočtu) a skutečnost, že c_j závisí na všech ostatních souřadnicích a hybnostech, je patrně snahou najít nejobecnější možný tvar. U obou systémů (i jednoho systému v [2]) však dojde ke značnému zjednodušení závislostí, totiž na

$$\begin{gathered} Q = -A(x^p, p_m) p_1 x^2 + A(x^p, p_m) p_2 x^1 + B(x^p, p_m) p_1 x^1 + \\ + B(x^p, p_m) p_2 x^2 + 2B(x^p, p_m) p_m x^m + C(x^p, p_m) p_2 + D(x^p, p_m) p_1 + (x^1)^2 E(x^p, p_m) + \\ + (x^2)^2 F(x^p, p_m) + G(x^p, p_m) x^1 x^2 + H(x^p, p_m) x^1 + I(x^p, p_m) x^2 + J(x^p, p_m), \end{gathered} \tag{3.45}$$

což bude demonstrováno na konkrétním systému, obecně je to však patrně dáno tvarem hamiltoniánu v p_i a p_m (některé rovnice soustav jsou tak analogické, resp. vedou na stejné vlastnosti). Dále už se vývoj řešení liší. Nyní na systému 4.1. nastíníme, jak se tato metoda chová. Upozorňujeme, že ačkoli zde (alespoň částečně) vyložíme ruční řešení soustavy, jsou obecně soustavy plynoucí z polynomiálních ansatz v tomto textu velmi dlouhé a relativně komplikované (ačkoli jsou předurčené) a tedy dále budou řešeny pomocí softwaru Maple [22].

Systém 4.1., nazvaný Helikální boost, má nenulové složky čtyřpotenciálu tvaru

$$A_1 = F_0 x^p x^2,\ A_2 = F_0 x^p \left(x^1 - \frac{\omega}{3}(x^p)^2\right), \tag{3.46}$$

kde F_0 je konstanta. (Tj. v Minkowského souřadnicích by bylo $A_1 = F_0(x^0 + x^3)x^2, A_2 = F_0(x^0 + x^3)(x^1 - \frac{\omega}{3}(x^0 + x^3)^2) \Rightarrow \boldsymbol{B} = F_0(x^1 - \omega(x^0 + x^3)^2, -x^2, 0)$, $\boldsymbol{E} = F_0(x^2, x^1 - \omega(x^0 + x^3)^2, 0)$.) Ze čtyřpotenciálu lze získat dva IP svázané s Poincarého symetriemi. Hamiltonián systému je

$$H = \frac{1 + (p_1 - F_0 x^p x^2)^2 + (p_2 - F_0 x^p (x^1 - \frac{\omega}{3}(x^p)^2))^2}{4p_m}. \tag{3.47}$$

Nyní tento Hamiltonián a Q tvaru (3.44) dosadíme do vztahu pro „časový“ vývoj (2.41) a požadujeme, aby byl roven nule. Tím získáme dlouhý výraz, který závisí na p_1 a p_2 explicitně, polynomiálně. Porovnáním koeficientů jednotlivých mocnin tak získáme soustavu PDR. $(p_1)^3$ a $(p_2)^3$ se však vyskytují každá pouze v jednom členu a to v posledním členu Poissonovy závorky. Tam je

$$-\frac{\partial c_1}{\partial x^m}\frac{1}{2p_m} = 0,\ \ -\frac{\partial c_2}{\partial x^m}\frac{1}{2p_m} = 0, \tag{3.48}$$

což znamená že c_1 ani c_2 na x_m nezávisí. Tím se soustava mírně zjednoduší a zbývá soustava (rovnice u třetích mocnin už více nevyužijeme):

$$(p_1)^2 : \frac{\partial c_1}{\partial x^1} - \frac{\partial c_3}{\partial x^m} = 0, \tag{3.49}$$

$$(p_2)^2 : \frac{\partial c_2}{\partial x^2} - \frac{\partial c_3}{\partial x^m} = 0, \tag{3.50}$$

$$p_2 p_1 : \frac{\partial c_2}{\partial x^1} + \frac{\partial c_1}{\partial x^2} = 0, \tag{3.51}$$

$$\begin{gathered} p_1 : -2p_m\frac{\partial c_1}{\partial x^p} - F_0 x^p x^2 \frac{\partial c_1}{\partial x^1} - F_0 x^p (x^1 - \frac{\omega}{3}(x^p)^2)\frac{\partial c_1}{\partial x^2} + c_2 F_0 x^p + \\ + \frac{\partial c_3}{\partial x^m}\frac{F_0 x^p x^2}{p_m} + \frac{\partial c_3}{\partial x^1} = 0, \end{gathered} \tag{3.52}$$

$$\begin{gathered} p_2 : -2p_m\frac{\partial c_2}{\partial x^p} - F_0 x^p x^2 \frac{\partial c_2}{\partial x^1} + c_1 F_0 x^p - F_0 x^p (x^1 - \frac{\omega}{3}(x^p)^2)\frac{\partial c_2}{\partial x^2} + \\ + \frac{\partial c_3}{\partial x^2} + \frac{\partial c_3}{\partial x^m}\frac{F_0 x^p (x^1 - \frac{\omega}{3}(x_p)^2)}{p_m} = 0, \end{gathered} \tag{3.53}$$

$$1 : -2p_m \frac{\partial c_3}{\partial x^p} - F_0 x^p x^2 \frac{\partial c_3}{\partial x^1} - c_1 F_0^2 (x^p)^2 (x^1 - \frac{\omega}{3}(x^p)^2) - c_2 F_0^2 (x^p)^2 x^2 + \tag{3.54}$$
$$+ \frac{\partial c_3}{\partial x^m} \frac{1 + (F_0 x^p x^2)^2 + (F_0 x^p (x^1 - \frac{\omega}{3}(x^p)^2)^2}{2p_m} - \frac{\partial c_3}{\partial x^2} F_0 x^p (x_1 - \frac{\omega}{3}(x^p)^2) = 0.$$

Zůstává zde pouze jeden v hybnostech smíšený člen, ostatní vymizely, díky odstranění závislosti c_1 a c_2 na x^m. Ze soustavy lze rychle určit několik informací: kombinací (3.49) a (3.50) dostáváme

$$\frac{\partial c_1}{\partial x^1} - \frac{\partial c_2}{\partial x^2} = 0, \tag{3.55}$$

dále vyderivováním (3.49) či (3.50) a následnou dvojnásobnou integrací podle x^m zjišťujeme, že

$$c_3 = A(x^1, x^2, x^p, p_m) x^m + B(x^1, x^2, x^p, p_m). \tag{3.56}$$

Toho využijeme při pohledu na (3.53) a (3.54), kde budou členy s derivací A podle x^1 a x^2 jediné obsahující x^m a tedy A nesmí záviset na x^1 ani x^2. Tento tvar dosadíme zpět do (3.49) a (3.50), a zderivujeme znovu podle x^i. Opětovnou integrací dle něj pak získáme informaci, že c_1 a c_2 jsou polynomy prvního řádu v x^1 respektive x^2. Dosazením této informace do (3.55) však zjistíme, že funkce před příslušnými x^i musí být shodné. To zároveň znamená, že tyto funkce nesmí záviset na druhém x^i Tedy celkem:

$$c_1 = C(x_p, p_m) x^1 + D(x_p, p_m, x^2), \; c_2 = C(x_p, p_m) x^2 + E(x_p, p_m, x^1). \tag{3.57}$$

Dosazením tohoto tvaru do (3.51), zderivování podle jednoho z x^i a opětovnou dvojnou integrací podle něj zjistíme opět polynomiální chování:

$$c_1 = C(x_p, p_m) x^1 + G(x_p, p_m) x^2 + H(x_p, p_m), \; c_2 = C(x_p, p_m) x^2 + I(x_p, p_m) x^1 + J(x_p, p_m). \tag{3.58}$$

Dosazením těchto tvarů do (3.51) zjišťujeme však, že musí být $G = -I$. Dosazením do (3.49) a (3.50) už můžeme prostě vyjádřit C a získat tak

$$c_1 = \frac{A(x_p, p_m)}{2p_m} x^1 + G(x_p, p_m) x^2 + H(x_p, p_m), \; c_2 = \frac{A(x_p, p_m)}{2p_m} x^2 - G(x_p, p_m) x^1 + J(x_p, p_m). \tag{3.59}$$

Budeme-li se nyní věnovat funkci B, zjistíme z (3.52) dvojnásobnou derivací podle x^1 a opětovnou trojnásobnou integrací, že je to polynom druhého řádu v x^1. Naopak z (3.53) zjistíme analogickým postupem, že je to polynom druhého řádu v x^2. Porovnáváním těchto dvou vyjádření B (parciální derivace apod.) že má tvar

$$c_3 = A(x^1, x^2, x^p, p_m) x^m + K(x^p, p_m)(x^1)^2 + L(x^p, p_m)(x^2)^2 + M(x^p, p_m) x^1 x^2 + \tag{3.60}$$
$$+ N(x^p, p_m) x^1 + O(x^p, p_m) x^2 + P(x^p, p_m).$$

Tím končí sada jednodušších úprav, kdy známe všechny závislosti na x^1, x^2 a x^m. Další postup už provedeme velmi zrychleně, neboť je zdlouhavý a tedy není možné zmiňovat všechny kroky, je již vhodný spíše pro počítač a také je již, zdá se, systémově specifický (o celkové metodice už tedy mnoho neříká).

Tedy: z rovnice (3.52) dokážeme vyjádřit K pomocí G a parciální derivace A podle x^p, a dále M pomocí A a derivace G podle x^p. Z té samé rovnice můžeme přímo vyjádřit N. Dosazením informací do (3.53) zjistíme, že G nesmí záviset na x^p (jediný člen s x^1). Dále z této rovnice můžeme přímo vyjádřit L. Z té samé dokážeme vyjádřit O. Když rozepíšeme celou rovnici pro časový vývoj, zjistíme, že vymizely mocniny p_i. Porovnáním koeficientů u x^1x^2 zjistíme, že A je nulové. Z koeficientů $(x^i)^2$ zase zjistíme nulovost G. V této fázi nám zbývají pouze funkce J, H, P. Ostatní se vynulovaly či promítly do této trojice. Tvar funkcí je

$$c_1 = H(x^p, p_m),\ c_2 = J(x^p, p_m),\ c_3 = P(x^p, p_m) - x^1 F_0 x^p J(x^p, p_m) + \tag{3.61}$$

$$+2x^1 p_m \frac{\partial H(x^p, p_m)}{\partial x^p} - x^2 F_0 x^p H(x^p, p_m) + 2x^2 p_m \frac{\partial J(x^p, p_m)}{\partial x^p}.$$

Porovnáním koeficientů u mocnin x^i se rovnice pro časový vývoj (2.41) rozpadá na tři rovnice. Z těch lze vyjádřit např. H pomocí J a získat tak PDR čtvrtého řádu v x^p pouze pro J. Tu lze snadno vyřešit, mnohem hůře lze však řešení vyjádřit. Dosazením dokážeme určit i H, v obou tedy již známe závislost na x^p. Z téže soustavy už dokážeme vyintegrovat P v x^p. V této fázi nám zbývají pouze neznámé závislosti v p_m. Ty už však lze, rozdělením rovnice časového vývoje (2.41) na rovnice pro koeficienty různých mocnin souřadnic, nalézt pro každou funkci zvlášť. Výsledkem této procedury je Q které je kombinací pěti IP uvedených v článku, z níž však první- samostatné p_m bylo už nalezeno z Poincarého symetrií. Zbylé čtyři jsou velmi dlouhé výrazy, tedy po vzoru článku použijeme značení

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0}{(2p_m)}},\ \Delta_x = x^1 - x^2,\ \Sigma_x = x^1 + x^2,\ \Delta_p = \frac{p_1 - p_2}{2p_m},\ \Sigma_p = \frac{p_1 + p_2}{2p_m}, \tag{3.62}$$

ve kterém mají tyto IP tvar

$$Q_1 = \Omega\left(\Sigma_x - \omega(x^p)^2 - \frac{2\omega}{\Omega^2}\right)\sinh\Omega x^p + \left(\Sigma_p + x^p\left(\Omega^2\left(\frac{\omega}{3}(x^p)^2 - \Sigma_x\right) + 2\omega\right)\right)\cosh\Omega x^p \tag{3.63}$$

$$Q_2 = \Omega\left(\Sigma_x - \omega(x^p)^2 - \frac{2\omega}{\Omega^2}\right)\cosh\Omega x^p + \left(\Sigma_p + x^p\left(\Omega^2\left(\frac{\omega}{3}(x^p)^2 - \Sigma_x\right) + 2\omega\right)\right)\sinh\Omega x^p \tag{3.64}$$

$$Q_3 = \Omega\left(\Delta_x - \omega(x^p)^2 + \frac{2\omega}{\Omega^2}\right)\cos\Omega x^p + \left(\Delta_p - x^p\left(\Omega^2\left(\frac{\omega}{3}(x^p)^2 - \Delta_x\right) - 2\omega\right)\right)\sin\Omega x^p \tag{3.65}$$

$$Q_4 = \Omega\left(\Delta_x - \omega(x^p)^2 + \frac{2\omega}{\Omega^2}\right)\sin\Omega x^p - \left(\Delta_p - x^p\left(\Omega^2\left(\frac{\omega}{3}(x^p)^2 - \Delta_x\right) - 2\omega\right)\right)\cos\Omega x^p. \tag{3.66}$$

Lze však zjistit, že druhý IP z Poincarého symetrií je kombinacích těchto čtyř a p_m. Celkový počet nezávislých nalezených IP je tak pět.

3.1.4 Další postupy

Jako na poslední postup v článku se podíváme na získávání trajektorií a hybností z IP a Hamiltonových rovnic a jedno nalezení jasných znaků existence dalšího IP. Půjde spíše o přehled možností a příkladů, nežli strukturovaný výklad.

Nejprve uvedeme sympatický příklad systému, kde lze velmi snadno získat přímo trajektorie. Je to systém 3.1. – planární vlny. Zadán je dvěma nenulovými složkami čtyřpotenciálu

$$A_1 = f_1'(x^p), \ A_2 = f_2'(x^p), \tag{3.67}$$

který má pět poincaréovských symetrií a tedy i IP:

$$Q_1 = p_1, \ Q_2 = p_2, \ Q_3 = p_m, \tag{3.68}$$

$$Q_4 = 2x^1 p_m + x^p p_1 - f_1(x^p), \ Q_5 = 2x^2 p_m + x^p p_2 - f_2(x^p),$$

kde poslední členy v Q_4 a Q_5 pocházejí z kalibrace čtyřpotenciálu (funkce Λ). Chceme-li vyjádřit trajektorie, stačí vyjádřit x^1 z Q_4, vše co se v něm vyskytuje, krom x^p, jsou také IP. Analogicky vyjadřujeme $x^2(x^p)$ z Q_5, tedy

$$x^1(x^p) = \frac{Q_4 + f_1(x^p) - Q_1 x^p}{2Q_3}, \ x^2(x^p) = \frac{Q_5 + f_2(x^p) - Q_2 x^p}{2Q_3}. \tag{3.69}$$

Zbývá x^m, které vyjádříme z Hamiltonovy rovnice

$$\frac{dx^m}{dx^p} = -\{x^m, H\} = -\left\{x^m, \frac{1 + (p_1 - f'(x^p))^2 + (p_2 - f'(x^p))^2}{4p_m}\right\} = \tag{3.70}$$

$$= -\frac{\partial H}{\partial p_m} = \frac{1 + (p_1 - f'(x^p))^2 + (p_2 - f'(x^p))^2}{4(p_m)^2} = \frac{1 + (Q_1 - f'(x^p))^2 + (Q_2 - f'(x^p))^2}{4Q_3^2}.$$

To lze integrovat v závislosti na konkrétním tvaru f_i.

V případě, že hybnosti samy nejsou IP, je samozřejmě třeba pro plnohodnotný popis systému vyjádřit i je. Taková situace nastává např. v systému 3.2., TM-modelu, kde se z hybností zachovává pouze p_m (řešeno v přecházející sekci). Zde je však dostatek IP (čtyři z Poincarého symetrií a jeden další nezávislý, byť vyjádřitelný jen v integrálním tvaru přibude pomoci ansatz). p_1 a p_2 lze vyjádřit přímo z poincaréovských IP, x^1 a x^2 (v integrálním tvaru) částečně kombinací těchto, a pátého IP. x^m se opět musí vyjádřit z Hamiltonovy rovnice. Zajímavější situace nastává u systému 3.3., undulátoru. Zde jsou čtyři poincaréovské IP (řešeno zde, v sekci 3.1). Vlastnosti systému však naznačují, v souladu s klasickou obdobou, ještě existenci pátého IP. Napišme si Hamiltonovy rovnice pro x^2, x^3, a p_3:

$$\dot{x}^2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2} = \tag{3.71}$$

$$= -\frac{\partial(\sqrt{1+(p_3)^2+(p_1-b_0\cos\omega x^3)^2+(p_2-b_0\cos\omega x^3)^2})}{\partial p_2} = -\frac{p_2-b_0\sin\omega x^3}{H},$$

$$\dot{x}^3 = -\frac{\partial H}{\partial p_3} = -\frac{p_3}{H}, \tag{3.72}$$

$$\dot{p}_3 = \frac{\partial H}{\partial x^3} = -\frac{\omega b_0}{H}(p_1\sin\omega x^3 - p_2\cos\omega x^3). \tag{3.73}$$

Spojením prvních dvou (vyjádřením H z jedné do druhé a rozdělením diferenciálu) dostaneme

$$\frac{dx^2}{p_2-b_0\sin\omega x^3} = \frac{dx^3}{p_3}. \tag{3.74}$$

Nyní vynásobme třetí rovnici (3.73) p_3:

$$\dot{p}_3 p_3 = \frac{\omega b_0 p_3}{H}(p_1\sin\omega x^3 - p_2\cos\omega x^3) = \omega b_0 \dot{x}^3(p_1\sin\omega x^3 - p_2\cos\omega x^3), \tag{3.75}$$

což lze po přesunutí na levou stranu a vynásobením 2 vyjádřit jako

$$\frac{d}{dx^0}((p_3)^2 - 2b_0(p_1\cos\omega x^3 + p_2\sin\omega x^3)) = 0. \tag{3.76}$$

Z toho dostaneme, že samotný výraz v závorce musí být roven konstantě vzhledem k x^0, tuto konstantu nazveme u a vyjádříme z výrazu p_3. Tu pak dosadíme do (3.74). Tím získáme

$$\frac{dx^2}{p_2-b_0\sin\omega x^3} = \frac{dx^3}{\sqrt{2b_0((p_1\cos\omega x^3+p_2\sin\omega x^3)+u}}, \tag{3.77}$$

porovnáváním rovnic a vyjádření Q_i (viz sekce 3.1.1) lze dokonce u určit jako kombinaci $u = Q_3^2 - Q_2^2 - Q_1^2 - 1 - b_0^2$. Skutečnost, že výraz (3.77) neobsahuje samotné x^2 značí (integrací získáme na x^2- straně konstantu), že existuje další IP, nepolynomiální v hybnostech.

3.2 Článek [2]

Druhý probíraný článek se věnuje speciálně systémům se skalárním potenciálem. Toto značné zjednodušení oproti prvnímu článku [1] umožňuje využít širší grupu transformací než Poincarého, totiž konformní grupu (2.18). Dalším rozdílem v přístupu článku je metoda tzv. rozšíření fázového prostoru, které umožňuje studovat analogie prezentovaných systémů ve vyšší dimenzi a v ideálním případě přispět k řešení systémů původních. Co se konkrétních systémů týče, článek se jimi zabývá jen minimálně, spíše klasifikuje možné případy a skutečnosti z nich plynoucí. Dále je probírán (v samostatné kapitole) také kvantový rozměr diskutované problematiky, tímto se však v této práci zabývat nebudeme.

3.2.1 Obecná teoretická část

Mějme částici o klidové hmotnosti m_0 v poli skalárního potenciálu $V(x)$. Pak její lagrangián bude

$$L = -(m_0 + V(x))\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} = -(m_0 + V(x))\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \tag{3.78}$$

Povšimněme si, že toto je v souladu s (22) i (63), neboť ponecháme-li v nich pouze nultou složku čtyřpotenciálu, je tato násobena nultou složkou čtyřrychlosti, která je v našich jednotkách rovna jedné – běžně $u_0 = \gamma c$, kde jako γ je Lorenzův faktor (pouze zde, dále to používat nebudeme). Zadefinujeme-li nyní dynamickou hmotnost jednoduše jako

$$m(x) = m_0 + V(x), \tag{3.79}$$

je tento lagrangián ekvivalentní lagrangiánu volné částice s dynamickou hmotností, nebo také volné částici s jednotkovou hmotností v zakřiveném prostoročase s metrikou

$$G_{\mu\nu} = \frac{m^2(x)}{m_0^2} g_{\mu\nu} \tag{3.80}$$

(v pravém výrazu (3.78) jsme vše dali pod odmocninu a považovali tak za součást metriky). Tato skutečnost nebude dále přímo použita, je nicméně zajímavá (naznačuje např. souvislost s jinou metodou popisu relativistické dynamiky – prostoročasovými geodetikami).

Když nyní, stejně jako u prvního článku, budeme variovat akci a hledat extremálu, získáme Euler-Lagrangeovy rovnice tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{m(x)\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}}\right) = \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}\,\partial_\mu m(x), \tag{3.81}$$

kde ve výsledku skutečně figuruje $\dot{x}_\mu$ se spodním indexem. Důvodem je, že derivujeme-li výraz pod odmocninou, derivujeme výraz $(\dot{x}^\mu)^2$, před nímž stojí znaménko odpovídající příslušné složce metrického tenzoru. Jeho vynásobením s $\dot{x}^\mu$ je tedy právě $\dot{x}_\mu$. Vynásobením rovnice $\dot{x}^\mu$, rozepsáním a úpravami máme

$$0 = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{m(x)\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\right) - \dot{x}^\mu \partial_\mu m(x)\right) = -\dot{x}^\mu \partial_\mu m(x) + \tag{3.82}$$

$$+\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}m(x)\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}} + m(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\right)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}m(x) - \dot{x}^\mu \partial\mu m(x) +$$

$$+m(x)\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\right) = m(x)\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\right),$$

což tedy z nezávislosti proměnných a funkcí znamená

$$\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}}\right) = 0. \tag{3.83}$$

Integrací této rovnice (lze více způsoby, např. per-partes, neboť funkce derivovaná a nederivovaná jsou shodné až na násobení metrickým tenzorem, proto lze integrály sečíst a zbytek je roven druhé mocnině této funkce a zároveň konstantě z původní zintegrované pravé strany), dostaneme nám již známou podmínku $(\dot{x})^2 = konst$, kterou můžeme zafixovat jako 1. To pohybovou rovnici (3.81) zjednodušuje na

$$\frac{d}{d\tau}(m(x)\dot{x}_\mu) = \partial_\mu m(x). \tag{3.84}$$

Toto může být interpretováno jako vyjádření zákona (Lorenzovy) síly v tenzorovém zápisu:

$$\ddot{x}_\mu m(x) = \partial_\mu m(x) - \dot{x}_\mu \dot{x}^\nu \partial_\nu m(x) = g_{\nu\mu}\partial^\nu m(x) - \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu \partial^\nu m(x) = (g_{\nu\mu} - \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu)\partial^\nu m(x). \tag{3.85}$$

Pro úplnost uveďme, že předvedené pohybové rovnice jsou ekvivalentní rovnicím geodetik v metrice (3.80). Nyní budeme, stejně jako v přecházející sekci, hledat symetrie (zde symetrie dynamické hmotnosti), které automaticky implikují IP. K tomu opět potřebujeme kanonickou hybnost, která je, jak plyne z (3.78)

$$p_\mu = m(x)\dot{x_\mu} \tag{3.86}$$

a splňuje tak „dynamickou“ analogii podmínky (2.3)

$$p^\mu p_\mu = m^2(x). \tag{3.87}$$

Mějme tedy opět ξ^μ vektorové pole určující nějakou infinitezimální transformaci a $Q = \xi^\mu p_\mu$. Z (3.84) plyne

$$2m(x)\frac{dQ}{d\tau} = 2m(x)\left(\xi^\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} + p^\mu \frac{d\xi_\mu}{d\tau}\right) = 2m(x)\xi^\mu \partial_\mu m(x) + 2m(x)p^\mu \partial_\nu \xi_\mu \dot{x}^\nu = \tag{3.88}$$

$$= \xi^\mu \partial_\mu m^2(x) + 2p^\mu p^\nu \partial_\nu \xi_\mu = \mathcal{L}_\xi m^2(x) + 2p^\mu p^\nu \partial_\nu \xi_\mu = \mathcal{L}_\xi m^2(x) + p^\mu p^\nu (\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu),$$

kde $\mathcal{L}_\xi$ je opět Lieova derivace vzhledem k vektorovému poli ξ. Tentokrát však aplikovaná na skalární veličinu, tudíž její reprezentace je mnohem jednodušší. K tomu, aby se Q zachovávalo je třeba mít pravou stranu této rovnice nulovou. Je jistě více situací, ve kterých nulová je, my však chceme aby to bylo kvůli vlastnostem pole a transformacím. Odpovídající způsob, jak pravou stranu zjednodušit je kontrakce $p^\mu p^\nu$ metrickým tenzorem (tedy stane se z nich $m^2(x)$ a máme na vynulování jen dva členy). K tomu musí být

$$\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu \propto g_{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\partial_\kappa \xi^\kappa, \tag{3.89}$$

kde konkrétní formule vpravo je jediná možnost, neboť požadujeme-li úměru (3.89), musí být jedna strana f-násobkem druhé, kdy f je zatím neznámá funkce. Když tuto rovnost vynásobíme metrickým tenzorem, dostaneme:

$$f g_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \ / \cdot g^{\nu\mu} \Leftrightarrow \delta^\nu_\nu f = 2\partial_\mu \xi^\mu \Leftrightarrow f = \frac{1}{2}\partial_\mu \xi^\mu. \tag{3.90}$$

Toto je dle [2] konformní Killingova rovnice, která má 15-parametrické řešení, kterým je právě vektorové pole příslušející konformní grupě transformací (2.18). S předpokladem (3.89) tedy (3.88) přejde na

$$2m(x)\frac{dQ}{d\tau} = \mathcal{L}_\xi m^2(x) + m^2(x)\frac{1}{2}\partial_\mu \xi^\mu, \tag{3.91}$$

což musí být pro zachovávající se Q nulová. Této a dalších, již v článku [1] probíraných, skutečností článek využívá ke konstrukci superintegrabilních systémů.

3.2.2 Případy a jednoduchá řešení

Na rozdíl od sekce 3.1 zde budeme postupovat stejně, jako je postupováno v článku samotném, neboť účelem je spíše zrekapitulovat výsledky, než představit jednotlivé metody (ty jsou až na výjimky obdobné jako v prvním článku). V části s konkrétními případy se článek nejprve zabývá situací, kdy je dynamická hmotnost funkcí jediné proměnné. Logicky pak tuto situaci dělí na tři případy, totiž proměnou prostorupodobnou, časupodobnou a světlupodobnou. V prvním případě předpokládáme (držíme se notace článku – jelikož toho je skalární analogie prostorově závislého magnetického pole [2], značíme potenciál $B(x^3)$, podobně v další části analogii elektrického pole):

$$m^2 = m_0^2 + B(x^3), \tag{3.92}$$

a pracovat budeme v instantní kalibraci, tedy

$$H = \sqrt{p_j^2 + m_0^2 + B(x^3)}. \tag{3.93}$$

Rovnou vidíme (a může být snadno ověřeno z hledání poincaréovských symetrií), že

$$Q_1 = p_1,\ Q_2 = p_2,\ Q_3 = H \tag{3.94}$$

se zachovávají a jsou nezávislé. Abychom našli další, vyslovíme opět ansatz

$$Q = f_1 p_1 + f_2 p_2 + f_3,\ \text{kde}\ f_j = f_j(x^0, x^1, x^2, x^3, p_3) \tag{3.95}$$

a počítáme časový vývoj Q. V článku jsou uvedeny výsledky pro nejjednodušší netriviální případ $B(x^3) = Bx^3$, kde B je konstanta. Rovnice plynoucí z požadavku nulového časového vývoje je

$$0 = -\frac{dQ}{dx^0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}p_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^1}p_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^1}\right)\frac{p_1}{H} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^2}p_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^2}p_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^2}\right)\frac{p_2}{H} + \tag{3.96}$$

$$+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^3}p_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^3}p_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}\right)\frac{p_3}{H} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_3}p_1 + \frac{\partial f_2}{\partial p_3}p_2 + \frac{\partial f_3}{\partial p_3}\right)\frac{B'(x^3)}{2H} - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^0}p_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^0}p_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^0}\right).$$

Celou rovnost můžeme vynásobit H. Nyní bychom rozdělili rovnici na soustavu, podle jednotlivých mocnin p_i a H, které jsou vzájemně nezávislé. Vypadnutí závislosti na některých proměnných sice vidíme rovnou, soustavu však zde nebudeme řešit, postup je analogický již ukázanému ve 3.1.3. Z postupu vzejdou další dva IP

$$Q_4 = 2p_1p_3 + Bx^1, Q_5 = 2p_2p_3 + Bx^2. \tag{3.97}$$

O souboru $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ lze okamžitě ověřit, že IP v něm jsou v involuci, a tedy systém je integrabilní. Jelikož zde už je veličin více a zatím nikde nebyl uveden příklad ověření funkcionální nezávislosti Q_n, ověříme ji zde zjištěním hodnoty matice

$$M := \left(\frac{\partial Q_n}{\partial x^k}, \frac{\partial Q_n}{\partial p_k}\right), \tag{3.98}$$

kde však pro větší přehlednost použijeme místo původní množiny IP ekvivalentní množinu $\{Q_4/B, Q_5/B, Q_3^2/B, Q_1, Q_2\}$. V tomto pořadí máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2p_3}{B} & 0 & \frac{2p_1}{B} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2p_3}{B} & \frac{2p_2}{B} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2p_1}{B} & \frac{2p_2}{B} & \frac{2p_3}{B} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.99}$$

která je, jak vidíme, přímo v horním stupňovitém tvaru a má hodnost 5. To znamená, že systém je maximálně superintegrabilní. Řešení pro třetí složku hybnosti nalezneme okamžitě z Hamiltonovy rovnice jako

$$\frac{dp_3}{dx^0} = \frac{B}{2H} \Rightarrow p_3(x_0) = p_3(0) + \frac{B}{2Q_3}, \tag{3.100}$$

rovnice pro souřadnice poskládáme algebraicky z Q_i jako

$$x^1(x^0) = \frac{Q_4 - 2Q_1p_3(x^0)}{B},\ x^2(x^0) = \frac{Q_5 - 2Q_2p_3(x^0)}{B}, \tag{3.101}$$

$$x^3(x^0) = \frac{Q_3^2 - Q_1^2 - Q_2^2 - m_0^2 - p_3^2(x^0)}{B}.$$

K tomuto systému ještě poznámku, která se týká nerelativistické limity: klasická obdoba je známa a má čtyři IP, v naší notaci Q_1, Q_2, její Hamiltonián a L_z, jež lze nakombinovat pomocí našich Q_k bez Hamiltoniánu (a tato množina je nezávislá i v relativistickém případě, kde Hamiltonián nahradíme relativistickým). V relativistickém případě tuto množinu doplňuje nezávislý Q_4, Q_5, nebo jedna další možná kombinace (kubická v hybnostech) Q_k bez Hamiltoniánu. Ani jeden z těchto IP se ale v nerelativistickém případě nezachovává.

Druhý, časupodobný případ předpokládá dynamickou hmotnost tvaru

$$m^2 = m_0^2 + E(x^0), \tag{3.102}$$

tato situace se ukazuje jako velmi jednoduše řešitelná. Hamiltonián je sice explicitně časově závislý:

$$H = \sqrt{p_i^2 + m_0^2 + E(x^0)}, \tag{3.103}$$

avšak zachovávají se všechny tři prostorové složky hybnosti (m je prostorově nezávislé) a dále (skalární pole) se zachovávají i všechny tři prostorové složky momentu hybnosti (ale pouze dvě jsou nezávislé). To dává pět nezávislých IP. To dělá pohybové rovnice triviálně řešitelnými:

$$\frac{dx^j}{dx^0} = -\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{-p_j}{H} \Rightarrow x^j(x^0) = -p_j \int_0^{x^0} ds \frac{1}{\sqrt{p_i^2 + m_0^2 + E(s)}}. \tag{3.104}$$

Poslední, světlupodobný případ probereme v další sekci, navazuje na něj jediný další případ konkrétního systému.

3.2.3 Rozšíření fázového prostoru a speciální konformní transformace

Jako další metodu, v prvním článku nepoužitou, uvedeme rozšíření fázového prostoru. Toto je v druhém článku použito u třetího, totiž světlupodobného případu. V této situaci máme

$$m^2(x) = m^2(n^\mu x_\mu), \tag{3.105}$$

kde $n^2 = 0$. Toto představuje skalární planární vlnu a přirozeně se tak nabízí frontální forma. Principiálně lze případ rozdělit na dva podpřípady, totiž ten, kdy je výsledek skalárního součinu v (3.105) úměrný x^m a kdy je úměrný x^p. V jistém smyslu jsou tyto případy analogické. Podíváme se na druhou možnost, tedy x^p. Zde bude Hamiltonián časově závislý. Automaticky se zachovávají všechny zbylé složky hybnosti a dále jsou zde dva IP z invariance planárních vln vůči dvěma null rotacím, které nalezneme z Poincarého symetrií: z podmínky dostáváme (3.6) velmi jednoduchou rovnici

$$0 = \xi^p \partial_p m^2(x_p), \tag{3.106}$$

neboť v prvním členu (3.6) zbude kvůli přepisu m^2 pouze p-tý člen a ve druhém členu se první dva výrazy vzájemně odečtou a druhé dva jsou nulové. Toto platí pro Poincaréovy transformace obecně a je to ve shodě s teorií z prvního článku. Tímto tedy dostaneme podmínky

$$a^p = 0, c_{03} = 0, c_{01} + c_{13} = 0, c_{02} + c_{23} = 0, \tag{3.107}$$

mající za důsledek již proklamované IP v podobě prostorových složek hybností a další dva, již z jiných příkladů známé, IP:

$$Q_1 = p_1,\ Q_2 = p_2,\ Q_3 = p_m,\ Q_4 = 2x^1 p_m + x^p p_1,\ Q_5 = 2x^2 p_m + x^p p_2 \tag{3.108}$$

(při uvažování druhého podpřípadu se jen všude vymění x^m a x^p a p_m s $p_p = H$, IP budou analogické). Nyní se provede rozšíření konfiguračního prostoru o zbylé dvě veličiny x^p a p_m, které doteď byly časové. Nový Hamiltonián se zavede jako

$$K = H - p_p. \tag{3.109}$$

Tím se systém převede na autonomní systém vyšší dimenze (kde časové veličiny jsou nějaké další, které definovat nemusíme, naše původní časové veličiny jsou nyní na stejné úrovni jako ostatní). Poissonova závorka a časový vývoj v novém prostoru je

$$\{A, B\}* = \frac{\partial A}{\partial x^\mu}\frac{\partial B}{\partial p_\mu} - \frac{\partial B}{\partial x^\mu}\frac{\partial A}{\partial p_\mu}, \; \dot{Q} = -\{Q, K\}*. \tag{3.110}$$

V tomto prostoru, pro tento nový systém, lze najít další dva IP (původních pět se zachová). První vyplývá z konstrukce nového Hamiltoniánu a jde vlastně o původní dynamickou podmínku (2.3) (ta již v novém systému vlastně není dynamická):

$$Q_6 = 4p_p p_m - p_j p_j - m^2(x). \tag{3.111}$$

Další IP se získá z rovnice pro totální časovou derivaci x^m původního systému. Ta je

$$\frac{dx^m}{dx^p} = -\frac{\partial H}{\partial p_m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + m^2(x^p)}{4p_m^2}, \tag{3.112}$$

integrací této rovnice získáme $x^m(x^p)$ a tím v novém prostoru IP tvaru

$$Q_7 = 4p_m^2 x^m - p_i p_i x^p - \int dx^p m^2(x^p). \tag{3.113}$$

Tento nový systém je integrabilní, neboť $\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_6\}$ jsou zjevně v involuci, a superintegrabilní, neboť všech sedm Q_k je nezávislých (zjevně žádný neobsahuje složky časové v rozšířené dimenzi).

Nyní je třeba poznámka k účelu tohoto kroku. Rozšířením fázového prostoru jsme studovali systém o dimenzi vyšší než systém původní, avšak v jistém smyslu k němu analogický. O tomto systému jsme nalezly jisté informace. Možné použití této metody je v teorii pole ale i ve studiu superintegrabilních systémů jako takových (porovnání chování v různých dimenzích a pod.). Pro původní systém není z tohoto příkladu (ani v druhém systému, prezentovaném záhy, pro který se v článku metoda používá) vidět přímá výhoda, či zásadní nová informace. Obecně však může být postup užitečný – nalezneme-li v rozšířeném prostoru nějaké IP plynoucí z podmínek či rovnic původního systému (ty se nabízejí), či jinou metodou (může být snazší než v původním). Je možné původní systém vyřešit ze znalosti systému rozšířeného. Pokud bude IP nového systému dost, půjde hledaná trajektorie v původním systému vyjádřit jako jejich kombinace. I pokud by jejich počet nepostačoval, najdou-li se trajektorie rozšířeného systému (které budou parametrizovány nějakým novým časem), lze se na ně dívat jako na grafy a dostat z nich trajektorie systému původního.

Již v úvodu byly odvozeny podmínky pro to, aby byla dynamická hmotnost symetrická vůči nějaké transformaci z konformní grupy a tím docházelo zachovávání neotherovského náboje k ní příslušného. V článku je na několika místech využita poincaréovská část (viz výše), kdežto se zbytkem grupy se setkáme pouze v oddílu 3.4., kde obecný systém s dynamickou hmotností tvaru

$$m^2(x) = \frac{1}{(x^p)^2} f\left(x^m - \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{x^p}\right), \tag{3.114}$$

(tj. $m^2(x) = \frac{1}{(x^0+x^3)^2} f\left(x^0 - x^3 - \frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{x^0+x^3}\right)$ v Minkowského souřadnicích), o kterém je uvedeno, že splňuje podmínku (3.91) pro speciální konformní transformaci generovanou (2.18) $c^m = 1$ a všemi ostatními konstantami v ξ nulovými. Tj. systém zřejmě produktem hledání obecného systémů, majícího tuto symetrii (v článku se neobjevují odkazy na jeho fyzikální význam či dřívější studium). My zde pouze ověříme, že tuto symetrii má a podíváme se i na celkové chování (3.114) vůči speciálním konformním transformacím i dilatacím. Vezmeme tedy poslední tři členy v (2.18) a najdeme nejprve jejich ξ^μ. To bude i po rozepsání skalárních součinů

$$\xi^\mu = \lambda x^\mu + c^\mu((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2) - 2(c^0x^0 - c^1x^1 - c^2x^2 - c^3x^3)x^\mu \tag{3.115}$$

velmi snadné. Pracovat budeme v souřadnicích frontální kalibrace, ve kterých je vyjádřeno (3.114), když se však podíváme na (3.115), vidíme, že žádné úpravy ve formálním vyjádřením dělat nemusíme. Musíme ale přepsat skalární součiny do nových souřadnic, tedy

$$\xi^\mu = \lambda x^\mu + c^\mu(x^p x^m - (x^1)^2 - (x^2)^2) - 2\left(\frac{1}{2}(x^p c^m + x^m c^p) - c^1x^1 - c^2x^2\right)x^\mu. \tag{3.116}$$

Jak vidíme, všechny složky c^μ, zůstávají nezávislé, stejně jako λ. Nyní dosadíme (3.114) podmínky do (3.91), kde však budeme pro stručnost předpokládat jen speciální konformní transformace a dilatace (příkladů na poincaréovské symetrie bylo už několik).

$$\begin{aligned} 0 = (\lambda x^p + c^p(XX) - 2(CX)x^p)\left(\frac{-2}{(x^p)^3}f + \frac{1}{(x^p)^2}f'\frac{(x^1)^2+(x^2)^2}{(x^p)^2}\right) + \quad (3.117)\\ + (\lambda x^m + c^m(XX) - 2(CX)x^m))\frac{1}{(x^p)^2}f' - \left(\lambda x^1 + c^1(XX) - 2(CX)x^1\right)\frac{1}{(x^p)^2}f'\frac{2x^1}{x^p} - \\ -(\lambda x^2 + c^2(XX) - 2(CX)x^2)\frac{1}{(x^p)^2}f'\frac{2x^2}{x^p} + \frac{1}{2(x^p)^2}f(4\lambda + 4(c^1x^1 + c^2x^2) - 4(c^m x^p + c^p x^m)), \end{aligned}$$

kde skalární součiny jsou kvůli délce označeny jen jako XX a CX. Nyní bychom porovnávali koeficienty u f, f', všech x^μ a jejich mocnin a násobků. Jelikož je však zmíněné ξ s nenulovou složkou pouze na c^m, nebudeme tento postup celý provádět (technicky se nijak neliší od postupu u Poincarého transformací). Pouze ověříme, že pro toto ξ je (3.117) skutečně nulová.

Nejprve vyjádříme takové to ξ:

$$\xi^p = -(x^p)^2,\ \xi^m = -(x^1)^2 - (x^2)^2,\ \xi^1 = -x^p x^1,\ \xi^2 = -x^p x^2. \tag{3.118}$$

To nyní spolu s (3.114) dosadíme do (3.91) a máme

$$\xi^\mu \partial_\mu m^2(x) + \frac{m^2(x)}{2}\partial_\mu \xi^\mu = -(x^p)^2 \left(-\frac{2}{(x^p)^3} f + \frac{1}{(x^p)^2} \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{(x^p)^2} f' \right) + \tag{3.119}$$

$$+\frac{2(x^1)^2}{(x^p)^2} f' + \frac{2(x^2)^2}{(x^p)^2} f' - ((x^1)^2 + (x^2)^2)\frac{1}{(x^p)^2} f' + \frac{1}{2(x^p)^2} f(-4x^p) = 0.$$

Jak vidíme, výsledkem je skutečně nula. Tedy této transformaci přísluší IP tvaru $\xi^\mu p_\mu$ tvaru.

$$p_p(x^p)^2 + p_m((x^1)^2 - (x^2)^2) + p_1 x^p x^1 + p_2 x^p x^2, \tag{3.120}$$

pro libovolné f. Zde je třeba poznámka – obecně by bylo možné aby se spojily např. speciální konformní transformace a nějaké poincaréovské transformace (jako se mohou spojovat jednotlivé transformace poincaréovské) a vytvořili tak typově jiný IP. To je jistě zajímavá situace, nicméně zde k ní nedochází a výraz v (3.91) pro celou konformní grupu je velice dlouhý. Proto jsme Poincarého grupu od zbytku konformní grupy v tomto příkladu oddělili.

Kapitola 4

Hledání a studium dalších relativistických superintegrabilních systémů s elektromagnetickým polem

Tato kapitola představuje nerešeršní část textu. V zadání práce jí odpovídá poslední bod, tj. snaha o nalezení relativistických verzí známých klasických superingrabilních systémů s magnetickým polem. Nebylo ale příliš dobře možné toto provést bez položení (a kde na to autorka stačila i prozkoumání) několika poněkud obecnějších otázek. Proto se v této kapitole krom přímého hledání relativistických obdob v sekci 4.2 zaměříme i na jiná, avšak blízká, témata. Ta mohou v jistém smyslu posloužit i při případném navázání na tuto práci.

4.1 Jednoduché obecné poznatky relativistických (super)integrabilních systémech

Máme-li studovat relativistické obdoby klasických superintegrabilních systémů, je pro nás klíčová otázka limity a převodů IP mezi nerelativistickou a relativistickou situací. Dále bychom se měli zamyslet nad tím, jak funguje převod mezi formami relativistické hamiltonovské mechaniky a v jakých situacích jsou které z nich výhodné pro popis daného systému. Ještě zavedeme, kvůli úspoře místa, symbol $\surd$, který odtud dále bude označovat část hamiltoniánu reprezentovanou odmocninou, tj. u instantní formy $H = \surd + A_0$.

4.1.1 Nerelativistická limita a vztah IP v relativistickém a nerelativistickém případě

K nerelativistické limitě je třeba použít instantní formu (ve které také vždy studium obdob klasicky superintegrabilních systémů začneme). Podívejme se tedy nejprve na souvislost klasického a relativistického hamiltoniánu (vše specifikujeme pro elektromagnetického pole). Do hamiltoniánu instantní formy tvaru (3.9) pro tyto účely vrátíme rychlost světla

c a označíme jako H^r (relativistický). Ze zavedení veličin p_μ, A_μ bude tedy

$$p_0 = \frac{E}{c} = H^r = \sqrt{m_0^2c^2 + (p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + (p_3 - A_3)^2} + A_0 = \tag{4.1}$$

$$= \sqrt{m_0^2c^2 + (p_1 + A^1)^2 + (p_2 + A^2)^2 + (p_3 + A^3)^2} + \frac{\varphi}{c},$$

kde E je energie. V poslední rovnosti jsme přešli na značení veličin užívané v nerelativistické fyzice. Vidíme, že relativistický hamiltonián tak neodpovídá přímo energii, nýbrž energii dělené c, abychom ho mohli spojit s klasickým hamiltoniánem, který energii odpovídá, vyjádříme z 4.1 E a zkusíme provést Taylorům rozvoj v $\frac{1}{c} \longrightarrow 0$:

$$E = c^2\sqrt{m_0^2 + \frac{(p_1 + A^1)^2 + (p_2 + A^2)^2 + (p_3 + A^3)^2}{c^2}} + \varphi = \tag{4.2}$$

$$= \varphi + m_0c^2 + \frac{1}{2m_0}\left((p_1 + A^1)^2 + (p_2 + A^2)^2 + (p_3 + A^3)^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right) = E_0 + H^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

Stačilo tedy rozvíjet do prvního řádu a již se nám objevil klasický hamiltonián $H^k = \frac{1}{2}(p_j + A^j)^2 + \varphi$. Přítomnost členu m_0c^2, klidové energie označené jako E_0, není nijak překvapivá – tato je přirozeně součástí celkové energie, avšak v klasické fyzice se do hamiltoniánu nezahrnuje. Ještě zdůrazněme, že c jsme mohli ponechat rovno jedné, jako ve zbytku textu, a rozvíjet v hybnostech (prostorových složkách), které by v takových jednotkách šly k nule ($\mathbf{p} = m_0\mathbf{u} \ll m_0\mathbf{c}$), došli bychom ke stejnému výsledku.

Dále se již podíváme na obdoby poincaréovských IP v nerelativistické situaci. Poincaréovské IP jsou hybnosti, momenty hybnosti a jejich boostové analogie a veškeré kombinace. Nicméně je zjevné, že při přechodu ke klasickému systému je klasický hamiltonián jedním z IP, za stejných okolností jako relativistický, tedy když není závislý na čase. Nyní k hybnostem: mějme prostorovou složku hybnosti $p_l + \Lambda(x^\mu)$, pak v relativistickém případě se zachovává pokud

$$0 = \{p_l + \Lambda(x), H\} - \frac{\partial(p_l + \Lambda(x))}{\partial x^0} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - 1\frac{\partial H}{\partial x^l} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x^0} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}\frac{p_j + A^j}{\sqrt{(p_j + A^j)^2 + 1}} - \tag{4.3}$$

$$= -\frac{p_j + A^j}{\sqrt{(p_j + A^j)^2 + 1}}\frac{\partial A^j}{\partial x^l} - \frac{\partial A^0}{\partial x^l} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x^0} \Leftrightarrow \frac{\partial\Lambda}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^l} = 0 \;\wedge\; \frac{\partial\Lambda}{\partial x^0} + \frac{\partial A^0}{\partial x^l} = 0,$$

kde jsme, kvůli snadnějšímu porovnání s klasickým případem, vyjádřili vše pomocí A^μ. Ekvivalence vyplývá z nezávislosti funkcí ve druhém výrazu (odmocnina a obecná funkce souřadnic) a konečné podmínky z rozdělení koeficientů u hybností a členů vyskytujících se samostatně. Podíváme-li se na stejnou podmínku v klasickém případě, získáme

$$0 = \{p_l + \Lambda(x), H^K\} - \frac{\partial(p_l + \Lambda(x))}{\partial x^0} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}\frac{\partial H^K}{\partial p_j} - 1\frac{\partial H^K}{\partial x^l} - \frac{\partial\Lambda}{\partial x^0} = \frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}(p_j + A^j) - \tag{4.4}$$

$$-(p_j + A^j)\frac{\partial A^j}{\partial x^l} - \frac{\partial A^0}{\partial x^l} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} \Leftrightarrow \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^l} = 0 \ \wedge \ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} + \frac{\partial A^0}{\partial x^l} = 0,$$

zcela shodné podmínky plynoucí z rozdělení koeficientů u hybností. Zcela analogická situace nastane u zachovávání momentů hybností, např $p_3 x^2 - p_2 x^3 + \Lambda(x^\mu)$ v relativistickém případě:

$$0 = p_3 \frac{\partial H}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial H}{\partial p_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - x^2 \frac{\partial H}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial H}{\partial x^2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} = \tag{4.5}$$

$$= \frac{p_3 A^2}{\sqrt{1 + (p_j + A^j)^2}} - \frac{p_2 A^3}{\sqrt{1 + (p_j + A^j)^2}} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j} \frac{p_j + A^j}{\sqrt{1 + (p_j + A^j)^2}} -$$

$$-x^2 \left(\frac{p_j + A^j}{\sqrt{1 + (p_j + A^j)^2}} \frac{\partial A^j}{\partial x^3} + \frac{\partial A^0}{\partial x^3} \right) + x^3 \left(\frac{p_j + A^j}{\sqrt{1 + (p_j + A^j)^2}} \frac{\partial A^j}{\partial x^2} + \frac{\partial A^0}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \frac{\partial A^0}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} = 0 \ \wedge \ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial A^1}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = 0 \ \wedge$$

$$-A^3 + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial A^2}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial A^2}{\partial x^2} = 0 \ \wedge \ A^2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^3} - x^2 \frac{\partial A^3}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial A^3}{\partial x^2} = 0,$$

kde je sice formálně ještě jedna podmínka (členy nulového řádu v hybnosti dělené odmocninou), dosazením předchozích podmínek se však tato trivializuje. V klasickém případě:

$$0 = p_3 \frac{\partial H^K}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial H^K}{\partial p_3} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j}\frac{\partial H^K}{\partial p_j} - x^2 \frac{\partial H^K}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial H^K}{\partial x^2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} = \tag{4.6}$$

$$= A^2 p_3 - p_2 A^3 + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j}(p_j + A^j) - x^2 \left((p_j + A^j) \frac{\partial A^j}{\partial x^3} + \frac{\partial A^0}{\partial x^3} \right) + x^3 \left((p_j + A^j) \frac{\partial A^j}{\partial x^2} + \frac{\partial A^0}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \frac{\partial A^0}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial A^0}{\partial x^2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} = 0 \ \wedge \ \frac{\partial \Lambda}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial A^1}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial A^1}{\partial x^2} = 0 \ \wedge$$

$$-A^3 + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial A^2}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial A^2}{\partial x^2} = 0 \ \wedge \ A^2 + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^3} - x^2 \frac{\partial A^3}{\partial x^3} + x^3 \frac{\partial A^3}{\partial x^2} = 0.$$

Dostali jsme shodné podmínky, rozdíl byl pouze v tom, že zde se členy, jež se vynulovaly kvůli podmínkám předchozím nacházely v poslední podmínce, kdežto v relativistickém případě zcela shodné členy tvořily samostatnou (triviální) podmínku. Stejná situace přirozeně nastane i pro libovolnou lineární kombinaci hybností a momentů hybností.

Nyní se podívejme na IP pocházející z invariance vůči boostům (zde zůstaneme u A_μ neboť je to výhodnější pro další výklad), tyto jsou tvaru $Hx^j + p_j x^0 + \Lambda(x^\mu)$. Podmínka na jejich zachování (ukázaná na příkladu $Hx^1 + p_1 x^0 + \Lambda(x^\mu)$) je

$$0 = H \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - x^0 \frac{\partial H}{\partial x^1} - p_1 - x^1 \frac{\partial H}{\partial x^0} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^0} = -A_1 + \frac{A^0 p_1}{\sqrt{}} - \frac{A^0 A_1}{\sqrt{}} + \tag{4.7}$$

$$+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}\frac{p_j-A_j}{\surd}-x^0\left(-\frac{p_j-A_j}{\surd}\frac{\partial A_j}{\partial x^1}+\frac{\partial A^0}{\partial x^1}\right)-x^1\left(-\frac{p_j-A_j}{\surd}\frac{\partial A^j}{\partial x^0}+\frac{\partial A^0}{\partial x^0}\right)-\frac{\partial\Lambda}{\partial x^0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_0+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^1}+x^0\frac{\partial A_1}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial A_1}{\partial x^0}=0\ \wedge\ \frac{\partial\Lambda}{\partial x^2}+x^0\frac{\partial A_2}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial A_2}{\partial x^0}=0$$

$$\wedge\ \frac{\partial\Lambda}{\partial x^3}+x^0\frac{\partial A_3}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial A_3}{\partial x^0}=0\ \wedge A_1+x^0\frac{\partial A_0}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial A_0}{\partial x^0}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^0}=0,$$

přičemž jedna podmínka se opět trivializovala.

Otázka nyní je, jak to bude v klasickém případě. Je jasné, že ponechávat IP v původním tvaru nemá smysl (jednak to neodpovídá přechodu, jednak se tak v podmínkách zachování objevila v několika členech odmocnina a tyto podmínky se výrazně změní). Logické by bylo použít stejný rozvoj jako v (4.2) a nahradit tak $H^r \doteq 1+H^k$ (nebo pouze H^k). Ani to ale na stejné podmínky nevede – v rovnici časového vývoje se objeví člen $H\frac{\partial H}{\partial p_1}$, který bude mít v klasickém případě členy až třetího řádu v hybnostech (kdežto v relativistickém případě se zkrátí odmocniny a získáme člen prvního řádu v hybnostech a člen dělený odmocninou – viz (4.7)). Tento kubický člen je ale v celé rovnici jediný a nemůže tak opět vést na shodné podmínky. Dokonce získané podmínky ani nejdou splnit – kubický člen sobě nemá žádné derivace, nelze ho vynulovat. Nedaří se nám tedy tento IP „korektním způsobem“ převést. Jsou zde ale speciální případy, kdy se na stejné podmínky dostaneme. Prvním takovým nalezeným případem je situace, kdy je Hamiltonián nezávislý na čase a $A_0=0$ – pak můžeme boostový IP nahradit $x^1+x^0p_1+\Lambda(x)$ (což je vlastně limita původního). V takovém případě dostaneme:

$$0=\frac{\partial H^K}{\partial p_1}-x^0\frac{\partial H^K}{\partial x^1}-p_1+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}\frac{\partial H^K}{\partial p_j}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x^0}=p_1-A_1- \tag{4.8}$$

$$-x^0\left(-(p_1-A_1)\frac{\partial A_1}{\partial x^1}-(p_2-A_2)\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-(p_3-A_3)\frac{\partial A_3}{\partial x^1}+\frac{\partial A_0}{\partial x^1}\right)-p_1+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}(p_j-A_j)-\frac{\partial\Lambda}{\partial x^0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^0\frac{\partial A_1}{\partial x^1}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^1}=0\ \wedge\ x^0\frac{\partial A_2}{\partial x^1}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^2}=0\ \wedge\ x^0\frac{\partial A_3}{\partial x^1}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^3}=0\ \wedge\ A_1+x^0\frac{\partial A_0}{\partial x^1}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^0},$$

což jsou skutečně, za daných předpokladů, podmínky shodné s (4.7). Druhý případ je, když A_2, A_3 nezávisí na čase, $A_1=0$ a $A_0=A_0(x^1)$. V této situaci nahradíme boostový IP $x^1+x^0p_1+\Lambda(x)+\int A_0\mathrm{d}x^1$ a máme

$$0=\frac{\partial H^K}{\partial p_1}-x^0\frac{\partial H^K}{\partial x^1}-p_1+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^j}\frac{\partial H^K}{\partial p_j}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x^0}+A_0\frac{\partial H^K}{\partial p_1}=p_1- \tag{4.9}$$

$$-x^0\left(-(p_2-A_2)\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-(p_3-A_3)\frac{\partial A_3}{\partial x^1}+\frac{\partial A_0}{\partial x^1}\right)-p_1+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^1}p_1+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^2}(p_2-A_2)+$$

$$+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^3}(p_3-A_3)-\frac{\partial\Lambda}{\partial x^0}+A_0p_1\Leftrightarrow A_0+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^1}\ \wedge\ x^0\frac{\partial A_2}{\partial x^1}+\frac{\partial\Lambda}{\partial x^2}=0$$

$$\wedge\ x^0\frac{\partial A_3}{\partial x^1}+\frac{\partial \Lambda}{\partial x^3}=0\ \wedge\ x^0\frac{\partial A_0}{\partial x^1}+\frac{\partial \Lambda}{\partial x^0}=0,$$

tedy za daných předpokladů opět podmínky shodné s (4.7). S touto situací se setkáme v sekci 4.2.1.

Jelikož systémy zachovávající boosty nejsou tak dobře známé jako systémy zachovávající hybnosti či jejich momenty, ukážeme i obecný tvar systému zachovávající boost, např. $Hx^1 + p_1x^0$ (nyní pro jednoduchost bez Λ. Získáme ho vyřešením rovnic (4.7):

$$A_0=\frac{f_1((x^1)^2-(x^0)^2,x^2,x^3)+f_2((x^1)^2-(x^0)^2,x^2,x^3)(x^0+x^1)^2}{x^0+x^1}, \tag{4.10}$$

$$A_1=\frac{f_1((x^1)^2-(x^0)^2,x^2,x^3)-f_2((x^1)^2-(x^0)^2,x^2,x^3)(x^0+x^1)^2}{x^0+x^1},$$

$$A_2=f_3((x^1)^2-(x^0)^2,x^2,x^3),\ A_3=f_4((x^1)^2-(x^0)^2,x^2,x^3).$$

Z toho je také vidět důležitá skutečnost, a to, že mohou existovat stacionární systémy, které boost zachovávají, příkladem takového systému je systém 1.a, prezentovaný v následující sekci, tuto vlastnost však zjevně mohou mít i výrazně složitější systémy.

Zde je třeba ještě poznamenat, že obecně, ačkoli některé IP tvar nemění, je vhodné Poincaréovské IP počítat. Důvodem je, že při studiu klasických případů se IP s časovými složkami (včetně Λ) obvykle nestudují, uvedeny v článcích tedy nejsou. I když tedy víme, že IP s čistě prostorovými složkami, odpovídající Poincaréovským budou shodné, neříká nám to nic o zbytku a případných kombinacích.

Jak jsme viděli u boostových IP, situace s převodem IP, které nejsou prvního řádu v hybnosti je poněkud komplikovaná. Ačkoli u některých případů zjevně existují „přirozené“ převody, obecný postup se zatím najít nepodařilo. U konkrétních případů v sekci 4.2 uvidíme mnoho různých situací a porovnání, přičemž většinou se zdá, že lépe než snaha o přímý převod by se hodilo zopakovat postup, jakým byly IP nalezeny pro klasický případ v případě relativistickém (postup, při kterém se naopak IP požadují/nalézají z nějaké podmínky a pak se hledají systémy této podmínce vyhovující však v relativistické variantně může plodit odlišné systémy). Upozorňujeme, že tato potíž je patrně skutečně způsobena vyššími řády, nikoli časovými složkami – jak uvidíme dále, i IP s čistě prostorovými složkami se v relativistickém a nerelativistickém případě mohou značně lišit. Při jejich porovnávání může pomoci jejich vyjádření pomocí hamiltoniánu.

4.1.2 Systém v různých (hyperbolických) formách

Jak již víme, lze relativistický systém popsat celkem v pěti základních formách. Symetrie systému s elektromagnetickým polem zajišťují symetrie čtyřpotenciálu. Tyto symetrie by mělo být možné nalézt v libovolném popisu. To však ještě negarantuje zachování (super)integrability – různý souřadnicový čas znamená, že čistě prostorové IP v jedné formě se mohou stát časovými v jiné. Pak je možné, že tyto nebudou stačit na umenšení počtu potřebných integrací při řešení systému v té míře, jako stačily v původní formě. Vhodnou formou k popisu systému bude pravděpodobně ta, ve které bude jeho tvar nejjednodušší (samozřejmě musíme zohlednit i obecné (ne)výhody daných forem), nicméně nabízí se otázka, jak to bude se složitostí IP v různých formách – je například možné, že vhodným výběrem dokážeme hledat IP jednodušeji (např. v nižších řádech hybností). Tyto otázky vyžadují další zkoumání.

Už na tomto místě však lze uvést jednoduchý příklad. Před jeho vyložením si ale musíme uvědomit, že v pěti možnostech popisu nemáme volnost pouze při výběru parametru a u hyperbolických forem v rovnicích pro Σ (2.30), (2.31), (2.32) ale u frontální, H1 a H2 forem můžeme také volit, které prostorové souřadnice v definicích použijeme (tj. např. u frontální formy $x^p = x^0 + x^j$ můžeme za j dosadit kterýkoli prostorový index). V nejjednodušší situaci lze tak např. systém se dvěma nenulovými prostorovými složkami čtyřpotenciálu závislými na stejných prostorových složkách x^μ popsat jednodušeji ve frontální formě, v níž zadefinujeme x^p pomocí zbylé prostorové souřadnice (vyhneme se odmocnině a zároveň nevnikají potíže s převodem čtyřpotenciálu).

Abychom měli (alespoň teoreticky) k dispozici všechny možnosti, prozkoumáme zde H1 a H2. Provedeme formalismus ze sekce 2.3 čímž získáme základní informace. Z článků [18], [19] o nich nevíme nic krom rovnic Σ a počtu kinematických generátorů, je však jasné, že postup i řada vlastností budou podobné bodové formě.

Hyperbolická forma 1

Nejprve tedy parametrizujme souřadnice tak, abychom splnili (2.31) a vyjádření τ a pro jednoduchost volíme $a = 0$, podobně jako u bodové formy, s analogickou argumentací. (Tj. pracujeme tam, kde jsou splněny podmínky tranzitivity a pod., na závěr této sekce uvedeme i obecnou parametrizaci H2 – pro H1 a bodovou formu by se konstruovaly analogicky – a ukážeme, že se na nalezených závěrech se nic podstatného nemění.) Za tohoto předpokladu tedy máme:

$$x^0 = \tau \cosh \omega,\ x^1 = \tau \sinh \omega \sin \theta,\ x^2 = \tau \sinh \omega \cos \theta,\ x^3 = x^3. \tag{4.11}$$

Určíme metrický tenzor. Diagonální členy budou

$$h_{33} = -1,\ h_{\theta\theta} = -\tau^2 \sinh^2 \omega (\cos^2 \omega + \sin^2 \omega) = -\tau^2 \sinh^2 \omega, \tag{4.12}$$

$$h_{\omega\omega} = \tau^2(\sinh^2 - \cosh^2(\omega \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)) = -\tau^2,\ h_{\tau\tau} = \cosh^2 \omega - \sinh^2(\omega \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 1,$$

Naopak všechny nediagonální budou nulové:

$$h_{\tau\omega} = \cosh \omega \tau \sinh \omega - \tau \sinh \omega \cosh \omega \sin^2 \theta - \tau \sinh \omega \cosh \omega \cos^2 \theta = 0,\ h_{3\mu\neq 3} = 0,$$

$$h_{\tau\omega} = -\tau^2 \cosh \omega \sin \theta \cos \theta + \tau^2 \cosh \omega \sin \theta \cos \theta = 0,$$

$$h_{\tau\theta} = -\tau\cosh\omega\sin\theta\cos\theta + \tau\cosh\omega\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Nejprve ale určíme lagrangián:

$$L^{H1} = -m_0^2\sqrt{1 - \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2 - \tau^2\sinh^2\omega\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \tau^2\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2}. \tag{4.13}$$

Dále už určíme hamiltonián, ve shodě s postupem ze sekce 2.5, na něj ale ještě potřebujeme znát normálu. Podle (2.26) je:

$$(N^{H1})^\mu = \partial^\mu\tau_1 = \frac{(x^0, x^1, x^2, 0)}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}} = \frac{(x^0, x^1, x^2, 0)}{\tau_1} = (\cosh\omega, \sinh\omega\sin\theta, \sinh\omega\cos\theta, 0). \tag{4.14}$$
$$= (\cosh\omega, \sinh\omega\sin\theta, \sinh\omega\cos\theta, 0).$$

To nám rovnou říká, že P^3 je jako jediná hybnost kinematický generátor (viz (2.27)). Podle článku [18] by kinematické měli být čtyři. Zbylé tři tedy musí být v $M^{\mu\nu}$, určíme je z (2.27). Vidíme, že platí

$$(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\tau_1 = 0 \Leftrightarrow \{\mu,\nu\} = \{0,1\} \vee \{0,2\} \vee \{1,2\}, \tag{4.15}$$

tedy zbylé kinematické generátory jsou M^{10}, M^{20} a M^{12}. Vraťme se ale k výpočtu hamiltoniánu. Ten už z (2.26) získáme přímo, pouze potřebujeme v průběhu úprav vyjádřit Minkowského hybnosti pomocí nových.

$$H^{H1} = N^\mu p_\mu = \cosh\omega p_0 + \sinh\omega(\sin\theta p_1 + \cos\theta p_2) = \tag{4.16}$$

$$= \cosh^2\omega p_\tau + \tau\cosh\omega\sinh\omega p_\omega + \sinh^2\omega\sin^2\theta p_\tau + \tau\sinh\omega\cosh\omega\sin^2\theta p_\omega +$$
$$+\tau\sinh^2\omega\sin\theta\cos\theta p_\theta + \sinh^2\omega\cos^2\theta p_\tau + \tau\sinh\omega\cosh\omega\cos^2\theta p_\omega - \tau\sinh^2\omega\sin\theta\cos\theta p_\theta =$$
$$= (\cosh^2\omega + \sinh^2\omega)p_\tau + 2\tau\cosh\omega\sinh\omega p_\omega = \cosh(2\omega)p_\tau + \tau\sinh(2\omega)p_\omega$$

Z hlediska hamiltoniánu jsme tedy v situaci analogické bodové formě.

Hyperbolická forma 2

Situace je analogická hyperbolické formě 1, vycházíme z (2.32) pro $a = 0$. Parametrizujeme

$$x^0 = \tau\cosh\omega,\ x^1 = \tau\sinh\omega,\ x^2 = x^2,\ x^3 = x^3 \tag{4.17}$$

a tedy metrický tenzor má tvar

$$h_{\tau\tau} = 1,\ h_{\omega\omega} = -\tau^2,\ h_{22} = -1,\ h_{33} = -1,\ h_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu, \tag{4.18}$$

což dává lagrangián tvaru

$$L^{H2} = -m_0^2\sqrt{1 - \tau^2\left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2}. \tag{4.19}$$

Dále normála bude

$$(N^{H2})^{\nu} = \frac{(x^0, x^1, 0, 0)}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2}} = \frac{(x^0, x^1, 0, 0)}{\tau_1} = (\cosh\omega, \sinh\omega, 0, 0) \tag{4.20}$$

a hamiltonián by tedy měl být

$$H^{H2} = N^{\mu} p_{\mu} = \cosh\omega p_0 + \sinh\omega p_1 = \cosh^2 p_{\tau} + \tau \sinh\omega \cosh\omega p_{\omega} + \tag{4.21}$$

$$+ \sinh^2\omega p_{\tau} + \tau \sinh\omega \cosh\omega p_{\omega} = (\cosh^2\omega + \sinh^2\omega) p_{\tau} + 2\tau \cosh\omega \sinh\omega p_{\omega} =$$

$$= \cosh(2\omega) p_{\tau} + \tau \sinh(2\omega) p_{\omega}.$$

Ještě okomentujeme kinematické a dynamické generátory: z článku [18] víme, že kinematické by měly být čtyři. Skutečně, viditelně

$$N^{\mu} = \partial^{\mu}\tau_2 = 0 \Leftrightarrow \mu = 2,3 \;\wedge\; (x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})\tau_2 = 0 \Leftrightarrow \{\mu, \nu\} = \{2,3\} \vee \{1,0\}, \tag{4.22}$$

tedy kinematickými generátory jsou P^2, P^3, M^{23} a M^{10}.

Několik poznámek k hyperbolickým formám (ukázáno na H2)

Nejprve se, na příkladu H2 podíváme na obecnou parametrizaci, tj. pro obecné a v předpisech (2.30) - (2.32). Práce s hyperbolickými formami obecně by totiž pro nulové a nemusela být zcela funkční. Výsledky, které jsme zde uvedli však zůstávají v platnosti. Pro nenulové a máme $\tau = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - a^2} \Rightarrow (x^0)^2 - (x^1)^2 = \tau^2 + a^2 = (\tau + a)^2 - 2\tau a$. Proto příkladem vhodné parametrizace H2 je

$$x^0 = (\tau + a)\cosh\omega + \sqrt{2\tau a}\sinh\omega,\;\; x^1 = (\tau + a)\sinh\omega + \sqrt{2\tau a}\cosh\omega,\;\; x^2 = x^2,\;\; x^3 = x^3. \tag{4.23}$$

Pak ale metrický tenzor získává jeden nenulový nediagonální člen a dvě další složky se změní, zbytek se shoduje, píšeme tedy jen změněné členy:

$$h_{\tau\tau} = \frac{2\tau - a}{2\tau},\;\; h_{\omega\omega} = -\tau^2 - a^2 \;\; h_{\tau\omega} = -\frac{a(a-\tau)}{\sqrt{2\tau a}}. \tag{4.24}$$

Normála přechází na (v nových souřadnicích)

$$N^{\mu} = \frac{((\tau + a)\cosh\omega + \sqrt{2\tau a}\sinh\omega, (\tau + a)\sinh\omega + \sqrt{2\tau a}\cosh\omega, 0, 0)}{\tau} \tag{4.25}$$

Když ale nyní vypočteme hamiltonián, dostáváme stále kombinaci p_{τ} a p_{ω}. To by bylo možné vyjádřit z přímo (2.3) jen pokud bychom dokázali její část v níž figurují tyto dvě složky hybnosti vyjádřit jako druhou mocninu právě této kombinace. Podmínka má ale v nových souřadnicích tvar

$$m_0^2 = -\left(\frac{a - 2\tau}{2\tau} p_{\tau}^2 + (\tau^2 + a^2) p_{\omega}^2 + \frac{a(a-\tau)}{\sqrt{2\tau a}} p_{\tau} p_{\omega} + (x^2)^2 + (x^3)^2\right) \tag{4.26}$$

a tedy první tři členy se na čtverec upravit nedaří. Situace se tedy oproti nulovému a (z tohoto hlediska) nemění.

Dále se můžeme podívat, jak vypadá poincaréovské vektorové pole. Provedením push-forwardu ξ a po úpravě máme:

$$\xi^2 = c_{02}\tau\cosh(\omega) + c_{12}\tau\sinh(\omega) - c_{23}x^3 + a^2 \tag{4.27}$$

$$\xi^3 = c_{03}\tau\cosh(\omega) + c_{13}\tau\sinh(\omega) + c_{23}x^2 + a^3$$

$$\xi^\tau = c_{02}\cosh(\omega)x^2 + c_{03}\cosh(\omega)x^3 + c_{12}\sinh(\omega)x^2 + c_{13}\sin(\omega)x^3 + a^0\cosh(\omega) - a^1\sinh(\omega)$$

$$\xi^\omega = c_{01} - c_{02}\frac{x^2\sinh(\omega)}{\tau} - c_{03}\frac{x^3\sinh(\omega)}{\tau} - c_{02}\frac{x^2\cosh(\omega)}{\tau} - c_{13}\frac{x^3\cosh(\omega)}{\tau} - a^0\frac{\sinh(\omega)}{\tau} + a^1\frac{\cosh(\omega)}{\tau}.$$

Další poznámka se týká trajektorií a IP. V tvaru lagrangiánu (4.19) vidíme, že všechny prostorové souřadnice jsou cyklické. Tj. zachovává se $Q_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot\omega} = \frac{\tau^2\dot\omega}{\sqrt{}}$, $Q_2 = \frac{\dot x^2}{\sqrt{}}$ a $Q_3 = \frac{\dot x^3}{\sqrt{}}$, kde jako $\sqrt{}$ jsme označili $-L$ a pro jednoduchost jsme volili $m_0 = 1$. Naproti tomu zobecněná energie IP nebude, neboť lagrangián závisí na čase explicitně. Máme ale i čtvrtý IP, v podobě $\frac{\dot x^2 x^3 - \dot x^3 x^2}{\sqrt{}}$. Máme tedy (alespoň) 4 IP a tedy volná částice je (alespoň) minimálně superintegrabilní systém. Zdá se, že najít jiné IP je už ale značně obtížné (např. analogie Q_4 se souřadnicí ω se najít nedaří). U H1 a bodové formy navíc bude takových IP ještě méně (méně cyklických souřadnic).

Abychom získali lepší vyjádření hamiltoniánu, mohli bychom z podmínky (2.3) vyjádřit $p_\tau = \sqrt{1 + \tau^2 p_\omega^2 + p_2^2 + p_3^2}$ a toto dosadit do hamiltoniánu (4.21), zda je tento postup legitimní, je otázkou. Rozpor mezi p_τ a (4.21) je problematický obecně. Kupříkladu kdybychom považovali za hamiltonián pouze p_τ, budou nalezené IP, ať u je a jakékoli, analogické lagrangeově formalismu, z poincaréovských to budou p_ω, p_2, p_3 a $x^2p_3 - x^3p_2$, což je konzistentní. Pokud ale pracujeme s (4.21), ztrácíme, díky explicitní závislosti na ω p_ω. Také je otázka, jak bychom, v takovém případě měli pracovat s poincaréovskými IP, resp. zda se IP konstruují násobením jeho τ-složky p_τ, nebo H. Tyto otázky, pramenící patrně z křivosti nadplochy a tedy možný rozdílem mezi časovou složkou a časovým směrem, vyžadují další zkoumání. Výsledky uvedené v tomto textu je třeba brát pouze jako souhrn pozorování, který si nečiní nárok být kvalifikovaným prostudováním. Je možné, že formalismus tak, jak byl předložen ve skutečnosti nelze pro hyperbolické formy efektivně použít či vyžadují významně jinou interpretaci. Ačkoli jsou hyperbolické formy značně exotickou formou popisu, je možné, že použití jiných metod by mohlo vést k efektivnějšímu využití. Zajímavý nadhled bychom možná mohli získat rozšířením fázového prostoru, resp. porovnáváním popisu systému v různých formách z pohledu z vyšší dimenze.

4.2 Relativistické obdoby systémů z článků [3, 4, 5, 6]

Články [3, 4, 5, 6] přestavují rozsáhlou kolekci superintegrabilních systémů se statickým elektromagnetickým polem a obsahují i jejich jistou klasifikaci. Jako první krok studia jejich relativistických obdob byl u všech skupin proveden výpočet poincarévských symetrií. Výsledky se, až na několik výjimek, nelišily od situace klasické. Důvodem je, že se většinou jednalo IP prvního řádu v hybnostech, které neobsahují časovou souřadnici (ty jsou podle sekce 4.1.1 shodné), tedy kombinace hybností a momentů hybností, nejčastěji o počtu 2 nebo 3. Odlišná situace však nastala u systémů s konstantními poli (zde rozebrány jako typ 1), kde se objevily poincaréovské IP s časovými složkami (polohy i hybnosti).

Ze systémů z článků bylo vybráno několik, které nyní budeme studovat. Výběr se snaží reflektovat jednotlivé, mírně odlišné situace ke kterým u systémů z článků došlo (z hlediska počtu a druhu poincaréovských IP, použitých souřadnic, atd.). Dále jelikož v zadání explicitně zmiňuje např. článek [4], jako typ 4 prozkoumáme (alespoň v základních rysech) veškeré superintegrabilní systémy z článku [6], který navazuje na článek [4] a rozšiřuje ho. Vše v této sekci je prováděno nejprve v instantní formě, neboť u ní je možná přímá limita ke klasické situaci. To však poněkud komplikuje především řešení Hamiltonových rovnic (a to i v případě vyjadřování s IP) neboť s odmocninami se zde pracuje velmi obtížně. Proto řešení budeme provádět jen teoreticky (nastíníme postup), hlavně abychom ukázali základní vlastnosti.

4.2.1 Systémy typu 1

Prvním konkrétním systémem, který budeme studovat je případ B z článku [4], konkrétně obecně minimálně superintegrabilní situace, tj.

$$\mathbf{B} = (0, 0, \gamma),\ W = W(x^3) \tag{4.28}$$

(kde se kvůli snazšímu porovnání s článkem držíme jeho notace, ve které $W = A_0$) a tedy

$$A_\mu = (W(x^3), 0, -\gamma x^1, 0),\ H = \sqrt{1 + p_1^2 + p_3^2 + (p_2 + \gamma x^1)^2} + W(x^3). \tag{4.29}$$

Analogický systém je rozebrán i v článku [5] a jeho speciální situace a $W = 0$ v článku [6], tu zde rozebereme jako součást systému 1.a. Klasicky lze systém učinit maximálně superintegrabilním vhodným výběrem W (viz [4]). Relativistickou obdobu tohoto výběru prozkoumáme jako systém 1.b. V krátkosti se též zmíníme o případu nestacionárního W.

Nejprve se podívejme na obecnou situaci. Začneme poincaréovskými IP: při (4.29) dostáváme z požadavku nulovosti Lieovy derivace tenzoru elektromagnetického pole rovnice:

$$0 = -\gamma c_{02} + W'(x^3) c_{13},\ 0 = \gamma c_{01} + W'(x^3) c_{23},\ 0 = \gamma c_{23} - W'(x^3) c_{01}, \tag{4.30}$$

$$0 = -\gamma c_{13} - W'(x^3)c_{02},\ 0 = (a^3 + c_{03}x^0 + c_{13}x^1 + c_{23}x^2)W''(x^3),$$

což znamená, že nejsou žádné podmínky na c_{12}, a^0, a^1, a^2. Zbytek konstant ve ξ musí být obecně roven nule, neboť rovnice pro ně nelze splnit současně. Máme tedy čtyři poincaréovské IP. Z rovnic je vidět, že by situaci výrazně změnilo, kdyby $W''(x^3)$ byla nulová, tím bychom získali další dva IP pocházející z c_{03} a a^3 (bude rozebráno jako systém 1.a.) Pro druhou, dále rozebranou situaci 1.b. se, jak uvidíme, nezmění nic. V obecné situaci je tak systém minimálně superintegrabilní stejně jako je tomu v klasickém případě, dokonce se shodnými IP (shodnost plyne i ze sekce 4.1.1), přesto uvedeme postup: rovnou vidíme, že IP vycházející z a^0 a a^2 se zachovávají samy o sobě – hamiltonián není závislý na čase ani na x^2, tedy

$$Q_1 = p_0 = H,\ Q_2 = p_2. \tag{4.31}$$

Pro zbytek je třeba dopočítat Λ. Pro a^1 dostáváme z příslušného ξ rovnice pro Λ tvaru (3.5):

$$\mathcal{L}_\xi A_0 = 0 = \partial_0\Lambda,\ \mathcal{L}_\xi A_3 = 0 = \partial_3\Lambda,\ \mathcal{L}_\xi A_1 = 0 = \partial_1\Lambda, \tag{4.32}$$

$$\mathcal{L}_\xi A_2 = -\gamma = \partial_2\Lambda \Rightarrow \Lambda = -\gamma x^2 \Rightarrow Q_3 = p_1 + \gamma x^2,$$

přičemž Λ je určena až na konstantu, která byla zvolena jako nulová. Pro c_{12} dostáváme:

$$\partial_0\Lambda = 0 = \partial_3\Lambda,\ \partial_1\Lambda = -\gamma x^1,\ \partial_2\Lambda = \gamma x^2 \Rightarrow \Lambda = \frac{\gamma}{2}((x^2)^2 - (x^1)^2) \tag{4.33}$$

$$\Rightarrow Q_4 = x^1p_2 - x^2p_1 - \frac{\gamma}{2}((x^2)^2 - (x^1)^2). \tag{4.34}$$

Jelikož se jedná IP prvního řádu, nemusíme zkoušet Poissonovy závorky, involuci ani funkcionální nezávislost – vše bude shodné jako v klasickém případě. Žádná trojice IP není v involuci, IP jsou však funkcionálně nezávislé. V klasickém případě existuje IP, např. $p_3^2 + W(x^3)$, který již je v involuci s dalšími dvěma a činí tak systém integrabilním, a tedy i minimálně superintegrabilním, ukáže se, že v relativistické případě je situace analogická.

Nyní se nabízí otázka, zda nějakým jednoduchým ansatz nedosáhneme pátého nezávislého IP a ideálně maximálně superintegrabilního stavu. Zkusíme tedy hledat IP tvaru

$$p_1^2f_1 + p_2^2f_2 + p_3^2f_3 + Hf_4 + p_1p_2f_5 + p_1p_3f_6 + p_2p_3f_7 + \tag{4.35}$$

$$+p_1f_8 + p_2f_9 + p_3f_{10} + f_{11},\ f_k = f_k(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Tento ansatz dosadíme do vztahu pro časový vývoj (2.35) a oddělíme části s $\surd$ a bez ní. Z každé pak oddělíme koeficienty jednotlivých mocnin a kombinací hybností a položíme je rovny nule. Získáme dlouhou sadu rovnic. Vyřešením této soustavy získáme různé možné případy. Prozkoumáním těchto případů však nalézáme pátý nezávislý IP pouze pro případ 1.a. Nalézáme však IP tvaru. Ostatní případy, včetně těch v klasickém případě maximálně superintegrabilních, tedy mají buď pátý IP složitějšího tvaru nežli (4.35), nebo ho nemají vůbec. Nalézáme však IP, který je v involuci např. s Q_2 (přirozeně i s Q_1) a činí tak systém integrabilní a tedy i minimálně integrabilním. IP je tvaru

$$\tilde{Q} = p_3^2 + (H - W(x^3))\frac{W(x^3)}{2} + W^2(x^3) \tag{4.36}$$

a je patrně analogií zmíněného klasického IP plnícího „stejnou funkci“.

Situace se ale mění, pokud povolíme $W = W(x^0, x^3)$. V takovém případě už se samozřejmě nezachovává hamiltonián, ale pro některé systémy získáváme jiné čtvrté IP, tentokrát obsahující čas. Označíme je $\tilde{Q}_1$, neboť Q_2, Q_3, Q_4 zůstávají shodné. Jsou to:

$$W(x^0, x^3) = Cx^3\frac{dF(x^0)}{dx^0},\ \tilde{Q}_1 = p_3 + CF(x^0), \tag{4.37}$$

$$W(x^0, x^3) = \frac{dF(x)}{dx}(-x^3C_1 - C_2),\ \text{kde } F(x) = \frac{1}{2}(x^0)^2C_1 - \frac{1}{2}(x^3)^2C_1 - C_2x^3 + C_3x^0$$

$$\tilde{Q}_1 = p_3C_1x^0 + H(x^3C_1 + C_2) + f(x^0, x^3, C_i), \tag{4.38}$$

$$W(x^0, x^3) = \frac{C_1}{2C_2e^{-\frac{x^3}{C_3}}} + \frac{C_3e^{-\frac{x^3}{C_3}}}{2C_2} + \frac{x^3C_4}{4C_3C_2\sqrt{\frac{-C_4}{\left(e^{-\frac{C_5+x^0}{C_3}}\right)^2}}} - \frac{x^3C_4}{4C_3C_2\sqrt{\frac{-C_4}{\left(e^{-\frac{C_5+x^0}{C_3}}\right)^2}}\left(e^{-\frac{C_5+x^0}{C_3}}\right)^2},$$

$$\tilde{Q}_1 = p_3^2C_2 + p_3\frac{\sqrt{\frac{-C_4}{\left(e^{-\frac{C_5+x^0}{C_3}}\right)^2}}\left(\left(e^{-\frac{C_5+x^0}{C_3}}\right)^2 + 1\right)}{2} + He^{\frac{x^3}{C_2}}(C_1 + C_3) + f(x^0, x^3, C_k). \tag{4.39}$$

kde C_n jsou konstanty, a funkce f jsou konkrétní výrazy, které ale pro jejich délku (a relativní nedůležitost – systémy zde nijak detailně nestudujeme) neuvádíme. U posledního systému odmocnina násobí závorku.

Nyní se ale vrátíme k časově nezávislému případu a podíváme se už na konkrétní dvě situace.

Systém 1.a

Situaci specifikujeme pro $W(x^3) = Ax^3$, kde A je konstanta. Z prvních čtyř rovnic (4.30) nic nového nezískáváme, stále je nelze splnit zároveň bez vynulování konstant. Poslední rovnice se však trivializuje a získáváme tak další dva zdroje poincaréovských IP, totiž c_{03} a a^3. Pro a^3 dostáváme rovnice

$$\partial_1\Lambda = 0 = \partial_2\Lambda = \partial_3\Lambda,\ \partial_0\Lambda = A \Rightarrow \Lambda = Ax^0 \Rightarrow Q_5 = p_3 - Ax^0, \tag{4.40}$$

pro c_{03} pak

$$\partial_1\Lambda = 0 = \partial_2\Lambda,\ \partial_0\Lambda = x^0 A,\ \partial_3\Lambda = x^3 A \Rightarrow \Lambda = \frac{A}{2}((x^0)^2 + (x^3)^2) \tag{4.41}$$

$$\Rightarrow Q_6 = x^3 H + x^0 p_3 - \frac{A}{2}((x^0)^2 + (x^3)^2). \tag{4.42}$$

Rozeberme tyto výsledky: nejblíže našemu studovanému případu je případ „supeintegrability pro systémy s integrály p_1, p_2“, podpřípad s $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$ (význam γ_i, je zcela jiný než zde, není nyní důležitý) v [6]. Tento systém má tvar $A_\mu = (0, 0, Bx^3, 0)$, což odpovídá analogii našeho systému s jinou souřadnicí a znaménkem v A_2 a $A = 0$. V klasickém případě má, krom hamiltoniánu, čtyři IP: p_2 , ten je shodný s naší situací, dále $p_3 - Bx^2$, což je přímá analogie našeho Q_3, p_1, což odpovídá analogii Q_5 (pro nulové A) a konečně $l_1 + \frac{B}{2}((x^3)^2 - (x^2)^2$, což odpovídá Q_4. Z úvah v předchozí podsekci víme, že i pro A nenulové se v klasickém případě zachovají $Q_2 - Q_5$ a Q_1 bude odpovídat klasický hamiltonián. V klasickém případě je hamiltonián kombinací ostatních čtyř IP a systém je maximálně superintegrabilní, neboť obsahuje ještě další IP, nepolynomiální v hybnostech. Jeho obdobu zde nelze dobře zanalyzovat, nevíme, zda existuje a jak vypadá pro nenulové W. Vraťme se tedy k přesné klasické obdobě našeho systému. Pro $A = 0$ se zachovává odpovídající tvar Q_6, tj. $p_1 x^0 + x^3$. Pro nenulové A se klasicky zachovává IP $x^3 + x^0 p_3 - \frac{A}{2}(x^0)^2 (= x^3 + x^0 p_3 + \Lambda - \int A_0 dx^3)$:

$$\{H^K, x^3 + x^0 p_3 - \frac{A}{2}(x^0)^2\} = 1\frac{\partial H^K}{\partial p_3} - x^0 \frac{\partial H^K}{\partial x^3} - 1 p_3 + A x^0 = 0. \tag{4.43}$$

Ještě jsme se však nevyjádřili k tomu, do jaké kategorie z hlediska (super)integrability systém spadá. Vidíme, že např. Q_1, Q_2 a Q_5 jsou v involuci, systém je tedy integrabilní. Co se funkcionální nezávislosti týče, je třeba považovat čas za další proměnnou. Tedy vytvoříme Jacobiho matici IP $Q_1 - Q_6$:

$$\mathbf{J} = \tag{4.44}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{(\gamma x^1 + p_2)\gamma}{\surd} & 0 & A & \frac{p_1}{\surd} & \frac{\gamma x^1 + p_2}{\surd} & \frac{p_3}{\surd} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma x^1 + p_2 & -\gamma x^2 - p_1 & 0 & -x^2 & x^1 & 0 \\ -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -Ax^0 + p_3 & \frac{x^3(\gamma x^1 + p_2)\gamma}{\surd} & 0 & \surd + Ax^3 & \frac{x^3 p_1}{\surd} & \frac{x^3(\gamma x^1 + p_2}{\surd} & \frac{x^3 p_3}{\surd} + x^0 \end{pmatrix} \sim$$

a převedeme na horní trojúhelníkový tvar:

$$\sim \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma x^1 + p_2 & -\gamma x^2 - p_1 & 0 & -x^2 & x^1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & \frac{p_2}{\surd} & \frac{p_3}{\surd} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Hodnost je tedy 5, z množiny IP můžeme např. odstranit závislý Q_1 a systém je maximálně superintegrabilní (neměli bychom to prohlašovat s jistotou, neboť máme časový IP, nyní ale uvidíme, že to pravda je). V klasickém případě už o závislosti hamiltoniánu víme, jeho odstraněním získáme opět pět nezávislých IP, již probíraných tvarů, takže v tomto ohledu je situace shodná. Nyní se konečně podívejme na řešení systému. Uvedeme, pro úplnost Hamiltonovy rovnice:

$$\dot{x}^1 = \frac{p_1}{\surd}, \ \dot{x}^2 = \frac{(p_2 + \gamma x_1)}{\surd}, \ \dot{x^3} = \frac{p_3}{\surd}, \ \dot{p_1} = -\frac{p_2 + \gamma x^1}{\surd}\gamma \tag{4.46}$$

(p_2, p_3 jsou triviálně vyjádřitelné z Q_k). Řešení lze získat např. následovně: z Q_5 vyjádříme p_3. To dosadíme do Q_6 a vyjádříme x^3 (pro které jsme takto získali kvadratickou rovnici.) Nyní můžeme např. první Hamiltonovu rovnici vynásobit $\surd$ a tu vyjádřit pomocí Q_1 za dosazení již známého $x^3(x^0)$. Výslednou rovnici zderivovat a zní dosadit $\dot{p}_1$ do čtvrté uvedené Hamiltonovy rovnice. Tak máme diferenciální rovnici v níž vystupují už pouze $x^1(x^0)$ a jeho derivace. Jejím vyřešením získáme $x^1(x^0)$. To lze dosadit do Q_4 do něhož zároveň dosadíme za p_1 z Q_3. Máme algebraickou rovnici pro x^2, kterou vyřešíme. Výsledek dosadíme zpět do Q_3 a získáváme p_1. Konkrétní výsledky uvedeme pouze po vyřešení $x^3(x^0)$, dále jsou již výpočty velice nepřehledné a špatně vyjádřitelné.

Vyjádříme-li Q_6 pomocí Q_1 a Q_5, čímž získáme kvadratickou rovnici pro x^3:

$$Q_6 = x^3 Q_1 + x^0(Q_5 + Ax^0) - \frac{A}{2}\left(x_0^2 + x_3^2\right) \Leftrightarrow \tag{4.47}$$

$$x^3(x^0) = \frac{Q_1 \pm \sqrt{A^2(x^0)^2 + 2AQ_5x^0 - 2AQ_6 + (Q_1)^2}}{A}.$$

Když toto porovnáme s klasickým řešením ($\dot{x}^{3k}(x^0) = p_3 = Q_5 + Ax^0 \Rightarrow x^{3k}(x^0) = Q_5x^0 + \frac{A}{2}(x^0)^2 + C$), kde C je konstanta, nalézáme křivku velmi podobnou (4.47) se znaménkem plus, pouze s tím rozdílem, že relativistická křivka je o něco špičatější. Minusová křivka se (obecně) interpretuje jako křivka antičástice [18].

Systém 1.b

Druhý podpřípad systému (4.29), který prostudujeme je situace, kdy $W = \frac{\gamma^2}{2}(x^3)^2$. V klasickém případě je to jeden ze dvou možných tvarů, kdy je případ B v článku [4] pro již zmíněné podmínky maximálně supeintegrabilní. $Q_1 - Q_4$ zůstávají shodné, jak jsme již probrali. V klasickém případě přibývá další IP, druhého řádu v hybnosti tvaru $p_1l_2 - p_2l_1 - \gamma x^1x^2p_3 - x^3(x^2p_1 + x^1p_2)$, který se v relativistickém případě nezachovává. Je však rozumným předpokladem, že i relativistický systém by mohl mít IP druhého řádu, či případně další, ne-poincaréovské IP řádu prvního. Víme již, že ansatz (4.35) nám další nezávislé IP nepřinese. Zkusme do něj tedy pro tento případ přidat členy třetího řádu:

$$\tilde{Q} = Q + p_1^3f_{12} + p_2^3f_{13} + p_3^3f_{14} + p_1^2p_2f_{15} + p_1^2p_3f_{16} + p_2^2p_1f_{17} + p_2^2p_3f_{18} + \tag{4.48}$$

$$+p_3^2 p_1 f_{19} + p_3^2 p_2 f_{20},\ f_k = f_k(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Ani pro tento případ ale nezávislé IP nenacházíme.

Můžeme ještě vyzkoušet, jaká je situace ve frontální formě. Převedeme tedy systém do frontální formy a máme (A_2 zůstává shodné a A_1 nulové)

$$A_m = \frac{\gamma^2(x^p - x^m)^2}{8} = A_p,\ H = \frac{1 + p_1^2 + (p_2 + \gamma x^1)^2}{4\left(p_m - \frac{\gamma^2(x^p - x^m)^2}{8}\right)} + \frac{\gamma^2(x^p - x^m)^2}{8} \tag{4.49}$$

Vyzkoušíme druhý řád v p_i:

$$Q = p_1^2 F_1 + p_2^2 F_2 + p_1 p_2 F_3 + p_1 F_4 + p_2 F_5 + F_6,\ F_k = F_k(x^p, x^1, x^2, x^m, p_m) \tag{4.50}$$

V takovémto případě dostáváme sérii IP, z níž tři se shodují s $Q_2 - Q_4$. Kromě na první pohled závislých IP dostáváme ještě další dva. Jeden z nich je funkcí pouze hybností a souřadnic s indexy 1 a 2 (a tedy se zachovává ve shodné formě i v instantní formě avšak je v ní závislý na ostatních). Druhý je složitější a v instantní formě se nezachovává. Má tvar

$$Q_1^F = -\frac{16(p_1^2 + p_2^2)}{(x^m - x^p)^2\gamma^2 - 16p_m} - \frac{32 p_2 \gamma x^1}{(x^m - x^p)^2\gamma^2 - 16p_m} + \tag{4.51}$$

$$+\frac{(x_m - x_p)^4\gamma^4 - 64\gamma^2(x^1)^2 - 256p_m^2 - 64}{4(x^m - x^p)^2\gamma^2 - 64p_m}.$$

Oba integrály zvlášť jsou nezávislé na $Q_2 - Q_4$, dohromady je ale jeden vždy závislý na zbylých čtyřech, tedy opět máme pouze minimálně integrabilní systém se čtyřmi nezávislými IP. Upozorňujeme, že jsme mohli vybrat i jiný typ frontální formy, tj. zadefinovat x^p pomocí jiné prostorové souřadnice, než x^3, vybrali jsme tuto, abychom měli co nejjednodušší A_p, A_m a zároveň nám zůstaly nějaké IP z instantní formy. Je však pravdou, že kdybychom zvolili $x^p = x^0 + x^2$, byl by hamiltonián frontální formy IP. Zase bychom ale ztratili jiné IP. Také je pro porovnání a přehlednost vhodnější, budeme-li se v celém textu držet jednoho typu každé formy.

Vrátíme se nyní do instantní formy a zkusíme nalézt trajektorie: hamiltonián a Hamiltonovy rovnice budou

$$H = \sqrt{1 + p_1^2 + (p_2 + \gamma x^1)^2 + p_3^2} + \frac{\gamma^2(x^3)^2}{2} \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{p_1}{\surd},\ \dot{x}_2 = \frac{p_2 + \gamma x^1}{\surd}, \tag{4.52}$$

$$\dot{x}^3 = \frac{p_3}{\surd},\ \dot{p}_1 = -\frac{(p_2 + \gamma x^1)\gamma}{\surd},\ \dot{p}_3 = -\gamma^2 x^3.$$

Projdeme opět teoretické řešení. Do rovnice pro $\dot{x}^3$ dosadíme za $\surd = Q_1 - \frac{\gamma^2(x^3)^2}{2}$ a převedeme tak, aby p_3 byla na pravé straně sama. Tuto rovnici zderivujeme a pak z ní dosadíme za $\dot{p}_3$ do poslední rovnice. Výsledkem je diferenciální rovnice, kde figuruje už jen $x^3(x^0)$ a jeho derivace. Vyřešením tedy získáme $x^3(x^0)$ a zpětným dosazením do rovnice pro $\dot{x}^3$ i $p_3(x^0)$. Zbytek již dokážeme dořešit pomocí IP: dosadíme již známé vztahy do Q_1 a vyjádříme z něho p_1 pomocí x^1, toto dosadíme do Q_3. Z výsledného vztahu lze vyjádřit např. x^1 pomocí x^2 a toto konečně dosadit do Q_4 (přičemž p_1 vyjadřujeme z Q_2 v původním tvaru). Z výsledné rovnice vyjádříme $x^2(x^0)$. Z její znalosti získáváme (pomocí Q_3) i $p_1(x^0)$. Zbývá už pouze $x^1(x^0)$. To už jednoduše vyjádříme z původního tvaru Q_4 po dosazení již známých vztahů.

Ještě se podívejme, jak se řešení bude chovat ve frontální formě. Hamiltonovy rovnice budou

$$\dot{x}^1 = \frac{p_1}{2\left(p_m - \frac{(x^p - x^m)^2\gamma^2}{16}\right)}, \ \dot{x}^2 = \frac{p_2 + x^1\gamma}{2\left(p_m - \frac{(x^p - x^m)^2\gamma^2}{16}\right)}, \tag{4.53}$$

$$\dot{x}^m = -\frac{1 + p_1^2 + (p_2 + \gamma x^1)^2}{4\left(p_m - \frac{(x^p - x^m)^2\gamma^2}{16}\right)^2}, \ \dot{p}_1 = -\frac{\gamma(p_2 + \gamma x^1)}{2\left(p_m - \frac{(x^p - x^m)^2\gamma^2}{16}\right)},$$

$$\dot{p}_m = \frac{1 + p_1^2 + (p_2 + \gamma x^1)^2}{4\left(p_m - \frac{(x^p - x^m)^2\gamma^2}{16}\right)^2} \frac{(x^p - x^m)\gamma^2}{8}$$

Začít můžeme např. tím, že do Q_4 dosadíme za x^2 z Q_3, čímž získáme vztah, v němž vystupují pouze x^1 a p_1. Vyjádříme jedno pomocí druhého. Dále můžeme vydělit Hamiltonovu rovnici pro $\dot{x}^1$ a $\dot{p}_1$ a získat diferenciální rovnici, v níž opět vystupují pouze tyto dvě veličiny a jejich derivace. Dosazením předchozího algebraického vyjádření jednu z nic eliminujeme a můžeme (teoreticky) rovnici vyřešit. Řekněme tedy, že jsme získali $x^1(x^p)$. Když nyní použijeme Q_4 a dosadíme za p_1 z Q_3 a již známé $x^1(x^p)$, dokážeme vyjádřit $x^2(x^p)$ a pomocí něho z Q_3 i $p_1(x^p)$. Jelikož již vše ostatní známe, dokážeme konečně z Q_1^F vyjádřit p_m pomocí x^m či naopak. Toto vyjádření pak, spolu se všemi známými trajektoriemi dosadíme do rovnice pro $\dot{x}^m$ či $\dot{p}_m$ a vyřešíme. Pak se vrátíme k algebraickému dosazení z Q_1^F a získáme i poslední veličinu.

4.2.2 Systém 2 a komentáře k příbuzným systémům

Jako na další systém prezentovaný v článcích se podíváme na magnetický monopól s Coulombickým potenciálem. Ten je přirozeně/relativně jednoduše popsán v jiných než kartézských souřadnicích, konkrétně tzv. rotačně parabolických. Systém i se svými IP je popsán v článku [3], pro souřadnice se používají označení ξ, η, Φ (což jsou u nás písmena v tomto textu už obsazená, nicméně zde by nemělo docházet k nedorozuměním). Transformace má tvar

$$x^1 = \xi\eta\cos\Phi, \ x^2 = \xi\eta\sin\Phi, \ x^3 = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \ \xi, \eta \in (0, \infty) \ \Phi \in (-\pi, \pi\rangle, \tag{4.54}$$

a systém je

$$A_\xi = 0 = A_\eta,\ A_\Phi = -\frac{b_m(\eta^2-\xi^2)}{\xi^2+\eta^2},\ A_0 = \frac{\omega}{\xi^2+\eta^2} + \frac{2b_m}{(\xi^2+\eta^2)^2}, \tag{4.55}$$

kde b_m, ω jsou konstanty. Obecně je magnetický monopol s libovolným A_0 závislým pouze na $\xi^2 + \eta^2 (= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2})$ v klasickém případě minimálně superintegrabilní systém [5], při konkrétní volbě (4.55), kterou používáme je maximálně superintegrabilní [3].

Ke zkoumání potřebujeme i inverzi (4.54): druhou rovnici vydělíme první a vyjádříme Φ. Umocněním první i druhé na druhou, jejich sečtením lze vyjádřit ξ pomocí η nebo naopak. Dosazením tohoto do poslední rovnice získáme kvadratickou rovnici pro druhou mocninu příslušné souřadnice, odmocněním jejího řešení (přičemž volíme to, které je kladné) získáme vyjádření první mocniny. To znamená, že

$$\Phi = \arctan\frac{x^2}{x^1} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x^1} = -\frac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x^2} = \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}, \tag{4.56}$$

$$\eta = \sqrt{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} - x^3} \Rightarrow \frac{\partial\eta}{\partial x^3} = -\frac{\sqrt{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} - x^3}}{2\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x^i} = \frac{x^i}{2\left(\sqrt{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)} - x^3}\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\right)},$$

$$\xi = \sqrt{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} + x^3} \Rightarrow \frac{\partial\xi}{\partial x^3} = \frac{\sqrt{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} + x^3}}{2\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}},$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^i} = \frac{x^i}{2\left(\sqrt{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2)} + x^3}\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\right)}$$

a pullback hybnosti (a obecného kovektoru, tedy i čtyřpotenciálu) bude po převedení výrazů (4.56) do nových souřadnic

$$p_1 = -\frac{\sin\Phi}{\xi\eta}p_\Phi + \frac{\cos\Phi}{\xi^2+\eta^2}(\xi p_\eta + \eta p_\xi),\ p_2 = \frac{\cos\Phi}{\xi\eta}p_\Phi + \frac{\sin\Phi}{\xi^2+\eta^2}(\xi p_\eta + \eta p_\xi), \tag{4.57}$$

$$p_3 = \frac{\xi p_\xi - \eta p_\eta}{\xi^2+\eta^2},\ p_0 = p_0.$$

Můžeme tedy již vyjádřit hamiltonián (jelikož víme, že časovou souřadnici neměníme, stačí nám jen přepsat původní instantní hamiltonián do nových souřadnic, tj. vyjádřit v nich sumu druhých mocnin původních $p_j - A_j$):

$$H = \sqrt{1 + \frac{(p_\xi - A_\xi)^2}{\xi^2+\eta^2} + \frac{(p_\eta - A_\eta)^2}{\xi^2+\eta^2} + \frac{(p_\Phi - A_\Phi)^2}{\xi^2\eta^2}} + A_0(\xi,\eta,\Phi), \tag{4.58}$$

který je, jak vidíme, zcela v souladu s jeho klasickým tvarem. Dále, pro účely poincaréovských IP ztransformujeme i ξ^μ. Jeho pushforward po úpravách je:

$$\xi^0 = a^0 + c_{01}\xi\eta\cos\Phi + c_{02}\xi\eta\sin\Phi + c_{03}\frac{\xi^2-\eta^2}{2} \tag{4.59}$$

$$\xi^\Phi = -\left(a^1 + c_{01}x^0 - c_{13}\frac{\xi^2-\eta^2}{2}\right)\frac{\sin\Phi}{\xi\eta} + c_{12} + \left(a^2 + c_{02}x^0 - c_{23}\frac{\xi^2-\eta^2}{2}\right)\frac{\cos\Phi}{\xi\eta}$$

$$\xi^\xi = (a^3 + c_{03}x^0)\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} + \eta\cos\Phi\left(\frac{c_{13}}{2} + \frac{c_{01}x^0 + a^1}{\xi^2+\eta^2}\right) + \eta\sin\Phi\left(\frac{c_{23}}{2} + \frac{c_{02}x^0 + a^2}{\xi^2+\eta^2}\right)$$

$$\xi^\eta = -(a^3 + c_{03}x^0)\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} - \xi\cos\Phi\left(\frac{c_{13}}{2} - \frac{c_{01}x^0 + a^1}{\xi^2+\eta^2}\right) - \xi\sin\Phi\left(\frac{c_{23}}{2} - \frac{c_{02}x^0 + a^2}{\xi^2+\eta^2}\right)$$

Nyní můžeme zcela klasicky spočítat Lieovu derivaci $F_{\mu\nu}$ (po jeho transformaci). Výhodou ponechání konstant a, c v (4.59) je to, že nalezené poincaréovské IP lze rychle převést do kartézských souřadnic jednoduše z toho, že víme, se kterými kartézskými IP jsou svázány. Pak jen stačí převést funkce souřadnic do kartézských. Postup zde ale uvádět nebudeme, neboť rovnice jsou poměrně komplikované a následuje stejně vyslovení ansatz, které v sobě případné poincaréovské IP obsahuje:

$$Q = p_\xi^2 a + p_\eta^2 b + p_\Phi^2 c + p_\xi p_\eta d + p_\xi p_\Phi e + p_\eta p_\Phi f + p_\xi g + p_\eta h + p_\Phi i + Hj + k, \tag{4.60}$$

kde $a - k$ jsou obecně funkce ξ, η, Φ, x^0. Dostáváme pět nezávislých IP. Dále několik dalších závislých, z níž uvádíme jen jeden, u kterého to není okamžitě vidět ($\tilde{Q}_6$) jsou to

$$Q_1 = H,\ Q_2 = p_\Phi, \tag{4.61}$$

$$Q_3 = (p_\xi\eta - p_\eta\xi)\cos\Phi + \left(p_\Phi\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi\eta} - \frac{b_m(\xi^2+\eta^2)}{\xi\eta}\right)\sin\Phi,$$

$$Q_4 = (p_\xi\eta - p_\eta\xi)\sin\Phi - \left(p_\Phi\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi\eta} - \frac{b_m(\xi^2+\eta^2)}{\xi\eta}\right)\cos\Phi,$$

$$Q_5 = -(p_\xi^2\eta^2 + p_\eta^2\xi^2)\frac{\sin(2\Phi)}{2} + p_\Phi^2\frac{(\xi^2-\eta^2)^2\cos\Phi\sin\Phi}{\xi^2\eta^2} + p_\xi p_\eta\xi\eta\sin(2\Phi) +$$

$$+ p_\xi p_\Phi\frac{(\xi^2-\eta^2)\cos(2\Phi)}{\xi} + p_\eta p_\Phi\frac{(\eta^2-\xi^2)\cos(2\Phi)}{\eta} + \left(-\frac{p_\xi}{\xi} + \frac{p_\eta}{\eta}\right)(\xi^2+\eta^2)b_m\cos(2\Phi) +$$

$$+ p_\Phi\frac{(\eta^4-\xi^4)b_m\sin(2\Phi)}{\eta^2\xi^2} + \frac{b_m^2(\xi^2+\eta^2)^2\sin(2\Phi)}{2\xi^2\eta^2}$$

$$\tilde{Q}_6 = -\frac{(p_\xi^2\eta^2 + p_\eta^2\xi^2)}{2} - \frac{p_\Phi^2(\xi^4+\eta^4)}{2\xi^2\eta^2} + p_\xi p_\eta\xi\eta + \frac{p_\Phi b_m(\xi^4-\eta^4)}{\xi^2\eta^2} - \frac{b_m(\xi^4+\eta^4)}{2\xi^2\eta^2}.$$

Výsledky je třeba okomentovat. Předně – všechny IP jsou čistě prostorové, tedy systém je jistě maximálně superintegrabilní (integrabilitu zaručuje např. involuce Q_1, Q_2, Q_3). Dále k IP samotným – porovnáme-li Q_2, Q_3, Q_4 s (4.59) zjistíme, že jsou (stejně jako Q_1) poincaréovské a odpovídají c_{12}, c_{13} a c_{23}. V kartézských souřadnicích jsou to tedy momenty hybnosti a jsou shodné s klasickou situací. Porovnejme s klasickou situací ještě IP druhého řádu: v klasickém případě je pátým (v naší notaci) IP X_1 v článku [3], který je druhého řádu, má členy s kvadráty všech hybností, člen s p_Φ a člen konstantní v hybnostech. To je nejpodobnější závislému $\tilde{Q}_6$, i tam je ale jeden smíšený člen. Žádný formou bližší IP však, ani mezi závislými IP nalezen nebyl. Dále se podívejme na řešení trajektorií. Pro ukázku uvedeme Hamiltonovy rovnice pro polohy, ve skutečnosti ale, jak víme, nebudeme (pro teoretický (!) postup) potřebovat ani všechny rovnice této skupiny:

$$H = \sqrt{1 + \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\left(p_\Phi + \frac{b_m(\eta^2 - \xi^2)}{\eta^2 + \xi^2}\right)^2}{\xi^2 \eta^2} + \frac{\omega}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{2b_m^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}} \Rightarrow \tag{4.62}$$

$$\dot{\xi} = \frac{p_\xi}{(\xi^2 + \eta^2)\sqrt{}}, \ \dot{\eta} = \frac{p_\eta}{(\xi^2 + \eta^2)\sqrt{}}, \ \dot{\Phi} = \frac{p_\Phi + \frac{b_m(\eta^2 - \xi^2)}{\eta^2 + \xi^2}}{\xi^2 \eta^2 \sqrt{}}. \tag{4.63}$$

O tom, zda a jak je systém řešitelný není třeba spekulovat, neboť maximální superintegrabilita je zaručena. Zároveň jsou ale rovnice i IP dosti složité. Postup tedy nastíníme jen v hrubých rysech. Nejjednodušší je patrně vzít jednu z prvních Hamiltonových rovnic, např. tu pro $\dot{\xi}$ a dosadit z Q_1 za jmenovatel. Pak na pravé straně zbývá krom ξ už jen p_ξ a η. Ty se musíme pokusit vyjádřit ze zbylých IP. Nejprve můžeme vyjádřit z Q_3 $\cos(\Phi)$ a dosadit do Q_4, odtud pak lze vyjádřit Φ pomocí ξ, η, p_ξ, p_η. Jednu z hybností pak vyjádříme (pomocí již známého vyjádření Φ) z Q_5, druhou (s dosazením znalosti první) z Q_1. Tím získáváme rovnici, kde už je jen η a ξ, můžeme tedy η vyjádřit pomocí ξ a dosadit do Hamiltonovy rovnice. U p_ξ bude postup stejný jen s prohození vyjadřování p_ξ a η. Dosazením získáme diferenciální rovnici, v níž již vystupuje pouze ξ a jeho derivace. Její (teoretické) řešení pak dosadíme do např. posledního vztahu, z něhož jsme vyjadřovali a reverzním projetím předchozího postupu získáme všechny ostatní polohy a hybnosti.

Při studiu systému (a různých experimentů s ním) byla nalezena dvě zajímavá zjištění týkající se širších skupin systémů příbuzných studovanému. Prvním je, že IP (4.61) se zachovávají a jsou nezávislé pro obecnou funkci $A_0 = A_0(\xi^2 + \eta^2)$. Máme tedy celou třídu maximálně superintegrabilních systémů, které v klasickém případě (obecně) tuto vlastnost patrně nemají.

Druhá zajímavá skutečnost se týká obecné skupiny systémů tvaru

$$A_0 = 0 = A_\xi = A_\eta, \ A_\Phi = -\frac{b_z \xi^2 \eta^2}{2} + \frac{2b_m \xi^2}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{2b_n \xi^2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}. \tag{4.64}$$

o těch bylo zjištěno, že jsou, pro libovolnou kombinaci konstant b_m, b_n, b_z (alespoň) integrabilní, neboť kromě $Q_1 = H$ a $Q_2 = p_\Phi$ zachovávají také

$$Q_3 = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{p_\Phi^2}{\xi^2 \eta^2} - \frac{4(b_m - b_n \eta^2)}{\eta^2(\xi^2 + \eta^2)} p_\Phi + 2\eta^2 b_z b_n + \tag{4.65}$$

$$+\frac{\frac{\xi^2\eta^4 b_z^2}{2} - 4(b_m - b_n\eta^2)\left(\frac{2\eta^2(b_m-b_n\eta^2)}{(\eta^2+\xi^2)^2} - \frac{\eta^4 b_z - 2\eta^2 b_n + 2b_m}{\eta^2+\xi^2}\right)}{2\eta^2},$$

přičemž $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ jsou v involuci. V klasickém případě se řeší v článku [3] podobný systém – stejné prostorové složky čtyřpotenciálu, ale netriviální A_0, který je minimálně superintegrabilní.

4.2.3 Systémy typu 3

V této kapitole budeme studovat relativistickou obdobu případu A.2. z článku [4]. Nejobecnější tvar je

$$A_0 = \frac{\Omega_1\Omega_2}{2S}(Sx^1 - x^2)^2 + \frac{U}{2}(Sx^1 - x^2),\ A_1 = 0 = A_2,\ A_3 = \Omega_2 x^1 + \Omega_1 x^2, \tag{4.66}$$

kde Ω_i, S a U jsou konstanty. V klasické situaci zde existují, krom hamiltoniánu, další dva IP druhého řádu v hybnostech a jeden prvního řadu (není jím p_3, to je samozřejmě také IP, ale již závislý na ostatních, které jsou, z hlediska klasifikace v článku podstatnější). V relativistické situaci vypočteme nejprve poincaréovské IP. Příslušné rovnice jsou

$$a^1 S - a^2 = 0,\ c_{12} = 0 = c_{30},\ c_{13}S - c_{23} = 0,\ \Omega_2 c_{23} - \Omega_1 c_{13} = 0, \tag{4.67}$$

$$Sc_{10} - c_{20} = 0,\ Sc_{10} + c_{20} = 0,\ \Omega_2 c_{10} + \Omega_1 c_{20} = 0,$$

kde jsou zahrnuty i možnosti, kdy některé parametry budou nulové (rovnice se nemění). Zjišťujeme, že není žádná podmínka na a^0 a a^3, tedy aniž bychom museli něco dopočítávat, víme, že se zachovává hamiltonián a p_3, jak již bylo vidět z tvaru čtyřpotenciálu. Dále máme podmínku $a^1 S - a^2 = 0$, k příslušnému ξ vypočteme Λ. Z (3.5) máme

$$\partial_0\Lambda = 0 = \partial_1\Lambda = \partial_2\Lambda,\ \partial_3\Lambda = \Omega_2 + S\Omega_1 \Rightarrow \Lambda = (\Omega_2 + S\Omega_1)x^3, \tag{4.68}$$

kde druhé dvě složky jsou nulové triviálně, v první se odečetly dva výrazy shodné vlivem ξ. To tedy znamená, že v obecném případě z poincaréovských IP máme

$$Q_1 = H,\ Q_2 = p_3,\ Q_3 = p_1 + Sp_2 - (\Omega_2 + S\Omega_1)x^3, \tag{4.69}$$

což se plně shoduje s klasickým případem. Poslední tři rovnice nelze splnit zároveň bez vynulování obou konstant c_{02}, c_{01}, neboť $S \neq 0$. Podmínky na c_{13}, c_{23} by bylo možné splnit, pokud by bylo $S = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$, k tomu se ještě vrátíme.

Nyní se podívejme, jak dopadnou další IP, obecně druhého řádu. Vyzkoušíme ansatz (4.35). Z něhož dostáváme, krom již nalezených $Q_1 - Q_3$ a jejich násobení Q_2, dva IP druhého řádu, které se však od klasických dvou značně liší, byť několik společných rysů mají – stejnou druhou mocninu p_1, resp. p_3 a přítomnost p_3 v první mocnině. V klasickém případě už se krom tohoto v IP vyskytuje jen funkce souřadnic, kdežto v našem případě je

$$\tilde{Q}_4 = p_1^2 + \frac{-p_1p_2 2S + (p_1+p_2)2(S\Omega_1 + \Omega_2)x^3 - p_3 2\Omega_1 S^2(x^2 + x^1)}{S^2 - 1} + \tag{4.70}$$

$$+H\frac{x^1S^2((\Omega_1\Omega_2x^1+U)S-2\Omega_1\Omega_2x^2)+S(\Omega_1\Omega_2(x^2)^2-Sx^2)}{S^2-1}+$$
$$\frac{1}{4S^2-4}(-(x^1)^2(\Omega_1\Omega_2x^1+U)^2S^4+2x^1x^2(2\Omega_1\Omega_2x^1+U)(\Omega_1\Omega_2x^1+U)S^3+$$
$$+S^2((-6\Omega_2^2(x^1x^2)^2+4(x^2)^2-4(x^3)^2)\Omega_1^2-6x^2(Ux^2-4/3)x^1\Omega^1\Omega^2-U^2(x^2)^2+4\Omega_2^2(x^1)^2)+$$
$$+2\Omega_1\Omega_2(2\Omega_1\Omega_2x^1(x^2)^3+U(x^2)^3-4(x^3)^2)S-\Omega_2^2(\Omega_1^2(x^2)^4+4(x^3)^2),$$
$$\tilde{Q}_5=p_2^2+\frac{p_1p_22S-(p_1+p_2)2(S\Omega_1+\Omega_2)x^3+p_32\Omega_1(x^2+x^1)}{S^2-1}+$$
$$+H\frac{-x^1((\Omega_1\Omega_2x^1+U)S-2\Omega_1\Omega_2x^2)-(1/S)(\Omega_1\Omega_2(x^2)^2-Sx^2)}{S^2-1}+$$
$$+\frac{1}{4S^2-4}(((\Omega_2^2(x^1)^4+4(x^3)^2)\Omega_1^2++2U\Omega_1\Omega_2(x^1)^3+U^2(x^1)^2)S^4+(-4\Omega_1^2\Omega_2^2(x^1)^3x^2+$$
$$+(-6U(x^1)^2x^2+8(x^3)^2)\Omega_2\Omega_1-2U^2(x^2)^2)S^3+((6\Omega_2^2(x^1x^2)^2-4(x^2)^2)\Omega_1^2+6x^2(Ux^2-4/3)x^1\Omega_1\Omega_2+$$
$$+(-4(x^1)^2+4(x^3)^2)\Omega_2^2+U^2(x^2)^2)S^2-2\Omega_1\Omega_2(x^2)^3(2\Omega_1\Omega_2x^1+U)S+\Omega_1^2\Omega_2^2(x^2)^4).$$

Byť to možná není z upraveného tvaru hned vidět, jsou samostatné funkce souřadnic tvaru $f(x^1,x^2,x^3)+g(x^1,x^2,x^3)S^2$ pro $\tilde{Q}_4$ a $-f(x^1,x^2,x^3)-g(x^1,x^2,x^3)$ pro $\tilde{Q}^5$. Když ověřujeme funkcionální závislost všech IP, zjišťujeme, že hodnost Jacobiho matice je stále jen 3 (stejně, jako bychom počítali jen poincaréovské IP). To je další zásadní rozdíl – v klasickém případě je systém kvadraticky minimálně superintegrabilní (p_3 lze nakombinovat z ostatních IP, nebo jinak – jeden IP druhého řádu je závislý na zbytku), v relativistickém případě je (v rámci IP tvaru (4.35)) pouze integrabilní, neboť Q_1-Q_3 jsou v involuci.

Nyní se podíváme dva speciální případy. První případ jsme již nastínili, je to ten, kdy se objevuje další poicaréovský IP. Druhý je vybrán podle toho, co je maximálně integrabilní v klasickém případě. Poznamenejme, že oba případy jsou konkrétní realizace obecnějšího tvaru $S=C_1\frac{\Omega_1}{\Omega_2}+C_2\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$, kde C_i jsou konstanty. Proto bylo vyzkoušeno, zda v relativistickém případě nenalezneme nějakou kombinaci konstant, při které by se objevily nové nezávislé IP. Krom případu 3.a se tak nestalo. (Neznamená to ale, že nutně neexistují, pouze to, že nemají tvar (4.35), nalezly se pouze dva IP druhého řádu, závislé na ostatních (patrně analogické 4.70)).

Systém 3.a

Jak již bylo upozorněno, získáváme pro $S=\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ další IP. Na tuto situaci je poukazováno též v článku [4]. Jeho tvar je v obou případech

$$Q_4=p_3x^1-p_1x^3+\frac{\Omega_1}{\Omega_2}(p_3x^2-x^3p_2)+\frac{(\Omega_1^2+\Omega_2^2)(x^3)^2-(\Omega_2x^1+\Omega_1x^2)^2}{2\Omega_2}. \quad (4.71)$$

Zároveň je v článku poznámka, že tento systém přechází vhodnou rotací souřadnic na jednu z forem systému B v článku, a to tu, kterou jsme zde studovali jako systém 1.b (pro $\gamma = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$). V klasickém případě zmíněný další IP prvního řádu udělá systém maximálně integrabilní. V našem případě ho přidáme ke $Q_1 - Q_3$, na kterých je nezávislý , a získáme minimálně integrabilní systém, což je i stav našeho systému 1.b. Aby byly výsledky konsistentní (tj. stejné jako u 1.b), neměl by se tedy již žádný další nezávislý IP objevit ani v druhém řádu v hybnosti. Skutečně, vyslovením ansatz (4.35) získáváme krom p_3 násobků jiných IP pouze jeden IP druhého řádu (jakousi kombinaci $\tilde{Q}_4, \tilde{Q}_5$), který je na ostatních závislý. Získáváme tak minimálně superintegrabilní systém.

Systém 3.b

Další rozebraný podpřípad bude ten, kdy $S = -\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$. Tento je v článku [4] rozebrán, neboť zde lze výrazně zjednodušit A_0 a získat tvar

$$A_0 = -\frac{(\Omega_2 x^1 + \Omega_1 x^2)^2}{2},\ A_1 = 0 = A_2,\ A_3 = \Omega_2 x^1 + \Omega_1 x^2., \tag{4.72}$$

V klasickém případě má systém (mimo jiné) dva IP prvního řádu, plus hamiltonián, v relativistickém případě budeme ve shodné situaci, tedy jen upravíme Q_3, který se zjednodušuje na

$$Q_3 = p_1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_2. \tag{4.73}$$

A máme stále (alespoň) integrabilní systém. Dále v klasickém případě existuje dostatek nezávislých IP druhého řádu, aby byl systém maximálně integrabilní. Podívejme se tedy opět, co nám dá ansatz (4.35): dostaneme dva další IP, které jsou druhého řádu. Opět však zjišťujeme, že jsou na ostatních IP závislé. Systém tedy zůstává v rámci IP druhého řádu pouze integrabilní. Pro úplnost uvádíme tvar závislých IP (jde o analogie IP druhého řádu z obecné podoby systému (4.70), tedy je i stejně označíme):

$$\tilde{Q}_4 = p_1^2 - \frac{2p_1p_2\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} + \frac{2p_3(\Omega_1\Omega_2^2 x^2 + \Omega_2^2 x^1)}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} + \tag{4.74}$$

$$+H\frac{\Omega_2^4(x^1)^2 + \Omega_1\Omega_2^2 x^2(\Omega_1 x^2 + 2\Omega_2 x^1)}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} + \frac{1}{4\Omega_1^2 - 4\Omega_2^2}(\Omega_2^4(x^1)^2(\Omega_2^2(x^1)^2 - 4) +$$

$$+\Omega_1\Omega_2^2 x^2(\Omega_1 x^2 + 2\Omega_2 x^1)(\Omega_1^2(x^2)^2 + 2\Omega_1\Omega_2 x^1 x^2 + 2\Omega_2^2(x^1)^2 - 4)),$$

$$\tilde{Q}_5 = p_2^2 + \frac{2p_1p_2\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} - \frac{p_3(2\Omega_1^3 x^2 + 2x^1\Omega_2\Omega_1^2)}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} -$$

$$-H\frac{(x^1)^2\Omega_1^2\Omega_2^2 + \Omega_1\Omega_2 x^2(\Omega_1 x^2 + \Omega_2 x^1)}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} - \frac{1}{4\Omega_1^2 - 4\Omega_2^2}(\Omega_2^2\Omega_1^2(x^1)^2(\Omega_2^2(x^1)^2 - 4) +$$

$$+\Omega_1^3 x^2(\Omega_1 x^2 + 2\Omega_2 x^1)(\Omega_1^2(x^2)^2 + 2\Omega_1\Omega_2 x^1 x^2 + 2\Omega_2^2(x^1)^2 - 4)).$$

Ani třetí řád (4.48) nepřináší nic nového – konkrétně objevuje se další IP, jež je ale závislý:

$$\tilde{Q}_6 = p_1^3 - \frac{p_2^3\Omega_{\frac{3}{2}}}{\Omega_1^3} - \frac{3p_1^2p^2\Omega_2}{\Omega_1} + \frac{3p_2^2p_1\Omega_2^2}{\Omega_1^2}. \tag{4.75}$$

Opět nepomáhá ani frontální forma, zde se zachovává (z nezávislých IP)

$$Q_1^F = H^F,\ Q_2^F = p_m,\ Q_3^F = p_1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} p_2. \tag{4.76}$$

Poissonovy závorky viditelně nepřinášejí nic nového ani v jedné z forem. Přes všechny pokusy tedy zůstáváme pouze u (alespoň) integrabilního systému.

Hamiltonián a Hamiltonovy rovnice jsou

$$H = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + (p_3 - \Omega_2 x^1 - \Omega_1 x^2)^2} - \frac{(\Omega_2 x^1 + \Omega_1 x^2)^2}{2} \Rightarrow \tag{4.77}$$

$$\dot{x}^1 = \frac{p_1}{\surd},\ \dot{x}^2 = \frac{p_2}{\surd},\ \dot{x}^3 = \frac{p_3 - \Omega_2 x^1 - \Omega_1 x^2}{\surd},$$

$$\dot{p}_1 = \frac{p_3 - \Omega_2 x^1 - \Omega_1 x^2}{\surd}\Omega_2 + (\Omega_2 x^1 + \Omega_1 x^2)\Omega_2,\ \dot{p}_2 = \frac{p_3 - \Omega_2 x^1 - \Omega_1 x^2}{\surd}\Omega_1 + (\Omega_2 x^1 + \Omega_1 x^2)\Omega_1.$$

Nastíníme řešení: vidíme, že integrací budeme muset získat x^3, jednu z p_i a jednu z x^i. Nejjednodušší tedy patrně bude vyjádřit z Q_1 člen $\Omega_2 x^1 + \Omega_1 x^2$ pomocí p_1, p_2. p_2 pak ještě vyjádříme pomocí p_1 z Q_3 a vše dosadíme do rovnice pro $\dot{p}_1$ ($\surd$ vyjadřujeme také z Q_1). Tím máme diferenciální rovnici už jen pro $p_1(x^0)$. Jejím vyřešením získáme z Q_3 i $p_2(x^0)$. Dále můžeme např. opětovně zderivovat $p_1(x^0)$ a Hamiltonovy rovnice pro $\dot{p}_1$ vyjádřit x^2 (pomocí x^1) to pak, spolu s $p_1(x^0)$ dosadit do rovnice pro $\dot{x}^1$, kde $\surd$ opět vyjadřujeme z Q_1. Vyřešením získáváme $x^1(x^0)$. Dosazením všech známých předpisů do Q_1 můžeme vyjádřit i $x^2(x^0)$. Dosazením všeho známého do Hamiltonovy rovnice pro $\dot{x}^3$ a jejím vyřešením konečně získáme i $x^3(x^0)$. Řešení ve frontální formě tentokrát rozebírat nebudeme. Jelikož všechny IP jsou i v ní prostorové a hamiltonián je jedním z nich, byl by postup velice podobný.

4.2.4 Systémy typu 4.a, 4.b a konkrétní příklad

V článku [6] se řeší dvě skupiny systémů, které jsou v klasickém případě integrabilní. Na str. 18/19 je pak seznam konkrétních systémů těchto tvarů, které jsou minimálně superintegrabilní (obecně, při speciálních volbách parametrů a pod. mohou mít maximálně superintegrabilní). Zde okomentujeme tyto situace. Budeme u porovnávání klasických IP používat notace článku – veličiny s indexem A značí připočtení příslušné složky třípotenciálu, tj. např. $p_1^A = p_1 + A^1 = p_1 - A_1$, značka ... značí v hybnostech konstantní funkci.

Typ 4.a

První skupina má tvar

$$A_1 = 0 = A_2,\ A_3 = u_2(x^1) - u_1(x^2), \tag{4.78}$$

$$A_0 = V_1(x^1) + V_2(x^2) - \frac{1}{2}(u_1(x^2) - u_2(x^1))^2.$$

V klasickém případě se přirozeně zachovává hamiltonián a dva další IP: $p_1^2 - 2(u_2(x^1)p_3 - V_1(x^1))$ a $p_2^2 + 2(u_1(x^2)p_3 + V_2(x^2))$, a to pro libovolnou volbu funkcí v (4.78). Dále se zachovává p_3, ten je ale závislý na ostatních. V relativistickém případě je ale situace jiná: první jmenovaný integrál druhého řádu by se zachovával pokud

$$(u_1(x^2) - u_2(x^1))u_2'(x^1) + V_1'(x^1) \Rightarrow V_1(x^1) = \frac{u_2^2(x^1)}{2} - u_1(x^2)u_2(x^1) + c_1 \qquad (4.79)$$

a druhý pokud

$$(u_1(x^2) - u_2(x^1))u_1'(x^2) - V_2'(x^2) \Rightarrow V_2(x^2) = \frac{u_1^2(x^2)}{2} - u_1(x^2)u_2(x^1) + c_2, \qquad (4.80)$$

kde C_i jsou konstanty. To mimochodem znamená, že kdybychom chtěli zachovat oba, vynulovalo by se A_0. Žádný z klasicky superintegrabilních systémů tohoto tvaru nesplňuje (4.79) ani (4.80). Tím jsme tedy sice našli dvě relativistické integrabilní skupiny (plus jejich průnik s nulovým A_0), avšak podstatně jiné (specifičtější), než klasická situace.

Máme-li se držet obecného předpisu (4.78), nezdá se, ani při vyzkoušení konkrétních případů, že by existovaly nějaké analogie klasických IP, které by se zachovávaly pro všechny systémy tvaru (4.78). Někdy se objevují jiné IP, např. u systému a) z první skupiny v článku:

$$u_2(x^1) = \frac{a}{b}e^{bx_2},\ u_1(x^2) = cx^1,\ V_1(x^1) = \frac{c^2(x^1)^2}{2},\ V_2(x^2) = awe^{bx^2}, \qquad (4.81)$$

který má klasicky čtvrtý nezávislý IP tvaru $p_1^A p_3^A + ...$ existuje v relativistickém případě třetí nezávislý IP (a v involuci s H a p_3)

$$Q_3 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_3A_3 + HA_0 + F(x^1, x^2). \qquad (4.82)$$

Ten ale není automaticky zachován (a nezávislý) pro všechny systémy této třídy. Obecně tedy systémy této třídy nejsou v relativistickém případě ani integrabilní. Proto se touto skupinou nebudeme více zabývat.

Typ 4.b

Druhý případ je podstatně nadějnější. Má tvar

$$A_1 = 0,\ A_2 = -u_3(x^1),\ A_3 = u_2(x^1),\ A_0 = V_1(x^1) - \frac{1}{2}(u_3^2(x^1) + u_2^2(x^1)) \qquad (4.83)$$

a v klasickém případě zachovává hamiltonián, p_2 a p_3. Okamžitě je vidět, že je to tak i v relativistickém případě. Máme tedy obecně integrabilní systém. Můžeme se podívat na klasicky superintegrabilní případy. Na str. 19 v [6] jsou uvedeny čtyři a zjišťujeme, že čtvrté IP, vykazující jisté podobnosti s klasickými, existují i v relativistickém případě. Ukazuje se však, že jsou závislé na ostatních, systémy tedy zůstávají pouze integrabilní. Uvedeme tento seznam a porovnání čtvrtých IP. Relativistické značíme $\tilde{Q}_4$, klasické X. Pořadí odpovídá tomu v článku

$$u_3(x^1) = 0,\ u_2(x^1) = \frac{a}{b} e^{bx^1},\ V(x^1) = wx^1 + ce^{bx^1}: \tag{4.84}$$

$$\tilde{Q}_4 = p_1^2 - 2p_3A_3 + 2HA_0 + f(x^1),\ X = p_1^A p_2^A - bp_3 l_1^A + ..,$$

$$u_3(x^1) = 0,\ u_2(x^1) = a(x^1)^{b-2},\ V(x^1) = a(b-2)c(x^1)^{b-2} + \frac{w}{(x^1)^2}: \tag{4.85}$$

$$\tilde{Q}_4 = p_1^2 - 2p_3A_3 + 2HA_0 + f(x^1),\ X = p_1^A l_3^A - bp_3^A l_1^A + ...$$

$$u_3(x^1) = 0,\ u_2(x^1) = a\ln(\mid x^1 \mid),\ V(x^1) = b\ln(\mid x^1 \mid) + \frac{w}{(x^1)^2}: \tag{4.86}$$

$$\tilde{Q}_4 = p_1^2 - 2p_3A_3 + 2HA_0 + f(x^1),\ X = 2p_1^A l_3^A - p_3^A l_1^A + ...$$

$$u_2(x^1) = 0,\ u_3(x^1) = \frac{a}{2(x^1)^2},\ V(x^1) = -\frac{ab\ln\mid x^1 \mid}{(x^1)^2} + \frac{w}{(x^1)^2}: \tag{4.87}$$

$$\tilde{Q}_4 = p_1^2 - 2p_2A_2 + 2HA_0 + g(x^1),\ X = p_1^A l_2^A + ...,$$

přičemž a, b, c, w jsou konstanty, $f(x^1), g(x^1)$ znamenají konkrétní výrazy (u každého IP jiný), podobně jako ..., pomocí kterého jsou IP zapsány v článku. Je vidět, že čtvrté IP jsou všechny shodného tvaru, patrně lze tedy shodně vyjádřit i $f(x^1), g(x^1)$. Skutečně, vyjádříme-li pro typ (4.80) s $u_3(x^1) = 0$ časový vývoj IP tvaru příslušného $\tilde{Q}_4$, dostáváme po úpravě jediný člen, který se vynuluje pro:

$$u_2(x^1)\left(-\frac{u_2^2(x^1)}{2} + V(x^1) + 1\right)u_2'(x^1) + \left(\frac{u_2^2(x^1)}{2} - V(x^1)\right)V'(x^1) - f'(x^1) = 0 \Rightarrow$$

$$f(x^1) = V(x^1)u_2^2(x^1) - V^2(x^1) - \frac{u_2^4(x^1)}{4} + u_2^2(x^1) + C. \tag{4.88}$$

Pro typ, kde $u_2(x^1) = 0$ a $\tilde{Q}_4$ tvaru v posledním řádku (4.84) máme zcela shodnou rovnici, jen vyměníme u_3 za u_2. Tedy v tomto případě

$$g(x^1) = V(x^1)u_3^2(x^1) - V^2(x^1) - \frac{u_3^4(x^1)}{4} + u_3^2(x^1) + C. \tag{4.89}$$

Nyní zvolíme jeden z konkrétních případů a prostudujeme ho důkladněji. Bude to první varianta (4.84). Nejprve zkusíme, zda nám ansatz třetího řádu (4.48) nepřinese další IP. Zjišťujeme však, že kromě kombinací Q_2, Q_3 nic nedostáváme. Ani Poissonovy závorky neplodí nic nového – viditelně jsou všechny nulové. Ještě prostudujeme, jak vypadá systém ve frontální formě. Zde nalézáme opět pouze tři IP a to

$$Q_1^F = H^F,\ Q_2^F = p_2,\ Q_3^F = p_m. \tag{4.90}$$

Vrátíme se tedy k formě instantní a pokusíme se systém vyřešit (zůstáváme u konkrétního systému, je ale jasné, že postup bude pro celou skupinu analogický). Hamiltonián má tvar

$$H = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + \left(p_3 - \frac{a}{b}e^{bx^1}\right)^2} + wx^1 + ce^{bx^1} - \frac{a^2 e^{2bx^1}}{2b^2} \Rightarrow \tag{4.91}$$

$$\dot{x}^1 = \frac{p_1}{\surd},\ \dot{x}^2 = \frac{p_2}{\surd},\ \dot{x}^3 = \frac{p_3 - \frac{a}{b}e^{bx^1}}{\surd},\ \dot{p}_1 = -\frac{p_3 - \frac{a}{b}e^{bx^1}}{\surd}ae^{bx^1} - w - bce^{bx^1} + \frac{a^2 e^{2bx^1}}{b}.$$

Nejprve vynásobíme první rovnici $\surd$, kterou vyjádříme z Q_1 a výslednou rovnici zderivujeme. Z ní pak dosadíme za $\dot{p}_1$ do čtvrté Hamiltonovy rovnice. Tím máme diferenciální rovnici, kde vystupuje pouze x^1 a jeho derivace. Řešení této rovnice dosadíme do druhé a třetí Hamiltonovy rovnice (s $\surd$ opět vyjádřenou z Q_1) a ty vyřešíme. Všechny známé vztahy pak dosadíme do Q_1 a z něho vyjádříme $p_1(x^0)$, která poslední zbývala.

4.3 Některé třídy integrabilních relativistických systémů a jejich speciální superintegrabilní případy

Přesto, že množství systémů studovaných v článcích [3, 4, 5, 6] je značné, jedná se vždy o systémy stacionární (ani obecně nejsou nestacionární klasické systémy studovány příliš často), což je v jistém smyslu omezující (i vzhledem k tomu, že i články [1,7] se stacionárními systémy téměř nezabývají). V této podkapitole využijeme frontální kalibraci k nalezení některých tříd integrabilních systémů a pokusíme se i najít a prostudovat jejich speciální superintegrabilní případy.

Možností, jak tyto třídy najít je přímo požadovat tři konkrétní IP v involuci, přičemž logické je začít s poincaréovskými IP (jsou poměrně jednoduché a jejich zachování má jasnou interpretaci). Poincaréovské IP ve frontální formě lze dle tvaru rozdělit do několika skupin. Snahou tedy bylo vybrat množinu tří IP pokud možno z více různých tvarů (např. požadavek zachování všech tří hybností vede pouze na nulové pole). Vezmeme-li obvyklou užívanou bázi poincaréovských IP ve frontální formě, nalezneme čtyři takové základní trojice. U třech (sekce 4.3.1, 2 a 4) je involuce automatická (případně vyplývá z požadavku na zachování trojice), u jedné (sekce 4.3.3) ji naopak vynutit nelze, přesto ji zde, pro úplnost a její relativní zajímavost, uvedeme. Dále už je jen třeba určit podmínky zachování těchto IP a vyřešit z nich tvar čtyřpotenciálu. U dvou tříd dokonce zjišťujeme, že automaticky mají další IP, činící je (alespoň) minimálně superintegrabilními. Vycházíme přitom z rovnice časového vývoje (2.41), nikoli z podmínky nulovosti Lieovy derivace tenzoru elektromagnetického pole, neboť rovnice (2.41) obsahuje už přímo čtyřpotenciál (obsažený v H), čímž je zaručeno splnění bezzdrojových Maxwellových rovnic (nalezení adekvátních zdrojů je poněkud odlišnou úlohou, kterou se zde zabývat nebudeme), u podmínky (3.6) bychom museli tyto požadavky přidat. Drobnou nevýhodou postupu je, že u výsledků je třeba prověřit, zda nejsou některé členy čistě kalibrační.

Ještě poznamenejme, že v případě první třídy se podařilo najít dokonce maximálně superintegrabilní, netriviální (speciální) případ. Nebyla však prováděna souvislá klasifikace. To, že u jiných tříd neuvádíme případy s více IP jistě neznamená, že neexistují.

4.3.1 Systémy zachovávající p_2, p_m a $2x^1p_m + x^pp_1$, systém 5

IP této třídy jsou v involuci automaticky, nemusíme tedy přidávat žádný dodatečný požadavek. Pokud se IP (ozn. Q_1, Q_2, Q_3 v pořadí z nadpisu a v dalších třídách shodně) zachovávají, je systém integrabilní. Zcela analogická ve všech krocích by byla třída, ve které v IP v nadpisu zaměníme p_1 a p_2 (nebudeme ji tedy diskutovat zvlášť). Abychom systémy zkonstruovali, stačí nám vyřešit kombinaci podmínek plynoucích ze zachování jednotlivých veličin. Ze zachování p_2, p_m okamžitě plyne nezávislost A_μ na x^2 a x^m. Podmínka na zachování $2x^1p_m + x^pp_1$ je

$$0 = 2p_m\frac{\partial H}{\partial p_1} - 2x^1\frac{\partial H}{\partial x^m} - x^p\frac{\partial H}{\partial x^1} - p_1. \tag{4.92}$$

Druhý člen díky předchozímu vymizí, tedy zbude

$$0 = p_m\frac{p_1 - A_1}{p_m - A_m} - p_1- \tag{4.93}$$

$$-x^p\left(-\frac{p_1 - A_1}{4(p_m - A_m)}\frac{\partial A_1}{\partial x^1} - \frac{p_2 - A_2}{4(p_m - A_m)}\frac{\partial A_2}{\partial x^1} + \frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)^2}\frac{\partial A_m}{\partial x^1} + \frac{\partial A_p}{\partial x^1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_m + x^p\frac{\partial A_1}{\partial x^1} = 0 \wedge \ \frac{\partial A_2}{\partial x^1} = 0 \wedge \ \frac{\partial A_m}{\partial x^1} = 0 \wedge \ A_1 + x^p\frac{\partial A_p}{\partial x^1} = 0.$$

Soustavu vyřešíme jako

$$A_2 = A_2(x^p),\ A_m = \frac{-x^pf_1(x^p)}{2},\ A_1 = f_1(x^p)x^1 + f_2(x^p), \tag{4.94}$$

$$A_p = -\frac{f_1(x^p)(x^1)^2}{2x^p} - \frac{f_2(x^p)x^1}{x^p} + f_3(x^p).$$

Podstatné nyní je, zda některé funkce nejsou pouze záležitostí kalibrace. Skutečně, po převedení do instantní formy vidíme, že čistě kalibrační člen je $f_3(x^p)$, dále ho tedy budeme vypouštět.

Zajímavé na této třídě je to, že ač ji tvoří obecně značně netriviální systémy, je v plné obecnosti (alespoň) minimálně superintegrabilní. Použitím ansatz (4.50) nalézáme čtvrtý nezávislý IP, někdy vyjádřitelný pouze v integrálním tvaru:

$$Q_4 = p_1x^p\int\frac{1}{(x^p)^2(p_m + F_1(x^p))}dx^p + \int\frac{F_2(x^p)}{p_m + F_1(x^p)}dx^p+ \tag{4.95}$$

$$+\frac{2x^1}{x^p}\left(\int\frac{1}{(x^p)^2(p_m+F_1(x^p))}dx^p+1\right),\ \text{kde } f_1(x^p)=\frac{2F_1(x^p)}{x^p},\ f_2(x^p)=-x^pF_2(x^p).$$

Přeznačení funkcí z (4.94) je použito kvůli elegantnějšímu zápisu.

Existují i situace, kdy je k dispozici pátý nezávislý IP, tyto nalezené situace však právě odpovídají případu, kdy Q_4 zůstane v integrálním tvaru. Zdůrazňujeme, že se rozhodně nejedná o plnou klasifikaci. Zdá se, že třída by mohla mít více maximálně superintegrabilních podpřípadů. Zde se podíváme na tu maximálně superintegrabilní situaci, kdy

$$A_2=0,\ f_1(x^p)=\frac{2\sin(x^p)}{x^p}\vee\frac{2\cos(x^p)}{x^p}, \tag{4.96}$$

kde konstanta je zde jen kvůli elegantnějšímu tvaru dalšího, nezávislého IP, který v této situaci máme. Ten má tvar

$$Q_5=\arctan\left(\frac{p_m\tan(\frac{x^p}{2})+1}{\sqrt{p_m^2-1}}\right)p_2+x^2\sqrt{p_m^2-1}\ \vee \tag{4.97}$$

$$\arctan\left(\frac{(p_m-1)\tan(\frac{x^p}{2})}{\sqrt{p_m^2-1}}\right)p_2+x^2\sqrt{p_m^2-1}.$$

a je na ostatních nezávislý. Tento integrál, zdá se, je pro tuto volbu funkcí specifický. První možnost prostudujeme pečlivěji. Zároveň tím dokážeme, že se skutečně jedná o maximálně superintegrabilní systém – hned tři z našich IP jsou časové, proto na tyto soudy musíme opatrně.

Systém 5

Nejprve systém pro ilustraci převedeme do instantní formy. Zde máme

$$A_0=-\frac{\sin(x^0+x^3)(x^1)^2}{(x^0+x^3)^2}-\frac{f_2(x^0+x^3)x^1}{x^0+x^3}-\sin(x^0+x^3),\ A_2=0, \tag{4.98}$$

$$A_1=\frac{2\sin(x^0+x^3)x^1}{x^0+x^3}+f_2(x^0+x^3),\ A_3=-\frac{\sin(x^0+x^3)(x^1)^2}{(x^0+x^3)^2}-\frac{f_2(x^0+x^3)x^1}{x^0+x^3}+\sin(x^0+x^3).$$

Přirozeně se nabízí otázka, zda nelze v instantní formě získat výhodnější tvar IP. Je sice možné, že bychom se dokázali zbavit integrálu, protože by se pod ním třeba objevila vhodnější funkce. Nicméně co se komplikovanosti tvarů IP týče, mohl by být naopak větší. V instantní formě je komplikovanější A_μ, už pro ansatz tvaru (4.35) je příslušná soustava velmi komplikovaná. Nezdá se navíc příliš pravděpodobné, že bychom dostali všechny integrály, vzhledem k tomu, jak komplikovaný tvar IP mají ve frontální formě.

Ve frontální formě se integrálu nedaří zbavit, z Poissonových závorek sice získáme jiné tvary IP, žádná nás však nezbaví integrálu. Pokusme se alespoň teoreticky vyřešit Hamiltonovy rovnice. Ty jsou

$$H = \frac{1 + \left(p_1 - \frac{2\sin(x^p)x^1}{x^p} - f_2(x^p)\right)^2 + p_2^2}{4(p_m + \sin(x^p))} - \frac{\sin(x^p)(x^1)^2}{(x^p)^2} - \frac{f_2(x^p)x^1}{x^p} \tag{4.99}$$

$$\dot{x}^1 = \frac{p_1 - \frac{2\sin(x^p)x^1}{x^p} - f_2(x^p)}{2(p_m + \sin(x^p))}, \quad \dot{x}^m = -\frac{1 + \left(p_1 - \frac{2\sin(x^p)x^1}{x^p} - f_2(x^p)\right)^2 + p_2^2}{4(p_m + \sin(x^p))^2},$$

$$\dot{x}^2 = \frac{p_2}{2(p_m + \sin(x^p))}, \quad \dot{p}_1 = \frac{p_1 - \frac{2\sin(x^p)x^1}{x^p} - f_2(x^p)}{2(p_m + \sin(x^p))}\frac{2\sin(x^p)}{x^p} + \frac{2\sin(x^p)x^1}{(x^p)^2} + \frac{f_2(x^p)}{x^p}.$$

Možný postup je např. následující: z Q_5 vyjádříme rovnou $x^2(x^p)$ (víme, že p_2 a p_m jsou IP)

$$x^2(x^p) = \frac{Q_5 - \arctan\left(\frac{Q_2\tan(\frac{x^p}{2})+1}{\sqrt{Q_2^2-1}}\right)Q_1}{\sqrt{Q_2^2 - 1}} \tag{4.100}$$

Dále si označíme integrály v Q_4 jako I_i, tj. $Q_4 = p_1 x^p I_1 + I_2 + \frac{2x^1}{x^p} I_1$ a formálně vyjádříme např. p_1. Po dosazení vztahu do Q_3 dokážeme již vyjádřit x^1. Zpětným dosazením do vyjádření p_1 z Q_3 pak i ji:

$$x^1(x^p) = \frac{Q_3 - \frac{Q_4}{I_1} + \frac{I_2}{I_1} + \frac{2x^1}{x^p}}{2Q_2}, \; p_1(x^p) = \frac{Q_3}{2Q_2} - \frac{Q_3 - \frac{Q_4}{I_1} + \frac{I_2}{I_1} + \frac{2x^1}{x^p}}{2Q_2}, \tag{4.101}$$

Pouze $x^m(x^p)$ je třeba získat vyřešením příslušné Hamiltonovy rovnice pro $\dot{x}^m$, do níž jen dosadíme známé vztahy. Samozřejmě bylo možné postupovat více přes Hamiltonovy rovnice, vždy bychom se však patrně opět dostali k integrálům, které lze (při nejlepším) pouze aproximovat (případně vyjádřit řadou).

4.3.2 Systémy zachovávající H, p_2 a $2x^1H + x^m p_1$

Druhá třída sice vypadá v jistém smyslu podobně jako první (prohození x^p, x^m a p_p, p_m), výsledky se však poněkud liší. Involuce vyplývá ze zachování celé trojice. Podívejme se na podmínky: z prvních dvou IP víme, že A_μ nezávisí na x^p a x^2. Studujme tedy podmínky zachování $2x^1H + x^m p_1$. Požadujeme

$$0 = 2H\frac{\partial H}{\partial p_1} + p_1\frac{\partial H}{\partial p_m} - x^m\frac{\partial H}{\partial x^1} - 2x^1\frac{\partial H}{\partial x^p}, \tag{4.102}$$

vlivem podmínek na zachování na H se ale poslední člen vynuluje a po úpravě zbývá

$$0 = -\frac{A_1}{p_m - A_m}\left(\frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)} + A_p\right) - \tag{4.103}$$

$$-x^m\left(-\frac{p_1-A_1}{2(p_m-A_m)}\frac{\partial A_1}{\partial x^1}-\frac{p_2-A_2}{2(p_m-A_m)}\frac{\partial A_2}{\partial x^1}+\frac{(p_1-A_1)^2+(p_2-A_2)^2+1}{4(p_m-A_m)^2}\frac{\partial A_m}{\partial x^1}+\frac{\partial A^p}{\partial x^1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_1+x^m\frac{\partial A_m}{\partial x^1}=0,\ \wedge\ \frac{\partial A_1}{\partial x^1}=0,\ \wedge\ \frac{\partial A_2}{\partial x^1}=0,\ \wedge\ \frac{\partial A_p}{\partial x^1}=0,\wedge\ A_pA_1=0$$

což se, díky poslední podmínce rozpadne na dvě možnosti – první

$$A_1=A_1(x^m),\ A_2=A_2(x^m),\ A_p=0,\ A_m=f(x^m)-\frac{x^1}{x^m}A_1 \tag{4.104}$$

a druhou

$$A_p=A_p(x^m),\ A_m=A_m(x^m),\ A_2=A_2(x^m),\ A_1=0. \tag{4.105}$$

U první skupiny je čistě kalibračním členem $f(x^m)$, v druhé skupině pak $A_m(x^m)$. Dále je proto již nebudeme uvažovat (resp. volíme je bez ujmi na obecnosti nulové).

Stejně jako první třída je i tato automaticky minimálně superintegrabilní. Čtvrtým, nezávislým IP je

$$Q_4=p_1+\int\frac{A_1(x^m)}{x^m}dx^m, \tag{4.106}$$

což je zjevně poincaréovský IP (pro druhou skupinu (4.105) přímo p_1). To znamená, že zde nezávislá skupina poincaréovských IP, zachovávajících se současně, implikuje rovnou zachování dalšího nezávislého poincaréovského integrálu.

4.3.3 Systémy zachovávající H, $p_1x^2-p_2x^1$ a $x^pH-x^mp_m$

Zde je involuce automatická u prvních dvou IP. K involuci třetího z prvními dvěma se ještě vrátíme. Nejprve se vyjádříme k podmínkám zachování jednotlivých IP. Z prvního máme nezávislost A_μ na x^p. Z druhého

$$0=p_1\frac{\partial H}{\partial p_2}-p_2\frac{\partial H}{\partial p_1}-x^2\frac{\partial H}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial H}{\partial x^2}=-\frac{p_1A_2}{2(p_m-A_m)}+\frac{p_2A_1}{2(p_m-A_m)}- \tag{4.107}$$

$$-x^2\left(-\frac{p_1-A_1}{2(p_m-A_m)}\frac{\partial A_1}{\partial x^1}-\frac{p_2-A_2}{2(p_m-A_m)}\frac{\partial A_2}{\partial x^1}+\frac{(p_1-A_1)^2+(p_2-A_2)^2+1}{4(p_m-A_m)^2}\frac{\partial A_m}{\partial x^1}+\frac{\partial A_p}{\partial x^1}\right)+$$

$$+x^1\left(-\frac{p_1-A_1}{2(p_m-A_m)}\frac{\partial A_1}{\partial x^2}-\frac{p_2-A_2}{2(p_m-A_m)}\frac{\partial A_2}{\partial x^2}+\frac{(p_1-A_1)^2+(p_2-A_2)^2+1}{4(p_m-A_m)^2}\frac{\partial A_m}{\partial x^2}+\frac{\partial A_p}{\partial x^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2\frac{\partial A_m}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial A_m}{\partial x^2}=0\ \wedge\ -A_2+x^2\frac{\partial A_1}{\partial x^1}-x^1\frac{\partial A_1}{\partial x^2}$$

$$\wedge\ A_1+x^2\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-x^1\frac{\partial A_2}{\partial x^2}\ \wedge\ -x^2\frac{\partial A_p}{\partial x^1}+x^1\frac{\partial A_p}{\partial x^2},$$

kde při úpravě rovnice se odečetly dva shodné členy z prvních dvou výrazů. Dále jsme porovnávali koeficienty různých mocnin p_i dělené různými mocninami $p_m - A_m$. Podmínka na zachování $x^p H - x^m p_m$ je

$$0 = -p_m \frac{\partial H}{\partial p_m} + x^m \frac{\partial H}{\partial x^m} - H - x^p \frac{\partial H}{\partial x^p}. \tag{4.108}$$

Poslední člen ale vymizí, pokud budeme předpokládat zachování H. Zbude tak

$$p_m \frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)^2} - \frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)} - A_p + \tag{4.109}$$

$$+x^m \left(-\frac{p_1 - A_1}{2(p_m - A_m)} \frac{\partial A_1}{\partial x^m} - \frac{p_2 - A_2}{2(p_m - A_m)} \frac{\partial A_2}{\partial x^m} + \frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)^2} \frac{\partial A_m}{\partial x^m} + \frac{\partial A_p}{\partial x^m} \right) -$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial A_1}{\partial x^m} = 0 \ \wedge \ \frac{\partial A_2}{\partial x^m} = 0 \wedge \ A_m + x^m \frac{\partial A_m}{\partial x^m} = 0 \ \wedge \ -A_p + x^m \frac{\partial A_p}{\partial x^m} = 0,$$

kde v druhé rovnosti od p_m násobící první výraz jsme odečetli a přičetli A_m, pak je již postup standardní. Na konstrukci systému musíme tedy splnit (4.107) a (4.109). Rovnice ale mají jisté specifikum. A_p a A_m se v nich vždy vyskytují samostatně a rovnice jsou bezesporné a jdou rychle vyřešit. Dvě rovnice z (4.107) obsahující společně A_1 a A_2 ale nemají (ryze) reálné řešení. To znamená, že obě tyto složky musí být nulové. Celkem to znamená

$$A_m = \frac{f_1((x^1)^2 + (x^2)^2)}{x^m}, \ A_p = x^m f_2((x^1)^2 + (x^2)^2), \ A_1 = 0 = A_2. \tag{4.110}$$

V tomto předpisu není žádný člen čistě kalibrační, všechny se ve výsledných polích projeví.

Nyní se již podíváme na podmínky involuce. Ty jsou pro involuci druhého a třetího IP

$$0 = p_1 x^p \frac{\partial H}{\partial p_2} - p_2 x^p \frac{\partial H}{\partial p_1} - x^2 x^p \frac{\partial H}{\partial x^1} + x^1 x^p \frac{\partial H}{\partial x^2}. \tag{4.111}$$

Toto jsou ale, po vykrácení x^p podmínky shodné s (4.107), jejich involuce je tedy automatická. Problém ale nastává s podmínkami na involucí prvního a třetího IP, ty se totiž po úpravě redukují na

$$0 = -\frac{\partial H}{\partial x^m} x^m + \frac{\partial H}{\partial p_m} p_m = \tag{4.112}$$

$$x^m \left(\frac{p_1 - A_1}{2(p_m - A_m)} \frac{\partial A_1}{\partial x^m} + \frac{p_2 - A_2}{2(p_m - A_m)} \frac{\partial A_2}{\partial x^m} - \frac{1 + (p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2}{4(p_m - A_m)^2} \frac{\partial A_m}{\partial x^m} - \frac{\partial A_p}{\partial x^m} \right) -$$

$$-\frac{1 + (p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2}{4(p_m - A_m)} + A_m \frac{1 + (p_1 - A_1)^2 - (p_2 - A_2)^2}{4(p_m - A_m)^2},$$

což ale, kvůli předposlednímu členu nejde splnit (obsahuje druhé mocniny p_i a dělení $4(p_m - A_m)$, pročež nemá v první závorce žádný člen, s nímž by mohl tvořit rovnici, a sám osobě nulový být nemůže). Znamená to, že na integrabilní systém je potřeba hledat další IP. Poznamenejme také, že v úpravách se nevyskytly podmínky zachování, tj. tyto veličiny nejsou v involuci, ani kdyby se nezachovávaly.

Závěrem ale ještě uvedeme, že pro zkoumání systémů této třídy je vhodnější přejít do frontální obdoby cylindrických souřadnic pomocí transformace

$$x^p = x^p,\ x^m = x^m,\ x^1 = r\cos\varphi,\ x^2 = r\sin\varphi. \tag{4.113}$$

Ty změní funkce z (4.110) na $f_1 = f_1(r^2)$, $f_2 = f_2(r^2)$. Dále musíme přetransformovat čtyřpotenciál a samotný hamiltonián. Podobně jako v sekci 4.2.2 transformujeme jen prostorové složky (tentokrát dokonce jen dvě). Tedy uvážíme-li vztahy (4.113) a jejich inverze, máme

$$H = \frac{1 + p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}}{4(p_m - \frac{f_1(r)}{x^m})} + x^m f_2(r). \tag{4.114}$$

4.3.4 Systémy zachovávající p_1 , p_2 a $x^p H - x^m p_m$

Zde je involuce automatická – zachování prvních dvou IP ruší závislost A_μ na x^1 a x^2, což stačí i na involuci s posledním. Podmínky na zachování $x^p H - x^m p_m$ jsme již viděli, v (4.108) zde ale nevymizí poslední člen a podmínka je

$$0 = p_m \frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)^2} - \frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)} + \tag{4.115}$$

$$x^m \left(-\frac{p_1 - A_1}{2(p_m - A_m)} \frac{\partial A_1}{\partial x^m} - \frac{p_2 - A_2}{2(p_m - A_m)} \frac{\partial A_2}{\partial x^m} + \frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)^2} \frac{\partial A_m}{\partial x^m} + \frac{\partial A_p}{\partial x^m} \right) -$$

$$-x^p \left(-\frac{p_1 - A_1}{2(p_m - A_m)} \frac{\partial A_1}{\partial x^p} - \frac{p_2 - A_2}{2(p_m - A_m)} \frac{\partial A_2}{\partial x^p} + \frac{(p_1 - A_1)^2 + (p_2 - A_2)^2 + 1}{4(p_m - A_m)^2} \frac{\partial A_m}{\partial x^p} + \frac{\partial A_p}{\partial x^p} \right) - A_p$$

$$\Leftrightarrow -x^m \frac{\partial A_1}{\partial x^m} + x^p \frac{\partial A_1}{\partial x^p} = 0 \ \wedge \ -x^m \frac{\partial A_2}{\partial x^m} + x^p \frac{\partial A_2}{\partial x^p} = 0$$

$$\wedge \ A_m + x^m \frac{\partial A_m}{\partial x^m} - x^p \frac{\partial A_m}{\partial x^p} = 0 \ \wedge \ -A_p + x^m \frac{\partial A_p}{\partial x^m} - x^p \frac{\partial A_p}{\partial x^p} = 0.$$

Jak vidíme, rovnice pro jednotlivé složky jsou nezávislé, rovnice jsou snadno řešitelné jako

$$A_1 = A_1(x^p x^m),\ A_2 = A_2(x^p x^m),\ A_m = \frac{f_1(x^m x^p)}{x^m},\ A_p = x^m f_2(x^m x^p). \tag{4.116}$$

Opět žádný ze členů není čistě kalibrační, ve výsledných polí hrají roli všechny.

Závěr

V kapitole 1 jsme zavedli notaci, pojmy a vztahy z oblastí (super)integrability, speciální teorie relativity a dalších, potřebných k vybudování relativistického hamiltonovského popisu. V kapitole 2 jsme studovali tento popis. Postupně jsme vyložili, proč nelze zavést hamiltonovský popis „tradičním způsobem“, dále jsme studovali Poincarého grupu a problematiky, jež s ní souvisí, abychom ji v další sekci využili ke konstrukci funkčního relativistického hamiltonovského popisu (spolu s dalšími věcmi k této konstrukci potřebnými) a v téže sekci jsme nastínili, jak vypadá samotný formalismus. Dále jsme se již věnovali konkrétním možným formám hamiltonovského popisu (kalibracím), kterých existuje pouze pět typů. V poslední sekci kapitoly 2 jsme se zaměřili na tři z nich, které zavedl již Dirac [7], z níž alespoň dvě se běžně používají. V kapitole 3 jsme se dostali k výsledkům a metodám dvou článků, které se věnují relativistické superintegrabilitě [1, 2] a jsou možná jedinými (alespoň pokud je autorce známo) pracemi v této konkrétní oblasti. Objevily se zde metody a postupy jako je hledání poincaréovských IP pomocí požadování nulovosti Lieovy derivace tenzoru elektromagnetického pole, pokusy s polynomiálním ansatz pro tvar IP a následné řešení soustavy diferenciálních rovnic, rozšíření fázového prostoru, hledání IP z konformní grupy apod. Dále zde byly demonstrovány postupy, jež jsou pro studium (super)integrabilních systémů nezbytné, jako je ověřování funkcionální nezávislosti IP, či řešení Hamiltonových rovnic.

V kapitole 4, jež představuje vlastní přínos práce, jsme teoretické znalosti z předchozích sekcí využili pro další výzkum. Zaměřili jsme se na systémy s elektromagnetickým polem. V první sekci jsme se věnovali obecným otázkám a poznatkům – studovali jsme nerelativistickou limitu hamiltoniánu instantní formy, převody poincaréovských IP mezi relativistickou a nerelativistickou situací (u hybností a momentů hybností je tento převod automatický, u boostových IP jsme jej nalezli pouze ve speciálních případech). Nastínili jsme, proč nelze IP vyšších řádu převádět přímo a některé problémy převodů (např. závislost) a došli k závěru, že cesta vede spíše přes symetrie než přes přímý převod. Krátce jsme se zabývali výhodností instantní a frontální formou v různých situacích. V druhé podsekci jsme se zaměřili na hyperbolické formy, jež jsou poměrně málo známé a prozkoumané. Nalezli jsme jejich grupy stability, lagrangiány, hamiltoniány. Studovali jsme také (na H2) různé otázky a specifika vznikající z jisté „exotičnosti popisu“ (explicitní časová závislost, malé nalezené množství IP pro volnou částici apod.)

V druhé sekci kapitoly jsme hledali a zkoumali relativistické obdoby několika systémů z článků [3, 4, 5, 6]. Hledali jsme především poincaréovské a polynomiální IP v p_j a H v instantní a polynomiální v p_i a H ve frontální formě (oboje do max třetího řádu). Porovnávali jsme jejich počet a druh s klasickou situací, někdy jsme hledali příbuzné, zajímavé skupiny systémů, které by také měly podobné, nebo lepší vlastnosti. Také jsme nastiňovali teoretické způsoby řešení těchto systémů. U prvního typu – konstantní magnetické pole a elektrické pole funkcí x^3 – jsme nalezli obecně čtyři nezávislé, prostorové IP, což je stejné jako v klasické situaci, také jsme nalezli skupinu relativisticky integrabilních systémů při povolení závislosti elektrického pole i na x^0. U speciálních případů pak u 1.a pět nezávislých IP zaručujících maximální superintegrabiltu, přičemž jeden byl časový, situace podobná klasické. U 1.b, jež je v klasickém případě maximálně superintegrabilní jsme nalezli minimální superintegrabilitu. U druhého typu - magnetického monopolu jsme nalezli maximální superintegrabilitu, shodně s klasickou situací, avšak v rozporu s ní jsme tuto vlastnost objevili i u celé třídy příbuzných systémů. Dále jsme nalezli jinou příbuznou skupinu, jež je integrabilní, podobně jako v klasickém případě. U třetího typu - A.2 v [4] - jež je klasicky minimálně superintegrabilní, jsme obecně nalezli pouze integrabilitu. Ve speciálních podpřípadech jsme jeden ztotožnili s 1.b a získali zcela konsistentní výsledky (a minimální superintegrabilitu) a druhý, jež je klasicky maximálně superintegrabilní jsme však zůstali u integrability, stejně jako v obecném případě. Stejně jako u jiných systémů jsme identifikovali relativistické IP, které pravděpodobně odpovídají těm, které v klasickém případě způsobují (maximální)superintegrabilitu. V relativistickém případě jsou však závislé na ostatních. Konečně, jako poslední, jsme studovali obě klasicky superintegrabilní skupiny IP z [6], zjistili jsme že v relativistickém případě se IP, které tuto vlastnost způsobují nezachovávají (a zkoumali jsme, kdy by se zachovávaly), nebo jejich alternativy existují, avšak jsou závislé. První skupina není v rámci hledaných tvarů IP ani integrabilní, druhá je v jejich rámci právě integrabilní.

V poslední sekci poslední kapitoly jsme se pokusili o jistou klasifikaci a ve frontální formě jsme hledali trojice různých poincaréovských IP, jejichž zachování by mohlo dát třídy integrabilních relativistických systémů. Studovali jsme čtyři takové trojice. U třech z nich jsme zjistili, že je involuce IP buď automatická, nebo plyne z požadavků na jejich zachování. U jedné trojice je involuce vyloučená (tj. tato třída integrabilní není - sekce 4.3.3). Vyřešili jsme rovnice pro čtyřpotenciál zachovávající příslušný IP, identifikovali čistě kalibrační členy, a nalezli tak tyto třídy systémů. U prvních dvou tříd se dokonce ukázalo, že jsou automaticky i minimálně superintegrabilní. U první třídy jsme také nalezli a studovali i maximálně superintegrabilní speciální případ.

Literatura

[1] HEINZL, Thomas a Anton ILDERTON. Superintegrable relativistic systems in spacetime-dependent background fields. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* [online]. 2017, 50(34) [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1088/1751-8121/aa7fa3. ISSN 1751-8113. Dostupné z: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/aa7fa3

[2] ANSELL, Lauren, Thomas HEINZL a Anton ILDERTON. Superintegrable relativistic systems in scalar background fields. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* [online]. 2018, 51(49) [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1088/1751-8121/aae9fb. ISSN 1751-8113. Dostupné z: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/aae9fb

[3] BERTRAND, Sébastien a Libor ŠNOBL. On rotationally invariant integrable and superintegrable classical systems in magnetic fields with non-subgroup type integrals. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* [online]. 2019, 52(19) [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1088/1751-8121/ab14c2. ISSN 1751-8113. Dostupné z: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/ab14c2

[4] MARCHESIELLO, Antonella a Libor ŠNOBL. Superintegrable 3D systems in a magnetic field corresponding to Cartesian separation of variables. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* [online]. 2017, 50(24) [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1088/1751-8121/aa6f68. ISSN 1751-8113. Dostupné z: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/aa6f68

[5] MARCHESIELLO, Antonella, Libor ŠNOBL a Pavel WINTERNITZ. Three-dimensional superintegrable systems in a static electromagnetic field. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* [online]. 2015, 48(39) [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1088/1751-8113/48/39/395206. ISSN 1751-8113. Dostupné z: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/48/39/395206

[6] MARCHESIELLO, Antonella a Libor ŠNOBL. Classical Superintegrable Systems in a Magnetic Field that Separate in Cartesian Coordinates. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* [online]. 2020 [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.3842/SIGMA.2020.015. ISSN 18150659. Dostupné z: https://www.emis.de/journals/SIGMA/2020/015/

[7] DIRAC, Paul Adrien Maurice. Forms of Relativistic Dynamics. *Reviews of Modern Physics* [online]. 1949, 21(3), 392-399 [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1103/RevModPhys.21.392. ISSN 0034-6861. Dostupné z: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.21.392

[8] ŠTOLL, Ivan, Jiří TOLAR a Igor JEX. *Klasická teoretická fyzika*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2017. ISBN 978-80-246-3545-3.

[9] MILLER, Willard, Sarah POST a Pavel WINTERNITZ. Classical and quantum superintegrability with applications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* [online]. 2013, 46(42) [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1088/1751-8113/46/42/423001. ISSN 1751-8113. Dostupné z: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8113/46/42/423001

[10] VOTRUBA, Václav. *Základy speciální teorie relativity: vysokoškolská učebnice*. Praha: Academia, 1969.

[11] SEMERÁK, Oldřich. Speciální teorie relativity [online]. 2012, [cit. 2020-07-17]. Dostupné z http://utf.mff.cuni.cz/ semerak/STR.pdf

[12] ZWIEBACH, Barton. *A First Course in String Theory* [online]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004 [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1017/CBO9780511841682. ISBN 9780511841682.

[13] ŠNOBL, Libor. Diferenciální rovnice, symetrie a grupy [přednášky]. Praha: ČVUT FJFI, zimní semestr AR 2019/2020.

[14] CHADZITASKOS, Gce. Odmaturuj z grup a reprezentací [online]. 2015, [cit. 2020-07-17]. Dostupné z http://wikiskripta.fjfi.cvut.cz/wiki/index.php/02GR.

[15] FRANKEL, Theodore. *The Geometry of Physics. An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN 0-521-31897-1.

[16] PODOLSKÝ, Jiří. Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie [online]. 2006, [cit. 2020-07-17]. Dostupné z https://docplayer.cz/43274110-Teoreticka-mechanika-v-jazyce-diferencialni-geometrie.html

[17] LEUTWYLER, Heinrich. a Jan STERN. Relativistic dynamics on a null plane. *Annals of Physics* [online]. 1978, 112(1), 94-164 [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1016/0003-4916(78)90082-9. ISSN 00034916. Dostupné z: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0003491678900829

[18] LATAL, Heimo a Wolfgang SCHWEIGER, ed. *Methods of Quantization* [online]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001 [cit. 2020-07-18]. Lecture Notes in Physics. DOI: 10.1007/3-540-45114-5. ISBN 978-3-540-42100-9.

[19] HEINZL, Thomas. Light-Cone Dynamics of Particles and Fields. ArXiv preprint hep-th/9812190v1 [online]. 1998, [cit. 2020-07-18]. Dostupné z https://arxiv.org/abs/hep-th/9812190

[20] FORMÁNEK, Jiří. *Úvod do relativistické kvantové mechaniky a kvantové teorie pole 1.* Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-576-0.

[21] THIRRING, Walter. *Classical Mathematical Physics* [online]. New York, NY: Springer New York, 1997 [cit. 2020-07-18]. DOI: 10.1007/978-1-4612-0681-1. ISBN 978-0-387-40615-2.

[22] MAPLESOFT, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario. *Maple 2019, Student Edition* [software]. 2019. Dostupné z https://www.maplesoft.com/products/Maple/students/, resp. z https://download.cvut.cz/maple-2019-for-students/ pro ČVUT.