

# Posudek školitele na bakalářskou práci „Relativistické superintegrabilní systémy“ studentky Terezy Lehečkové

Tématem bakalářské práce bylo seznámení se s popisem integrabilních a superintegrabilních systémů v relativistické mechanice, prostudování nedávných publikací na toto téma a zahájení vlastního výzkumu v tomto směru.

Vlastnosti relativistických integrabilních systémů jsou ve srovnání s integrabilitou nerelativistickou podstatně méně prozkoumané, a to navzdory jejich zjevné relevanci pro fyzikální aplikace. Hlavní příčiny jsou dvě:

- Přímočaré zobecnění přechodu od Lagrangeova k Hamiltonovu formalismu do Minkowského prostoročasu vede na nulový Hamiltonián a proto Hamiltonovův formalismus vyžaduje explicitní narušení invariance vzhledem k Lorentzovým transformacím výběrem preferované časové souřadnice.
- V závislosti na výběru časové souřadnice se mění i explicitní časová závislost integrálů pohybu a jejich tvar. I samotný Hamiltonián zkoumaného systému může být v závislosti na volbě času časově závislý či nezávislý, a polynomiální, racionální či analytickou funkcí souřadnic a hybností. To přináší značné obtíže při hledání vhodných předpokládaných tvarů možných integrálů pohybu i při interpretaci samotných pojmů integrabilita a superintegrabilita.

Studentka se musela s uvedenými problémy a jejich možnými řešeními detailně seznámit, což s úspěchem učinila a na základě studia literatury rozebrala v kapitole 2. Postup vychází z výběru nadploch konstantního času odpovídajících maximálním podgrupám Poincaréovy grupy a volby vhodné doplňkové časové souřadnice. To vede na různé formy či též kalibrace Hamiltonovy mechaniky, tzv. instantní, frontální, bodovou a hyperbolické formy.

Dále se rozebrala dvěma nedávno publikovanými články na téma relativistické superintegrability. V prvním článku, uvažujícím pohyb částice v elektromagnetickém poli, hrají důležitou úlohu integrály pohybu odpovídající podle teorému Noetherové invarianci zvolené konfigurace elektromagnetického pole vůči 1-parametrickým podgrupám Poincaréovy grupy, tzv. poincaréovské integrály. Další integrály jsou pak hledány buďto využitím vhodných předpokládaných tvarů polynomiálních v určitých hybnostech, nebo vhodnými kvadraturami. V druhém článku, zkoumajícím pouze vliv skalárního potenciálu jsou využívány i další metody, jako rozšíření fázového prostoru do vyšší dimenze či zkoumání možných integrálů odpovídajících invarianci vůči transformacím z konformní grupy.

Ve čtvrté kapitole se pak studentka věnuje samostatnému výzkumu, zejména vztahu nerelativistických a relativistických (super)integrabilních systémů a studiu relativistických analogů známých superintegrabilních systémů. Závěry jsou bohužel poněkud nejednoznačné

– pouze určitý tvar integrálů umožňuje přímou nerelativistickou limitu, ale například poincaréovské integrály odpovídající vlastním Lorentzovým transformacím obecně tuto vlastnost postrádají. Současně jsou diskutovány málo využívané tzv. hyperbolické formy Hamiltonova formalismu a ukázán netriviální popis volné částice v nich. Dále jsou podrobně zkoumány relativistické verze minimálně a maximálně superintegrabilních nerelativistických systémů s magnetickým polem, které byly publikovány v nedávné době v několika člancích školitele a jeho spolupracovníků. Pro dané elektromagnetické pole jsou zkonstruovány všechny poincaréovské integrály a další integrály jsou hledány za různých zjednodušujících předpokladů vycházejících ze struktury nerelativistických integrálů. Nalezené integrály jsou pak využity k hledání trajektorií, explicitního či jen naznačeného dle složitosti rovnic. Ukazuje se, že systémy superintegrabilní či integrabilní v relativistické podobě nemusí mít tuto vlastnost po provedení nerelativistické limity, tj. některé integrály nemusí mít definovanou limitu, a naopak, nerelativistické integrály často nemají relativistický analog, alespoň za uvedených předpokladů o tvaru integrálů. Dále jsou zkoumány vybrané třídy systémů majících ve frontální formě tři zvolené poincaréovské integrály pohybu v involuci. Ukazuje se, že některé jsou již v důsledku uvedeného předpokladu minimálně superintegrabilní, byť dodatečný integrál lze obecně vyjádřit pouze jako kvadraturu, a podařilo se mezi nimi najít i případy maximálně superintegrabilní (ač pro úplnou korektnost tohoto tvrzení by bylo třeba ještě provést detailní analýzu nalezeného integrálu obsahujícího potenciálně singulární trigonometrické funkce, tj. není jisté, zda je zkonstruovaný integrál globálně dobře definován).

Studentka při své práci projevila značnou samostatnost a iniciativu, sama přicházela s myšlenkami, jakým způsobem by se námět výzkumu navržený v zadání práce mohl dále rozvinout. K práci mám jen drobné výhrady:

1. U rovnice (3.4) by bylo vhodné zmínit, že provedené úpravy kromě (3.2) využívají též vlastnosti  $\xi$  plynoucí z jeho definice v rovnici (2.6).
2. Rovnice (4.3) je chybně zapsaná, za mínusem následuje rovnítko, též se tam mockrát opakuje index  $j$ .
3. Na několika místech se opakuje sousloví „maximálně integrabilní“ místo „maximálně superintegrabilní“.

Celkově považuji práci za kvalitní, prezentující jak výsledky rozsáhlého studia literatury, tak značně myšlenkově i výpočetně náročného vlastního výzkumu. Vysoce převyšuje obvyklé požadavky na bakalářské práce kladené. Doporučuji hodnocení bakalářské práce stupněm **A - výborně**.