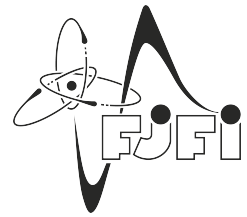




ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Geodetiky v poli černých děr v obecné teorii relativity

Geodesics in Black Hole Background in General Relativity

Bakalářská práce

Autor: **Filip Moučka**
Vedoucí práce: **Ing. Josef Schmidt, Ph.D.**
Akademický rok: 2019/2020

- Zadání práce -

- Zadání práce (zadní strana) -

V první řadě bych chtěl poděkovat svému školiteli Ing. Josefu Schmidtovi, Ph.D. za pomoc s výběrem tématu, ochotu, trpělivost, poskytnutí spousty užitečných materiálů a četné cenné rady, které vedly ke zdokonalení celé práce. Dále bych rád poděkoval své rodině a přítelkyni, kteří mi byli během celého studia a při psaní této práce velkou podporou.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Nemám závažný důvod proti použití tohoto školního díla ve smyslu § 60 Zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne 30. července 2020

Filip Moučka

Název práce:

Geodetiky v poli černých děr v obecné teorii relativity

Autor: Filip Moučka

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematická fyzika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Josef Schmidt, Ph.D., Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Cílem této práce je poskytnout přehled možných trajektorií volných testovacích částic v poli vybraných typů černých děr. Nejprve jsou zavedeny základní pojmy z diferenciální geometrie a obecné teorie relativity. V další části je představen relativistický pohled na symetrie a zachovávané veličiny, který využívá Lieovu derivaci a s ní související Killingova vektorová pole. Dále jsou formulovány alternativní přístupy k rovnici geodetiky pomocí variačního principu, Hamiltonova formalismu nebo Hamilton–Jacobiho rovnice. Závěrečná část práce se věnuje detailní diskusi časupodobných a světlu podobných geodetik v okolí dvou nejjednodušších černých děr, Schwarzschildovy a Reissner–Nordströmovy. Pro vybrané počáteční podmínky jsou v těchto prostoročasech provedeny numerické simulace průběhů geodetik.

Klíčová slova: geodetiky, Killingova vektorová pole, obecná teorie relativity, Reissner–Nordströмова černá díra, Schwarzschildova černá díra

Title:

Geodesics in Black Hole Background in General Relativity

Author: Filip Moučka

Abstract: The aim of this work is to provide an overview of possible trajectories followed by free-falling test particles within the influence of the selected types of black holes. In the beginning, basic concepts of differential geometry and general relativity are introduced. In the next part, a theory of symmetries and conserved quantities is presented from a relativistic point of view, which uses Lie derivative and the related Killing vector fields. Furthermore, alternative approaches to the geodesic equation are formulated using the variational principle, Hamilton's formalism or the Hamilton–Jacobi equation. The final part of the work is concerned with a detailed discussion of timelike and lightlike geodesics in the neighbourhood of the two simplest black holes: Schwarzschild and Reissner–Nordström. Numerical simulations of geodesics are carried out in these spacetimes for selected initial conditions.

Key words: general relativity, geodesics, Killing vector fields, Reissner–Nordström black hole, Schwarzschild black hole

Obsah

Přehled značení	10
Úvod	11
1 Diferenciální geometrie	12
1.1 Metrika	12
1.2 Afinní konexe	14
1.3 Geodetiky	18
1.4 Křivost	20
2 Obecná teorie relativity	22
2.1 Relativita jazykem diferenciální geometrie	22
2.2 Einsteinovy polní rovnice	23
3 Zákony zachování v obecné teorii relativity	25
3.1 Lieova derivace	25
3.2 Killingova vektorová pole	26
3.3 Zachovávající se veličiny	28
3.4 Symetrické prostoročasy	28
4 Alternativní formulace rovnice geodetiky	31
4.1 Geodetiky jako trajektorie volných částic	31
4.2 Geodetiky jako „nejkratší“ křivky	33
4.3 Hamiltonův přístup	34
4.4 Hamilton–Jacobiho reformulace rovnice geodetiky	35
5 Schwarzschildova černá díra	36
5.1 Schwarzschildův prostoročas	36
5.2 Geodetiky v poli Schwarzschildovy černé díry	37
5.3 Časupodobné geodetiky	39
5.4 Světlu podobné geodetiky	45
5.5 Numerické řešení	46
6 Reissner–Nordströmova černá díra	50
6.1 Reissner–Nordströmův prostoročas	50
6.2 Časupodobné geodetiky	52
6.3 Světlu podobné geodetiky	55
6.4 Numerické řešení	63
Závěr	65
Literatura	67

Přehled značení

Značka	Význam
\hat{n}	$\{1, 2, 3, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$.
\hat{n}_0	$\hat{n} \cup \{0\}$, kde $n \in \mathbb{N}$.
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$.
$:=$	Definujeme jako.
$T_q^p(L)$	Vektorový prostor tenzorů kontravariantních řádu p a kovariantních řádu q neboli typu $\binom{p}{q}$ nad vektorovým prostorem L , kde $p, q \in \mathbb{N}_0$.
$(g_{\mu\nu}), (g^{\mu\nu})$	Matrice, jejíž prvky jsou složky tenzoru typu $\binom{0}{2}$, popřípadě $\binom{2}{0}$.
δ_ν^μ	Kroneckerova delta, $\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \mu \neq \nu, \\ 1, & \text{pokud } \mu = \nu. \end{cases}$
$\mathcal{F}(M)$	Hladké funkce na varietě M .
$\mathcal{T}_q^p(M)$	$\mathcal{F}(M)$ -modul hladkých tenzorových polí kontravariantních řádu p a kovariantních řádu q neboli typu $\binom{p}{q}$ na varietě M , kde $p, q \in \mathbb{N}_0$.
$\mathcal{T}(M)$	Algebra hladkých tenzorových polí, $\mathcal{T}(M) := \bigoplus_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ +\infty}} \mathcal{T}_q^p(M)$.
$\dot{\gamma}, \frac{d\gamma}{d\lambda}$	Hladké vektorové pole, které každému bodu křivky γ přiřadí tečný vektor ke γ v daném bodě.
$\dot{\gamma}(t)$	Tečný vektor ke křivce γ v bodě $\gamma(t)$, $t \in \text{Dom}(\gamma)$.
$T_P M$	Tečný prostor k varietě M v bodě $P \in M$.
c	Rychlost světla ve vakuu.
G	Gravitační konstanta.
η	Minkowského metrika.
\mathbb{E}^n	Eukleidův prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$.
f^*	$f^* : \mathcal{T}_q^p(N) \rightarrow \mathcal{T}_q^p(M)$, pull-back tenzorového pole, M, N jsou variety a $f : M \rightarrow N$ je difeomorfismus.
f_*	$f_* : \mathcal{T}_0^1(M) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(N)$, push-forward vektorového pole, M, N jsou variety a $f : M \rightarrow N$ je difeomorfismus.
ε_0	Permitivita vakua.
μ_0	Permeabilita vakua.

V celé práci je používána Einsteinova sumační konvence, varietou myslíme vždy hladkou varietu a všechny algebraické struktury uvažujeme nad \mathbb{R} .

Úvod

V roce 1916 německý fyzik Karl Schwarzschild publikoval článek [1], ve kterém prezentoval historicky první netriviální přesné řešení Einsteinových polních rovnic, mimo jiné tím objevil něco, co bylo již od počátku v rovnicích implicitně skryto, černé díry. Jedná se o tak enormně zakřivené oblasti prostoročasu, že po překročení jejich hranice, horizontu událostí, není kauzálně možné, aby odtud hmotné, a dokonce ani nehmotné částice unikly. Černé díry patří již přes 100 let k nejzajímavějším a nejzáhadnějším objektům, jimiž se teoretická fyzika zabývá, přesto však zůstává celá řada otázek nezodpovězena a jsou stále aktuálním tématem výzkumu. To, že je téma černých děr stále aktuální, ilustrují dvě nedávné události, které si získali nevídaný ohlas mezi laickou i odbornou veřejností. Jednou z nich byla historicky první přímá detekce gravitačních vln ze září 2015. Průběh těchto vln odpovídal těm, které dle obecné relativity vznikají při splynutí dvou černých děr, [2]. Druhou událostí bylo pořízení snímku objektu nacházejícího se v centru galaxie M87. Tento snímek byl pořízen v dubnu roku 2019 soustavou radioteleskopů EHT a odpovídá tomu, co v obecné relativitě nazýváme stín černé díry, [3].

Jak už název práce napovídá, budeme se zabývat geodetikami. Geodetiky jsou zobecněním pojmu přímka z Eukleidovského prostoru na obecnou hladkou varietu s afinní konexí. Na prostoročasu, lorentzovské varietě dimenze 4, odpovídají geodetiky trajektoriím volných testovacích částic. Zkoumáním geodetik v okolí černých děr tedy získáváme představu o tom, jak v této oblasti vypadá gravitační pole, nebo jinými slovy o tom, jak černé díry ve svém okolí zakřivují prostoročas. Jelikož vnitřek černé díry nemůže být zkoumán vnějším pozorovatelem, vše co budeme kdy schopni ověřit a experimentálně zkoumat o černých dírách se týká jejich vnějšku, proto nás v této práci budou zajímat pouze geodetiky vně černých děr.

Známe čtyři základní typy černých děr, Schwarzschildovu, elektricky nabitou Reissner–Nordströmovu, rotující Kerrovu a nabitou, rotující Kerr–Newmanovu. V této práci vyšetříme průběh časupodobných a světlupodobných geodetik v okolí prvních dvou jmenovaných.

1 Diferenciální geometrie

Ukazuje se, že je velice přirozené a užitečné formulovat obecnou teorii relativity v jazyce diferenciální geometrie. Z tohoto důvodu bude i zde uvedena kapitola pojednávající o této oblasti matematiky, v níž však představíme pouze pro relativitu stěžejní objekty. Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu byla kniha [4].

1.1 Metrika

Prvním takovým objektem, který hraje v Einsteinově teorii gravitace obzvlášť významnou roli, je metrika. Jedná se o dodatečnou strukturu na varietě, to znamená, že se na varietě nevyskytuje sama od sebe, ale musíme ji na ni dodefinovat. Metrika umožňuje měřit délky a úhly, také na varietě indukuje speciální afinní konexi a tím i torzi, křivost a geodetiky.

V celé podkapitole budeme uvažovat libovolný vektorový prostor L dimenze $n \in \mathbb{N}$ a k němu duální prostor L^* . V prostoru L si libovolně zvolíme bázi (e_1, \dots, e_n) a k ní duální bázi prostoru L^* označíme jako (e^1, \dots, e^n) .

Definice 1.1 *Kovariantní tenzor 2. řádu g nad vektorovým prostorem L nazveme **metrickým tenzorem** právě tehdy, když má tyto dvě vlastnosti:*

1. $\forall u, v \in L \quad g(u, v) = g(v, u),$ *symetrie,*
2. $\forall v \in L \quad g(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0,$ *nedegenerovanost.*

Metrický tenzor lze rozepsat do složek vůči zvolené bázi způsobem $g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu$. V komponentovém zápisu lze požadavky symetrie a nedegenerovanosti ekvivalentně přepsat do tvaru

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad \det(g_{\mu\nu}) \neq 0.$$

Z lineární algebry, viz [5], je znám výsledek, že pro každé symetrické bilineární zobrazení existuje takzvaná polární báze, v níž lze toto zobrazení reprezentovat diagonální maticí, která má na diagonále pouze čísla 1, -1 a 0. Na základě této vlastnosti se definuje **signatura** tohoto zobrazení, uspořádaná trojice čísel $(\iota_+, \iota_-, \iota_0)$, kde $\iota_+, \iota_-, \iota_0 \in \hat{n}_0$ po řadě označují počet 1, -1 a 0 na diagonále příslušné matice. Metrický tenzor g je symetrické bilineární zobrazení, to znamená, že má smysl mluvit o jeho signatuře. Z nenulovosti determinantu $(g_{\mu\nu})$ v libovolné bázi plyne, že $\iota_0 = 0$. Signatura metrického tenzoru se tedy redukuje na uspořádanou dvojici (ι_+, ι_-) . Polární bázi metrického tenzoru nazýváme **ortonormální bází**.

Z nedegenerovanosti plyne, že matice $(g_{\mu\nu})$ je regulární, to znamená, že k ní existuje matice inverzní. Lze snadno ověřit, že složky inverzní matice jsou komponenty kontravariantního tenzoru 2. řádu, který se obvykle značí $g^{-1} \in T_0^2(L)$.

Zavedeme dvě zobrazení indukované metrikou, které jsou jak v geometrii, tak v relativitě velmi často využívány:

$$\begin{aligned} \wedge : L^* &\rightarrow L & \forall \alpha \in L^* \quad \wedge \alpha &:= g^{-1}(\alpha, \cdot), \\ \vee : L &\rightarrow L^* & \forall v \in L \quad \vee v &:= g(v, \cdot). \end{aligned}$$

Pokud rozepíšeme libovolný kovektor $\alpha \in L^*$, popřípadě vektor $v \in L$ do zvolené báze, můžeme působení zobrazení \wedge a \vee rozepsat takto:

$$\begin{aligned}\wedge \alpha &= g^{-1}(\alpha, \cdot) = g^{-1\rho\nu} e_\rho(\alpha_\mu e^\mu) e_\nu = \alpha_\mu g^{-1\rho\nu} \delta_\rho^\mu e_\nu = \alpha_\mu g^{-1\mu\nu} e_\nu = \alpha^\nu e_\nu, \quad \text{kde } \alpha^\nu := \alpha_\mu g^{-1\mu\nu}, \\ \vee v &= g(v, \cdot) = g_{\rho\nu} e^\rho(v^\mu e_\mu) e^\nu = v^\mu g_{\rho\nu} \delta_\mu^\rho e^\nu = v^\mu g_{\mu\nu} e^\nu = v_\nu e^\nu, \quad \text{kde } v_\nu := v^\mu g_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Zobrazení \wedge , respektive \vee , se nazývá „**zvyšování**“, respektive „**snížování**“, **indexu**“ a je možné je zobecnit na obecný tenzor $A \in T_q^p(L)^1$. Zobrazení fungují v libovolném argumentu, pro jednoduchost však ukážeme pouze působení v prvním kovektorovém a posledním vektorovém:

$$\wedge : T_q^p(L) \rightarrow T_{q-1}^{p+1}(L), \quad \vee : T_q^p(L) \rightarrow T_{q+1}^{p-1}(L).$$

Nechť $\forall i \in \widehat{q+1}$ $v_{(i)} \in L$, $\forall j \in \widehat{p+1}$ $\alpha_{(j)} \in L^*$, $A \in T_q^p(L)$, pak

$$\begin{aligned}(\wedge A)(v_{(1)}, \dots, v_{(q-1)}; \alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(p+1)}) &:= A(v_{(1)}, \dots, v_{(q-1)}, \wedge \alpha_{(1)}; \dots, \alpha_{(p+1)}), \\ (\vee A)(v_{(1)}, \dots, v_{(q+1)}; \alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(p-1)}) &:= A(v_{(1)}, \dots, \vee v_{(q+1)}, \alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(p-1)}),\end{aligned}$$

přičemž v komponentách to pak vypadá následovně:

$$\begin{aligned}(\wedge A)_{\nu_1 \dots \nu_{q-1}}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{p+1}} &= g^{-1\mu_1 \rho} A_{\nu_1 \dots \nu_{q-1} \rho}^{\mu_2 \dots \mu_{p+1}}, \\ (\vee A)_{\nu_1 \dots \nu_{q+1}}^{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} &= g_{\nu_{q+1} \rho} A_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\rho \mu_1 \dots \mu_{p-1}}.\end{aligned}$$

Poznámka Toto značení neurčuje, ve kterém argumentu zvyšování nebo snižování indexu působí, to je vždy potřeba explicitně dodat.

Pokud zvýšíme oba indexy metrického tenzoru, získáváme:

$$g^{\mu\nu} = (\wedge \wedge g)^{\mu\nu} = g^{-1\mu\rho} g^{-1\nu\sigma} g_{\rho\sigma} = g^{-1\mu\rho} \delta_\rho^\nu = g^{-1\mu\nu}.$$

Odtud pak plyne rovnost mezi tenzory $g^{-1} = (\wedge \wedge g)$, tudíž můžeme místo $g^{-1\mu\nu}$ psát $g^{\mu\nu}$, jak je ostatně v relativistické i geometrické literatuře běžné.

Poznámka Většinou se symboly \wedge a \vee , vynechávají a o tenzoru $\wedge A$, respektive $\vee A$, se zkrátka hovoří jako o tenzoru A se zvýšeným, respektive sníženým, indexem.

Definice 1.2 *Nechť M je varieta, tenzorové pole $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ se nazývá **metrika** na M právě tehdy, když v každém bodě $P \in M$ je $g(P)$ metrický tenzor nad $T_P M$. Varietu M vybavenou metrikou nazýváme **riemannovská** a značíme ji uspořádanou dvojicí (M, g) .*

Signaturu metriky g definujeme jako signaturu metrického tenzoru $g(P)$, kde $P \in M$ je libovolný. Definice je korektní, protože díky spojitosti a nedegenerovanosti metriky je signatura tenzoru $g(P)$ ve všech bodech stejná.

Pokud je metrika pozitivně definitní, to jest pro její signaturu platí $\iota_- = 0$, můžeme pomocí ní měřit délky a velikosti úhlů. Jakým způsobem jsou tato měření realizována, řeší následující definice.

¹Pro zobrazení \wedge je nutné, aby $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}$, pro zobrazení \vee $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$.

Definice 1.3 Necht' (M, g) je riemannovská varieta s pozitivně definitní metrikou, $P \in M$ a $u, v \in T_P M$. **Velikost vektoru** v definujeme výrazem

$$\|v\| := \sqrt{g(v, v)}. \quad (1)$$

Velikost úhlu, který vektory u a v svírají, definujeme jako jednoznačné řešení rovnice

$$\cos \alpha = \frac{g(u, v)}{\sqrt{g(u, u)}\sqrt{g(v, v)}} \quad (2)$$

na intervalu $\alpha \in [0, \pi]$.

Definice 1.4 Necht' (M, g) je riemannovská varieta s pozitivně definitní metrikou, γ je křivka na M a $P, Q \in \text{Ran}(\gamma)$. Označíme-li $\gamma(t_1) := P$, $\gamma(t_2) := Q$, kde $t_1 < t_2$, pak **délku křivky** γ mezi body P a Q definujeme předpisem

$$\ell[\gamma] := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt. \quad (3)$$

1.2 Afinní konexe

Afinní konexe je stejně jako metrika dodatečná struktura na varietě. Umožňuje nám zavést takzvanou kovariantní derivaci, jež je zobecněním směrové derivace z Eukleidovského prostoru na libovolnou varietu se zadanou afinní konexí.

Definice 1.5 Necht' M je varieta. Pokud je na ní zadané zobrazení $\nabla : \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$, $(W, A) \mapsto \nabla_W A$ s následujícími vlastnostmi:

1. Zachovávání stupně tenzorového pole:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}_0, \forall A \in \mathcal{T}_q^p(M), \forall W \in \mathcal{T}_0^1(M)$$

$$\nabla_W A \in \mathcal{T}_q^p(M).$$

2. \mathbb{R} -linearita ve druhém argumentu:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}_0, \forall A, B \in \mathcal{T}_q^p(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall W \in \mathcal{T}_0^1(M)$$

$$\nabla_W(A + \lambda B) = \nabla_W A + \lambda \nabla_W B.$$

3. Leibnitzovo pravidlo:

$$\forall p, q, p', q' \in \mathbb{N}_0, \forall A \in \mathcal{T}_q^p(M), \forall B \in \mathcal{T}_{q'}^{p'}(M) \forall W \in \mathcal{T}_0^1(M)$$

$$\nabla_W(A \otimes B) = A \otimes (\nabla_W B) + (\nabla_W A) \otimes B.$$

4. Působení na tenzorových polích typu $\binom{0}{0}$, to jest na hladkých funkcích na M :

$$\forall f \in \mathcal{F}(M), \forall W \in \mathcal{T}_0^1(M)$$

$$\nabla_W f = Wf$$

5. Komutování s kontrakcemi:

$$\forall W \in \mathcal{T}_0^1(M) \text{ a pro libovolnou kontrakci } C$$

$$\nabla_W \circ C = C \circ \nabla_W.$$

6. $\mathcal{F}(M)$ -linearita v prvním argumentu:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}_0, \forall A \in \mathcal{T}_q^p(M), \forall f \in \mathcal{F}(M), \forall V, W \in \mathcal{T}_0^1(M)$$

$$\nabla_{W+fV}A = \nabla_WA + f\nabla_VA.$$

říkáme, že je na varietě M zavedená **afinní konexe**, tuto varietu pak značíme uspořádanou dvojicí (M, ∇) . Výraz ∇_WA nazýváme **kovariantní derivace** tenzorového pole $A \in \mathcal{T}_q^p(M)$ ve směru vektorového pole $W \in \mathcal{T}_0^1(M)$.

Definice 1.6 Necht (M, ∇) je varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$, (U, Φ) je libovolná mapa z její hladké struktury a (e_1, \dots, e_n) je libovolný reper prostoru $\mathcal{T}_0^1(U)$. **Koeficienty konexe** $\Gamma^\rho_{\nu\mu} \in \mathcal{F}(M)$ vůči zvolenému reperu (e_1, \dots, e_n) definujeme předpisem

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu}e_\rho := \nabla_\mu e_\nu, \quad \text{kde } \nabla_\mu := \nabla_{e_\mu}.$$

Speciálně koeficienty konexe vůči souřadnicovému reperu $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ nazýváme **Christoffelovy symboly 2. druhu**.

Transformací souřadnic lze snadno zjistit, že koeficienty konexe se netransformují jako složky tenzorového pole, tudíž se nemůže jednat o komponenty žádného tenzorové pole typu $\binom{1}{2}$.

Využijeme-li axiomy kovariantní derivace, najdeme vztah pro kovariantní derivaci koreperových polí e^μ :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(e^\nu(e_\rho)) &= \nabla_\mu(C(e^\nu \otimes e_\rho)) = (\nabla_\mu e^\nu)(e_\rho) + e^\nu(\nabla_\mu(e_\rho)) = (\nabla_\mu e^\nu)_\rho + \Gamma^\nu_{\rho\mu} \\ &= \partial_\mu(\delta^\nu_\rho) = 0 \\ &\Rightarrow \nabla_\mu e^\nu = \Gamma^\nu_{\rho\mu}e^\rho. \end{aligned}$$

Ze znalosti působení kovariantní derivace na reperová a koreperová pole už jsme schopni pomocí Leibnitzova pravidla a $\mathcal{F}(M)$ -linearity napočítat kovariantní derivaci libovolného tenzorového pole $A \in \mathcal{T}_q^p(M)$ ve směru libovolného vektorového pole $W \in \mathcal{T}_0^1(M)$:

$$(\nabla_WA)_{\rho\cdots\sigma}^{\mu\cdots\nu} = W^\kappa A_{\rho\cdots\sigma,\kappa}^{\mu\cdots\nu} + W^\kappa \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu A_{\rho\cdots\sigma}^{\lambda\cdots\nu} + \cdots + W^\kappa \Gamma_{\lambda\kappa}^\nu A_{\rho\cdots\sigma}^{\mu\cdots\lambda} - W^\kappa \Gamma_{\rho\kappa}^\lambda A_{\lambda\cdots\sigma}^{\mu\cdots\nu} \cdots - W^\kappa \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda A_{\rho\cdots\lambda}^{\mu\cdots\nu}. \quad (4)$$

Afnní konexe je tedy na varietě jednoznačně zadána sadou koeficientů konexe.

Pokud máme na varietě kromě afinní konexe definovanou i metriku, to jest máme varietu (M, g, ∇) , zavádíme **Christoffelovy symboly 1. druhu** $\Gamma_{\mu\nu\rho} \in \mathcal{F}(M)$ vztahem $\Gamma_{\mu\nu\rho} := g_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}$.

Definice 1.7 Necht (M, ∇) je varieta se zavedenou afinní konexí. Definujeme tenzorovou operaci **kovariantní gradient** $\nabla : \mathcal{T}_q^p(M) \rightarrow \mathcal{T}_{q+1}^p(M)$ předpisem

$$\forall A \in \mathcal{T}_q^p(M) \quad (\nabla A)(V, \dots, U, W; \alpha, \dots, \beta) := (\nabla_WA)(V, \dots, U; \alpha, \dots, \beta).$$

V komponentech vypadá operace kovariantního gradientu následovně:

$$A_{\rho\cdots\sigma;\kappa}^{\mu\cdots\nu}{}^2 = A_{\rho\cdots\sigma,\kappa}^{\mu\cdots\nu} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu A_{\rho\cdots\sigma}^{\lambda\cdots\nu} + \cdots + \Gamma_{\lambda\kappa}^\nu A_{\rho\cdots\sigma}^{\mu\cdots\lambda} - \Gamma_{\rho\kappa}^\lambda A_{\lambda\cdots\sigma}^{\mu\cdots\nu} \cdots - \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda A_{\rho\cdots\lambda}^{\mu\cdots\nu}. \quad (5)$$

Kovariantní gradient lze chápat jako kovariantní derivaci v obecném směru, což ilustruje následující vztah:

$$\forall W \in \mathcal{T}_0^1(M) \quad (\nabla_WA)_{\rho\cdots\sigma}^{\mu\cdots\nu} = W^\kappa A_{\rho\cdots\sigma;\kappa}^{\mu\cdots\nu}. \quad (6)$$

² $A_{\rho\cdots\sigma;\kappa}^{\mu\cdots\nu} := (\nabla A)_{\rho\cdots\sigma;\kappa}^{\mu\cdots\nu} \equiv (\nabla_\kappa A)_{\rho\cdots\sigma}^{\mu\cdots\nu}$.

1.2.1 Paralelní přenos

Na obecné varietě M není možné porovnávat vektory v různých bodech $P, Q \in M$ mezi sebou, každý totiž leží v jiném vektorovém prostoru $T_P M$, respektive $T_Q M$. Pokud však na varietě pevně určíme $\forall P, Q \in M$ bijekci $\Upsilon_{P,Q} : T_P M \rightarrow T_Q M$, můžeme už vektory z jednoho bodu přesouvat do jiného a tam je pak porovnat. Přírozeným způsobem, jak tyto přesuny vektorů provádět, je takzvaný paralelní přenos, který nyní definujeme.

Definice 1.8 Na varietě M je zadané pravidlo **paralelního přenosu** právě tehdy, když je pro libovolnou křivku γ na M a dva libovolné body $P, Q \in \text{Ran}(\gamma)$ jednoznačně zadaná bijekce $\Upsilon_{P,Q}^\gamma : T_P M \rightarrow T_Q M$ splňující podmínky:

1. je lineární,
2. $\forall P, Q, R \in \text{Ran}(\gamma) \subset M \quad \Upsilon_{P,Q}^\gamma \circ \Upsilon_{R,P}^\gamma = \Upsilon_{R,Q}^\gamma$.

Definice 1.9 Nechť M je varieta se zadaným pravidlem paralelního přenosu, γ je křivka na M a V je hladké vektorové pole definované na $\text{Ran}(\gamma)$, pak **absolutní derivaci** vektorového pole V ve směru křivky γ v bodě $P \in \text{Ran}(\gamma)$ definujeme předpisem

$$\frac{DV(t)}{Dt} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V_\varepsilon^\parallel(t) - V(t)}{\varepsilon},$$

kde $V(t) := V(\gamma(t))$, $V_\varepsilon^\parallel(t) := \Upsilon_{\gamma(t+\varepsilon), \gamma(t)}^\gamma V(t + \varepsilon)$. Navíc řekneme, že vektorové pole V je na křivce γ **autoparalelní** právě tehdy, když $\frac{DV(t)}{Dt} = 0$.

Autoparalelní vektorové pole lze chápat tak, že jeho hodnoty na celé křivce vznikly z vektoru v jednom bodě, který se postupně paralelně přenesl do všech bodů křivky. Absolutní derivace tedy kvantifikuje odchylku od autoparalelnosti.

Ukážeme, že pokud na varietě zavedeme afinní konexi, zadáme tím i pravidlo pro paralelní přenos. Nechť (M, ∇) je varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$ se zavedenou afinní konexí, γ je libovolná křivka na M a $t_1, t_2 \in \text{Dom}(\gamma)$, pak lze pomocí kovariantní derivace zkonstruovat paralelní přenos libovolného vektoru $v \in T_P M$ z bodu $P := \gamma(t_1)$ do bodu $Q := \gamma(t_2)$ po křivce γ následujícím způsobem:

1. Absolutní derivaci ve směru křivky γ na $\text{Ran}(\gamma)$ položíme rovnou kovariantní derivaci ve směru $\dot{\gamma}$, to jest $\frac{D}{Dt} := \nabla_{\dot{\gamma}}$.
2. Vyřešíme rovnici pro neznámé vektorové pole $V \in \mathcal{T}_0^1(M)$,

$$\frac{DV(t)}{Dt} \equiv \nabla_{\dot{\gamma}} V = 0, \quad \text{s počáteční podmínkou } V(t_1) = v.$$

V souřadnicích se jedná o soustavu n obyčejných lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s nekonzstantními koeficienty,

$$\dot{V}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{\gamma}^\nu V^\rho = 0, \quad \text{s počáteční podmínkou } V^\mu(t_1) = v^\mu,$$

kde $V^\mu(t) := V^\mu(\gamma(t))$, $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(t) := \Gamma^\mu_{\nu\rho}(\gamma(t))$.

3. Paralelně přenesený vektor $\Upsilon_{P,Q}^\gamma v$ pak dostaneme jako vyčíslení výsledného vektorové pole v příslušném bodě, to jest $\Upsilon_{P,Q}^\gamma v := V(t_2)$.

Snadno se ověří, že tato konstrukce opravdu splňuje definici paralelního přenosu.

Analogicky lze definovat a zkonstruovat z kovariantní derivace paralelní přenos tenzoru libovolného řádu.

1.2.2 RLC konexe

Ačkoliv jsou afinní konexe a metrika dvě na sobě obecně nezávislé struktury, za určitých podmínek metrika jednoznačně určuje speciální afinní konexi, jíž se říká Riemannova, nebo také Levi-Civitova konexe, zkráceně RLC konexe. Ukážeme si, jak se tato význačná konexe z metriky získá.

Definice 1.10 *Nechť (M, ∇) je varieta se zavedenou afinní konexí. Zobrazení $T : \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(M)$ definované předpisem*

$$\forall U, V \in \mathcal{T}_0^1(M) \quad T(U, V) := \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]$$

nazveme **torzí**.

Poznámka Symbol $[U, V]$ pro libovolné $U, V \in \mathcal{T}_0^1(M)$ definujeme působením na libovolnou $f \in \mathcal{F}(M)$ vztahem $[U, V]f = U(Vf) - V(Uf)$. Platí, že vektorový prostor $\mathcal{T}_0^1(M)$ s takto definovanou Lieovou závorkou tvoří ∞ -rozměrnou Lieovu algebru, to mimo jiné znamená $[U, V] \in \mathcal{T}_0^1(M)$.

Poznámka Pro libovolné tenzorové pole $A \in \mathcal{T}_q^p(M)$ zavádíme značení

$$A^{\mu \dots \nu}_{(\rho \dots \sigma)} := \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} A^{\mu \dots \nu}_{\pi(\rho) \dots \pi(\sigma)},$$

$$A^{\mu \dots \nu}_{[\rho \dots \sigma]} := \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} \text{sgn } \pi A^{\mu \dots \nu}_{\pi(\rho) \dots \pi(\sigma)},$$

kde S_q označuje množinu všech permutací q prvků, tzn. $\pi \in S_q : \hat{n} \rightarrow \hat{n}$ je bijekce. Analogické značení zavádíme i pro horní indexy.

Afinní konexe tedy na varietě indukují zobrazení torze T s následujícími vlastnostmi:

- (I) T je $\mathcal{F}(M)$ -bilineární.
- (II) T definuje na M tenzorové pole typu $\binom{1}{2}$, které se nazývá tenzor torze a jehož komponenty v souřadnicovém reperu jsou $T^\mu_{\nu\rho} = dx^\mu(T(\partial_\nu, \partial_\rho))$.
- (III) Tenzor torze je antisymetrický v dolních indexech, to jest $T^\mu_{\nu\rho} = T^\mu_{[\nu\rho]}$.
- (IV) $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{(\nu\rho)} - \frac{1}{2}T^\mu_{\nu\rho}$, ekvivalentně $T^\mu_{\nu\rho} = -2\Gamma^\mu_{[\nu\rho]}$.

Požadavek nulovosti torze ($T = 0$) je dle vlastnosti (IV) ekvivalentní tomu, že Christoffelovy symboly druhého druhu jsou symetrické v dolních indexech. Konexi, která má nulovou torzi, se proto říká **symetrická**.

Definice 1.11 *Nechť (M, g, ∇) je riemannovská varieta se zavedenou afinní konexí. Řekneme, že afinní konexe ∇ je **kompatibilní s metrikou**, nebo zkráceně **metrická** právě tehdy, když $\nabla g = 0$.*

Metrická konexe má následující vlastnosti:

- (I) Při paralelním přenosu zkonstruovaném z kovariantní derivace se zachovávají úhly mezi přenášenými vektory a také jejich velikosti, to jest

$$(\forall U, V, W \in \mathcal{T}_0^1(M))(\nabla_W U = \nabla_W V = 0 \Rightarrow \nabla_W(g(U, V)) = 0).$$

- (II) $\nabla g^{-1} = 0$.

- (III) Zvyšování a snižování indexů komutuje s kovariantním gradientem,

$$\forall A \in \mathcal{T}_q^p(M) \quad \nabla(\wedge A) = \wedge(\nabla A), \text{ respektive } \nabla(\vee A) = \vee(\nabla A).$$

- (IV) Pro její Christoffelovy symboly 2. druhu platí

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}) - \frac{1}{2}(T_{\nu\rho}^{\mu} + T_{\rho\nu}^{\mu} + T^{\mu}_{\nu\rho}).$$

Definice 1.12 *Nechť (M, g, ∇) je riemannovská varieta se zavedenou afinní konexí. Právě tehdy když je afinní konexe ∇ metrická a symetrická, nazýváme ji **RLC konexí**.*

Věta 1.13 *Nechť (M, g) je riemannovská varieta. Pak na M existuje právě jedna RLC konexe, jež je určena vztahem*

$$\forall U, V, W \in \mathcal{T}_0^1(M) \quad g(\nabla_W U, V) = \frac{1}{2}(W(g(U, V)) + U(g(V, W)) - V(g(W, U)) - g(U, [W, V]) - g(V, [U, W]) + g(W, [V, U])).$$

Důkaz. Například v [6]. □

Pokud dosadíme do tvrzení věty 1.13 za U, V, W souřadnicová reperová pole, dostáváme vztah pro Christoffelovy symboly:

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\rho} + g_{\sigma\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\sigma}). \quad (7)$$

Naprosto stejný vztah jsme mohli dostat i z vlastnosti (IV) metrické konexe tím, že aplikujeme požadavek nulovosti torze.

1.3 Geodetiky

Na varietě (M, ∇) lze zkonstruovat jisté speciální křivky tak, že ve vybraném bodě na varietě zvolíme vektor a na něj pak iterativně aplikujeme infinitesimální paralelní přenos. Těmito křivkám se říká geodetiky. Pokud paralelní přenos interpretujeme jako zachovávání rovnoběžného směru, pak je geodetika křivka, která směřuje stále „rovně“ a lze ji tedy chápat jako zobecnění pojmu přímka y Eukleidovského prostoru na libovolnou varietu se zavedenou afinní konexí. Této úvaze odpovídá následující formální definice geodetiky.

Definice 1.14 *Nechť (M, ∇) je varieta se zavedenou afinní konexí, křivku γ nazýváme **geodetika** právě tehdy, když existuje $f \in \mathcal{F}(\text{Ran}(\gamma))$ tak, že platí $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = f\dot{\gamma}$. Speciálně pak křivku γ splňující $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ nazýváme **afinně parametrizovaná geodetika**.*

Poznámka Libovolnou geodetiku lze vždy přeparametrizovat tak, aby byla afinní. Proto pokud není explicitně řečeno jinak, budeme uvažovat pouze afinně parametrizované geodetiky.

Rovnici $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ pro neznámou křivku γ se říká rovnice geodetiky a v lokálních souřadnicích vypadá takto:

$$\ddot{\gamma}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{\gamma}^\nu\dot{\gamma}^\rho = 0. \quad (8)$$

Abychom našli jednoznačné řešení této soustavy n diferenciálních rovnic a tím získali tvar geodetiky, je třeba zadat počáteční nebo okrajové podmínky:

1. bod $P \in M$ a v něm tečný vektor $v \in T_P M$ pro fixní hodnotu parametru t , to jest počáteční podmínky $\gamma(t_0) = P, \dot{\gamma}(t_0) = v$,
2. dva body $P, Q \in M$ pro dvě různé hodnoty parametru t , to jest okrajové podmínky $\gamma(t_1) = P, \gamma(t_2) = Q$.

Poznámka Geodetiku zadanou počátečními podmínkami $\gamma(0) = P, \dot{\gamma}(0) = v$ budeme označovat symbolem $\gamma_{P,v}$.

Definice 1.15 *Nechť (M, ∇) je varieta se zavedenou afinní konexí a $P \in M$. Definujeme exponenciální zobrazení se středem v bodě P , $\exp^P : T_P M \rightarrow M$, předpisem*

$$\forall v \in T_P M \quad \exp^P(v) := \gamma_{P,v}(1).$$

Věta 1.16 *Nechť (M, ∇) je varieta se zavedenou afinní konexí a \exp^P je exponenciální zobrazení se středem v bodě $P \in M$. Pak platí:*

$$(\exists V \subset T_P M \text{ okolí } 0, \exists U \subset M \text{ okolí } P)(\exp^P : V^\circ \rightarrow U^\circ \text{ je difeomorfismus}).$$

Důkaz. Například v [7]. □

V důsledku této věty můžeme na varietě (M, ∇) dimenze $n \in \mathbb{N}$ zavést následující speciální souřadnice (U, Φ) . Vybereme na $T_P M$ libovolnou ortonormální bázi (e_1, \dots, e_n) a definujeme hladkou bijekci $E : \mathbb{R}^n \rightarrow T_P M$ vztahem $E(x^1, \dots, x^n) := x^\mu e_\mu$. Položíme U rovno okolí bodu P z věty 1.16 a $\Phi := E^{-1} \circ (\exp^P)^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Takto zkonstruované souřadnice (U, Φ) nazýváme **Riemannovy normální souřadnice** se středem v bodě P .

Poznámka Složky souřadnicového zobrazení Φ v Riemannových normálních souřadnicích se obvykle značí se stříškou, například $x^{\hat{\mu}}$. Stejně tak se se stříškou značí i komponenty tenzorových polí a jiných objektů vzhledem k těmto souřadnicím, například $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$.

Věta 1.17 *Nechť (M, g, ∇) je riemannovská varieta s RLC konexí³, $P \in M$ a (U, Φ) jsou Riemannovy normální souřadnice se středem v bodě $P \in M$. Pak platí:*

$$\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}\hat{\rho}}(P) = 0, \quad g_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}}(P) = 0.$$

Důkaz. Například v [6]. □

Nechť (M, ∇) je varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$ se zavedenou afinní konexí, pak má geodetika $\gamma_{P,v}$ následující vlastnosti:

$$(I) \quad \forall b, t \in \mathbb{R} \quad \gamma_{P,v}(bt) = \gamma_{P,bv}(t).$$

³Na nulovost Christoffelových symbolů 2. druhu stačí symetrická konexe.

$$(II) \exp^P(0) = \gamma_{P,0}(1) = P.$$

$$(III) \gamma_{P,v}(t) = \gamma_{P,vt}(1) = \exp^P(vt).$$

(IV) Necht' (U, Φ) jsou Riemannovy normální souřadnice se středem v $P \in M$ a vektor $v \in T_P M$, jenž lze v souřadnicích zapsat jako $v = v^{\hat{\mu}} e_{\hat{\mu}}$. Pak platí:

$$\Phi(\gamma_{P,v}(t)) = E^{-1}(vt) = (v^{\hat{1}}t, \dots, v^{\hat{n}}t) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{speciálně } \Phi(P) = 0.$$

Vlastnost (IV) znamená, že Riemannovy souřadnice zobrazují geodetický pohyb po varietě M na rovnoměrný přímočarý pohyb v \mathbb{R}^n .

1.4 Křivost

Křivost je názorně představitelný pojem pro křivky a plochy. K matematicky korektnímu zavedení tohoto pojmu v obecném případě je však potřeba kovariantní derivace, musíme mít tedy na varietě zavedenou afinní konexi, která pak na varietě indukuje mimo tenzoru torze také Riemannův tenzor křivosti, jenž udává míru zakřivení variety.

Definice 1.18 Necht' (M, ∇) je varieta se zavedenou afinní konexí a $U, V \in \mathcal{T}_0^1(M)$. **Operátorem křivosti** $R(U, V) : \mathcal{T}_q^p(M) \rightarrow \mathcal{T}_q^p(M)$ nazveme výraz

$$R(U, V) := [\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U, V]}.$$

Operátor křivosti na M definuje tenzorové pole typu $\binom{1}{3}$, jehož komponenty vůči souřadnicovému reperu jsou

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = dx^\mu(R(\partial_\rho, \partial_\sigma)\partial_\nu). \quad (9)$$

Toto tenzorové pole se nazývá **Riemannův tenzor křivosti**. Jednoduchým dosazením do výrazu (9) lze složky Riemannova tenzoru křivosti zapsat pomocí Christoffelových symbolů 2. druhu:

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma, \rho} - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho, \sigma} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma} \Gamma^\mu{}_{\kappa\rho} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\rho} \Gamma^\mu{}_{\kappa\sigma}. \quad (10)$$

Ze vztahu (9) lze snadno vidět, že platí

$$R(\partial_\rho, \partial_\sigma)\partial_\nu = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\partial_\mu, \quad (11)$$

odtud a z toho, že souřadnicová reperová pole komutují, $[\partial_\rho, \partial_\sigma] = 0$, odvodíme působení operátoru křivosti na souřadnicové koreperové pole:

$$\begin{aligned} R(\partial_\rho, \partial_\sigma)(dx^\mu(\partial_\nu)) &= R(\partial_\rho, \partial_\sigma)(C(dx^\mu \otimes \partial_\nu)) = (R(\partial_\rho, \partial_\sigma)dx^\mu)_\nu + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \\ &= R(\partial_\rho, \partial_\sigma)(\delta_\nu^\mu) = 0 \\ &\Rightarrow R(\partial_\rho, \partial_\sigma)dx^\mu = -R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}dx^\nu. \end{aligned} \quad (12)$$

Využitím Leibnitzova pravidla a vztahů (11), (12) pak získáváme velmi užitečný vztah pro rozdíl druhých kovariantních derivací libovolného tenzorového pole $A \in \mathcal{T}_q^p(M)$, takzvanou **Ricciho identitu**:

$$A_{\kappa \dots \lambda; \mu\nu}^{\rho \dots \sigma} - A_{\kappa \dots \lambda; \nu\mu}^{\rho \dots \sigma} = A_{\zeta \dots \lambda}^{\rho \dots \sigma} R^\zeta{}_{\kappa\mu\nu} + \dots + A_{\kappa \dots \zeta}^{\rho \dots \sigma} R^\zeta{}_{\lambda\mu\nu} - A_{\kappa \dots \lambda}^{\zeta \dots \sigma} R^\rho{}_{\zeta\mu\nu} \dots - A_{\kappa \dots \lambda}^{\rho \dots \zeta} R^\sigma{}_{\zeta\mu\nu}. \quad (13)$$

Od této chvíle až do konce kapitoly se omezíme pouze na riemannovskou varietu (M, g) s RLC konexí.

Tenzor křivosti má pro libovolná vektorová pole $U, V, W, X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ následující symetrie:

$$(I) (\nabla R)(U, V, W, X)^4 = -(\nabla R)(U, V, X, W),$$

$$(II) (\nabla R)(U, V, W, X) = -(\nabla R)(V, U, W, X),$$

$$(III) (\nabla R)(U, V, W, X) + (\nabla R)(U, W, X, V) + (\nabla R)(U, X, V, W) = 0,$$

$$(IV) (\nabla R)(U, V, W, X) = (\nabla R)(W, X, U, V).$$

Symetrie (I) plyne přímo z definice operátoru křivosti, (II) a (III) plynou z metričnosti konexe a axiomů kovariantní derivace, poslední symetrii lze odvodit z předchozích. Vztah (III) se nazývá **první Bianchiho identita**. V souřadnicích lze tyto symetrie přepsat takto:

$$\begin{aligned} (I) R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\mu\nu\sigma\rho}, & (II) R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \\ (III) R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} &= 0, & (IV) R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\rho\sigma\mu\nu}. \end{aligned}$$

Souřadnicově vyjádření první Bianchiho identity můžeme za pomoci symetrie (I) a zvýšení indexu ekvivalentně přepsat do obvyklého tvaru

$$R^\mu{}_{[\nu\rho\sigma]} = 0. \quad (14)$$

Z Ricciho identity (13) a první Bianchiho identity lze odvodit důležitý vztah

$$R_{\mu\nu\rho\sigma;\kappa} + R_{\mu\nu\sigma\kappa;\rho} + R_{\mu\nu\kappa\rho;\sigma} = 0, \quad (15)$$

jenž se nazývá **druhá Bianchiho identita**⁵.

Jednoduchým důsledkem identity (14) je symetrie $R_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0$, tato symetrie spolu se symetriemi (I) a (II) tvoří nezávislé požadavky na komponenty Riemannova tenzoru křivosti. Pokud je $n \in \mathbb{N}$ dimenze variety M , tak z těchto symetrií plyne, že tenzor křivosti má pouze $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ nezávislých komponent⁶.

Z Riemannova tenzoru křivosti můžeme vytvořit následující kontrakce:

$$R^\rho{}_{\rho\mu\nu}, \quad R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad R^\rho{}_{\mu\nu\rho}.$$

Poslední dvě se díky antisymetrii liší pouze znaménkem a první je v RLC konexi nulová. Jediná zajímavá je tedy $R_{\mu\nu} := R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$, jedná se o složky tenzorového pole typu $\binom{0}{2}$, kterému se říká **Ricciho tenzor**. Tomuto tenzoru je možno zvýšit index a pak ho dále kontrahovat, dostáváme hladkou funkci $R := R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}R_{\nu\mu} = R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}$, která se nazývá **Ricciho skalár**.

⁴ $(\nabla R)(U, V, W, X) = g(U, R(W, X)V)$.

⁵Opět lze ekvivalentně přepsat do kompaktního tvaru $R^\mu{}_{\nu[\rho\sigma;\kappa]}$.

⁶Pro dimenzi prostoročasu, to jest $n = 4$, má tedy tenzor křivosti pouze 20 nezávislých komponent z celkových 256.

2 Obecná teorie relativity

V této kapitole budou zasazeny geometrické pojmy z předešlé kapitoly do kontextu obecné relativity a navíc bude představena fundamentální rovnice celé teorie, Einsteinovy polní rovnice.

V celé práci, pokud nebude řečeno jinak, budeme používat takzvané geometrizované jednotky, to jest pokládáme $c = 1$, $G = 1$.

2.1 Relativita jazykem diferenciální geometrie

Prostorčas v obecné teorii relativity interpretujeme jako riemannovskou varietu (M, g) dimenze 4, automaticky se na ní předpokládá RLC konexe. Metrika prostoročasu má indefinitní **lorentzovskou**⁷ signaturu $(3, 1)$. Bodům této variety (prostoročasu) se říká **události**.

Nechť P je nějaká událost a $v \in T_P M$, o vektoru v řekneme,

$$\text{že je } \begin{cases} \text{časupodobný, pokud } g(v, v) < 0, \\ \text{světlu podobný, pokud } g(v, v) = 0, \\ \text{prostorupodobný, pokud } g(v, v) > 0. \end{cases}$$

Geodetiky v obecné relativitě můžeme chápat následujícími způsoby:

1. Jak již bylo řečeno v předešlé kapitole, geodetika je **světočára**, to jest křivka na prostoročasu, podél níž se její tečný vektor přenáší paralelně. To jednoduše znamená, že splňuje rovnici (8).
2. Jak bude podrobněji ukázáno v kapitole 4, geodetiky jsou křivky, jež extremalizují funkcionál délky křivky mezi dvěma pevnými body prostoročasu.
3. Je přirozené chápat zrychlení pohybu po světočáře γ jako absolutní derivaci vektorového pole rychlosti $\dot{\gamma}$, ve směru γ , což ve smyslu kovariantní derivace znamená $a = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$. Geodetiky jsou tedy křivky, po nichž se realizuje rovnoměrný přímočarý pohyb.

Ukážeme, jak se mění prostoročasový charakter tečného vektoru ke geodetice:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})) = \nabla_{\dot{\gamma}}(CC(g \otimes \dot{\gamma} \otimes \dot{\gamma})) = (\nabla_{\dot{\gamma}}g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0. \quad (16)$$

V poslední rovnosti jsme využili metričnost konexe a rovnici geodetiky. Ukázali jsme, že tečný vektor ke geodetice má stále stejný prostoročasový charakter. Má tedy smysl mluvit o času-, prostoru-, či světlu podobné geodetice. Navíc platí, že veličina

$$\epsilon := -g\left(\frac{d\gamma}{d\lambda}, \frac{d\gamma}{d\lambda}\right) \quad (17)$$

je podél geodetického pohybu konstantní. Je zvykem volit normalizaci parametru λ tak, že $\epsilon \in \{1, 0, -1\}$.

Časupodobné geodetiky mají význam trajektorií volných⁸ testovacích částic s nenulovou hmotností m . Pro časupodobné geodetiky platí $\epsilon = 1$, z toho již plyne, že parametr λ je vlastní

⁷Metrika variety dimenze $n \in \mathbb{N}$, která má signaturu $(n-1, 1)$ se nazývá lorentzovská.

⁸V obecné relativitě rozumíme volnými částicemi takové, které nepůsobí žádné vnější pole, to jest jsou podrobeny pouze gravitační interakci.

čas τ částice, vektorovým polem rychlosti $\dot{\gamma}$ je pak přímo čtyřrychlost $u = \frac{d\gamma}{d\tau}$ a lze tedy pomoci ní, popřípadě čtyřhybnosti $p = mu$ ekvivalentně přepsat rovnici geodetiky:

$$\nabla_u u = 0, \quad \nabla_p p = 0. \quad (18)$$

Pro světlupodobné geodetiky je vlastní čas mezi libovolnými dvěma událostmi nula, a τ tedy není vhodným parametrem. Normalizace $\epsilon = 0$ neurčuje parametr λ jednoznačně, je však zvykem ho volit tak, aby platilo $p = \frac{d\gamma}{d\lambda}$. Světlupodobné geodetiky popisují trajektorie částic s nulovou hmotností, jako jsou fotony.

Z normalizace prostorupodobných geodetik $\epsilon = -1$ plyne, že parametr λ je vlastní délka ℓ . Tyto geodetiky neodpovídají trajektorii žádných skutečných částic a v této práci se jimi nebudeme dále zabývat.

Mějme nyní na prostoročasu Riemannovy normální souřadnice se středem v libovolné události P , (U, x^μ) . Komponenty metrického tenzoru jsou hladké funkce na U , a můžeme je tedy rozvíjet do Taylorova rozvoje se středem v bodě P .

$$\begin{aligned} \forall Q \in U \quad g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(Q) &= g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(P) + g_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}}(P)(x^{\hat{\rho}}(Q) - x^{\hat{\rho}}(P)) + \\ &+ \frac{1}{2}g_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}}(P)(x^{\hat{\rho}}(Q) - x^{\hat{\rho}}(P))(x^{\hat{\sigma}}(Q) - x^{\hat{\sigma}}(P)) + O(x^3) = \\ &= \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\hat{\mu}\hat{\nu},\hat{\rho}\hat{\sigma}}(P)x^{\hat{\rho}}(Q)x^{\hat{\sigma}}(Q) + O(x^3). \end{aligned} \quad (19)$$

Při úpravách jsme využili tvrzení věty 1.17 a vlastnost (IV) geodetiky $\gamma_{P,v}$. Ukázali jsme, že libovolné události P můžeme přiřadit význačný souřadnicový systém, v němž je metrika v P přesně Minkowského. Jak lze vidět z relace (19), obecně toto platí pouze v P a nemůžeme Minkowského metriku rozšířit ani na libovolně malé okolí tohoto bodu. Těmto souřadnicovým systémům se říká **lokálně inerciální systémy**, zkráceně **LIS**.

2.2 Einsteinovy polní rovnice

Gravitace je jediná ze čtyř přírodních interakcí, která je univerzální, to jest působí na všechno, co má nějakou energii, stejným způsobem. Tato univerzalita vedla Einsteina k tomu, aby ji interpretoval jako součást prostoročasu namísto klasické Newtonovy představy silového pole na něm definovaného. Einsteinovy rovnice popisují, jak souvisí rozložení energie a hybnosti v prostoročasu s jeho metrikou.

Při hledání Einsteinových rovnic požadujeme, aby v newtonovské limitě odpovídaly výsledku klasické mechaniky, Poissonově rovnici pro Newtonův gravitační potenciál:

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho. \quad (20)$$

Z newtonovské limity rovnice geodetiky, viz [8], plyne $g_{00} = -1 - 2\Phi$, v tomto smyslu chápeme metriku jako relativistickou analogii k Newtonovu gravitačnímu potenciálu. Přirozené relativistické zobecnění hustoty hmoty ρ najdeme v podobě symetrického tenzorového pole $T \in \mathcal{T}_0^2(M)$, které nazýváme **tenzor energie a hybnosti**. Dle principu obecné kovariance a předchozích úvah budeme relativistické zobecnění rovnice (20), Einsteinovy polní rovnice, hledat v tenzorovém tvaru

$$F(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\rho}, g_{\mu\nu,\rho\sigma}) \propto T_{\mu\nu}, \quad (21)$$

kde $F(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\rho}, g_{\mu\nu,\rho\sigma})$ je tenzorové pole typu $\binom{0}{2}$ na prostoročasu, jež je nějakým způsobem závislé na metrice a jejích směrových derivacích až do druhého řádu. Po tenzoru F se požaduje, aby byl takzvaně „invariantní co do formy“, to jest, aby F záviselo na svých proměnných ve všech souřadnicových systémech stejně. Navíc požadujeme, aby F záviselo na druhých parciálních derivacích metriky pouze lineárně.

Z výše zmíněných požadavků na F a toho, jak vypadají parciální derivace metriky v LISu, plyne, že F závisí pouze na metrice g a lineárně na Riemannově tenzoru křivosti R , to znamená, že F je nějakou lineární kombinací tenzorů $g_{\mu\nu}$, $Rg_{\mu\nu}$ a $R_{\mu\nu}$.

Zároveň chceme, aby přímo z Einsteinových rovnic plynul zákon zachování energie a hybnosti $T_{\mu\nu};^{\mu} = 0$. Pokud dvakrát zkontrahujeme vztah (15) a využijeme vlastnosti (III) metrické konexe, viz odstavec pod definicí 1.11, dostáváme:

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right);^{\mu} = 0. \quad (22)$$

Označíme-li $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, definujeme tím symetrické tenzorové pole $G \in \mathcal{T}_2^0(M)$, které splňuje $G_{\mu\nu};^{\mu} = 0$. Říkáme mu **Einsteinův tenzor**.

Ukazuje se, že rovnice vyhovující všem zde uvedeným požadavkům a dosavadním experimentům jsou tyto:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (23)$$

Člen $\Lambda g_{\mu\nu}$, kde Λ je **kosmologická konstanta**, se objevuje v rovnicích z předpokladu nenulové hustoty energie vakua. Pro podrobnější odvození Einsteinových polních rovnic viz [8].

Pomocí zvýšení indexu a následné kontrakce dostáváme z rovnice (23):

$$g^{\nu\mu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right) = 8\pi g^{\nu\mu} T_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad R = 4\Lambda - 8\pi T.^9 \quad (24)$$

Z tohoto vztahu pak získáváme ekvivalentní podobu Einsteinových polních rovnic:

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right). \quad (25)$$

Často nás zajímají Einsteinovy rovnice ve vakuu, to jest pro $T_{\mu\nu} = 0$:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (26)$$

nebo ekvivalentně pomocí (25)

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (27)$$

⁹ $T := g^{\nu\mu}T_{\mu\nu} \equiv T^{\nu}_{\nu}$

3 Zákony zachování v obecné teorii relativity

Jako v každé fyzikální teorii i v obecné teorii relativity hrají důležitou roli zachovávající se veličiny a symetrie, které usnadňují řešení fyzikálních rovnic. Jejich důležitost je v obecné relativitě kvůli nelinearitě Einsteinových rovnic o to větší. V této kapitole budou popsány základní nástroje a postupy, které se ke studiu zákonů zachování využívají.

3.1 Lieova derivace

Geometrickým objektem, který se pro studium symetrií využívá je Lieova derivace, o které pojednává tato podkapitola.

Definice 3.1 *Nechť M je varieta, $V \in \mathcal{T}_0^1(M)$ a Φ_t jeho příslušný tok, pak zobrazení $\Phi_t^* : \mathcal{T}_q^p(M) \rightarrow \mathcal{T}_q^p(M)$ nazveme **Lieův přenos**.*

Poznámka Pokud tenzorové pole $A \in \mathcal{T}_q^p(M)$ splňuje $\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_t^* A = A$, říkáme, že je **invariantní vůči vektorovému poli V** , jež tok Φ_t generuje.

Definice 3.2 *Nechť M je varieta. Lieovou derivací tenzorového pole $A \in \mathcal{T}_q^p(M)$ ve směru vektorového pole $V \in \mathcal{T}_0^1(M)$ nazveme výraz $\mathcal{L}_V A$ definovaný vztahem*

$$\mathcal{L}_V A := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t^* A. \quad (28)$$

Poznámka Platí, že A je invariantní vůči $V \Leftrightarrow \mathcal{L}_V A = 0$.

Přímo z definice Lieovy derivace ve směru V plyne pro $|\varepsilon| \ll 1$:

$$\Phi_\varepsilon^* A = A + \varepsilon \mathcal{L}_V A + O(\varepsilon^2). \quad (29)$$

Lieova derivace stejně jako derivace kovariantní je tenzorová operace zachovávající stupeň tenzoru, je \mathbb{R} -lineární, na tenzorovém součinu se chová dle Leibnitzova pravidla a komutuje s kontrakcemi.

V souřadnicích vypadá Lieova derivace libovolného tenzorového pole $A \in \mathcal{T}_q^p(M)$ ve směru vektorového pole $V \in \mathcal{T}_0^1(M)$ takto:

$$(\mathcal{L}_V A)^{\mu \dots \nu}_{\rho \dots \sigma} = V^\kappa A^{\mu \dots \nu}_{\rho \dots \sigma; \kappa} + V^\kappa_{; \rho} A^{\mu \dots \nu}_{\kappa \dots \sigma} + \dots + V^\kappa_{; \sigma} A^{\mu \dots \nu}_{\rho \dots \kappa} - V^\mu_{; \kappa} A^{\kappa \dots \nu}_{\rho \dots \sigma} \dots - V^\nu_{; \kappa} A^{\mu \dots \kappa}_{\rho \dots \sigma}. \quad (30)$$

Speciálně pak pro $f \in \mathcal{F}(M)$ $\mathcal{L}_V f = Vf$.

Velmi častý je bezsouřadnicový zápis Lieovy derivace vektorového pole pomocí Lieovy závorky $\mathcal{L}_V W = [V, W]$.

Uvažujme nyní varietu (M, ∇) se zavedenou symetrickou konexí. Pokud bychom v souřadnicovém zápisu Lieovy derivace (30) místo všech „čárek“ psali „středníky“ a rozepsali bychom výrazy se středníky dle souřadnicového zápisu kovariantní derivace (4), dostali bychom po odečtení všech členů s Christoffelovými symboly stejný výraz, jako je na pravé straně vztahu (30). Tímto postupem získáváme alternativní souřadnicové vyjádření Lieovy derivace:

$$(\mathcal{L}_V A)^{\mu \dots \nu}_{\rho \dots \sigma} = V^\kappa A^{\mu \dots \nu}_{\rho \dots \sigma; \kappa} + V^\kappa_{; \rho} A^{\mu \dots \nu}_{\kappa \dots \sigma} + \dots + V^\kappa_{; \sigma} A^{\mu \dots \nu}_{\rho \dots \kappa} - V^\mu_{; \kappa} A^{\kappa \dots \nu}_{\rho \dots \sigma} \dots - V^\nu_{; \kappa} A^{\mu \dots \kappa}_{\rho \dots \sigma}. \quad (31)$$

Nechť $U, V \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Přímo ze vztahu (31) plyne $\mathcal{L}_V U = \nabla_V U - \nabla_U V$. Odtud, z metričnosti konexe a vlastností Lieovy a kovariantní derivace lze snadno ukázat platnost tvrzení:

$$\forall U, V, W \in \mathcal{T}_0^1(M) \quad (\mathcal{L}_V g)(U, W) = g(\nabla_U V, W) + g(\nabla_W V, U). \quad (32)$$

Poznámka Lieova derivace se vůči algebraickým operacím ve „směrovém argumentu“ chová takto:

$$\forall V, W \in \mathcal{T}_0^1(M), \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}_{V+\lambda W} = \mathcal{L}_V + \lambda \mathcal{L}_W, \quad \mathcal{L}_{[V,W]} = [\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W]. \quad (33)$$

Neplatí však $\mathcal{F}(M)$ -linearita jako u kovariantní derivace, ale pouze linearita vůči \mathbb{R} .

3.2 Killingova vektorová pole

Killingova vektorová pole představují význačné „směry“ na varietě, podél nichž se její geometrie v jistém smyslu nemění. V této podkapitole ukážeme, jak tyto směry nalézt a co přesně znamenají, že se podél nich geometrie nemění.

Definice 3.3 *Nechť M je varieta a $A \in \mathcal{T}_q^p(M)$, difeomorfismus $\Phi : M \rightarrow M$ nazveme **symetrií tenzorového pole A právě tehdy, když $\Phi^*A = A$. Speciálně pro riemannovskou varietu symetrie metriky nazýváme **izometrie**.***

V relativitě jsou ze všech symetrií nejdůležitější spojitě jednoparametrické grupy izometrií, proto se ve zbytku kapitoly omezíme pouze na ně. Až do konce podkapitoly tedy pracujeme s riemannovskou varietou (M, g) dimenze $n \in \mathbb{N}$ s RLC konexí.

Předpokládejme, že máme spojitou jednoparametrickou grupu izometrií Φ_t , to jest existuje nějaký otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahující nulu tak, že $\forall t \in I \quad \Phi_t^*g = g$. Vztah mezi vektorovými poli a toky je vzájemně jednoznačný, díky tomu lze najít právě jedno vektorové pole $\xi \in \mathcal{T}_0^1(M)$, které generuje grupu Φ_t . Z poznámky pod definicí Lieovy derivace (28) pak plyne

$$\mathcal{L}_\xi g = 0, \quad (34)$$

což lze v souřadnicovém zápisu pomocí relace (30), respektive (31), zapsat takto:

$$\xi^\rho g_{\mu\nu,\rho} + \xi^\rho_{,\mu} g_{\rho\nu} + \xi^\rho_{,\nu} g_{\mu\rho} = 0, \quad \text{respektive} \quad \xi_{(\mu;\nu)} = 0. \quad (35)$$

Pro získání druhé rovnice jsme využili metričnost konexe a vlastnost (III) metrické konexe, viz odstavec pod definicí 1.11. Těmito rovnicím se říká **Killingovy rovnice** a $\xi \in \mathcal{T}_0^1(M)$, která jsou řešením těchto rovnic, se nazývají **Killingova vektorová pole**. Jedná se o soustavu $\frac{n(n+1)}{2}$ rovnic pro neznámé funkce $\{\xi^\mu\}_{\mu=1}^n$, to znamená, že obecně nemají Killingovy rovnice nenulové řešení.

Věta 3.4 (lemma o vyrovnání vektorového pole) *Nechť M je varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$, $P \in M$ a $V \in \mathcal{T}_0^1(M)$ takové, že $V(P) \neq 0$. Pak existují souřadnice (U, x^μ) , $P \in U$ takové, že $V = \partial_1$.*

Důkaz. Například v [9]. □

Při stejném značení jako v předchozí větě má Lieova derivace metriky ve směru vektorového pole V v souřadnicích (U, x^μ) velmi jednoduchý tvar

$$(\mathcal{L}_V g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,1}. \quad (36)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že pokud existují souřadnice, ve kterých všechny složky metriky nezávisí na jedné ze souřadnic, kterou označíme například α , existuje Killingovo vektorové pole

ξ , jehož vyjádření v těchto souřadnicích je $\xi = \partial_\alpha$.

Přímo ze vztahů (33) plyne, že Killingova vektorová pole tvoří podalgebru v Lieově algebře $\mathcal{T}_0^1(M)$, kterou nazýváme **Killingova algebra**. Lze ukázat, že tato algebra je vždy konečněrozměrná s dimenzí nanejvýš $\frac{n(n+1)}{2}$.

V tomto odstavci si ukážeme souvislost mezi Killingovými vektorovými poli a Riemannovým tenzorem křivosti. Pomocí Ricciho identity (13) získáme pro Killingovo vektorové pole ξ následující vztahy:

$$\xi_{\mu;\nu\rho} - \xi_{\mu;\rho\nu} = \xi_\sigma R^\sigma_{\mu\nu\rho}, \quad \xi_{\nu;\rho\mu} - \xi_{\nu;\mu\rho} = \xi_\sigma R^\sigma_{\nu\rho\mu}, \quad \xi_{\rho;\mu\nu} - \xi_{\rho;\nu\mu} = \xi_\sigma R^\sigma_{\rho\mu\nu}. \quad (37)$$

Jejich zkombinováním dostáváme:

$$(\xi_{\mu;\nu} - \xi_{\nu;\mu});_\rho + (\xi_{\nu;\rho} + \xi_{\rho;\nu});_\mu - (\xi_{\mu;\rho} + \xi_{\rho;\mu});_\nu = \xi_\sigma (R^\sigma_{\mu\nu\rho} + R^\sigma_{\nu\rho\mu} - R^\sigma_{\rho\mu\nu}).$$

Tuto rovnici pak pomocí Killingových rovnic (35) a přičtením a odečtením $R^\sigma_{\rho\mu\nu}$ upravíme do tvaru

$$2\xi_{\mu;\nu\rho} = \xi_\sigma \underbrace{(R^\sigma_{\mu\nu\rho} + R^\sigma_{\nu\rho\mu} + R^\sigma_{\rho\mu\nu} - 2R^\sigma_{\rho\mu\nu})}_0,$$

kde součet tří Riemannových tenzorů vymizel v důsledku identity (14). Odtud pak už ze symetrií Riemannova tenzoru plyne vztah:

$$\xi^\mu_{;\nu\rho} = \xi^\sigma R^\mu_{\nu\rho\sigma}. \quad (38)$$

Kontrakcí tohoto vztahu získáváme

$$\xi^\mu_{;\nu\mu} = \xi^\sigma R_{\nu\sigma}. \quad (39)$$

Nakonec ukážeme platnost rovnosti $\nabla_\xi R = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla_\xi R &= \xi^\mu \nabla_\mu R \stackrel{(22)}{=} 2\xi^\mu R^\nu_{\mu;\nu} = 2(\xi^\mu R^\nu_{\mu})_{;\nu} - 2 \underbrace{\xi^\mu_{;\nu} R^\nu_{\mu}}_0 \stackrel{(39)}{=} 2\xi^\mu_{;\nu} R^\nu_{\mu} \stackrel{(35)}{=} \xi^\mu_{;\nu\mu} - \xi^\mu_{;\nu\mu} \stackrel{(13)}{=} \\ &= - \underbrace{\xi^\rho_{;\nu} R^\mu_{\rho\mu\nu}}_0 - \underbrace{\xi^\mu_{;\rho} R^\nu_{\rho\mu\nu}}_0 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Vztah (40) a definice Killingova vektorového pole ukazují, jak je myšlena neměnnost geometrie v jejich směru. Při Lieově přenosu se nemění geometrické veličiny související přímo s metrikou, to jest délky a úhly, a při paralelním přenosu se zachovává Ricciho skalár, to znamená, že se do jisté míry nemění křivost.

Přímočarým zobecněním Killingových vektorových polí jsou **Killingova tenzorová pole**, symetrická tenzorová pole $K \in \mathcal{T}_q^0(M)$ vyhovující rovnicím

$$K_{(\mu_1 \dots \mu_q; \nu)} = 0. \quad (41)$$

Příklady Killingových tenzorových polí jsou metrika nebo symetrizovaný tenzorový součin Killingových vektorových polí se sníženým indexem.

3.3 Zachovávající se veličiny

V této podkapitole ukážeme, jak Killingova vektorová pole souvisejí se zachovávajícími se veličinami v obecné relativitě. V celé podkapitole uvažujeme prostoročas (M, g) .

Nechť γ je časupodobná¹⁰ geodetika parametrizovaná vlastním časem τ a ξ je Killingovo vektorové pole, definujeme veličinu

$$\chi := g(p, \xi), \quad \text{v souřadnicích } \chi = g_{\mu\nu} p^\mu \xi^\nu \equiv p^\mu \xi_\mu,$$

a jak, ukážeme v následujícím odstavci, tato veličina se podél geodetik zachovává, to při speciální volbě parametru znamená $\nabla_p \chi = 0$.

Při odvození využíváme axiomy kovariantní derivace, metričnost konexe a Killingovy rovnice ve tvaru $\xi_{(\mu;\nu)} = 0$:

$$\nabla_p \chi = \nabla_p(g(p, \xi)) = (\nabla_p g)(p, \xi) + g(\nabla_p p, \xi) + g(p, \nabla_p \xi) = p^\mu p^\nu \xi_{\mu;\nu} = p^\mu p^\nu \xi_{(\mu;\nu)} = 0; \quad (42)$$

$$\nabla_p \chi = m u^\mu \partial_\mu \chi = m \frac{d\gamma^\mu}{d\tau} \partial_\mu \chi = m \frac{d\hat{\chi}}{d\tau}, \quad (43)$$

kde $\hat{\chi}(\tau) := \chi(\gamma(\tau))$. Ze vztahu (43) plyne, že zachování veličiny χ podél geodetik lze ekvivalentně přepsat $\frac{d\hat{\chi}}{d\tau} = 0$. Každé Killingovo vektorové pole tedy generuje veličinu, která se zachovává podél geodetik.

Analogicky lze ukázat, že Killingovo tenzorové pole K generuje veličinu

$$\Xi := K(p, \dots, p), \quad \text{v souřadnicích } \Xi = K_{\mu_1 \dots \mu_q} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_q},$$

která se také zachovává podél geodetik, to jest $\nabla_p \Xi = 0$, nebo ekvivalentně $\frac{d\hat{\Xi}}{d\tau} = 0$, kde $\hat{\Xi}(\tau) := \Xi(\gamma(\tau))$.

3.4 Symetrické prostoročasy

Definice 3.5 *Nechť (M, g) je prostoročas, řekneme o něm, že má **sférickou symetrii** právě tehdy, když jeho Killingova algebra obsahuje Killingovu algebru jednotkové dvourozměrné sféry $(S^2, d\Omega^2)$ s metrikou indukovanou z \mathbb{E}^3 .*

Poznámka Metrika $d\Omega^2$ je ve sférických souřadnicích (θ, φ) popsána vztahem

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (44)$$

Killingova algebra variety $(S^2, d\Omega^2)$ je generována třemi vektorovými poli $X, Y, Z \in \mathcal{T}_0^1(S^2)$, která ve výše zmíněných souřadnicích vypadají takto:

$$\begin{aligned} X &= -\sin \varphi \partial_\theta - \cotg \theta \cos \varphi \partial_\varphi, \\ Y &= \cos \varphi \partial_\theta - \cotg \theta \sin \varphi \partial_\varphi, \\ Z &= \partial_\varphi. \end{aligned} \quad (45)$$

Tvar polí X, Y, Z lze odvodit přímým řešením Killingových rovnic, nebo rychleji pomocí intuitivní představy, že izometrie sféry odpovídají rotacím kolem kartézských souřadnicových os a následnou transformací souřadnic.

¹⁰Analogicky lze uvažovat i světlupodobnou geodetiku parametrizovanou afinním parametrem λ .

Definice 3.6 *Nechť (M, g) je prostoročas, nazveme ho **stacionární** právě tehdy, když v jeho Killingově algebře existuje časupodobné Killingovo vektorové pole.*

Označíme-li si časupodobné Killingovo vektorové pole z předchozí definice jako ξ , pak z věty 3.4 víme, že existují souřadnice, ve kterých $\xi = \partial_\alpha$. Z časupodobnosti ξ plyne, že α musí být „časová“ souřadnice, kterou, jak je zvykem, označíme t . Z killingových rovnic a relace (36) už pak plyne

$$g_{\mu\nu,t} = 0. \quad (46)$$

Tato úvaha poskytuje ekvivalentní definici stacionárního prostoročasu:

Stacionární prostoročas je prostoročas, na němž existují souřadnice, ve kterých jsou složky metriky nezávislé na „čase“.

Definice 3.7 *Nechť (M, g) je prostoročas. Řekneme o něm, že je **statický** právě tehdy, když splňuje:*

1. je stacionární,
2. pro časupodobné Killingovo vektorové pole ξ , jehož existenci garantuje bod 1, platí $\xi_{[\mu}\xi_{\nu;\rho]} = 0$.

Věta 3.8 (Frobeniův teorém) *Nechť M je varieta dimenze $n \in \mathbb{N}$. Množina lineárně nezávislých jednaforem $\{\omega^{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^p$, kde $p \in \widehat{n-1}$ na M definuje množinu podvariet \mathcal{N} variety M právě tehdy, když pro libovolná $V, W \in \mathcal{T}_0^1(M)$, která splňují $\forall \alpha \in \hat{p} \ \omega^{(\alpha)}(V) = \omega^{(\alpha)}(W) = 0$, platí*

$$\forall \alpha \in \hat{p} \ \nabla_{[\mu}\omega_{\nu]}^{(\alpha)} V^\mu W^\nu = 0.$$

Množina podvariet \mathcal{N} je dána integrálními křivkami vektorových polí, na nichž jsou dané jednorovnice nulové.

Důkaz. Lze nalézt v [10]. □

Bod 2 v definici statického prostoročasu lze ekvivalentně formulovat následujícím způsobem:

Časupodobné vektorové pole ξ je normálové vektorové pole ke všem nadplochám prostoročasu (M, g) , které jsou definovány rovnicemi $t = \text{konst.}$, kde t označuje „čas“ v souřadnicích, ve kterých platí (46).

Při důkazu toho, že obě definice jsou ekvivalentní vyjdeme z toho, že složky libovolného normálového vektorového pole ξ k nadplochám $t = \text{konst.}$ mají speciální tvar, a tedy ekvivalenci, kterou je třeba ukázat, lze zapsat takto:

$$\xi_{[\mu}\xi_{\nu;\rho]} = 0 \Leftrightarrow \xi_\mu = ft_{;\mu}, \text{ kde } f \in \mathcal{F}(M) \text{ je libovolná.}$$

Implikace (\Leftarrow) je přímým důsledkem tvrzení: $\forall h \in \mathcal{F}(M) \ h_{;\mu\nu} = h_{;\nu\mu}$, které plyne ze záměnnosti parciálních derivací a toho, že RLC konexe je symetrická. Ukažme nyní opačnou implikaci (\Rightarrow). Dle věty 3.8 vektorové pole ξ definuje množinu nadploch \mathcal{N} a je k nim zároveň normálové, právě tehdy, když

$$\forall V, W \in \mathcal{T}_0^1(M) \ \nabla\xi(V) = \nabla\xi(W) = 0 \Rightarrow \xi_{[\mu;\nu]} V^\mu W^\nu = 0. \quad (47)$$

Vezměme tedy dvě libovolná $V, W \in \mathcal{T}_0^1(M)$ splňující (47), pak jistě platí:

$$\begin{aligned} 0 &= \xi_{[\mu}\xi_{\nu;\rho]}V^\mu W^\nu = \frac{1}{3}(\xi_\mu\xi_{[\nu;\rho]}V^\mu W^\nu + \xi_\nu\xi_{[\rho;\mu]}V^\mu W^\nu + \xi_\rho\xi_{[\mu;\nu]}V^\mu W^\nu) = \\ &= \frac{1}{3}(\underbrace{\nabla\xi(V)}_0 \xi_{[\nu;\rho]}W^\nu + \underbrace{\nabla\xi(W)}_0 \xi_{[\rho;\mu]}V^\mu + \xi_\rho\xi_{[\mu;\nu]}V^\mu W^\nu) = \frac{1}{3}\xi_\rho\xi_{[\mu;\nu]}V^\mu W^\nu. \end{aligned}$$

Odtud $\xi_{[\mu;\nu]}V^\mu W^\nu = 0$, to znamená, že ξ je normálovým vektorovým polem k nějaké množině nadploch \mathcal{N} , to jest

$$\forall N \in \mathcal{N}, \forall V \in \mathcal{T}_0^1(N) \quad g(\xi, V) = 0. \quad (48)$$

V souřadnicích, ve kterých platí (46), je $\xi_\mu = f\delta_\mu^t = ft_{;\mu}$, jelikož se jedná o tenzorovou rovnici, nezávisí její platnost na zvolených souřadnicích. Odtud už pak plyne, že \mathcal{N} musí být množina nadploch definovaných rovnicemi $t = konst.$, čímž je ekvivalence obou definic dokázána.

Existuje ještě jedna ekvivalentní definice statického prostoročasu, která plyne přímo z tvrzení (48). Vezměme libovolné $N \in \mathcal{N}$ a $V \in \mathcal{T}_0^1(N)$, v souřadnicích z rovnice (46) to znamená $V^0 = 0$.

$$0 = g(\xi, V) = g_{\mu\nu}\xi^\mu V^\nu = g_{\mu\nu}\delta_0^\mu V^\nu = g_{00}\underbrace{V^0}_0 + g_{0j}V^j \quad \Leftrightarrow \quad g_{0j} = 0.$$

Alternativní „souřadnicová“ definice statického prostoročasu tedy zní:

Statický prostoročas je takový prostoročas, pro jehož metriku v souřadnicích, ve kterých její složky nezávisí na „čase“, platí $\forall j \in \hat{\mathfrak{Z}} \quad g_{0j} = 0$. Obecně má tedy statická metrika v těchto souřadnicích tvar

$$g = g_{00}dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j, \quad \forall i, j \in \hat{\mathfrak{Z}} \quad g_{00,0} = g_{ij,0} = 0. \quad (49)$$

Poznámka Pokud je Killingovo vektorové pole časupodobné pouze na nějaké jednoduše souvislé oblasti $M' \subset M$, říkáme že prostoročas (M, g) je stacionární na M' , analogicky se zavádí i pro statičnost.

4 Alternativní formulace rovnice geodetiky

V kapitole 1 byl představen standardní přístup k formulaci rovnice geodetiky pomocí paralelního přenosu tečného vektoru. Tato kapitola se zabývá několika dalšími způsoby jak tuto fundamentální rovnici odvodit. V celé kapitole uvažujeme riemannovskou varietu (M, g) dimenze $n \in \mathbb{N}$ s RLC konexí.

4.1 Geodetiky jako trajektorie volných částic

První způsob, který bude představen, využívá variaci funkcionálu akce.

Nechť \mathcal{A} je množina všech diferencovatelných křivek na varietě M s počátečním bodem $P \in M$ a koncovým bodem $Q \in M$, to jest

$$\mathcal{A} := \{\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}, \gamma(t_1) = P, \gamma(t_2) = Q\}.$$

Funkcionál akce $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ pro daný lagranžián $L(\gamma, \dot{\gamma}, t)$ je definován vztahem

$$S[\gamma] := \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (50)$$

Věta 4.1 *Afinně parametrizované geodetiky jsou při variacích s pevnými konci jedinými extrémálními funkcionálu akce pro volný pohyb, to jest pro lagranžián $L = \frac{1}{2}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$, jinými slovy*

$$\delta S[\gamma] = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Důkaz. Vezměme libovolnou $\gamma \in \mathcal{A}$ a libovolné vektorové pole $V \in \mathcal{T}_0^1(M)$. Položme nyní

$$\mathcal{A}' := \{\gamma_\varepsilon := \Phi_\varepsilon \circ \gamma \mid \varepsilon \in I, I = I^\circ \subset \mathbb{R} \text{ je okolí } 0, \Phi_\varepsilon \text{ je tok příslušný poli } V\}.$$

Pomocí různých vektorových polí generujících množiny \mathcal{A}' získáme libovolnou křivku $\tilde{\gamma} \in \mathcal{A}$ potřebnou pro varíování křivky γ . Požadavek na variace s pevnými konci odpovídá tomu, že $V(P) = V(Q) = 0$.

Vezmeme-li libovolné $\varepsilon \in I$, pak pro výraz $S[\gamma_\varepsilon]$ platí:

$$\begin{aligned} S[\gamma_\varepsilon] &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} g(\dot{\gamma}_\varepsilon, \dot{\gamma}_\varepsilon) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} g(\Phi_{\varepsilon*} \dot{\gamma}, \Phi_{\varepsilon*} \dot{\gamma}) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\Phi_\varepsilon^* g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \stackrel{(29)}{=} \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (g + \varepsilon \mathcal{L}_V g + O(\varepsilon^2))(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt = S[\gamma] + \frac{1}{2} \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L}_V g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (51)$$

Ve druhém kroku jsme využili definici push-forwardu vektorového pole ($\dot{\gamma}_\varepsilon = \Phi_{\varepsilon*} \dot{\gamma}$) a v následujícím pak definici pull-backu tenzorového pole.

Pokud do vztahu (32) místo U a W dosadíme $\dot{\gamma}$, dostáváme z metričnosti konexe a axiomů kovariantní derivace:

$$(\mathcal{L}_V g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}} V, \dot{\gamma}) = 2(\nabla_{\dot{\gamma}}(g(V, \dot{\gamma})) - g(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})) = 2 \left(\frac{d}{dt} g(V, \dot{\gamma}) - g(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) \right). \quad (52)$$

Variace funkcionálu akce je dána vztahem $\delta S[\gamma] := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[\gamma_\varepsilon] - S[\gamma]}{\varepsilon}$, odtud pak dostáváme

$$\begin{aligned} \delta S[\gamma] &\stackrel{(51)}{=} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L}_V g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \stackrel{(52)}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} g(V, \dot{\gamma}) dt - \int_{t_1}^{t_2} g(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) dt = \\ &= \underbrace{[g(V, \dot{\gamma})]_{t_1}^{t_2}}_0 - \int_{t_1}^{t_2} g(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) dt. \end{aligned} \quad (53)$$

Výraz $[g(V, \dot{\gamma})]_{t_1}^{t_2}$ vymizí díky pevným koncům.

Z rovnice (53), nedegenerovanosti metriky a toho, že V je libovolné už plyne

$$\delta S[\gamma] = 0 \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} g(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) dt = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

□

Následující věta není reformulací rovnice geodetiky, avšak představuje formulaci Newtonovy pohybové rovnice pro částici v potenciálovém silovém poli s potenciálem U , $m\ddot{x} = -\text{grad } U$, v řeči variačního principu na obecné varietě.

Věta 4.2 *Všechny křivky, které při variaci s pevnými konci extremalizují funkcionál akce pro lagranžiián $L = \frac{1}{2}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - U(\gamma)$, kde $U \in \mathcal{F}(M)$, vyhovují rovnici $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -(\wedge dU)$.*

Důkaz. Postup je analogický jako při důkazu věty 4.1. Označme akci pro volný pohyb jako S a akci pro lagranžiián $L = \frac{1}{2}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - U(\gamma)$ jako S' .

Jistě platí:

$$S'[\gamma] = S[\gamma] - \int_{t_1}^{t_2} U dt, \quad S'[\gamma_\varepsilon] = S[\gamma_\varepsilon] - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{U \circ \Phi_\varepsilon}_{(\Phi_\varepsilon^* U)} dt.$$

Pomocí těchto vztahů rozepíšeme $S'[\gamma_\varepsilon]$ takto:

$$\begin{aligned} S'[\gamma_\varepsilon] &= S[\gamma_\varepsilon] - \int_{t_1}^{t_2} (\Phi_\varepsilon^* U) dt \stackrel{(52)(29)}{=} \\ &= S[\gamma] - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} g(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) dt - \int_{t_1}^{t_2} U dt - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} VU dt + O(\varepsilon^2) = \\ &= S'[\gamma] - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{g(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})}_{(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})(V)} + \underbrace{VU}_{dU(V)} dt + O(\varepsilon^2) = \\ &= S'[\gamma] - \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + dU)(V) dt + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Odtud už plyne tvrzení věty:

$$\delta S'[\gamma] = 0 \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + dU)(V) dt = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + dU = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = -(\wedge dU).$$

□

Obě tvrzení lze dokázat i „souřadnicově“. V souřadnicovém zápisu platí

$$\delta S[\gamma] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \gamma^\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^\mu} \right) = 0. \quad (54)$$

Vždy se pak ukáže, že Euler–Lagrangeovy rovnice jsou již ekvivalentní rovnicím ve výše uvedených větách.

Věta 4.1 nám poskytuje alternativní praktický postup pro hledání geodetik. Symbolicky ho můžeme zapsat takto:

$$g \mapsto L \mapsto \text{E–L rovnice} \mapsto \gamma.$$

Oproti tomu symbolické znázornění standardního postupu vypadá následovně:

$$g \mapsto \Gamma \mapsto \ddot{\gamma} + \Gamma \dot{\gamma} \dot{\gamma} = 0 \mapsto \gamma.$$

Metoda využívající Euler–Lagrangeovy rovnice je často efektivnější než standardní postup, a dokonce pomocí ní můžeme nalézt i Christoffelovy symboly 2. druhu. Určíme je přímo z toho, že

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma^\mu} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^\mu} \right) = -g_{\mu\nu} (\ddot{\gamma}^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} \dot{\gamma}^\rho \dot{\gamma}^\sigma). \quad (55)$$

4.2 Geodetiky jako „nejkratší“ křivky

V této podkapitole ukážeme dříve zmíněné tvrzení, že geodetiky odpovídají křivkám, které extremalizují funkcionál délky křivky mezi dvěma pevnými body, to jest jedná se o křivky s minimální, nebo maximální délkou. Na konkrétním příkladu je často jasné, o jaký případ se jedná.

Poznámka Jelikož funkcionál délky křivky nezávisí na parametrizaci, je jasné, že ani jeho extremály nemají pevně danou parametrizaci. Z tohoto důvodu v následující větě myslíme geodetikou obecnou geodetiku a nikoliv afinně parametrizovanou geodetiku.

Věta 4.3 *Při variacích s pevnými konci jsou všechny extremály funkcionálu $\ell[\gamma]$ geodetikami.*

Důkaz. Opět využíváme značení z důkazu věty 4.1. Funkcionál délky křivky $\ell[\gamma]$ mezi dvěma pevnými body $P, Q \in M$ lze interpretovat jako funkcionál akce lagranžiánu $L = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$.

$$\begin{aligned} \ell[\gamma_\varepsilon] &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}_\varepsilon, \dot{\gamma}_\varepsilon)} dt = \underbrace{\dots}_{\text{viz 4.1}} \stackrel{(29)}{=} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + \varepsilon(\mathcal{L}_V g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + O(\varepsilon^2)} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \sqrt{1 + \varepsilon \frac{(\mathcal{L}_V g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} + O(\varepsilon^2)} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \left(1 + \varepsilon \frac{(\mathcal{L}_V g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{2g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \right) + O(\varepsilon^2) dt = \\ &= \ell[\gamma] + \varepsilon \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\mathcal{L}_V g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} dt + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (56)$$

V předposledním kroku jsme využili Taylorův rozvoj.

$$\begin{aligned}
\delta\ell[\gamma] &\stackrel{(56)}{=} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{(\mathcal{L}_V g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} dt \stackrel{(52)}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} \left(\frac{dg(V, \dot{\gamma})}{dt} - g(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) \right) dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{g(V, \dot{\gamma})}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} \right) g(V, \dot{\gamma}) - g \left(V, \frac{1}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \right) dt = \\
&= \underbrace{\left[\frac{g(V, \dot{\gamma})}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} \right]_{t_1}^{t_2}}_0 - \int_{t_1}^{t_2} g \left(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \left(\frac{1}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} \dot{\gamma} \right) \right) dt. \tag{57}
\end{aligned}$$

V posledním kroku jsme využili Leibnitzova pravidla a toho, že kovariantní derivace působí na hladkých funkcích stejně jako směrová derivace. Nulovost výrazu $\left[\frac{g(V, \dot{\gamma})}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} \right]_{t_1}^{t_2}$ má stejný důvod jako v rovnici (53).

Označíme-li $h := \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$, dostáváme

$$\delta\ell[\gamma] = 0 \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} g \left(V, \nabla_{\dot{\gamma}} \left(\frac{1}{h} \dot{\gamma} \right) \right) dt = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \left(\frac{1}{h} \dot{\gamma} \right) = 0. \tag{58}$$

Pro libovolnou $h \in \mathcal{F}(\text{Ran}(\gamma))$, která splňuje $\forall t \in \text{Dom}(\gamma) \ h \neq 0$, plyne přímo z axiomů kovariantní derivace ekvivalence

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \left(\frac{1}{h} \dot{\gamma} \right) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \dot{h} \dot{\gamma}. \tag{59}$$

Nakonec označíme $f := \frac{\dot{h}}{h}$ a z rovnic (58) a (59) už plyne tvrzení věty:

$$\delta\ell[\gamma] = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = f \dot{\gamma}. \tag{60}$$

□

4.3 Hamiltonův přístup

Dále ukážeme, že rovnici geodetiky lze získat postupem, který využívá Hamiltonovu formulaci teoretické mechaniky.

Stejně jako vě větě 4.1 uvažujme lagranžiián pro volný pohyb, $L = \frac{1}{2}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$, jenž má v lokálních souřadnicích tvar $L = \frac{1}{2}g_{\kappa\lambda}\dot{\gamma}^\kappa\dot{\gamma}^\lambda$.

Nejprve převedeme lagranžiián na hamiltonián, $H := p_\rho\dot{\gamma}^\rho - L$, kde p_ρ je kanonická hybnost definovaná vztahem $p_\rho := \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^\rho}$.

$$p_\rho = g_{\kappa\rho}\dot{\gamma}^\kappa \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\gamma}^\kappa = g^{\kappa\rho}p_\rho, \\ L = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}p_\kappa p_\lambda, \end{array} \right\} \Rightarrow H = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}p_\kappa p_\lambda. \tag{61}$$

V dalším kroku dosadíme hamiltonián do Hamiltonových rovnic

$$\dot{\gamma}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = g^{\mu\kappa} p_\kappa, \quad (62)$$

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma^\mu} = -\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}{}_{,\mu} p_\lambda p_\kappa. \quad (63)$$

Zderivováním rovnice (62) podle parametru a dosazením za p_κ získáváme

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}^\mu &= g^{\mu\kappa}{}_{,\sigma} \dot{\gamma}^\sigma g_{\kappa\nu} \dot{\gamma}^\nu + g^{\mu\kappa} \dot{p}_\kappa \stackrel{(63)}{=} g^{\mu\kappa}{}_{,\sigma} g_{\kappa\nu} \dot{\gamma}^\sigma \dot{\gamma}^\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} g^{\sigma\rho}{}_{,\kappa} g_{\rho\nu} \dot{\gamma}^\nu g_{\sigma\lambda} \dot{\gamma}^\lambda = {}^{11} \\ &= -\frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (2g_{\kappa\nu,\sigma} \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\sigma - g_{\rho\nu,\kappa} g^{\sigma\rho} g_{\sigma\lambda} \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\lambda) = -\frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (g_{\kappa\nu,\rho} + g_{\kappa\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\kappa}) \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\rho \stackrel{(7)}{=} \\ &= -\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \dot{\gamma}^\nu \dot{\gamma}^\rho. \end{aligned} \quad (64)$$

Z rovnice (64) už je patrné, že Hamiltonovy rovnice pro volný pohyb jsou ekvivalentní souřadnicovému vyjádření rovnice geodetiky.

4.4 Hamilton–Jacobiho reformulace rovnice geodetiky

Hledání úplného integrálu Hamilton–Jacobiho rovnice lze interpretovat jako ekvivalentní formulaci základní úlohy mechaniky – řešení pohybových rovnic. Této korespondence využijeme k poslednímu vyjádření rovnice geodetiky.

Obecný tvar Hamilton–Jacobiho rovnice pro daný hamiltonián H je

$$H\left(\gamma^\mu, \frac{\partial S}{\partial \gamma^\mu}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (65)$$

Řešením rovnice je funkce $S = S(\gamma^\mu, P_\mu, t)$, kde $\forall \mu \in \hat{n}$ je P_μ integrační konstanta.

V minulé podkapitole bylo ukázáno, že hamiltonián volného pohybu vede na rovnici geodetiky. Pro tento hamiltonián vypadá Hamilton–Jacobiho rovnice následovně:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial \gamma^\mu} \frac{\partial S}{\partial \gamma^\nu} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (66)$$

Pokud najdeme úplný integrál Hamilton–Jacobiho rovnice S , je pomocí něj zadána rovnicemi

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial \gamma^\mu}(\gamma^\mu, P_\mu, t), \quad (67)$$

$$Q^\mu = \frac{\partial S}{\partial P_\mu}(\gamma^\mu, P_\mu, t) \quad (68)$$

kanonická transformace $(\gamma^\mu, p_\mu) \mapsto (Q^\mu, P_\mu)$, při níž je nový hamiltonián nulový. Z první sady nových Hamiltonových rovnic, $\dot{Q}^\mu = 0$, pak plyne, že $\forall \mu \in \hat{n}$ je Q^μ konstanta. Inverzí vztahu (68) tedy nakonec získáme souřadnicové vyjádření geodetiky $\gamma^\mu = \gamma^\mu(Q^\nu, P_\nu, t)$.

Rovnici (66) lze tedy chápat jako alternativní formulaci rovnice geodetiky, jež je ekvivalentní rovnici (8) v tom smyslu, že vede na stejný výsledek.

Pro detailnější diskusi jednotlivých kroků viz [11].

¹¹0 = $(g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu})_{,\sigma} = g^{\mu\kappa}{}_{,\sigma} g_{\kappa\nu} + g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu,\sigma}$

V následujících kapitolách proběhne diskuze geodetických pohybů hmotných i nehmotných částic v okolí vybraných černých děr. **Černou díru** budeme v této práci chápat jako otevřenou neprázdnou souvislou podmnožinu prostoročasu, z které v důsledku kauzální struktury nelze uniknout do nekonečna po časupodobné ani světlu podobné světočáře. Hranici černé díry nazýváme **horizont událostí**. [12]

5 Schwarzschildova černá díra

Schwarzschildovo řešení bylo historicky prvním netriviálním řešením Einsteinových rovnic a mimo jiné odhalilo možnost existence objektů, jež jsme výše popsali jako černé díry. Schwarzschildova černá díra je nerotující, nenabitá a sféricky symetrická.

5.1 Schwarzschildův prostoročas

Schwarzschildův prostoročas, který budeme značit (S, g) , je přesné, vakuové, sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic bez kosmologické konstanty. Znamená to, že přesně řeší Einsteinovy rovnice ve speciálním tvaru

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (69)$$

s omezující podmínkou na sférickou symetrii. Zdrojem zakřivení Schwarzschildova prostoročasu je obecně libovolné sféricky symetrické hmotné těleso s tím, že řešení platí pouze vně tohoto tělesa. Nás bude zajímat speciálně ten případ, kdy je zdrojem zakřivení jediný hmotný bod, jelikož právě taková konfigurace odpovídá Schwarzschildově černé díře.

Schwarzschildova metrika zapsaná v takzvaných Schwarzschildových souřadnicích, které jsou vhodné pro popis vnějšku černé díry, vypadá takto:

$$g = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (70)$$

detailní odvození lze nalézt v [12].

Geometrie prostoročasu je určena jediným volným parametrem M , který odpovídá hmotnosti zdrojového tělesa.

Schwarzschildovy souřadnice mají stále ještě fyzikální interpretaci:

1. Pokud bychom v rovnici (70) udělali limitu $r \rightarrow +\infty$, přejde Schwarzschildova metrika na Minkowského metriku. Z toho plyne, že souřadnice t odpovídá vlastnímu času pozorovatele, který v radiálním nekonečnu stojí na místě.
2. Souřadnice θ, φ odpovídají úhlům na sférách $t = \text{konst.}, r = \text{konst.}$
3. Souřadnice r má význam tzv. „plochového poloměru“, který je definován vztahem

$$A \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} d\theta d\varphi = 4\pi r^2, \quad (71)$$

kde A označuje vlastní plochu sféry $t = \text{konst.}, r = \text{konst.}$

Hned z rovnice (70) lze vidět, že Schwarzschildův prostoročas je statický na množině určené podmínkou $r > 2M$ a v případech $M = 0$ nebo $r \gg M$ se redukuje na Minkowského prostoročas.

V těchto speciálních souřadnicích lze horizont událostí nalézt řešením rovnice¹²:

$$g^{rr}(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r} = 0, \quad (72)$$

která má jednoduché řešení $r = 2M$. Schwarzschildovu černou díru B_S a její horizont událostí H_S pak popisují množiny

$$B_S := \{P \in S \mid r(P) < 2M\}, \quad H_S := \{P \in S \mid r(P) = 2M\}. \quad (73)$$

5.2 Geodetiky v poli Schwarzschildovy černé díry

Mějme nyní Schwarzschildův prostoročas (S, g) buzený jediným hmotným bodem o hmotnosti M . Dokud to bude možné budeme diskutovat času- i světlu podobné geodetiky γ společně. Využijeme speciální volbu afinního parametru λ tak, aby v obou případech platilo $p = \frac{d\gamma}{d\lambda}$. Tato podmínka odpovídá konvenční volbě parametru pro nehmotnou částici a $\lambda = \frac{\tau}{m}$ pro částici s hmotností m . Veličina ϵ definovaná rovnicí (17) nabývá pro takové λ hodnoty m^2 pro hmotnou a 0 pro nehmotnou částici.

Rovnice geodetiky odpovídá soustavě 4 diferenciálních rovnic 2. řádu pro neznámé funkce t, r, θ, φ . Řešit tuto soustavu přímo je obtížné, proto využijeme symetrií, které úlohu výrazně zjednoduší.

5.2.1 Rovinnost geodetického pohybu

Nejprve ukážeme, že stejně jako v Newtonově gravitační teorii je i v obecné teorii relativity geodetický pohyb kolem sféricky symetrického hmotného centra rovinný.

Uvažujme volnou testovací částici s počáteční polohou $\gamma(0) = Q_0 \in S$ a počáteční čtyřhybností $\dot{\gamma}(0) = p_0 \in T_{Q_0}S$. Díky sférické symetrii lze vždy nastavit Schwarzschildovy souřadnice tak, aby Q_0 leželo v ekvatoriální rovině a vektor p_0 byl k této rovině tečný, jinými slovy $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Abychom zjistili, zda pohyb zůstává v této rovině musíme spočítat druhou derivaci funkce θ v počátečním bodě Q_0 , pro níž z rovnice geodetiky plyne vztah $\ddot{\theta}(0) = -\Gamma^{\theta}_{\mu\nu}(Q_0)\dot{\gamma}^{\mu}(0)\dot{\gamma}^{\nu}(0)$. Relevantní Christoffelovy symboly v libovolném bodě lze vyjádřit vztahem

$$\Gamma^{\theta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\theta\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\delta_{\mu}^{\theta}\delta_{\nu}^r g_{\theta\theta,r} + \delta_{\nu}^{\theta}\delta_{\mu}^r g_{\theta\theta,r} - \delta_{\nu}^{\varphi}\delta_{\mu}^{\varphi} g_{\varphi\varphi,\theta}).$$

Z toho plyne, že jediné nenulové a nezávislé Christoffelovy symboly jsou

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r}.$$

Označíme-li souřadnice bodu Q_0 jako $(t_0, r_0, \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \varphi_0)$, pak z předchozích vztahů a volby počátečních podmínek plyne:

$$\ddot{\theta}(0) = \sin\frac{\pi}{2} \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_0 \dot{\varphi}(0)\dot{\varphi}(0) - \frac{2}{r_0} \underbrace{\dot{\theta}(0)}_0 \dot{r}(0) = 0. \quad (74)$$

¹²Pro podrobnější diskusi viz [8].

To znamená, že geodetický pohyb probíhá pouze v ekvatoriální rovině $\theta = \frac{\pi}{2}$ a úloha se tím tedy zjednodušila na hledání pouze tří neznámých funkcí.

5.2.2 Zachovávající se veličiny

Dalším krokem ke zjednodušení bude využít aparát budovaný v kapitole 3.

S využitím vztahu (36) plyne přímo z vyjádření metriky ve Schwarzschildových souřadnicích existence Killingových vektorových polí $W = \partial_t$ a $Z = \partial_\varphi$. Z podkapitoly 3.3 pak plyne, že se zachovávají veličiny:

$$\begin{aligned} E &:= -g_{\mu\nu}W^\mu p^\nu = -g_{\mu\nu}\delta_t^\mu p^\nu = -g_{tt}p^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}, \\ L &:= g_{\mu\nu}Z^\mu p^\nu = g_{\mu\nu}\delta_\varphi^\mu p^\nu = g_{\varphi\varphi}p^\varphi = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (75)$$

Veličiny E , respektive L , lze chápat jako zobecnění energie, respektive momentu hybnosti. Pro velká r , kde se Schwarzschildův prostoročas redukuje na Minkowského, totiž platí:

$$\begin{aligned} E &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) p^t \underset{r \gg M}{\approx} p_{Mink}^t = E_{Mink}, \\ L &= r^2 \sin^2 \theta p^\varphi \underset{r \gg M}{\approx} r^2 \sin^2 \theta p_{Mink}^\varphi = L_{3Mink} = L_{Mink}. \end{aligned}$$

U druhé rovnice plyne předposlední rovnost přímo z vyjádření z – ové složky momentu hybnosti ve sférických souřadnicích a v posledním kroku jsme využili toho, že při pohybu v ekvatoriální rovině je jediná nenulová složka momentu hybnosti L_3 a pro celkovou velikost momentu hybnosti tedy platí $L = L_3$.

Nakonec s využitím všech dosavadních výsledků rozepíšeme veličinu ϵ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= -g_{\mu\nu} \frac{d\gamma^\mu}{d\lambda} \frac{d\gamma^\nu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \stackrel{(75)}{=} \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2}. \end{aligned} \quad (76)$$

Rovnice (75) a (76) lze ekvivalentně přepsat následujícím způsobem:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad (77)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right), \quad (78)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}. \quad (79)$$

Úlohu jsme tedy zjednodušili na soustavu 3 diferenciálních rovnic 1. řádu.

5.2.3 Metoda efektivního potenciálu

Pomocí metody efektivního potenciálu lze získat dobrou představu o radiálním chování volných částic i bez přímého řešení rovnice geodetiky. Prvním krokem je přepsat rovnici (78) do tvaru

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - U(r), \quad (80)$$

kde $U(r) := \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right)$, funkci U nazýváme efektivní potenciál.

Pro pevnou hodnotu veličiny E lze z rovnice (80) vyčíst, pro která r se může pohyb realizovat. Jelikož $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \geq 0$, musí platit $E^2 \geq U(r)$, čímž je omezena množina přípustných hodnot souřadnice r tak, že volné částice se mohou pohybovat pouze nad grafem funkce $U(r)$. Pro diskuzi možných pohybů jsou důležité tyto body:

- Rovnice $E^2 = U(r)$ definuje jisté hodnoty r , které nazýváme **body obratu**. Částice v těchto bodech mění směr pohybu z klesajícího r na rostoucí, nebo naopak.
- Podmínka $\frac{dU}{dr}(r) = 0$ určuje, na kterých poloměrech je pro jistou hodnotu konstanty E možné realizovat kruhový pohyb. Lokální minima odpovídají stabilním kruhovým orbitám a lokální maxima spolu se sedlovými body nestabilním.

Z předpisu pro efektivní potenciál $U(r)$ je patrné, že pro libovolnou hodnotu parametru L platí:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U(r) = -\infty, \quad (81)$$

to znamená, že ve Schwarzschildově prostoročasu je možné, aby trajektorie (hmotné i nehmotné) volné částice s nenulovým momentem hybnosti skončila pádem do centra, což dle Newtonovy teorie gravitace v gravitačním poli sféricky symetrického tělesa není možné.

Finitní pohyb je takový, který je buď kruhový, nebo probíhá na omezeném intervalu $[r_{min}, r_{max}]$, kde $r_{min}, r_{max} \in (2M, +\infty)$. Pohyby, které neprobíhají na omezeném intervalu, nazýváme **infinitní**.

V následujících podkapitolách budeme pomocí výše popsaného diskutovat radiální chování časupodobných a světlupodobných geodetik zvlášť.

5.3 Časupodobné geodetiky

Úloha se technicky zjednoduší zavedením následující transformace:

$$\sigma := \frac{m\lambda}{2M} = \frac{\tau}{2M}, \quad \xi := \frac{2M}{r}, \quad \ell := \frac{L}{2mM}, \quad \mathcal{E} := \frac{E}{m}. \quad (82)$$

Pomocí nových veličin lze rovnici (80) ekvivalentně přepsat do tvaru

$$\xi^{-4} \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 = \mathcal{E}^2 - \mathcal{U}(\xi), \quad \text{kde } \mathcal{U}(\xi) := (1 - \xi)(\ell^2 \xi^2 + 1). \quad (83)$$

Zajímá nás pouze pohyb vně černé díry, to jest $r \in (2M, +\infty)$, v řeči nové proměnné $\xi \in (0, 1)$. Radiálnímu nekonečnu odpovídá $\xi = 0$ a horizontu událostí $\xi = 1$. Efektivní potenciál

nabývá pro libovolnou hodnotu parametru ℓ v hraničních bodech hodnot $\mathcal{U}(0) = 1$ a $\mathcal{U}(1) = 0$.

Pro různé hodnoty veličiny ℓ získáváme kvalitativně různé průběhy efektivního potenciálu. V následujících odstavcích rozebereme, jak se od sebe tyto průběhy navzájem liší. Prvním krokem bude vyšetřit stacionární body efektivního potenciálu, které slouží k lokalizaci kruhových drah. K tomu potřebujeme první derivaci:

$$\mathcal{U}_{,\xi} = -1 + 2\ell^2\xi - 3\ell^2\xi^2. \quad (84)$$

Rovnice $\mathcal{U}_{,\xi} = 0$ má řešení pouze pokud $\ell \geq \sqrt{3}$ a je jím:

$$\begin{aligned} \text{pro } \ell \in (\sqrt{3}, +\infty) & \quad \xi_{\pm}(\ell) := \frac{1}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 - 3\ell^{-2}} \right), \\ \text{pro } \ell = \sqrt{3} & \quad \xi_0 := \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (85)$$

Lze snadno nahlédnout jakých hodnot mohou ξ_{\pm} pro různá ℓ nabývat, $\xi_+ \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ a $\xi_- \in (0, \frac{1}{3})$.

Z druhé derivace efektivního potenciálu,

$$\mathcal{U}_{,\xi\xi} = 2\ell^2(1 - 3\xi), \quad (86)$$

je patrné, že pro pevné $\ell \in (\sqrt{3}, +\infty)$ má $\mathcal{U}(\xi)$ právě jedno lokální maximum v bodě $\xi_+(\ell)$ a právě jedno lokální minimum v bodě $\xi_-(\ell)$. Pokud $\ell = \sqrt{3}$, efektivní potenciál nemá lokální extrém, ale v bodě ξ_0 se nachází sedlový bod.

V řeči původní lépe představitelné proměnné r můžeme předchozí dva odstavce interpretovat tak, že pohyb po nestabilní, respektive stabilní, kruhové dráze je možný pouze na poloměru $r_+ := \frac{2M}{\xi_+}$, respektive $r_- := \frac{2M}{\xi_-}$,¹³ který v závislosti na hodnotě parametru ℓ odpovídá nějaké hodnotě z intervalu $(3M, 6M]$, respektive $(6M, +\infty)$.

Hodnoty lokálních extrémů a sedlového bodu získáme dosazením vztahů (85) do předpisu pro efektivní potenciál $\mathcal{U}(\xi)$:

$$\mathcal{U}_{\pm} := \mathcal{U}(\xi_{\pm}) = \frac{2 \left(\ell(\ell^2 + 9) \pm (\ell^2 - 3)^{\frac{3}{2}} \right)}{27\ell}, \quad \mathcal{U}(\xi_0) \Big|_{\ell=\sqrt{3}} = \frac{8}{9}. \quad (87)$$

Z těchto rovnic je vidět, jaký vztah musí být mezi veličinami \mathcal{E}^2 a ℓ , aby se volná testovací částice mohla pohybovat po kruhové dráze. Pokud bychom nyní efektivní potenciál uvažovali jako funkci dvou proměnných $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\xi, \ell)$, zjistíme pomocí první derivace podle ℓ ,

$$\mathcal{U}_{,\ell} = 2(1 - \xi)\ell\xi^2, \quad (88)$$

že \mathcal{U} je v ℓ všude rostoucí a tím pádem se zvyšujícím se ℓ roste i hodnota \mathcal{U}_{\pm} . Abychom zjistili horní mez pro \mathcal{U}_{\pm} , spočteme limity:

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_+ = +\infty, \quad \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_- = 1. \quad (89)$$

¹³Poloměry r_{\pm} jsou definované pro $\ell \in (\sqrt{3}, +\infty)$, r_+ navíc dodefinujeme i pro $\ell = \sqrt{3}$ vztahem $r_+(\ell = \sqrt{3}) = \frac{2M}{\xi_0}$.

První limita je triviální a druhá lze snadno spočítat využitím Taylorova rozvoje. Nakonec získáváme: $\mathcal{U}_+ \in (\frac{8}{9}, +\infty)$ a $\mathcal{U}_- \in (\frac{8}{9}, 1)$, to mimo jiné znamená, že volné částice s $\mathcal{E}^2 > 1$ se pro libovolnou hodnotu veličiny ℓ nemohou pohybovat po stabilní kruhové dráze.

Pro částici přilétající z nekonečna musí platit $\mathcal{E}^2 \geq 1$, a tedy, pokud celý graf efektivního potenciálu $\mathcal{U}(\xi)$ leží pod přímkou $\mathcal{U} = 1$, tyto částice nemají bod obratu a jejich trajektorie končí gravitačním záchytem. Poslední důležitou vlastnost efektivního potenciálu tedy získáme z podmínek řešitelnosti rovnice:

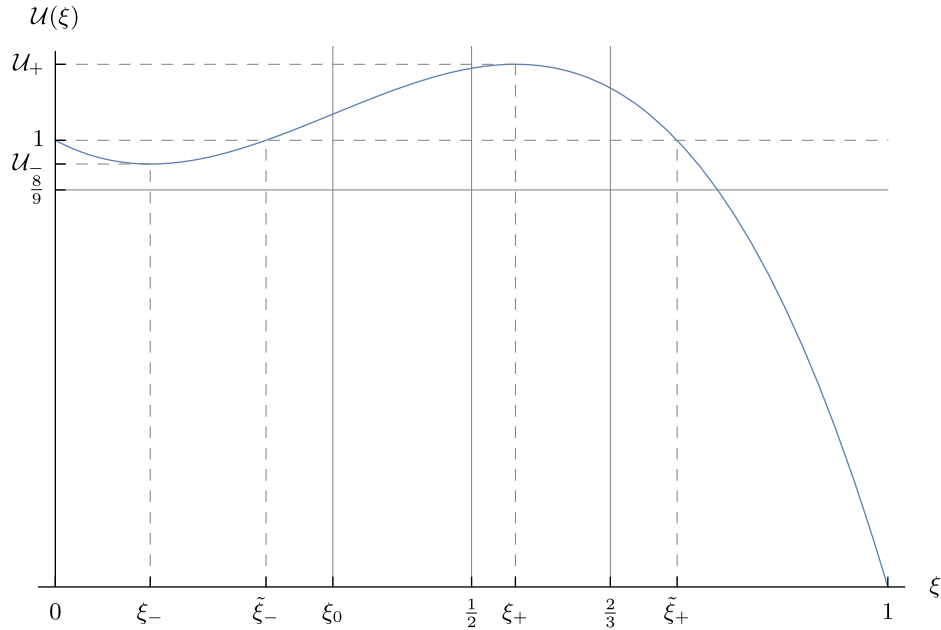
$$\mathcal{U}(\xi) \equiv 1 - \xi + \ell^2 \xi^2 - \ell^2 \xi^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \xi(-1 + \ell^2 \xi - \ell^2 \xi^2) = 0. \quad (90)$$

Pro $\ell < 2$ nemá tato rovnice řešení, z čehož plyne, že pro takové hodnoty veličiny ℓ platí: $\forall \xi \in (0, 1) \mathcal{U}(\xi) < 1$. V opačném případě řešení existuje a je dáno dvěma křivkami,

$$\tilde{\xi}_{\pm}(\ell) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\ell^{-2}} \right), \quad \ell \in (2, +\infty) \quad (91)$$

a jedním společným bodem $(\frac{1}{2}, 2)$ v rovině (ξ, ℓ) . Platí $\tilde{\xi}_+ \in (\frac{1}{2}, 1)$ a $\tilde{\xi}_- \in (0, \frac{1}{2})$.

Pro ilustraci a lepší orientaci ve značení je na obrázku 1 vykreslen graf efektivního potenciálu $\mathcal{U}(\xi)$ s nejsložitějším průběhem, to jest pro $\ell > 2$, na kterém jsou vyznačené všechny důležité hodnoty veličin ξ a \mathcal{U} .



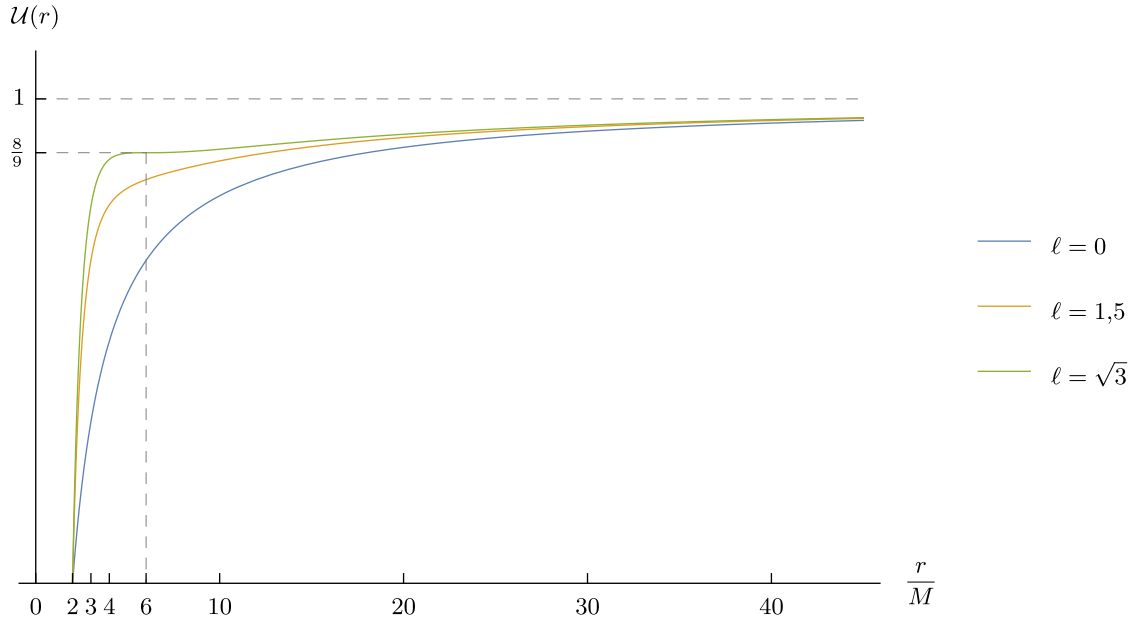
Obrázek 1: Průběh efektivního potenciálu $\mathcal{U}(\xi)$ pro případ $\ell > 2$ – Schwarzschildův prostoročas, časopodobné geodetiky.

Křivka $\tilde{\xi}_-(\ell)$, která určuje od černé díry vzdálenější průsečík grafu efektivního potenciálu a přímkou $\mathcal{U} = 1$, má význam pro orbitální pohyb na omezeném intervalu $[r_{min}, r_{max}]$. Z výše získaných výsledků je jasné, že takový pohyb může probíhat pouze pro částice s $\mathcal{E}^2 < 1$. Poloměr $\tilde{r} := \frac{2M}{\tilde{\xi}_-}$ je evidentně minimální možnou hodnotou r_{min} pro dané ℓ . Jelikož $\tilde{r} \in (4M, +\infty)$, platí

pro libovolné ℓ omezující podmínka na body obratu, $4M < \tilde{r} \leq r_{min} < r_{max}$.

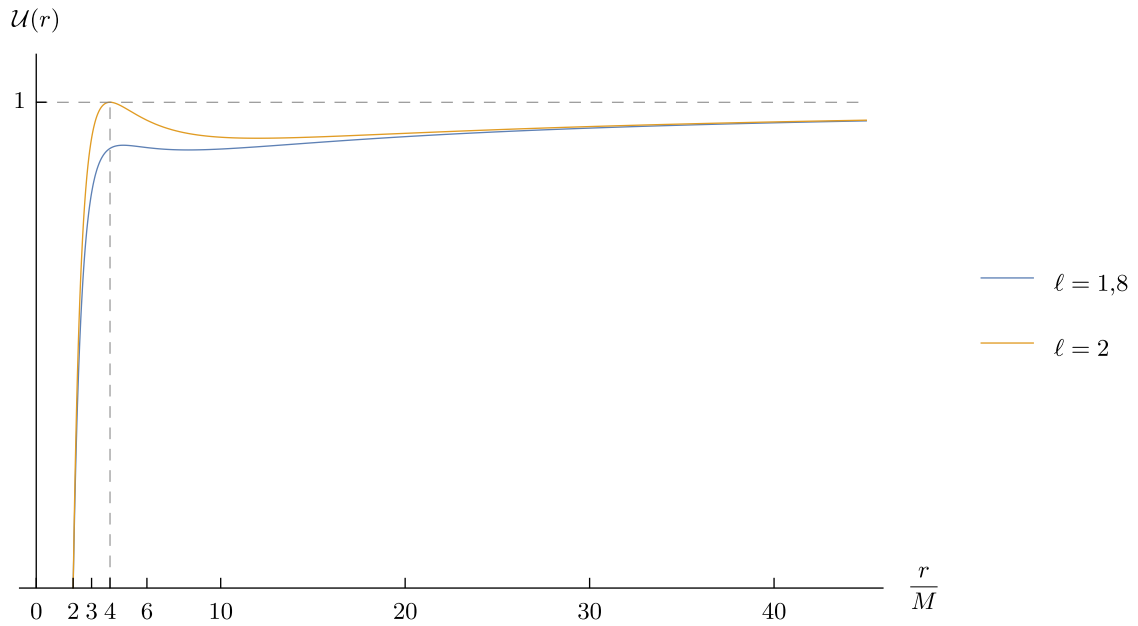
Dále už nebudeme potřebovat proměnnou ξ , a vrátíme se tedy zpět k původní radiální souřadnici r . Podle hodnoty konstanty ℓ můžeme na základě výše získaných výsledků odlišit tři kvalitativně různé průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$:

1. $0 \leq \ell \leq \sqrt{3}$. Efektivní potenciál nemá žádný lokální extrém, je rostoucí a asymptoticky se v limitě $r \rightarrow +\infty$ blíží k 1. Nelze realizovat pohyb po orbitální dráze, kromě mezního případu $\ell = \sqrt{3}$, který připouští možnost nestabilní kruhové dráhy. Trajektorie částic přilétajících z nekonečna nemají bod obratu a tedy všechny nutně spadnou do centra. Několik průběhů efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ tohoto typu, včetně mezního $\ell = \sqrt{3}$ je vykresleno na obrázku 2.

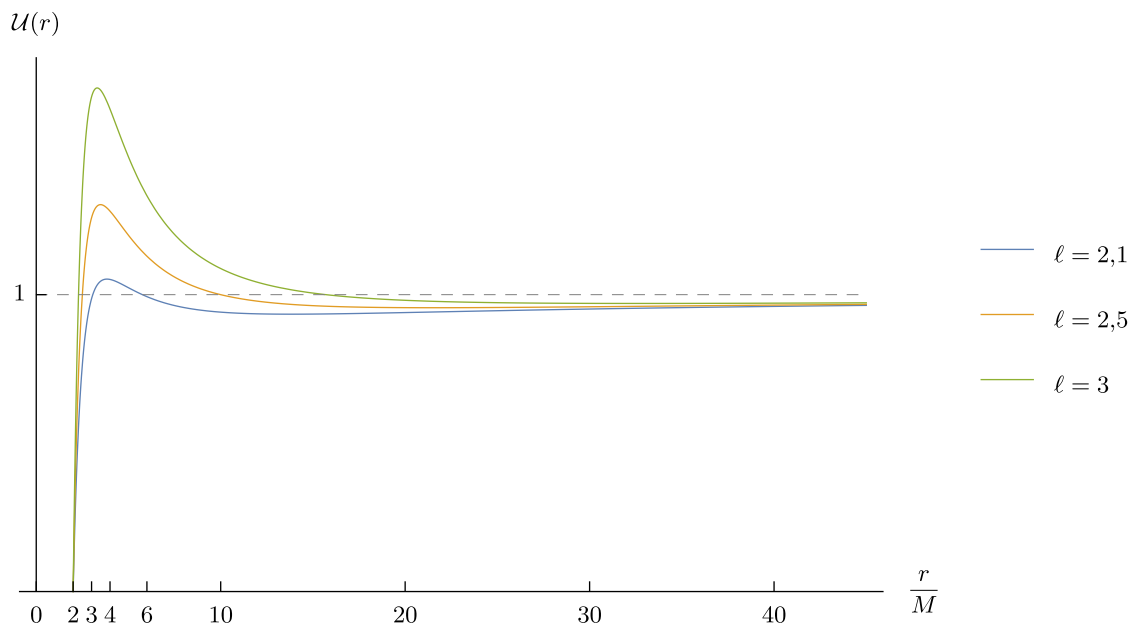


Obrázek 2: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ prvního typu, to jest pro $0 \leq \ell \leq \sqrt{3}$ – Schwarzschildův prostoročas, časupodobné geodetiky.

2. $\sqrt{3} < \ell \leq 2$. Efektivní potenciál má lokální minimum i maximum a celý leží pod přímkou $\mathcal{U} = 1$. Připouští možnost orbitální trajektorie, včetně stabilní i nestabilní kruhové dráhy. Všechny částice přilétající z nekonečna nevyhnutelně skončí v centru, až na hraniční případ $\ell = 2$, jenž umožňuje i to, že ke gravitačnímu záchytu nedojde. Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ spadající do této kategorie jsou znázorněny na obrázku 3.
3. $\ell > 2$. Efektivní potenciál má lokální minimum i maximum a není omezen přímkou $\mathcal{U} = 1$. Je možné realizovat nejvíce typů trajektorií, včetně těch, které umožňují předchozí případy. Příklady těchto průběhů efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ je možné si prohlédnout na obrázku 4.



Obrázek 3: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ druhého typu, to jest pro $\sqrt{3} < \ell \leq 2$ – Schwarzschildův prostoročas, časupodobné geodetiky.



Obrázek 4: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ třetího typu, to jest pro $\ell > 2$ – Schwarzschildův prostoročas, časupodobné geodetiky.

Třetí případ je z hlediska typologie geodetik nejobecnější, proto si jej probereme podrobněji. V závislosti na hodnotě veličiny \mathcal{E} a počáteční radiální poloze částice r_0 rozlišujeme tyto typy trajektorií:

(I) Částice přilétající směrem k černé díře.

1. $\mathcal{E}^2 > \mathcal{U}_+ \vee r_0 < r_+$. Pád do černé díry neboli gravitační záchyt.
2. $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}_+ \wedge r_0 > r_+$. Navinutí na nestabilní kruhovou dráhu o poloměru $r = r_+$.
3. $\mathcal{E}^2 \in [1, \mathcal{U}_+) \wedge r_0 > r_+$. Přiblížení k černé díře až na minimální poloměr r_{min} , který je dán jakožto řešení rovnice $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}(r)$ na intervalu $(r_+, +\infty)$, a poté únik do nekonečna.

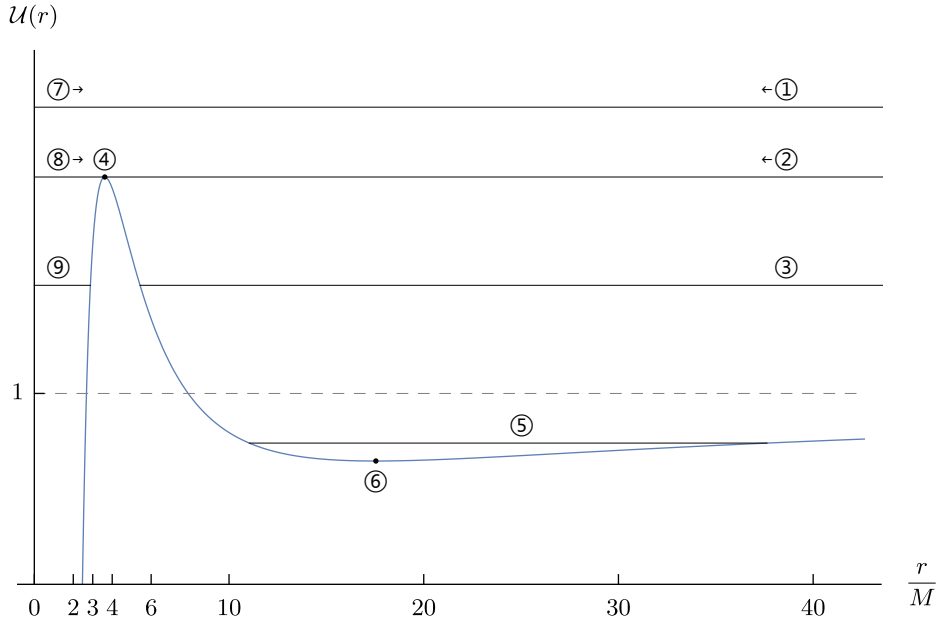
(II) Orbitální dráhy.

4. $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}_+ \wedge r_0 = r_+$. Nestabilní kruhová dráha.
5. $\mathcal{E}^2 \in (\mathcal{U}_-, 1) \wedge r_0 > r_+$. Poloměr osciluje mezi hodnotami r_{min} a r_{max} , které odpovídají řešením rovnice $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}(r)$ na intervalu $(\tilde{r}, +\infty)$.
6. $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}_- \wedge r_0 = r_-$. Stabilní kruhová dráha.

(III) Částice mířící směrem od černé díry.

7. $\mathcal{E}^2 > \mathcal{U}_+ \vee (\mathcal{E}^2 \geq 1 \wedge r_0 > r_+)$. Únik do nekonečna.
8. $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}_+ \wedge r_0 < r_+$. Analogie k trajektorii typu 2.
9. $\mathcal{E}^2 < \mathcal{U}_+ \wedge r_0 < r_+$. Dosažení maximálního poloměru r_{max} , který je dán jakožto řešení rovnice $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}(r)$ na intervalu $(0, r_+)$, a poté následný obrat pohybu směrem k černé díře, který je zakončen pádem do černé díry.

Na obrázku 5 jsou znázorněny radiální průběhy všech výše popsaných tříd geodetik.



Obrázek 5: Průběh efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ pro $\ell > 2$. Čísly 1 – 9 jsou znázorněny jednotlivé typy radiálních průběhů časupodobných geodetik ve Schwarzschildově prostoročasu.

5.4 Světlu podobné geodetiky

Budeme postupovat zcela analogicky jako u časupodobných geodetik. Přepíšeme rovnici (80) do ekvivalentního tvaru

$$\left(\frac{dr}{d\sigma}\right)^2 = 1 - \mathcal{V}(r), \quad (92)$$

kde $\sigma := \lambda E$, $\mathcal{V}(r) := \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{4M^2 \ell^2}{r^2}$ a $\ell := \frac{L}{2ME}$.

Vyšetříme průběh efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ vně černé díry, to jest $r \in (2M, +\infty)$. V obou hraničních bodech nabývá $\mathcal{V}(r)$ stejných hodnot, $\mathcal{V}(2M) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(r) = 0$.

Důležité jsou hodnoty radiální souřadnice r , pro které může být realizován kruhový pohyb, těm odpovídají lokální extrémy a sedlové body efektivního potenciálu, k jejich nalezení potřebujeme první derivaci funkce $\mathcal{V}(r)$,

$$\mathcal{V}_{,r} = \frac{8M^2 \ell^2}{r^4} (3M - r). \quad (93)$$

Jediným řešením rovnice $\mathcal{V}_{,r} = 0$, stacionárním bodem, je $r = 3M$. Z druhé derivace,

$$\mathcal{V}_{,rr} = \frac{24M^2 \ell^2}{r^5} (r - 4M), \quad (94)$$

lze vidět, že efektivní potenciál má v tomto bodě lokální maximum s funkční hodnotou $\mathcal{V}(3M) = \frac{4}{27} \ell^2$. Po kruhových drahách se tedy mohou pohybovat pouze částice s $\ell = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, tyto dráhy jsou nestabilní a mohou probíhat pouze na poloměru $r = 3M$.

Body obratu jsou definovány jako řešení rovnice

$$1 = \mathcal{V}(r). \quad (95)$$

V předešlém odstavci jsme odvodili, že maximum efektivního má hodnotu $\frac{4}{27} \ell^2$. Z toho plyne, že světlu podobná geodetika má bod obratu právě tehdy, když $\ell > \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Na rozdíl od časupodobného případu má efektivní potenciál pro všechny hodnoty veličiny ℓ kvalitativně stejný průběh, až na případ s $\ell = 0$, kdy je funkce identicky nula. Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ jsou pro vybrané hodnoty parametru ℓ vykresleny na obrázku 6.

Jediným parametrem, který spolu s počáteční radiální polohou r_0 určuje typ trajektorie nehmotné částice, je ℓ , v závislosti na jeho hodnotě mohou nastat tyto případy:

(I) Částice přilétající směrem k černé díře.

1. $\ell < \frac{3\sqrt{3}}{2} \vee r_0 < 3M$. Pád do černé díry neboli gravitační záchyt.
2. $\ell = \frac{3\sqrt{3}}{2} \wedge r_0 > 3M$. Navinutí na nestabilní kruhovou dráhu o poloměru $r = 3M$.
3. $\ell > \frac{3\sqrt{3}}{2} \wedge r_0 > 3M$. Přiblížení k černé díře až na minimální poloměr r_{min} , který je dán jakožto řešení rovnice $1 = \mathcal{V}(r)$ na intervalu $(3M, +\infty)$, a poté únik do nekonečna.

(II) Orbitální dráhy.

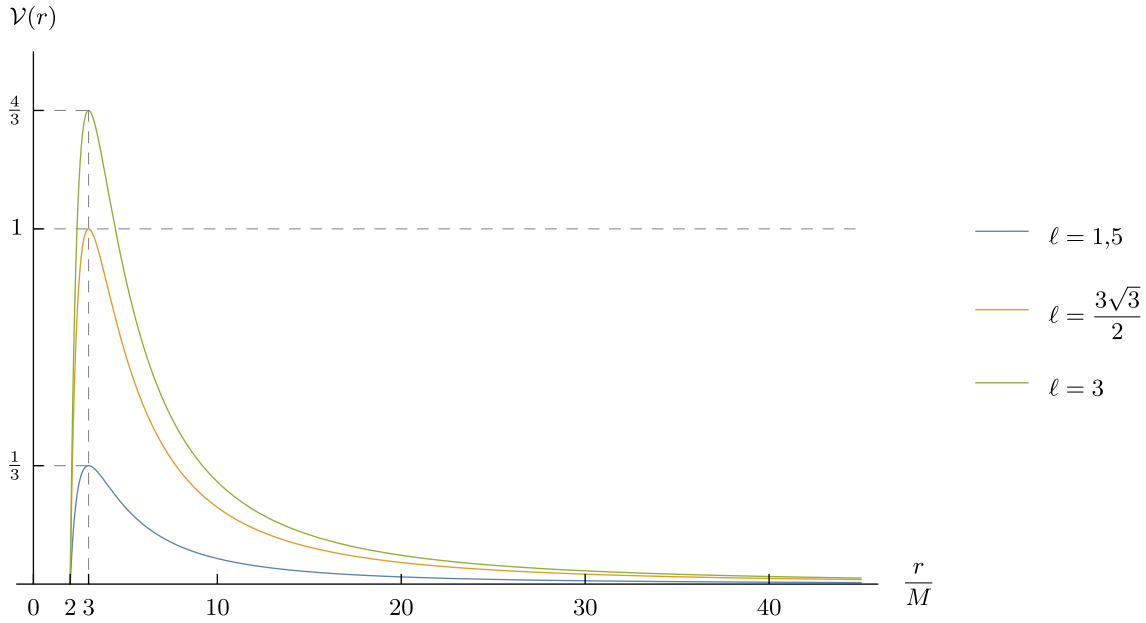
4. $\ell = \frac{3\sqrt{3}}{2} \wedge r_0 = 3M$. Nestabilní kruhová dráha.

(III) Částice míří směrem od černé díry.

5. $\ell < \frac{3\sqrt{3}}{2} \vee r_0 > 3M$. Únik do nekonečna.

6. $\ell = \frac{3\sqrt{3}}{2} \wedge r_0 < 3M$. Analogie k trajektorii typu 2.

7. $\ell > \frac{3\sqrt{3}}{2} \wedge r_0 < 3M$. Dosažení maximálního poloměru r_{max} , který je dán jakožto řešení rovnice $1 = \mathcal{V}(r)$ na intervalu $(0, 3M)$, a poté následný obrat pohybu směrem k černé díře, který je zakončen pádem do černé díry.



Obrázek 6: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ – Schwarzschildův prostoročas, světlu podobné geodetiky.

Nejdůležitějším rozdílem oproti časupodobným geodetikám je to, že jediný možný orbitální pohyb je nestabilní kruhová dráha o poloměru $r = 3M$.

5.5 Numerické řešení

V této podkapitole jsou vykreslena numerická řešení¹⁴ zákony zachování nezjednodušené rovnice geodetiky (8), která ve Schwarzschildových souřadnicích v ekvatoriální rovině odpovídá soustavě tří diferenciálních rovnic 2. řádu:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{2M}{r(r-2M)} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{M}{r(r-2M)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - (r-2M) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + (r-2M) \frac{M}{r^3} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \tag{96}$$

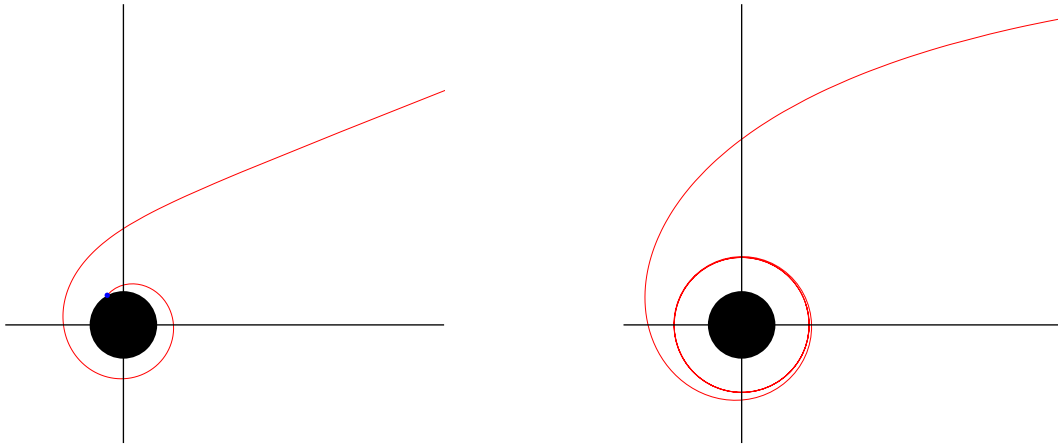
¹⁴K výpočtu byl použit program Wolfram Mathematica 12.

Jelikož typologie světlupodobných geodetik nenabízí oproti časupodobné nic kvalitativně jiného, budeme modelovat pouze časupodobné geodetiky. Počáteční podmínky pro čtyřrychlost jsou voleny v souladu s rovnicemi (77), (78) a (79), abychom mohli jednoduše pomocí veličin \mathcal{E} a ℓ volit, který typ geodetiky chceme nasimulovat:

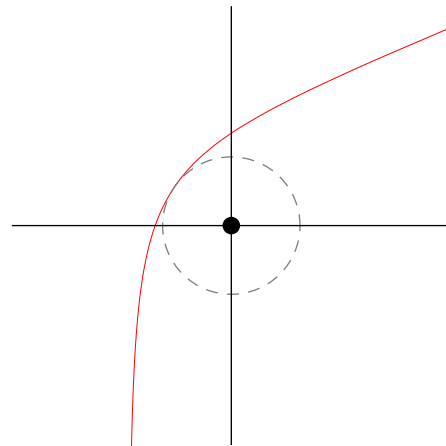
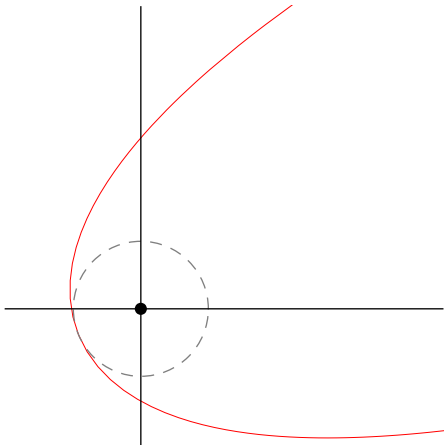
$$\frac{dt}{d\tau}(0) = \frac{\mathcal{E}}{1 - \frac{2M}{r_0}}, \quad \frac{dr}{d\tau}(0) = k \sqrt{\mathcal{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \left(\frac{4M^2\ell^2}{r_0^2} + 1\right)}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau}(0) = \frac{2M\ell}{r_0^2},$$

kde r_0 je radiální souřadnice počáteční události geodetiky a k volíme ± 1 v závislosti na tom, zda chceme simulovat pohyb k, nebo od černé díry. Hmotnost M může být bez újmy na obecnosti volena libovolně. Na souřadnicích t_0 a φ_0 počáteční události typ průběhu geodetiky nezávisí, tudíž mohou být nastaveny libovolně. Konstanty ℓ , \mathcal{E} a r_0 jsou voleny tak, aby bylo pokryto všech devět výše popsanych druhů trajektorií, přičemž některé se vyskytují víckrát, abychom zdůraznili to, že se od sebe trajektorie jednoho typu mohou tvarově velmi lišit, jak je vidět například na obrázcích 9 až 12.

Následující obrázky 7 až 20 tedy znázorňují trajektorie volných testovacích hmotných částic vně Schwarzschildovy černé díry v ekvatoriální rovině. Černá díra je na obrázku vyznačena černým kruhem se středem v počátku a poloměrem $r = 2M$. Šedé přerušované kružnice značí radiální body obratu. Počáteční poloha částice je v obrázcích znázorněna zelenými body, modré body označují místo, ve kterém došlo k překročení horizontu událostí.

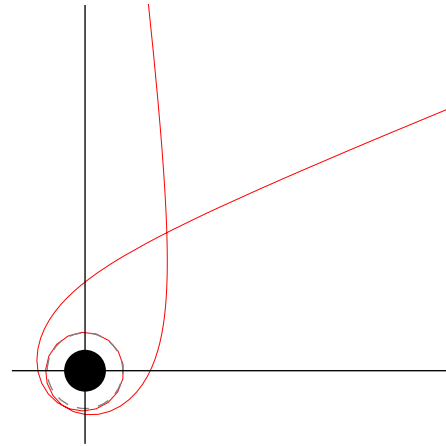
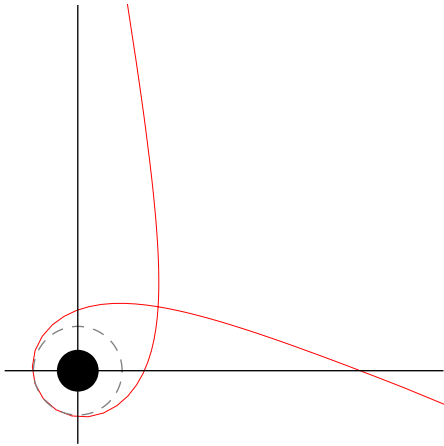


Obrázek 7: Trajektorie typu 1 pro $\ell = 4$, $\mathcal{E}^2 = 2,73$. Obrázek 8: Trajektorie typu 2 pro $\ell = 2$, $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}_+(\ell = 2) = 1$.



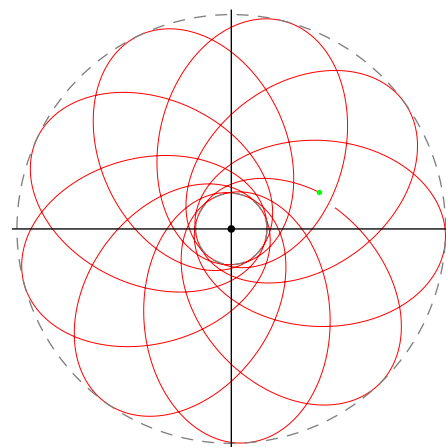
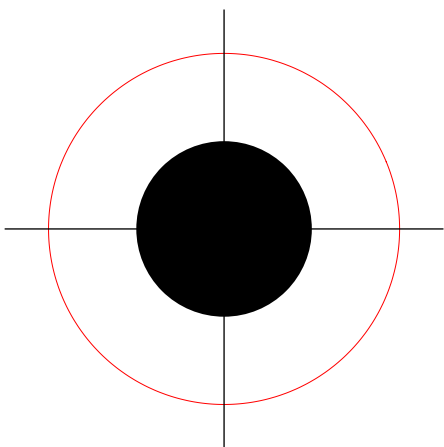
Obrázek 9: Trajektorie typu 3 pro $\ell = 3,5$, $\mathcal{E}^2 = 1$.

Obrázek 10: Trajektorie typu 3 pro $\ell = 4$, $\mathcal{E}^2 = 1,1$.



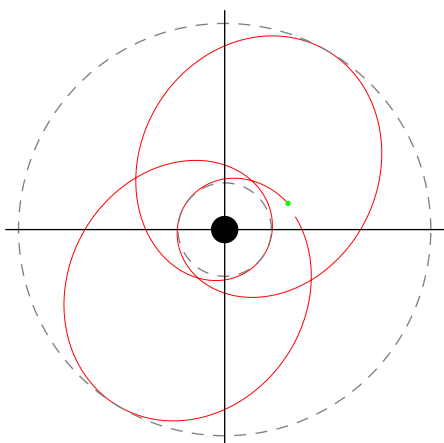
Obrázek 11: Trajektorie typu 3 pro $\ell = 2,3$, $\mathcal{E}^2 = 1,15$.

Obrázek 12: Trajektorie typu 3 pro $\ell = 2,3$, $\mathcal{E}^2 = 1,1701255$.

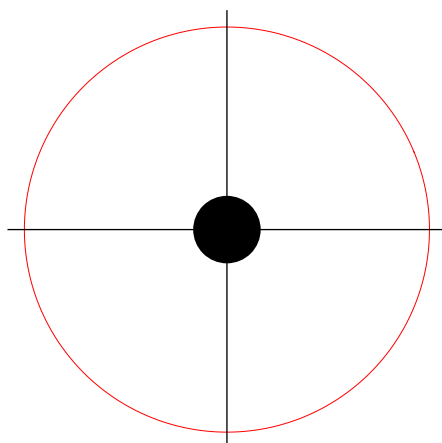


Obrázek 13: Trajektorie typu 4 pro $\ell = 2$, $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}_+(\ell = 2) = 1$.

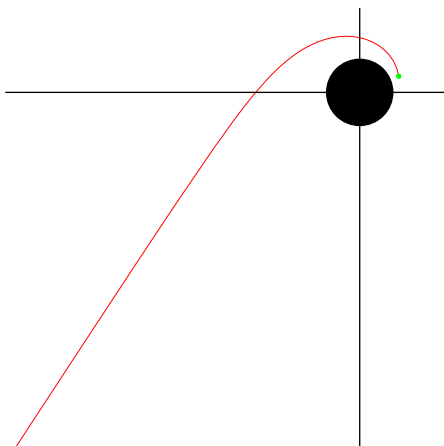
Obrázek 14: Trajektorie typu 5 pro $\ell = 3$, $\mathcal{E}^2 = 0,985$.



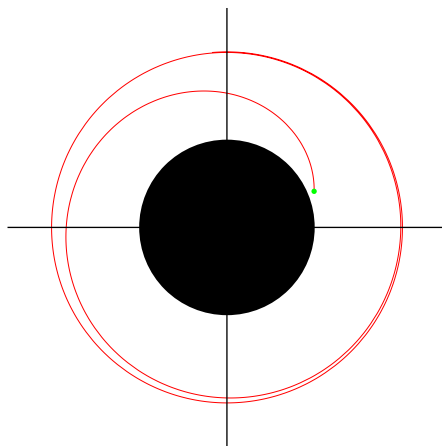
Obrázek 15: Trajektorie typu 5 pro $\ell = 2$, $\mathcal{E}^2 = 0,95$.



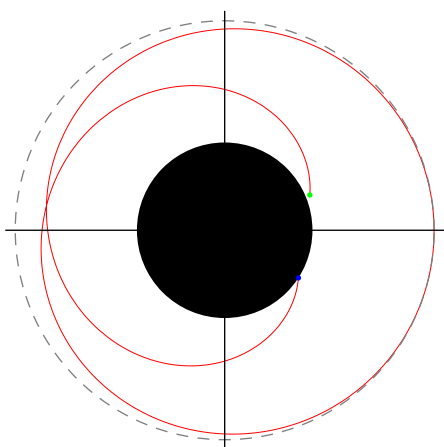
Obrázek 16: Trajektorie typu 6 pro $\ell = 2$, $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}_-(\ell = 2) = \frac{25}{27}$.



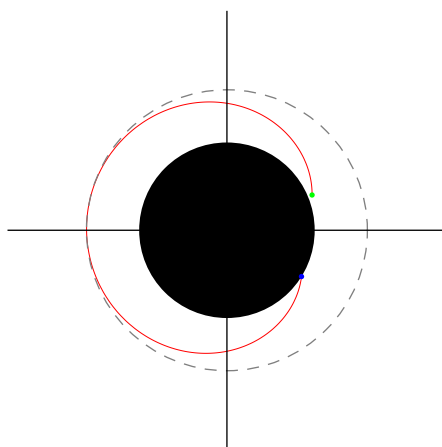
Obrázek 17: Trajektorie typu 7 pro $\ell = 4$, $\mathcal{E}^2 = 3$.



Obrázek 18: Trajektorie typu 8 pro $\ell = 2$, $\mathcal{E}^2 = \mathcal{U}_+(\ell = 2) = 1$.



Obrázek 19: Trajektorie typu 9 pro $\ell = \sqrt{3}$, $\mathcal{E}^2 = 0,887$.



Obrázek 20: Trajektorie typu 9 pro $\ell = 2,3$, $\mathcal{E} = 1,15$.

6 Reissner–Nordströmova černá díra

Dalším řešením Einsteinových rovnic, které může obsahovat černou díru, je Reissner–Nordströmův prostoročas. Tato černá díra je nerotující, nabitá a sféricky symetrická.

6.1 Reissner–Nordströmův prostoročas

Reissner–Nordströmův prostoročas (RN, g) přesně řeší Einsteinovy rovnice (25) bez kosmologické konstanty s dodatečným požadavkem na sférickou symetrii. Zdrojem je v tomto případě libovolné sféricky symetrické těleso s hmotností M a elektrickým nábojem q , přičemž nás opět bude zajímat případ, kdy je tímto tělesem jediný bod, jelikož právě takový zdroj odpovídá prostoročasu s černou dírou.

Stejně jako v minulém případě máme prostoročas s jediným hmotným bodem, na rozdíl však od Schwarzschildova prostoročasu je kolem tohoto bodu generováno elektromagnetické pole, a tudíž se na pravé straně Einsteinových rovnic vyskytuje příslušný tenzor energie a hybnosti. Ze speciální teorie relativity je znám, viz [11], tvar tohoto tenzoru na Minkowského prostoročasu:

$$T_{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\rho\kappa} F_{\sigma}{}^{\kappa} - \frac{1}{4} \eta_{\rho\sigma} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right), \quad (97)$$

kde $F_{\rho\sigma} := A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma}$ jsou složky tenzoru elektromagnetického pole a A je čtyřpotenciál elektromagnetického pole. Pomocí principu obecné kovariance snadno přejdeme do zakřiveného prostoročasu:

$$T_{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\rho\kappa} F_{\sigma}{}^{\kappa} - \frac{1}{4} g_{\rho\sigma} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right), \quad \text{kde } F_{\rho\sigma} = A_{\sigma,\rho} - A_{\rho,\sigma}. \quad (98)$$

Jednoduchým výpočtem ukážeme, že stopa tenzoru energie a hybnosti elektromagnetického pole je nula.

$$T = g^{\sigma\rho} T_{\rho\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_{\rho\kappa} \underbrace{g^{\sigma\rho} F_{\sigma}{}^{\kappa}}_{F^{\rho\kappa}} - \frac{1}{4} \underbrace{g^{\sigma\rho} g_{\rho\sigma}}_4 F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right) = 0. \quad (99)$$

S využitím tohoto výsledku dostáváme Einsteinovy rovnice ve tvaru

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\mu_0} \left(F_{\rho\kappa} F_{\sigma}{}^{\kappa} - \frac{1}{4} g_{\rho\sigma} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right). \quad (100)$$

Kromě Einsteinových rovnic je potřeba kvůli přítomnosti elektromagnetického pole řešit i Maxwellovy rovnice, jejichž zobecnění pro zakřivený prostoročas nalezneme stejným způsobem jako tenzor energie a hybnosti:

$$\begin{aligned} F^{\rho\sigma}{}_{;\rho} &= \mu_0 j^{\sigma}, \\ F_{[\rho\sigma;\nu]} &= 0, \end{aligned} \quad (101)$$

kde j je čtyřproud.

K nalezení Reissner–Nordströmovy metriky je tedy potřeba řešit tři sady rovnic, jejichž řešením ve Schwarzschildových souřadnicích je metrika¹⁵:

$$g = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (102)$$

¹⁵Odvození lze nalézt v [13].

kde $Q := \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$. Na první pohled je patrné, že pro $Q = 0$ přechází podle očekávání Reissner–Nordströmův prostoročas na Schwarzschildův a pro $r \rightarrow +\infty$ se zjednoduší na Minkowského prostoročas.

Horizont událostí nabité černé díry nalezneme stejným způsobem jako nenabitě, řešením rovnice:

$$g^{rr}(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0, \quad (103)$$

kteřá má v \mathbb{C} dvě řešení $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. Fyzikální smysl mají však pouze reálná řešení, proto v závislosti na hodnotách parametrů M a Q rozlišujeme tyto tři případy:

1. $M^2 > Q^2$. Rovnice (103) má dvě reálná řešení r_{\pm} , a tedy prostoročas má dva horizonty událostí. Vnější horizont nacházející se na poloměru $r_+ \in (M, 2M)$ má stejný význam jako H_S , souřadnice t se po jeho překročení stává prostorovou a r naopak časovou. Překročení vnitřního horizontu $r_- \in (0, M)$ mění prostoročasový charakter obou souřadnic zpět na původní stav a ve Schwarzschildově prostoročasu nemá žádnou analogii.
2. $M^2 = Q^2$. Tomuto případu se říká extrémní Reissner–Nordströmovo řešení. Obě řešení rovnice (103) zde splynou v jediné $r = M$, význam souřadnic t a r se však při průchodu horizontem událostí $r = M$ nemění. Metrika g se v tomto případě zjednoduší do tvaru

$$g = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (104)$$

3. $M^2 < Q^2$. V tomto případě neexistuje reálný kořen, díky tomu žádná složka metriky nemění své znaménko, a tedy souřadnice t zůstává vždy časová a souřadnice r vždy prostorová, to znamená, že metrika je v těchto souřadnicích všude regulární až na prostoročasovou singularitu $r = 0$. V této konfiguraci neexistuje žádný horizont událostí.

Obrázek 21 poskytuje jednak grafické řešení rovnic (72) a (103) pro všechny kvalitativně různé případy a také z něj lze vyčíst podle znaménka, jak se s měnící se hodnotou radiální souřadnice r mění kauzální struktura jednotlivých prostoročasů. Pokud je $g^{rr}(r) < 0$ hraje roli času souřadnice r a kauzálně možný je tedy pouze pohyb směrem do centra prostoročasu, pro $g^{rr}(r) > 0$ je časovou souřadnicí t , tudíž je možné se pohybovat směrem k centru i od centra.

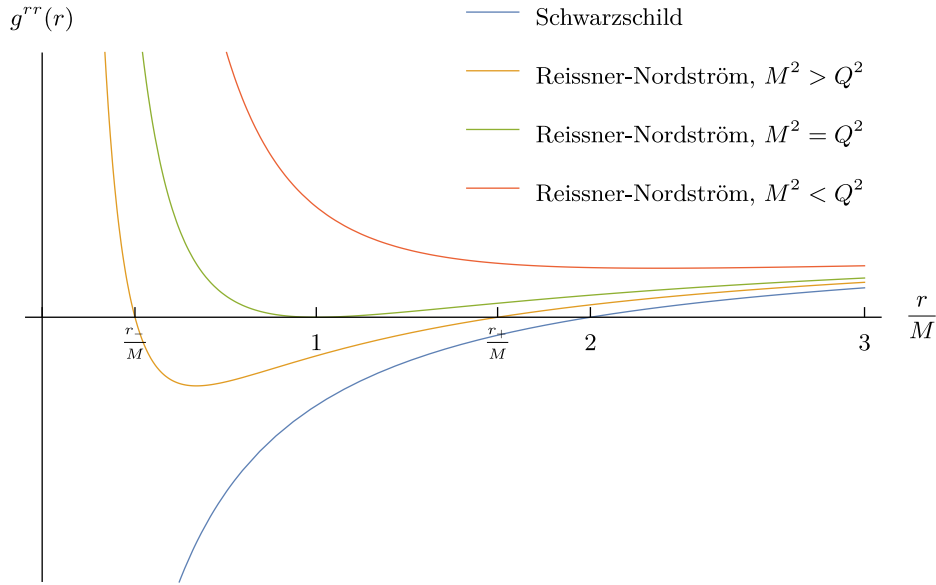
Po stručném představení Reissner–Nordströmovy metriky se přesuneme ke geodetikám. Na-prosto stejným způsobem a při stejném značení¹⁶ jako v předešlé kapitole převedeme rovnici geodetiky na soustavu tří diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}, \quad (105)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right), \quad (106)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}. \quad (107)$$

¹⁶Jedinou změnou je, že zachovávající veličina E je v tomto případě dána výrazem $E = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \frac{dt}{d\lambda}$.



Obrázek 21: Grafy radiální diagonální složky inverze metriky $g^{rr}(r)$, jejichž průsečíky s vodorovnou osou určují polohy horizontů událostí.

Z tvaru rovnice (106) je zřejmé, že bude opět možné diskutovat radiální chování geodetik pomocí metody efektivního potenciálu, jehož roli bude hrát funkce $U(r) := \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right)$. Ještě než přejdeme k detailní diskuzi jednotlivých případů, vyšetříme limitní chování v okolí centrální singularity. Pro světlupodobné i časupodobné geodetiky platí nezávisle na hodnotě veličiny L :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U(r) = +\infty. \quad (108)$$

Jedinou výjimkou je světlupodobný případ s $L = 0$, kdy je efektivní potenciál identicky nula. Odtud je zřejmé, že na rozdíl od Schwarzschildova prostoročasu, kde nebyl problém dosáhnout pohybem po geodetice centrální singularity, v Reissner–Nordströmově prostoročasu se po časupodobné geodetice do centra nedostaneme nikdy a po světlupodobné pouze pokud má nehmotná částice nulový „moment hybnosti“, to jest $L = 0$.

V následujících podkapitolách budeme podobným způsobem jako v kapitole 5 diskutovat trajektorie nenabitých hmotných a nehmotných částic. Jelikož je postup a motivace všech dílčích kroků stejná, je jejich zápis stručnější.

6.2 Časupodobné geodetiky

Při použití transformačních vztahů (82) se vyšetřování průběhu efektivního potenciálu zjednoduší, rovnice (106) se pomocí nich nechá ekvivalentně přepsat do tvaru:

$$\xi^{-4} \left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 = \mathcal{E}^2 - \mathcal{U}(\xi), \quad (109)$$

přičemž jsme zavedli efektivní potenciál \mathcal{U} vztahem $\mathcal{U}(\xi) := \left(1 - \xi + \frac{Q^2}{4M^2}\xi^2\right) (\ell^2\xi^2 + 1)$, popřípadě v řeči proměnné r , $\mathcal{U}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(\frac{4M^2\ell^2}{r^2} + 1\right)$.

Zmapujeme limitní chování efektivního potenciálu v radiálním nekonečnu ($r \rightarrow +\infty$, nebo $\xi = 0$). Pro libovolnou hodnotu veličiny ℓ platí $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(r) = 1$.

Předpis pro efektivní potenciál v proměnné r lze zapsat pomocí $g^{rr}(r)$ tak, že $\mathcal{U}(r) = g^{rr}(r) \left(\frac{4M^2 \ell^2}{r^2} + 1 \right)$, odtud je zřejmé, že funkce $\mathcal{U}(r)$ je nulová pouze na horizontech událostí.

Pro jednoduchost se při diskuzi časupodobných geodetik dále omezíme pouze na extrémní Reissner–Nordströmův prostoročas, to jest takový, ve kterém $Q^2 = M^2$. Efektivní potenciál se zjednoduší do tvaru $\mathcal{U}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^2 (\ell^2 \xi^2 + 1)$. Navíc se zabýváme pouze trajektoriemi vně černé díry, to jest $r \in (M, +\infty)$, případně $\xi \in (0, 2)$.

Nejprve najdeme lokální extrémy a sedlové body, jež jsou důležité pro lokalizaci možných kruhových drah.

$$\mathcal{U}_{,\xi} = \left(\frac{\xi}{2} - 1 \right) (2\ell^2 \xi^2 - 2\ell^2 \xi + 1). \quad (110)$$

Řešení rovnice $\mathcal{U}_{,\xi} = 0$ závisí na hodnotě parametru ℓ a je popsáno v následující tabulce:

Rozsah parametru ℓ	Množina řešení rovnice $\mathcal{U}_{,\xi} = 0$ na $(0, 2)$
$\ell \in [0, \sqrt{2})$	\emptyset
$\ell = \sqrt{2}$	$\{\frac{1}{2}\}$
$\ell \in (\sqrt{2}, +\infty)$	$\{\xi_1, \xi_2\}$

kde $\xi_{1,2} := \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\ell^{-2}} \right)$. Spočtením limity $\ell \rightarrow +\infty$ a dosazením $\ell = \sqrt{2}$ získáme rozsah hodnot, kterých mohou $\xi_{1,2}$ v závislosti na ℓ nabývat, to jest $\xi_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$ a $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$. Dalším krokem je druhá derivace:

$$\mathcal{U}_{,\xi\xi} = 3\ell^2 \xi^2 - 6\ell^2 \xi + 2\ell^2 + \frac{1}{2}. \quad (111)$$

Nyní rozhodneme, zda se v příslušných bodech jedná o lokální minimum, maximum, či sedlový bod efektivního potenciálu.

$$\mathcal{U}_{,\xi\xi} \left(\frac{1}{2} \right) \Big|_{\ell=\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Pro } \ell = \sqrt{2} \text{ se v } \xi = \frac{1}{2} \text{ nachází sedlo.}$$

$$\mathcal{U}_{,\xi\xi}(\xi_1) = \frac{1}{2}\ell^2 - \frac{3}{2}\ell^2 \sqrt{1 - 2\ell^{-2}} - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \ell > \sqrt{2} \text{ se v } \xi_1 \text{ nachází lokální maximum.}$$

$$\mathcal{U}_{,\xi\xi}(\xi_2) = \frac{1}{2}\ell^2 + \frac{3}{2}\ell^2 \sqrt{1 - 2\ell^{-2}} - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \ell > \sqrt{2} \text{ se v } \xi_2 \text{ nachází lokální minimum.}$$

Zbývá napočítat funkční hodnoty efektivního potenciálu v těchto významných bodech:

$$\mathcal{U} \left(\frac{1}{2} \right) \Big|_{\ell=\sqrt{2}} = \frac{27}{32} \quad \mathcal{U}_{1,2} := \mathcal{U}(\xi_{1,2}) = \frac{2\ell \left(\ell^3 + 5\ell \pm (\ell^2 - 2)^{\frac{3}{2}} \right) - 1}{16\ell^2}. \quad (112)$$

Dle předchozího odstavce je pro časupodobné geodetiky přípustná nestabilní i stabilní kruhová dráha. Nestabilní se realizuje pro částice s $\ell \in [\sqrt{2}, +\infty)$ na poloměru

$r_1 := \begin{cases} \frac{2M}{\xi_1} & \text{pro } \ell \in (\sqrt{2}, +\infty), \\ 4M & \text{pro } \ell = \sqrt{2}. \end{cases}$ Po stabilní mohou na poloměru $r_2 := \frac{2M}{\xi_2}$ obíhat částice s $\ell \in (\sqrt{2}, +\infty)$. Příпустné hodnoty r_1 , respektive r_2 , jsou dány intervalem $(2M, 4M]$, respektive $(4M, +\infty)$. Rovnice (112) explicitně určují, jaký vztah musí být mezi veličinami \mathcal{E}^2 a ℓ , aby se částice mohla udržet na příslušné kruhové dráze.

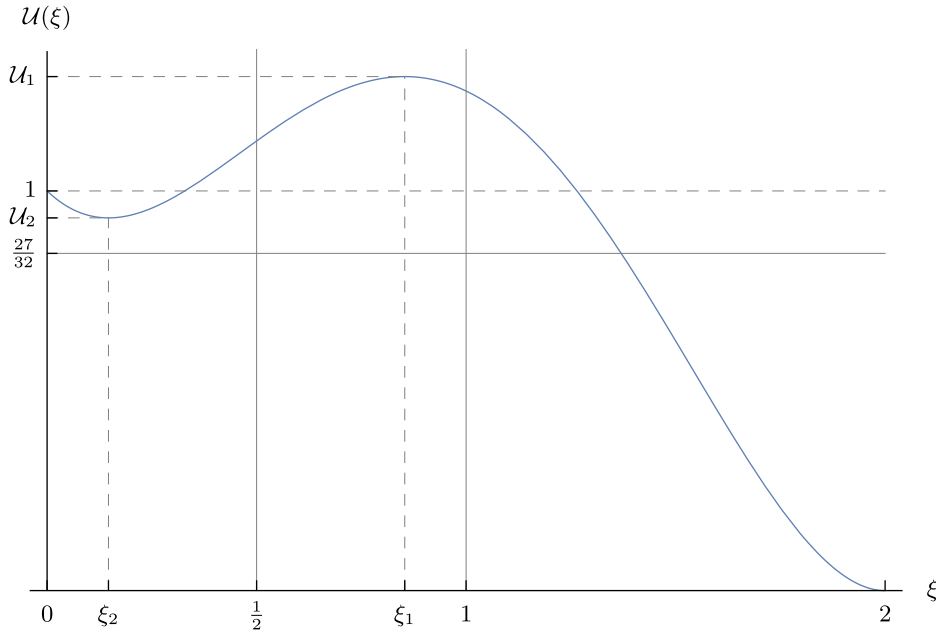
Uvažujme nyní efektivní potenciál jako funkci dvou proměnných $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\xi, \ell)$, z první derivace podle ℓ ,

$$\mathcal{U}_{,\ell} = 2 \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^2 \ell \xi^2, \quad (113)$$

je vidět, že s přibývajícím hodnotou parametru ℓ roste i efektivní potenciál. Stejným postupem jako limity (89) spočteme i limity:

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_1 = +\infty, \quad \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \mathcal{U}_2 = 1. \quad (114)$$

Odtud a z toho, že efektivní potenciál je v ℓ rostoucí získáváme rozsah pro možné hodnoty lokálních extrémů, $\mathcal{U}_1 \in (\frac{27}{32}, +\infty)$ a $\mathcal{U}_2 \in (\frac{27}{32}, 1)$.



Obrázek 22: Průběh efektivního potenciálu $\mathcal{U}(\xi)$ pro případ $\ell > \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{8}}$ – Reissner–Nordströmův prostorčas, časupodobné geodetiky.

Zjistíme hraniční hodnotu parametru ℓ , pro kterou leží celý graf efektivního potenciálu pod přímkou $\mathcal{U} = 1$. Docílíme toho tím, že nalezneme řešení rovnice $\mathcal{U}_1(\ell) = 1$ na intervalu $[0, +\infty)$, tím je $\ell = \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{8}} \approx 1,67$. Částice s $\ell < \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{8}}$, která přilétá z nekonečna, tedy musí nevyhnutelně spadnout do černé díry.

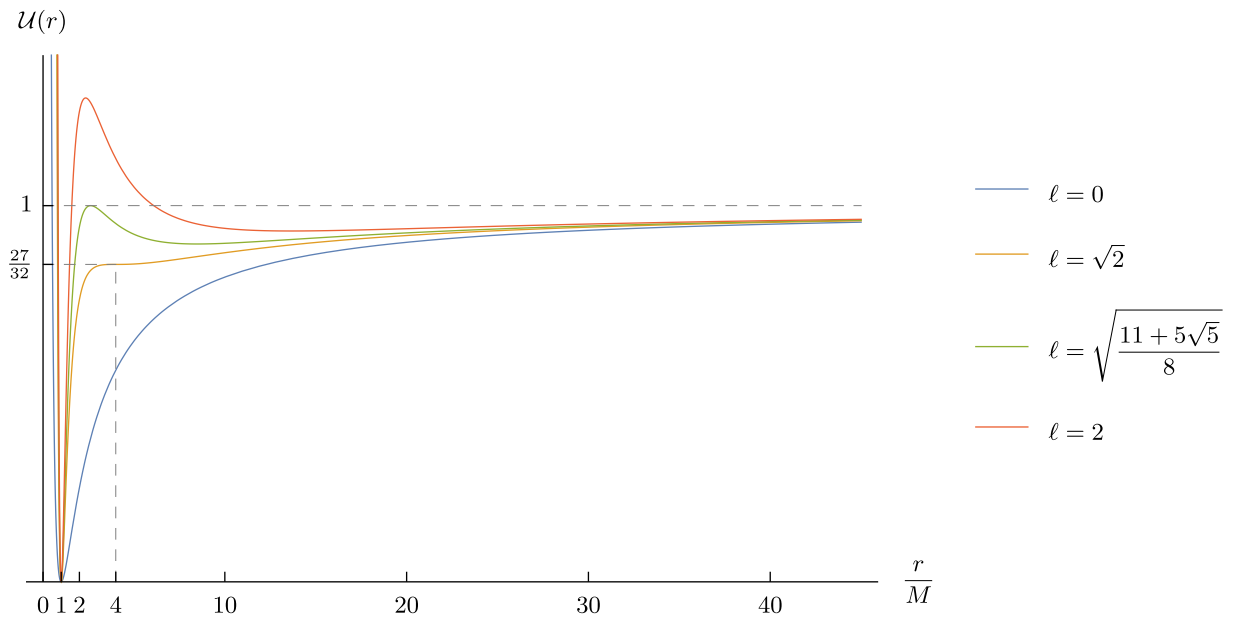
Stejně jako v předešlé kapitole, viz strana 42, můžeme na základě hodnoty parametru ℓ rozlišit tři kvalitativně různé vývoje efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$, které se vně černé díry od

těch Schwarzschildových liší pouze tím, pro jaké hodnoty veličiny ℓ jsou nabývány. První typ nastane pro $\ell \in [0, \sqrt{2}]$, druhý pro $\ell \in \left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{8}}\right]$ a třetí pro $\ell \in \left(\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{8}}, +\infty\right)$.

Příklad třetího typu průběhu efektivního potenciálu $\mathcal{U}(\xi)$ je možné nahlédnout na obrázku 22. Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ všech tří typově odlišných případů jsou vykresleny na obrázku 23.

Pro pevné $\ell > \sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{8}}$ bychom mohli v závislosti na hodnotě konstanty \mathcal{E}^2 a počáteční poloze klasifikovat devět naprosto stejných tříd trajektorií jako v 5. kapitole.

Zjišťujeme tedy, že časupodobné geodetiky se vně extrémní Reissner–Nordströmovy černé díry chovají kvalitativně jako vně Schwarzschildovy černé díry. Jediným rozdílem je jiná lokalizace kruhových drah a celkově jiná závislost trajektorií na vstupních parametrech volných částic. Nicméně s jistotou můžeme říct, že uvnitř černé díry rozdíl nastane, jelikož na rozdíl od Schwarzschildova prostoročasu v Reissner–Nordströmově nemůžeme pohybem po časupodobné geodetice dosáhnout centrální singularity.



Obrázek 23: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{U}(r)$ pro všechny tři kvalitativně různé typy – Reissner–Nordströmův prostoročas, časupodobné geodetiky.

6.3 Světlu podobné geodetiky

Trajektorie nehmotných částic vyřešíme pro obecnou konfiguraci parametrů Q a M . Pro zjednodušení zápisu označíme $\alpha := \frac{Q^2}{M^2}$ a zavádíme značení podobné jako v podkapitole 5.4:

$$\xi := \frac{2M}{r}, \quad \sigma := \frac{E\lambda}{2M}, \quad \ell := \frac{L}{2ME}. \quad (115)$$

Rovnice (106) se pomocí (115) ekvivalentně přepíše do tvaru

$$\xi^{-4} \left(\frac{d\xi}{d\sigma} \right)^2 = 1 - \mathcal{V}(\xi), \quad \text{kde } \mathcal{V}(\xi) := \left(1 - \xi + \frac{\alpha}{4} \xi^2 \right) \ell^2 \xi^2. \quad (116)$$

Pro $\ell = 0$ je funkce $\mathcal{V}(\xi)$ identicky nula, z toho plyne, že částice s $\ell = 0$ se pohybuje po radiální přímce k centru nebo od centra podle toho, kam směřovala její počáteční čtyřrychlost. Tím je vyřešen případ $\ell = 0$ pro libovolnou konfiguraci hmotnosti a náboje a dále už vždy uvažujeme $\ell \neq 0$.

Prozkoumáme nejprve limitní chování efektivního potenciálu v radiálním nekonečnu, $\xi = 0$ ($r \rightarrow +\infty$), $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \mathcal{U}(\xi) = 0$. Stejně jako u časupodobných geodetik je vidět přímo z tvaru efektivního potenciálu, že je nula pouze na horizontech událostí.

Dále určíme přípustnou lokalitu a typ kruhových drah. Prvním zderivováním efektivního potenciálu získáváme:

$$\mathcal{V}_{,\xi} = \xi \ell^2 (\alpha \xi^2 - 3\xi + 2), \quad (117)$$

stacionární bod $\xi = 0$ je pro diskusi nepodstatný, jelikož odpovídá radiálnímu nekonečnu. Zbylé stacionární body závisí pouze na poměru druhých mocnin náboje a hmotnosti α :

- Pro $\alpha < \frac{9}{8}$ existují dva stacionární body $\xi_{1,2} := \frac{3}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9}\alpha} \right)$.
- Pro $\alpha = \frac{9}{8}$ máme jediný stacionární bod $\xi = \frac{4}{3}$.
- Pro $\alpha > \frac{9}{8}$ stacionární bod neexistuje.

Jednoduše napočítáme limity $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \xi_1 = +\infty$ a $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \xi_2 = \frac{2}{3}$. Díky tomu, že ξ_1 je ostře klesající jako funkce α a ξ_2 je ve stejném smyslu ostře rostoucí, můžeme ze spočtených limit určit hodnoty, kterých mohou pro různá α potenciální extrémy $\xi_{1,2}$ nabývat, to jest $\xi_1 \in \left(\frac{4}{3}, +\infty \right)$ a $\xi_2 \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right)$. O tom jestli má efektivní potenciál v těchto bodech lokální extrém rozhoduje druhá derivace:

$$\mathcal{V}_{,\xi\xi} = \ell^2 (3\alpha \xi^2 - 6\xi + 2). \quad (118)$$

Dosažením stacionárních bodů do (118) získáváme:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{,\xi\xi} \left(\frac{4}{3} \right) \Big|_{\alpha=\frac{9}{8}} = 0 & \Rightarrow \text{Pro } \alpha = \frac{9}{8} \text{ má } \mathcal{V} \text{ v } \xi = \frac{4}{3} \text{ sedlo.} \\ \mathcal{V}_{,\xi\xi}(\xi_1) = \frac{9\ell^2}{2\alpha} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9}\alpha} \right) - 4\ell^2 > 0 & \Rightarrow \text{Pro } \alpha < \frac{9}{8} \text{ má } \mathcal{V} \text{ v } \xi_1 \text{ lokální minimum.} \\ \mathcal{V}_{,\xi\xi}(\xi_2) = \frac{9\ell^2}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9}\alpha} \right) - 4\ell^2 < 0 & \Rightarrow \text{Pro } \alpha < \frac{9}{8} \text{ má } \mathcal{V} \text{ v } \xi_2 \text{ lokální maximum.} \end{aligned} \quad (119)$$

Nyní vyčíslíme efektivní potenciál ve výše zmíněných bodech:

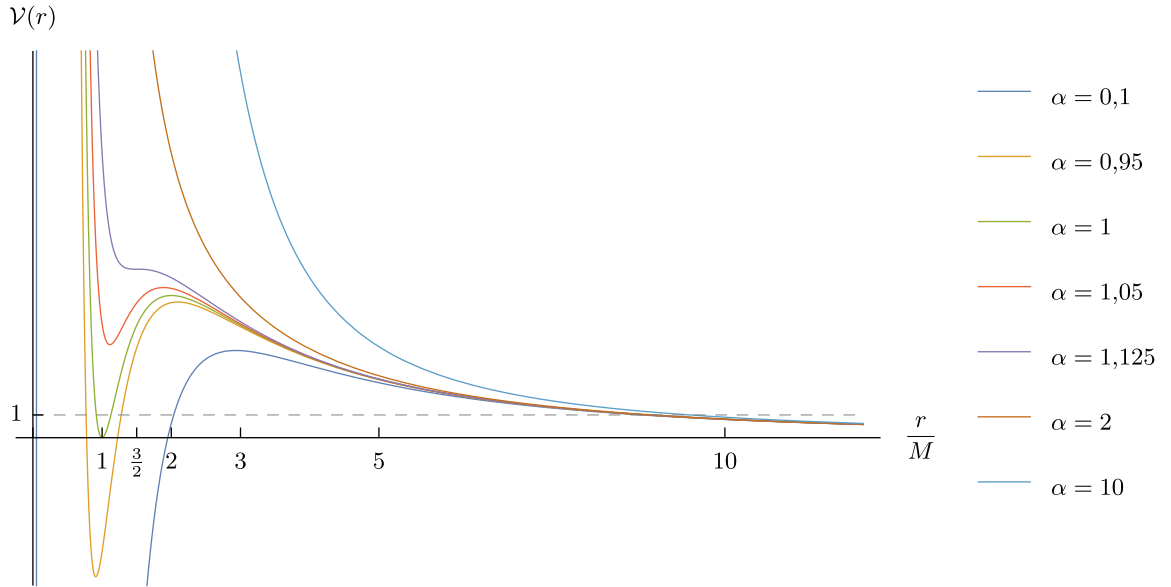
$$\mathcal{V} \left(\frac{4}{3} \right) \Big|_{\alpha=\frac{9}{8}} = \frac{8}{27} \ell^2, \quad \mathcal{V}_{1,2} := \mathcal{V}(\xi_{1,2}) = \frac{\ell^2}{\alpha^3} \left(\alpha \left(\frac{9}{2} - \alpha \right) - \frac{27}{8} \left(1 \pm \left(1 - \frac{8}{9}\alpha \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right). \quad (120)$$

Spočtením první derivace podle α , $\mathcal{V}_{,\alpha} = \frac{\xi^2}{4}$, zjišťujeme, že efektivní potenciál je v α všude rostoucí. Z limit:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_1 = -\infty, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathcal{V}_2 = \frac{4}{27} \ell^2 \quad (121)$$

pak díky monotonii dostáváme pro různá α : $\mathcal{V}_1 \in (-\infty, \frac{8}{27} \ell^2)$ a $\mathcal{V}_2 \in (\frac{4}{27} \ell^2, \frac{8}{27} \ell^2)$.

Kromě základního dělení Reissner–Nordströmova prostoročasu na tři různé případy, viz strana 51, jsme v předchozím odstavci zjistili, že v závislosti na konkrétní hodnotě α se z hlediska průběhu efektivního potenciálu Reissner–Nordströmův prostoročas s nahou singularitou ($\alpha > 1$) dělí na další tři případy, $\alpha \leq \frac{9}{8}$. Na obrázku 24 je všech 5 kvalitativně odlišných průběhů efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ vykresleno.



Obrázek 24: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro pevnou hodnotou parametru ℓ a měnící se hodnotou parametru α tak, aby byly pokryty všechny kvalitativně různé případy – Reissner–Nordströmův prostoročas, světlupodobné geodetiky.

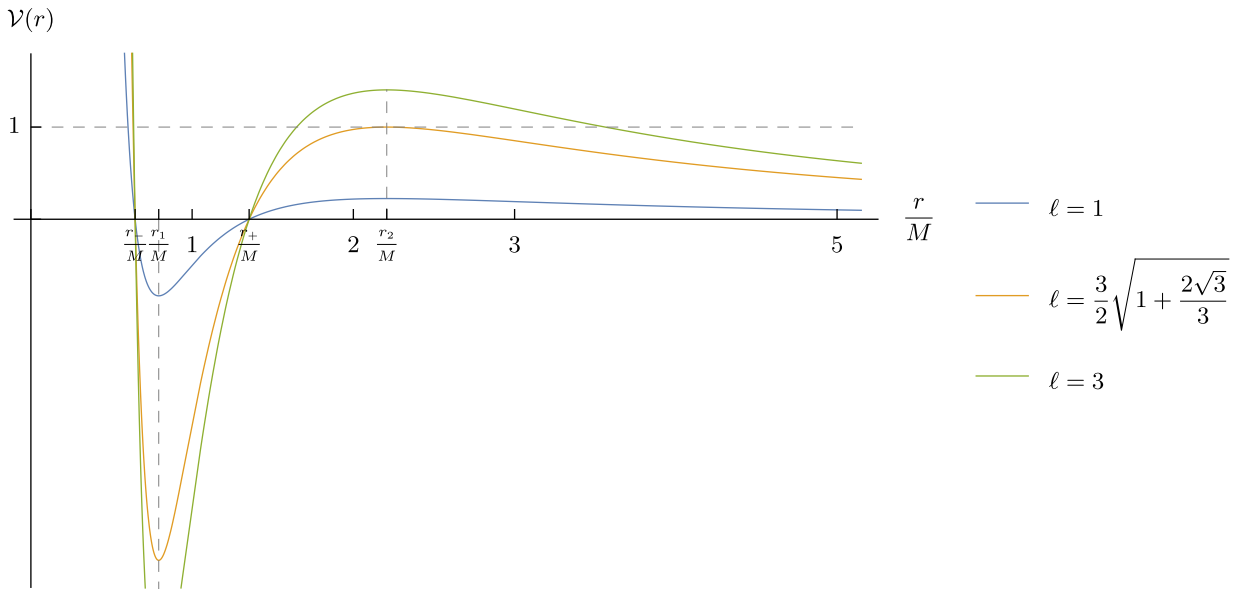
Ještě než začneme diskutovat různé typy Reissner–Nordströmova prostoročasu zvlášť, připomeneme, že stejně jako ve Schwarzschildově prostoročasu jsou radiální body obratu dány rovnicí $1 = \mathcal{V}(r)$.

6.3.1 Subextrémní prostoročas, $M^2 > Q^2$, $\alpha < 1$

Dle (119) existuje v tomto případě lokální minimum ξ_1 i maximum ξ_2 . Jelikož $\xi_1 \Big|_{\alpha=1} = 2$ a $\xi_2 \Big|_{\alpha=1} = 1$, z již zjištěných závislostí $\xi_{1,2}$ na α plyne $\xi_1 \in (2, +\infty)$ a $\xi_2 \in (\frac{2}{3}, 1)$, to v řeči proměnné r znamená, $r_1 \in (0, M)$ a $r_2 \in (2M, 3M)$. Odtud je zřejmé, že lokální minimum efektivního potenciálu se vždy nachází pod vnějším horizontem událostí r_+ a lokální maximum je naopak vždy mimo černou díru. Rozsah možných funkčních hodnot lokálních extrémů je

v závislosti na α následující: $\mathcal{V}_1 \in (-\infty, 0)$ a $\mathcal{V}_2 \in (\frac{4}{27}\ell^2, \frac{1}{4}\ell^2)$. Příklady průběhů efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro tento případ jsou k nalezení na obrázku 25.

Z toho, že efektivní potenciál má své lokální maximum umístěné vždy vně černé díry a toho, že jeho hodnota $\mathcal{V}_2(\ell)$ je v ℓ evidentně rostoucí, viz (120), plyne to, že světlu podobná geodetika má vně černé díry radiální bod obratu právě tehdy, když $\mathcal{V}_2 > 1$. Nestabilní kruhovou dráhu je možné realizovat pro hodnotu veličiny ℓ , jež je pro pevné α dána jednoznačně jakožto řešení rovnice $\mathcal{V}_2(\ell) = 1$ na intervalu $(0, +\infty)$.



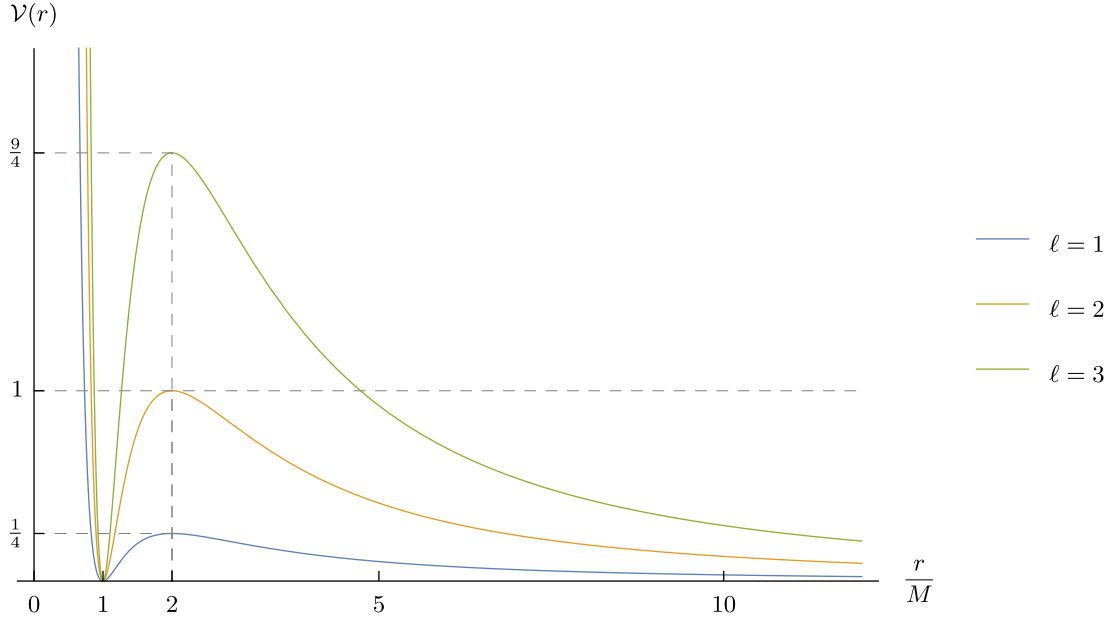
Obrázek 25: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro $\alpha < 1$ – Reissner–Nordströmův prostoročas, světlu podobné geodetiky.

Díky tomu, že pro pevné α se efektivní potenciál zjevně chová kvalitativně stejně jako ten ve Schwarzschildově prostoročasu (podkapitola 5.3), konstatujeme stejný závěr jako u časupodobných geodetik v extrémním Reissner–Nordströmově prostoročasu. Typologie světlu podobných geodetik vně černé díry je v Schwarzschildově a subextrémním Reissner–Nordströmově prostoročase stejná, odlišuje se pouze tím, že jinak závisí na konstantě pohybu ℓ .

6.3.2 Extrémní prostoročas, $M^2 = Q^2$, $\alpha = 1$

Z diskuse (119) je vidět, že efektivní potenciál má tentokrát jak lokální minimum v bodě $r_1 = M$ s hodnotou $\mathcal{V}_1 = 0$, tak lokální maximum v bodě $r_2 = 2M$ s hodnotou $\mathcal{V}_2 = \frac{\ell^2}{4}$. Obrázek 26 ilustruje průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ tohoto typu.

Ze stejných důvodů jako v 6.3.1 má světlu podobná geodetika bod obratu právě tehdy, když $\mathcal{V}_2 = \frac{\ell^2}{4} > 1 \Leftrightarrow \ell > 2$. Pro $\ell = 2$ je pak možné realizovat nestabilní kruhový pohyb na poloměru $r = 2M$.



Obrázek 26: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro $\alpha = 1$ – Reissner–Nordströmův prostoročas, světlupodobné geodetiky.

Stejně jako v subextrémním prostoročasu dospíváme k tomu, že chování světlupodobných geodetik vně černé díry se kvalitativně neliší od toho, který je popsán v podkapitole 5.3.

6.3.3 Prostoročas s nahou singularitou, $M^2 < Q^2$, $\alpha > 1$

V tomto prostoročasu není žádný horizont událostí, a tedy ani žádná černá díra, nachází se v něm pouze takzvaná nahá singularita, která je umístěna v jeho centru. Neexistence horizontu nám umožní vyšetřit geodetický pohyb nehmotných částic na celém prostoročasu bez přechodu do obecnějších souřadnic.

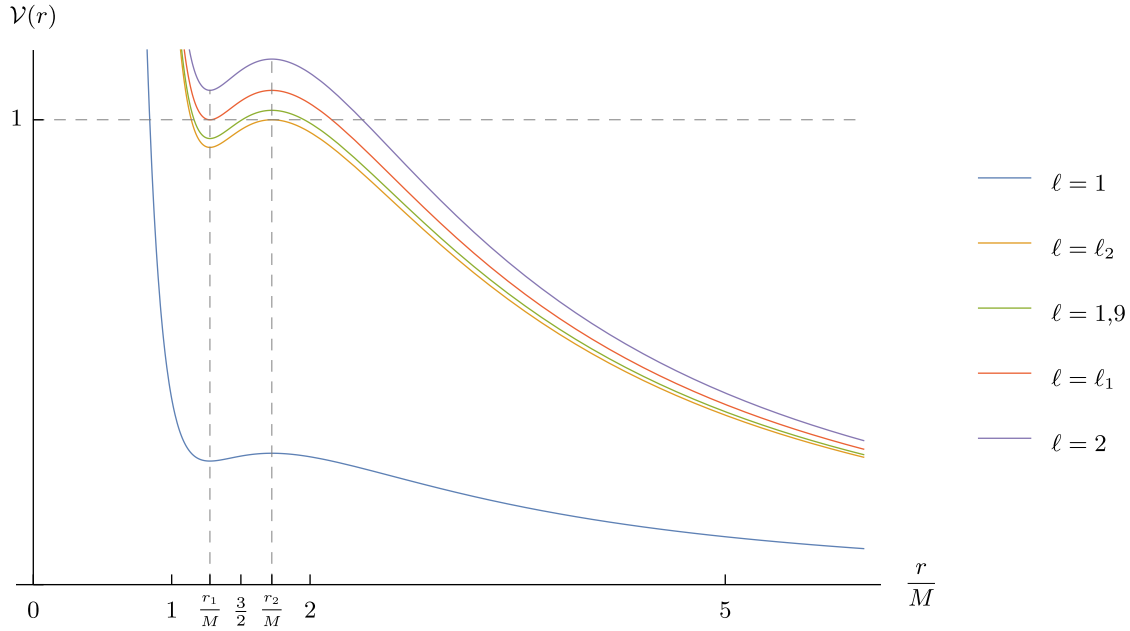
Jelikož tento prostoročas nemůže obsahovat černou díru a $\mathcal{V}(r)$ jde pro $r \rightarrow 0^+$ do nekonečna, má každá světlupodobná geodetika přilétající k centru bod obratu.

Pro tento případ můžeme, jak již bylo zmíněno, odlišit tři kvalitativně různé podpřípady v závislosti na hodnotě parametru α :

6.3.3.1 $\alpha \in (1, \frac{9}{8})$

Efektivní potenciál má dle (119) lokální minimum v bodě $r_1 \in (M, \frac{3}{2}M)$ s funkční hodnotou $\mathcal{V}_1 \in (0, \frac{8}{27}\ell^2)$ a lokální maximum v bodě $r_2 \in (\frac{3}{2}M, 2M)$ s funkční hodnotou $\mathcal{V}_2 \in (\frac{1}{4}\ell^2, \frac{8}{27}\ell^2)$.

V této konfiguraci se mohou volné nehmotné částice pohybovat po stabilních i nestabilních kruhových drahách. Pro dané α jsou jednoznačně určeny poloměry r_1 a r_2 , na kterých mohou být příslušné kruhové dráhy realizovány. Stejně tak jednoznačně jsou rovnicemi $\mathcal{V}_1(\ell) = 1$ a $\mathcal{V}_2(\ell) = 1$ určeny i hodnoty veličiny ℓ , které musí částice mít, aby se na příslušných kruhových drahách



Obrázek 27: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro $\alpha \in (1, \frac{9}{8})$ – Reissner–Nordströmův prostoročas, světlu podobné geodetiky.

udržela. Jednoduchými úpravami tyto hodnoty nalezneme:

$$\ell_{1,2} := \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\alpha \left(\frac{9}{2} - \alpha\right) - \frac{27}{8} \left(1 \pm \left(1 - \frac{8}{9}\alpha\right)^{\frac{3}{2}}\right)}}, \quad (122)$$

ℓ_1 je hodnota potřebná k pohybu po stabilní a ℓ_2 k pohybu po nestabilní kruhové dráze. Několik průběhů efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro tento případ, včetně všech významných, je vykresleno na obrázku 27.

Pro pevně danou konfiguraci prostoročasu α můžeme na základě hodnoty veličiny ℓ a počáteční radiální poloze částice r_0 rozlišit tyto kvalitativně různé typy trajektorií:

(I) Částice přilétající směrem k nahé singularitě.

1. $\ell = \ell_2 \wedge r_0 > r_2$. Navinutí na nestabilní kruhovou dráhu o poloměru $r = r_2$.
2. $\ell \in (0, \ell_2) \cup (\ell_1, +\infty) \vee (\ell \in (\ell_2, \ell_1] \wedge r_0 > r_2)$. Přiblížení k centru až na minimální poloměr r_{min} , který je dán jakožto řešení rovnice $1 = \mathcal{V}(r)$ ¹⁷, a poté únik do nekonečna.
3. $\ell = \ell_2 \wedge r_0 < r_2$. Přiblížení k centru až na minimální poloměr r_{min} , který je dán jakožto řešení rovnice $1 = \mathcal{V}(r)$ na intervalu $(0, r_2)$, a poté následný obrát pohybu směrem od centra, který je zakončen navinutím na nestabilní kruhovou dráhu $r = r_2$.

(II) Orbitální dráhy.

¹⁷Množina, na které je potřeba rovnici řešit, aby bylo r_{min} dáno jednoznačně, je různá v závislosti na hodnotě konstanty ℓ . Pro $\ell \in (0, \ell_2)$ řešíme rovnici $1 = \mathcal{V}(r)$ na intervalu $r \in (0, +\infty)$ a pro $\ell \in (\ell_2, +\infty)$ na intervalu $r \in (r_2, +\infty)$.

4. $\ell = \ell_2 \wedge r_0 = r_2$. Nestabilní kruhová dráha.
5. $\ell \in (\ell_2, \ell_1) \wedge r_0 < r_2$. Poloměr osciluje mezi hodnotami r_{min} a r_{max} , které odpovídají řešením rovnice $1 = \mathcal{V}(r)$ na intervalu $(0, r_2)$.
6. $\ell = \ell_1 \wedge r_0 = r_1$. Stabilní kruhová dráha.

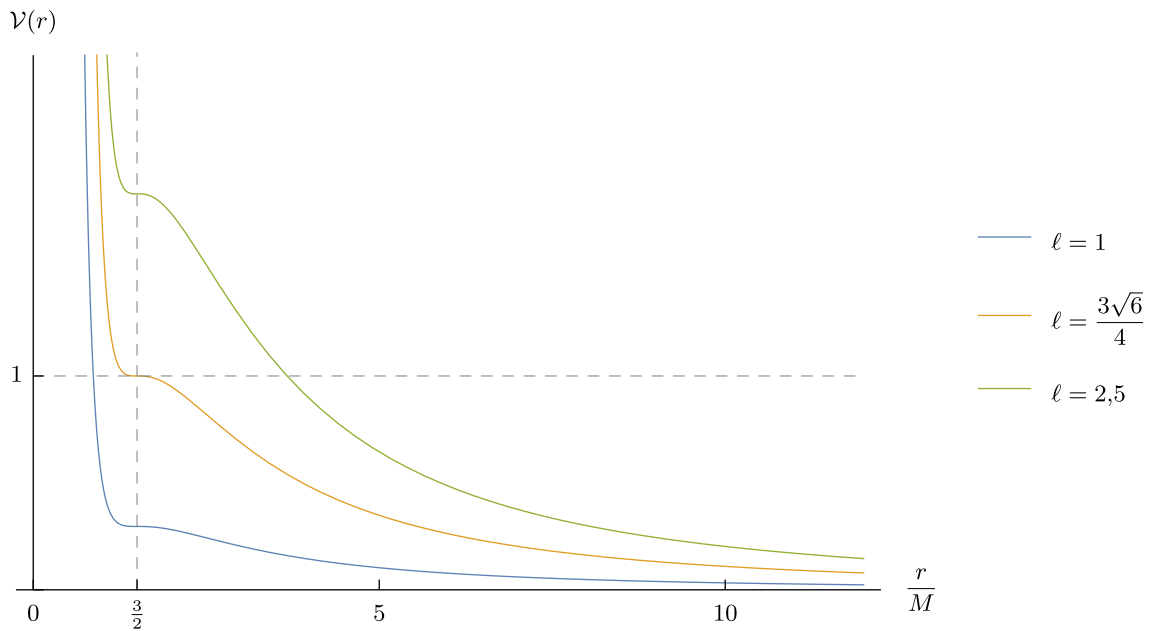
(III) Částice mířící směrem od nahé singularity.

7. $\ell < \ell_2 \vee r_0 > r_2$. Únik do nekonečna.
8. $\ell = \ell_2 \wedge r_0 < r_2$. Analogie k trajektorii typu 1.

6.3.3.2 $\alpha = \frac{9}{8}$

V tomto případě nemá efektivní potenciál lokální extrém, ale místo toho má v bodě $r = \frac{3}{2}M$ sedlo s funkční hodnotou $\mathcal{V}(\frac{3}{2}M) = \frac{8}{27}\ell^2$. Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro tento případ je možné si prohlédnout na obrázku 28.

Pokud je poměr druhých mocnin náboje a hmotnosti právě $\alpha = \frac{9}{8}$, jediná kruhová dráha, po které se může volná částice pohybovat, je nestabilní kruhová dráha s poloměrem $r = \frac{3}{2}M$. Hodnota veličiny ℓ této částice musí být taková, aby $\mathcal{V}(\frac{3}{2}M) \equiv \frac{8}{27}\ell^2 = 1 \Leftrightarrow \ell = \frac{3\sqrt{6}}{4}$.



Obrázek 28: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro $\alpha = \frac{9}{8}$ – Reissner–Nordströmův prostoročas, světlu podobné geodetiky.

Oproti předchozímu případu je klasifikace světlu podobných geodetik značně zjednodušena. V závislosti na hodnotě konstanty pohybu ℓ a radiální počáteční poloze r_0 rozlišujeme tyto třídy geodetik:

- (I) Částice přilétající směrem k nahé singularitě.

1. $\ell = \frac{3\sqrt{6}}{4} \wedge r_0 > \frac{3}{2}M$. Navinutí na nestabilní kruhovou dráhu o poloměru $r = \frac{3}{2}M$.
2. $\ell \neq \frac{3\sqrt{6}}{4}$. Přiblížení k centru až na minimální poloměr r_{min} , který je dán jakožto řešení rovnice $1 = \mathcal{V}(r)$ na \mathbb{R}^+ , a poté únik do nekonečna.

(II) Orbitální dráhy.

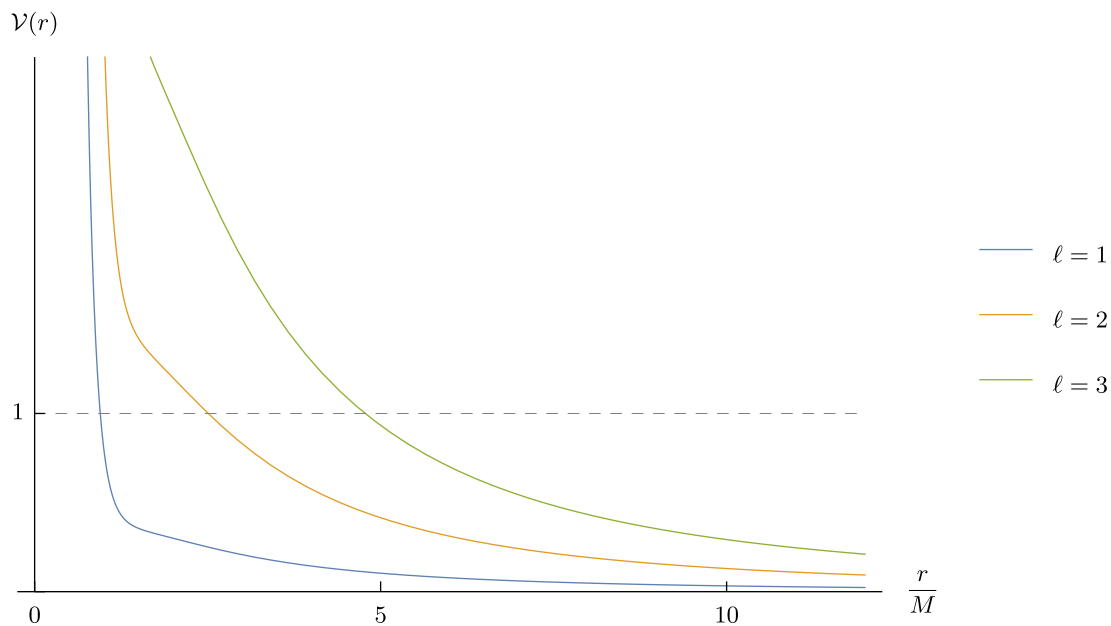
3. $\ell = \frac{3\sqrt{6}}{4} \wedge r_0 = \frac{3}{2}M$. Nestabilní kruhová dráha.

(III) Částice mířící směrem od nahé singularity.

4. $\ell \in \mathbb{R}^+$. Únik do nekonečna.

6.3.3.3 $\alpha \in (\frac{9}{8}, +\infty)$

Efektivní potenciál nemá žádný lokální extrém ani sedlo, z jeho limitního chování v nekonečnu a u centrální singularity plyne, že je ostře klesající funkcí. Jeho průběh je pro několik vybraných hodnot veličiny ℓ znázorněn na obrázku 29.



Obrázek 29: Průběhy efektivního potenciálu $\mathcal{V}(r)$ pro pevné $\alpha > \frac{9}{8}$ – Reissner–Nordströmův prostoročas, světlu podobné geodetiky.

V tomto posledním případě, kdy je průběh efektivního potenciálu nejjednodušší se diskuze volných trajektorií nehmotných částice zjednoduší na pouhé dva typy:

(I) Částice přilétající směrem k nahé singularitě.

1. $\ell \in \mathbb{R}^+$. Přiblížení k centru až na minimální poloměr r_{min} , který je dán jakožto řešení rovnice $1 = \mathcal{V}(r)$ na \mathbb{R}^+ , a poté únik do nekonečna.

(II) Částice mířící směrem od nahé singularity.

2. $\ell \in \mathbb{R}^+$. Únik do nekonečna.

Z podrobné diskuze světlu podobných geodetik v Reissner–Nordströmově prostoročasu s nahou singularitou vidíme, že typologie geodetik závisí na konkrétním poměru druhých mocnin náboje a hmotnosti α . Pokud pomineme to, co jsme již zmiňovali, že pohybem po světlu podobné geodetice s $\ell \neq 0$ v Reissner–Nordströmově prostoročasu nelze dosáhnout centrální singularity, typologie geodetik se i tak od té Schwarzschildovy z podkapitoly 5.3 liší. Zatímco pro $\alpha \in [\frac{9}{8}, +\infty)$ vidíme, že rozdíl oproti podkapitole 5.3 je pouze v menším počtu typů geodetik, pro $\alpha \in (1, \frac{9}{8})$ se mohou volné nehmotné částice pohybovat po drahách (typy 3, 5, 6), po kterých to ve Schwarzschildově prostoročasu nebylo možné.

6.4 Numerické řešení

Jelikož jediným případem, který oproti Schwarzschildově prostoročasu přináší něco kvalitativně nového, je Reissner–Nordströmův prostoročas s nahou singularitou, budeme simulovat pouze geodetiky na tomto prostoročasu, navíc se omezíme pouze na případ s nejbohatší typologií geodetik, $\alpha \in (1, \frac{9}{8})$. Stejně jako v podkapitole 5.5 jsme numericky řešili nezjednodušenou rovnici geodetiky ve Schwarzschildových souřadnicích v ekvatoriální rovině.¹⁸

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\kappa^2} + \frac{2M(r - M\alpha)}{r(r^2 - 2Mr + M^2\alpha)} \frac{dr}{d\kappa} \frac{dt}{d\kappa} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\kappa^2} - \frac{M(r - M\alpha)}{r(r^2 - 2Mr + M^2\alpha)} \left(\frac{dr}{d\kappa} \right)^2 - \frac{r^2 - 2Mr + M^2\alpha}{r} \left(\frac{d\varphi}{d\kappa} \right)^2 &+ \\ + \frac{M(r - M\alpha)(r^2 - 2Mr + M^2\alpha)}{r^5} \left(\frac{dt}{d\kappa} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{d\kappa^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\kappa} \frac{d\varphi}{d\kappa} &= 0. \end{aligned} \tag{123}$$

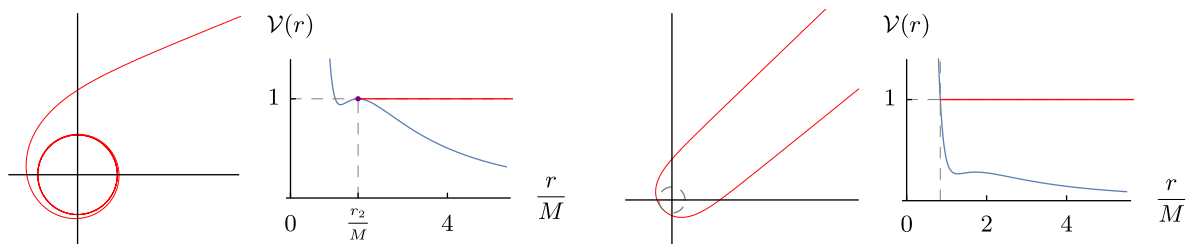
Počáteční podmínky jsou opět voleny ve shodě se zjednodušenými rovnicemi geodetiky (105), (106) a (107). Při stejném značení jako v podkapitole 5.5:

$$\frac{dt}{d\kappa}(0) = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r_0} + \frac{M^2\alpha}{r_0^2}}, \quad \frac{dr}{d\kappa}(0) = k \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2M}{r_0} + \frac{M^2\alpha}{r_0^2}\right) \left(\frac{4M^2\ell^2}{r_0^2}\right)}, \quad \frac{d\varphi}{d\kappa}(0) = \frac{2M\ell}{r_0^2}.$$

Bez újmy na obecnosti pokládáme $M = 1$, konstanty ℓ , α a r_0 jsou voleny tak, aby byly obrázky trajektorií co možná nejnazornější.

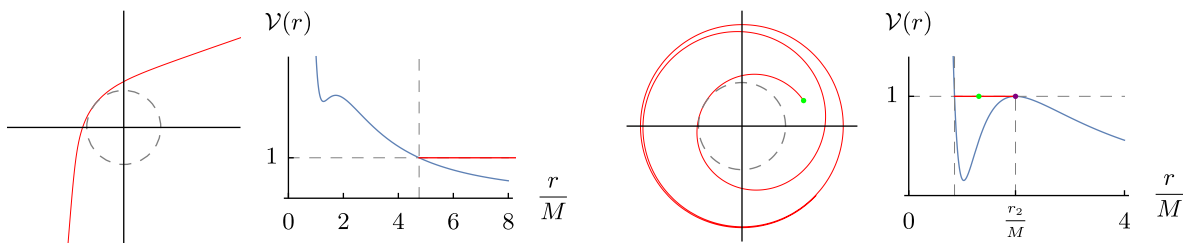
Tentokrát vykreslené obrázky 30 až 35 nepokrývají všech 8 různých tříd světlu podobných geodetik, ale zobrazují pouze několik vybraných případů. Nejzajímavější je obrázek 33, na němž je vykreslena trajektorie, která nemá ve Schwarzschildově prostoročasu obdobu. Navíc je ke každé trajektorii připojen i graf efektivního potenciálu pro daný případ s radiálním průběhem geodetik, který je vyznačen červenou čarou. Zelené body opět značí počáteční polohu částice. V grafech se kromě zelených bodů vyskytují i fialové, které označují to, že se na daném poloměru částice navinula na kruhovou dráhu. Stejně jako v podkapitole 5.5 značí šedé přerušované kružnice radiální body obratu, stejný význam mají i svislé přerušované čáry v příslušných grafech.

¹⁸ $\kappa := E\lambda$, kde λ odpovídá konvenční volbě parametru pro světlu podobné geodetiky.



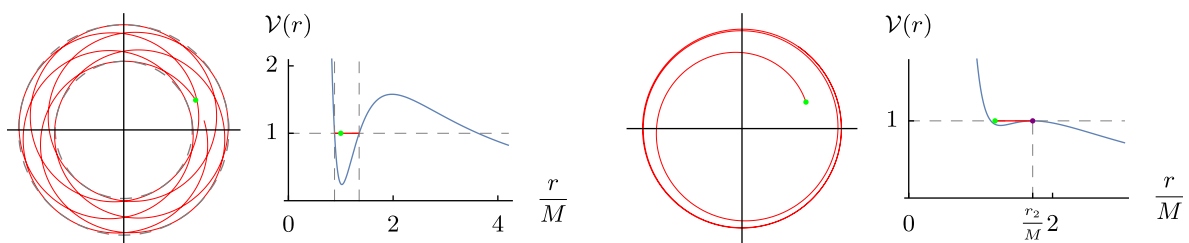
Obrázek 30: Trajektorie typu 1 pro $\alpha = 1,1$, $\ell = \ell_2$.

Obrázek 31: Trajektorie typu 2 pro $\alpha = 1,1$, $\ell = 1$.



Obrázek 32: Trajektorie typu 2 pro $\alpha = 1,1$, $\ell = 3$.

Obrázek 33: Trajektorie typu 3 pro $\alpha = 1,01$, $\ell = \ell_2$.



Obrázek 34: Trajektorie typu 5 pro $\alpha = 1,01$, $\ell = 2,5$.

Obrázek 35: Trajektorie typu 8 pro $\alpha = 1,1$, $\ell = \ell_2$.

Závěr

V práci jsme nejprve poskytli stručný exkurz do diferenciální geometrie s důrazem na pojmy důležité pro standardní formulaci obecné teorie relativity jako jsou například metrika, geodetiky nebo Riemannovy normální souřadnice. Dále jsme tyto pojmy zasadili do kontextu obecné relativity a nastínili odvození Einsteinových polních rovnic pomocí principu korespondence s Newtonovou gravitační teorií. Ve třetí kapitole jsme definovali Lieovu derivaci a symetrie prostoročasu. S pomocí těchto definic jsme v podobě Killingových rovnic formulovali kritérium pro hledání těchto symetrií a našli jsme veličiny, které se podél geodetik zachovávají. Na závěr třetí kapitoly jsme vyslovili geometrické definice stacionárního a statického prostoročasu a naznačili, jak souvisí s častěji uváděnými souřadnicovými definicemi. V následující kapitole jsme prezentovali čtyři různé alternativní přístupy k formulaci rovnice geodetiky. Nejprve jsme ukázali, že geodetiky jsou křivky extremalizující akci volného pohybu a funkcionál délky křivky. Oproti běžnému souřadnicovému postupu, kdy vede variace funkcionálů na Euler–Lagrangeovy rovnice, jsme při obou důkazech postupovali bezsouřadnicově. Dále jsme ukázali, jak rovnici geodetiky získat z Hamiltonových rovnic pro volný pohyb a nakonec jsme ji formulovali v podobě Hamilton–Jacobiho rovnice.

V páté a šesté kapitole jsme se již věnovali geodetikám na konkrétních prostoročasech, Schwarzschildově a Reissner–Nordströmově. V obou případech jsme pomocí aparátu symetrií, který jsme vybudovali ve třetí kapitole, zjednodušili rovnici geodetiky ze soustavy čtyř diferenciálních rovnic 2. řádu na tři rovnice 1. řádu. Díky tvaru radiální rovnice jsme mohli využít metodu efektivního potenciálu a pomocí ní klasifikovat geodetiky do několika různých tříd podle jejich radiálního průběhu.

Vyšetřování časupodobných geodetik ve Schwarzschildově prostoročasu lze chápat jako relativistické zobecnění Keplerovy úlohy z Newtonovy mechaniky. Zjistili jsme, že pohyb volných testovacích hmotných částic lze dle obecné relativity v závislosti na počátečním stavu částice rozdělit do devíti kvalitativně odlišných tříd, namísto čtyř, které předpovídá Newtonova mechanika. Všechny typy časupodobných geodetik se nám následně podařilo numericky nasimulovat. Dále jsme se zabývali světlupodobnými geodetikami, jejichž typologie se ukázala být jednodušší, neobsahuje žádné kvalitativně nové typy a místo devíti jich je sedm.

V následující části jsme se zabývali Reissner–Nordströmovým prostoročasem, který je generován jediným hmotným, elektricky nabitým bodem. Na základě poměru druhých mocnin náboje a hmotnosti tohoto bodu, který jsme označili α , lze klasifikovat tři kvalitativně odlišné případy: subextrémní ($\alpha < 1$), extrémní ($\alpha = 1$) a prostoročas s nahou singularitou ($\alpha > 1$). Podařilo se nám ukázat, že pohybem po časupodobné ani světlupodobné geodetice nelze na rozdíl od Schwarzschildova prostoročasu dosáhnout centrální singularity. Jedinou výjimkou jsou nehmotné částice s nulovým momentem hybnosti. Pro časupodobné geodetiky jsme řešili pouze případ extrémního Reissner–Nordströmova prostoročasu, kde jsme v typologii geodetik neobjevili žádnou kvalitativní odlišnost od té ve Schwarzschildově prostoročasu.

Světlupodobné geodetiky jsme již řešili pro libovolnou hodnotu parametru α , u subextrémního a extrémního prostoročasu jsme opět došli k tomu, že klasifikace geodetik je stejná jako ve Schwarzschildově prostoročasu. Nicméně u geodetik v prostoročasu s nahou singularitou jsme zjistili, že typologie geodetik závisí na hodnotě parametru α , konkrétně na tom, jestli je

menší, rovna nebo větší než $\frac{9}{8}$. První případ, $\alpha \in (1, \frac{9}{8})$, se ukázal být nejzajímavějším, objevili jsme osm rozdílných typů geodetik, z nichž jeden nemá obdobu nejen ve světlupodobných, ale dokonce ani v časupodobných geodetikách na Schwarzschildově prostoročasu. Pro tento případ jsme provedli numerické simulace vybraných typů geodetik.

Pokračování této práce by mohlo být dořešení časupodobných geodetik v Reissner–Nordströmově prostoročasu a následné studium geodetik v okolí zbylých dvou černých děr, Kerrovy a Kerr-Newmanovy. Jelikož jsme se v této práci zabývali pouze geodetikami vně černých děr a oblast pod horizontem událostí pro nás tedy zůstává neprozkoumaná, mohli bychom se v další práci zaměřit i na ni. Alternativně by bylo možné využít nabitě získané znalosti při tvorbě této práce a věnovat se v dalším výzkumu buď konkrétně černým dířám, nebo jinému tématu obecné relativity.

Literatura

- [1] K. Schwarzschild. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 189-196 1916.
- [2] B. P. Abbot et al. *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Physical Review Letters, **116**, 061102, 2016.
- [3] K. Akiyama et al. *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*. The Astrophysical Journal Letters, 875:L1 (17pp), 2019.
- [4] M. Fecko. *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*. 2. vydání. Bratislava: PhDr. Milan Štefanko - Vydavateľstvo IRIS, 2008.
- [5] Ľ. Dvořáková. *Lineární algebra 2*. 2. vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2020.
- [6] L. W. Tu. *Differential geometry: connections, curvature, and characteristic classes*. New York: Springer Science, 2017.
- [7] J. M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*. New York: Springer, 1997.
- [8] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- [9] J. M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. 2. edition. New York: Springer, 2013.
- [10] B. F. Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. New York: Cambridge University Press, 1980.
- [11] I. Štoll, J. Tolar. *Teoretická fyzika*. 2. vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1994.
- [12] V. P. Frolov, A. Zelnikov. *Introduction to black hole physics*. New York: Oxford University Press, 2011.
- [13] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*, New York: Oxford University Press, 1983.