

České vysoké učení technické v Praze

Fakulta jaderná
a fyzikálně inženýrská

Katedra softwarového inženýrství
Obor: Aplikace softwarového inženýrství



Využití difúzních procesů se skokem
pro oceňování opcí

Application of jump-diffusion
processes for option pricing

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Ondřej Pánek
Vedoucí práce: Ing. Quang Van Tran, Ph.D.
Rok: 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne

.....

Bc. Ondřej Pánek

Poděkování

Děkuji Ing. Quang Van Tranovi, Ph.D., za ochotné vedení mé diplomové práce a za rychlou komunikaci. Vždy mi doporučil spoustu konstruktivních nápadů a poskytl pomoc, když bylo potřeba. Děkuji také mé rodině a přítelkyni za velkou podporu při studiu i v životě.

Bc. Ondřej Pánek

Název práce:

Využití difúzních procesů se skokem pro oceňování opcí

Autor: Bc. Ondřej Pánek

Studijní program: Aplikace přírodních věd

Obor: Aplikace softwarového inženýrství

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Ing. Quang Van Tran, Ph.D.

Katedra softwarového inženýrství, Fakulta jaderná
a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Tato práce se zabývá popisem a implementací náhodných procesů pro aplikaci při oceňování opčních kontraktů. V teoretické části jsou nejdříve definovány pojmy z oborů finančních trhů, pravděpodobnosti, matematické statistiky a stochastické analýzy. Poté je věnována pozornost odvození vzorců pro cenu evropské call opce. Popsány jsou tři hlavní modely, a to sice Black-Scholes-Mertonův, skokový a skokově difúzní. Hlavním přínosem práce je pak implementace všech popsaných modelů v prostředí MATLAB včetně porovnání jednotlivých výsledků. Současně jsou také vytvořeny funkce pro simulaci náhodných procesů a jejich grafického zobrazení.

Klíčová slova: Oceňování opcí, skokově difúzní proces, Black-Scholes-Mertonův model, Wienerův proces, Poissonův proces.

Title:

Application of jump-diffusion processes for option pricing

Author: Bc. Ondřej Pánek

Abstract: The thesis deals with the definition and the implementation of the stochastic processes used when modelling the option prices. The theoretical part defines the essential terms and tools from the financial markets, probability theory, statistics and stochastic calculus. Afterwards, the theoretical formulas for the european call option price are derived. Three crucial models are described: Black-Scholes-Merton model, pure jump process, jump-diffusion process. The implementation of the described models in MATLAB is the main contribution of this work. Furthermore, the functions for simulating the stochastic processes are created as well as their graphical illustrations.

Key words: Option pricing, jump-diffusion, Black-Scholes-Merton model, Wiener process, Poisson process.

Obsah

Úvod	9
1 Základy opcí	13
1.1 Základní pojmy	13
1.2 Některé typy opcí	15
1.3 Opční strategie	16
1.3.1 Bull Call Spread	19
1.3.2 Bear Put Spread	20
2 Matematický aparát	21
2.1 Základní pojmy teorie míry	21
2.2 Pravděpodobnost a matematická statistika	23
2.3 Pravděpodobnostní rozdělení	27
3 Stochastická analýza	33
3.1 Náhodný proces	33
3.2 Martingal	35
3.3 Markovský proces	37
3.4 Wienerův proces	37
3.5 Itôovo lemma	40
3.6 Náhodný proces pro cenu cenných papírů	44
3.7 Rizikově neutrální míra	45
3.8 Fundamentální věty pro oceňování aktiv	49
3.9 Poissonův proces	50
3.10 Kompenzovaný Poissonův proces	53
3.11 Složený Poissonův proces	54
4 Black-Scholes-Mertonův model	57
4.1 Odvození BSM rovnice	57
4.2 Alternativní odvození BSM PDR	60
4.3 Cena evropské call opce jako řešení BSM rovnice	62
4.4 Cena evropské call opce podle rizikově neutrální míry	65
5 Stochastické difúzní procesy se skokem	69
5.1 Skokový proces	69
5.2 Cena akcie jako skokový proces	71
5.3 Cena akcie jako skokově-difúzní proces	74

6 Implementace popsaných metod	77
6.1 Wienerův proces	77
6.2 Geometrický Wienerův proces	78
6.3 Poissonův proces	81
6.4 Kompenzovaný Poissonův proces	84
6.5 Složený Poissonův proces	86
6.6 Kompenzovaný složený Poissonův proces	88
6.7 Black-Scholes-Merton	90
6.8 Skokově-difúzní proces	93
6.9 Srovnání metod pro oceňování opcí	96
Závěr	99
Literatura	102
Přílohy	104
A Kód - Wienerův proces	105
B Kód - Geometrický Wienerův proces	107
C Kód - Poissonův proces	111
D Kód - Kompenzovaný Poissonův proces	115
E Kód - Složený Poissonův proces	117
F Kód - Kompenzovaný složený Poissonův proces	119
G Kód - Black-Scholes-Mertonův model	121
H Kód - Skokový proces	123
I Kód - Skokově difúzní proces	125
J Kód - Simulace ceny	127

Úvod

Opční kontrakt, nebo krátce *opce*, je smlouva, která dává jejímu vlastníkovvi právo na nákup nebo prodej určitého množství podkladového aktiva za předem smluvených podmínek. Oceňování opcí je důležitým oborem pro férové nastavení cen tak, aby nemohla vznikat arbitráž. V této práci jako podkladové aktivum uvažujeme akcie, a proto cena opce bude závislá na hodnotě této akcie. Protože nikdo nedokáže s jistotou říci, jak přesně se cena akcie bude vyvíjet, bylo třeba sestavit modely založené na náhodě, které tuto cenu odhadují. Asi nejznámější takový model je *Black-Scholes-Mertonova* parciální diferenciální rovnice pro finanční deriváty. Cena opce se pak z této rovnice odvodí jako její řešení se specifickými podmínkami. Tento přístup je odvozen od difúzního procesu a předpokládá, že změny hodnoty akcie jsou popisovány log-normálním rozdělením a že volatilita ceny je konstantní. Nicméně postupem času pozorování ukázalo, že rozdělení výnosů má spíše *těžší konce* a volatilita není konstantní, ale odpovídá křivce nazývané *volatility smile*. Tyto nedostatky však mohou být eliminovány *skokově difúzním* modelem, který byl v roce 1976 představen R. C. Merton[9].

Difúzní procesy se skokem jsou speciální třídou náhodných procesů, které mají široké uplatnění např. ve fyzice, strojovém rozpoznávání a financích. V této práci je budeme využívat k oceňování opčních kontraktů a modelování cen akcií. Difúzní procesy se skokem (angl. *jump-diffusion*) se skládají z dvou hlavních komponent. První z nich je *difúzní* složka, která představuje spojitý vývoj ceny v čase. Tedy může simulovat pohyb hodnoty akcie směrem nahoru či dolů, ale vždy platí, že čím menší je časový interval mezi dvěma hodnotami, pak bude menší i jejich rozdíl. Tento difúzní pohyb nám umožní spolehlivě odhadovat cenu akcie, pokud nepředpovídáme její razantnější výkyvy. Abychom byli schopni modelovat nečekané a větší skoky v ceně, musíme do modelu přidat druhou, tzv. *skokovou*, část. Skok znamená, že se hodnota akcie může nespojitě změnit. Tedy bez ohledu na velikost časového intervalu se může cena změnit o libovolný přírůstek. Příčinou takových změn může být nové hlášení o stavu firmy, vydání nového zákona, makroekonomické zprávy nebo třeba přírodní katastrofa.

Hlavním cílem této práce je odvodit a implementovat důležité modely pro oceňování opcí. Těmi se myslí Black-Scholes-Mertonův (BSM) model, skokový proces a skokově difúzní model. Aby mohl být tento cíl naplněn, je nutné definovat potřebné pojmy a nástroje z oborů pravděpodobnosti, statistiky a stochastické analýzy. Neoddělitelnou součástí stochastické analýzy jsou náhodné procesy, kterým také bude věnována patřičná pozornost. Mezi ně patří např. Wienerův proces a Poissonův proces. Tyto procesy a jejich modifikace budou nejdříve popsány, poté přijde na řadu

jejich implementace v prostředí MATLAB, a nakonec budou využity pro simulaci cen akcií a opcí.

Jako úvod do problematiky opcí bude sloužit kapitola 1. Stručně řečeno je opce kontrakt, ve kterém má jedna strana právo koupit nebo prodat nějaké podkladové aktivum za předem smluvených podmínek. Pokud jsme koupili, resp. prodali opci, pak jsme v tzv. *long*, resp. *short* pozici. Jestliže je předmětem smlouvy právo na prodej, resp. nákup podkladového aktiva, pak se opce označuje jako *put*, resp. *call*. V kapitole 1 budou popsány některé typy opcí jako např. *evropská* a *americká* opce a s nimi související terminologie. V dalším textu budeme, pokud nebude řečeno jinak, uvažovat vždy *evropskou call opci*.

Pro pochopení a implementaci modelů pro oceňování opcí je třeba nejdříve definovat základní pojmy z teorie míry, pravděpodobnosti a matematické statistiky. Tomuto se bude věnovat kapitola 2. Teprve s těmito základy budeme schopni odvodit pojmy jako Wienerův proces nebo stochastický integrál. Naopak v praktické části budeme muset umět pracovat s některými pravděpodobnostními rozdělení a bude třeba znát jejich základní vlastnosti, proto bude také přehled takových rozdělení náplní této kapitoly.

Stochastická analýza je matematický obor, ve kterém se zabýváme procesy, které obsahují náhodnou složku. V části 3 se setkáme s pojmy z tohoto odvětví matematiky jako *martingal*, *Itôův integrál*, *změna pravděpodobnostní míry* nebo *Wienerův* a *Poissonův proces*. Všechny tyto pojmy (a další) jsou klíčové pro odvětví finanční matematiky, kde se díky nim modeluje např. vývoj cen opcí, akcií a chování trhu obecně.

Kapitola 4 bude pojednávat o slavném Black-Scholes-Mertonově modelu pro oceňování finančních instrumentů. V první části bude nejdříve odvozen tvar Black-Scholes-Mertonovy parciální diferenciální rovnice, která popisuje dynamiku ceny finančních derivátů, jako jsou opce a akcie. V poslední části kapitoly bude pak odvozeno řešení této rovnice pro call opci evropského typu. V roce 1997 pak za práci ohledně Black-Scholes-Mertonova modelu obdrželi dva autoři Scholes a Merton Nobelovu cenu za ekonomii. Třetí z nich, Black, se této ceny nedočkal, neboť v roce 1995 zemřel.

Skokové a skokově difúzní procesy budou představeny v kapitole 5. Nejdříve bude odvozen teoretický vzorec pro výpočet call opce na akcii, která je modelována náhodným procesem, jenž neobsahuje difúzní složku ale pouze skoky. Nakonec bude uvedena také formule pro skokově difúzní proces. Pro oba případy bude taktéž zformulována rovnice, podle níž bude možné sestavit simulace těchto procesů. Toho využijeme v poslední kapitole o implementaci, kde budou porovnány výsledky simulace s teoretickými vzorci.

Poslední kapitolu bude tvořit praktická část, kde budou všechny popsané modely a náhodné procesy implementovány v prostředí MATLAB. Hlavním výsledkem bude srovnání ceny opce, vypočítané nejdříve pomocí BSM modelu, poté podle čistě skokového procesu a nakonec dle skokově difúzního procesu. Pro každou část pak bude v přílohách přiložen zdrojový kód, který bude patřičně zdokumentován. Kromě přiloženého zdrojového kódu bude pro většinu případů popsán také pseudokód a jednotlivé

výsledky budou graficky prezentovány. Součástí zdrojového kódu bude i postup, jak jednotlivé implementované náhodné procesy graficky zobrazit.

Kapitola 1

Základy opcí

Finanční deriváty jsou instrumenty, které umožňují investorům či finančním institucím řídit preferovanou úroveň rizika při obchodování[11]. Tyto nástroje se označují jako *deriváty*, neboť jsou odvozeny od podkladového aktiva, kterým může být například akcie. Zahrnují se mezi ně *opce*, *futures*, *forwardy* a *swapy*. V této práci se budeme zabývat pouze oceňováním opčních kontraktů, a proto v následující části uvedeme s nimi související terminologii a základní vlastnosti.

1.1 Základní pojmy

V této kapitole budou definovány a popsány potřebné pojmy z oblasti finančních derivátů. Pro účely této práce bude však zachycena jen malá část této jinak rozsáhlé oblasti.

Definice 1.1.1 (Opce).

*Opce*¹, nebo také *opční kontrakt*, je smlouva mezi kupujícím a prodávajícím subjektem, kde předmětem smlouvy je právo k nákupu či prodeji nějakého podkladového aktiva v předem stanovém čase T a za předem stanovenou cenu K . Poznamenejme, že v případě držitele opce, jde pouze o právo koupit či prodat, nikoli povinnost [5].

Poznámka 1.1.1 (Přehled názvosloví).

- **Derivát** - instrument, jehož hodnota závisí na hodnotě, nebo obecněji na stavu, nějakého podkladového aktiva. Takovým podkladovým aktivem může být např. ropa, obilí, akcie, fotbalový hráč. Zároveň také může derivátu využít např. farmář, který se chce pojistit proti nepříznivému počasí, které i zde může sloužit jako podkladové aktivum.
- **Finanční derivát** - derivát, jehož podkladovým aktivem je nějaké finanční aktivum. V našem případě bude derivátem vždy *opční kontrakt* a podkladovým aktivem bude *akcie*.

¹Anglicky *Option*, občas bude v textu použita i anglická verze.

- **Prémie** - cena práva (opce), kterou kupující zaplatí prodávajícímu z důvodu nevýhodné pozice prodávajícího. Nebude-li řečeno jinak, premie se bude nadále v textu značit písmenem c .
- **Writer, short position** - vypisovatel, prodávající práva, také *krátká* pozice. Subjekt v krátké pozici je v jisté nevýhodě, neboť má povinnost splnit smluvený obchod i v případě, že pro něj bude cena podkladového aktiva na trhu v čase plnění opce vyšší než domluvená cena. Tato nevýhoda je ovšem kompenzovaná opční premií.
- **Holder, long position** - držitel práva, *dlouhá* pozice. Držitel má možnost se rozhodnout (podle ceny aktiva na trhu), zda právo uplatnit, či nikoli.
- **Call option** - dává držitelovi právo koupit podkladové aktivum za předem smluvených podmínek.
- **Put option** - dává držitelovi právo prodat podkladové aktivum za předem stanovených podmínek.
- **Strike price, exercise price** - předem domluvená cena podkladového aktiva. Pokud nebude řečeno jinak, bude v dalším textu značena jako K .
- **Expiration date, exercise date, maturity** - smluvené datum.
- **Forward** Kontrakt podobný tomu opčnímu, rozdíl je v tom, že jsou si obě strany rovny v tom smyslu, že v době nabití smlouvy se obchod musí uskutečnit. Není obchodovatelný na burze.
- **Futures** Podobný jako forward, ale je obchodovatelný na burze. Z tohoto důvodu má přesněji definované podmínky.

Poznámka 1.1.2. Pokud cena podkladového aktiva v čase T je $S(T)$, pak tzv. *vnitřní hodnota* z **call**, resp. **put** opce je rovna

$$z = (S(T) - K)^+ := \max(S(T) - K, 0), \text{ resp. } z = (K - S(T))^+. \quad (1.1)$$

Příklad 1.1.1. Představme si, že sledujeme akcii, která má současnou hodnotu $S(0) > 0$. U této akcie očekáváme, že za rok její cena bude vyšší než nyní. Koupíme proto evropskou call opci na tuto akcii s podmínkou, že za rok ($t = T$) budeme mít právo opci uplatnit a tuto akcii koupit za K . Opční premie, kterou musíme zaplatit, nechť je c . Pokud tedy cena akcie za rok $S(T)$ bude vyšší než K , uplatníme drženou opci a akcii koupíme. Pokud bude navíc platit, že $S(T) - K > c$, pak můžeme akcii koupit a ihned ji prodat a máme zisk ve výši $S(T) - K - c$.

Pokud bude $S(T) < K$, pak naše právo neuplatníme a platíme tak pouze cenu opce c .

Poznámka 1.1.3. Vypisovatel (subjekt v krátké pozici) vydělá maximálně c , a to v případě, že protistrana neuplatní koupené právo. Na druhou stranu, prodávatel může teoreticky neomezeně. Držitel (dlouhá pozice) může vydělat teoreticky neomezeně a prodávatel maximálně c . Toto je graficky zachyceno na obrázku 1.1.

Poznámka 1.1.4. Opce se z hlediska zpeněžitelnosti (vnitřní hodnoty) mohou nacházet ve třech stavech:

- **ATM** - At-The-Money, tento stav odpovídá tomu, když se spotová cena rovná strike.
- **OTM** - Out-The-Money, spotová cena pro držitele nevýhodná. To znamená, že pro call opci je spot nižší než strike, naopak pro put opci je spot vyšší než strike.
- **ITM** - In-The-Money, opačně než OTM. Tedy pro call opci je spot vyšší než strike, pro put opci je naopak spot nižší než strike.

Poznámka 1.1.5 (Arbitráž).

Arbitráž je možnost, jak nakoupit libovolný druh zboží a bez rizika toto zboží prodat za vyšší cenu, než byla ta nákupní. Pokud taková možnost existuje, pak budou mít všichni zájem ji využít, a tedy se trh dostane rychle do rovnováhy. Taková událost jistě nebude mít dlouhého trvání, a proto se v případě finančních trhů předpokládá, že všechny ceny musí být nastaveny tak, že žádná arbitráž neexistuje.

Pokud můžeme uložit do banky peníze a získávat z nich úroky stanovené úrokovou mírou r , pak neexistence arbitráže znamená to, že není možné vytvořit investici, která by s nulovým rizikem zajišťovala, že míra výnosu r_1 bude větší než r . Pokud by tomu tak bylo, mohli bychom si jednoduše stále půjčovat peníze od banky a tímto způsobem je investovat s jistou mírou zisku $r_1 - r$.

Důsledkem je např. to, že máme-li sestavené portfolio s jistým výdělkem, musí tento výdělek odpovídat úrokové míře r . Jednoduše proto, že pokud by tento výdělek byl nižší, pak se nám vyplatí peníze vložit do banky. V opačném případě bychom si mohli půjčovat od banky pouze a investovat.

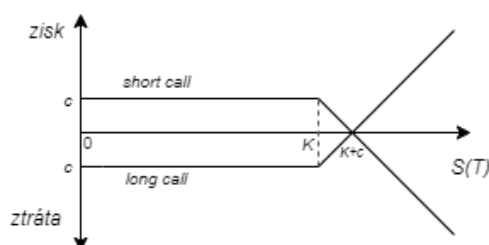
1.2 Některé typy opcí

Opce bychom mohli rozdělit obecně na *Vanilla* a *Exotické* opce. Jednoduše řečeno, exotické opce mají složitější podmínky pro uplatnění práva, než je tomu u vanilla opcí. Nyní bude následovat několik příkladů jak vanilla, tak exotických opcí.

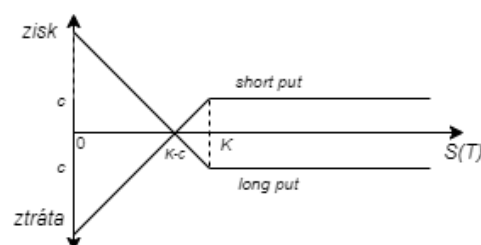
- **Evropská opce** Právo na nákup (prodej) podkladového aktiva je možné uplatnit pouze ke smluvenému datu. V celé práci budeme pod pojmem *opce* rozumět vždy *evropská opce*, pokud nebude řečeno jinak. Výnosy z evropské opce jsou ilustrovány na obrázku 1.1.
- **Americká opce** Tuto opci je možné uplatnit navíc kdykoli před smluveným datem. Společně s evropskou opcí je typu vanilla.
- **Bermudská opce** Je stanoveno několik konkrétních časových okamžiků, kdy může být právo uplatněno. Reprezentuje „něco“ mezi evropskou a americkou opcí.

- **Asijská opce** Výnos z opce je stanoven průměrnou hodnotou podkladového aktiva za určitý časový úsek.
- **Binární opce** Zde existují pouze dva možné výstupy: „výhra-prohra“. Můžeme si vlastně „vsadit“ např. na to, že cena podkladového aktiva bude v čase T vyšší než $S(T)$. Vsadíme na to částku x , a pokud to bude pravda, pak dostaneme smlouvenou část z x . Pokud to pravda nebude, pak přicházíme o celou investici.
- **Izraelská opce** Možnost zrušit kontrakt před dobou plnění, ale je nutné zaplatit pokutu.
- **Chooser opce** Během stanoveného časového okamžiku máme, jako držitelé opce, možnost rozhodnout se, zda-li tato opce bude evropská call či put.

Jak je vidět, existuje celá řada různých opcí, kde některé podléhají racionální analýze a některé zase mohou působit jako čistý risk.



(a) Výnos call opce evropského typu.



(b) Výnos put opce evropského typu.

Obrázek 1.1: Porovnání výnosů call a put opce evropského typu. Znázorněn je vždy vztah mezi vypisovatelem (short position) a držitelem (long position). Vysvětlivky: $S(T)$ - cena podkladového aktiva v maturity termínu, K - domluvená cena podkladového aktiva, c - cena opce.

Poznámka 1.2.1 (Označení proměnných a parametrů).

Následující značení, nebude-li řečeno jinak, bude dodržováno napříč celým textem.

c	prémie, cena opce
$S(0)$	současná cena podkladového aktiva
$S(t)$	cena podkladového aktiva v čase t
T	čas
K	smluvená cena, strike
r_f	úroková míra
σ	volatilita ceny

1.3 Opční strategie

Kombinací dvou nebo více opčních kontraktů můžeme sestavovat strategie, kde spekulujeme např. na růstu či poklesu cen akcií. Než budou představeny některé konkrétní příklady takových strategií, definujme si nejdříve několik souvisejících pojmů.

Definice 1.3.1 (Bull & Bear Market).

Trh, ve kterém ceny cenných papírů dlouhodobě rostou, se nazývá *Bull Market* (býčí trh). Naopak pokud na nějakém trhu dominuje klesající trend cen akcií nebo obecně cenných papírů, pak se nazývá *Bear Market* (medvědí trh) [2].

Poznámka 1.3.1. Dlouhodobě většina trhů s cennými papíry vykazuje býčí trend, protože i přes lokální poklesy, ceny rostou. Na druhou stranu trhy často nabírají medvědí trend po nějaké krizi. V současné době je aktuální epidemie COVID-19, s níž některé trhy nabírají medvědí trend.

Každý z těchto obecných trendů je složen z několika dalších komponent. Těmito komponentami jsou: *primární, sekundární a terciární trend*. Tyto trendy se rozlišují podle délky trvání a vzájemného směru. Tedy primární trend je dlouhodobý, kdežto terciární trend je krátkodobý. Hlavní charakteristikou je však jejich vzájemný pohyb:

- **Primární trend** je právě ten hlavní, dlouhodobě dominující trend.
- **Sekundární trend** působí proti směru primárního trendu a funguje jako jeho „korekce“.
- **Terciární trend**, někdy také „vedlejší“ trend, má stejný směr jako primární trend, avšak je pouze krátkodobý a funguje jako korekce trendu sekundárního.

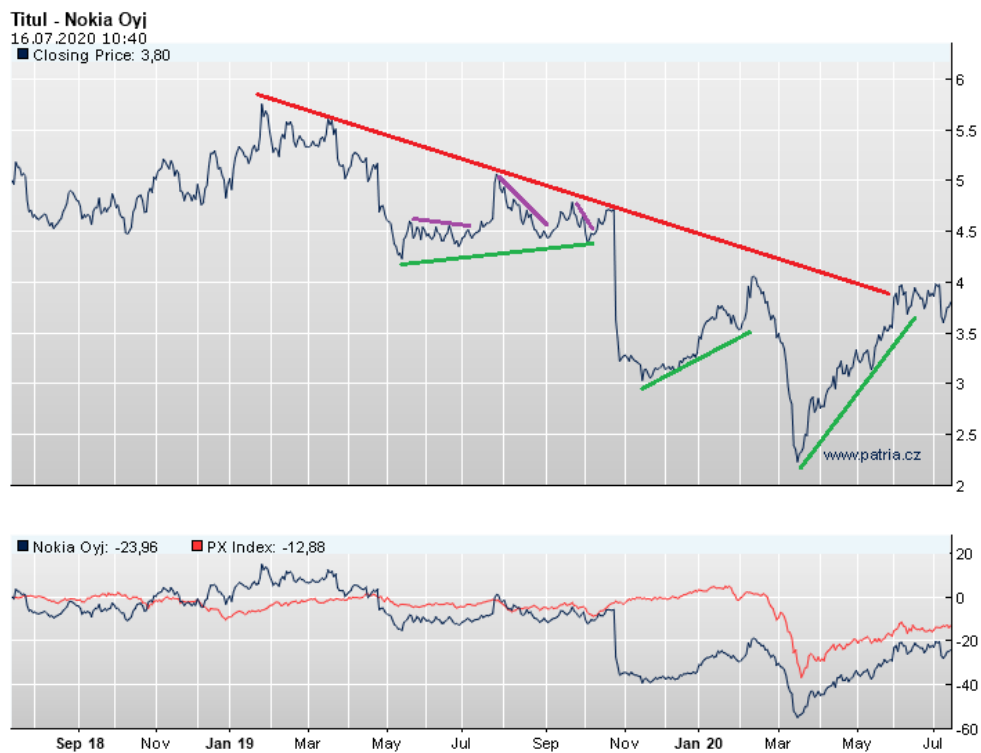
Graficky je toto zachyceno na obrázku 1.2.

Na základě těchto trendů pak obchodníci spekulují o vývoji cen akcií. Spekulovat můžeme třeba o tom, že cena akcií poroste, či poklesne, ale také například o tom, že se cena bude pohybovat v nějakém intervalu, či že tento interval opustí. Podle vlastní analýzy, preferencí a názoru pak můžeme kombinovat opce na takové akcie, abychom podpořili naši spekulaci. V následující části budou představeny některé z možností, jak docílit kýžené strategie.

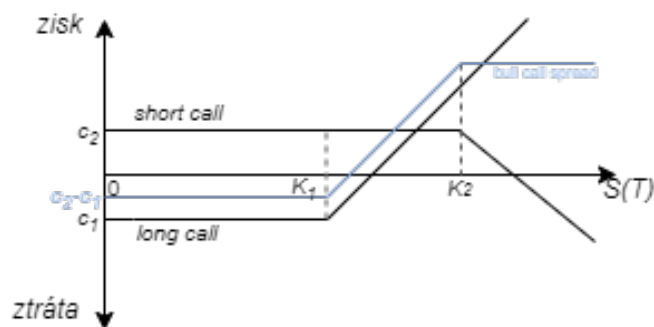
Opční strategie (spread) je kombinace dvou a více put či call opcí. Podle toho, jak si myslíme, že se trh bude vyvíjet, pak takové strategie sestavujeme. Podle maturity termínů je potom dělíme na *vertikální* a *horizontální (kalendářní)* [2].

Pro vertikální spread platí, že všechny opční kontrakty mají stejný termín nabytí platnosti (maturity) T , ale rozdílné strike prices K_1, K_2, \dots . Vertikální spread se používá v situaci, kdy očekáváme „rozumný“ pohyb v cenách podkladového aktiva.

Kalendářní spread pak funguje opačně v tom smyslu, že strike prices K jsou stejné pro všechny skládané opce, ale liší se v době maturity T_1, T_2, \dots . Taková strategie využívá volatility podkladového aktiva. Typicky prodáváme jednu opci c_1 s časem expirace T_1 a kupujeme totožnou opci c_2 s časem expirace $T_2 > T_1$. Maximální ztráta je tedy $c_2 - c_1$. Tuto strategii volíme v případě, že očekáváme zvýšení příslušné volatility. Je tomu tak proto, že s rostoucí volatilitou a stejnými cenami $S(0)$ a K roste i cena opce. Když v čase T_1 se bude cena akcie pohybovat okolo strike price K , ale zvýší se volatilita, pak se zvýší i cena naší call opce, kterou můžeme se ziskem prodat.



Obrázek 1.2: Vývoj cen akcií firmy Nokia za poslední dva rok (čvc 2018 - čvc 2020). Ze spodního grafu je vidět celkový rozdíl mezi začátkem a koncem tohoto období. Cena těchto akcií zde dlouhodobě následuje klesající trend. Označení trendů: **červená** - primární, **zelená** - sekundární, **fialová** - terciární. Pro porovnání je ve spodním grafu zachycen vývoj pražského PX indexu. Zdroj: <https://www.patria.cz/akcie/68191946-96d6-407b-bc8a-e185d2c9380f/nokia-oyj/graf.html>



Obrázek 1.3: Výnos bull call spread v čase T (modrá čára). Současně jsou také zachyceny short a long call opce, ze kterých se bull call spread skládá. Vysvětlivky: $S(T)$ - cena akcie v maturity date, K_1, K_2 strike price, c_1, c_2 cena příslušných opcí.

1.3.1 Bull Call Spread

Při této strategii pracujeme s dvěma call opcemi na stejný termín T a spekulujeme nad růstem ceny akcie. Koupíme jednu call opci (long call) za cenu c_1 při strike price K_1 , druhou call prodáme (short call) za c_2 při strike price $K_2 > K_1$. Musí tedy platit, že $c_2 < c_1$. Graficky je tato strategie zachycena na obrázku 1.3. Výpis možných scénářů je pro přehlednost uveden v tabulce 1.1.

Na bull call strategii je zajímavé to, že místo toho, abychom se nechali unést velkým potenciálním růstem akcií, se snažíme využít situace, že akcie porostou alespoň trochu.

$S(T)$ vs strike	výnos long call	výnos short call	výnos celkem
$S(T) < K_1$	$-c_1$	c_2	$c_2 - c_1$
$S(T) \in \langle K_1, K_2 \rangle$	$S(T) - K_1 - c_1$	c_2	$S(T) - K_1 + c_2 - c_1$
$S(T) > K_2$	$S(T) - K_1 - c_1$	$K_2 - S(T) + c_2$	$K_2 - K_1 + c_2 - c_1$

Tabulka 1.1: Analýza výnosů z bull call spread strategie. Vysvětlivky: $S(T)$ - cena akcie v maturity date, K_1, K_2 strike price, c_1, c_2 cena příslušných opcí. Červená, resp. zelená barva indikují jistou ztrátu, resp. zisk.

Pokud se cena akcií v čase T bude pohybovat pod strike price K_1 , pak naše spekulace o růstu byla chybná a zaplatíme $c_2 - c_1$. Když bude platit, že $K_1 < S(T) < K_2$, pak bude výnos o c_2 vyšší, než kdybychom koupili pouze call opci. V situaci, kdy $S(T) > K_2$, pak obdržíme maximální výnos ve výši $K_2 - K_1 + c_2 - c_1$. Z toho je vidět, že máme sice omezený maximální zisk, nicméně těžíme hlavně ze situace, kdy se $S(T)$ pohybuje mezi oběma strike price. Pak díky této strategii obdržíme navíc ještě c_2 , než kdybychom drželi jen samostatnou call opci na tuto akcii.

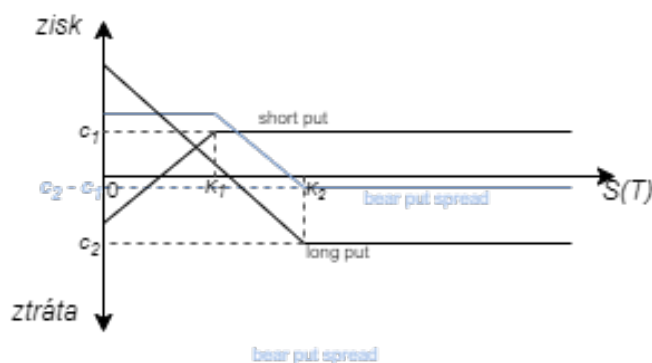
1.3.2 Bear Put Spread

Jak název napovídá, v tomto případě spekulujeme nad poklesem cen, tzn. že největší ztrátu utrpíme při růstu $S(T)$. Bear put složíme jako kombinaci short put c_1 za strike K_1 a long put c_2 za strike K_2 , kde $K_1 < K_2$. Z toho plyne, že $c_2 > c_1$. Graficky máme tuto strategii zachycenou na obrázku 1.4 a přehled scénářů je v tabulce 1.2.

Při této strategii se snažíme ještě více podpořit naši spekulaci o nějakém rozumném poklesu cen akcií a zároveň se nenecháváme unést možností, že by ceny klesly nějak rapidně. Protože pokud je naše domněnka správná, pak vyděláme ještě o c_1 více než v případě obyčejné long put opce.

$S(T)$ vs strike	výnos long put	výnos short put	výnos celkem
$S(T) < K_1$	$K_2 - S(T) - c_2$	$S(T) - K_1 + c_1$	$K_2 - K_1 - c_2 + c_1$
$S(T) \in \langle K_1, K_2 \rangle$	$K_2 - S(T) - c_2$	c_1	$K_2 - S(T) - c_2 + c_1$
$S(T) > K_2$	$-c_2$	c_1	$c_2 - c_1$

Tabulka 1.2: Analýza výnosů z bear put spread strategie. Vysvětlivky: $S(T)$ - cena akcie v maturity date, K_1, K_2 strike price, c_1, c_2 cena příslušných opcí. Červená, resp. zelená barva indikují jistou ztrátu, resp. zisk.



Obrázek 1.4: Výnos bear put spread v čase T (modrá čára). Současně jsou také zachyceny short a long call opce, ze kterých se bear put spread skládá. Vysvětlivky: $S(T)$ - cena akcie v maturity date, K_1, K_2 strike price, c_1, c_2 cena příslušných opcí.

Pokud cena $S(T)$ klesne ještě pod K_1 , pak je náš zisk omezený tím, že protistrana opci využije a my budeme muset nakoupit za K_1 , nicméně ihned také prodáme za K_2 . Long put jsme koupili za c_2 a short put prodali za $c_1 < c_2$, tedy čistý zisk bude roven $K_2 - K_1 - c_2 + c_1$. Pokud $K_1 < S(T) < K_2$, pak uplatníme long opci a získáváme $K_2 - S(T) - c_2 + c_1$. Bod zvratu, kdy se už se ziskem dostáváme do záporných čísel, nastává pro $S(T) = K_2 - c_2 + c_1$. Ve zbylém případě, kdy $S(T) > K_2$, ani jedna ze stran opcí nevyužije a my musíme zaplatit rozdíl z opčních prémie $c_2 - c_1$.

Kapitola 2

Matematický aparát

Teorie pravděpodobnosti je důležitým základním stavebním kamenem pro náhodné procesy a pro zavedení pojmů jako *Wienerův* a *Poissonův proces*. Pro jejich pochopení, sestavení simulace a aplikaci, je třeba definovat některé pojmy z teorie míry, pravděpodobnosti a matematické statistiky. Tato kapitola bude zavádět pouze nezbytně nutné pojmy a nástroje z těchto oblastí tak, abychom později mohli simulovat jak difúzní tak skokové procesy nebo třeba odvodit řešení Black-Scholesovy rovnice pro výpočet ceny opce.

2.1 Základní pojmy teorie míry

Definice 2.1.1. Necht Ω je neprázdná množina a množina \mathcal{F} obsahuje podmnožiny množiny Ω . Řekneme, že \mathcal{F} je σ -algebra, pokud splňuje následující:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Poznámka 2.1.1. Z definice σ -algebry \mathcal{F} plyne, že i sjednocení dvou množin $A, B \in \mathcal{F}$ leží v \mathcal{F} . Můžeme totiž sestavit posloupnost $A, B, \emptyset, \emptyset, \dots$, a pak s využitím 1. a 3. bodu předchozí definice dostaneme, že $A \cup B \in \mathcal{F}$. Stejně tak konečný i nekonečný průnik množin z \mathcal{F} patří do \mathcal{F} . To plyne z

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \right)^c.$$

Protože $\emptyset^c = \Omega$ a zároveň $\emptyset \in \mathcal{F}$, potom také $\Omega \in \mathcal{F}$.

Definice 2.1.2. Necht Ω je neprázdná množina a \mathcal{F} je příslušná σ -algebra jejích podmnožin. Pak se uspořádaná dvojice (Ω, \mathcal{F}) označuje jako *měřitelný prostor*.

Definice 2.1.3. Jsou dané měřitelné prostory $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ a $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. Zobrazení $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ nazveme *měřitelné*, pokud

$$\forall B \in \mathcal{F}_2 : \{\omega \in \Omega_1 | f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_1.$$

Definice 2.1.4. Mějme měřitelný prostor (Ω, \mathcal{F}) . Funkci $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *mírou* právě, když

1. $\forall A \in \mathcal{F} : \mu(A) \geq 0$,
2. $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j, i \neq j : \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.

Navíc řekneme, že μ je *konečná míra*, resp. *σ -konečná míra*, pokud splňuje

1. $\mu(\Omega) < +\infty$, resp.
2. existují-li množiny $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} : \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$ a zároveň $\forall i : \mu(A_i) < +\infty$.

Poznámka 2.1.2 (Riemann-Stieltjesův integrál).

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) . Nechť $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je náhodná veličina. Vezmeme-li v úvahu střední hodnotu této náhodné veličiny, můžeme ji vyjádřit více způsoby:

$$EX \stackrel{(a)}{=} \int_{\Omega} X dP \stackrel{(b)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) \stackrel{(c)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (2.1)$$

kde $F(x)$, resp. $f(x)$ je distribuční funkce, resp. hustota náhodné veličiny X . Za rovnítkem (a) máme Lebesgueův integrál, za druhým (b) pak Riemann-Stieltjesův integrál a za třetím (c) klasický Riemannův integrál. Nyní bude stručně popsán právě Riemann-Stieltjesův integrál [13].

Definice 2.1.5. Nechť $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ a mějme funkci $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která je na $\langle a, b \rangle$ omezená. Dále nechť funkce $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je rostoucí. Označme $d_n = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ jako dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, dále $A_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ jako jednotlivé podintervaly. Definujme *horní*, resp. *dolní Riemann-Stieltjesův součet funkce f podle funkce g vzhledem k dělení d_n* jako

$$U(d_n, f, g) = \sum_{i=1}^n M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})), \text{ resp.} \quad (2.2)$$

$$L(d_n, f, g) = \sum_{i=1}^n m_i(g(x_i) - g(x_{i-1})), \quad (2.3)$$

kde pro $i = 1, 2, \dots, n$ je

$$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x),$$

$$m_i = \inf_{x \in A_i} f(x).$$

Definice 2.1.6. Necht funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$. Mějme $\mathcal{D}(\langle a, b \rangle)$ množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkci g rostoucí na $\langle a, b \rangle$. Pak definujeme *horní*, resp. *dolní Riemann-Stieltjesův integrál* jako

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)dg(x) = \inf_{d_n \in \mathcal{D}} U(d_n, f, g), \text{ resp.}, \quad (2.4)$$

$$\int_{\underline{a}}^b f(x)dg(x) = \sup_{d_n \in \mathcal{D}} L(d_n, f, g). \quad (2.5)$$

Pokud se navíc tyto dva integrály rovnají, pak říkáme, že funkce f je *Riemann-Stieltjesovsky integrabilní* nebo také, že f je *Riemannovsky integrabilní podle g* . Hodnotu tohoto integrálu označujeme jako

$$\int_a^b f(x)dg(x), \text{ nebo } \int_a^b f dg. \quad (2.6)$$

Poznámka 2.1.3. Jednou z důležitých vlastností Riemann-Stieltjesova integrálu je převod na klasický Riemannův integrál. Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b \rangle$, funkci g neklesající na $\langle a, b \rangle$ a má Riemannovsky integrabilní derivaci na tomto intervalu. Pak platí

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx. \quad (2.7)$$

Riemann-Stieltjesova integrálu budeme využívat např. při výpočtech vlastností náhodných proměnných, kde se bude integrovat podle nějaké distribuční funkce daného rozdělení. V takových případech se pro výpočet používá převod na Riemannův integrál podle vzorce (2.7).

2.2 Pravděpodobnost a matematická statistika

Definice 2.2.1. Necht Ω je neprázdná množina a \mathcal{F} je σ -algebra podmnožin z Ω . Množinovou funkci P nazveme *pravděpodobností*, splňuje-li

1. $P : \mathcal{F} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$.

Poznámka 2.2.1. Protože $\emptyset, \emptyset, \dots$ je posloupnost disjunktních množin a zároveň $\emptyset = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \emptyset$, můžeme využít 3. bodu předchozí definice, tedy $P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\emptyset)$. Z tohoto

a 1. bodu definice pravděpodobnosti plyne, že

$$P(\emptyset) = 0. \quad (2.8)$$

Protože $P(\Omega) = 1$ a zároveň pro $A \in \Omega$ platí, že $\Omega = A^c \cup A$, potom dostáváme

$$P(A^c) = 1 - P(A). \quad (2.9)$$

Definice 2.2.2. Množinu všech možných výsledků nějakého děje značíme Ω a nazýváme ji *prostor elementárních jevů*. *Elementárním jevem* rozumíme libovolný prvek $\omega \in \Omega$. Předpokládejme, že máme danou σ -algebru \mathcal{F} na prostoru Ω . Libovolná podmnožina $A \subset \mathcal{F}$ se označuje jako *náhodný jev*. Mějme definovanou pravděpodobnostní míru na množině \mathcal{F} . Potom uspořádaná trojice (Ω, \mathcal{F}, P) se nazývá *pravděpodobnostní prostor*.

Poznámka 2.2.2. Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) a borelovskou množinu $B \in \mathcal{F}$. Vzor této množiny při zobrazení X je množina $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}$. Každé takové množině můžeme definovat pravděpodobnostní míru $\mu_X(B) = P\{X^{-1}(B)\}$. Tato míra $\mu_X(B)$ se nazývá *zákon rozdělení náhodné veličiny*.

Definice 2.2.3. Nechť $X(\omega)$ je měřitelná funkce z (Ω, \mathcal{F}, P) do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, kde \mathcal{B} je systém borelovských podmnožin množiny \mathbb{R} . Pak se taková funkce $X = X(\omega)$ nazývá *náhodná veličina*.

Definice 2.2.4. Mějme (Ω, \mathcal{F}, P) a nechť $A, B \in \mathcal{F}$ takové, že $P(B) > 0$. Potom definujeme *podmíněnou pravděpodobnost* $P(A|B)$ jevu A za podmínky B definujeme vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Definice 2.2.5. Nechť máme náhodné veličiny X_1, \dots, X_n na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Potom vektor $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ nazýváme *náhodným vektorem*.

Definice 2.2.6. Mějme náhodný vektor $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Pro $r \in \{1, \dots, n-1\}$ definujme další dva náhodné vektory následovně:

$$\begin{aligned} \vec{Y} &= (X_1, \dots, X_r), \\ \vec{Z} &= (X_{r+1}, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Nechť λ , resp. ν , je σ -konečná míra na $(\mathbb{R}_r, \mathcal{F}_r)$, resp. na $(\mathbb{R}_{n-r}, \mathcal{F}_{n-r})$. Předpokládejme, že náhodný vektor \vec{X} má hustotu $p(\vec{x})$ k míře $\mu = \lambda \times \nu$. To znamená, že μ je σ -konečná míra na $(\mathbb{R}_n, \mathcal{F}_n)$.

Nezápornou měřitelnou funkci $r(\vec{z}|\vec{y})$ nazveme *podmíněnou hustotou* náhodného vektoru \vec{Z} vzhledem k $\vec{Y} = \vec{y}$, pokud $\forall A \in \mathcal{F}_r, \forall B \in \mathcal{F}_{n-r}$ splňuje

$$P(\vec{Y} \in A, \vec{Z} \in B) = \int_A \left(\int_B r(\vec{z}|\vec{y}) d\nu(\vec{z}) \right) q(\vec{y}) d\lambda(\vec{y}), \quad (2.10)$$

kde $q(\vec{y})$ je sdružená hustota náhodného vektoru \vec{Y} .

Věta 2.2.1. (o výpočtu podmíněné hustoty) Mějme náhodné vektory $\vec{Y} \in \mathbb{R}_r, \vec{Z} \in \mathbb{R}_{n-r}$ s příslušnými mírami λ, ν . Sdruženou hustotu vektorů \vec{Y}, \vec{Z} vzhledem k $\mu = \lambda \times \nu$ označíme jako $p(\vec{y}, \vec{z})$. Marginální hustota vektoru \vec{Y} se určí jako:

$$q(\vec{y}) = \int_{\mathbb{R}_{n-r}} p(\vec{y}, \vec{z}) d\nu(\vec{z}). \quad (2.11)$$

Potom se podmíněná hustota vektoru \vec{Z} vzhledem k vektoru \vec{Y} vypočte následovně:

$$r(\vec{z}|\vec{y}) = \begin{cases} \frac{p(\vec{y}, \vec{z})}{q(\vec{y})}, & \text{pokud } q(\vec{y}) \neq 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Důkaz. Definujme si množinu $A = \{\vec{y} | q(\vec{y}) = 0\}$ a mějme libovolnou její borelovskou podmnožinu $\tilde{A} \subset A, \tilde{A} \in \mathcal{F}_r$. Nechť dále $B \in \mathcal{F}_{n-r}$.

Protože hustota p je nezáporná, tak s využitím Fubiniovy věty [8] dostaneme, že

$$\begin{aligned} P(\tilde{A} \times B) &= \iint_{\tilde{A} \times B} p(\vec{y}, \vec{z}) d\lambda(\vec{y}) d\nu(\vec{z}) = \int_{\tilde{A}} \left(\int_B p(\vec{y}, \vec{z}) d\nu(\vec{z}) \right) d\lambda(\vec{y}) \leq \\ &\leq \int_{\tilde{A}} \left(\int_{\mathbb{R}_{n-r}} p(\vec{y}, \vec{z}) d\nu(\vec{z}) \right) d\lambda(\vec{y}) = \int_{\tilde{A}} q(\vec{y}) d\lambda(\vec{y}) = 0, \end{aligned}$$

kde $P(A \times B) = P(\vec{Y} \in A, \vec{Z} \in B)$.

Nechť A^c je doplněk A do \mathbb{R}_r . Pak z definice podmíněné hustoty a z obdrženého

$$P(\tilde{A} \times B) = 0, \quad (2.13)$$

ukážeme, že

$$\begin{aligned} \int_C \left(\int_B r(\vec{z}|\vec{y}) d\nu(\vec{z}) \right) q(\vec{y}) d\lambda(\vec{y}) &= \iint_{(C \cap A^c) \times B} \frac{p(\vec{y}, \vec{z})}{q(\vec{y})} d\nu(\vec{z}) q(\vec{y}) d\lambda(\vec{y}) = \\ &= \iint_{(C \cap A^c) \times B} p(\vec{y}, \vec{z}) d\lambda(\vec{y}) d\nu(\vec{z}) = P[(C \cap A^c) \times B]. \end{aligned}$$

Z již ukázaného (2.13) plyne, že $P[(C \cap A) \times B] = 0$. S využitím tohoto a z definice podmíněné hustoty dostáváme

$$\int_C \left[\int_B r(\vec{z}|\vec{y}) d\nu(\vec{z}) \right] q(\vec{y}) d\lambda(\vec{y}) = P[(C \cap A^c) \times B] + P[(C \cap A) \times B]. \quad (2.14)$$

Takže funkce definovaná podle (2.12) splňuje vztah (2.10). \square

Definice 2.2.7. Mějme vektory $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^T, \vec{Y} = (X_1, \dots, X_r)^T$ a $\vec{Z} = (X_{r+1}, \dots, X_n)^T$ pro $r \in \{1, \dots, n-1\}$. Dále nechť $S(\vec{x})$ je měřitelná funkce n proměnných. Pokud existuje konečná střední hodnota ES náhodné veličiny $S(\vec{X}) = S(\vec{Y}, \vec{Z})$.

Pak *podmíněnou střední hodnotu* $E(S|\vec{Y})$ náhodné veličiny S za podmínky $\vec{Y} = \vec{y}$ definujeme jako:

$$E(S|\vec{Y}) = \int_{\mathbb{R}_{n-r}} S(\vec{y}, \vec{z}) r(\vec{z}|\vec{y}) d\nu(\vec{z}), \quad (2.15)$$

pokud takový integrál existuje.

Poznámka 2.2.3. (Vlastnosti podmíněné střední hodnoty)

Nechť $S(\vec{Y}, \vec{Z})$ a \vec{Y}, \vec{Z} jsou náhodné veličiny. Pak pro podmíněnou střední hodnotu $E(S|\vec{Y})$ náhodné veličiny S za podmínky \vec{Y} platí následující:

- Nechť $E|S| < +\infty$, potom

$$E \left[E(S|\vec{Y}) \right] = ES. \quad (2.16)$$

- Mějme náhodné veličiny $Z_1(\vec{Y}, \vec{Z})$ a $Z_2(\vec{Y}, \vec{Z})$ s konečnými středními hodnotami a necht' $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$E(aZ_1 + bZ_2|\vec{Y}) = aE(Z_1|\vec{Y}) + bE(Z_2|\vec{Y}). \quad (2.17)$$

- Náhodná veličina $H(\vec{Y})$ má konečnou střední hodnotu a je nezávislá na \vec{Z} . Pak

$$E(HS|\vec{Y}) = HE(S|\vec{Y}). \quad (2.18)$$

- Pro $a \in \mathbb{R}$ platí:

$$E(a|\vec{Y}) = a. \quad (2.19)$$

- Necht' nyní $S(\vec{Z})$ je nezávislá na \vec{Y} . Potom

$$E(S|\vec{Y}) = ES. \quad (2.20)$$

Věta 2.2.2. (Bayesova) Necht' $q(\vec{y})$ resp. $r(\vec{z}|\vec{y})$ je marginální hustota náhodného vektoru $\vec{Y} \in \mathbb{R}_r$, resp. podmíněná hustota náhodného vektoru \vec{Z} za podmínky \vec{Y} . Pak podmíněná hustota $s(\vec{z}|\vec{y})$ vektoru \vec{Y} za podmínky \vec{Z} je rovna

$$s(\vec{z}|\vec{y}) = \begin{cases} \frac{q(\vec{y})r(\vec{z}|\vec{y})}{\int_{\mathbb{R}_r} q(\vec{y})r(\vec{z}|\vec{y})d\lambda(\vec{y})}, & \text{pokud } \int_{\mathbb{R}_r} q(\vec{y})r(\vec{z}|\vec{y})d\lambda(\vec{y}) \neq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.21)$$

(důkaz str. 54 Anděl)

Definice 2.2.8. Necht' $\vec{X} \in \mathbb{R}_n$ je náhodný vektor. Pak pro $\vec{t} \in \mathbb{R}_n$ definujeme *charakteristickou funkci* $\psi(\vec{t})$ vektoru \vec{X} jako

$$\psi(\vec{t}) = Ee^{i\vec{t}^T \vec{X}}. \quad (2.22)$$

Poznámka 2.2.4. Nezávislost náhodných veličin můžeme určovat i pomocí tvaru jejich charakteristických funkcí, neboť platí, že náhodné veličiny X_1, \dots, X_n jsou nezávislé právě tehdy, když pro charakteristickou funkci $\psi(\vec{t})$ vektoru $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ platí, že

$$\psi(\vec{t}) = \psi_1(t) \cdots \psi_n(t). \quad (2.23)$$

Funkce $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ jsou odpovídající charakteristické funkce příslušných náhodných veličin X_1, \dots, X_n . (důkaz viz anděl str.30)

Z linearity střední hodnoty a Eulerova vzorce $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ hned plyne, že pro charakteristickou funkci $\psi(t)$ náhodné veličiny X platí

$$Ee^{itX} = E \cos(tX) + iE \sin(tX). \quad (2.24)$$

Definice 2.2.9. Momentovou vytvořující funkcí $M_X(t)$ náhodné veličiny X definujeme jako

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX}. \quad (2.25)$$

Poznámka 2.2.5. Mezi momentovou vytvořující funkcí M_X a charakteristickou funkcí ψ náhodné veličiny X platí jednoduchý vztah $M_X(t) = \psi(-it)$.

Definice 2.2.10. Necht' X, Y jsou dvě spojitě náhodné veličiny s hustotami $f(x), g(y)$ definovanými na \mathbb{R} . Potom *konvolucí* funkcí f a g rozumíme funkci $f * g$ definovanou jako

$$\begin{aligned} (f * g)(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x)f(x)dx. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Věta 2.2.3. Necht' X , resp. Y jsou nezávislé náhodné veličiny a necht' f , resp. g jsou jejich hustoty definované na $M \subset \mathbb{R}$. Potom náhodná veličina $Z = X + Y$ má hustotu $h(x) = (f * g)(x)$, $x \in M$.

2.3 Pravděpodobnostní rozdělení

Poznámka 2.3.1. Než budeme moci popsat Poissonův proces, je třeba definovat základní pravděpodobnostní rozdělení a odvodit některé jejich vlastnosti [1].

Alternativní rozdělení

Definice 2.3.1 (Alternativní rozdělení).

Náhodná veličina X má *alternativní (Bernoulliho) rozdělení*, pokud platí

$$P\{X = 1\}p \wedge P\{X = 0\} = 1 - p, \quad (2.27)$$

kde $p \in (0, 1)$ je parametr. Značíme $X \sim Be(p)$. Obecně pro $x \in \{0, 1\}$ můžeme funkci pravděpodobnosti takové veličiny zapisovat takto

$$P(x) = P\{X = x\} = p^x(1 - p)^{1-x}. \quad (2.28)$$

Binomické rozdělení

Definice 2.3.2 (Binomické rozdělení). Řekneme, že náhodná veličina X má *binomické rozdělení*, pokud platí

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}, \quad (2.29)$$

kde $n \in \mathbb{N}$ je počet opakování pokusu, $k \in \{1, \dots, n\}$ je počet úspěchů v n pokusech a $p \in (0, 1)$ je pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu. Značíme $X \sim Bi(n, p)$.

Poznámka 2.3.2 (Vztah binomického a alternativního rozdělení). Máme-li nezávislé náhodné veličiny X_1, \dots, X_n z alternativního rozdělení se stejným parametrem p a definujeme-li náhodnou veličinu X následujícím způsobem

$$X := X_1 + \dots + X_n, \quad (2.30)$$

potom náhodná veličina X má binomické rozdělení $Bi(n, p)$.

Geometrické rozdělení

Definice 2.3.3 (Geometrické rozdělení). Náhodná veličina X má *geometrické rozdělení*, pokud

$$P\{X = k\} = p(1 - p^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.31)$$

kde $p \in (0, 1)$ a značíme $X \sim Pa(p)$. Geometrické rozdělení se také označuje jako *Pascalovo*.

Poznámka 2.3.3 (Vztah geometrického a alternativního rozdělení).

Pokud bychom měli nekonečnou posloupnost náhodných veličin z alternativního rozdělení s parametrem p (pravděpodobnost úspěšného pokusu), potom náhodná veličina $X \sim Pa(p)$ vyjadřuje počet neúspěchů před prvním úspěchem.

Poissonovo rozdělení

Definice 2.3.4 (Poissonovo rozdělení).

O náhodné veličině X řekneme, že má *Poissonovo rozdělení*, pokud pravděpodobnost, že $X = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, je dána vztahem

$$P\{X = k\} = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Parametr $\lambda > 0$ a fakt, že veličina X má takové rozdělení, značíme $X \sim P_0(\lambda)$.

Příklad 2.3.1. (Základní charakteristiky Poissonova rozdělení)

Označme $p_k := P\{X = k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

1. Střední hodnota X

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned} \quad (2.33)$$

2. Rozptyl X

$$\begin{aligned}
 EX^2 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k^2 - k + k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \\
 &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) = \\
 &= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^\lambda + \lambda e^\lambda) = \lambda^2 + \lambda,
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\text{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \lambda. \tag{2.35}$$

Poznámka 2.3.4. S Poissonovým rozdělením přicházíme do styku tehdy, pokud sledujeme četnost nějakého jevu v mnoha pokusech. Dalším uplatněním Poissonova rozdělení je aproximace binomického rozdělení, kdy je počet realizací pokusů velký a pravděpodobnost výskytu náhodného jevu je malá. V literatuře se často uvádějí následující doporučení: $p < 0.1$ a $n > 30$.

Příklad 2.3.2.

- Počet útoků na webový server za posledních 30 dní je roven 13. Jaká je pravděpodobnost, že následující den bude třeba čelit alespoň jednomu útoku? Průměrný počet útoků za den je roven $\lambda = \frac{13}{30} \doteq 0,433$. Pravděpodobnost sledovaného jevu X , tedy výskytu alespoň jednoho útoku za den, vypočteme pomocí Poissonova rozdělení následovně

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-0,433} \frac{0,433^0}{0!} \doteq 0,351.$$

- Máme-li velké n a malé p je výpočet pravděpodobnosti nějakého jevu z binomického rozdělení obtížný. Nicméně je možné aproximovat rozdělení $Bi(n, p)$ pomocí rozdělení $Po(np)$.

Exponenciální rozdělení

Definice 2.3.5. (Exponenciálního rozdělení)

Náhodná veličina X má *exponenciální rozdělení*, pokud její hustota pravděpodobnosti má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{2.36}$$

kde $\lambda > 0$.

Příklad 2.3.3. Spočteme si základní charakteristiky exponenciálního rozdělení.

1. Střední hodnota X

$$\begin{aligned} EX &= \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \lambda e^{-\lambda x} \\ u' = 1 \quad v = -e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \\ &= [-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

2. Rozptyl X

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = \lambda e^{-\lambda x} \\ u' = 2x \quad v = e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \\ &= [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x \quad v' = e^{-\lambda x} \\ u' = 2 \quad v = -e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \\ &= \left[-\frac{2x}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}, \\ \text{Var}X &= E[(X - EX)^2] = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

3. Distribuční funkce F

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad (2.40)$$

Poznámka 2.3.5. Exponenciální rozdělení se používá např. v teorii obsluhy nebo v teorii obnovy, kde popisuje třeba dobu trvání určité události (obsluha u linky) nebo životnost výrobků [1]. Toto rozdělení poskytuje popis délky intervalu mezi výskytem náhodných událostí, které jsou popsány Poissonovým rozdělením.

Předpokládejme, že taková náhodná událost se za jednu časovou jednotku vyskytuje průměrně μ -krát. Za t jednotek času je tedy počet výskytů roven λt . Poissonovo rozdělení pak takovou situaci popisuje hustotou $P\{X = x\} = \frac{(\mu t)^x}{x!} e^{-\mu t}$. Z toho dostaneme, že pravděpodobnost, že během t časových jednotek daná událost nenastane, je rovna $P\{X = 0\} = e^{-\mu t}$.

Pokud tedy hledáme pravděpodobnost toho, že čas prvního výskytu T takové události je větší než t , pak toto odpovídá

$$P\{T > t\} = P\{x = 0 | \lambda = \mu t\} = e^{-\mu t}. \quad (2.41)$$

Chceme-li hledat naopak pravděpodobnost toho, že během t časových jednotek nějaká událost nastane, dostáváme

$$P\{T \leq t\} = 1 - P\{x = 0 | \lambda = \mu t\} = 1 - e^{-\mu t} \quad (2.42)$$

Funkce z rovnice (2.42) odpovídá distribuční funkci exponenciálního rozdělení.

Poznámka 2.3.6. Další vlastností exponenciálního rozdělení je tzv. *bezpečnost*. To znamená, že při otázce, jak dlouho budeme muset čekat na první výskyt náhodné události, nezáleží na čase, po který již čekáme. Předpokládejme, že čekáme t_1 časových jednotek a zajímá nás pravděpodobnost, že ještě budeme muset čekat t_2 dalších časových jednotek:

$$\begin{aligned} P\{\tau > t_1 + t_2 | \tau > t_1\} &= \frac{P\{\tau > t_1 + t_2 \wedge \tau > t_1\}}{P\{\tau > t_1\}} = \\ &= \frac{P\{\tau > t_1 + t_2\}}{P\{\tau > t_1\}} = \frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda t_2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Normální rozdělení

Definice 2.3.6 (Normální rozdělení).

Normální rozdělení je určené hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.44)$$

Má-li náhodná veličina X normální rozdělení, pak tento fakt značíme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Speciální případ, kdy $\mu = 0$, $\sigma = 1$, označujeme jako *standardní normální rozdělení*.

Kapitola 3

Stochastická analýza

3.1 Náhodný proces

Abychom mohli pochopit skokově difúzní procesy, je třeba nejdříve definovat pojmy jako *martingal*, *Itôův integrál*, *Wienerův proces* a další. Cílem této kapitoly je poskytnout teoretické základy nutné pro pochopení skokových, skokově difúzních procesů a obecných principů při oceňování finančních instrumentů. Matematický obor *stochastická analýza* se zabývá studiem náhodných procesů, zejména pak *Wienerovým procesem*. Tento proces napodobuje (simuluje) známý fyzikální Brownův pohyb, ale má široké uplatnění i na poli finanční matematiky.

Definice 3.1.1 (Náhodný proces).

Nechť (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a $\omega \in \Omega$. Mějme nějakou množinu $I \neq \emptyset$. Potom množinu náhodných veličin $\{X(t, \omega) | t \in I\}$ nazveme *náhodným procesem* na I . Tedy náhodný (stochastický) proces je soubor náhodných veličin na nějakém pravděpodobnostním prostoru. Pro jednoduchost budeme náhodný proces značit jako $X(t)$. Pouze v případech, kde bude třeba zdůraznit ω pro lepší vysvětlení kontextu, bude náhodný proces značen $X(t, \omega)$.

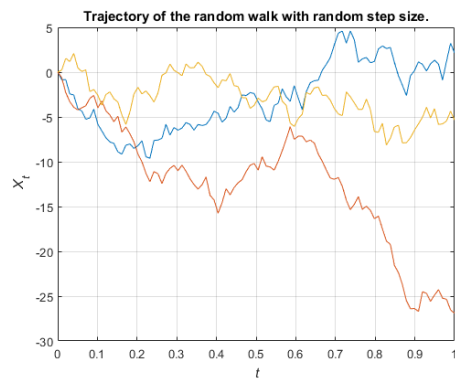
Příklad 3.1.1. Náhodné procesy dělíme z hlediska indexové množiny I na *diskrétní* a *spojité v čase* a stejně i z pohledu hodnot, kterých mohou nabývat. Celkem se tedy stochastické procesy mohou podle tohoto dělení rozčlenit do čtyř skupin. Uveďme si jednoho zástupce každé z nich.

1. **diskrétní čas i hodnoty** - náhodná procházka
2. **diskrétní čas, spojité hodnoty** - náhodná procházka ale s proměnnou velikostí kroku
3. **spojitý čas, diskrétní hodnoty** - Poissonův proces
4. **spojitý čas i hodnoty** - Wienerův proces

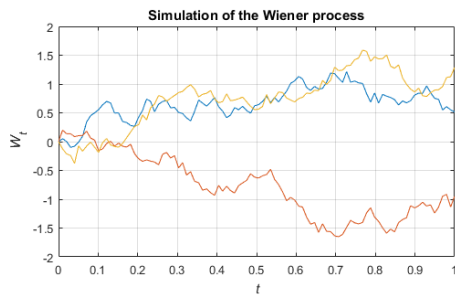
Konkrétní definice těchto procesů budou uvedeny později, nyní srovnáme tyto příklady zatím pouze ilustračně podle obrázku 3.1.



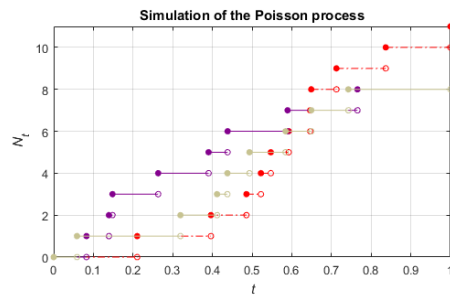
(a) Náhodná procházka.



(b) Náhodná procházka s velikostí skoků z $N(0, 1)$.



(c) Wienerův proces.



(d) Poissonův proces.

Obrázek 3.1: Na každém grafu jsou vykresleny tři trajektorie příslušných náhodných procesů.

Definice 3.1.2 (Trajektorie).

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) a příslušný náhodný proces $X(t)$. Buď $\omega \in \Omega$ pevné, potom zobrazení $t \rightarrow X(t)$ nazveme *trajektorií* náhodného procesu $X(t)$. Trajektorie se často také označuje jako jedna *realizace* náhodného procesu.

Příklad 3.1.2. Pojdme se nyní podívat, co pro náhodný proces znamená, když zafixujeme $t \in I$, resp. $\omega \in \Omega$.

1. Mějme $t_1 \in I$ pevné. Pak výraz $X(t_1, \omega)$, $\omega \in \Omega$ představuje obyčejnou náhodnou proměnnou s nějakým pravděpodobnostním rozdělením.
2. Nyní necht' $\omega_1 \in \Omega$ je pevné. Pak výraz $X(t, \omega_1)$, $t \in I$ je právě trajektorií náhodného procesu. Přiblížme si tento pojem na konkrétním příkladě:

Necht' $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je indexová množina. Mějme pevné $t \in I$ a náhodnou veličinu $X(t, \omega)$ takovou, že $P(X(t, \omega) = -1) = P(X(t, \omega) = 1) = 0.5$. Tato náhodná veličina může představovat například hod mincí.

Definujme náhodný proces $Z(t)$ jako $Z(t) = \sum_{k=1}^t X(k, \omega)$, $t \in I$. Necht' pro náš příklad je $n = 5$. Házíme tedy pětkrát mincí a sčítáme hodnoty 1, -1. Náhodný proces $Z(t)$ představuje tento součet v čase t . Nyní vytvořme jednu realizaci tohoto náhodného procesu. Pevné ω stanovíme jako

$$\omega = (\text{hlava}, \text{hlava}, \text{orel}, \text{hlava}, \text{orel}).$$

Z toho dostaneme hodnoty náhodných proměnných $X(t, \omega)$:

$$\begin{aligned} X(1, (\mathbf{hlava}, \text{hlava}, \text{orel}, \text{hlava}, \text{orel})) &= 1, \\ X(2, (\text{hlava}, \mathbf{hlava}, \text{orel}, \text{hlava}, \text{orel})) &= 1, \\ X(3, (\text{hlava}, \text{hlava}, \mathbf{orel}, \text{hlava}, \text{orel})) &= -1, \\ X(4, (\text{hlava}, \text{hlava}, \text{orel}, \mathbf{hlava}, \text{orel})) &= 1, \\ X(5, (\text{hlava}, \text{hlava}, \text{orel}, \text{hlava}, \mathbf{orel})) &= -1. \end{aligned}$$

Což pro náhodný proces $Z(t)$ a pevné ω znamená, že

$$Z(1) = 1, Z(2) = 2, Z(3) = 1, Z(4) = 2, Z(5) = 1.$$

3.2 Martingal

Při oceňování finančních aktiv je klíčové, aby náhodné procesy popisující ceny těchto aktiv, byly *martingaly*. Slovy řečeno je martingal takový náhodný proces, ve kterém je střední hodnota další hodnoty tohoto procesu rovna hodnotě procesu v současném okamžiku. Vlastnost martingalu nám díky tomu zajišťuje předpoklad neexistence arbitráže, který je klíčový při odvozování cen opcí a finančních derivátů obecně.

Definice 3.2.1 (Filtrace).

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) , I je nějaká indexová množina a necht $\{\mathcal{F}_t | t \in I\}$ je systém σ -algeber na tomto prostoru. Pokud platí, že

- 1) $\forall t \in I, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$,
- 2) $\forall s, t \in I, s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Pak se systém σ -algeber $\{\mathcal{F}_t | t \in I\}$ nazývá *filtrace*.

Příklad 3.2.1 (Význam filtrace).

Filtrace \mathcal{F}_t vlastně obsahuje jakoukoli informaci, na kterou se lze ptát ohledně náhodného procesu v čase t .

Uvažujme hod klasickou herní kostkou. Množina všech možných výsledků jednoho hodu je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Před hodem je filtrace rovna $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$, protože víme, že může nastat pouze jeden z výsledků 1 až 6, a zároveň také musíme zahrnout i teoretickou možnost, že nenastane nic. Po prvním hodu dostaneme výsledek $\omega \in \Omega$. Nyní se už můžeme ptát na všechny možné otázky. Například: padlo číslo jedna, padlo sudé číslo, padlo jedno z čísel jedna nebo tři, je dané číslo prvočíslo, atd. Filtrace \mathcal{F}_1 je tedy tvořena všemi podmnožinami Ω , je to tedy potenční množina množiny Ω , zapsáno $\mathcal{F}_1 = 2^\Omega$.

Nyní si představme jinou situaci. Máme dvě kostky a nejdříve hodíme první a pak druhou kostku. Na začátku pokusu je tedy filtrace $\mathcal{F}_0 = \{\Omega \times \Omega, \emptyset\}$, neboť můžeme říci, že na konci našeho pokusu padnou dvě čísla od jedné do šesti nebo nic. Po hodu první kostkou obdržíme první číslo a můžeme si tedy klást stejné otázky jako v případě jedné kostky, ale o druhém hodu zatím víme jen to, že to bude číslo jedna až šest. Filtrace je tedy množina $\mathcal{F}_1 = 2^\Omega \times \Omega$. Po druhém hodu si už můžeme klást všechny relevantní otázky jako: padli dvě trojky, první číslo je liché a druhé sudé, atd. Filtrace po druhém hodu je rovna $\mathcal{F}_2 = 2^\Omega \times 2^\Omega$.

Poznámka 3.2.1. V minulém příkladě byly filtrace generovány náhodnou veličinou, která představovala hod jednou kostkou. Pokud nyní uvažujeme náhodnou veličinu $W(s)$ a σ -algebra je generována těmito náhodnými veličinami pro $s \leq t$, pak filtraci $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$ můžeme nazývat jako *historii* Wienerova procesu.

Definice 3.2.2 (Adaptovaný proces).

Náhodný proces $X(t)$ označíme jako *adaptovaný filtraci* $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t | t \in I\}$, pokud $\forall t \in I$ platí, že $X(t) \in \mathcal{F}_t$.

Poznámka 3.2.2. Pokud tedy nějaký stochastický proces není adaptovaný filtraci \mathcal{F} , potom musí existovat nějaké t , pro které náhodná veličina může nabýt nějaké nepřipustné hodnoty (hodnoty, která nebude ležet v \mathcal{F}_t). Jinak řečeno, adaptovaný proces nemůže poskytnout více informací, než které jsou popsány v příslušné sigma algebře \mathcal{F}_t . Každý stochastický proces je adaptovaný svojí vlastní filtraci.

Definice 3.2.3 (Martingal).

Necht náhodný proces $X(t)$ je adaptovaný filtraci $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t | t \geq 0\}$. Potom tento náhodný proces označíme jako *martingal*[10], pokud

$$\begin{aligned} 1) \forall t \geq 0, E(|X(t)|) < \infty, \\ 2) \forall s, t \geq 0, s < t, E(X(t) | \mathcal{F}_s) = X(s). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Příklad 3.2.2 (Náhodná procházka).

Mějme posloupnost náhodných nezávislých veličin $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ se střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 < +\infty$. Nechť $s_n := \sum_{k=1}^n X_k$ a nechť \mathcal{F}_t je σ -algebra na \mathbb{R}^n . Nyní definujme náhodnou veličinu Y_n jako

$$Y_n = s_n - n\mu, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Nyní ověřme druhý požadavek z definice martingalu 3.1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(s_{n+1} - (n+1)\mu|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} + s_n - n\mu - \mu|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(X_{n+1} - \mu|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(s_n - n\mu|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(X_{n+1} - \mu) + \mathbb{E}(s_n|\mathcal{F}_n) - n\mu \\ &= s_n - n\mu = Y_n. \end{aligned}$$

Zde jsme využili toho, že jde o náhodnou procházku, tedy náhodná veličina X_{n+1} není závislá na předchozím průběhu \mathcal{F}_n . Protože pro každé $n = 1, 2, \dots$ platí, že $Y_n \in \mathcal{F}_n$, je náhodný proces $\{Y_n\}$ adaptovaný filtraci \mathcal{F}_n . Toho jsme využili pro $\mathbb{E}(s_n|\mathcal{F}_n) = s_n$.

3.3 Markovský proces

Definice 3.3.1 (Markovský proces).

Náhodný proces $X(t)$ označíme jako *markovský*, pokud $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t_0 \leq t, t, t_0, s \in I$, platí, že

$$P\{X(t) \leq x | X(s), s \leq t_0\} = P\{X(t) \leq x | X(t_0)\}. \quad (3.3)$$

Poznámka 3.3.1. Jinak řečeno, pro určení stavu $X(t)$ stačí znát pouze současný stav $X(t_0)$. Není třeba znát celou historii stavů.

Příklad 3.3.1. Speciálním případem markovského procesu je např. Markovský řetězec. Tento náhodný proces má diskrétní množinu stavů S , neboli diskrétní obor hodnot, a je diskrétní v čase. Pokud $\forall x \in S$ platí, že $P\{X_i = x\} > 0$, a zároveň $\forall x_1, \dots, x_n \in S$, a pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$P\{X_n = x_n | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\} = P\{X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}\}.$$

3.4 Wienerův proces

Definice 3.4.1. Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) . Nechť pro libovolné $\omega \in \Omega$ existuje spojitá funkce $W(t)$, definovaná pro $t \geq 0$, taková, že následující podmínky:

1. $W(0) = 0$.

2. Pro všechna $t_0, t_1, \dots, t_m, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$, jsou přírůstky

$$\begin{aligned} &W(t_1) - W(t_0), \\ &W(t_2) - W(t_1), \\ &\quad \vdots \\ &W(t_m) - W(t_{m-1}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

nezávislé.

3. Pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ jsou tyto přírůstky z normálního rozdělení $N(0, t_{i+1} - t_i)$.

Potom náhodný proces $\{W(t) | t \geq 0\}$ označíme jako *Wienerův proces*.

Poznámka 3.4.1. Pro pochopení chování náhodné veličiny W , která je popisována Wienerovým procesem, budeme sledovat změny v jejích hodnotách napříč malými časovými intervaly.

Mějme malý časový interval $\Delta t = b - a$, $a, b \in \mathbb{R}_0^+, a < b$ a změnu hodnoty náhodné veličiny $\Delta W = W(b) - W(a)$. Aby náhodná veličiny mohla odpovídat Wienerovu procesu, musí splňovat vlastnosti z definice tohoto procesu. V současném značení to odpovídá následujícímu:

$$\Delta W = \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad \varepsilon \sim N(0, 1). \tag{3.5}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \Delta W = W(b) - W(a) \text{ jsou nezávislé.} \tag{3.6}$$

Z vlastností normálního rozdělení a z vlastnosti (3.5) plyne, že samotné přírůstky ΔW mají rozdělení $N(0, \Delta t)$. Z druhé vlastnosti (3.6) plyne, že W odpovídá Markovovu procesu, protože hodnota tohoto procesu závisí pouze na poslední známé hodnotě procesu W .

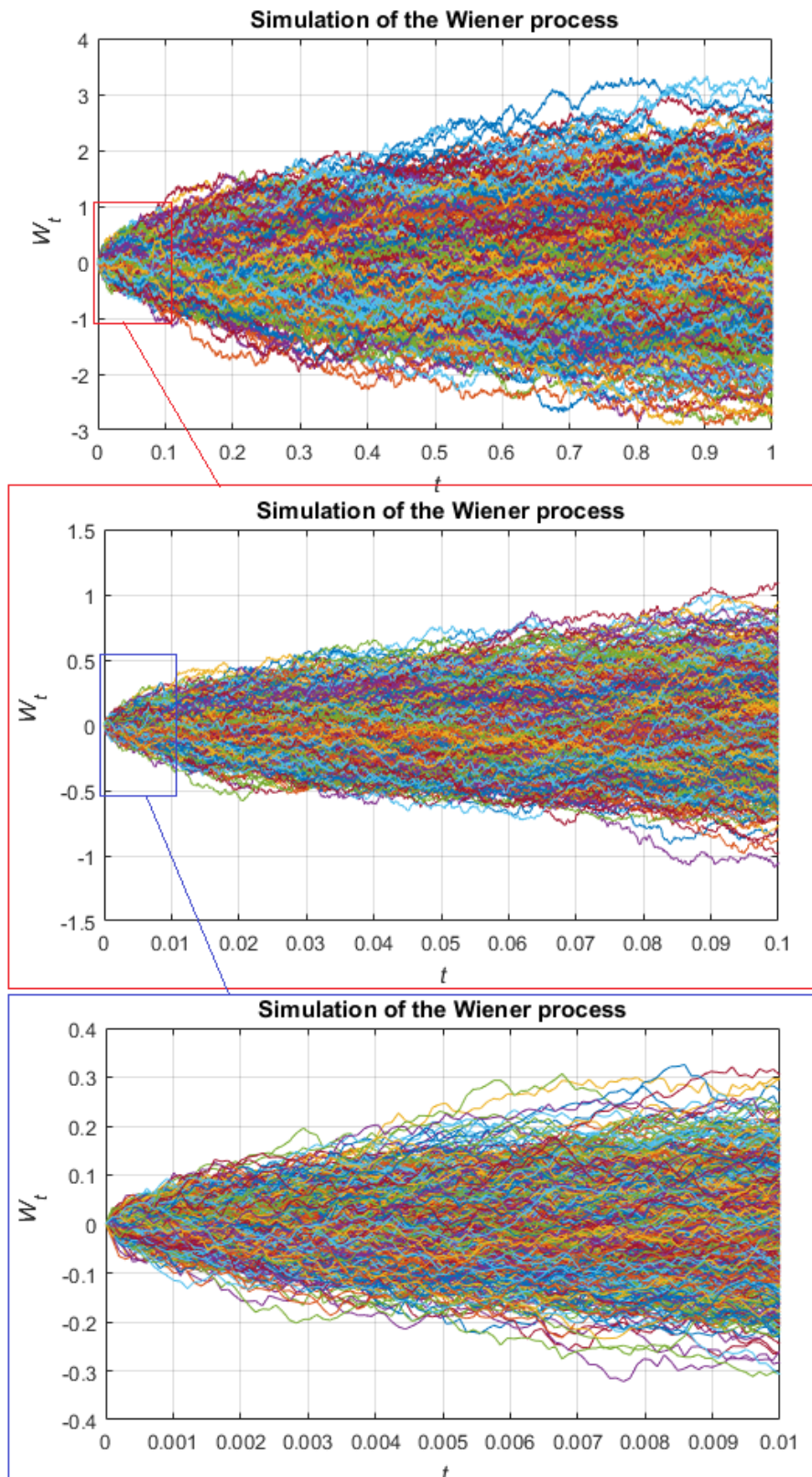
Nyní sledujme změnu hodnoty náhodné veličiny W za nějaký delší časový úsek $T = N\Delta t, N \in \mathbb{N}$. Z toho plyne, že přírůstek hodnoty je roven

$$\begin{aligned} &(W(T) - W(T - \Delta t)) + (W(T - \Delta t) - W(T - 2\Delta t)) + \dots \\ &+ (W(T - (N-1)\Delta t) - W(T - N\Delta t)) = W(T) - W(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}, \end{aligned}$$

kde $\varepsilon_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, N$. Navíc z podmínky (3.5) plyne, že ε_i jsou navzájem nezávislé.

Z tohoto plyne, že $W(T) - W(0)$ má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu(W(T) - W(0)) = 0$ a rozptylem $\text{Var}(W(T) - W(0)) = N\Delta t = T$. Protože Wienerův proces je spojitý, přejdeme na značení se spojitým časem, tedy když $\Delta t \rightarrow 0$. Místo Δt nyní budeme malou časovou změnu označovat jako dt . Tedy

$$dW(t) = \varepsilon \sqrt{dt}. \tag{3.7}$$



Obrázek 3.2: 1000 trajektorií Wienerova procesu. Horní graf drží $T = 1$. Prostřední graf je desetkrát přiblížený, spodní pak stokrát. Grafická ukázka toho, že Wienerův proces má graf nezávislý na přiblížení.

Graficky je Wienerův proces zachycen na obrázku 3.2. Zajímavé na Wienerově procesu je i ten fakt, že graf tohoto procesu je nezávislý na měřítku, což je zachyceno na dvou spodních grafech.

Poznámka 3.4.2 (Zobecněný Wienerův proces).

Až doteď jsme uvažovali Wienerův proces pouze se střední hodnotou rovnou nule a rozptylem rovným jedné. Jinými slovy to znamená, že předpokládaná hodnota proměnné W v libovolném následujícím čase bude stejná, jako je v tomto okamžiku, a rozptyl za delší časový úsek T bude roven přesně T . Nicméně takový proces nám při modelování pohybu ceny akcie nebude stačit a je třeba zobecnit tento proces pro libovolnou střední hodnotu a rozptyl.

Pro takové zobecnění definujme náhodnou proměnnou Y jako

$$dY(t) = adt + bdW(t), \quad (3.8)$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty a $W(t)$ je Wienerův proces z předchozího textu. Můžeme tedy tuto rovnici psát v řeči diskrétního času jako

$$\Delta Y = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}. \quad (3.9)$$

Člen ε je opět náhodná veličina ze standardního normálního rozdělení.

Rovnice (3.8) se skládá ze dvou komponent. První část adt je určitá deterministická složka, tedy je přesně vidět, jak změna času ovlivňuje změnu hodnoty Y . Druhá část bdW představuje šum ve změně hodnoty Y , neboť je to náhodná proměnná. Množství takového šumu je pak určeno jako b -krát Wienerův proces. Položíme-li $a = 0, b = 1$, bude proměnná Y odpovídat předchozí proměnné W .

Pokud bychom odstranili náhodnou složku z rovnice (3.8) (položíme $b = 0$), dostaneme, že $dY = adt$, z čehož plyne, že $Y = Y(0) + at$. Jinými slovy, hodnota proměnné Y se mění lineárně se změnou času.

Nyní tedy dostáváme, že střední hodnota a rozptyl Y jsou rovny

$$E(\Delta Y) = a\Delta t, \quad (3.10)$$

$$\text{Var}(\Delta Y) = b^2\Delta t. \quad (3.11)$$

3.5 Itôovo lemma

Pro naše potřeby budeme muset pracovat s integrálem z nějaké funkce podle přírůstků Wienerova procesu $W(t)$. Protože trajektorie tohoto procesu ale není hladká funkce, musíme nejdříve určit, jaký smysl má tedy integrál $\int_a^b f(t)dW(t)$. Navíc je nyní tento integrál také náhodná veličina, neboť jeho hodnota závisí na hodnotách náhodného procesu.

Nejdříve si však připomeňme již definovaný Stieltjesův integrál a jeho vztah ke klasickému Riemannovu integrálu:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx = \lim_{\|D\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})), \quad (3.12)$$

kde $\|D\| = \max\{|t_k - t_{k-1}| | k \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}\}$ je norma dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ a $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$.

Pokud by Wienerův proces $W(t)$ měl spojité derivace, pak bychom mohli použít obdobný výpočet integrálu jako v 3.12. Nicméně tohoto využít nemůžeme a musíme stanovit smysl integrálu tvaru $\int_0^T X(t)dW(t)$ jiným způsobem.

Definice 3.5.1 (Jednoduchá funkce).

Pod pojmem *jednoduchá funkce* na intervalu $\langle 0, T \rangle$ rozumíme takový stochastický proces $S(t)$, pro který existuje dělení $D : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ intervalu $\langle 0, T \rangle$ takové, že pro $\forall t \in \langle t_{k-1}, t_k \rangle$, $k = 1, \dots, n$ platí

$$S(t) = S_k. \quad (3.13)$$

S_k je nějaká náhodná veličina.

Definice 3.5.2 (Itôův integrál z jednoduché funkce).

Mějme $S(t)$ jednoduchou funkci, Wienerův proces $W(t)$ a interval $I = \langle 0, T \rangle$, potom

$$\int_0^T S(t)dW(t) = \sum_{k=1}^n S_k(W(t_k) - W(t_{k-1})) \quad (3.14)$$

nazveme jako *Itôův stochastický integrál jednoduché funkce* $S(t)$ na intervalu I .

Definice 3.5.3 (Itôův integrál).

Nechť pro $t \geq 0$ je $X(t)$ adaptovaný náhodný proces filtrací $\mathcal{F}(t)$ Wienerova procesu $W(t)$ a nechť je s časem spojitý. Nechť $X_1(t), \dots, X_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost jednoduchých funkcí takových, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_0^T (X_n(t) - X(t))^2 dt = 0. \quad (3.15)$$

To znamená, že tato posloupnost jednoduchých funkcí konverguje k $X(t)$. Pak definujeme *Itôův integrál funkce* $X(t)$ na intervalu $\langle 0, t \rangle$ jako

$$I(t) = \int_0^t X(s)dW(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t X_n(s)dW(s), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.16)$$

Poznámka 3.5.1. Jednoduchých funkcí se využívá v případech, kdy je třeba nějaký náhodný proces aproximovat podle těch konstantních částí. Tohoto konkrétně se využívá např. při výpočtu integrálu tvaru

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T. \quad (3.17)$$

Zde se zavedou jednoduché funkce konvergující k Wienerově procesu $W(t)$ jako [12]

$$W_k(t) = W\left(\frac{kT}{n}\right), \quad t \in \langle t_{k-1}, t_k \rangle. \quad (3.18)$$

Je vidět, že pro rostoucí $n \rightarrow +\infty$ bude posloupnost z těchto jednoduchých funkcí opravdu konvergovat k $W(t)$. Pro srovnání uveďme klasický integrál z funkce $f(t)$, $f(0) = 0$ (pro kterou takový integrál existuje)

$$\int_0^T f(t)df(t) = \int_0^T f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}f^2(T). \quad (3.19)$$

Z toho je vidět, že oproti integrálu z Wienerova procesu $W(t)$ zde chybí část $-\frac{1}{2}T$. To plyne z toho, jak byla definována posloupnost jednoduchých funkcí (3.18), tedy hodnota pro interval $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ se vždy určovala podle hodnoty na levém kraji. Nicméně toto má i své ekonomické opodstatnění, a to sice, že při oceňování derivátu musíme stanovit cenu stanovit nyní, tedy v čase $t = 0$, předtím, než se cena podkladového aktiva pohne.

Definice 3.5.4 (Itôův proces).

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) a Wienerův proces $W(t)$ na tomto prostoru. Nechť $f(t), g(t)$ jsou adaptované náhodné procesy. Potom náhodný proces ve tvaru

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW(s), \text{ nebo také} \quad (3.20)$$

$$dX(t) = f(t)dt + g(t)dW(s).$$

V tomto označení člen $\int_0^t f(s)ds$ odpovídá klasickému Riemannovu integrálu z náhodné funkce a $\int_0^t g(s)dW(t)$ je Itôův náhodný integrál. Koeficienty $f(t)$, resp. $g(t)$ se označují jako *drift*, resp. *volatilita*.

Definice 3.5.5. Nechť (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a $X(t)$, $t \geq 0$ je Itôův proces definovaný na tomto prostoru. Nechť dále $Y(t)$, $t \geq 0$ je adaptovaný

proces. Pak definujme $I(t)$ jako

$$I(t) = \int_0^t Y(s)dX(s) = \int_0^t Y(s)f(s)ds + \int_0^t Y(s)g(s)dW(s), \quad (3.21)$$

kde $f(s), g(s)$ jsou adaptované náhodné procesy. Výraz $I(t)$ tedy představuje *integrál podle Itôova procesu*.

Definice 3.5.6 (Třída \mathcal{M}).

Mějme (Ω, \mathcal{F}, P) a Wienerův proces $W(t)$ na tomto prostoru. Pro náhodný proces f třídy \mathcal{M} platí:

- 1) f je adaptovaná filtraci Wienerova procesu,
- 2) f je $\mathcal{B}(\langle 0, +\infty \rangle) \times \mathcal{F}$ – měřitelná,
- 3) $\int_0^T f^2(t)dt < +\infty$ skoro jistě.

Věta 3.5.1 (Itôovo lemma).

Nechť $X(t)$ je Itôův proces takový, že

$$dX(t) = f(t)dt + g(t)dW(t), \quad (3.22)$$

kde $f(t), g(t) \in \mathcal{M}$. Dále mějme funkci $h(t, x) : \langle 0, \infty \rangle \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^2(\langle 0, \infty \rangle \times \mathbb{R})$. Pak platí, že

$$Y(t) = h(t, X(t))$$

je také Itôův proces a navíc

$$dY(t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial h}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, X(t))(dX(t))^2. \quad (3.23)$$

Poznámka 3.5.2. Dosadíme-li do rovnice (4.1) za proces $dX(t)$, dostaneme

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial h}{\partial t}dt + \frac{\partial h}{\partial x}(fdt + gdW(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(fdt + gdW(t))^2 \\ &= \left| \begin{array}{l} dW(t)dW(t) = dt \\ dt dt = dW(t)dt = 0 \end{array} \right| = \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}g^2 \right) dt + \frac{\partial h}{\partial x}gdW(t). \end{aligned}$$

V literatuře se objevuje také podobná věta zvaná jako *Itô-Doebelinova*, která zapisuje rovnici (4.1) v integrálním tvaru. Pro $\tau \geq 0$ platí

$$\begin{aligned} h(\tau, X(\tau)) &= h(0, X(0)) + \int_0^\tau \frac{\partial h}{\partial t}dt + \int_0^\tau \frac{\partial h}{\partial x}f(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}g^2(t)dt + \int_0^\tau \frac{\partial h}{\partial x}g(t)dW(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.6 Náhodný proces pro cenu cenných papírů

Poznámka 3.6.1. Nyní budeme zkoumat náhodný proces, který popisuje vývoj ceny cenných papírů bez vyplácení dividend[5]. Model zobecněného Wienerova procesu bohužel k popisu nestačí, neboť nezachycuje klíčový požadavek investorů, aby očekávaný procentuální výnos z cenného papíru byl nezávislý na jeho ceně. Wienerův proces obsahuje konstantní střední drift (průměrný za jednotku času) a konstantní volatilitu. Fakt, že střední drift je konstantní musíme nahradit tím, že poměr změny ceny a ceny je konstantní.

Pro odvození modelu vývoje ceny takového aktiva bude nejdříve zavedeno vhodné značení.

$$\begin{aligned} S(t) & \dots \text{ cena cenného papíru v čase } t, \\ \alpha & \dots \text{ očekávané míra výnosu,} \\ S(0) & \dots \text{ cena v čase } t = 0, \\ \sigma & \dots \text{ volatilita ceny } S. \end{aligned}$$

Potom očekávaná změna ceny S za čas dt je rovna

$$dS(t) = \alpha S(t)dt.$$

Pro odvození driftu nyní předpokládejme, že volatilita ceny je nulová. Z toho dostaneme, že

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha S(t)dt \\ \frac{dS(t)}{S(t)} &= \alpha dt \\ \int \frac{dS(t)}{S(t)} &= \int \alpha dt \\ \ln S(t) &= \alpha t + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ S(t) &= e^{\alpha t + C}, \\ S(0) &= e^C, \\ S(t) &= S(0)e^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Každopádně musíme nyní do modelu vývoje ceny zahrnout také volatilitu. Rozumným předpokladem je, že rozptyl návratnosti za jednotku času vyjádřené v procentech je, podobně jako u driftu, nezávislý na ceně S . Tento předpoklad lze interpretovat jako fakt, že investor je, co se týká procentuální míry návratnosti, stejně nejistý u dvou různě drahých cenných papírů.

Předpokládejme, že σ^2 je míra rozptylu v proporcionální změně ceny S . Potom rozptyl ve změně ceny jako takové za nějaký časový interval Δt je roven

$$\sigma^2 S^2 \Delta t.$$

Výše zmíněné předpoklady nahrávají tomu, že vývoj ceny S může být modelován jako Itoův proces. Takový model se již velmi často používá pro oceňování cenných papírů bez vyplácení dividend. Toto můžeme zapsat jako

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dX(t). \tag{3.26}$$

Poznámka 3.6.2. Model popisovaný rovnicí (3.26) se také někdy označuje jako *geometrický Wienerův proces*. Upravíme-li tuto rovnici, dostaneme

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt}. \quad (3.27)$$

Z toho plyne, že proporcionální změna v ceně S má normální rozdělení s parametry $\mu = \alpha dt$ a $\tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{dt}$. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &\sim N(\alpha dt, \sigma^2 dt), \text{ neboli} \\ dS(t) &\sim N(\alpha S(t) dt, \sigma^2 S^2(t) dt). \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.7 Rizikově neutrální míra

Věta 3.7.1 (Změna pravděpodobnostní míry).

Nechť (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor. Mějme náhodnou veličinu Z , která je skoro jistě nezáporná. Nechť navíc $EZ = 1$. Pak pro $A \in \mathcal{F}$ definujeme

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega). \quad (3.29)$$

Takto definovaná míra \tilde{P} je pravděpodobnost na \mathcal{F} . Navíc platí:

1. Pokud je náhodná veličina X nezáporná, potom

$$\tilde{E}X = E(XZ) = \int_A X(\omega) d\tilde{P}(\omega).$$

2. Pokud je náhodná veličina Z kladná a Y nezáporná, potom $EY = \tilde{E}\left(\frac{Y}{Z}\right)$.

Důkaz viz [12].

Definice 3.7.1 (Ekvivalentní míry).

Mějme nějakou neprázdnou množinu Ω a \mathcal{F} nechť je σ -algebra z podmnožin množiny Ω . Pokud $\forall A \in \mathcal{F}$ platí, že

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) = 0, \quad (3.30)$$

pak o mírách $P(A), \tilde{P}(A)$ řekneme, že jsou *ekvivalentní na* (Ω, \mathcal{F}) .

Definice 3.7.2 (Radon-Nikodýmova derivace).

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) a nechť \tilde{P} je pravděpodobnostní míra ekvivalentní míře P na (Ω, \mathcal{F}) . Nechť Z je kladná skoro jistě a taková, že splňuje (3.29). Pak Z nazýváme *Radon-Nikodýmovou derivací* \tilde{P} podle P . Tento fakt známe jako

$$Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}. \quad (3.31)$$

Věta 3.7.2 (Radon-Nikodýmova).

Nechť pravděpodobnostní míry \tilde{P}, P jsou ekvivalentní na (Ω, \mathcal{F}) . Pak pro každé $A \in \mathcal{F}$ existuje náhodná proměnná Z , která je kladná skoro jistě a $EZ = 1$, pro kterou platí

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega). \quad (3.32)$$

Příklad 3.7.1. V tomto příkladě bude demonstrována změna míry prakticky.

Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) , kde Ω je nějaká nekonečná nespočetná množina a kde pro všechna $\omega \in \Omega$ platí, že $P(\omega) = 0$. Dále nechť X je náhodná proměnná ze standardního normálního rozdělení $N(0, 1)$, která je definovaná na tomto prostoru. Hustota pravděpodobnosti X je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.33)$$

To znamená, že

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx, \quad a \in \Omega. \quad (3.34)$$

Nyní pro nějaké $\alpha > 0$ definujme náhodnou proměnnou Y jako

$$Y = X + \alpha, \quad (3.35)$$

z čehož plyne, že $EY = \alpha$ a $\text{Var}Y = 1$ při pravděpodobnostní míře P . Teď budeme chtít zkonstruovat novou pravděpodobnostní míru \tilde{P} , při které bude $Y \sim N(0, 1)$. Protože je Y definována jako (3.35), kde $\alpha > 0$, pak je střední hodnota Y posunuta směrem vpravo. Abychom z Y vytvořili náhodnou proměnnou ze standardního normálního rozdělení, pak budeme potřebovat přiřadit větší pravděpodobnost pro množiny z intervalu $(-\infty, 0)$ a menší pravděpodobnost pro interval $(0, +\infty)$. Tím docílíme toho, že změníme rozdělení Y , ale nezměníme samotnou náhodnou veličinu. Prakticky to znamená, že přechodem na rizikově neutrální míru změníme rozdělení cen cenných papírů, ale nezměníme samotné ceny.

Nyní konkrétně definujme

$$Z(\omega) = \exp\left(-\alpha X(\omega) - \frac{1}{2}\alpha^2\right), \quad \omega \in \Omega. \quad (3.36)$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned}
EZ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2\right) f(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2)\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x + \alpha)^2\right) dx \\
&= \left[y = x + \alpha \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy = 1.
\end{aligned}$$

Tedy $EZ = 1$ a podle definice (3.36) je $Z > 0$ skoro jistě. Toho využijeme tak, že Z může sloužit jako Radon-Nikodýmova derivace (3.31) pro \tilde{P} podle P . Označme

$$\begin{aligned}
B_y &= \{\omega \in \Omega | Y(\omega) \leq a\}, \\
B_x &= \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq a - \alpha\},
\end{aligned}$$

a definujme tedy novou pravděpodobnostní míru jako

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(Y \leq a) &= \int_{B_y} Z(\omega) dP(\omega) = \int_{B_x} \exp\left(-\alpha X(\omega) - \frac{1}{2}\alpha^2\right) dP(\omega) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a-\alpha} \exp\left(-\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2\right) f(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a-\alpha} \exp\left(-\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a-\alpha} e^{-\frac{1}{2}(x+\alpha)^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.
\end{aligned}$$

Z toho plyne, že

$$\tilde{P}(Y \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

a tedy Y je náhodná veličina ze standardního normálního rozdělení $N(0, 1)$ při rizikově neutrální pravděpodobnostní míře \tilde{P} .

Věta 3.7.3 (Girsanovova).

Nechť (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor, $t \in \langle 0, T \rangle$ a necht' $W(t)$ je Wienerův proces na tomto prostoru. Dále necht' $\mathcal{F}(t)$ je jeho příslušná filtrace a $f(t)$ necht' je adaptovaný proces. Pokud definujeme

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t f(s)ds, \quad (3.37)$$

$$Z(t) = \exp \left(- \int_0^t f(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t f^2(s)ds \right), \quad (3.38)$$

pak, za předpokladu že $\int_0^T f^2(s)Z^2(s)du < +\infty$, je $\widetilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$ Wienerovým procesem při pravděpodobnostní míře \widetilde{P} . Navíc, pokud označíme $Z := Z(T)$, pak $EZ = 1$. Rizikově neutrální míra \widetilde{P} je podle (3.32) určena jako

$$\widetilde{P}(A) = \int_A Z(\omega)dP(\omega), \quad A \in \mathcal{F}. \quad (3.39)$$

Příklad 3.7.2. Girsanovova věta má využití v případech, kdy chceme z Wienerova procesu, který má nějaký drift, tento drift odstranit - vynulovat. Mějme tedy (Ω, \mathcal{F}, P) pravděpodobnostní prostor a na něm náhodný proces $S(t)$, $t \geq 0$ s filtrací \mathcal{F} , kde

$$dS(t) = (\mu - r)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (3.40)$$

Nicméně v rizikově neutrálním světě $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P})$ by měl být trend veličiny $S(t)$ nulový. Tedy

$$\begin{aligned} dS(t) &= (\mu - r)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \\ &= \frac{\mu - r}{\sigma} S(t)\sigma dt + \sigma S(t)dW(t) \\ &= \sigma S(t)d \left(W(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} t \right) \\ &= \sigma S(t)d\widetilde{W}(t). \end{aligned}$$

Protože

$$\frac{\mu - r}{\sigma} t = \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma} ds,$$

pak $f(s) = \frac{\mu - r}{\sigma}$, $s \geq 0$ a můžeme aplikovat Girsanovovu větu. Tedy jsme dostali návod, jak Wienerův proces $W(t)$ s konstantním driftem převést na Wienerův proces s nulovým driftem $\widetilde{W}(t)$.

Definice 3.7.3 (Rizikově neutrální míra).

Nechť (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor. O pravděpodobnostní míře \widetilde{P} řekneme, že je *rizikově neutrální*, pokud

1. P a \tilde{P} jsou ekvivalentní na (Ω, \mathcal{F}) ,
2. Při \tilde{P} je diskontovaná cena akcie $D(t)S(t)$ martingal.

Funkce $D(t)$ je diskontní faktor.

Lemma 3.7.1. Mějme (Ω, \mathcal{F}, P) a $X(t)$ je náhodný proces pro hodnotu portfolia v čase t . Pokud máme rizikově neutrální míru \tilde{P} , pak diskontovaná hodnota portfolia $D(t)X(t)$ je martingal. *Důkaz* viz [12].

3.8 Fundamentální věty pro oceňování aktiv

Co je to arbitráž již bylo slovy vysvětleno v první kapitole. Nyní si tento pojem korektně definujeme.

Definice 3.8.1. Nechť $X(t)$ je náhodný proces představující hodnotu nějakého portfolia v čase t , kde $X(0) = 0$. Tento proces nazveme *arbitráží*, pokud existuje $T > 0$ takové, že

$$P(X(T) \geq 0) = 1 \wedge P(X(T) > 0) > 0. \quad (3.41)$$

Toto nám vlastně říká, že existuje možnost jistého zisku s vyšší mírou výnosu, než je úroková míra. Pokud tedy nyní momentální kapitál na portfoliu je roven $X(0)$ (nemusí být roven nule), pak arbitráž existuje právě když

$$P(D(T)X(T) \geq X(0)) = 1 \wedge P(D(T)X(T) > X(0)) > 0. \quad (3.42)$$

Při obchodování na finančních trzích by nikdy neměla být cena odvozována z modelu, který připouští arbitráž. Následující věta jediným pravidlem tuto skutečnost zajišťuje.

Věta 3.8.1 (První fundamentální o oceňování aktiv).

Je-li model trhu sestaven s rizikově neutrální mírou, pak v tomto modelu neexistuje arbitráž.

Důkaz. Mějme tedy rizikově neutrální míru \tilde{P} . Podle lemmatu 3.7.1 víme, že diskontovaná hodnota libovolného portfolia je martingal, tzn.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}(D(T)X(T)) &= X(0), \text{ a předpokládejme, že } X(0) = 0, \Rightarrow \\ \tilde{\mathbb{E}}(D(T)X(T)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pro spor předpokládejme, že $X(t)$ je arbitráž, potom z (3.41) plyne, že $P(X(T) < 0) = 0$. Podle předpokladů máme ale rizikově neutrální míru \tilde{P} ekvivalentní míře P , tedy $\tilde{P}(X(T) < 0) = 0$. Jenže z (3.43) máme, že $\tilde{P}(X(T) > 0) = 0$, protože jinak by tato střední hodnota musela být větší než nula. Protože jsou P a \tilde{P} ekvivalentní, pak musí platit, že $P(X(T) > 0) = 0$, což je spor s předpokladem, že $X(t)$ je arbitráž. \square

Definice 3.8.2 (Úplný trh).

Model trhu nazveme jako *úplný*, pokud existuje možnost zajištění pro každý derivát.

Věta 3.8.2 (Druhá fundamentální o oceňování aktiv).

Model trhu s rizikově neutrální pravděpodobností \tilde{P} je úplný právě tehdy, když existuje právě jedna taková \tilde{P} . *Důkaz* viz [12].

3.9 Poissonův proces

Poissonův proces je základním stavebním kamenem náhodných procesů se skokem, tak jako Brownův pohyb pro spojité náhodné procesy. V této části a několika dalších následujících bude právě tento proces definován včetně jeho modifikací. Cílem bude představit všechny důležité stavební kameny pro skokovou část v *jump-diffusion* modelu.

Poznámka 3.9.1 (Konstrukce Poissonova procesu). Mějme posloupnost nezávislých exponenciálních náhodných veličin $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ se stejnou střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Sledujeme proces, při kterém se vyskytují události nazývané *skoky*. První skok nastane v čase ϵ_1 , druhý skok bude v čase $\epsilon_1 + \epsilon_2$ a tak dále. Protože jsou doby skoků určeny hodnotou náhodné exponenciální veličiny, pak velikost časových intervalů mezi dvěma po sobě jdoucími skoky je popsána exponenciálním rozdělením.

Graficky můžeme Poissonův proces vidět na obrázku 3.3. Vlevo je simulace tří trajektorií při pevném $T = 20$ a tím pádem se liší celkový počet skoků v jednotlivých trajektoriích během této doby. Na pravém obrázku je zadán požadovaný počet skoků $N = 20$ a sledujeme doby, za které je tohoto docíleno.

Potom čas, ve který nastane n -tý skok, je roven

$$T_n = \sum_{k=1}^n \epsilon_k. \quad (3.44)$$

Náš sledovaný *Poissonův proces* pak popisuje počet skoků, které nastanou do času t včetně. Zapsáno:

$$N(t) = n, \text{ pokud } T_n \leq t < T_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.45)$$

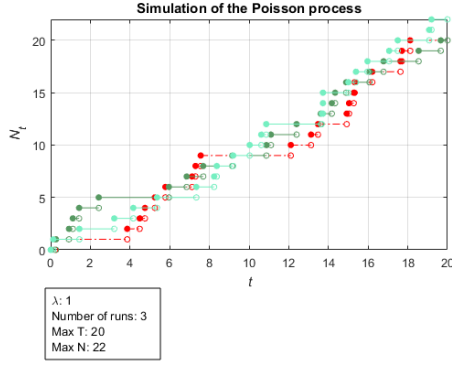
Navíc položíme $T_0 := 0$.

Nyní budeme symbolem $\mathcal{F}(t)$ rozumět σ -algebru, která nese informace o procesu $N(s)$ od začátku ($s = 0$) do času $s = t$.

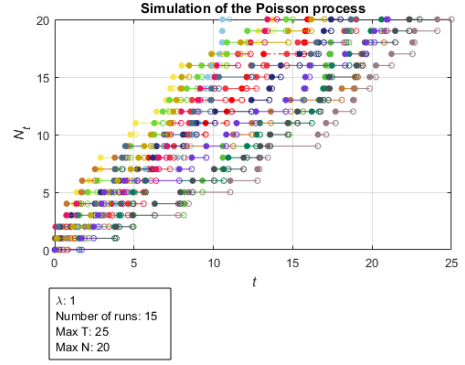
V několika následujících odstavcích budou odvozeny některé vlastnosti Poissonova procesu a jeho rozdělení.

Lemma 3.9.1. Mějme náhodnou veličinu T_n definovanou v (3.45), kde $n = 1, 2, \dots$. Potom tato náhodná veličina má následující gamma rozdělení

$$f_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (3.46)$$



(a) Simulace Poissonova procesu s pevným T .



(b) Simulace Poissonova procesu s pevným N .

Obrázek 3.3: Grafické znázornění Poissonova procesu. N_t je počet skoků za čas t . λ je parametr Poissonova rozdělení.

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Mějme $n = 1$, potom $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Zároveň víme, že $T_1 = \epsilon_1$ má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$, čemuž $f_1(t)$ odpovídá.

Předpokládejme tedy, že T_n má gamma rozdělení s hustotou $f_n(t)$. Nyní zkoume hustotu rozdělení pro T_{n+1} . Protože $T_{n+1} = T_n + \epsilon_{n+1}$ a T_n, ϵ_{n+1} jsou nezávislé, můžeme určit hustotu součtu dvou náhodných veličin jako konvoluci jednotlivých hustot. Tedy

$$\begin{aligned}
 \int_0^s f_n(x) f(s-x) dx &= \int_0^s \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(s-x)} dx \\
 &= \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!} \int_0^s x^{n-1} dx = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda s}}{(n-1)!} \frac{s^n}{n} \\
 &= \frac{(\lambda s)^n}{n!} \lambda e^{-\lambda s} = f_{n+1}(s), s \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

□

Lemma 3.9.2. Poissonův proces $N(t)$ s intenzitou λ má následující pravděpodobnostní rozdělení

$$P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.48}$$

Důkaz viz [12].

Poznámka 3.9.2 (Stacionární přírůstky).

Pokud rozdělení přírůstků náhodného procesu závisí pouze na rozdílu mezi dvěma časy, potom se tyto přírůstky označují jako *stacionární*. Poissonův proces takovou vlastnost má. Sledujeme-li rozdělení přírůstků $N(t+s) - N(s)$, a pokud víme, co se stalo do času s včetně, sledujeme vlastně počet skoků, které nastanou v časovém

intervalu $(s, t+s)$. Nejdříve je třeba zjistit, kdy nastane první skok po čase s . Nicméně víme, že intervaly mezi skoky jsou na sobě nezávislé, neboť jsou to náhodné veličiny z exponenciálního rozdělení se střední hodnotou $\frac{1}{\lambda}$. Tedy druhý skok po čase s je nezávislý na prvním skoku po čase s , atd. Počet skoků v časovém intervalu $(s, t+s)$ je tedy nezávislý na $\mathcal{F}(s)$. Tedy rozdělení $N(t+s) - N(s)$ je stejné jako $N(t)$.

Poznámka 3.9.3 (Střední hodnota a rozptyl přírůstků Poissonova procesu).
Pro přírůstek Poissonova rozdělení $N(t) - N(s)$, kde $0 \leq s < t$ platí, že

$$p_k = P\{N(t) - N(s) = k\} = \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.49)$$

Nejdříve ověříme, že $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$. Tedy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\{N(t) - N(s) = k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} = e^{-\lambda(t-s)} e^{\lambda(t-s)} = 1. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nyní odvodíme střední hodnotu přírůstku. Pokud máme stanovené, že skoky se objevují průměrně λ -krát za jednotku času, pak je rozumné očekávat, že mezi časem s a t bude tato střední hodnota rovna $\lambda(t-s)$.

$$\begin{aligned} E[N(t) - N(s)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P\{N(t) - N(s) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = \lambda(t-s) e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1} (t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda(t-s) e^{-\lambda(t-s)} e^{\lambda(t-s)} = \lambda(t-s), \end{aligned}$$

což je očekávaný výsledek. Obdobně se vypočítá rozptyl:

$$\begin{aligned} E[(N(t) - N(s))^2] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k (t-s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k (t-s)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-s)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k (t-s)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-s)} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k (t-s)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-s)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (t-s)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-s)} \\ &= \lambda^2 (t-s)^2 + \lambda(t-s), \\ \text{Var}[N(t) - N(s)] &= E[(N(t) - N(s))^2] - (E[N(t) - N(s)])^2 \\ &= \lambda^2 (t-s)^2 + \lambda(t-s) - \lambda^2 (t-s)^2 \\ &= \lambda(t-s). \end{aligned}$$

Příklad 3.9.1 (Náklady na opravy linky).

Představme si, že máme výrobní linku, na které čas od času nastává porucha. S každou takovou poruchou jsou spojené náklady na opravu. Máme zaznamenáno, že za jeden měsíc nastane průměrně λ poruch. Výše škod jsou nějaké nezávislé náhodné veličiny $X_k, k \in \mathbb{N}$ ze stejného rozdělení. Navíc předpokládáme, že počet takových poruch za čas t je popsán Poissonovým procesem $\{N(t)|t \geq 0\}$. Mějme tedy

$$C(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \quad t \geq 0,$$

kde $C(t)$ je celková výše nákladů na $N(t)$ poruch, které nastaly během času $t \geq 0$. Zajímá nás střední hodnota $C(t)$:

$$\begin{aligned} EC(t) &= E(E(C(t)|N(t))) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N(t) = n)E(C(t)|N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\left(\sum_{k=0}^n X_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} nE(X_1) \\ &= e^{-\lambda t} E(X_1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda t (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-\lambda t} E(X_1) \lambda t e^{\lambda t} = \lambda t E(X_1) = E(N(t))E(X_1). \end{aligned}$$

To znamená, že za čas t můžeme očekávat náklady na opravy poruch na lince ve výši $\lambda t E(X_1)$.

3.10 Kompenzovaný Poissonův proces

Definice 3.10.1. Mějme Poissonův proces $N(t)$ s intenzitou λ . Definujeme-li

$$M(t) = N(t) - \lambda t, \quad (3.51)$$

pak proces $M(t)$ nazveme *kompenzovaný Poissonův proces* [12].

Poznámka 3.10.1. Anglicky se kompenzovaný Poissonův proces nazývá *Compensated Poisson process*. Název a definice (3.51) tohoto procesu zřejmě představuje složku $-\lambda t$ v této rovnici. Slovy řečeno, se počet skoků $N(t)$ v každém časovém okamžiku zmenšuje o průměrný počet skoků za čas t .

Věta 3.10.1. Kompenzovaný Poissonův proces $M(t)$ definovaný v (3.51) je martingal.

Důkaz. Chceme dokázat, že $E(M(t)|\mathcal{F}(s)) = M(s)$. Využijeme toho, že přírůstky $N(t) - N(s)$ jsou nezávislé na $\mathcal{F}(s)$, pro $0 \leq s < t$.

$$\begin{aligned} E[M(t)|\mathcal{F}(s)] &= E[M(t) - M(s)|\mathcal{F}(s)] + E(M(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= E[N(t) - N(s) + \lambda s - \lambda t|\mathcal{F}(s)] + M(s) \\ &= \lambda(t - s) - \lambda(t - s) + M(s) = M(s). \end{aligned}$$

□

3.11 Složený Poissonův proces

Definice 3.11.1 (Složený Poissonův proces).

Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin X_1, X_2, \dots , se stejným rozdělením a střední hodnotou β . Nechť $N(t)$ je Poissonův proces s intenzitou λ . Pak definujeme *složený Poissonův proces* jako

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, t \geq 0. \quad (3.52)$$

zároveň je třeba říci, že skoky v procesu $C(t)$ nastávají ve stejnou chvíli jako v příslušném Poissonově procesu $N(t)$.

Poznámka 3.11.1. Náhodné veličiny X_1, X_2, \dots z definice (3.52) představují velikosti skoků. Pokud nějaká náhodná veličina X_i nabývá záporné hodnoty, pak to představuje skok směrem dolů, neboli zmenšení hodnoty procesu $C(t)$. Složený Poissonův proces se definuje z toho důvodu, že až do teď jsme vždy počítali se skokem o velikosti jedna, což by pro modelování ceny finančních aktiv nebylo dostačující.

Poznámka 3.11.2. Předpokládejme, že $N(t) = k, k \in \mathbb{N}$. Označme $C_k(t) = \sum_{i=1}^k X_i$.

Spočteme střední hodnotu $C(t)$.

$$\begin{aligned} EC(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} E[C_k(t)] P\{N(t) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\beta \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \beta\lambda t. \end{aligned} \quad (3.53)$$

To odpovídá pozorování, že průměrný počet skoků za jednotku času je roven λ a β je průměrná výška skoku, Tedy střední hodnota součtu velikostí těchto skoků za čas t je rovna $\beta\lambda t$.

Definice 3.11.2. Nechť $C(t), t \geq 0$ je složený Poissonův proces. Pak proces $C^*(t)$ definovaný jako

$$C^*(t) = C(t) - \beta\lambda t, \quad (3.54)$$

nazýváme *kompensovaný složený Poissonův proces*.

Věta 3.11.1. Náhodný proces $C^*(t), t \geq 0$ je martingal.

Důkaz. Chceme dokázat, že $E[C^*(t)|\mathcal{F}(s)] = C^*(s)$. Nechť $0 \leq s < t$. Předpokládejme nyní, že přírůstky $C(t) - C(s)$ jsou nezávislé na $\mathcal{F}(s)$ a mají střední hodnotu rovnou $\beta\lambda(t - s)$. Potom

$$\begin{aligned} E[C^*(t)|\mathcal{F}(s)] &= E[C(t) - \beta\lambda t + C(s) - C(s)|\mathcal{F}(s)] \\ &= E[C(t) - C(s)|\mathcal{F}(s)] - \beta\lambda t + C(s) \\ &= \beta\lambda(t - s) - \beta\lambda t + C(s) = C(s) - \beta\lambda s \\ &= C^*(s). \end{aligned}$$

Nyní je ještě třeba ukázat, že platí předpoklady o nezávislosti přírůstků a jejich střední hodnotě. Protože přírůstky Poissonova procesu $N(t)$ jsou nezávislé, pak

$$C(s) = \sum_{i=1}^{N(s)} X_i, \text{ a}$$

$$C(t) - C(s) = \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} X_i,$$

jsou také nezávislé. Protože $N(t) - N(s)$ má stejné rozdělení jako $N(t-s)$, pak navíc

$$C(t) - C(s) = \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} X_i = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(s)} X_i = \sum_{i=1}^{N(t)-N(s)} X_i = \sum_{i=1}^{N(t-s)} X_i = C(t-s).$$

Tedy $C(t) - C(s)$ má stejné rozdělení jako $C(t-s)$ a podle (3.53) je $EC(t-s) = \beta\lambda(t-s)$, čímž je důkaz kompletní. \square

Kapitola 4

Black-Scholes-Mertonův model

Cílem této kapitoly bude odvození Black-Scholes-Mertonovi parciální diferenciální rovnice (BSM PDR) a jejího řešení. Tato rovnice popisuje vývoj ceny opce na podkladové aktivum, které je popsáno geometrickým Brownovým pohybem (3.26). Nejprve budou popsány dva alternativní způsoby odvození Black-Scholes-Mertonovi parciální diferenciální rovnice, která bude typu *zpětně parabolická*. Hledané řešení bude funkce $c(t, x)$, přičemž abychom takovou funkci mohli přesně určit, musíme mít dané okrajové podmínky pro x a koncovou podmínku pro $t = T$. Z toho důvodu je v názvu slovo *zpětně*, neboť jdeme „proti času“. Kromě klasického řešení BSM rovnice bude uvedeno také odvození tvaru funkce $c(t, x)$ pomocí rizikově neutrální míry.

Cenu pro evropskou call opci dostaneme buď jako řešení této PDR nebo jako odvození střední hodnoty $\tilde{E}(e^{r(T-t)}(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}(t))$ pod rizikově neutrální mírou. V celé kapitole budeme používat následující označení:

- r ... bezriziková úroková míra,
- σ ... volatilita podkladové akcie,
- K ... smluvená strike price.

4.1 Odvození BSM rovnice

Mějme nějaké portfolio s hodnotou $X(t)$, ve kterém držíme část prostředků v hotovosti, kterou můžeme pravidelně úročit s úrokem r , a zbytek investujeme do akcií, jejichž cena je modelována geometrickým Brownovým pohybem:

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (4.1)$$

Kde α je výnosová míra akcie. Takže pokud držíme k akcií s jednotkovou hodnotou $S(t)$, pak zbylá hodnota portfolia, která je držena v hotovosti je rovna $X(t) - kS(t)$. Tedy změna hodnoty portfolia $dX(t)$ za čas dt je rovna

$$\begin{aligned} dX(t) &= r(X(t) - kS(t))dt + kdS(t) \\ &= r(X(t) - kS(t)) + k(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) \\ &= rX(t)dt + k(\alpha - r)S(t)dt + k\sigma S(t)dW(t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nyní si popíšme každou z komponent z poslední rovnice.

- $rX(t)dt$ zachycuje průměrný výnos z portfolia $X(t)$ díky úrokové míře r .
- $k(\alpha - r)S(t)dt$ představuje prémii za investici do akcií.
- $k\sigma S(t)dW(t)$ je náhodná složka závislá na volatilitě σ ceny akcie $S(t)$ a množství držných akcií k .

Nyní si odvodíme vzorec pro změnu čisté současné hodnoty pro akcii $S(t)$ a pro hodnotu portfolia $X(t)$ v čase t . Bude třeba tedy odvodit $d(e^{-rt}S(t))$ a $e^{-rt}X(t)$. K tomu využijeme Itôův vzorec. Začneme s prvním z nich.

Označme $g(t, x(t)) := e^{-rt}x(t)$, tedy $\frac{\partial g}{\partial t} = -re^{-rt}x(t)$ a $\frac{\partial g}{\partial x(t)} = e^{-rt}$. Pro kratší zápis vynechme argumenty funkce g . Potom

$$\begin{aligned} dg(t, S(t)) &= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial S(t)}dS(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial S^2(t)}(dS(t))^2 \\ &= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) + 0 \\ &= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) \\ &= (\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dW(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Podobnými úpravami dostaneme změnu v hodnotě portfolia $X(t)$.

$$\begin{aligned} dg(t, X(t)) &= \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial X(t)}dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial X^2(t)}(dX(t))^2 \\ &= -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}dX(t) + 0 \\ &= -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}(rX(t)dt + k(\alpha - r)S(t)dt + k\sigma S(t)dW(t)) \\ &= k(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + k\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) = kdg(t, S(t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pokud srovnáme diskontovanou hodnotu portfolia $X(t)$ v (4.4) a (4.2), je vidět, že po diskontování zmizí z hodnoty portfolia složka $rX(t)dt$, což je právě výnos z úroku. Podobně pro změnu hodnoty podkladového aktiva platí, že střední výnosová míra je pokrácena o úrok r a $S(t)$ se po diskontování zmenší na $e^{-rt}S(t)$.

Nyní máme popsáný vývoj ceny akcie (podkladového aktiva) a portfolia, které se skládá z tohoto aktiva a z hotovosti. Dále se věnujme tomu, jak se bude měnit cena opčního kontraktu na akcii s hodnotou $S(t)$.

Předpokládejme, že máme Evropskou call opci. Dále máme domluvenou strike price K , za kterou v čase T budeme moci koupit akcii v hodnotě $S(T)$. Výplata z držené call opce bude v čase T činit $\max(S(T) - K, 0) =: (S(T) - K)^+$. Podle úvah tří autorů (Black, Scholes, Merton) se předpokládá, že cena takové opce bude záviset na proměnné času t a ceně podkladové akcie $S(t)$. Další parametry jako strike price K , úroková míra r a volatilita σ se považují za konstantní.

Označíme tedy cenu opce jako $c(t, x) = c(t, S(t))$. Při práci s cenou opce jako funkcí $c(t, x)$ k ní budeme přistupovat jako k obyčejné (nenáhodné) funkci. Každopádně hodnota funkce $S(t)$ je náhodná, a tedy i funkce $c(t, S(t))$ je náhodná. Nynějším cílem je odvodit tvar funkce $c(t, x)$, abychom mohli mít představu o ceně opce závislou na hodnotách ceny akcie. Toho dosáhneme odvozením dynamiky ceny opce $dc(t, S(t))$ s využitím Itô-Deoblinova vzorce a již odvozeného (4.1):

$$\begin{aligned} dc(t, S(t)) &= \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S(t)} dS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} (dS(t))^2 \\ &= \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{\partial c}{\partial S(t)} (\alpha S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} (\alpha S(t) dt + \sigma S(t) dW(t))^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \alpha S(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} + \frac{\sigma^2 S^2(t)}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} \right) dt + \sigma S(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} dW(t), \quad (4.6)$$

kde jsme navíc využili toho, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} (dS(t))^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} (\alpha S(t) dt + \sigma S(t) dW(t))^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} \left(\alpha^2 S^2(t) (dt)^2 + \sigma^2 S^2(t) (dW(t))^2 + \alpha \sigma S^2(t) dW(t) dt \right), \end{aligned}$$

a zároveň máme, že

$$\begin{aligned} (dt)^2 &= 0, \\ (dW(t))^2 &= dt, \\ dW(t) dt &= 0, \text{ tedy} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} (dS(t))^2 &= \sigma^2 S^2(t) dt \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)}. \end{aligned}$$

Podobně odvodíme dynamiku diskontované ceny opce $d(e^{-rt}c(t, S(t)))$. Pro použití lemmatu označme $g(t, x) := e^{-rt}c$. Potom

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}c(t, S(t))) &= dg(t, x) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) dx + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) (dx)^2 \\ &= -re^{-rt}x dt + e^{-rt} dx + 0 \\ &= -re^{-rt}c(t, S(t)) dt + e^{-rt} dc(t, S(t)) \\ &= e^{-rt} \left(-rc + \frac{\partial c}{\partial t} + \alpha S(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} \right) dt \\ &\quad + e^{-rt} \sigma S(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} dW(t). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nyní máme připravené nástroje k závěrečnému odvození Black-Scholes-Mertonově parciální diferenciální rovnici. Jak již bylo nastíněno na začátku této části, cenu evropské opce odvozujeme na základě předpokladu, že sestavujeme portfolio $X(t)$, kde jedna část je investována (nebo vypůjčena) s nějakou bezrizikovou mírou a další část představuje akcie. Tedy model předpokládá, že na trhu existuje alespoň jedno bezrizikové aktivum a alespoň jedno aktivum, u kterého je nejistý vývoj v hodnotě (existuje risk).

Portfolio $X(t)$, které replikuje cenu opce $c(t, S(t))$ a ve kterém tvoří jednu část akcie a druhou část investice s bezrizikovou úrokovou mírou, pak musí pro všechny $t \in \langle 0, T \rangle$ odpovídat ceně opce. Toto nastane v případě, že i diskontované hodnoty opce a portfolia se rovnají, tedy

$$e^{-rt}X(t) = e^{-rt}c(t, S(t)), \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Toho docílíme nastavením podmínky pro čas $t = 0$ na $X(0) = c(0, S(0))$ a tím, že v každém okamžiku si budou odpovídat změny hodnot portfolia a ceny opce:

$$d(e^{-rt}X(t)) = d(e^{-rt}c(t, S(t))), \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Teď využijeme výsledků (4.4) a (4.7) a porovnáme je mezi sebou:

$$\begin{aligned} & k(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + k\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) \\ &= e^{-rt} \left(-rc + \frac{\partial c}{\partial t} + \alpha S(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} \right) dt + e^{-rt} \sigma S(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} dW(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pro odstranění náhodné složky z modelu je třeba vždy nastavit $k = k(t) = \frac{\partial c}{\partial S}$. Pak po několika úpravách dostaneme Black-Scholes-Mertonovu parciální diferenciální rovnici pro funkci $c(t, S(t))$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2(t) \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)} = rc, \quad t \in \langle 0, T \rangle. \quad (4.9)$$

Dále budeme hledat spojitou funkci $c(t, x)$, která řeší PDR (4.9), pro $t \in \langle 0, T \rangle$, $x \geq 0$, a splňuje podmínky $c(T, x) = \max(x - K, 0)$. Taková funkce $c(t, S(t))$ pak bude odpovídat ceně evropské call opce na akci $S(t)$.

4.2 Alternativní odvození BSM PDR

Uveďme ještě jedno další, podobné odvození tvaru BSM parciální diferenciální rovnice. BSM parciální diferenciální rovnice musí být splněna libovolným derivátem závislým na ceně akcie, u které se nevyplácí dividendy.

Při odvozování BSM PDR vycházíme z následujících předpokladů[5]:

1. Cena akcie je popsána geometrickým Brownovým pohybem.
2. Můžeme prodávat cenné papíry s okamžitou možností používat obdržené prostředky.
3. Neexistují žádné transakční náklady a daně.
4. Neexistuje arbitráž.
5. Obchodovat můžeme v libovolném okamžiku a libovolné množství cenných papírů - spojitost.
6. Rizikově neutrální míra r , výnosová míra μ a volatilita σ jsou konstantní.

Hlavní myšlenkou je vytvoření takového portfolia, které bude pro změny podkladového aktiva bezrizikové pro krátké časové změny. Tedy, že kolísání ceny akcie bude zajištěno investicí do něčeho, co bude vyrovnávat tyto výkyvy. Takové portfolio $\Pi(t)$ můžeme zkonstruovat neboť jak derivát, tak podkladové aktivum jsou ovlivněny stejným prvkem náhody, jsou tedy naprosto korelované. Bude tvořeno podílem akcií $aS(t)$, $a > 0$ a podílem short call opcí na tyto, námi držené, akcie $bc(t, S(t))$, $b > 0$. Potom se hodnota tohoto portfolia bude rovnat

$$\Pi(t) = aS(t) - bc(t, S(t)). \quad (4.10)$$

Při vhodné kombinaci parametrů a, b bude hodnota portfolia necitlivá vůči malým výkyvům v ceně akcie. Buď k takové, že $a = kb$. To znamená, že poměr držených akcií bude ovlivňovat poměr prodaných call opcí. Pro změnu hodnoty portfolia platí

$$d\Pi(t) = kb dS(t) - b dc(t, S(t)), \quad (4.11)$$

a zároveň chceme, aby se hodnota portfolia neměnila, tedy

$$d\Pi(t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow kdS(t) - dc(t, S(t)) \stackrel{!}{=} 0. \text{ Takže}$$

$$k = \frac{\partial c}{\partial S}(t, S(t)).$$

Takové k se pak nazývá anglicky *delta-hedge*. Slovy nám hodnota k říká, že při držení $\frac{\partial c}{\partial S}$ podílů akcie S , je třeba na portfoliu mít také jednu short call opci na toto množství.

Jak brzy zjistíme, konstrukce takového portfolia nám z rovnice odstraní náhodnou složku. Nyní využijeme toho, co bylo dosud odvozeno a myšlenky portfolia skládajícího se z oněch dvou komponent, k potvrzení tvaru k a odvození Black-Scholes-Mertonovi PDR.

Mějme tedy $c = c(t, S(t))$ cenu opce na akcie $S(t)$ a portfolio $\Pi = -c(t, S(t)) + kS(t)$. Potom

$$\begin{aligned} d\Pi &= -dc(t, S(t)) + kdS(t) \\ &\stackrel{(4.6), (4.1)}{=} -\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \alpha S(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} + \frac{\sigma^2 S^2(t)}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)}\right) dt - \sigma S(t) \frac{\partial c}{\partial S(t)} dW(t) \\ &\quad + k\left(\alpha S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Zde potvrzujeme, že pro odstranění náhodné složky $dW(t)$, je třeba definovat $k := k(t) := \frac{\partial c}{\partial S(t)}(t, S(t))$. Z toho dostaneme

$$d\Pi = -\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\sigma^2 S^2(t)}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2(t)},$$

což je zajímavé i v tom smyslu, že z rovnice vypadl parametr α , tedy že hodnota portfolia je nezávislá na středním výnosu z akcie.

Dalším předpokladem je, že na trhu neexistuje arbitráž. Potom se tedy výnos z portfolia $d\Pi$ musí rovnat výnosu z investice o hodnotě Π do bezrizikového instrumentu s úrokovou mírou r . Pokud označíme $\Delta\Pi$ jako změnu hodnoty portfolia Π za čas Δt , dostaneme

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t. \quad (4.13)$$

Po dosazení z (4.12) a s pár jednoduchými úpravami dostaneme Black-Scholes-Mertonovu parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rS \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = rc. \quad (4.14)$$

4.3 Cena evropské call opce jako řešení BSM rovnice

Přepíšeme-li rovnici (4.9) na tvar

$$\frac{\partial c}{\partial t} + rx \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = rc, \text{ kde } t \in \langle 0, T \rangle, x \geq 0, \quad (4.15)$$

dostaneme PDR, která je typu zpětně parabolická. Pro nalezení řešení je třeba mít definované okrajové podmínky pro x a koncovou podmínku pro t . Pro t je koncová podmínka následující

$$c(T, x) = (x - K)^+. \quad (4.16)$$

Podmínku pro $x = 0$ dostaneme tak, že dosadíme do (4.15):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = rc,$$

z čehož hned plyne, že $c(t, 0) = e^{rt}c(0, 0)$. Z podmínky (4.16) a ze spojitosti funkce $c(t, 0)$ vidíme, že $c(T, 0) = 0$ a tedy musí nutně platit

$$c(t, 0) = 0, \quad t \in \langle 0, T \rangle. \quad (4.17)$$

Druhá okrajová podmínka pro x , je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [c(t, x) - (x - e^{-r(T-t)}K)] = 0, \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

Což znamená, že s velkým růstem hodnoty akcie poroste stejně i cena příslušné call opce. Tedy $c(t, x) \sim x$, $x \rightarrow +\infty$. Jediný rozdíl mezi těmito dvěma hodnotami bude diskontovaná strike price, ale jinak hodnota c bude pro velké hodnoty odpovídat x .

Protože je podmínka na čas $t = T$ dána až na konec časového intervalu, má tato PDR přívlástek *zpětná*. Cílem je převedení BSM parciální diferenciální rovnice 4.15 na tzv. *rovnici vedení tepla* pomocí transformace proměnných. Tato rovnice ve svém fyzikálním významu popisuje vedení tepla v n -rozměrném prostoru (pro náš případ bude $n = 1$), nicméně pro nás je důležitější, že pro tuto rovnici existuje vzorec pro řešení. Postup odvozování řešení BSM PDR je stručně řečeno takový, že [3]

1. Zavedení transformace proměnných tak, aby se ze zpětně parabolické stala pouze parabolická PDR:

$$\begin{aligned} t &= T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \\ x &= Ke^{\xi}, \\ c(t, x) &= Kf(\tau, \xi). \end{aligned}$$

Nyní je třeba vyjádřit proměnné τ, ξ a napočítat parciální derivace $\frac{\partial c}{\partial t}$, $\frac{\partial c}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$

v řeči proměnných τ, ξ a $f(\tau, \xi)$:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}, \\ \xi &= \ln \frac{x}{K} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= K \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -K \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2}, \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= K \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = K \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{1}{x} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2} K \frac{\partial f}{\partial \xi} + K \frac{1}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ &= -\frac{1}{x^2} K \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{x^2} K \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}.\end{aligned}$$

Ještě je třeba patřičně upravit koncovou podmínku

$$c(T, x) = (x - K)^+ = (Ke^\xi - K)^+ = Kf(0, \xi) \Rightarrow f(0, \xi) = (e^\xi - 1)^+.$$

Z toho je vidět, že jsme koncovou podmínku původního problému (4.15) transformovali na počáteční podmínku. Nyní transformované veličiny dosadíme do původní rovnice (4.15):

$$\begin{aligned}-K \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\sigma^2}{2} + rKe^\xi K \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{1}{Ke^\xi} + \\ + \frac{1}{2}\sigma^2 K^2 e^{2\xi} \left(-\frac{1}{K^2 e^{2\xi}} K \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{K^2 e^{2\xi}} K \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right) = rKf.\end{aligned}\tag{4.18}$$

2. Označíme $\varphi := \frac{2r}{\sigma^2}$ a několika jednoduchými úpravami převedeme rovnici (4.18) na parabolickou PDR s konstantními koeficienty:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial f}{\partial \tau} + (\varphi - 1) \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \varphi f = 0, \\ \xi \in \mathbb{R}, \\ \tau \in \langle 0, T \frac{\sigma^2}{2} \rangle.\end{aligned}\tag{4.19}$$

3. Nyní bychom zavedli další transformaci proměnných $f = \exp(\alpha\xi + \beta\tau)g(\tau, \xi)$, kde α, β se musí určit za pochodu, díky které bychom převedli rovnici (4.19) na tvar rovnice vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, pro kterou je známá podoba řešení

$$u(\tau, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, s) e^{-\frac{(\xi-s)^2}{4\tau}} ds.\tag{4.20}$$

4. Nakonec bychom museli vyřešit integrál (4.20) a provést transformaci proměnných zpět na původní. Kompletní odvození je popsáno v [3].

Výsledné řešení BSM rovnice (4.15) pro evropskou call opci pak vypadá následovně:

$$c(\tau_1, x|K, r, \sigma) = x\Phi(d_+(\tau_1, x)) - e^{-r\tau_1}K\Phi(d_-(\tau_1, x)), \quad (4.21)$$

kde

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \\ d_+(\tau_1, x) &= d_-(\tau_1, x) + \sigma\sqrt{\tau_1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau_1}} \left(\ln \frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau_1 \right), \\ \tau_1 &= T - t. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.4 Cena evropské call opce podle rizikově neutrální míry

Pro cenu evropské call opce bylo již nastíněno odvození jako řešení BSM parciální diferenciální rovnice (4.9). Dalším přístupem, jak odvodit tento vzorec, je použití rizikově neutrální míry [12].

To znamená, že cenu opce $c(t, S(t))$ počítáme jako podmíněnou střední hodnotu diskontované teoretické hodnoty $(S(T) - K)^+$ podle filtrace $\mathcal{F}(t)$, přičemž předpokládáme konstantní úrokovou míru r a konstantní volatilitu σ [12].:

$$c(t, S(T)) = \tilde{\mathbb{E}}(e^{r(T-t)}(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}(t)). \quad (4.23)$$

Pro náhodnou proměnnou $S(t)$ platí:

$$S(t) = S(0) \exp \left(\sigma \tilde{W}(t) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right),$$

kde $\tilde{W}(t)$ je Wienerův proces definován v 3.38. Definujeme-li $\tau := T - t$ a proměnnou Y jako¹

$$Y = -\frac{\tilde{W}(T) - \tilde{W}(t)}{\sqrt{\tau}},$$

Pro Y tedy platí, že je to náhodná veličina ze standardního normálního rozdělení při neutrálně rizikově pravděpodobnosti \tilde{P} . Pak pro $S(T)$ platí

¹Rozdíl τ nese význam jako *čas do vypršení opce*, neboli čas do maturity termínu.

$$\begin{aligned}
S(T) &= S(t) \exp \left(\sigma(\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right) \\
&= S(t) \exp \left(-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right) = S(t)X(t).
\end{aligned}$$

Pro přehlednost jsme označili $S(T)$ jako součin $S(T) = S(t)X(t)$, kde $S(t)$ je $\mathcal{F}(t)$ –měřitelná a $X(t)$ je nezávislá na filtraci $\mathcal{F}(t)$. Z toho a z vlastností normálního rozdělení plyne

$$\begin{aligned}
c(t, x) &= \widetilde{\mathbb{E}} \left[e^{r\tau} (S(t)X(t) - K)^+ \right] \\
&= \widetilde{\mathbb{E}} \left[e^{r\tau} \left(S(t) \exp \left(-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right) - K \right)^+ \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\tau} \left(x \exp \left(-\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right) - K \right)^+ e^{\frac{1}{2}y^2} dy.
\end{aligned}$$

Pokud argument ξ funkce $(\xi)^+$ bude záporný, pak je hodnota této funkce nulová a tedy i celý integrál je nula. Uvažujme tedy pouze tu situaci, kdy $\xi > 0$:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{<} \xi = x \exp \left(-\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right) - K \Rightarrow \\
K &< x \exp \left(-\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right), \\
\ln \frac{K}{x} &< -\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau, \\
y &< \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left(\ln \frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right).
\end{aligned}$$

Výraz na pravé straně posledního řádku budeme ještě několikrát používat, a proto ho označíme jako

$$d_-(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left(\ln \frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right). \quad (4.24)$$

Pro poslední kroky si ještě připomeňme tvar distribuční funkce normálního rozdělení $F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp -\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} dt$ a $\Phi(x) = F(x; 1, 0)$ pro standardní normální rozdělení. Nyní můžeme odvodit finální podobu funkce pro cenu opce $c(t, x)$:

$$\begin{aligned}
c(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\tau} \left(x \exp \left(-\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right) - K \right)^+ e^{\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} \exp \left(-r\tau - \sigma\sqrt{\tau}y + r\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\
&\quad - \frac{e^{-r\tau}K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} \exp \left(\frac{y^2}{2} \right) dy \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau, x)} \exp \left(-\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{\tau})^2 \right) dy - e^{-r\tau}K\Phi(d_-(\tau, x)) \\
&= \left[\begin{array}{c} \text{substitute} \\ z := y + \sigma\sqrt{\tau} \\ d_+(\tau, x) := d_-(\tau, x) + \sigma\sqrt{\tau} \end{array} \right] \\
&= x\Phi(d_+(\tau, x)) - e^{-r\tau}K\Phi(d_-(\tau, x)).
\end{aligned}$$

Tímto jsme odvodili cenu evropské call opce na akcii $S(t)$. Označme takovou konkrétní funkci jako $\text{BSM}(\tau, x|K, r, \sigma)$ s proměnnými τ, x a parametry K, r, σ :

$$\text{BSM}(\tau, x|K, r, \sigma) = \tilde{\mathbb{E}} \left[e^{r\tau} \left(x \exp \left(-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right) - K \right)^+ \right] \quad (4.25)$$

$$= x\Phi(d_+(\tau, x)) - e^{-r\tau}K\Phi(d_-(\tau, x)). \quad (4.26)$$

Kapitola 5

Stochastické difúzní procesy se skokem

Náhodné difúzní procesy se skokem jsou složeny ze dvou hlavních komponent. Slovo *difúze* v jejich názvu napovídá tomu, že u těchto procesů existuje složka, která odpovídá Brownově pohybu. Na druhou stranu se zde mohou vyskytovat události, které jsou v trajektorii takových procesů popisovány jako *skoky*. Nejdříve zde bude představen způsob, jak oceňovat opce, které mají jako podkladové aktivum skokový proces. Druhá část této kapitoly pak bude věnována oceňování opcí na podkladové aktivum, jehož vývoj je popsán kombinací Wienerova a skokového procesu[12].

5.1 Skokový proces

Definice 5.1.1. Náhodný proces $J(t)$ má *ryzí skoky*, pokud je hodnota tohoto procesu mezi skoky konstantní.

Definice 5.1.2. Nechtě (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a $\mathcal{F}(t), t \geq 0$ je příslušná filtrace pro všechny dále uvažované náhodné procesy. Potom $X(t)$ nazveme *náhodným procesem se skoky*, pokud platí následující

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + I(t) + R(t) + J(t), \\ X(t) &= X(0) + \int_0^t f(s) dW(s) + \int_0^t g(s) ds + J(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Tedy náhodný proces $X(t)$ je složen ze čtyř částí, kde $I(t) = \int_0^t f(s) dW(s)$ je Itôův integrál z adaptovaného procesu $f(s)$ podle Wienerova procesu $W(t)$, $R(t) = \int_0^t g(s) ds$ je Riemannův integrál z nějakého adaptovaného procesu $g(s)$ a $J(t)$ je proces s ryzím skokem. *Spojité částí procesu $X(t)$* se značí jako $X^c(t) = X(0) + I(t) + R(t)$.

Poznámka 5.1.1. Všechny uvažované procesy jsou zprava spojité. To znamená, že v čase skoku t je hodnota procesu rovna hodnotě po tomto skoku. Pokud by byl

náhodný proces zleva spojitý, pak hodnota procesu v čase t by byla rovna hodnotě procesu před tímto skokem. Zleva spojitý proces budeme značit $X(t-)$. S tímto značením pak můžeme vyjádřit velikost skoku procesu X v čase t jako $\Delta X(t) = X(t) - X(t-)$. Zároveň platí, že $\Delta X(0-) = 0$, protože v čase $t = 0$ žádný skok není.

Definice 5.1.3. Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) , $X(t)$ náhodný proces se skoky a $h(t)$ adaptovaný proces. Pak *náhodný integrál z $h(t)$ podle $X(t)$* definujeme jako

$$\int_0^t h(s) dX(s) = \int_0^t h(s) f(s) dW(s) + \int_0^t h(s) g(s) ds + \sum_{s=0}^t h(s) \Delta J(s). \quad (5.2)$$

Příklad 5.1.1. Jako příklad skokového procesu si uveďme kompenzovaný Poissonův proces, definovaný v kapitole 3 jako

$$M(t) = N(t) - \lambda t, \quad (5.3)$$

kde $N(t)$ je Poissonův proces s parametrem λ . Potom podle značení z (5.1) stanovme pro $t \geq 0$

$$\begin{aligned} X(t) &= M(t), \\ I(t) &= 0, \\ R(t) &= X^c(t) = -\lambda t, \\ J(t) &= N(t). \end{aligned}$$

Jako adaptovaný proces označme

$$h(t) = \Delta N(t) = \begin{cases} 1, & \text{pokud má } N(t) \text{ skok v čase } t, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (5.4)$$

Z definice h je jasné, že $h(t) = 0$ skoro všude, tedy pouze v konečně případech platí, že $h(t) = 1$. Spočítejme nyní příslušné integrály

$$\begin{aligned} \int_0^t h(s) dR(s) &= -\lambda \int_0^t h(s) ds = 0, \\ \int_0^t h(s) dJ(s) &= \int_0^t h(s) dN(s) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta N(s) \Delta N(s) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta N(s) = N(t), \Rightarrow \\ \int_0^t h(s) dM(s) &= -\lambda \int_0^t h(s) ds + \int_0^t h(s) dN(s) = N(t). \end{aligned}$$

5.2 Cena akcie jako skokový proces

Nyní předpokládejme, že se cena akcie $S(t)$ modeluje podle tzv. *geometrického Poissonova procesu*[12].

$$S(t) = S(0) \exp(\alpha t + N(t) \ln(\sigma + 1) - \lambda \sigma t) = S(0)(\sigma + 1)^{N(t)} \exp(\alpha t - \lambda \sigma t). \quad (5.5)$$

Zde máme volatilitu $\sigma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, střední výnosovou míru α , Poissonův proces $N(t)$ s intenzitou λ při pravděpodobnostní míře P . Označme $M(t) = N(t) - \lambda t$ jako kompenzovaný Poissonův proces. Zajímá nás, jak vypadá derivace $dS(t)$ pro takový proces. K tomu bude potřebovat následující větu.

Věta 5.2.1 (Itô-Doeblinova pro skokový proces).

Nechť máme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) a na něm skokový proces $X(t) = X^c(t) + J(t)$. Dále nechť funkce $f(x)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná. Potom

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s)) dX^c(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X(s)) dX^c(s) dX^c(s) \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} (f(X(s)) - f(X(s-))). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Poslední výraz na pravé straně představuje součet velikostí všech skoků.

Proto označíme $f(x) = e^x$ a $S(t) = S(0)f(X(t))$. Tedy spojitá část procesu $X(t)$ je rovna $X^c(t) = (\alpha - \lambda \sigma)t$ a skoková část je rovna $J(t) = N(t) \ln(\sigma + 1)$. Z toho plyne, že $dX^c(t) = (\alpha - \lambda \sigma)dt$. Tedy podle věty 5.2.1 a faktu, že $dt dt = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= f(X(0)) + (\alpha - \lambda \sigma) \int_0^t f'(X(s)) ds + \sum_{0 < s \leq t} (f(X(s)) - f(X(s-))) \\ &= 1 + (\alpha - \lambda \sigma) \int_0^t \frac{S(s)}{S(0)} ds + \frac{1}{S(0)} \sum_{0 < s \leq t} (S(s) - S(s-)), \\ S(t) &= S(0)f(X(t)) = S(0) + (\alpha - \lambda \sigma) \int_0^t S(s) ds + \sum_{0 < s \leq t} (S(s) - S(s-)). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Nyní se podívejme na rozdíl $S(t) - S(t-)$. Pokud v čase t nastává skok, pak $S(t) = (\sigma + 1)S(t-)$. Dodejme jen, že pokud $\sigma \in (-1, 0)$, resp. $\sigma \in (0, +\infty)$, pak cena „skáče“ nahoru, resp. dolů. Pokud v čase t skok nenastává, pak $S(t) - S(t-) = 0$. Z toho plyne, že

$$S(t) - S(t-) = \sigma S(t-) \Delta N(t). \quad (5.8)$$

Protože předpokládáme, že nastává pouze konečný počet skoků, pak se funkce $S(t)$ a $S(t-)$ liší pouze v konečně mnoha bodech, tedy jejich integrály se rovnají. Zapsáno

$$\int_0^t S(s) ds = \int_0^t S(s-) ds,$$

tedy můžeme přepsat zmiňovanou sumu jako integrál

$$\begin{aligned} \sum_{0 < s \leq t} (S(s) - S(s-)) &= \sum_{0 < s \leq t} \sigma S(s-) \Delta N(s) \\ &= \sigma \int_0^t S(s-) dN(s) = \sigma \int_0^t S(s) dN(s). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Z toho pro cenu $S(t)$ vyplývá, že

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) + (\alpha - \lambda\sigma) \int_0^t S(s) ds + \sigma \int_0^t S(s) dN(s) \\ &= S(0) + \alpha \int_0^t S(s) ds + \sigma \int_0^t S(s) dM(s), \Rightarrow \\ dS(t) &= \alpha S(t) dt + \sigma S(t) dM(t) \\ &= \alpha S(t) dt + \sigma S(t) (dN(t) - \lambda dt) \\ &= (\alpha - \lambda\sigma) S(t) dt + \sigma S(t) dN(t), \end{aligned}$$

což je naše hledaná dynamika ceny akcie $S(t)$ při pravděpodobnostní míře P , která je popisována skokovým procesem. Nyní se budeme potřebovat přesunout k rizikově neutrální míře \tilde{P} tak, aby tento geometrický Poissonův proces měl střední výnosovou míru α rovnou úrokové míře r . Chceme tedy psát dynamiku ceny $S(t)$ jako

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t) dt + \sigma S(t-) d\tilde{M}(t) \\ &= (r - \tilde{\lambda}\sigma) S(t) dt + \sigma S(t) d\tilde{N}(t). \end{aligned}$$

Musíme najít takové $\tilde{\lambda}$, při kterém bude platit, že $\alpha - \lambda\sigma = r - \tilde{\lambda}\sigma$. Takže

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \frac{\alpha - r}{\sigma}. \quad (5.10)$$

Pro takto definované $\tilde{\lambda}$, musí platit, že $\tilde{\lambda} > 0$. Pokud by tomu tak nebylo, pak bude existovat arbitráž. Pro demonstraci necht' tedy $\lambda \leq \frac{\alpha - r}{\sigma}$ a necht' nejdříve $\sigma \in (-1, 0)$. Potom po dosazení do (5.5) dostáváme, že

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)(\sigma + 1)^{N(t)} \exp(\alpha t - \lambda\sigma t) \\ &\leq S(0)(\sigma + 1)^{N(t)} e^{-rt} \\ &\leq S(0)e^{-rt}. \end{aligned}$$

Tedy se vyplatí prodat všechny akcie a peníze investovat s úrokovou mírou r . Pokud $\sigma > 0$, pak bude situace opačná a sice se vyplatí vypůjčit si za úrokovou míru r a nakoupit akcie. Platí tedy, že $\tilde{\lambda} > 0$. Toto budeme potřebovat pro konstrukci rizikově neutrální míry \tilde{P} . Položme

$$Z(t) = \exp((\lambda - \tilde{\lambda})t) \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{N(t)}. \quad (5.11)$$

V [12] je dokázáno, že při takto definované funkci $Z(t)$ jsme schopni vytvořit rizikově neutrální míru $\tilde{P} = \int_A Z(T) dP$, $A \in \mathcal{F}$, při které má Poissonův proces $N(t)$ intenzitu $\tilde{\lambda}$. Zároveň máme zajištěno, že kompenzovaný Poissonův proces $\tilde{M}(t) = N(t) - \tilde{\lambda}t$ je martingal a tedy

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t-)d\tilde{M}(t). \quad (5.12)$$

Samotnou cenu $S(t)$ můžeme napsat ve smyslu nové míry jako

$$S(t) = S(0) \exp((r - \tilde{\lambda}\sigma)t) (\sigma + 1)^{N(t)}. \quad (5.13)$$

Pokud označíme $V(t)$, $0 \leq t \leq T$ jako rizikově neutrální cenu opce evropské call opce, z níž je v čase $t = T$ zisk roven $V(T) = (S(T) - K)^+$, pak můžeme využít toho, že diskontovaná $V(t)$ je martingal při rizikově neutrální míře (lemma 3.7.1. Tedy

$$e^{-rt}V(t) = \tilde{E}(e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}(t)) \quad (5.14)$$

a zároveň pro cenu akcie $S(T)$ máme

$$S(T) = S(t)e^{(r - \tilde{\lambda}\sigma)(T-t)} (\sigma + 1)^{N(T) - N(t)}. \quad (5.15)$$

Po dosazení do (5.14) a vynásobením obou stran rovnice faktorem e^{rt} dostaneme, že

$$\begin{aligned} V(t) &= \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)}(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}(t)) \\ &= \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)}(S(t)e^{(r-\tilde{\lambda}\sigma)(T-t)}(\sigma + 1)^{N(T)-N(t)} - K)^+ | \mathcal{F}(t)). \end{aligned}$$

Protože $S(t)$ je $\mathcal{F}(t)$ -měřitelná a $e^{(r-\tilde{\lambda}\sigma)(T-t)}(\sigma + 1)^{N(T)-N(t)}$ je složka nezávislá na filtraci $\mathcal{F}(t)$, pak, pokud označíme $V(t) = c(t, S(t))$, můžeme vyjádřit rizikově neutrální cenu evropské call opce jako

$$\begin{aligned} c(t, x) &= \tilde{\mathbb{E}}(e^{-r(T-t)}(S(t)e^{(r-\tilde{\lambda}\sigma)(T-t)}(\sigma + 1)^{N(T)-N(t)} - K)^+) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(x e^{-\tilde{\lambda}\sigma(T-t)}(\sigma + 1)^i - K e^{-r(T-t)} \right)^+ \frac{\tilde{\lambda}^i (T-t)^i}{i!} e^{-\tilde{\lambda}(T-t)}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Zde jsme využili toho, že pro $i = 0, 1, \dots$ platí

$$P\{N(t) - N(s) = i\} = \frac{\lambda^i (t-s)^i}{i!} e^{-\lambda(t-s)}. \quad (5.17)$$

Vzorce (5.16) již budeme využívat v praktickém výpočtu pro cenu evropské call opce na akcii, jejíž cena je popisována geometrickým Poissonovým procesem, tedy čistým skokovým procesem.

5.3 Cena akcie jako skokově-difúzní proces

V předchozí části jsme pracovali s cenou akcie, která byla modelována geometrickým Poissonovým procesem. Tento proces obsahuje pouze skoky. Nyní budeme chtít ke skokovému procesu přidat navíc i difúzní část. Ta bude reprezentována Wienerovým procesem. Pro tuto část tedy předpokládejme, že cenu akcie modelujeme následujícím procesem [12]

$$S(t) = S(0) \exp \left(\sigma W(t) + \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right) \prod_{i=1}^{N(t)} Y_i. \quad (5.18)$$

Tento stochastický proces je složen ze spojitě části $X^c(t)$ a ze skokové části $J(t)$

$$\begin{aligned} X^c(t) &= S(0) \exp \left(\sigma W(t) + \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right), \\ J(t) &= \sum_{i=1}^{N(t)} (Y_i - 1), \end{aligned}$$

Kde $W(t)$ je Wienerův proces na (Ω, \mathcal{F}, P) , $N(t)$ je Poissonův proces a Y_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny takové, že $Y_i \geq 0$. Náhodné proměnné $Y_i - 1$ vlastně představují procentuální změnu v ceně $S(t)$. Například pokud $Y_i = 0$, pak cena klesne o sto procent na nulu. Takto definované $S(t)$ splňuje stochastickou diferenciální rovnici tvaru

$$\begin{aligned} dS(t) &= \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + S(t-)(dQ(t) - \beta\lambda t) \\ &= (\alpha - \beta\lambda)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + S(t-)dQ(t), \end{aligned} \quad (5.19)$$

kde $Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (Y_i - 1)$ je složený Poissonův proces. Potom $C^*(t) = Q(t) - \beta\lambda t$ je kompenzovaný složený Poissonův proces, kde β je průměrná výška skoku procesu $Q(t)$ a λ je průměrný počet skoků za jednotku času.

Při současné pravděpodobnostní míře P je α výnosová míra akcie. Cílem bude opět nalezení rizikově neutrální míry \tilde{P} , při které bude výnosová míra akcie rovna úrokové míře r .

Abychom zajistili nezápornost Y_i , budeme je uvažovat jako náhodné veličiny z log-normálního rozdělení $LN(a, b^2)$. Protože jsou Y_i nezávislé pro $i = 1, \dots, n$, pak jejich součin $Y_1 \cdots Y_n$ bude z $LN(na, nb^2)$. Pro log-normální náhodnou veličinu $Y_i \sim LN(a, b^2)$ platí, že $\ln Y_i \sim N(a, b^2)$. Pro Wienerův proces platí, že $W(t) \sim N(0, t)$. Pak tedy pro cenu $S(t)$ definovanou jako (5.18) dostáváme

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \exp \left(\sigma W(t) + \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right) \prod_{i=1}^{N(t)} Y_i \\ &\sim S(0) LN \left(\left(\alpha - \beta\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right) LN(na, nb^2) \\ &\sim LN \left(\ln S(0) + \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + na, \sigma^2 t + nb^2 \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Využili jsme toho, že Wienerův proces $W(t)$ a Y_i jsou nezávislé. Teď potřebujeme, aby proces $C^*(t) = Q(t) - \beta\lambda t$ byl martingal. Toho docílíme tak, že nastavíme

$$\beta = EY_i - 1. \quad (5.21)$$

Označme [4]

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda(1 + \beta), \\ \sigma_n^2(t) &= \sigma^2 + \frac{b^2 n}{T - t}, \\ r_n(t) &= r - \lambda\beta + n \frac{\ln(1 + \beta)}{T - t}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme vyjádřit cenu evropské call opce jako [12][4][9]

$$c(t, S(t)) = V(t) = \tilde{\mathbb{E}} \left(e^{-r(T-t)} (S(T) - K)^+ | \mathcal{F}(t) \right), \Rightarrow$$

$$c(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\tilde{\lambda}(T-t)} \frac{\tilde{\lambda}^n (T-t)^n}{n!} \text{BSM}(T-t, x | K, r_n(t), \sigma_n(t)). \quad (5.22)$$

Zde výraz $e^{-\tilde{\lambda}(T-t)} \frac{\tilde{\lambda}^n (T-t)^n}{n!}$ vlastně představuje pravděpodobnost $\tilde{P}\{N(T) - N(t) = n\}$, tedy že během časového úseku $T-t$ nastane n skoků. Tuto poslední rovnici (5.22) již budeme schopni použít přímo pro výpočet ceny opce na podkladové aktivum, jehož cena se modeluje jako skokově-difúzní proces.

Kapitola 6

Implementace popsaných metod

V této části bude představena implementace jednotlivých procesů a teoretických vzorců, které byly v této práci popsány. Nejdříve budou simulovány používané náhodné procesy. Těmito simulacemi můžeme modelovat pohyb ceny akcie až do času T , a pak na tomto základě spočítat cenu call opce jako $e^{-rT}(\bar{S}(T) - K)^+$. Jako další pak bude implementován teoretický výpočet ceny call opce pomocí Black-Scholes-Mertonova modelu. Nakonec bude počítána cena opce z Mertonova skokově-difúzního modelu.

6.1 Wienerův proces

Pseudokód pro generování trajektorií Wienerova procesu je popsán v algoritmu 1.

Algoritmus 1 Wienerův proces

Nastavení parametrů

T ... koncový čas

n ... granularita dělení intervalu $\langle 0, T \rangle$

Výpočet jedné trajektorie

$dt = T/n$... velikost jednoho podintervalu

$x = \text{randn}(n,1)$... vektor délky n náhodných nezávislých výběrů z $N(0, 1)$.

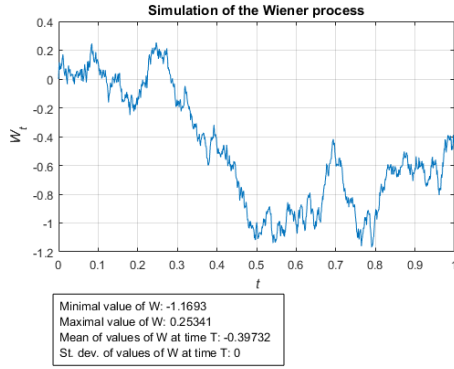
$dW = \text{sqr}(dt)*x$... přírůstky Wienerova procesu

$dW(1) = 0$... první nastavit na nulu, protože $W(0) = 0$.

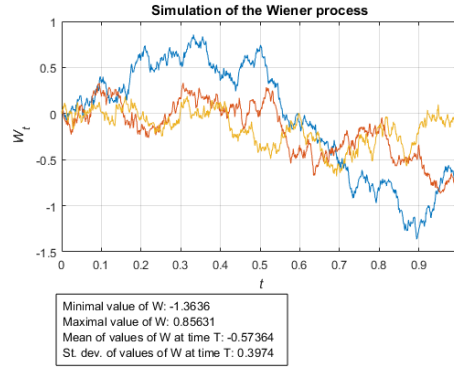
$W = \text{cumsum}(dW)$... posloupnost částečných součtů přírůstků tvoří Wienerův proces

Kompletní kód, který simuluje Wienerův proces je přiložen v **Příloze A**. Implementace je formou funkce, která vrací jednu nebo více trajektorií a umožňuje grafické zobrazení těchto trajektorií. Tato funkce a její parametry jsou zdokumentovány přímo v kódu a pomocí matlabovské nápovědy `help wiener_process` se můžeme podívat na nápovědu.

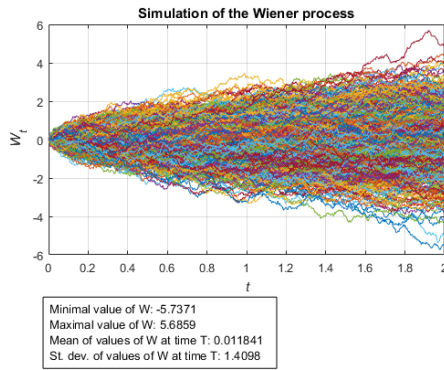
Grafický výstup můžeme vidět na obrázku 6.1. Na obrázcích 6.1c a 6.1d je zobrazeno pouze 1000 realizací kvůli výkonu, avšak připojené statistiky jsou počítány ze všech



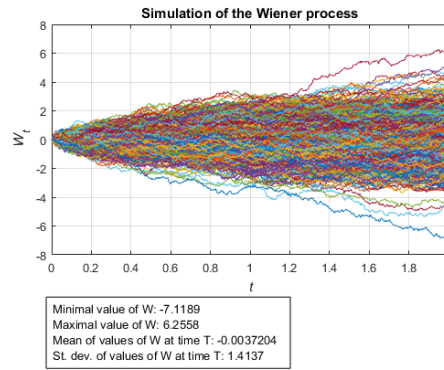
(a) Jedna trajektorie Wienerova procesu. Koncový čas $T = 1$.



(b) Tři trajektorie Wienerova procesu. Koncový čas $T = 1$.



(c) Počet realizací $N = 10^4$. Koncový čas $T = 2$.



(d) Počet realizací $N = 10^5$. Koncový čas $T = 2$.

Obrázek 6.1: Grafické zobrazení Wienerova procesu. Interval $\langle 0, T \rangle$ je vždy rozdělen na $n = 1000$ podintervalů.

realizací. Protože na těchto dvou případech je $T = 2$, pak by směrodatná odchylka hodnot $W(T)$ měla být $\sigma = \sqrt{T} = \sqrt{2} \approx 1,4142$ a střední hodnota by měla být rovna nule. Z těchto obrázků a statistik můžeme vidět, že tomu naše simulace odpovídá.

6.2 Geometrický Wienerův proces

Geometrický Wienerův proces můžeme simulovat např. následujícími dvěma způsoby:

1. Pomocí změn $dS(t)$ jako výběrů z normálního rozdělení, viz rovnice 3.28.
2. Nejdříve vygenerujeme trajektorii Wienerova procesu a pak užitím toho, že geometrický Wienerův proces je dán jako

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right). \quad (6.1)$$

Ve funkci v příloze B jsou k dispozici obě tyto varianty. Pseudokód pro obě tyto možnosti je zachycen v algoritmu 2.

Algoritmus 2 Geometrický Wienerův proces

Nastavení parametrů

S0 ... hodnota procesu v čase $t = 0$

T ... koncový čas

n ... granularita intervalu $\langle 0, T \rangle$

α ... drift

σ ... volatilita

Výpočet jedné trajektorie

S(1) = S0 ... S je vektor délky $n + 1$, na první pozici je S0

dt = T/n ... délka jednoho podintervalu

if možnost 1 **then**

for $i = 1, \dots, n$ **do**

 N ... náhodná veličina z $N(0, 1)$

$dS = \alpha * S(i) * dt + \sigma * S(i) * \sqrt{dt} * N$

$S(i+1) = dS + S(i)$

end for

end if

if možnost 2 **then**

 W ... vektor reprezentující trajektorii Wienerova procesu

$S = S0 * \exp((\alpha - 0.5 * \sigma^2) * t + \sigma * W)$

end if

Teoretické hodnoty střední hodnoty a rozptylu geometrického Wienerova procesu jsou

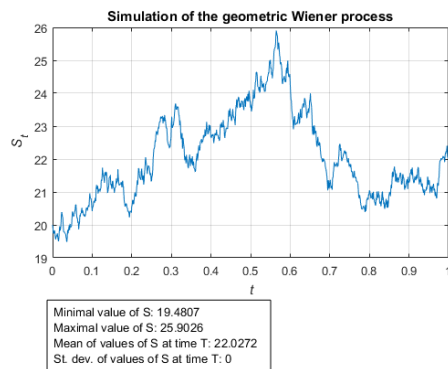
$$ES(t) = S(0)e^{\alpha t},$$

$$\text{Var}S(t) = S^2(0)e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1.)$$

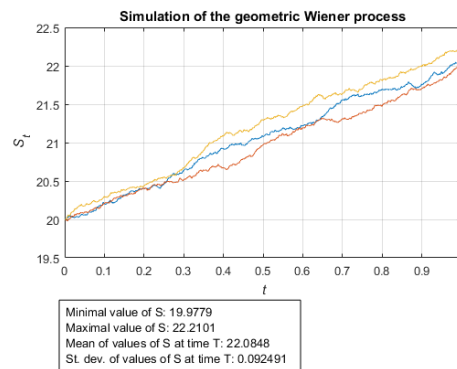
Na obrázku 2 můžeme vidět několik simulací geometrického Wienerova procesu. Na obrázcích 6.2a a 6.2b je vidět vliv parametru σ na tento proces. S menší volatilitou má na hodnoty menší vliv náhodná složka Wienerova procesu a jsou lépe předpověditelné. Na spodních obrázcích 6.2c a 6.2d je simulováno 1000 trajektorií geometrického Wienerova procesu se stejným parametrem $\sigma = 0,3$, ale s rozdílným driftem α . Teoretická střední hodnota a rozptyl pro tyto nastavení jsou společně s empirickými statistikami zachyceny v tabulce 6.1.

α	σ	$\bar{S}(T)$	$s(S(T))$	$ES(T)$	$\text{Var}S(T)$
0,2	0,3	24,6912	7,7648	24,4281	7,4964
0,1	0,3	21,9813	6,8022	22,1034	6,7831

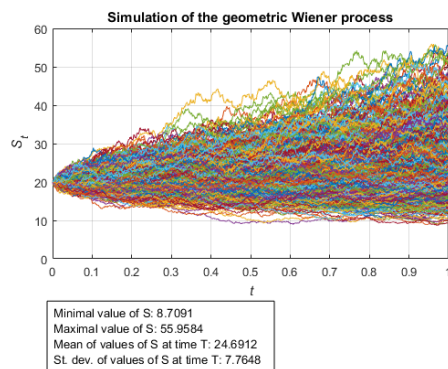
Tabulka 6.1: Empirické a teoretické statistiky geometrického Wienerova procesu při daných parametrech. Počet pozorování je roven 1000.



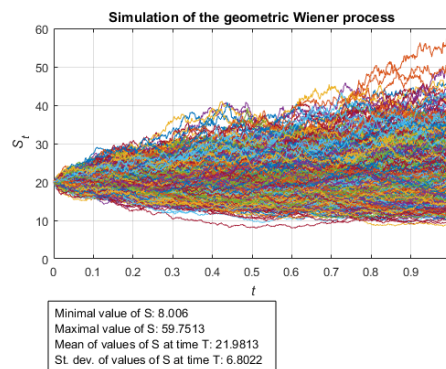
(a) Trajektorie geometrického Wienerova procesu s $\alpha = 0,1$ a $\sigma = 0,1$.



(b) Tři trajektorie geometrického Wienerova procesu s $\alpha = 0,1$ a $\sigma = 0,01$.



(c) Tisíc simulací Wienerova procesu. Parametry: $\alpha = 0,2$ a $\sigma = 0,3$.



(d) Tisíc simulací Wienerova procesu. Parametry: $\alpha = 0,1$ a $\sigma = 0,3$.

Obrázek 6.2: Grafické zobrazení geometrického Wienerova procesu. Společné parametry: $S(0) = 20$ a $T = 1$.

6.3 Poissonův proces

Při generování trajektorií Poissonova procesu můžeme např. zafixovat T a sledovat počet skoků N , které do tohoto času nastanou (viz algoritmus 3), nebo zafixovat naopak N a sledovat časy, které jsou potřebné k dosažení tohoto počtu skoků (viz algoritmus 4).

Algoritmus 3 Poissonův proces s pevným T

Nastavení parametrů
 T ... maximální čas
 λ ... intenzita skoků za jednotku času
Výpočet jedné trajektorie
 $\text{Eps} = (\varepsilon_1)$... vektor délky jedna s jedním výběrem z $\text{Exp}(\lambda)$.
if $\varepsilon_1 > T$ **then**
 Během času T nenastal žádný skok.
else
 while 1 **do**
 $e = \varepsilon$... výběr z $\text{Exp}(\lambda)$
 if $\sum_i \varepsilon_i + e < T$ **then**
 $\text{Eps} = (\text{Eps}, e)$... připoj poslední hodnotu k vektoru Eps
 end if
 end while
 spočítej počet skoků N
end if

Algoritmus 4 Poissonův proces s pevným N

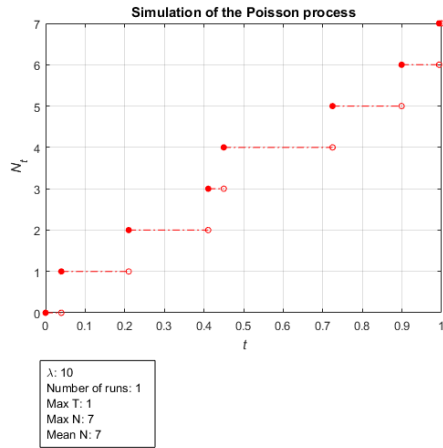
Nastavení parametrů
 N ... počet skoků
 λ ... intenzita skoků za jednotku času
Výpočet jedné trajektorie
 $\text{Eps} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$... vektor nezávislých náhodných výběrů z $\text{Exp}(\lambda)$.
 $T = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$... čas N -tého skoku

Implementace funkce, která simuluje obyčejný Poissonův proces, je k nalezení v **Příloze C**. Tato funkce generuje vždy jednu trajektorii Poissonova procesu a je možno si zvolit, jestli chceme sledovat

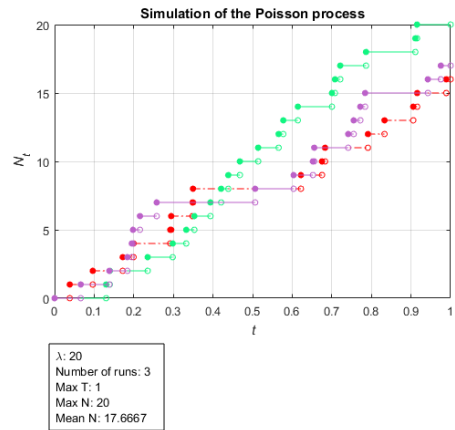
1. Počet skoků N , které nastanou do času T , nebo
2. Čas T , který musí uběhnout, aby nastalo N skoků.

Jak takový proces vypadá, je zachyceno na obrázku 6.3. Na obrázcích 6.3a, 6.3b, 6.3d pozorujeme počet skoků Poissonova procesu pro pevně daný čas T . Můžeme sledovat, jak se trajektorie změni se změnou parametru intenzity λ , tedy středního počtu skoků za jednotku času. Na obrázku 6.3c je pak naopak vidět čas t , který je

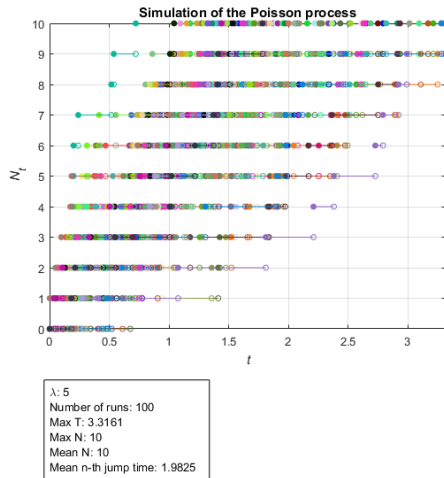
třeba k dosažení $n = 10$ skoků. Na tomto obrázku můžeme vidět i statistiku, která říká, že průměrný čas t , potřebný k dosažení $N = 10$ skoků, je při intenzitě $\lambda = 5$ roven $t = 1,9825 \approx \frac{N}{\lambda}$. Toto odpovídá skutečnosti, že vybíráme vždy 10 náhodných čísel z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda = 5$.



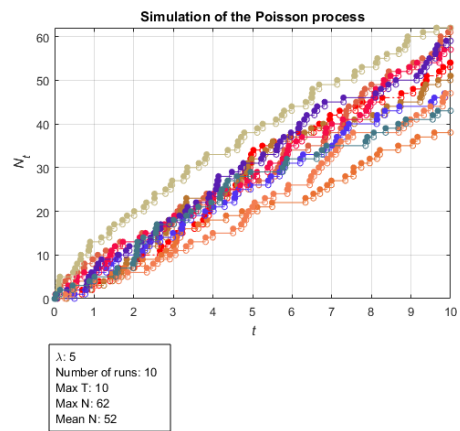
(a) Počet skoků Poissonova procesu do času $T = 1$ při intenzitě $\lambda = 10$.



(b) Tři trajektorie Poissonova procesu do času $T = 1$ při intenzitě $\lambda = 20$.



(c) Sto trajektorií Poissonova procesu při pevném počtu skoků $N = 10$ a intenzitě $\lambda = 5$.



(d) Deset trajektorií Poissonova procesu při pevném čase $T = 1$ a intenzitě $\lambda = 5$.

Obrázek 6.3: Grafické zobrazení Poissonova procesu. Můžeme sledovat, jak proces vypadá při pevném počtu skoků N či pevném čase T

6.4 Kompenzovaný Poissonův proces

Kompenzovaný Poissonův proces $M(t) = N(t) - \lambda t$ odečítá od obyčejného Poissonova procesu $N(t)$ složku $-\lambda t$ proto, aby to byl martingal. Pokud je $M(0) = 0$, pak z vlastnosti martingalu plyne, že $M(T) = 0$. Zdrojový kód pro tento proces je dostupný v **Příloze D**. Pro nastínění funkčnosti se můžeme podívat na algoritmus 5.

Algoritmus 5 Kompenzovaný Poissonův proces

Nastavení parametrů

λ ... intenzita skoků za jednotku času

T ... koncový čas

N ... granularita intervalu $\langle 0, T \rangle$

Výpočet jedné trajektorie

$dt = T/N$... velikost jednoho podintervalu

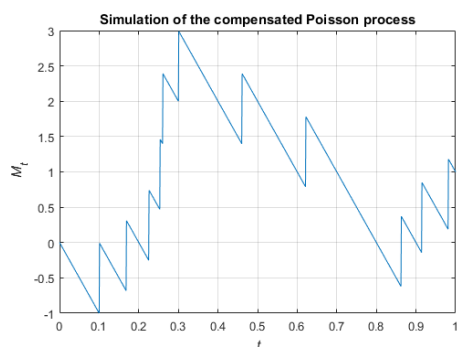
$t = (0, dt, 2*dt, \dots, N*dt)$... vektor rozdělení intervalu $\langle 0, T \rangle$

$Tr = -\lambda * t$... vektor reprezentující složku $-\lambda t$

$p = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$... vektor s časy skoků Poissonova procesu

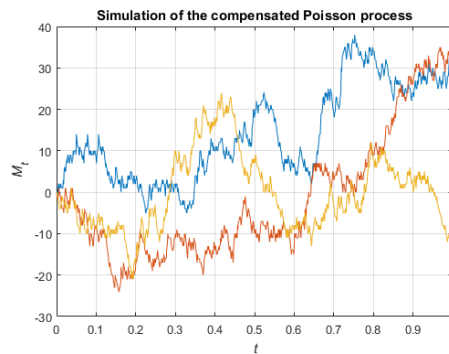
Postupně přičítej číslo 1 (výška skoku) podle časů skoků p

Na obrázku 6.4 máme zachycené trajektorie kompenzovaného Poissonova procesu s různými hodnotami intenzity λ . Na prvním obrázku 6.4a je hezky vidět, jak složka $-\lambda t$ právě kompenzuje hodnoty skoků, které jsou v tomto případě rovny jedné.



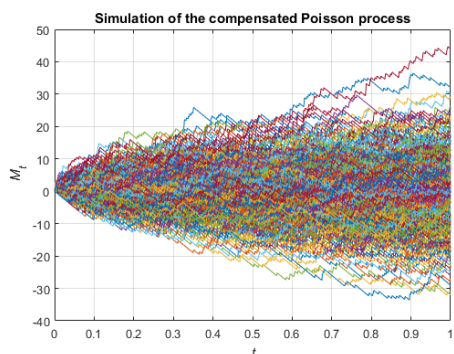
λ : 10
 Minimal value of M: -1
 Maximal value of M: 2.99
 Mean of values of M at time T: 1
 St. dev. of values of M at time T: 0

(a) Jedna trajektorie kompenzovaného Poissonova procesu. Intenzita je $\lambda = 10$ skoků za jednotku času.



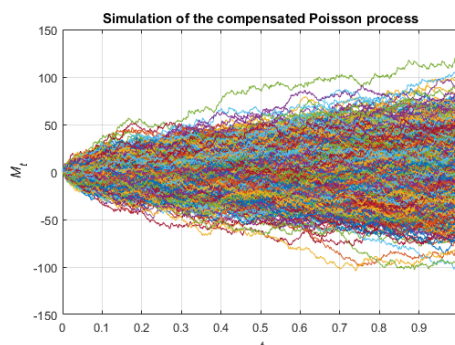
λ : 1000
 Minimal value of M: -24
 Maximal value of M: 38
 Mean of values of M at time T: 19
 St. dev. of values of M at time T: 22.5389

(b) Tři trajektorie kompenzovaného Poissonova procesu do času $T = 1$ při intenzitě $\lambda = 1000$.



λ : 100
 Minimal value of M: -33.6
 Maximal value of M: 44.7
 Mean of values of M at time T: -0.0292
 St. dev. of values of M at time T: 10.0143

(c) Tisíc trajektorií kompenzovaného Poissonova procesu při intenzitě $\lambda = 100$.



λ : 1000
 Minimal value of M: -104
 Maximal value of M: 124
 Mean of values of M at time T: 0.004
 St. dev. of values of M at time T: 32.0662

(d) Tisíc trajektorií kompenzovaného Poissonova procesu při intenzitě $\lambda = 1000$.

Obrázek 6.4: Grafické zobrazení kompenzovaného Poissonova procesu při koncovém čase $T = 1$. Čím větší je λ , vidíme, že se tento proces graficky podobá Wienerově procesu, avšak drží větší rozptyl hodnot v čase $t = T$.

6.5 Složený Poissonův proces

Tento proces $C(t)$ má skoky ve stejný čas, jako příslušný Poissonův proces. Nicméně se nyní velikosti skoků generují jako náhodné veličiny ze stejného rozdělení s parametrem střední hodnoty β . V ilustračním případě 6 jsou velikosti skoků generovány z normálního rozdělení. Pseudokód pro složený Poissonův proces je popsán v algoritmu 6.

Algoritmus 6 Složený Poissonův proces

Nastavení parametrů

μ ... střední hodnota velikosti skoku

σ ... rozptyl hodnot velikosti skoku

λ ... intenzita skoků za jednotku času

T ... koncový čas

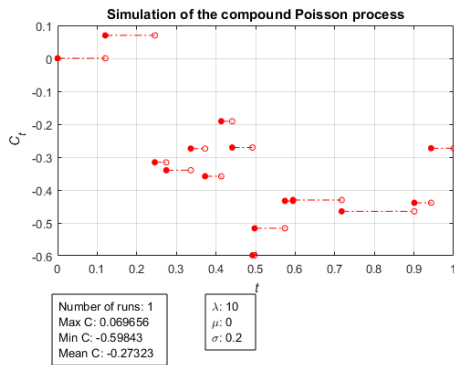
Výpočet jedné trajektorie

$p = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$... vektor s časy skoků Poissonova procesu

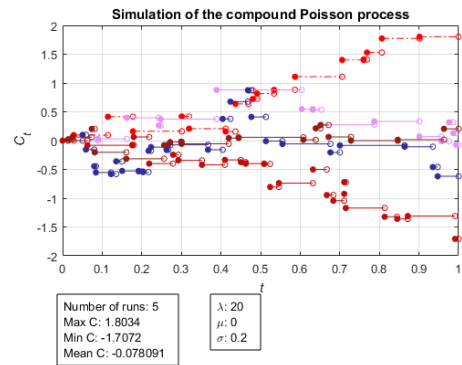
jumps ... vektor s velikostmi skoků

Tr ... vektor představující hodnoty procesu po jednotlivých skocích

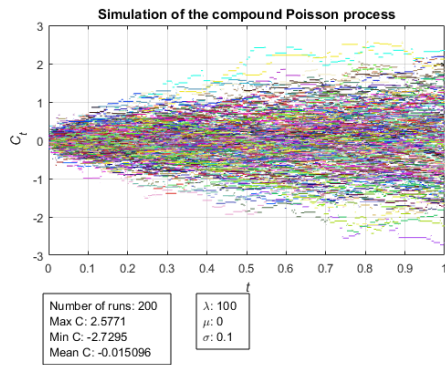
Na obrázku 6.5 si můžeme prohlédnout, jak složený Poissonův proces vypadá při různých nastavení parametrů. Hodnota procesu vždy začíná v nule. Pokud se podíváme na obrázek 6.5c, tak vidíme, že parametr μ normálního rozdělení je roven nule. Tomu odpovídá i průměrná hodnota procesu v koncovém čase z 200 realizací. Na posledním grafu 6.5d je parametr $\mu = 5$, tedy střední hodnota velikostí skoků je rovna pěti. Podle toho vidíme i směr, kterým se hodnoty procesu ubírají a odpovídá tomu i průměr z hodnot v čase $T = 1$, tedy $\bar{C}(T) = 501,6653$.



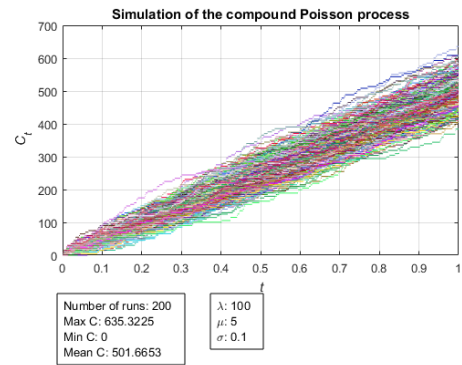
(a) Jedna trajektorie složeného Poissonova procesu.



(b) Tři trajektorie složeného Poissonova procesu.



(c) Dvě stě trajektorií složeného Poissonova procesu při intenzitě $\lambda = 100$. Na rozdíl od předchozích dvou grafů nevyznačujeme body nespojistosti.



(d) Dvě stě trajektorií složeného Poissonova procesu při intenzitě $\lambda = 100$.

Obrázek 6.5: Grafické zobrazení složeného Poissonova procesu při koncovém čase $T = 1$. Velikosti skoků jsou vždy generovány z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

6.6 Kompenzovaný složený Poissonův proces

Kompenzovaný složený Poissonův proces $C^*(t)$ je posledním ze simulovaných procesů. Jak je zřejmé z názvu, je kombinací dvou předchozích Poissonových procesů. Protože jsou nyní velikosti skoků generovány z nějakého rozdělení se střední hodnotou μ a jejich intenzita je λ , je třeba od složeného Poissonova procesu odečíst složku $\mu\lambda$. Pak bude splněna vlastnost martingalu. Pseudokód je opět zachycen v algoritmu 7.

Algoritmus 7 Kompenzovaný složený Poissonův proces

Nastavení parametrů

μ ... střední hodnota velikosti skoku

σ ... rozptyl hodnot velikosti skoku

λ ... intenzita skoků za jednotku času

T ... koncový čas

N ... granularity intervalu $\langle 0, T \rangle$

Výpočet jedné trajektorie

$dt = T/N$... velikost jednoho podintervalu

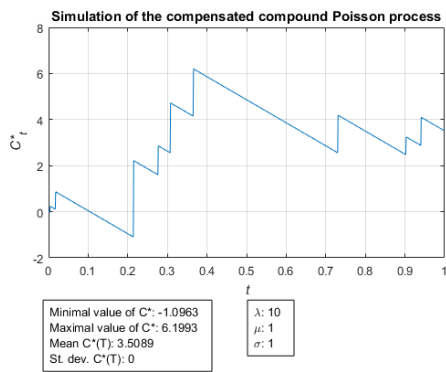
$t = (0, dt, 2*dt, \dots, N*dt)$... vektor rozdělení intervalu $\langle 0, T \rangle$

$Tr = -\mu\lambda * t$... vektor reprezentující složku ke kompenzaci

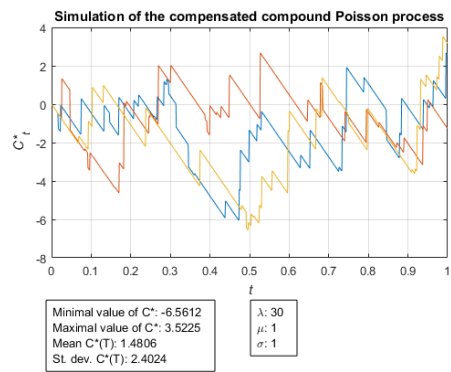
$p = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$... vektor s časy skoků Poissonova procesu

Postupně k hodnotě procesu přičítej číslo $p(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (výška skoku) podle časů skoků p

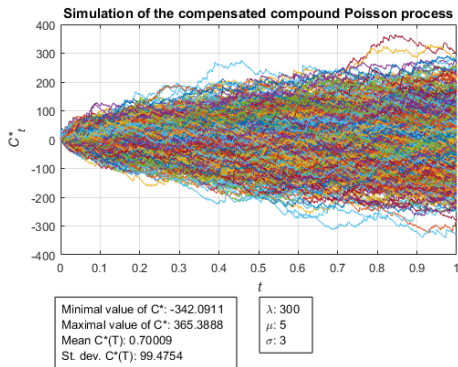
Chování kompenzovaného složeného Poissonova procesu jsou zobrazeny na obrázku 6.6. Uvedeny jsou kromě statistik i hodnoty parametrů pro normální rozdělení μ a λ . Na obrázcích 6.6a a 6.6b můžeme vidět změnu oproti kompenzovanému Poissonově procesu, že nyní se velikosti skoků mění a mohou nabývat i záporných hodnot, tedy směř dolů. Na spodních dvou obrázcích 6.4c a 6.4d pak máme vykreslených 1000 realizací tohoto procesu s různým nastavením parametrů.



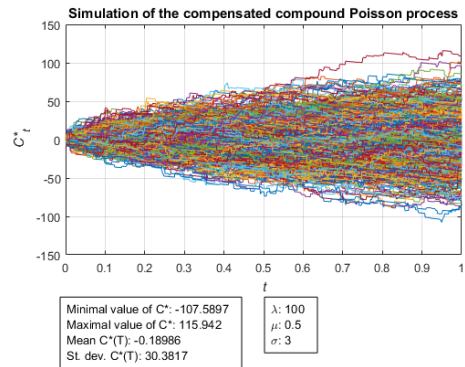
(a) Jedna trajektorie kompenzovaného složeného Poissonova procesu. Intenzita je $\lambda = 10$ skoků za jednotku času.



(b) Tři trajektorie kompenzovaného složeného Poissonova procesu při intenzitě $\lambda = 30$.



(c) Tisíc trajektorií kompenzovaného složeného Poissonova procesu při intenzitě $\lambda = 300$.



(d) Tisíc trajektorií kompenzovaného složeného Poissonova procesu při intenzitě $\lambda = 100$.

Obrázek 6.6: Grafické zobrazení kompenzovaného složeného Poissonova procesu při koncovém čase $T = 1$. Velikosti skoků jsou generovány z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma)$.

6.7 Black-Scholes-Merton

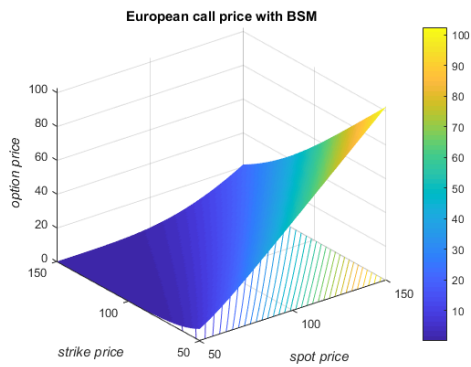
Implementace Black-Scholes-Mertonovy formule pro cenu evropské call opce je přímočará, a proto bude vynechán pseudokód pro tuto metodu. Zdrojový kód funkce pro výpočet ceny opce podle BSM modelu je k dispozici v příloze G.

Hodnoty cen opce vypočítané pomocí BSM modelu nám budou sloužit jako výchozí bod pro vyhodnocení cen obdržených z dalších modelů. Na obrázcích 6.7 a 6.8 je zachyceno, jaký vliv mají jednotlivé parametry na cenu opce. Konkrétně na obrázcích 6.7a, resp. 6.7b vidíme 2D grafy funkce ceny opce c v závislosti na strike price K a současné ceny $S(0)$, resp. zbývajícím času τ do $t = T$. Z nich plyne, že

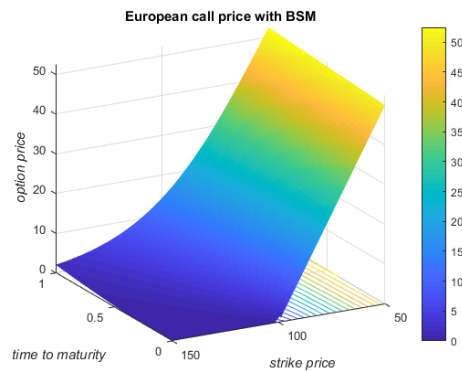
- s rostoucím K klesá c ,
- s rostoucím $S(0)$ roste c ,
- s klesajícím τ klesá c .

Na dalších grafech 6.8a, 6.8b a 6.8c pak máme vždy zobrazené vrstevnice pro τ , resp. pro K . Navíc z nich můžeme vyčíst vztah ceny opce vzhledem k volatilitě σ a úrokové míře r . Tedy

- s rostoucí σ roste c ,
- s rostoucím r roste c .

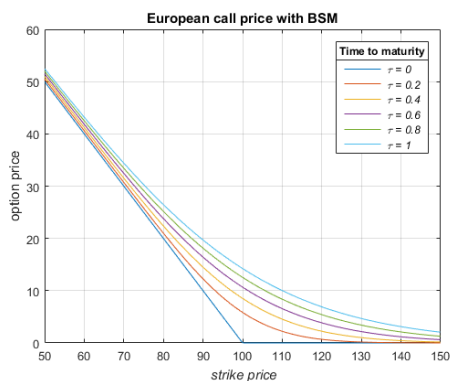


(a) Cena opce v závislosti na strike price a současné hodnotě akcie. Parametry: $T = 1$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$.

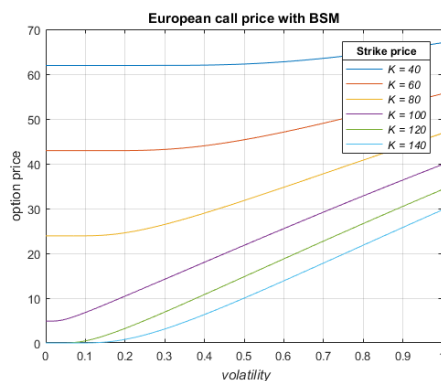


(b) Cena opce v závislosti na strike price a zbývajícím času do smluveného data. Parametry: $S(0) = 100$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$.

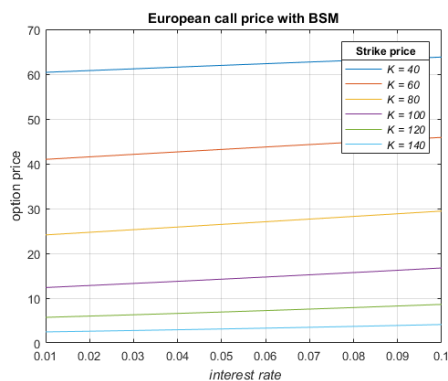
Obrázek 6.7: Funkce ceny evropské call opce vypočítané pomocí Black-Scholes-Mertonova modelu.



(a) Vztah ceny opce a strike price při různých hladinách zbývajícího času do $T = 1$. Parametry: $S(T - \tau) = 100$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$.



(b) Vztah ceny opce a volatility při různých hladinách strike price. Parametry: $S(0) = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$.



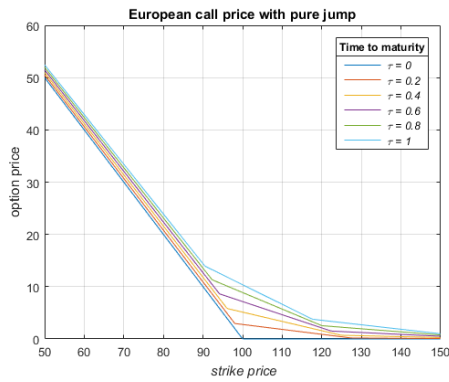
(c) Vztah ceny opce a úrokové míry při různých hladinách strike price. Parametry: $S(0) = 100$, $\sigma = 0,3$, $T = 1$.

Obrázek 6.8: Sledování vztahu ceny evropské call opce k ostatním parametrům Black-Scholes-Mertonova modelu.

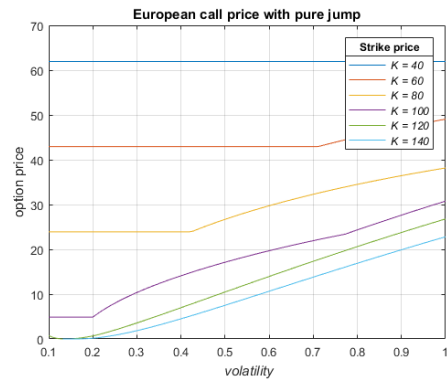
6.8 Skokově-difúzní proces

V poslední části byl implementován nejdříve model s čistě skokovým procesem a poté skokově difúzní model. Zdrojové kódy jsou k dispozici v přílohách H a I.

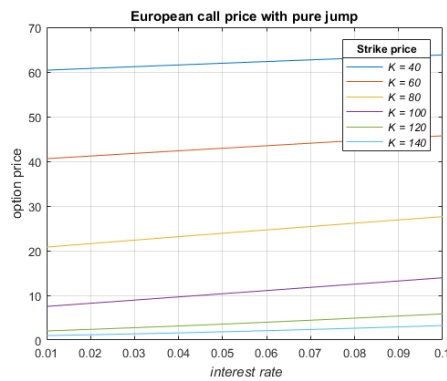
Na obrázku 6.9, resp. 6.10 vidíme chování vztah ceny opce vůči ostatním parametrům při čistě skokovém, resp. skokově difúzním modelu. Při porovnání grafů vývoje ceny jsou u skokového procesu zřetelné zlomy, které jsou způsobeny právě výskytem skoků. Například na obrázku 6.9a je zřetelné, že se vždy musí překročit určitá hranice, kterou je nutno překonat, aby se v sumě 5.16 začal přičítat další člen. Naopak v případě skokově difúzního procesu je již tvar křivky „vyhlazený“ v důsledku zahrnutí Wienerova procesu.



(a) Vztah ceny opce a strike price při různých hladinách zbývajícího času do $T = 1$. Parametry: $S(T - \tau) = 100$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$.

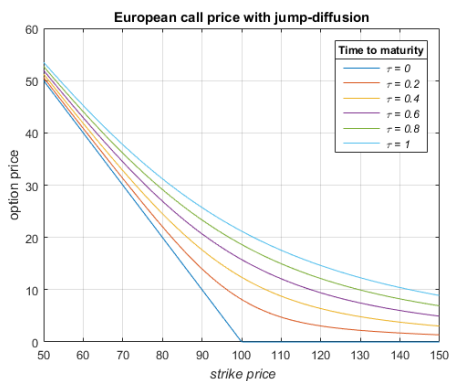


(b) Vztah ceny opce a volatility při různých hladinách strike price. Parametry: $S(0) = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$.

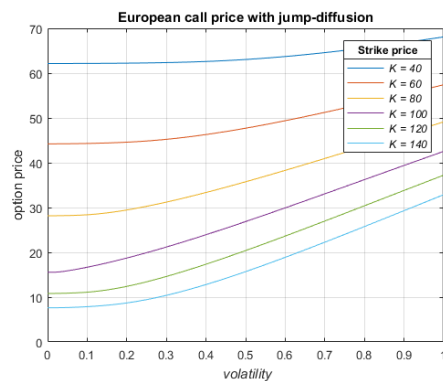


(c) Vztah ceny opce a úrokové míry při různých hladinách strike price. Parametry: $S(0) = 100$, $\sigma = 0,3$, $T = 1$.

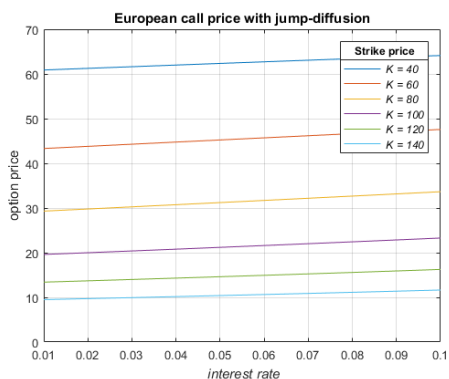
Obrázek 6.9: Cena opce modelované pomocí skokového procesu.



(a) Vztah ceny opce a strike price při různých hladinách zbývajícího času do $T = 1$. Parametry: $S(T - \tau) = 100$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,3$.



(b) Vztah ceny opce a volatility při různých hladinách strike price. Parametry: $S(0) = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$.



(c) Vztah ceny opce a úrokové míry při různých hladinách strike price. Parametry: $S(0) = 100$, $\sigma = 0,3$, $T = 1$.

Obrázek 6.10: Cena opce modelované pomocí skokově difúzního modelu.

6.9 Srovnání metod pro oceňování opcí

Nyní, když máme implementované všechny tři modely, můžeme tyto výsledky porovnat. Tyto modely počítají cenu opce z teoretického vzorce, nicméně zde bude také představen výsledek ze simulace. Simulací je myšleno generování určitého počtu trajektorií náhodného procesu, který popisuje chování ceny podkladové akcie. Po obdržení dostatečného počtu trajektorií (jsme limitováni výkonem hardwaru) pro čas $t = 0$ až $t = T$ můžeme spočítat cenu opce jako

$$c = e^{-rT} \mathbf{E}(S(T) - K, 0)^+,$$

kde $S(T)$ jsou ceny simulované akcie v koncovém čase T . Tyto trajektorie budeme počítat ze vzorců

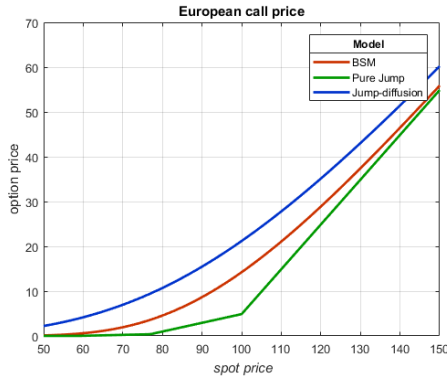
$$\begin{aligned} 1) S(t) &= S(0) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right), \\ 2) S(t) &= S(0)(\sigma + 1)^{N(t)} \exp\left(rt - \tilde{\lambda}\sigma t\right), \\ 3) S(t) &= S(0) \exp\left(\sigma W(t) + \left(r - \beta\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \prod_{i=1}^{N(t)} Y_i. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Rovnice 1),2),3) odpovídají po řadě Black-Scholes-Mertonově modelu, skokovému procesu, skokově difúznímu procesu. Na grafech 6.11 můžeme vidět porovnání těchto modelů. Označíme-li cenu opce podle BSM, resp. skokového modelu, resp. skokově difúzního modelu jako c_{bsm} , resp. c_{pj} , resp. c_{jd} , pak můžeme obecně usoudit, že platí $c_{pj} < c_{bsm} < c_{jd}$. Vyšší cena obdržená ze skokově difúzního modelu odpovídá tomu, že se vlastně kombinuje Black-Scholes-Mertonův model a skoky, a tedy je zde větší volatilita. Nastavení ostatních parametrů je zachyceno v tabulce 6.2.

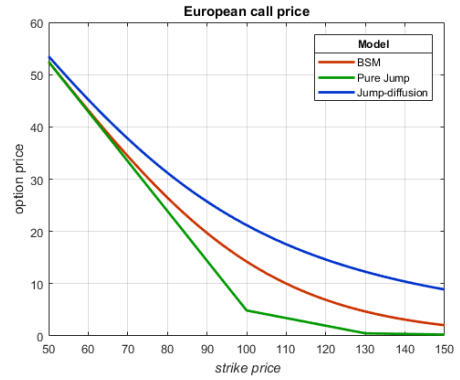
Jak simulované ceny opce odpovídají modelům je zachyceno na obrázku 6.12. Pozorování je takové, že simulované hodnoty věrohodně kolísají kolem teoretických čar. U skokově difúzního procesu je toto kolísání největší a bude způsobeno největší volatilitou mezi modely.

Název parametru	značení	hodnota
úroková míra	r	0.05
volatilita akcie	σ	0.3
výnos akcie	α	0.3
intenzita Poiss.	λ	1
průměrný skok	$1 + \beta$	1.083
volatilita skoku	b	0.4
granularita	n	1000
počet realizací	N	1000

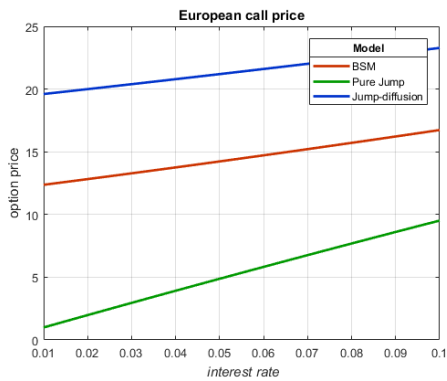
Tabulka 6.2: Nastavení parametrů pro modely oceňování opcí.



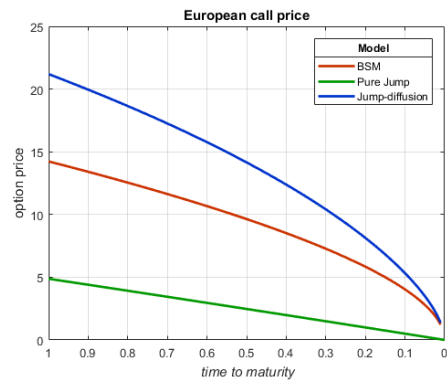
(a) Cena call opce v závislosti na současné hodnotě podkladového aktiva.



(b) Vývoj ceny opce pro různé strike price.

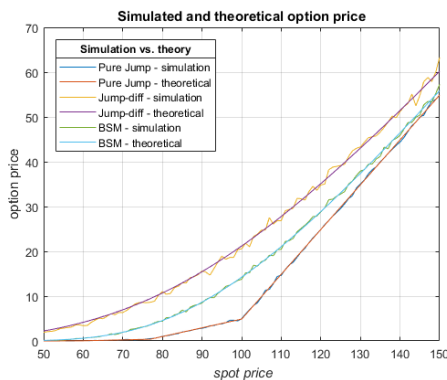


(c) Porovnání ceny opce v závislosti na úrokové míře.

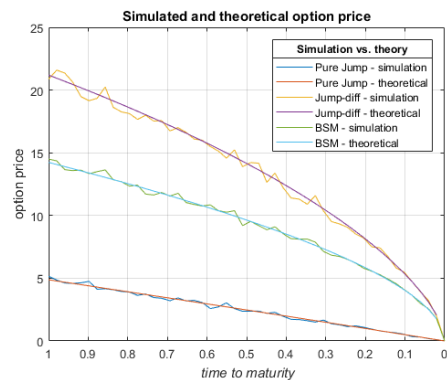


(d) Chování ceny vzhledem ke zmenšujícímu se času do smluveného data.

Obrázek 6.11: Porovnání vývoje ceny evropské call opce spočítané ze tří modelů. Červená čára představuje vždy cenu podle Black-Scholes-Mertonova modelu, zelená je vypočítána s modelem pouze se skoky a nakonec modrá čára byla získána ze skokově difúzního modelu.



(a) Cena opce v závislosti na současné hodnotě podkladové akcie.



(b) Cena opce vzhledem k času do maturity termínu.

Obrázek 6.12: Porovnání ceny opce obdržené z teoretického vzorce (hladká čára) a ze simulace. Počet realizací simulace: 5000.

Závěr

Opce je finanční derivát, a tedy je její cena odvozena od ceny podkladových aktiv, kterými v této práci byly akcie. Protože nemůžeme s jistotou určit, jaká bude hodnota akcie v budoucnosti, musíme jí modelovat na základě náhodných procesů. Dynamika ceny akcie se nejdříve popisovala Wienerovým procesem. Tento proces představuje to, čemu se říká *difúze* a umožňuje spojitě kolísání hodnoty jak směrem nahoru, tak směrem dolů. Tohoto využívá Black-Scholes-Mertonův model, který m.j. předpokládá vývoj hodnoty akcie v čase podle log-normálního rozdělení. Tento model byl průlomový ve smyslu, že obchodníci začali ceny opcí počítat podle jednotného a sofistikovaného postupu. Nicméně postupem času se ukázalo, že spíše než log-normální rozdělení se hodnoty akcií řídí nějakým rozdělením s těžkými konci. Pokud má nějaké rozdělení těžké konce, znamená to, že extrémní události (hodnoty) nastávají častěji. Z toho důvodu se k popisu vývoje cen akcií používá také tzv. *skokový proces*, při kterém se naopak mění hodnota pouze skokově. Takové skoky jsou důsledkem např. vydání nové firemní zprávy nebo nějaké mimořádné události. Ceny akcií však vykazují jak difúzní pohyb, tak v nich může figurovat i skokové chování. Proto se odvozuje skokově difúzní model, kde se kombinuje difúzní část s tou skokovou.

Cílem této práce bylo odvodit a implementovat modely pro oceňování call opce evropského typu. Konkrétně těmito modely byly: *Black-Scholes-Mertonův model*, *skokový proces* a *skokově difúzní proces*. Black-Scholes-Mertonův model představuje onu difúzní část a v kombinaci s čistě skokovým procesem vzniká právě skokově difúzní proces. Tyto tři modely byly v rámci práce odvozeny, popsány a implementovány. Všechny zdrojové kódy jsou uvedeny pro reprodukovatelnost v přílohách.

Než bylo možné implementovat všechny tři modely, bylo nejdříve třeba definovat potřebné pojmy a odvodit vlastnosti související s náhodnými procesy. Tento dílčí úkol byl pokryt v kapitolách 1, 2 a 3. Nejdůležitější částí pro práci s náhodnými procesy a s nimi souvisejícími modely je tzv. *stochastická analýza*. V této kapitole byly nejdříve definovány nezbytné pojmy jako *náhodný proces*, *martingal* či *filtrace*. Dále zde byly definovány důležité náhodné procesy jako *Wienerův proces*, *geometrický Wienerův proces*, *Poissonův proces*, *kompensovaný Poissonův proces*, *složený Poissonův proces* a *kompensovaný složený Poissonův proces* a byly odvozeny jejich vlastnosti. Protože stochastická analýza je obor matematiky, který operuje na náhodných procesech, bylo také nezbytné definovat *Itôův integrál* a vyslovit *Itôovu lemma*, které nám naopak dává návod, jak pracovat s derivací náhodného procesu. Další stěžejní bod pro oceňování finančních derivátů je *rizikově neutrální pravděpodobnost*, která zajišťuje to, že cena derivátu s ní odvozená, bude férová a nebude v

modelu připouštět arbitráž. Po položení teoretických základů náhodných procesů a jejich analýzy bylo možné pokročit k odvozování jednotlivých modelů.

Konkrétně těmito modely byly: *Black-Scholes-Mertonův model*, *skokový proces* a *skokově difúzní proces*. Black-Scholes-Mertonův model představuje onu difúzní část. V kapitole 4 byla odvozena parciální diferenciální rovnice pro dynamiku ceny finančních derivátů. Poté bylo odvozeno řešení této rovnice pro cenu evropské call opce. Cena takové opce pak byla odvozena ještě jednou, ale tentokrát s využitím rizikově neutrální pravděpodobnosti. V další kapitole 5 byl odvozen skokový a skokově difúzní proces. Skokový proces umožňuje modelovat cenu akcie, která mění svou cenu pouze na základě konkrétních událostí. Neobsahuje tedy spojitou část ve smyslu Wienerova procesu, ale pouze skoky, které jsou modelovány Poissonovým procesem a jeho modifikacemi. Skokově difúzní proces pak vznikne kombinací právě Wienerova a Poissonova procesu, takže je podle něj možné popisovat vývoj ceny akcie, která vykazuje jak difúzní tak skokové chování. Všechny tři zmiňované modely byly v rámci této práce odvozeny, popsány a implementovány. Jejich zdrojové kódy jsou uvedeny pro reprodukovatelnost v přílohách.

V kapitole 6 pak byly prakticky implementovány všechny popsané náhodné procesy a na nich postavené modely pro oceňování opcí. Pro každý z těchto pojmů byly vytvořeny grafické ilustrace, jejichž kód je také zveřejněn v přílohách. Pro náhodné procesy byl v praktické části také vždy uveden pseudokód, který může sloužit pro rychlejší pochopení zdrojového kódu.

Náhodné procesy byly implementovány v prostředí MATLAB jako funkce, které vrací trajektorie či časy skoků pro dané parametry a počet pozorování s možností grafického výstupu. Konkrétně se jedná o Wienerův proces, geometrický Wienerův proces, Poissonův proces, kompenzovaný Poissonův proces, složený Poissonův proces a kompenzovaný složený Poissonův proces.

Nakonec byly v kapitole 6 vytvořeny funkce pro výpočet ceny evropské call opce na podkladová aktiva, která jsou popisována jedním nebo dvěma náhodnými, již zmiňovanými, procesy. Nejdříve zde byly uvedeny výsledky z výpočtu ceny podle Black-Scholes-Mertonova modelu, poté pro čistě skokový proces a nakonec pro jejich kombinaci ve smyslu skokově difúzního modelu. Pro všechny tři přístupy byly vytvořeny grafy, kde byla zachycena závislost ceny opce vůči ostatním parametrům modelu. Představeny zde bylo také vzájemné porovnání těchto modelů. Pozorování z těchto výsledků bylo takové, že cena opce byla nejvyšší, pokud byla vypočítána pomocí skokově difúzního modelu. Pokud jsme cenu opce obdrželi z Black-Scholes-Mertonovi formule, pak se její hodnota pohybuje mezi cenou podle skokového a skokově difúzního procesu. Cena opce získaná z čistě skokového modelu pak byla vždy nejnižší. Takový vztah odpovídá i ekonomické interpretaci těchto procesů. U skokového procesu se hodnota může měnit pouze se skokem, který může být vyvolán nějakou událostí či novou zprávou. V BSM modelu figuruje naopak pouze difúzní část, tedy se cena mění spojitě s časem. V případě skokově difúzního procesu, který je vlastně kombinací dvou předchozích, se pak musí odrazit to, že se cena kromě difúzního pohybu může měnit i skokově. Musí být tedy vyšší než jednotlivé komponenty. Nakonec byla implementována simulace podle vzorců (6.2). Z obdržných výsledků lze usuzovat, že si teoretické a průměrné empirické hodnoty odpovídají. Ta-

ková simulace náhodných procesů je důležitá hlavně v případech, kdy nejsme schopni odvodit analytický vzorec, nebo kdy je výpočet takového vzorce příliš nákladný.

S opčními kontrakty se obchoduje jak na veřejných burzách, tak na mimoburzovních trzích. Jejich popularita stále roste a pořád se vytvářejí nové typy a modifikace. Proto je oceňování opcí důležité pro vytváření férových cen tak, aby nemohla vzniknout arbitráž. V této práci byly odvozeny a implementovány tři přístupy k takovému ocenění. V oblasti obchodování s opcemi se nejvíce využívá Black-Scholes-Mertonův model. Pro použití skokově difúzního procesu k oceňování opcí je důležité formulovat, co vlastně skok znamená, a určit jejich intenzitu. Návrhem na pokračování by mohla být implementace dalších metod pro oceňování opcí jako jsou např. binomické modely nebo další varianta skokově difúzního modelu, který předpokládá jiné rozdělení pro velikosti skoků [7].

Literatura

- [1] ANDĚL, Jiří. *Matematická statistika*. 1. Bratislava: SNTL, 1978.
- [2] COHEN, Guy. *The Bible of Options Strategies: The Definitive Guide for Practical Trading Strategies*. 1. New Jersey: Pearson Education, 2005. ISBN 0-13-171066-4.
- [3] DUNBAR, R. Steven. *Stochastic Processes and Advanced Mathematical Finance: Solution of the Black-Scholes Equation* [online]. Lincoln, 2016. Dostupné také z: <https://www.math.unl.edu/~sdunbar1/>
- [4] GLASSERMAN, Paul. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer Science & Business Media, 2003. ISBN 978-0-387-21617-1.
- [5] HULL, John. *Options, Futures, and Other Derivative Securities*. 2. New Jersey: University of Toronto, 1993. ISBN 0-13-639014-5.
- [6] JAMES, Peter. *Option theory: theory for applications*. Hoboken, NJ: J. Wiley, 2003. ISBN 04-714-9289-2.
- [7] KOU, G. Steven Jump-Diffusion Models for Option Pricing. *Management Science*. 2007, (8), 1086-1101. ISSN 1526-5501.
- [8] KRBÁLEK, Milan. *Teorie míry a Lebesgueova integrálu*. V Praze: České vysoké učení technické, 2014. ISBN 978-80-01-05619-6.
- [9] MERTON, C. Robert. Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. In: *Journal of Financial Economics*. 1976, s. 125-144.
- [10] Lecture Notes: Advanced Stochastic Processes. *MITOpenCourseWare* [online]. [cit. 2020-07-30]. Dostupné z: <https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-070j-advanced-stochastic-processes-fall-2013/lecture-notes/>
- [11] MUSÍLEK, Petr. *Trhy cenných papírů*. 2., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Ekopress, 2011. ISBN 978-80-86929-70-5.
- [12] SHREVE, E. Steven *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. I. New York: Springer, 2004. ISBN 0-387-40101-6.
- [13] SILVIA, Evelyn. *Companion Notes for Advanced Calculus: Riemann-Stieltjes Integration* [online]. Davis, USA, 1999 [cit. 2020-07-30]. Dostupné z: <https://www.math.ucdavis.edu/~emsilvia/math127/math127.html>

Příloha A

Kód - Wienerův proces

```
function [W, t] = wiener_process(n, T, graph, n_instances, tplot)
% Simulation of the Wiener process
%
%[W, t]
% W Vector with length of 'n' representing one scenario of the Wiener
% process
% t Time series
%
%WIENER_PROCESS(N,T,GRAPH,N_INSTANCES)
% N Number of subintervals of [0,T] (granularity)
% Default value: 1000
% T Time interval [0,T]
% Default value: 1
% GRAPH 'true' or 'false' whether to plot the result or not
% Default value: false
% N_INSTANCES Number of instances of the process to be plotted
% Default value: 1
% TPLOTT Number from (0,T] interval specific for plotting.
%
%Note:
% When printing, only 1e3 of realizations are plotted due to the
% execution time. But also the runs with max and min values are printed!
%
%Example usage:
% wiener_process(100, 1, true, 1000)

%% Input parameters handling
if nargin < 4; n_instances = 1; end
if nargin < 3; graph = false; end
if nargin < 2; T = 1; end
if nargin < 1; n = 1000; end
if nargin < 5; tplot = T; end

if tplot > T; error('Ratio of the data to be plotted has to be <= T'); end
```

```

%% Computation task
dt = T/n;
dW = sqrt(dt)*randn(n,n_instances);
dW(1,:) = 0;
W = cumsum(dW,1);
t = linspace(0, tplot, tplot/T*n); % print only the ratio given by 'tplot'
st = length(t);
%% Plotting
if graph
    figure
    % Statistics
    maxW = max(W, [], 1); minW = min(W, [], 1);
    % Keep the indices for plotting
    % To plot the run with maximum and minimum value
    [maxW, imax] = max(maxW); [minW, imin] = min(minW);
    lastW = W(end,:);
    % Plot itself
    % Plot only reasonable number of instances (1000.)
    % If the max and min runs are in those first 1000, then don't plot
    % them again.
    n_to_print = min(1e3, n_instances);
    if imax <= n_to_print; imax = []; end
    if imin <= n_to_print; imin = []; end
    plot(t,W(1:st,[1:n_to_print imax imin])); hold on;
    % Plot editing
    a = gca; % Get the current axis
    a.Position([1 2 4]) = [.11 .3 .6]; % [1, 2] position, [3, 4] w, h
    title("Simulation of the Wiener process")
    xlabel("\it t")
    ylabel("\it W_t")
    grid on;
    message = "Minimal value of W: " + minW + newline + ...
        "Maximal value of W: " + maxW + newline + ...
        "Mean of values of W at time T: " + mean(lastW) + newline +
        ...
        "St. dev. of values of W at time T: " + std(lastW);
    annotation('textbox',[.1 .19 0 0],'String',message,'FitBoxToText','on')
end

```

Příloha B

Kód - Geometrický Wienerův proces

```
function [S, t] = geom_wiener_process(n, S0, alpha, sigma, T, graph,
    n_instances)
% Simulation of the geometrical Wiener process for option pricing.
%
%[S, t]
% S Vector with length of 'n+1' representing one scenario of the
%   geometric
%   Wiener process
% t Time series
%
%GEOM_WIENER_PROCESS(N,S0,ALPHA,SIGMA,T,GRAPH,N_INSTANCES)
% N Number of subintervals of [0,T] (granularity)
%   Default value: 1000
% S0 Initial price of the option
%   Default value: 20
% ALPHA Expected rate of return of time period 'T'
%   Default value: 0.1
% SIGMA Volatility in the option price
%   Default value: 0.3
% T Time interval [0,T]
%   Default value: 1
% GRAPH 'true' or 'false' whether to plot the result or not
%   Default value: false
% N_INSTANCES Number of instances of the process to be plotted
%   Default value: 1
%   Note: If the number of instances to plot is bigger than 2,
%   then the returned vector W is highlighted with RED colored
%   DASH-DOT line

%% Input parameters handling
if nargin < 7; n_instances = 1; end
if nargin < 6; graph = false; end
if nargin < 5; T = 1; end
if nargin < 4; sigma = 0.3; end
```

```

if nargin < 3; alpha = 0.1; end
if nargin < 2; S0 = 100; end
if nargin < 1; n = 1000; end

%% Computation task
S = zeros(n+1, n_instances);
S(1,:) = S0;
dt = T/n; % Time step
t = (0:dt:T);

% Simulation via dS
for i = 1:n
    dS = alpha*S(i,:)*dt + sigma*S(i,:)*sqrt(dt).*randn(1,n_instances);
    S(i+1,:) = S(i,:) + dS;
end

% Simulation via Wiener process
% t = t(1:end-1);
% W = wiener_process(n,T,false,n_instances);
% S = S0*exp((alpha-0.5*sigma^2)*repmat(t',1,n_instances) + sigma*W);

%% Plotting
% TODO: can be parametrized for both geom. and std. wiener process
if graph
    figure
    % Statistics
    maxW = max(S, [], 1); minW = min(S, [], 1);
    % Keep the indices for plotting
    % To plot the run with maximum and minimum value
    [maxW, imax] = max(maxW); [minW, imin] = min(minW);
    lastS = S(end,:);
    % Plot itself
    % Plot only reasonable number of instances (1000.)
    % If the max and min runs are in those first 1000, then don't plot
    % them again.
    n_to_print = min(1e3, n_instances);
    if imax <= n_to_print; imax = []; end
    if imin <= n_to_print; imin = []; end
    plot(t,S(:,[1:n_to_print imax imin])); hold on;
    % Plot editing
    a = gca; % Get the current axis
    a.Position([1 2 4]) = [.11 .3 .6]; % [1, 2] position, [3, 4] w, h
    title("Simulation of the geometric Wiener process")
    xlabel("\it t")
    ylabel("\it S_t")
    grid on;
    message = "Minimal value of S: " + minW + newline + ...
             "Maximal value of S: " + maxW + newline + ...

```

```
    "Mean of values of S at time T: " + mean(lastS) + newline +  
    ...  
    "St. dev. of values of S at time T: " + std(lastS);  
    annotation('textbox',[.1 .19 0 0],'String',message,'FitBoxToText','on')  
end
```

Příloha C

Kód - Poissonův proces

```
function [Tn, Eps, N, T] = poisson_process(n, lambda, T, graph, ...
                                         n_instances, t_stat)

% Simulation of the Poisson process
%
%[TN, Eps, N, T]
% TN Times of jumps
% EPS Sizes of subintervals
% N Number of jumps
% T Time needed for 'n' jumps (if 'T' not given)
%
%POISSON_PROCESS(N,LAMBDA,T,GRAPH,N_INSTANCES)
% N Number of jumps to be performed
%   Default value: 10
%   Note: If the 'T' parameter is set to 'T=0',
%         then the jumps are generated
%         until the given time t='T' is reached.
% LAMBDA Parameter for exponential distribution
%   Default value: 1
%
% T Time interval [0,T]
%   Default value: 0, that means that the 'n' jumps are performed
% GRAPH 'true' or 'false' whether to plot the result or not
%   Default value: false
% N_INSTANCES Number of instances of the process to be plotted
%   Default value: 1
%   Note: If the number of instances to plot is bigger than 2,
%         then the returned vector W is highlighted with RED colored
%         DASH-DOT line
% T_STAT 'true' or 'false' if to plot also the other statistics.

%% Input parameters handling
if nargin < 6; t_stat = false; end
if nargin < 5; n_instances = 1; end
if nargin < 4; graph = false; end
```

```

if nargin < 3; T = 0; end
if nargin < 2; lambda = 1; end
if nargin < 1; n = 10; end

def_T = T; % Default 'T', needed for the recursion in plotting

%% Computation task
% If 'T==0', than no concrete time interval is given,
% Generate only 'n' exponential variables.
% Else, generate points until the sum of epsilons is less than given 'T'.
if T == 0
    Eps = exprnd(1/lambda, [n, 1]);
    T = sum(Eps); % If 'T' not set, set it accordingly to the jumps
else
    Eps = exprnd(1/lambda);
    if Eps > T
        fprintf("No jumps occurred to time t=" + T + "\n")
        N = 0; Tn = 0; return
    end
    while 1
        e = exprnd(1/lambda);
        if sum(Eps) + e < T
            Eps = cat(1, Eps, e);
        else
            break
        end
    end
end
end

Tn = [0; cumsum(Eps)]; % Times of jumps
N = Nt(Tn, T);
nth_jump_times = zeros(n_instances, 1); % Times of the n-th jump
nth_jump_times(1) = T;
last_N = zeros(n_instances,1);

%% Plotting
if graph
    figure
    maxN = N; maxT = T; % Needed for axes
    last_N(1) = N;
    t = [Tn; T];
    jump_values = (0:N);
    stairs2(t, jump_values, 'left', '-.r'); hold on; % Plot the first one
    if n_instances > 1 % If the number of instances is bigger, plot others
        for i = 2:n_instances
            [Tn_new, ~, N_new, T_new] = poisson_process(n, lambda, def_T);
            maxN(maxN < N_new) = N_new;
            maxT(maxT < T_new) = T_new;
            nth_jump_times(i) = T_new;
            last_N(i) = N_new;
        end
    end
end

```



```

        t = [Tn_new; T_new];
        jump_values = (0:N_new);
        stairs2(t, jump_values, 'left'); hold on;
    end
end
% Plot editing
a = gca; % Get the current axis
a.Position([1 2 4]) = [.11 .3 .6]; % [1, 2] position, [3, 4] w, h
title("Simulation of the Poisson process")
xlabel("\it t")
ylabel("\it N_t")
xlim([0 maxT]);
ylim([0 maxN]);
%yticks(0:1:maxN+1);
grid on;
message = "\lambda: " + lambda + newline + ...
    "Number of runs: " + n_instances + newline + ...
    "Max T: " + maxT + newline + ...
    "Max N: " + maxN + newline + ...
    "Mean N: " + mean(last_N);
if t_stat
    message = message + newline + ...
        "Mean n-th jump time: " + mean(nth_jump_times);
end
annotation('textbox',[.1 .2 0 0], ...
    'String',message, ...
    'FitBoxToText','on', ...
    'BackgroundColor','white')
end

end

% Computes the number of jumps to time 't'
function N = Nt(Tn, t)
    N = binary_search(Tn, t) - 1; % Tn(N) <= t < Tn(N+1)
end

```

```

function stairs2(x, y, continuity, line_marker)
% Plots the stairs but without the vertical lines.
%
%STAIRS2(X,Y,CONTINUITY)
% X Vector of x-coordinates
% Y Vector of y values for each stair
% CONTINUITY 'left', 'right' or 'none' to highlight the points
% of discontinuity
% LINE_MARKER String to specify the line marker
%
%Example usage:

```

```

% A = [1 2 3 4]; B = [1 2 3]; stairs2(A,B);
% Creates three lines given by points [x, y]:
%     [1, 1] and [2, 1]
%     [2, 2] and [3, 2]
%     [3, 3] and [4, 3]

%% Input parameter's handling
if nargin < 4; line_marker = 'default'; end
if nargin < 3; continuity = 'none'; end

%% Plotting
n = length(x)-1;
A = zeros(2, n);
B = A;
for i = 1:n
    A(:,i) = [x(i); x(i+1)];
    B(:,i) = [y(i); y(i)];
end

if strcmp(line_marker, 'default')
    color = rand([1 3]);
    plot(A,B,'Color',color);
else
    plot(A,B,line_marker)
end

if ~strcmp(continuity, 'none')
    hold on;
    marker_size = 20;
    if strcmp(line_marker, 'default')
        marker_face_color = color;
        marker_edge_color = color;
    else
        marker_face_color = [1 0 0];
        marker_edge_color = [1 0 0];
    end
    if strcmp(continuity, 'left')
        scatter(A(1,:),B(1,:),marker_size,'o', ...
            'MarkerFaceColor',marker_face_color, ...
            'MarkerEdgeColor',marker_edge_color); hold on;
        scatter(A(2,:),B(2,:),marker_size,'o', ...
            'MarkerEdgeColor',marker_edge_color)
    elseif strcmp(continuity, 'right')
        scatter(A(1,:),B(1,:),marker_size,'o', ...
            'MarkerEdgeColor',marker_edge_color); hold on;
        scatter(A(2,:),B(2,:),marker_size,'o', ...
            'MarkerFaceColor',marker_face_color, ...
            'MarkerEdgeColor',marker_edge_color)
    end
end
end

```

Příloha D

Kód - Kompenzovaný Poissonův proces

```
function [Tr] = cpoisson_process(N, lambda, T, ...
                                graph, n_instances)
% Simulation of the Compensated Poisson process
%
%[Tr]
% Tr Trajectory of the process
%
%CPOISSON_PROCESS(N,LAMBDA,T,GRAPH,N_INSTANCES)
% N granularity of the [0,T] interval
% All the other input parameters correspond to
% the POISSON_PROCESS function.

%% Input parameters handling
if nargin < 5; n_instances = 1; end
if nargin < 4; graph = false; end
if nargin < 3; T = 10; end
if nargin < 2; lambda = 1; end
if nargin < 1; N = 1000; end

%% Computation task
dt = T/N;
t = (0:dt:T);
% -lambda*t part will be the same for all of the elements
Tr = repmat(-lambda*t',1,n_instances);

for i = 1:n_instances
    p = poisson_process(0, lambda, T, false, 1, false);
    for j = 2:length(p)
        % adds the jump size from t to the end
        Tr(t > p(j), i) = Tr(t > p(j), i) + 1;
    end
end
```

```

end

st = length(t);
%% Plotting
if graph
    figure
    % Statistics
    maxTr = max(Tr, [], 1); minTr = min(Tr, [], 1);
    % Keep the indices for plotting
    % To plot the run with maximum and minimum value
    [maxTr, imax] = max(maxTr); [minTr, imin] = min(minTr);
    lastTr = Tr(end,:);
    % Plot itself
    % Plot only reasonable number of instances (1000.)
    % If the max and min runs are in those first 1000, then don't plot
    % them again.
    n_to_print = min(1e3, n_instances);
    if imax <= n_to_print; imax = []; end
    if imin <= n_to_print; imin = []; end
    plot(t,Tr(1:st,[1:n_to_print imax imin])); hold on;
    % Plot editing
    a = gca; % Get the current axis
    a.Position([1 2 4]) = [.11 .3 .6]; % [1, 2] position, [3, 4] w, h
    title("Simulation of the compensated Poisson process")
    xlabel("\it t")
    ylabel("\it M_t")
    grid on;
    message = "\lambda: " + lambda + newline + ...
        "Minimal value of M: " + minTr + newline + ...
        "Maximal value of M: " + maxTr + newline + ...
        "Mean of values of M at time T: " + mean(lastTr) + newline + ...
        "St. dev. of values of M at time T: " + std(lastTr);
    annotation('textbox',[.1 .19 0 0], 'String',message,'FitBoxToText','on')
end

```

Příloha E

Kód - Složený Poissonův proces

```
function [Tr, jumps, times] = compound_poisson_process(mu, sigma, lambda,
    T, ...
        graph, n_instances)
% Simulation of the Compound Poisson process
%
%[TR, JUMPS]
% TR Trajectory of the process
% JUMPS Sizes of jumps
% TIMES Times of jumps - determined from poisson process
%
%COMPOUND_POISSON_PROCESS(LAMBDA,T,GRAPH,N_INSTANCES)
% MU, SIGMA are parameters for normal distribution of the jump's size
% All the other input parameters correspond to
% the POISSON_PROCESS function.

%% Input parameters handling
if nargin < 6; n_instances = 1; end
if nargin < 5; graph = false; end
if nargin < 4; T = 1; end
if nargin < 3; lambda = 1; end
if nargin < 2; sigma = 1; end
if nargin < 1; mu = 0; end

if T <= 0; error('T parameter has to be greater than 0!'); end

%% Computation task
p = poisson_process(0, lambda, T, false, 1, false); % times of arrivals
jumps = mu + sigma*randn(length(p),1); % jumps are from N(mu,sigma)
jumps(1) = 0;

Tr = cumsum(jumps);
last_Tr = zeros(n_instances, 1);
times = p;
```

```

%% Plotting
if graph
    figure
    maxTr = max(Tr); minTr = min(Tr);
    last_Tr(1) = Tr(end);
    t = [p; T];
    stairs2(t, Tr, 'none', '-.r'); hold on; % Plot the first one
    if n_instances > 1 % If the number of instances is bigger, plot others
        for i = 2:n_instances
            [Tr_new, ~, jump_times] = compound_poisson_process( ...
                mu, sigma, lambda, T, false, 1);
            maxTr(maxTr < max(Tr_new)) = max(Tr_new);
            minTr(minTr > min(Tr_new)) = min(Tr_new);
            last_Tr(i) = Tr_new(end);
            t = [jump_times; T];
            stairs2(t, Tr_new, 'none'); hold on;
        end
    end
    % Plot editing
    a = gca; % Get the current axis
    a.Position([1 2 4]) = [.11 .3 .6]; % [1, 2] position, [3, 4] w, h
    title("Simulation of the compound Poisson process")
    xlabel("\it t")
    ylabel("\it C_t")
    xlim([0 T])
    %yticks(0:1:maxN+1);
    grid on;
    message = "Number of runs: " + n_instances + newline + ...
        "Max C: " + maxTr + newline + ...
        "Min C: " + minTr + newline + ...
        "Mean C: " + mean(last_Tr);
    annotation('textbox',[.1 .2 0 0], ...
        'String',message, ...
        'FitBoxToText','on', ...
        'BackgroundColor','white')
    message2 = "\lambda: " + lambda + newline + ...
        "\mu: " + mu + newline + ...
        "\sigma: " + sigma;
    annotation('textbox',[.4 .2 0 0], ...
        'String',message2, ...
        'FitBoxToText','on', ...
        'BackgroundColor','white')
end

```

Příloha F

Kód - Kompenzovaný složený Poissonův proces

```
function [Tr] = ccpoisson_process(mu, sigma, N, lambda, T, ...
                                graph, n_instances)
% Simulation of the Compensated Compound Poisson process
%
%[Tr]
% Tr Trajectory of the process
%
%%CCPOISSON_PROCESS(N,LAMBDA,T,GRAPH,N_INSTANCES)
% MU, SIGMA are parameters for normal distribution of the jump's size
% N granularity of the [0,T] interval
% All the other input parameters correspond to
% the POISSON_PROCESS function.

%% Input parameters handling
if nargin < 7; n_instances = 1; end
if nargin < 6; graph = false; end
if nargin < 5; T = 10; end
if nargin < 4; lambda = 1; end
if nargin < 3; N = 1000; end
if nargin < 2; sigma = 1; end
if nargin < 1; mu = 0; end

%% Computation task
dt = T/N;
t = (0:dt:T);
% -lambda*mu*t part will be the same for all of the elements
Tr = repmat(-lambda*mu*t',1,n_instances);

for i = 1:n_instances
    p = poisson_process(0, lambda, T, false, 1, false);
    jumps = mu + sigma*randn(length(p),1); % jumps are from N(mu,sigma)
```

```

jumps(1) = 0;
for j = 2:length(p)
    % adds the jump size from t to the end
    Tr(t > p(j), i) = Tr(t > p(j), i) + jumps(j);
end
end

st = length(t);
%% Plotting
if graph
    figure
    % Statistics
    maxTr = max(Tr, [], 1); minTr = min(Tr, [], 1);
    % Keep the indices for plotting
    % To plot the run with maximum and minimum value
    [maxTr, imax] = max(maxTr); [minTr, imin] = min(minTr);
    lastTr = Tr(end,:);
    % Plot itself
    % Plot only reasonable number of instances (1000.)
    % If the max and min runs are in those first 1000, then don't plot
    % them again.
    n_to_print = min(1e3, n_instances);
    if imax <= n_to_print; imax = []; end
    if imin <= n_to_print; imin = []; end
    plot(t,Tr(1:st,[1:n_to_print imax imin])); hold on;
    % Plot editing
    a = gca; % Get the current axis
    a.Position([1 2 4]) = [.11 .3 .6]; % [1, 2] position, [3, 4] w, h
    title("Simulation of the compensated compound Poisson process")
    xlabel("\it t")
    ylabel("\it C*_t")
    grid on;
    message = "Minimal value of C*: " + minTr + newline + ...
        "Maximal value of C*: " + maxTr + newline + ...
        "Mean C*(T): " + mean(lastTr) + newline + ...
        "St. dev. C*(T): " + std(lastTr);
    annotation('textbox',[.1 .19 0 0],'String',message,'FitBoxToText','on')
    message2 = "\lambda: " + lambda + newline + ...
        "\mu: " + mu + newline + ...
        "\sigma: " + sigma;
    annotation('textbox',[.5 .19 0 0], ...
        'String',message2, ...
        'FitBoxToText','on')
end

```

Příloha G

Kód - Black-Scholes-Mertonův model

```
function [c] = black_scholes(S0, r, T, K, sigma, type)
% Computes the theoretical price of the european option
% via the Black-Scholes-Merton formula
%
%[C]
% Returns the price of the option
%
%BLACK_SCHOLES(S0,R,T,K,SIGMA,TYPE)
% S0 Prize of the stock now
% R Interest rate
% T Maturity
% K Strike price
% SIGMA Volatility
% TYPE Either 'call' or 'put'
%
%NOTES:
% Except the parameter 'type', others can be vectors.

%% Input parameters handling
if nargin < 6; type = 'call'; end
if nargin < 5; sigma = 0.3; end
if nargin < 4; K = 100; end
if nargin < 3; T = 1; end
if nargin < 2; r = 0.05; end
if nargin < 1; S0 = 100; end

%% Computation task
% d1 ... d+, d2 ... d-
d1 = 1./(sigma.*sqrt(T)).*(log(S0./K) + (r + sigma.^2/2).*T);
d2 = d1 - sigma.*sqrt(T);
switch lower(type)
    case "call", c = S0.*normcdf(d1) - exp(-r.*T).*K.*normcdf(d2);
    case "put", c = exp(-r.*T).*K.*normcdf(-d2) - S0.*normcdf(-d1);
```

```
otherwise
    disp("Wrong type selected. Only 'call' and 'put' are allowed.")
end
```

Příloha H

Kód - Skokový proces

```
function [c] = pure_jump_price(S0, r, T, K, sigma, lambda, alpha)
% Computes the theoretical price of the european call option
% via the pure jump model
%
%[C]
% Returns the price of the option
%
%PURE_JUMP_PRICE(S0,R,T,K,SIGMA,LAMBDA,ALPHA)
% S0 Prize of the stock now
% R Interest rate
% T Maturity date
% K Strike price
% SIGMA Volatility
% LAMBDA Frequency of jumps per unit of time
% ALPHA Mean rate of return

%% Input parameters handling
if nargin < 7; alpha = 0.2; end
if nargin < 6; lambda = 1; end
if nargin < 5; sigma = 0.3; end
if nargin < 4; K = 100; end
if nargin < 3; T = 1; end
if nargin < 2; r = 0.05; end
if nargin < 1; S0 = 100; end

if T == 0
    c = max([S0 - K, 0]);
    return
end

%% Computation task
rn_lambda = lambda - (alpha - r)/sigma;
n = 50; % summation index (max is 170 due to the n! limit)
```

```

c = option_price(S0, rn_lambda, T, r, sigma, K, n);

end

function [y] = positive(x)
    % represents (x)^+ operator
    len_x = length(x);
    x = reshape(x, [len_x, 1]);
    y = max([x zeros(length(x),1)], [], 2);
end

function [p] = poisson_prob(lambda, T, n)
    i = (0:n)';
    p = (lambda.^i.*T.^i)./factorial(i)*exp(-lambda*T);
end

function [c] = option_price(x, lambda, T, r, sigma, K, n)
    i = (0:n);
    a = x*exp(-lambda*sigma*T)*(sigma + 1).^i;
    b = K*exp(-r*T);
    p = poisson_prob(lambda, T, n);
    elements = positive(a - b).*p;
    c = sum(elements);
end

```

Příloha I

Kód - Skokově difúzní proces

```
function [c] = jump_diffusion_price(S0, r, T, K, sigma, lambda, beta, b)
% Computes the theoretical price of the european call option
% via the Jump-diffusion model
%
%[C]
% Returns the price of the option
%
%JUMP_DIFFUSION_PRICE(S0,R,T,K,SIGMA,LAMBDA,BETA,B)
% S0 Prize of the stock now
% R Interest rate
% T Maturity date
% K Strike price
% SIGMA Volatility
% LAMBDA Frequeuncy of jumps per unit of time
% BETA Mean size of jumps
% B Variance of jump's size

%% Input parameters handling
if nargin < 8; b = 0.4; end
if nargin < 7; beta = 0.083287; end
if nargin < 6; lambda = 1; end
if nargin < 5; sigma = 0.3; end
if nargin < 4; K = 100; end
if nargin < 3; T = 1; end
if nargin < 2; r = 0.05; end
if nargin < 1; S0 = 100; end

if T == 0
    c = black_scholes(S0,r,T,K,sigma,'call');
    return
end

%% Computation task
```

```

rn_lambda = lambda*(1+beta); % risk-neutral lambda
n = 50; % summation index (max is 170 due to the n! limit)
r_n = r_element(r, lambda, beta, T, n);
sigma_n = sigma_element(sigma, b, T, n);
c = option_price(S0, rn_lambda, T, r_n, sigma_n, K, n);

end

function s_n = sigma_element(sigma, b, T, n)
    i = (0:n)';
    s_n = sqrt(sigma^2 + b^2*i./T);
end

function r_n = r_element(r, lambda, beta, T, n)
    i = (0:n)';
    r_n = r - lambda.*beta + (log(1+beta)./T).*i;
end

function [p] = poisson_prob(lambda, T, n)
    i = (0:n)';
    p = (lambda.^i.*T.^i)./factorial(i).*exp(-lambda*T);
end

function [c] = option_price(x, lambda, T, r_n, sigma_n, K, n)
    p = poisson_prob(lambda, T, n);
    bsm = black_scholes(x, r_n, T, K, sigma_n, 'call');
    elements = p.*bsm;
    c = sum(elements);
end

```

Příloha J

Kód - Simulace ceny

```
%% Simulation

t0 = 0; % starting time
T = 1; % maturity date in years
sigma = 0.3; % volatility
alpha = 0.3;
K = 100; % strike price
lambda = 1;
beta = 0.083287; % 1+beta = mean of log-normal jump
b = 0.4; % variance of log-normal jump
r = 0.05;

n = 1000;% steps
n_instances = 1000;% instances

St = (50:150);
len_St = length(St);

% BSM
c_bs_e = zeros(len_St,1); % empirical prices
c_bs_t = zeros(len_St,1); % theoretical prices
% PJ
c_pj_e = zeros(len_St,1);
c_pj_t = zeros(len_St,1);
% JD
c_jd_e = zeros(len_St,1);
c_jd_t = zeros(len_St,1);

for idx = 1:len_St
    [W, t] = wiener_process(n,T,false,n_instances);
    S_bsm = St(idx)*exp((r-0.5*sigma^2)*repmat(t',1,n_instances) +
        sigma*W);

    c_bs_e(idx) = exp(-r*T)*mean(max(S_bsm(end,:)-K,0));
```

```

c_bs_t(idx) = black_scholes(St(idx),r,T,K,sigma,'call');

% Pure Jump
S_pj = zeros(length(t),n_instances);
rn_lambda = lambda - (alpha - r)/sigma;
sigma = 0.3;
jj = zeros(n_instances,1);
for k = 1:n_instances
    [Tn, Eps, N, T] = poisson_process(0, rn_lambda, T, false); % times
        of jumps
    pow = 0;
    jj(k) = length(Tn)-1;
    Tn = [Tn(2:end); T];
    for i = 1:length(t)
        for j = 2:length(Tn)
            if Tn(j-1) <= t(i) && t(i) < Tn(j)
                pow = j-1;
            end
        end
        S_pj(i,k) = St(idx)*(sigma + 1)^pow*exp(r*t(i) ...
            - rn_lambda*sigma*t(i));
    end
end
c_pj_e(idx) = exp(-r*T)*mean(max(S_pj(end,:)-K,0));
c_pj_t(idx) = pure_jump_price(St(idx),r,T,K,sigma,lambda,alpha);

% Jump-diffusion
S_jd = zeros(length(t),n_instances);
jj = zeros(n_instances,1);
rn_lambda = lambda*(1+beta);
% normal to log-normal transformation with given params of the LN dist.
ln_mu = log((1+beta)^2/(sqrt((1+beta)^2 + b^2)));
ln_sigma = sqrt(log(1 + b^2/(1+beta)^2));
tes = [];
mm = ones(n_instances, 1);
for k = 1:n_instances
    % times of jumps
    [Tn, Eps, N, T] = poisson_process(0, rn_lambda, T, false);
    mult = 1; % multiplier
    jj(k) = length(Tn)-1;
    for kk = 1:jj(k)
        pom = exp(ln_mu + ln_sigma*randn());
        tes = cat(1,tes,mult);
        mult = pom*mult;
        mm(k) = mult;
    end
    for i = 1:length(t)
        S_jd(i,k) = St(idx)*exp(sigma*W(i,k) + ...
            (r - beta*lambda - 0.5*sigma^2)*t(i))*mult;
    end
end

```



```

end
c_jd_e(idx) = exp(-r*T)*mean(max(S_jd(end,:)-K,0));
c_jd_t(idx) = jump_diffusion_price(St(idx),r,T,K,sigma,lambda,beta,b);

end

plot(St,c_pj_e); hold on; plot(St,c_pj_t);
plot(St,c_jd_e); hold on; plot(St,c_jd_t);
plot(St,c_bs_e); hold on; plot(St,c_bs_t);

title('Simulated and theoretical option price')
xlabel('\it spot price')
ylabel('option price')
grid on;
lgd = legend("Pure Jump - simulation", ...
            "Pure Jump - theoretical", ...
            "Jump-diff - simulation", ...
            "Jump-diff - theoretical", ...
            "BSM - simulation", ...
            "BSM - theoretical", ...
            "Location", "northwest");
title(lgd, 'Simulation vs. theory')

```
