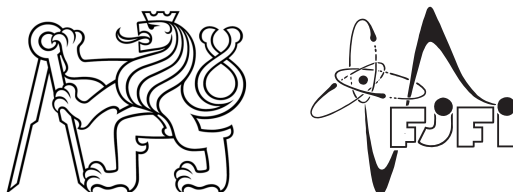


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky  
Obor: Matematické inženýrství  
Zaměření: Matematické modelování



# Geometrický pohyb křivek a jeho aplikace

## Geometric Flow of Curves and Its Applications

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Monika Suchomelová  
Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš  
Rok: 2020



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Monika Suchomelová
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Matematické modelování
Název práce (česky):	Geometrický pohyb křivek a jeho aplikace
Název práce (anglicky):	Geometric Flow of Curves and Its Applications

### Pokyny pro vypracování:

1. Prostudujte matematické vlastnosti lineární difuzní rovnice.
2. Prostudujte základy popisu křivek a možnosti řešení rovnic, které tyto křivky určují.
3. Seznamte se se základními pojmy diferenciální geometrie potřebné pro popis křivek a jejich pohybu.
4. Seznamte se s oblastmi použití dynamiky křivek.
5. Seznamte se s metodami pro numerické řešení evolučních parciálních diferenciálních rovnic popisujících dynamiku křivek.
6. Zahajte práce na vývoji analytických a numerických metod pro zkoumání dynamiky křivek.

Doporučená literatura:

1. J. Sethian, Level Set Methods. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
2. F. Cao, Geometric Curve Evolution and Image Processing. Springer, Berlin, 2003.
3. M. A. Grayson, Shortening Embedded Curves. Annals of Mathematics 129, 1989, 71–111.
4. M. Beneš, E. Feireisl, Eds., Topics in mathematical modeling. Jindřich Nečas Center for Mathematical Modelling, Lecture Notes, Vol. 4, MATFYZPRESS, Charles University in Prague, Prague, 2008.
5. P. Kaplický, Š. Nečasová, Topics on partial differential equations. Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling, Lecture notes, Vol. 2, MATFYZPRESS, Charles University in Prague, Prague, 2007.
6. G. Dziuk, K. Deckelnick, Numerical approximations of mean curvature flow of graphs and level sets. In 'L. Ambrosio, K. Deckelnick, G. Dziuk, M. Mimura, V. A. Solonnikov, H. M. Soner (eds): Mathematical aspects of evolving interfaces', Lecture Notes in Mathematics 1812, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2003, 53–87.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

prof. Dr. Ing. Michal Beneš

Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

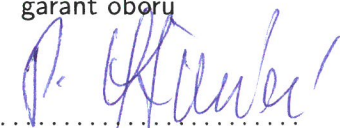
Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

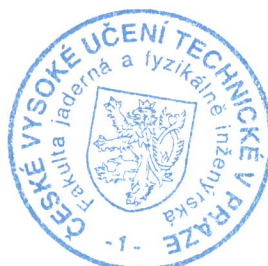
V Praze dne 23. října 2019



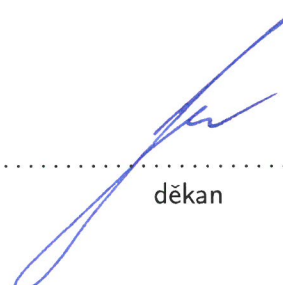
.....  
garant oboru



.....  
vedoucí katedry



.....  
děkan



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne .....

.....  
Monika Suchomelová



## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala prof. Dr. Ing. Michalu Benešovi za trpělivé vedení mé bakalářské práce a za jeho klidný, ochotný a spolehlivý přístup.

Monika Suchomelová





*Název práce:*

**Geometrický pohyb křivek a jeho aplikace**

*Autor:* Monika Suchomelová

*Obor:* Matematické inženýrství

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* prof. Dr. Ing. Michal Beneš  
Katedra matematiky  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská  
České vysoké učení technické v Praze

*Konzultant:* —

*Abstrakt:* Práce je zaměřena na studium dynamiky křivek pomocí diferenciální geometrie. Nejdříve se zabývá rovnicí vedení tepla a jejími vlastnostmi. Dále zavádí potřebné pojmy týkající se matematické analýzy křivek. Hlavní studovanou úlohou je pak pohyb rovinných křivek podle křivosti. K řešení této úlohy jsou pomocí parametrického přístupu vyvinuta numerická schémata, která jsou v poslední části práce vyzkoušena na konkrétních příkladech.

*Klíčová slova:* rovnice vedení tepla, pohyb podle křivosti, parametrický přístup, diferenciální geometrie

*Title:*

**Geometric Flow of Curves and Its Applications**

*Author:* Monika Suchomelová

*Abstract:* The work studies with dynamics of curves by means of differential geometry. Firstly, the thesis deals with the heat equation and its properties. Then, the essential terminology from mathematical analysis of curves is introduced. The main studied problem is the curvature flow of planar curves. To solve the problem, the numerical schemes are developed using parametric approach. In the last section, these schemes are tested on specific examples.

*Key words:* heat equation, curvature flow, parametric approach, differential geometry



# Obsah

Úvod	1
<b>1 Potřebný matematický aparát</b>	<b>3</b>
1.1 Vlastnosti rovnice vedení tepla	3
1.1.1 Analytické řešení v jednorozměrné oblasti	3
1.1.2 Princip maxima	6
1.2 Pojmy z diferenciální geometrie křivek	8
1.3 Hausdorffova metrika	15
<b>2 Úlohy dynamiky křivek</b>	<b>17</b>
2.1 Druhy dynamiky křivek	17
2.2 Pohyb podle střední křivosti	18
2.3 Přímé a nepřímé metody řešení	19
2.3.1 Vrstevnicová metoda	19
2.3.2 Přímá metoda	21
2.4 Vlastnosti řešení	23
2.4.1 Příklady nenulové funkce $f$	27
2.5 Teoretické výsledky	28
2.6 Motivace a aplikace	32
2.6.1 Fázové přechody a tvorba krystalů	32
2.6.2 Zpracování obrazu	36
2.6.3 Dislokace	37
<b>3 Numerické řešení dynamiky křivek</b>	<b>39</b>
3.1 Metoda přímek, Eulerovo schéma	39
3.1.1 Verze bez redistribuce	40
3.1.2 Verze s redistribucí	41

3.2	Konvergenční analýza . . . . .	41
3.3	Přidání vnější síly . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Výsledky</b>	<b>47</b>
	<b>Závěr</b>	<b>57</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů</b>	<b>58</b>

# Úvod

Tato práce je úvodem do dynamiky křivek v rovině. Přestože je křivka čistě matematický objekt, podobné struktury se běžně nacházejí v přírodě, například rozhraní různých látek lze často dobře aproximovat křivkou. Při studiu fázových rozhraní pak vyvstala motivace pro studium dynamiky křivek, konkrétně v rámci Gibbsovy-Thomsonovy podmínky na rozhraní.

První kapitola této práce se zabývá matematickým úvodem, kde se definují pojmy potřebné pro zbytek práce. Součástí kapitoly je i rozbor vlastností rovnice vedení tepla.

Ve druhé kapitole představíme úlohu

$$v = \kappa + f, \tag{1}$$

kde  $v$  je velikost normálové rychlosti,  $\kappa$  křivost křivky a  $f$  vnější síla.

Fyzikální motivací této úlohy jsou například fázové přechody látek ([7], [22], [16]) a dynamika dislokací v materiálech ([5], [28], [23]). Využití lze dále nalézt při zpracování digitálního obrazu ([10], [26]), např. při hledání hran v obrázku nebo při odstraňování šumu.

Dále je součástí druhé kapitoly uvedení základních způsobů řešení úlohy (1) - přímé a nepřímé metody. Jelikož je tato úloha v rovině dobře prostudována, v této kapitole jsou rozebrány i nejdůležitější teoretické výsledky.

Ve třetí kapitole popisujeme numerická schémata odvozená pomocí přímé metody. Pro lepší efektivitu výpočtů využijeme tangenciální redistribuci.

V poslední kapitole předvedeme výpočetní výsledky získané pomocí schémat z předchozí kapitoly.

Tato práce vznikla v rámci výzkumných prací projektu „Centrum pokročilých aplikovaných přírodních věd“ č. CZ.02.1.01/0.0/0.0/16\_019/0000778 MŠMT ČR.



# Kapitola 1

## Potřebný matematický aparát

V následující kapitole probereme vlastnosti rovnice vedení tepla. Důvodem je podobnost rovnice pohybu podle křivosti právě s difuzní rovnicí. Dále představíme základní pojmy z diferenciální geometrie týkající se křivek, abychom porozuměli zkoumanému pohybu. Nakonec si zadefinujeme tzv. Hausdorffovu metriku, pomocí které můžeme poměřovat vzdálenost dvou kompaktních množin v metrickém prostoru. Její využití v této práci spočívá v možnosti porovnávat různé křivky v  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.1 Vlastnosti rovnice vedení tepla

Rovnice vedení tepla je lineární parabolická parciální diferenciální rovnice, která je důkladně prostudována (viz [40]). Fyzikální interpretací může být šíření tepla nebo difuze látky ve zkoumané oblasti.

U rovnice vedení tepla nás zajímá především princip maxima, jelikož ho lze využít i v případě složitějších parabolických rovnic. Nejdříve si však rovnici vedení tepla představíme a nalezneme řešení v jednorozměrné prostorové oblasti.

Rovnice vedení tepla (nebo také difuzní rovnice) v  $\mathbb{R}^n$  s Dirichletovou okrajovou podmínkou je lineární parciální diferenciální rovnice tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t u(\vec{x}, t) &= D(\Delta u(\vec{x}, t)) + F(\vec{x}, t) && \text{na } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(\vec{x}, 0) &= u_0(\vec{x}) && \text{na } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega}(t) &= 0 && \forall t > 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde  $\Omega$  je omezená oblast v  $\mathbb{R}^n$ ,  $D > 0$  je difuzní koeficient,  $u_0$  je počáteční hodnota funkce  $u$  a  $F$  je zdrojový člen. Symbolem  $\Delta$  označujeme Laplaceův operátor. V případě modelování šíření tepla funkce  $F$  představuje tepelný zdroj rozmístěný na oblasti  $\Omega$  a  $u$  představuje funkci teploty na  $\Omega$ .

#### 1.1.1 Analytické řešení v jednorozměrné oblasti

Dále nalezneme analytické řešení rovnice vedení tepla na jednorozměrné oblasti, tedy v případě  $n=1$ . Rovnice (1.1) pak přejde do tvaru:

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x, t) &= D\partial_{xx}u(x, t) + F(x, t) && \text{na } (a, b) \times (0, +\infty), \\
u(x, 0) &= u_0(x) && \text{na } (a, b), \\
u(a, t) &= 0, \quad u(b, t) = 0 && \forall t > 0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Nejprve nalezneme řešení homogenní, tedy pro funkci  $F$  nulovou. K jeho sestavení využijeme tzv. separace proměnných (podrobný postup lze detailně najít v [40]). Předpokládejme tvar řešení  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , kde funkce  $X$  a  $T$  nejsou všude nulové. Pak po dosazení do rovnice (1.2) a formálních úpravách získáme rovnici

$$\frac{\dot{T}}{T}(t) = D\frac{X''}{X}(x),$$

kde každá strana je funkcí jiné proměnné, proto se rovnají nějaké stejné konstantě, kterou označíme  $-\lambda \in \mathbb{R}$ . Řešme tedy nejprve rovnici

$$DX''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{1.3}$$

Hledáme, pro která  $\lambda$  existuje netriviální řešení rovnice (1.3), které zároveň splní okrajovou podmínku. Díky netrivialitě funkce  $T$  přejde okrajová podmínka do tvaru

$$X(a) = X(b) = 0.$$

Pro  $\lambda < 0$  je řešením (1.3) lineární kombinace dvou exponencií, která není v žádném bodě rovna nule, pokud není nulová na celém definičním oboru. To znamená, že nelze splnit okrajové podmínky. Pro  $\lambda = 0$  úlohu řeší pouze lineární funkce, ale ta je nulová právě v jednom bodě, pokud to opět není nulová funkce. Dirichletovu podmínku také nelze splnit. Zbývá jen  $\lambda > 0$ . Pak pro  $A, B \in \mathbb{R}$  je jedním z možných tvarů řešení (1.3)

$$X(x) = A \sin\left((x-a)\sqrt{\frac{\lambda}{D}}\right) + B \cos\left((x-a)\sqrt{\frac{\lambda}{D}}\right),$$

který je výhodný při dalších úpravách. Okrajovou podmínku v bodě  $a$  splníme jen pro  $B = 0$ . Předpokládáme  $A \neq 0$ . Z podmínky v bodě  $b$  plyne rovnice pro  $\lambda$

$$\sin\left((b-a)\sqrt{\frac{\lambda}{D}}\right) = 0.$$

Tato rovnice má spočetně mnoho řešení, která označíme  $\lambda_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\lambda_k = D \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2.$$

Pro každé  $\lambda_k$  nalezneme funkci  $T_k(t)$  danou rovnicí

$$\dot{T} + \lambda_k T = 0.$$

Je zřejmé, že časová funkce bude vždy ve tvaru klesající exponenciely.

Ve výsledku jsme našli spočetně mnoho homogenních řešení rovnice (1.2) ve tvaru

$$u_k(x, t) = A_k e^{-\lambda_k t} \sin\left((x-a)\sqrt{\frac{\lambda_k}{D}}\right).$$



Libovolnou kombinací těchto řešení pak získáme znovu homogenní řešení. Proto navrhneme řešení ve tvaru

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-\lambda_k t} \sin \left( (x-a) \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \right). \quad (1.4)$$

Pokud tato řada stejnoměrně konverguje, pak se skutečně jedná o řešení.

Dále dosazením počáteční podmínky

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin \left( (x-a) \frac{k\pi}{b-a} \right) \quad (1.5)$$

získáme rozvoj do trigonometrické řady na intervalu  $(a, b)$ . Proto se jedná o rozvoj funkce  $u_0$  do Fourierovy řady na intervalu  $(a, b)$ . Po přenásobení rovnice (1.5) výrazem

$$\sin \left( (x-a) \frac{l\pi}{b-a} \right)$$

a integraci od  $a$  do  $b$  získáme s využitím stejnoměrné konvergence Fourierových řad

$$\begin{aligned} \int_a^b u_0(x) \sin \left( (x-a) \frac{l\pi}{b-a} \right) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left( \int_a^b \sin \left( (x-a) \frac{l\pi}{b-a} \right) \sin \left( (x-a) \frac{k\pi}{b-a} \right) dx \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{b-a}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin(lz) \sin(kz) dz \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{b-a}{\pi} \frac{\pi}{2} \delta_{k,l} \\ &= A_l \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Proto pro koeficienty  $A_k$  platí

$$A_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b u_0(x) \sin \left( (x-a) \frac{k\pi}{b-a} \right) dx.$$

Dosazením do (1.4) získáme tvar  $u(x, t)$ , který pak dále upravíme

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{b-a} \int_a^b u_0(y) \sin \left( (y-a) \frac{k\pi}{b-a} \right) dy e^{-\lambda_k t} \sin \left( (x-a) \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \right) \\ &= \int_a^b \underbrace{\frac{2}{b-a} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda_k t} \sin \left( (x-a) \frac{k\pi}{b-a} \right) \sin \left( (y-a) \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \right)}_{G(x,y,t)} u_0(y) dy \\ &= \int_a^b G(x, y, t) u_0(y) dy. \end{aligned}$$

Takto definované  $G(x, y, t)$  se nazývá Greenova funkce ([40]).

Dalším krokem je nalezení řešení úlohy (1.2) s nenulovou pravou stranou  $F(x, t)$  a naopak nulovou počáteční podmínkou  $u_0(x)$ . Sečtením tohoto řešení s již nalezeným homogenním nalezneme celkové řešení (1.2).

Hledejme nehomogenní řešení ve tvaru

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin \left( (x - a) \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \right).$$

Dosaďme tento tvar řešení do rovnice (1.2), kde namísto  $F(x, t)$  napíšeme Fourierův rozvoj této funkce na intervalu  $(a, b)$ :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (u'_k(t) + \lambda_k u_k(t)) \sin \left( (x - a) \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) \sin \left( (x - a) \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \right).$$

Všechny koeficienty se pak musí rovnat, získáváme tudíž obyčejné diferenciální rovnice pro funkce  $u_k$ . Z počáteční podmínky plyne, že  $u_k(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ . Vyřešením rovnic

$$\begin{aligned} u'_k + \lambda_k u_k &= f_k, \\ u_k(0) &= 0 \end{aligned}$$

získáme jejich řešení

$$u_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Po dosazení upravíme řešení záměnou integrálu se sumou, vyjádřením koeficientů  $f_k(\tau)$  a využitím tvaru Greenovy funkce:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \sin \left( (x - a) \sqrt{\frac{\lambda_k}{D}} \right) = \int_0^t \int_a^b G(x, y, t - \tau) F(y, \tau) dy d\tau.$$

Celkové řešení úlohy (1.2) je tedy

$$u(x, t) = \int_a^b G(x, y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_a^b G(x, y, t - \tau) F(y, \tau) dy d\tau.$$

Případ obecnější okrajové podmínky je řešen v [40].

### 1.1.2 Princip maxima

Mějme teď úlohu vedení tepla s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= D \partial_{xx} u(x, t) + F(x, t) && \text{na } (a, b) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{na } (a, b), \\ u(a, t) &= g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t) && \forall t > 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

**Věta 1.1.1 (Princip maxima)** *Nechť řešení úlohy (1.6) (ozn.  $u(x, t)$ ) existuje na  $D_f := (a, b) \times (0, T)$ . Pak*

$$u(x, t) \leq \max \left\{ g_1(t), g_2(t), \max_{x \in [a, b]} \{u_0(x)\} \right\} + KT \text{ na } D_f,$$

kde pro konstanty  $K_0 > 0, K > 0$  platí, že  $|F(x, t)| \leq K_0 < K$ .

**Důkaz:** Z linearity rovnice plyne, že řešení  $u$  úlohy (1.6) můžeme napsat jako

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

kde  $u_1$  řeší úlohu (1.6) s nulovou pravou stranou (tedy  $F = 0$ ), ale se zachovanými okrajovými podmínkami a se zachovanou počáteční podmínkou a  $u_2$  řeší (1.6) naopak s nulovými okrajovými podmínkami a nulovou počáteční podmínkou (to znamená  $g_1, g_2, u_0 = 0$ ). Dokážeme tvrzení pro  $u_1$  a  $u_2$  zvlášť.

Nejprve dokážeme, že  $u_1$  nabývá maxima na množině  $A := \{(x, t) \in \overline{D}_f \mid x = a \vee x = b \vee t = 0\}$ . Definujme

$$m := \max_A \{u_1(x, t)\},$$

$$M := \max_{\overline{D}_f} \{u_1(x, t)\}.$$

Nechť pro spor  $M > m$ , tedy  $u_1$  svého maxima nabývá jinde, než na množině  $A$ . Ozn.  $(x_0, t_0)$  bod, kde  $u(x_0, t_0) = M$ . Definujme si funkci

$$v(x, t) := u_1(x, t) + \frac{M - m}{2(b - a)^2} (x - x_0)^2.$$

Pro tu platí

$$v(x, t) \leq m + \frac{M - m}{2(b - a)^2} (b - a)^2 = \frac{m + M}{2} < M \text{ na } A,$$

$$v(x_0, t_0) = M + \frac{M - m}{2(b - a)^2} (x_0 - x_0)^2 = M.$$

Tedy maximum funkce  $v$  je větší nebo rovno  $M$  a není nabýváno na  $A$ . Nechť je toto maximum nabýváno v bodě  $(x_1, t_1)$ . Tedy

$$v(x_1, t_1) = \max_{\overline{D}_f} \{v(x, t)\}, \quad (x_1, t_1) \notin A,$$

z čehož vyplývá, že mohou nastat pouze dva případy:

- $(x_1, t_1) \in D_f$  (to znamená  $t_1 \neq T$ )

Pak z vlastností lokálního maxima platí

$$\partial_t v(x_1, t_1) = 0, \quad \partial_x v(x_1, t_1) = 0, \quad \partial_{xx} v(x_1, t_1) \leq 0.$$

Třetí nerovnost vyplývá z negativní semidefinitnosti matice druhých derivací (Hessiána) v bodě  $(x_1, t_1)$  a Sylvesterova kritéria. Pak

$$0 \leq \partial_t v(x_1, t_1) - \partial_{xx} v(x_1, t_1) = -\frac{M - m}{(b - a)^2}, \quad (1.7)$$

což je spor s předpokladem  $M > m$ .

- $t_1 = T, x_1 \in (a, b)$

Pak stejně jako předtím platí

$$\partial_x v(x_1, t_1) = 0, \quad \partial_{xx} v(x_1, t_1) \leq 0.$$

Nyní odvodíme, jak vypadá časová derivace zleva v  $(x_1, t_1)$ . Z definice maxima na levém okolí  $t_1$  platí  $v(x_1, t) \leq v(x_1, t_1)$ . Důsledkem je následující nerovnost:

$$\partial_t v(x_1, t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{v(x_1, t) - v(x_1, t_1)}{\underbrace{t - t_1}_{<0}} \geq 0.$$

Z ní pak také vyplývá nerovnost (1.7), tedy dochází opět ke sporu.

Ted' dokážeme, že

$$u_2(x, t) \leq KT \text{ na } D_f.$$

Označme  $L = \max_{\overline{D_f}} \{u_2(x, t)\}$ . Necht' pro spor  $L > KT$ , tedy necht' v bodě  $(x_0, t_0)$ , ve kterém je hodnota  $L$  nabývána, platí  $u_2(x_0, t_0) > KT$ . Definujme pomocnou funkci  $w$  tentokrát ve tvaru:

$$w(x, t) = u_2(x, t) + KT \frac{T-t}{T}.$$

Jelikož na množině  $A$  je  $u_2(x, t) = 0$ , platí

$$w(x, t) = KT \frac{T-t}{T} \leq KT < L \text{ na } A.$$

Po dosažení bodu  $(x_0, t_0)$  dostaneme

$$w(x_0, t_0) = L + \underbrace{KT \frac{T-t_0}{T}}_{\geq 0} \geq L.$$

Necht' je maximum funkce  $w$  dosaženo v bodě  $(x_1, t_1)$ . Pro ten platí, že neleží v  $A$  a  $u_2(x_1, t_1) \geq L$ . Analogicky k předchozímu postupu se pro všechna možná  $t_1 \in (0, T]$  dokáže nerovnost

$$\partial_t w(x_1, t_1) - \partial_{xx} w(x_1, t_1) \geq 0.$$

Po dosažení za  $w$  dojdeme k následující nerovnosti:

$$\partial_t w(x_1, t_1) - \partial_{xx} w(x_1, t_1) = \partial_t u_2(x_1, t_1) - \partial_{xx} u_2(x_1, t_1) - K = F(x_1, t_1) - K \geq 0,$$

ale z předpokladu platí

$$F(x_1, t_1) - K \leq |F(x_1, t_1)| - K < 0,$$

což je spor s definicí konstanty  $K$ .

Celkem tak na  $D_f$  platí

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \leq \max \left\{ g_1(t), g_2(t), \max_{x \in [a, b]} \{u_0(x)\} \right\} + KT,$$

což jsme chtěli dokázat. □

## 1.2 Pojmy z diferenciální geometrie křivek

Pro potřeby této práce je nutné se seznámit se základními pojmy z diferenciální geometrie křivek. Následující část se zabývá obecnou parametrickou definicí křivky v  $\mathbb{R}^n$ , dále vlastnostmi rovinných křivek. V rovině se zavede tečný a normálový vektor (Frenetův rámeček nebo také Frenetův repér v rovině) a křivost rovinné křivky. Poslední část sekce je věnována prostorovým křivkám. Definujeme Frenetův rámeček v prostoru, dále křivost a torzi prostorové křivky.

**Definice 1 (Parametricky zadaná křivka)** *Necht'  $I \subset \mathbb{R}$  je interval. Spojité zobrazení  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazveme parametricky zadanou křivkou. Definujeme stopu křivky  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  jako obraz tohoto zobrazení, tedy  $\Gamma := \gamma(I)$ .*

$\Gamma$  představuje geometrický objekt, zatímco  $\gamma$  je zobrazení, díky kterému jsme schopni zkoumat vlastnosti křivky. Slovem „křivka“ však budeme označovat i objekt  $\Gamma$ . Z kontextu bude zřejmé, zda-li máme na mysli podmnožinu  $\mathbb{R}^n$  nebo zobrazení do  $\mathbb{R}^n$ . Písmenem  $I$  budeme dále značit interval, kde je křivka definována.

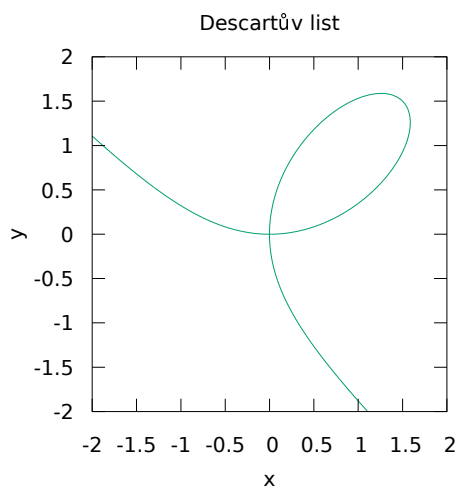
Interval  $I$  nemusí být ani uzavřený, ani omezený. Stejně tak  $\Gamma$  nemusí být omezená množina. Příklad takové křivky, která má tudíž nekonečnou délku, je na obr. 1.1. Křivka se nazývá Descartův list. Dle naší definice, kde požadujeme křivku definovanou na intervalu, se vlastně jedná o dvě křivky

$$\gamma_1 : (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2 : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

se stejným předpisem:

$$\gamma_{1,2}(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right).$$

Pokud však je  $I$  uzavřený interval, tedy je to kompaktní množina.



Obrázek 1.1: Příklad rovinné křivky s nekonečnou délkou - Descartův list:  $\gamma(t) = \left( \frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right), t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Nechť  $\phi : J \rightarrow I$  je spojitá bijekce mezi intervaly  $I$  a  $J$ ,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  křivka. Pak  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$  parametricky zadává stejný objekt  $\Gamma$ , jelikož platí  $\tilde{\gamma}(J) = \gamma(\phi(J)) = \gamma(I)$ . To znamená, že jeden objekt lze reprezentovat různými zobrazeními. Křivku  $\tilde{\gamma}$  nazveme reparametrizací křivky  $\gamma$ .

Mějme nyní uzavřený interval:  $I = [a, b]$ . Lineární transformací  $\phi^{-1}(u) = \frac{u-a}{b-a}$  pro všechna  $u$  z intervalu  $[a, b]$  dostaneme interval  $[0, 1] = \phi^{-1}([a, b])$ . Tedy křivka  $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(\phi(t))$  bude definována na intervalu  $[0, 1]$ . Analogicky lze získat křivku definovanou na intervalu  $[0, 2\pi]$ .

Dále lze hovořit o  $n$ -krát spojitě diferencovatelné křivce v případě, že  $\gamma \in C^{(n)}(I)$ . S diferencovatelností se váže pojem regularity křivky.

**Definice 2** Křivka  $\gamma \in C^{(1)}(I)$  se nazývá **regulární**, pokud  $|\gamma'| \neq 0$  na  $I$ .  $|\cdot|$  značí eukleidovskou normu. V anglicky psané literatuře se taková křivka nazve „**immersed**“.

Další užitečnou vlastností je prostota křivky. Křivka  $\gamma$  je prostá právě tehdy, když platí

$$\forall u_1, u_2 \in I : \gamma(u_1) = \gamma(u_2) \implies u_1 = u_2.$$

V anglicky psané literatuře se regulární a prostá křivka nazve „**embedded**“. Taková křivka nikde sama sebe neprotíná. Pojmy „immersed“ a „embedded“ mají i obecnější význam, pro naše účely však postačí tato definice (viz [41]).

Důležitou parametrizací je parametrizace podle délkového parametru. To znamená, že změně parametru odpovídá změna délky oblouku křivky. Parametr takové křivky značíme  $s$ .

**Definice 3** Necht  $\gamma$  je křivka,  $\gamma \in C^{(1)}(I)$ .  $\gamma$  je přirozeně parametrizovaná, pokud  $|\gamma'(s)| = 1$  pro všechna  $s \in I$ .

Přirozeně parametrizovaná křivka je vždy regulární. Podmínka regularity křivky je ve skutečnosti postačující k existenci přirozené reparametrizace.

**Věta 1.2.1** Libovolně parametrizovanou křivku lze přirozeně reparametrizovat, právě když je regulární.

**Důkaz:** Mějme  $\gamma \in C^{(1)}(I)$  regulární obecně parametrizovanou křivku, necht' bez újmy na obecnosti platí  $0 \in I$ . Definujme funkci  $s(u) : I \rightarrow \mathbb{R}$  představující pro  $u \geq 0$  délku oblouku od bodu  $\gamma(0)$  do bodu  $\gamma(u)$ :

$$s(u) = \int_0^u d\hat{s} = \int_0^u |\gamma'(\hat{u})| d\hat{u}.$$

V případě  $u < 0$  je  $s(u)$  rovna záporně vzaté délce oblouku. Derivací  $s(u)$  podle  $u$  a s použitím regularity křivky  $\gamma$  získáme nerovnost

$$\frac{ds}{du} = |\gamma'(u)| > 0.$$

Z monotonie funkce  $s(u)$  na  $I$  vyplývá, že existuje inverzní funkce  $u(s) : s(I) \rightarrow I$ . Křivka  $\gamma(u(s))$  pak bude přirozeně parametrizovaná.  $\square$

Pro křivky s konečnou délkou  $L$  lze v přirozené parametrizaci volit  $I = [0, L]$ .

Mějme teď libovolnou funkci  $g(s)$ , odvodíme vztah mezi derivacemi podle přirozeného a obecného parametru. Po dosazení  $s(u)$  s použitím řetězového pravidla platí

$$\frac{d}{du}(g(s(u))) = \frac{ds(u)}{du} \frac{dg}{ds}(s(u)) = |\gamma'(u)| \frac{dg}{ds}(s(u)),$$

z čehož vyplývá užitečný vztah

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{|\gamma'(u)|} \frac{d}{du}. \quad (1.8)$$

V této práci budeme využívat hlavně jeden druh křivek, a to uzavřené.

**Definice 4** *Uzavřená křivka* je křivka definována na uzavřeném intervalu  $[a, b]$ , pro kterou platí  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

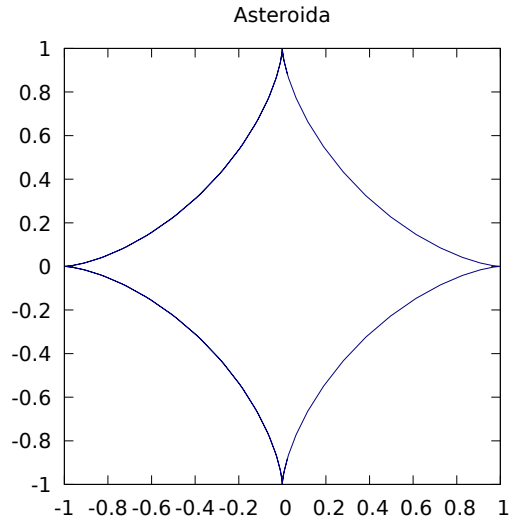
Pro uzavřenou křivku můžeme ztotožnit interval, na kterém je definována, s jednotkovou kružnicí  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ .

## Rovinné křivky

V následující části budeme uvažovat křivky v  $\mathbb{R}^2$ , které se nazývají rovinné. Zavedeme křivost a Frenetův rámec rovinných křivek.

**Definice 5** Křivku  $\gamma$  nazveme *Jordanova*, pokud je uzavřená a prostá (až na počáteční a koncový bod).

Pro Jordanovu křivku  $\gamma$  je dokázáno, že množina  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  sestává ze dvou komponent souvislosti (oblastí s prázdným průnikem). Neomezená se nazývá **vnějšek křivky**  $\gamma$  (zn.  $\text{ext}(\Gamma)$ ) a omezená se nazývá **vnitřek křivky**  $\gamma$  (zn.  $\text{int}(\Gamma)$ ). Jordanova křivka však nemusí být regulární. Na obrázku 1.2 je znázorněna rovinná křivka s názvem *asteroida*, která je Jordanova. Jelikož není spojitě diferencovatelná, nemůže být ani regulární.



Obrázek 1.2: Příklad Jordanovy křivky - asteroida:  $\gamma(u) = (\cos^3(u), \sin^3(u))$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ .

Definujme navíc ještě jednu vlastnost Jordanových křivek - konvexnost.

**Definice 6** Jordanovu křivku  $\gamma$  nazveme **konvexní**, pokud platí

$$\forall u_1, u_2 \in I, \forall \alpha \in (0, 1) : \alpha\gamma(u_1) + (1 - \alpha)\gamma(u_2) \in \text{int}(\Gamma) \cup \Gamma.$$

## Frenetovy vztahy a křivost

**Definice 7** Pro přirozeně parametrizovanou křivku  $\gamma$  definujeme tečný vektor  $\vec{T} = \frac{d}{ds}\gamma$  a normálový jednotkový vektor  $\vec{N}$ , který je kolmý na  $\vec{T}$  a orientovaný tak, aby  $\det(\vec{T}, \vec{N}) = 1$ . Jinak řečeno,  $\vec{N} = (\frac{d}{ds}\gamma)^\perp$ , kde operace  $\perp$  působí na vektor  $(a, b)$ :  $(a, b)^\perp = (-b, a)$ .

Dále budeme předpokládat křivky alespoň dvakrát spojitě diferencovatelné.

Jelikož platí  $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$ , po zderivování podle parametru  $s$  dostaneme  $\frac{d}{ds}\vec{T} \cdot \vec{T} = 0$ . Z toho vyplývá, že v každém bodě existuje reálné číslo  $\kappa$  tak, že

$$\frac{d}{ds}\vec{T} = \kappa\vec{N}. \quad (1.9)$$

Následně z  $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$  a  $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$  odvodíme

$$\frac{d}{ds}\vec{N} = -\kappa\vec{T}. \quad (1.10)$$

Těmito vztahům říkáme **Frenetovy vzorce** v rovině.

Z (1.8) lze přepsat první Frenetův vzorec pomocí obecné parametrizace:

$$\frac{d}{ds}\vec{T} = \frac{1}{|\gamma'(u)|} \frac{d}{du} \left( \frac{\gamma'(u)}{|\gamma'(u)|} \right). \quad (1.11)$$

**Definice 8** Veličinu  $\kappa(s)$  splňující  $\frac{d}{ds}\vec{T} = \kappa\vec{N}$  nazýváme *křivostí rovinné křivky v bodě  $s$* .

Existuje intuitivní způsob, jak chápat křivost. Křivka je v určitém bodě více „zkřivená“, pokud se v okolí tohoto bodu rychleji mění směr tečného vektoru. Což jinak řečeno znamená rychlou změnu úhlu mezi tečným vektorem a osou  $x$  v daných kartézských souřadnicích. V následující definici se zavádí takový úhel.

**Definice 9** *Spojité funkce  $\theta(u)$ , která splňuje*

$$\vec{T}(u) = (\cos \theta(u), \sin \theta(u)),$$

*se nazývá tečný úhel křivky.*

**Věta 1.2.2** *V přirozené parametrizaci platí, že  $\kappa(s) = \theta'(s)$ .*

**Důkaz:**

$$\frac{d}{ds}\vec{T} = \frac{d}{ds}(\cos \theta(s), \sin \theta(s)) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)\vec{N} = \kappa(s)\vec{N}.$$

□

Většinou však budeme mít k dispozici pouze obecně parametrizovanou křivku. Pak je užitečné umět vyjádřit křivost i v jiné parametrizaci, než přirozené.

**Věta 1.2.3** *Pro křivost obecně parametrizované regulární křivky platí*

$$\kappa = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3}. \quad (1.12)$$

**Důkaz:** Již víme

$$\kappa(s) = \theta'(s).$$

Předpokládejme nyní, že známe závislost tečného úhlu na obecném parametru  $u$ . Pak se jedná o jinou funkci, proto tečný úhel závislý na  $u$  značme jiným způsobem:  $\tilde{\theta}(u)$ . Platí  $\theta(s) = \tilde{\theta}(u(s))$ . Derivujme tuto rovnost podle přirozeného parametru

$$\kappa(s) = \frac{d\tilde{\theta}(u(s))}{ds} = \tilde{\theta}'(u(s))u'(s),$$

pak přejdeme k proměnné  $u$  pomocí derivace inverzní funkce, kde křivost závislou na parametru  $u$  značíme  $\tilde{\kappa}$ :

$$\tilde{\kappa}(u) := \kappa(s(u)) = \tilde{\theta}'(u) (s'(u))^{-1}.$$

Tento výraz chceme vyjádřit pomocí  $\gamma'(u) = (\gamma'_1(u), \gamma'_2(u))$ .

Nelze vyjádřit spojitý tečný úhel  $\tilde{\theta}$  pomocí  $\gamma'$  globálně. Postačí však lokální vyjádření. Volme libovolně  $u_0 \in I^0$ , kde  $I^0$  značí vnitřek intervalu  $I$ . Pak mohou nastat dva případy:

- $\gamma'_1(u_0) \neq 0$ : Pak existuje otevřený interval  $J \subset I$  obsahující  $u_0$  tak, že na  $J$  platí  $\gamma'_1 \neq 0$ . Zároveň existuje  $k \in \mathbb{Z}$  tak, že

$$\tilde{\theta}(u) = k\pi + \arctan \frac{\gamma'_2(u)}{\gamma'_1(u)} \quad \forall u \in J.$$

Z tohoto vyjádření plyne diferencovatelnost  $\tilde{\theta}$  na  $J$ , tudíž i v  $u_0$ .



- $\gamma'_1(u_0) = 0$ : Pak z regularity křivky existuje otevřený interval  $J \subset I$  tak, že na  $J$  platí  $\gamma'_2 \neq 0$ . Zároveň existuje  $k \in \mathbb{Z}$  tak, že

$$\tilde{\theta}(u) = k\pi + \operatorname{arccotg} \frac{\gamma'_1(u)}{\gamma'_2(u)} \quad \forall u \in J.$$

Z tohoto vyjádření opět plyne diferencovatelnost  $\tilde{\theta}$  na  $J$ , tudíž i v  $u_0$ .

Derivací  $\tilde{\theta}$  podle  $u$  získáme v obou případech stejný výraz:

$$\tilde{\theta}' = \frac{\gamma'_1 \gamma''_2 - \gamma'_2 \gamma''_1}{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2} = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^2}.$$

Dále  $s(u)$  představuje opět délku oblouku, tedy  $s(u) = \int_0^u |\gamma'(\hat{u})| d\hat{u}$  pro všechna  $u \in [0, 1]$ . Celkem tak dostaneme

$$\tilde{\kappa}(u) = \tilde{\theta}'(u) (s'(u))^{-1} = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^2} \frac{1}{|\gamma'|} = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3}.$$

□

Pro uzavřené křivky (bez újmy na obecnosti definované na  $[0, 1]$ ) platí pro  $k \in \mathbb{Z}$  rovnost

$$\tilde{\theta}(1) - \tilde{\theta}(0) = 2k\pi.$$

Důvodem je rovnost  $\vec{T}(1) = \vec{T}(0)$ . Pro Jordanovu křivku však  $k$  může nabývat jen jistých hodnot. Tento poznatek je dokázán následující větou o „turning tangents“ neboli o „otáčejících se tečnách“:

**Věta 1.2.4 (Theorem of Turning Tangents, [34])** *Pro Jordanovu regulární křivku platí, že  $k = \pm 1$ .*

Důkaz lze nalézt v [34] v rámci důkazu tzv. Gauss-Bonnetovy věty.

Intuitivně tento poznatek znamená, že tečný vektor Jordanovy křivky „oběhne“ kruh právě jednou.

Pokud  $k = 1$ , Jordanovu křivku nazveme kladně orientovanou, jinak záporně orientovanou. Pokud je  $\gamma(u)$  kladně orientovaná, pak křivka  $\tilde{\gamma}(u) := \gamma(1 - u)$  je záporně orientovaná a naopak. To si nyní dokážeme. Nechť  $\theta(u)$  je tečný úhel křivky  $\gamma$ . Platí

$$\frac{\tilde{\gamma}'}{|\tilde{\gamma}'|}(u) = -\frac{\gamma'}{|\gamma'|}(1 - u) = \left( -\cos(\theta(1 - u)), -\sin(\theta(1 - u)) \right) = \left( \cos(\hat{\theta}(u)), \sin(\hat{\theta}(u)) \right),$$

kde  $\hat{\theta}(u) := \pi + \theta(1 - u)$  je tečný úhel křivky  $\tilde{\gamma}$ . Pak zřejmě platí

$$\hat{\theta}(1) - \hat{\theta}(0) = -(\theta(1) - \theta(0)).$$

**Věta 1.2.5** *Pro  $\Gamma$  kladně orientovanou Jordanovu křivku platí*

$$\int_{\Gamma} \kappa(s) ds = 2\pi,$$

*pro záporně orientovanou*

$$\int_{\Gamma} \kappa(s) ds = -2\pi.$$

**Důkaz:** Nechť je opět křivka definována na  $[0, 1]$ . Pro  $\tilde{\theta}(u)$  tečný směrový úhel kladně orientované Jordanovy křivky platí  $\tilde{\theta}(1) - \tilde{\theta}(0) = \pm 2\pi$ , jak bylo rozebráno výše. Dále lze upravit

$$\tilde{\theta}(1) - \tilde{\theta}(0) = \int_0^1 \tilde{\theta}'(u) du = \int_{\Gamma} \theta'(s) ds = \int_{\Gamma} \kappa(s) ds.$$

Tudíž křivost kladně orientované Jordanovy křivky splňuje

$$\int_{\Gamma} \kappa(s) ds = 2\pi$$

a křivost záporně orientované splňuje

$$\int_{\Gamma} \kappa(s) ds = -2\pi.$$

□

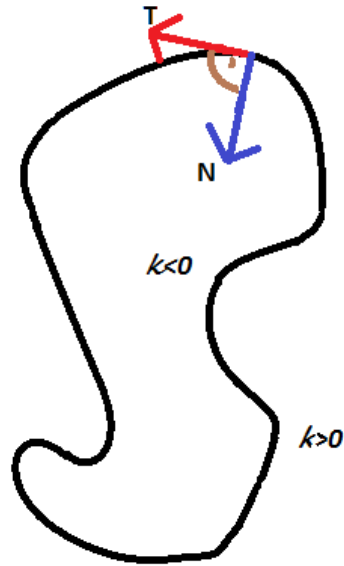
V celé části jsme zatím nepřemýšleli o znaménku křivosti. Mějme stále Jordanovu křivku. Nezávisle na orientaci křivky platí, že na konvexních částech křivky míří vektor  $\partial_s \vec{T}$  do vnitřku křivky, na nekonvexních částech ven z křivky. Pro kladně orientovanou křivku vektor  $\vec{N}$  směřuje vždy do vnitřku křivky. Z frenetova vzorce (1.9) tedy platí, že křivost  $\kappa$  je nezáporná na konvexních částech a záporná na nekonvexních (viz obrázek 1.3). Pro záporně orientovanou křivku míří vektor  $\vec{N}$  vždy ven z křivky, takže křivost bude na konvexních částech nekladná a na nekonvexních kladná. Pro nás důležitý poznatek je, že vektor  $\kappa \vec{N}$  míří vždy do vnitřku křivky na konvexních částech a vždy ven z křivky na nekonvexních částech.

## Prostorové křivky

Pro křivky v prostoru se kromě normálového a tečného vektoru zavádí ještě tzv. **binormála**. Kromě křivosti se navíc definuje **torze** křivky. Pro základy diferenciální geometrie prostorových křivek viz [37].

**Definice 10** Pro přirozeně parametrizovanou křivku  $\gamma \in C^2(I)$  v prostoru definujeme v každém bodě tečný, normálový a binormálový vektor  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  vztahy:

$$\begin{aligned} \vec{T} &:= \gamma', \\ \vec{N} &:= \frac{\gamma''}{|\gamma''|}, \\ \vec{B} &:= \vec{T} \times \vec{N}. \end{aligned}$$



Obrázek 1.3: Orientace vektorů  $\vec{T}$  a  $\vec{N}$  a znaménko křivosti  $\kappa$  v případě kladně orientované Jordanovy křivky

Tyto vektory jsou jednoznačně definovány všude, kde  $\gamma'(s)$  a  $\gamma''(s)$  jsou lineárně nezávislé (jinak by jejich vektorový součin byl nulový). Trojice  $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$  se nazývá **Frenetův rámeček** křivky v prostoru [37].

Křivost  $\kappa$  definujeme následujícím způsobem:

$$\frac{d}{ds}\vec{T} = \gamma'' = |\gamma''|\vec{N} = \kappa\vec{N}.$$

Tedy  $\kappa = |\gamma''|$ . Dále lze však zavést veličinu  $\tau$  nazývanou se **torze**, která představuje lokální rovinnost nebo nerovinnost křivky.

**Věta 1.2.6** Mějme přirozeně parametrizovanou prostorovou křivku  $\gamma \in C^3(I)$ . Na intervalu, kde není křivost nulová existuje jednoznačně funkce  $\tau$  tak, že

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}.$$

Tyto vztahy se nazývají **Frenetovy vzorce** pro prostorovou křivku.

**Důkaz:** Víme, že  $\frac{d}{ds}\vec{T} = \kappa\vec{N}$ . Pokud zderivujeme rovnost  $\vec{B} \cdot \vec{B} = 1$ , zjistíme, že  $\frac{d}{ds}\vec{B}$  je rovna lineární kombinaci tečného a normálového vektoru. Tedy existují konstanty  $\beta_1, \beta_2$  tak, že

$$\frac{d}{ds}\vec{B} = \beta_1\vec{T} + \beta_2\vec{N}.$$

Rovnost přenásobíme vektorem  $\vec{T}$  a upravíme s použitím per partes

$$\beta_1 = \frac{d}{ds}\vec{B} \cdot \vec{T} = \frac{d}{ds}(\vec{B} \cdot \vec{T}) - \vec{B} \cdot \frac{d}{ds}\vec{T} = -\kappa\vec{B} \cdot \vec{N} = 0.$$

Z čehož vyplývá, že  $\frac{d}{ds}\vec{B} = \beta_2\vec{N}$ .

Analogicky zderivováním rovnosti  $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$  zjistíme, že  $\frac{d}{ds}\vec{N}$  je rovno lineární kombinaci vektorů  $\vec{T}$  a  $\vec{B}$ . Existují tedy čísla  $\alpha_1, \alpha_2$  tak, že

$$\frac{d}{ds}\vec{N} = \alpha_1\vec{T} + \alpha_2\vec{B}.$$

Po přenásobení tečným vektorem zjistíme, že  $\alpha_1 = -\kappa$ , přenásobením binormálou dostaneme:

$$\alpha_2 = \frac{d}{ds}\vec{N} \cdot \vec{B} = -\vec{N} \cdot \frac{d}{ds}\vec{B} = -\beta_2.$$

Označíme  $\tau := \alpha_2 = -\beta_2$ . To už je hledaná funkce a díky předchozí konstrukci jsou splněny Frenetovy vzorce.  $\square$

### 1.3 Hausdorffova metrika

Nakonec představíme nástroj k porovnávání dvou kompaktních množin v metrickém prostoru, pro naše potřeby postačí předpokládat prostor  $\mathbb{R}^n$ .

**Definice 11** *Nechť  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $M \subset \mathbb{R}^n$  neprázdná kompaktní množina. Pak vzdáleností bodu  $x$  od množiny  $M$  definujeme jako*

$$\rho(x, M) := \min\{|x - y| \mid y \in M\}.$$

*Dále pro  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  kompaktní neprázdné definujeme*

$$u(M, N) := \max\{\rho(x, N) \mid x \in M\}.$$

*Hausdorffovu metriku pak definujeme vztahem:*

$$\rho(M, N) := \max\{u(M, N), u(N, M)\}.$$

Takto definované  $\rho$  je skutečně metrikou na kompaktních množinách. Hausdorffova metrika je nulová pouze tehdy, pokud jsou poměřované množiny totožné. Při posunutí kompaktní množiny je Hausdorffova metrika původní a posunuté množiny rovna velikosti posunu.

Pro nás je užitečná při porovnávání různých křivek (což jsou kompaktní množiny), například můžeme na základě Hausdorffovy metriky rozhodnout o konvergenci vyvíjející se křivky. Více informací o zavedení Hausdorffovy metriky lze nalézt v [42].

## Kapitola 2

# Úlohy dynamiky křivek

V této kapitole si nejdříve představíme různé druhy úloh týkající se dynamiky křivek. Pak se zaměříme na vývoj křivek v rovině podle křivosti. Nejdříve si představíme tuto řešenou úlohu v obecném tvaru, následně uvedeme a vysvětlíme dva základní způsoby řešení. Dále představíme některé teoretické výsledky. Nakonec představíme několik aplikací této dynamiky.

### 2.1 Druhy dynamiky křivek

Kromě pohybu podle střední křivosti existuje mnoho jiných dynamik, některé v této části uvedeme.

#### Pohyb ve směru normály v prostoru

Málo probádanou úlohou je pohyb prostorových křivek podle rovnice analogické k (2.9)

$$\partial_t \gamma = \kappa \vec{N}, \quad \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0, \quad (2.1)$$

kde normálový vektor  $\vec{N}$  je definovaný pomocí Frenetova rámce v prostoru. Na rozdíl od rovinných křivek mohou být prostorové topologicky velmi komplikované a zároveň prosté. Jak bylo zmíněno v předchozí části, vývoj jistého druhu prostorových křivek (ramp) podle (2.1) byl využit ke studiu singularit vývoje rovinné křivky podle (2.9), konkrétně v [3].

#### Pohyb ve směru binormály

Jiná volba pohybu křivek v prostoru je pohyb podle křivosti ve směru binormály. Tedy vývoj prostorové křivky  $\gamma(u, t)$  se řídí zákonem

$$\partial_t \gamma = \kappa \vec{B} = \vec{T} \times \kappa \vec{N} = \partial_s \gamma \times \partial_{ss} \gamma.$$

Jednou z vlastností této dynamiky je, že délka uzavřené křivky se při tomto pohybu nemění. Při vytváření vířů v přírodě dochází k dynamice tohoto typu. Podrobnější informace k pohybu prostorových křivek ve směru normály i binormály lze nalézt v [29].

## Willmorův tok

Kromě pohybu nadploch v  $\mathbb{R}^n$  podle střední křivosti, kdy se minimalizuje celkový uzavřený objem, existuje také tzv. Willmorův tok. Jakožto gradientní tok minimalizuje celkový kvadrát střední křivosti nadplochy. Rovnice pro normálovou rychlost pak vypadá následovně:

$$v = -\Delta_{\Gamma}\kappa_M - \frac{1}{2}\kappa_M^3 + 2\kappa_G\kappa_M,$$

kde

- Pro  $\nabla_{\Gamma}f := \nabla f - \langle \nabla f, \vec{N} \rangle \vec{N}$  projekci gradientu funkce  $f$  na tečný prostor nadplochy  $\Gamma$  je definován Laplace-Beltramiho operátor  $\Delta_{\Gamma}f := \nabla_{\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma}f$
- $\kappa_G$  je Gaussova křivost

Willmorův tok byl využit například pro vysvětlení bikonkávního tvaru červených krvinek, má význam i při zpracování obrazu. Jednou z prací, zabývajících se Willmorovým tokem, je například [30].

## Hyperbolický pohyb podle střední křivosti

Rovnice pro takový pohyb vychází z vlnové rovnice a nikoli z rovnice vedení tepla. Využívá se ke zkoumání oscilací na rozhraních, které vznikají například při růstu některých krystalů. Nejjednodušší verze rovnice pro vyvíjející se rovinnou křivku  $\gamma(u, t) : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  má tvar

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = \kappa \vec{N}, \quad \gamma(u, 0) = \gamma_0(u), \quad \partial_t \gamma(u, 0) = v_0(u) \vec{N}_0,$$

kde  $v_0(u)$  je počáteční rychlost počáteční křivky  $\gamma_0$ . Obecnější tvar je například

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa \vec{N} + f \vec{N}$$

se stejnými počátečními podmínkami. Pro bližší informace viz [14].

## 2.2 Pohyb podle střední křivosti

Mějme teď v čase se měnící uzavřenou regulární nadplochu  $\Gamma(t) \subset \mathbb{R}^n$ . Každý bod  $x \in \Gamma(t)$  je tak funkcí od času  $x = x(t)$ . Rychlost  $\vec{v}$  tohoto bodu je pak dána časovou derivací  $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)$ . Normálovou rychlostí rozumíme  $v = \vec{v} \cdot \vec{N}$ , kde  $\vec{N}$  je normálový vektor. Obecně pohyb podle střední křivosti spočívá v pohybu každého bodu uzavřené nadplochy v  $\mathbb{R}^n$  v normálovém směru rychlostí

$$v = \kappa_M + f, \tag{2.2}$$

kde  $\kappa_M$  je střední křivost  $f$  vnější síla obecně závislá na lokálních parametrech (např. na poloze bodu  $x$  v  $\mathbb{R}^n$ ) nebo globálních parametrech (např. objem uzavřené nadplochy).

Tento pohyb se nazývá **Mean Curvature Flow** (dále jen MCF). Význam pohybu podle MCF bez pravé strany  $f$  je co nejrychlejší ztráta objemu ohraničeného nadplochou. Pro uvedení do této dynamiky v  $\mathbb{R}^n$  viz například [25].

V  $\mathbb{R}^2$  jsou tyto nadplochy křivky a střední křivost se shoduje s již definovanou křivostí  $\kappa$ . Dále budeme předpokládat pouze vývoj křivek. V rovině je tedy úloha (2.2) přepsána na

$$v = \kappa + f. \quad (2.3)$$

V případě  $f \equiv 0$  ztráta obsahu vnitřku křivky způsobuje zkracování délky křivky, proto se v  $\mathbb{R}^2$  pohyb

$$v = \kappa \quad (2.4)$$

nazývá **Curve Shortening Flow** (dále CSF), neboli křivku zkracující pohyb. Dynamika takového pohybu je matematicky důkladně prostudována, například dynamika jednoduchých uzavřených křivek je rozebrána v [18], [20], [21]. Otázkou vzniku singularit během vývoje se pak zabývali například [3], [13].

## 2.3 Přímé a nepřímé metody řešení

Existuje více přístupů k řešení rovnice (2.3). Popisem těch nejpoužívanějších se zabývá [17]. Základní dělení metod je pak na přímé a nepřímé metody. Podle matematického přístupu se také liší způsoby numerických výpočtů. Tato práce se převážně zaměřuje na přímé metody řešení.

- **Přímé metody** hledají řešení (2.3) jako jisté zobrazení  $\gamma(u, t) : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  představující vyvíjecí se křivku podle odvozené rovnice (2.11) až do maximálního času  $T$ . Numerická schémata vycházející z tohoto přístupu jsou numericky nenáročná, ale většinou ne příliš spolehlivá při použití výrazné síly  $f$ . Stabilitu schémat lze vylepšit tzv. redistribucí, kdy se během výpočtu přesouvají body představující křivku. Přímou metodu řešení a různé možnosti tangenciální redistribuce studoval například Ševčovič v [36] a Ševčovič, Mikula v [27].
- **Nepřímé metody** nehledají přímo předpis pro křivku, ale převádí úlohu do vyšší dimenze. Mezi nepřímé metody patří tzv. **vrstevnicová metoda**, která zavádí funkci na  $\mathbb{R}^2$  tak, že body, kde je funkce nulová, představují aktuální křivku. Pro tuto v čase se vyvíjecí funkci se pak řeší odvozené parciální diferenciální rovnice (2.7). Numericky je tato metoda náročnější, ale snadno se vypořádá s topologickými změnami během vývoje, narozdíl od přímých metod. Vrstevnicová metoda je český název pro tzv. level-set metodu. Užitím level-set metod se zabývá Sethian v [35], využití těchto metod v praxi je detailně rozebráno v knize [31]. Metoda podobná vrstevnicové se nazývá **metoda fázového pole**.

### 2.3.1 Vrstevnicová metoda

V této části představíme odvození jisté parciální diferenciální rovnice z úlohy (2.3) pomocí vrstevnicové metody.

Namísto hledání předpisu pro vývoj počáteční Jordanovy křivky  $\Gamma_0$  ve tvaru  $\gamma = \gamma(t, u)$ , hledáme předpis pro jisté zobrazení  $g : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  je oblast. Funkce  $g$  určuje vyvíjecí se křivku  $\Gamma_t$  způsobem

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(t, x) = 0\}, \quad t \in [0, T].$$

Tedy křivka je v každém čase zadána implicitně. Předpokládáme, že  $g$  je spojitě diferencovatelná podle času a alespoň dvakrát spojitě diferencovatelná v prostorových souřadnicích. Ze spojitosti pak platí, že na vnitřku a vnějšku křivky  $\Gamma_t$  nemění  $g$  znaménko. Dále požadujeme, aby se na  $\text{int}\Gamma_t$  a  $\text{ext}\Gamma_t$  lišilo znaménko  $g$ . Účelem je zajistit, aby na  $\Gamma_t$  platilo  $\nabla g \neq 0$ . Takové  $g$  nazveme vrstevnicová nebo také level-set funkce. Množina bodů, kde  $g$  nabývá nějaké konstantní hodnoty  $c$ , se nazývá vrstevnice.

Nyní vyjádříme evoluční rovnici, kterou  $g$  musí splňovat, pokud má na  $\Gamma_t$  platit  $v = \kappa + f$ . Zderivujeme podle času vztah

$$g(t, x(t)) = c,$$

kde  $x(t)$  je časový vývoj libovolného pevného bodu z množiny  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(0, x) = c\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Dostaneme rovnici

$$\partial_t g + \nabla g \cdot \dot{x} = 0. \quad (2.5)$$

Tato rovnice musí být splněna všude na  $[0, T] \times \Omega$ . Pro  $c = 0$  je bod  $x(t) \in \Gamma_t$ , proto musí platit  $\dot{x} = (\kappa + f)\vec{N}$ . Nyní je třeba odvodit vyjádření  $\kappa$  a  $\vec{N}$  pomocí funkce  $g$ .

Pokud dosadíme parametrické řešení  $\gamma(u, t)$  namísto  $x(t)$ , bude platit

$$g(t, \gamma(u, t)) = 0.$$

Po zderivování podle parametru  $u$

$$\partial_u g(t, \gamma(u, t)) = \nabla g \cdot \partial_u \gamma = |\partial_u \gamma| |\nabla g \cdot \vec{T}| = 0.$$

Z toho vyplývá, že  $\nabla g$  je násobkem  $\vec{N}$  a tudíž platí

$$\vec{N} = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|}. \quad (2.6)$$

Abychom zachovali konvenci o směru vektoru  $\vec{N}$  (do vnitřku křivky), je třeba zohlednit znaménko funkce  $g$  na vnitřku a vnějšku  $\Gamma_t$ . Pokud  $g > 0$  na  $\text{int}\Gamma_t$  a tudíž  $g < 0$  na  $\text{ext}\Gamma_t$ , pak  $g$  roste směrem dovnitř křivky, což odpovídá požadovanému směru normálového vektoru. Proto v takovém případě bude platit  $\vec{N} = +\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$ , v opačném případě  $\vec{N} = -\frac{\nabla g}{|\nabla g|}$ .

Nalezení obecného předpisu pro křivost je komplikovanější, vyjde však najevo, že pro naši konvenci platí

$$\kappa(t, x) = -\nabla \cdot \vec{N}(t, x) = \mp \nabla \cdot \left( \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \right) (t, x) \text{ pro } x \in \Gamma_t.$$

Nyní ověříme správnost tohoto tvaru křivosti. Mějme pro pevné  $t$  křivku  $\Gamma_t$ . Z věty o implicitních funkcích ji lze lokálně reprezentovat grafem. Tedy  $\gamma(x) = (x, \varphi(x))$  (popřípadě  $\gamma(y) = (\psi(y), y)$ , postup by byl analogický). Pak po dosazení do vzorce (1.12) dostaneme

$$\kappa = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{|\gamma'|^3} = \frac{\varphi''}{\sqrt{1 + \varphi'^2}^3}.$$

Zároveň

$$-\nabla \cdot \vec{N}(x, y) = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}} \begin{pmatrix} -\varphi'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -\partial_x \left( \frac{-\varphi'(x)}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}} \right) - \partial_y \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}} \right),$$



kde předpokládáme

$$\vec{N}(x, y) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}} \begin{pmatrix} -\varphi'(x) \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

jako vektorové pole definované na  $\mathbb{R}^2$ . Výraz u  $\partial_y$  nezávisí na  $y$ , proto je nulový. Úpravou zbyvajících členů pak na  $\Gamma_t$  získáme

$$-\nabla \cdot \vec{N} = \frac{\varphi''}{\sqrt{1 + \varphi'^2}^3} = \kappa.$$

Jedním z běžně užívaných tvarů počáteční podmínky na  $g$  je funkce vzdálenosti od zadané počáteční křivky:

$$\begin{aligned} g(0, x) &= \rho(x, \Gamma_0) && \text{na int}(\Gamma_0), \\ g(0, x) &= -\rho(x, \Gamma_0) && \text{na ext}(\Gamma_0), \end{aligned}$$

kde  $\rho(x, \Gamma_0)$  značí vzdálenost bodu  $x$  od křivky  $\Gamma_0$ . Pak znaménko v (2.6) bude +.

Rovnice (2.5) pak přejde na tvar

$$\partial_t g - \nabla \left( \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \right) \cdot \nabla g + f \frac{\nabla g \cdot \nabla g}{|\nabla g|} = 0$$

a po úpravě vznikne již výsledná **vrstevnicová** nebo také **level-set** rovnice pro funkci  $g$

$$\partial_t g - |\nabla g| \nabla \left( \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \right) + |\nabla g| f = 0. \quad (2.7)$$

Tato rovnice není jediná možná. Existuje mnoho modifikací, například regularizovaná verze. Jednou z prací, zaměřujících se na využití level-set metod v obrazovém zpracování je [35], pak například K. Mikula v [26]. Level-set metody jsou vhodné i při studiu dislokací [23].

### 2.3.2 Přímá metoda

Jak již bylo zmíněno, řešení přímou metodou bylo studováno například v [27]. Zaměříme se nyní na nalezení řešení úlohy (2.3) pomocí přímé metody. Předpokládejme řešení ve tvaru na čase závislé parametricky zadané křivky  $\gamma(u, t) : S^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tedy  $\Gamma_t = \{\gamma(u, t) \mid u \in S^1\}$ . Pak každý bod  $x(t) \in \Gamma_t$  můžeme napsat jako  $x(t) = \gamma(u, t)$  pro  $u$  pevné, proto lze následujícím způsobem upravit zákon (2.3):

$$v = \dot{x} \cdot \vec{N} = \partial_t \gamma \cdot \vec{N} = \kappa + f.$$

Vektor  $\vec{N}$  míří do vnitřku křivky. Všimněme si, že rovnice (2.3) neomezuje pohyb bodu  $x(t)$  v tangenciálním tvaru, čehož se využívá při numerických výpočtech. Nyní však předpokládejme pohyb pouze v normálovém tvaru. Z tohoto předpokladu a doplněním počáteční podmínky získáme úlohu

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma &= (\kappa + f) \vec{N} && \text{na } S^1 \times (0, T), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{na } S^1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

popřípadě pro  $f = 0$  úlohu

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma &= \kappa \vec{N} && \text{na } S^1 \times (0, T), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{na } S^1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

kde  $\gamma_0$  představuje počáteční uzavřenou křivku. Z Frenetova vzorce (1.9) vyplývá, že  $\kappa \vec{N} = \partial_s \vec{T} = \partial_{ss} \gamma$ , kde  $s$  je přirozený parametr. Proto lze úlohu (2.8) přepsat v přirozené parametrizaci

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma &= \partial_{ss} \gamma + f \vec{N} && \text{na } \{(s, t) \mid t \in (0, T), s \in (0, L(t))\}, \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{na } (0, L(0)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

V tomto tvaru je patrná podobnost s rovnicí vedení tepla. Ve skutečnosti má tato rovnice také podobně vyhlazující efekt na počáteční podmínku.

Diferenciály  $ds$  a  $dt$  však nejsou nezávislé, protože délka  $L(t)$ , a tudíž i diferenciál délky, se v čase mění. Naproti tomu diferenciály  $du$  a  $dt$  nezávislé jsou. Záměna derivací podle  $t$  a podle  $u$  je tedy ekvivalentní.

Pro vztah mezi přirozeným parametrem a parametrem  $u$  platí  $\partial_s = \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u$ , z čehož plyne

$$\partial_{ss} \gamma = \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \left( \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right).$$

Pak evoluční rovnici (2.10) prepíšeme na numericky využitelnou formu

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma &= \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \left( \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right) + f \frac{(\partial_u \gamma)^\perp}{|\partial_u \gamma|} && \text{na } S^1 \times (0, T), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{na } S^1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde  $(\partial_u \gamma)^\perp$  značí vektor kolmý k vektoru  $\partial_u \gamma$  tak, aby orientace tohoto vektoru odpovídala vzájemné orientaci vektorů  $\vec{T}$  a  $\vec{N}$  dle naší konvence. Tedy aby platilo  $\det(\vec{T}, \vec{N}) = 1$ .

Pro  $f = 0$  má pak tato úloha tvar

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma &= \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \left( \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right) && \text{na } S^1 \times (0, T), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{na } S^1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

## Gradientní tok

Nyní ukážeme jedno z možných odvození rovnice (2.12) pomocí gradientního toku [39]. Dokážeme, že takový pohyb nejrychleji zmenšuje délku, proto se nazývá Curve Shortening Flow.

Definujme funkcionál  $\mathcal{F}(\vec{X})$  přiřazující každé uzavřené regulární křivce  $\vec{X} : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  její délku, tedy

$$\mathcal{F}(\vec{X}) = \int_{\Gamma} ds = \int_0^1 |\vec{X}_u| du,$$

kde  $\vec{X}_u = \frac{d}{du} \vec{X}$ . Naším cílem je nalézt obdobu gradientu funkce pro funkcionál  $\mathcal{F}$ . Mějme diferencovatelnou funkci  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Pak pro derivaci ve směru vektoru  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{y}} = \langle \nabla h, \vec{y} \rangle,$$

jelikož v každém bodě je  $\nabla h$  lineární funkcionál na  $\mathbb{R}^n$ . Z vlastností skalárního součinu plyne, že směrová derivace podle  $\vec{y}$  je největší možná ze všech směrů stejné velikosti, pokud

je  $\vec{y}$  kladným násobkem  $\nabla h$ . Naopak je nejmenší, pokud je  $\vec{y}$  jeho záporným násobkem.  $\mathcal{F}$  nepůsobí na prostoru  $\mathbb{R}^n$ , ale na prostoru uzavřených regulárních křivek a s jiným skalárním součinem. Hledáme ekvivalent gradientu pro  $\mathcal{F}$ , který bude lineárním funkcioálem na prostoru křivek.

Mějme nyní libovolnou uzavřenou regulární křivku  $\vec{Y}(u)$  a definujme pro  $p$  z nějakého okolí nuly

$$g(p) := \mathcal{F}(\vec{X} + p\vec{Y})$$

a najděme  $g'(0)$ , tedy vlastně derivaci  $\mathcal{F}$  ve směru  $\vec{Y}$ . Příímým výpočtem s použitím per partes dostaneme

$$g'(0) = \int_0^1 \frac{d}{dp} \left( |\vec{X}_u + p\vec{Y}_u| \right) \Big|_{p=0} du = \int_0^1 \frac{\vec{X}_u \cdot \vec{Y}_u}{|\vec{X}_u|} du = \left[ \frac{\vec{X}_u}{|\vec{X}_u|} \vec{Y} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{du} \left( \frac{\vec{X}_u}{|\vec{X}_u|} \right) \vec{Y} du.$$

Po využití faktu, že  $\vec{Y}, \vec{X}$  jsou uzavřené křivky, a po převodu integračního parametru na přirozený získáme

$$g'(0) = \int_{\Gamma} \underbrace{-\frac{1}{|\vec{X}_u|} \frac{d}{du} \left( \frac{\vec{X}_u}{|\vec{X}_u|} \right)}_{\vec{G}(\vec{X})} \vec{Y} ds = \langle \vec{G}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle.$$

Lineární funkcioál  $\vec{G}(\vec{X})$  představuje hledaný gradient funkcioálu  $\mathcal{F}$ . Dosaďme teď  $\vec{X}$  s časovou závislostí:

$$L(t) = \mathcal{F}(\vec{X}(t)).$$

Po zderivování podle času získáme

$$\dot{L} = \int_0^1 \partial_t |\vec{X}_u| du = \int_0^1 \frac{\vec{X}_u \cdot \vec{X}_{u,t}}{|\vec{X}_u|} du = - \int_0^1 \partial_u \left( \frac{\vec{X}_u}{|\vec{X}_u|} \right) \vec{X}_t du = \langle \vec{G}(\vec{X}), \vec{X}_t \rangle.$$

Derivace délky je rovna směrové derivaci ve směru  $\partial_t \vec{X}$  a tudíž je nejnižší možná, pokud

$$\dot{L} = -\alpha \langle \vec{G}(\vec{X}), \vec{G}(\vec{X}) \rangle$$

pro nějaké  $\alpha > 0$ . Pro volbu  $\alpha = 1$  má dynamika tvar

$$\partial_t \gamma = -\vec{G}(\gamma).$$

## 2.4 Vlastnosti řešení

V této části prostudujeme některé vlastnosti, které má řešení úlohy (2.12), tedy řešíme pouze pohyb CSF (po zapsání v přirozené parametrizaci)

$$\partial_t \gamma = \partial_{ss} \gamma, \quad \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0.$$

Později si představíme konkrétní nenulové silové funkce: funkci zajišťující pohyb zachovávající obsah a lineární funkci vzdálenosti od počátku.

Následující tvrzení jsou v obecnějším tvaru uvedena i v [36].

Jelikož se křivka v čase zkracuje, přirozený parametr křivky  $s$  není nezávislý na čase  $t$ . Jejich derivace nejsou tedy záměnné, jak již bylo zmíněno výše. Následující věta proto řeší vztah mezi těmito diferenciály.

**Věta 2.4.1** *Pro derivaci podle přirozeného parametru  $\partial_s$  a podle času  $\partial_t$  platí:*

$$\partial_t \partial_s = \partial_s \partial_t + \kappa^2 \partial_s. \quad (2.13)$$

**Důkaz:** Pro vztah mezi derivací podle obecného parametru  $\partial_u$  a přirozeného parametru  $\partial_s$  platí

$$\partial_s = \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u.$$

Tento vztah zderivujeme podle času při značení  $w = |\partial_u \gamma|$ . Přitom využijeme záměnnosti derivací podle  $t$  a  $u$ , tedy vztahu  $\partial_t \partial_u = \partial_u \partial_t$ :

$$\partial_t \partial_s = \partial_t \left( \frac{1}{w} \partial_u \right) = \frac{1}{w} \partial_t \partial_u - \frac{1}{w^2} (\partial_t w) \partial_u = \partial_s \partial_t - \frac{1}{w} (\partial_t w) \partial_s.$$

Je tedy třeba vypočítat výraz  $\partial_t w$ . K tomu je potřeba vyjádření pomocí skalárního součinu:

$$w^2 = |\partial_u \gamma|^2 = \langle \partial_u \gamma, \partial_u \gamma \rangle.$$

Po derivaci podle času upravíme:

$$\begin{aligned} 2w \partial_t w &= 2 \langle \partial_t \partial_u \gamma, \partial_u \gamma \rangle = 2 \langle \partial_u (\kappa \vec{N}), \partial_u \gamma \rangle = 2w^2 \langle \partial_s (\kappa \vec{N}), \vec{T} \rangle \\ &= 2w^2 \langle (\partial_s \kappa) \vec{N} - \kappa^2 \vec{T}, \vec{T} \rangle = -2w^2 \kappa^2. \end{aligned}$$

Pak vyjádříme  $\partial_t w$ :

$$\partial_t w = -w \kappa^2. \quad (2.14)$$

Po dosazení získáme tvrzení věty. □

**Věta 2.4.2** *Křivost řešení úlohy splňuje rovnici*

$$\partial_t \kappa = \partial_s^2 \kappa + \kappa^3. \quad (2.15)$$

**Důkaz:** Pro jednodušší zápis označme  $\vec{w} = \partial_u \gamma = |\partial_u \gamma| \vec{T}$ . Využitím vzorce pro křivost (1.12) dostaneme

$$\partial_t \kappa = \partial_t \frac{\det(\vec{w}, \partial_u \vec{w})}{|\vec{w}|^3} = -3\kappa |\vec{w}|^{-2} (\vec{w} \cdot \partial_t \vec{w}) + 2|\vec{w}|^{-3} \det(\partial_t \vec{w}, \partial_u \vec{w}) + |\vec{w}|^{-3} \partial_u \det(\vec{w}, \partial_t \vec{w}).$$

Výrazy, které se zde vyskytují, dále upravíme s použitím vztahu  $\partial_u \partial_t = \partial_t \partial_u$  a Frenetových vzorců. Dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \partial_t \vec{w} &= -|\vec{w}|^2 \kappa^2, \\ \det(\vec{w}, \partial_t \vec{w}) &= |\vec{w}|^2 \partial_s \kappa, \\ \det(\partial_t \vec{w}, \partial_u \vec{w}) &= -|\vec{w}| \partial_u (|\vec{w}|) \partial_s \kappa - |\vec{w}|^3 \kappa^3. \end{aligned}$$

Po dosazení a úpravách dojdeme k tvrzení věty. □

Dále se zaměříme na rovnici pro celkovou délku křivky a pro celkový obsah vnitřku Jordany křivky.

**Věta 2.4.3** *Platí*

$$\frac{dL(t)}{dt} = - \int_{\Gamma_t} \kappa^2 ds, \quad (2.16)$$

kde  $L(t)$  je celková délka vyvíjející se regulární uzavřené křivky v čase  $t$ .

**Důkaz:** Platí

$$\partial_t |\partial_u \gamma| = \frac{\partial_u \gamma \cdot \partial_t \partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} = \frac{\vec{w} \cdot \partial_t \vec{w}}{|\vec{w}|} = -|\partial_u \gamma| \kappa^2.$$

Po zintegrování obou stran podle  $u$  od 0 do 1 upravíme levou stranu

$$\int_0^1 \partial_t |\partial_u \gamma| du = \frac{d}{dt} \int_0^1 |\partial_u \gamma| du = \frac{d}{dt} L(t)$$

a pravou stranu

$$- \int_0^1 |\partial_u \gamma| \kappa^2 du = - \int_{\Gamma_t} \kappa^2 ds.$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

**Věta 2.4.4** *Pro  $A(t)$  obsah vnitřku vyvíjející se Jordanovy křivky podle CSF platí rovnice*

$$\frac{dA(t)}{dt} = -2\pi. \quad (2.17)$$

**Důkaz:**

V důkazu se využije Greenova věta: Pro pozitivně orientovanou Jordanovu křivku dává do souvislosti křivkový integrál druhého druhu s integrálem přes vnitřek křivky. Upravme  $A(t)$  pro kladně orientovanou křivku  $\gamma_t(u) := \gamma(u, t)$ ,  $t$  pevně:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\text{int}(\Gamma_t)} dS = \int_{\text{int}(\Gamma_t)} \left( \frac{d(x_1/2)}{dx_1} - \frac{d(-x_2/2)}{dx_2} \right) dS = \frac{1}{2} \oint_{\gamma_t} -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 \\ &= [x_1(u) = \gamma_1(u, t), x_2(u) = \gamma_2(u, t)] = \frac{1}{2} \int_0^1 \det(\gamma, \partial_u \gamma) du. \end{aligned}$$

V případě, že  $\gamma_t(u)$  je záporně orientovaná, pak  $\tilde{\gamma}_t(u) := \gamma_t(1-u)$  je kladně orientovaná. Pak analogicky k předchozímu postupu upravíme  $A(t)$ :

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2} \oint_{\tilde{\gamma}_t} -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \det(\tilde{\gamma}, \partial_u \tilde{\gamma}) du = -\frac{1}{2} \int_0^1 \det(\gamma, \partial_u \gamma) du. \end{aligned}$$

Po zderivování podle času dostaneme

$$\frac{dA(t)}{dt} = \pm \frac{1}{2} \int_0^1 \det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma) + \det(\gamma, \partial_t \partial_u \gamma) du. \quad (2.18)$$

Dále si pomůžeme následujícím výpočtem, kde využijeme uzavřenosti křivky:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\gamma, \partial_t \gamma)(1) - \det(\gamma, \partial_t \gamma)(0) \\ &= \int_0^1 \partial_u \det(\gamma, \partial_t \gamma) du \\ &= \int_0^1 \det(\partial_u \gamma, \partial_t \gamma) + \det(\gamma, \partial_u \partial_t \gamma) du. \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že

$$\int_0^1 \det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma) du = \int_0^1 \det(\gamma, \partial_u \partial_t \gamma) du.$$

Po dosazení do (2.18) se výraz upraví s využitím rovnice pro  $\partial_t \gamma$  a s využitím faktu, že  $\det(\vec{N}, \vec{T}) = -1$ . Nakonec se využije věta (1.2.5):

$$\frac{dA(t)}{dt} = \pm \int_0^1 \det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma) du = \pm \int_0^1 \det(\kappa \vec{N}, |\partial_u \gamma| \vec{T}) du = \mp \int_{\Gamma_t} \kappa ds = -2\pi.$$

□

Důsledkem této věty je netriviální poznatek, že křivky se vyvíjejí po určitý konečný čas. Konkrétně pro  $A^0$  počáteční obsah iniciální křivky platí, že řešení existuje pouze do času

$$T = \frac{A^0}{2\pi}.$$

**Věta 2.4.5** *Úloha (2.11) a úloha*

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma &= \frac{\partial_{uu} \gamma}{|\partial_u \gamma|^2} + f \vec{N} && \text{na } S^1 \times (0, T), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{na } S^1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

*se pro stejnou počáteční křivku a stejnou vnější funkci  $f$  liší pouze pohybem v tečném směru. Tedy řešení obou úloh mají stejný geometrický tvar.*

**Důkaz:** Jednoduše od sebe odečteme pravé strany obou rovnic.

$$\frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \left( \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right) + f \vec{N} - \frac{\partial_{uu} \gamma}{|\partial_u \gamma|^2} - f \vec{N} = \partial_u (|\partial_u \gamma|^{-1}) \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} = \partial_u (|\partial_u \gamma|^{-1}) \vec{T}.$$

Dále lze upravit poslední výraz:

$$\partial_u (|\partial_u \gamma|^{-1}) \vec{T} = -\frac{\partial_u \gamma \cdot \partial_{uu} \gamma}{|\partial_u \gamma|^3} \vec{T}.$$

□

### 2.4.1 Příklady nenulové funkce $f$

Funkce  $f$  v rovnici (2.11) může mít různorodý tvar. Zde uvedeme jen dva tvary funkce, které i přímo implementujeme.

#### Pohyb zachovávající obsah

Pomocí gradientního toku odvodíme určitý tvar funkce  $f$ , pokud požadujeme, aby vyvíjející se Jordanova křivka zachovávala obsah ohraničené oblasti. Taková dynamika má využití při modelování krystalů, ale i v obrazovém zpracování. „Area Preserving Flow“, jak se dynamika nazývá v angličtině, je hlavním tématem například v [24], [19], [15].

Tvar funkcionálu  $\mathcal{F}$  bude následující:

$$\mathcal{F}(\vec{X}) = \int_{\Gamma} ds + \lambda \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{|\vec{X}_u|} \det(\vec{X}, \vec{X}_u) ds,$$

kde reálné číslo  $\lambda$  představuje reálný parametr, který později určíme a výraz u tohoto parametru je obsah křivky  $\vec{X}$  (viz důkaz věty (2.4.4)). Další postup je analogický jako v případě  $\mathcal{F}(\vec{X}) = L(\vec{X})$ . Opět pro  $g(p) = \mathcal{F}(\vec{X} + p\vec{Y})$  hledáme  $g'(0)$ , během výpočtu využíváme per partes:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \int_0^1 -|\vec{X}| \kappa \vec{N} \cdot \vec{Y} + \frac{\lambda}{2} \left( \det(\vec{Y}, \vec{X}_u) + \det(\vec{X}, \vec{Y}_u) \right) du \\ &= \int_{\Gamma} -\kappa \vec{N} \cdot \vec{Y} ds + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 (X_{u,2}; -X_{u,1})^{\top} \cdot \vec{Y} + X_1 Y_{u,2} - X_2 Y_{u,1} du \\ &= \int_{\Gamma} \left( -\kappa \vec{N} + \frac{\lambda}{|\vec{X}_u|} (X_{u,2}; -X_{u,1})^{\top} \right) \cdot \vec{Y} ds = \int_{\Gamma} (-\kappa - \lambda) \vec{N} \cdot \vec{Y} ds. \end{aligned}$$

Tedy rovnice bude mít tvar  $\partial_t \gamma = (\kappa + \lambda) \vec{N}$ . Teď jen stačí určit  $\lambda$  z požadavku na konstantní obsah. Opět je zde využít důkaz věty (2.4.4):

$$0 = \frac{dA(t)}{dt} = \int_0^1 \det(\partial_t \gamma, \partial_u \gamma) du = \int_0^1 \det(\kappa \vec{N} + \lambda \vec{N}, |\partial_u \gamma| \vec{T}) du = - \int_{\Gamma_t} \kappa ds - \lambda L(\Gamma_t),$$

z čehož vyplývá, že

$$\lambda = -\frac{1}{L(\Gamma_t)} \int_{\Gamma_t} \kappa ds =: -\hat{\kappa},$$

kde  $\hat{\kappa}$  nazveme průměrnou křivostí podél křivky  $\Gamma$ . Rovnice pohybu tedy bude mít tvar

$$\partial_t \gamma = (\kappa - \hat{\kappa}) \vec{N}. \quad (2.20)$$

Pro Jordanovu křivku navíc víme, že  $\int_{\Gamma} \kappa ds = \pm 2\pi$ , což zjednodušuje numerický výpočet.

## Lineární funkce vzdálenosti od počátku

Volme funkci závislou na vzdálenosti od počátku  $r$  (polární souřadnice) vztahem

$$f(r) = L(r - r_0)$$

pro  $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $r_0 > 0$ . Jiný tvar této funkce by byl

$$f(\vec{x}) = L(|\vec{x}| - r_0),$$

ale to by byla funkce od dvou proměnných.

Teď zkoumejme, kdy bude normálová rychlost  $v$  menší nebo větší než nula, pokud se bude vyvíjet kladně orientovaný kruh. Jelikož  $f$  je radiálně symetrická, v každém čase bude řešením opět kruh. Připomeňme, že kladná normálová rychlost znamená pohyb směrem do vnitřku křivky. Po dosazení  $\gamma(u, t) = r(t)(\cos(u), \sin(u))$  do rovnice (2.11), kde využijeme  $\kappa(t) = \frac{1}{r(t)}$ , dostaneme vztah:

$$v = \kappa + L(r - r_0) = \frac{1}{r} + L(r - r_0).$$

Po položení rovno nule dostaneme kořeny

$$r_{+,-} = \frac{r_0}{2} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4} - \frac{1}{L}}.$$

Podle tvaru grafu kvadratické funkce  $Lr^2 - Lrr_0 + 1$  rozlišíme dva případy:

- $L < 0$ : Kruhy s poloměrem větším než  $r_+$  se budou dále rozpínat, normálová rychlost bude záporná, tedy pohyb bude ve směru směrem ven. Pro poloměr menší než  $r_+$  bude rychlost kladná a tedy se kruh stáhne do bodu. Kruh s poloměrem  $r_+$  se bude nacházet v nestabilní rovnovážné poloze.  $r_-$  bude záporné, takže takový případ netřeba rozebírat.
- $L > 0$ : kruhy s poloměrem větším než  $r_+$  se budou zmenšovat, dokud poloměr nebude rovný  $r_+$ , tím se dostane do stabilní rovnovážné polohy. Tedy se nezmenší do singularity. Kruh s poloměrem  $r_-$  bude v nestabilní rovnovážné poloze, tedy výpočetními chybami se snadno buď zmenší do bodu nebo se zvětší na větší stabilnější kruh s poloměrem  $r_+$ .

Případ  $L > 0$  je tedy zajímavější, jelikož vlastně zabráníme stažení do bodu a stabilizujeme řešení.

Pokud pro složitější kladně orientovanou Jordanovu křivku  $f$  není příliš „silná“ vůči  $\kappa$ , pak se křivka vyvine do kruhu. Jeho dynamika je pak probrána výše. Co se stane, když je síla příliš „silná“ lze vidět v poslední kapitole této práce na obrázku 4.8.

## 2.5 Teoretické výsledky

Pohyb křivek v rovině řízený vztahem  $v = \kappa$  je nejlépe prostudován. Například v [20] je dokázána lokální existence řešení pro hladkou počáteční křivku, převážně díky lokální podobnosti s rovnicí vedení tepla. Bylo také dokázáno, že řešení existuje tak dlouho, dokud je křivost omezená.



Jedním z hlavních teoretických výsledků týkajících se CSF je zjištění, že konvexní křivka v  $\mathbb{R}^2$  se stáhne do „kulatého bodu“.

**Věta 2.5.1 (Gage 1984, [18])** *Nechť  $\gamma_t$  je  $\forall t \in [0, T)$  konvexní uzavřená  $C^2$  rovinná křivka (tedy křivost je všude kladná v případě kladné orientace). Nechť  $(\gamma_t)_{t=0}^T$  vyhovují rovnici (2.9). Nechť pro obsah  $A(t)$  křivky  $\gamma_t$  platí*

$$\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0.$$

*Pak také platí, že*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{L^2(t)}{A(t)} = 4\pi,$$

*neboli isoperimetrický poměr se blíží hodnotě  $4\pi$ . Navíc pro normalizované křivky  $\eta_t := \sqrt{\frac{\pi}{A(t)}}\gamma_t$  platí, že vymezují konvexní oblast konvergující v Hausdorffově metrice k jednotkovému kruhu.*

K důkazu této věty se využila tzv. izoperimetrická nerovnost  $\frac{L^2}{A} \geq 4\pi$  a několik pomocných tvrzení. Jedno lemma si dokážeme.

**Lemma 2.5.2** *Nechť  $\gamma_t$  splňuje rovnici (2.9) na intervalu  $[0, T)$ . Pokud*

$$\lim_{t \rightarrow T} A(t) = 0,$$

*pak*

$$\liminf_{t \rightarrow T} L(t) \left( \int_{\gamma_t} \kappa^2 ds - \pi \frac{L(t)}{A(t)} \right) \leq 0.$$

**Důkaz:** Díky již dokázaným tvrzení o derivaci celkové délky a obsahu platí

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{L^2}{A} \right) = 2 \frac{L}{A} \frac{dL}{dt} - \frac{L^2}{A^2} \frac{dA}{dt} = \frac{-2}{A} L \left( \int_{\gamma_t} \kappa^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right).$$

Nechť pro spor je výraz  $\liminf$  větší než kladné  $\epsilon \forall t \in [t_1, T)$ . Pak

$$\frac{-2}{A} L \left( \int_{\gamma_t} \kappa^2 ds - \pi \frac{L}{A} \right) \leq \frac{-2\epsilon}{A} = -2\epsilon \left( \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} \right) \left( \frac{dA}{dt} \right)^{-1} = \frac{\epsilon}{\pi} \frac{d(\ln A)}{dt}.$$

Zintegrováním od  $t_1$  do  $t$ ,  $t_1 \leq t < T$  dostaneme

$$\frac{L^2}{A}(t) < \frac{L^2}{A}(t_1) + \frac{\epsilon}{\pi} \ln \frac{A(t)}{A(t_1)}.$$

Dále platí izoperimetrická nerovnost:

$$\frac{L^2}{A} \geq 4\pi,$$

kteřá vyplývá z poznatku, že pro pevný obsah křivky má kruh nejmenší délku, a naopak, pro pevnou délku má kruh nejvyšší obsah. Tedy levou stranu máme omezenou zdola, ale pravá strana pro  $t \rightarrow T^-$  diverguje do  $-\infty$ , což je spor. Tím je dokázané lemma.

□

Grayson dále dokázal, že i konkávní, ale Jordanova, křivka se v konečném čase stane konvexní. Tedy i takové křivky se stahují do kulatého bodu. Tvrzení pak zní:

**Věta 2.5.3 (Grayson 1987, [21])** *Nechť  $\gamma_0 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je regulární Jordanova křivka v rovině. Pak  $\gamma : S^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  splňující na svém definičním oboru*

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma &= \kappa \vec{N}, \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0\end{aligned}$$

*existuje. Navíc  $\gamma(\cdot, t)$  je hladká křivka  $\forall t$ , konverguje k bodu při  $t \rightarrow T$  a její limitní tvar při  $t \rightarrow T$  je kruh s konvergencí v  $C^\infty$  normě.*

Při zkoumání této úlohy Grayson využil možnosti lokálně reprezentovat regulární křivku grafem. Tím se úloha regularizuje podobně jako (2.22).

**Lemma 2.5.4** *Zvolme kartézské souřadnice v  $\mathbb{R}^2$ , aby křivka  $\gamma(\cdot, t_0)$  byla lokálně grafem. Dále necht'  $(\cdot)'$  značí derivaci podle souřadnice  $x$ . Pak časový vývoj souřadnice  $y$  při pevné souřadnici  $x$  je dán*

$$\partial_t y = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

*Navíc pro veličiny  $\theta(x, t) = \arctan(y'(x, t))$  a křivost  $\kappa(x, t)$  platí*

$$\partial_t \theta = \frac{\theta''}{1 + y'^2}, \quad \partial_t \kappa = \frac{\kappa''}{1 + y'^2} + \kappa^3.$$

**Důkaz:** Dosadíme do evoluční rovnice (2.12) křivku  $\gamma(x, t) = (x, y(x, t))$  parametrizovanou pomocí  $x$ . Tak dostaneme vektorovou rovnici

$$(0, \partial_t y) = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \left( (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0, y'') + \left( (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' \cdot (1, y') \right).$$

Rovnice pro první složku vektoru pak má tvar

$$0 = \left( (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \right)', \quad (2.21)$$

po dosazení do rovnice pro druhou složku tak dostaneme

$$\partial_t y = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Dále užitím řetězového pravidla dostaneme

$$\theta' = \frac{y''}{1 + y'^2} = \partial_t y$$

a pak záměnou derivací  $\partial_t y' = (\partial_t y)'$ :

$$\partial_t \theta = \frac{1}{1 + y'^2} (\partial_t y)' = \frac{\theta''}{1 + y'^2}.$$

Co se týče rovnice pro křivost, využijeme rovnici (2.15). Ta je v přirozené parametrizaci, proto je třeba využít vztah mezi derivací podle přirozeného parametru a podle obecného parametru (pro tento případ podle souřadnice  $x$ ):

$$\partial_{ss}\kappa = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \left( \frac{\kappa'}{\sqrt{1+y'^2}} \right)'.$$

Pak platí

$$\partial_t\kappa = \partial_{ss}\kappa + \kappa^3 = \frac{\kappa''}{1+y'^2} + \left( (1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' \frac{\kappa'}{\sqrt{1+y'^2}} + \kappa^3.$$

Díky vztahu (2.21) je prostřední člen nulový a tedy lemma je dokázané.  $\square$

Ne všechny regulární uzavřené křivky jsou však Jordanovy. Je tedy otázkou, jak se vypořádat se vznikem singularit (před stažením do bodu), kdy přestává existovat klasické řešení. Deckelnick v [13] zavedl tzv. **slabé řešení**, díky kterému lze řešení prodloužit i pro časy po vzniku singularit. Hlavním nástrojem je zkoumání regularizované verze úlohy (2.19) (pro  $f = 0$ ), která je globálně řešitelná:

$$\begin{aligned} \partial_t\gamma &= \frac{\partial_{uu}\gamma}{|\partial_u\gamma|^2 + \epsilon^2} && \text{na } S^1 \times (0, +\infty), \\ \gamma(\cdot, 0) &= \gamma_0 && \text{na } S^1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

kde  $\epsilon > 0$ .

Kromě Deckelnicka se teorií singularit zabývali i M. Grayson a S. Altschuler [3]. Ti využili převodu rovinného problému na prostorový. Tedy namísto zkoumání vývoje nejednoduché křivky v  $\mathbb{R}^2$  se studuje vývoj určitých jednoduchých (ale neuzavřených) křivek v  $\mathbb{R}^3$ .

**Definice 12 (Rampa)** *Prostorovou křivku, která stabilně roste (tedy její tečný vektor má vždy kladnou vertikální složku), nazveme **rampa**.*

Označme  $\Gamma_0(t)$  vyvíjející se regulární rovinnou křivku v rovině  $xy$  podle Curve Shortening Flow, která je nesingulární pro  $t \in [0, \omega_0]$ . Necht'  $\Gamma_\lambda(0), \lambda \in (0, 1]$  jsou periodické rampy, jejichž vertikální projekce do roviny  $xy$  je rovna  $\Gamma_0(0)$ , a jejich vertikální perioda je rovna  $\lambda$ . Pak necht'  $\Gamma_\lambda(t)$  se také vyvíjí dle CSF, tedy podle rovnice (2.1). Teď lze zformulovat hlavní větu shrnující princip použití těchto pomocných křivek.

**Věta 2.5.5 (Altschuler, Grayson 1992, [3])** *Užitím definic a značení výše platí:*

1.  $\Gamma_\lambda(t)$  existuje a je hladká  $\forall t > 0$ .
2. Limita pro  $\lambda \rightarrow 0$  křivek  $\Gamma_\lambda(t)$  je hladká křivka  $\forall t \in [0, \omega_n]$  až na konečně mnoho bodů  $\omega_i \in [\omega_0, \omega_n]$ . Dále platí, že  $\forall t \geq \omega_n$  je limitou bod.
3. Tyto limitní křivky se shodují s rovinným vývojem křivky  $\Gamma_0(t)$  mimo singularity.
4. Limitní rovinná křivka je nezávislá na výběru  $\Gamma_\lambda(0)$  a tudíž je jedinečná.

Singularitami v obecném MCF, kde se jedná o dynamiku uzavřených nadploch v  $\mathbb{R}^n$  se zabývá práce [12].

## 2.6 Motivace a aplikace

### 2.6.1 Fázové přechody a tvorba krystalů

Růst krystalů je druh spontánního utváření forem v přírodě. Znalosti o dynamice tohoto jevu se využívají v mnoha oblastech průmyslu, například při výrobě polovodičů nebo optických vláken. Například monokrystalický čistý křemík, jež se používá v elektrotechnice, vzniká řízenou krystalizací. Fázový přechod je jev obecnější, kdy se mění fáze, neboli skupenství, určité látky. Krystalizace je druh tuhnutí, tedy změny látky z kapalného na pevné skupenství. Tématem růstu krystalů se zabýval [16].

#### Anizotropie

Anizotropie znamená, že vývoj závisí na směru pohybu, tedy směru normálového vektoru. K popisu anizotropie se zavádí funkce  $\mu_0(\vec{n}) > 0$ , definovaná na množině  $\{\vec{n} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{n}| = 1\}$ . Jedná se o **hustotu energie na rozhraní** a představuje určité upřednostňování některých směrů vektoru  $\vec{n}$  při vývoji křivky. Cílem pohybu je pak co nejrychleji snížit celkovou energii na rozhraní  $E_\mu$ :

$$E_\mu(t) = \int_{\Gamma_t} \mu_0(-\vec{N}) ds.$$

Znaménko – je přidáno před normálový vektor  $\vec{N}$  kvůli jeho opačné orientaci. Pokud je  $\mu_0 = 1$ , jde o izotropní případ a pohyb probíhá podle běžného CSF  $v = \kappa$ . Funkci  $\mu_0$  lze rozšířit na funkci  $\mu$  definovanou na  $\mathbb{R}^2$  následujícím způsobem:

$$\mu(\vec{x}) = |\vec{x}| \mu\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) \text{ pro } \vec{x} \neq \vec{0}, \quad \mu(\vec{0}) = 0.$$

Pak podle gradientního toku ([39]) bude pohyb probíhat normálovou rychlostí  $v = \Lambda_\mu(-\vec{N})$ , kde  $\Lambda_\mu(\vec{n})$  je tzv. **vážená křivost** dána

$$\Lambda_\mu(\vec{n}) = (\vec{n}^{\perp\top} Hess_\mu(\vec{n}) \vec{n}^\perp) \kappa,$$

kde  $Hess_\mu$  je Hessova matice tvaru  $\begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{12} & \mu_{22} \end{pmatrix}$ , kde  $\mu_{ij} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i \partial x_j}$ .

Jak dále dokážeme, zákon pohybu lze dále zjednodušit do tvaru

$$v = (\hat{\mu}(\nu) + \hat{\mu}''(\nu)) \kappa, \tag{2.23}$$

kde  $\nu$  je úhel, který svírá vektor  $\vec{n}$  s osou  $x$ , a  $\hat{\mu}(\nu) := \mu(\vec{n}(\nu)) = \mu((\cos \nu, \sin \nu))$ . Označme  $\vec{t} = \vec{n}^\perp = (-\sin \nu, \cos \nu)$ .

Abychom (2.23) odvodili ze vzorce pro  $\Lambda_\mu$ , derivujme dvakrát  $\hat{\mu}(\nu)$ . Po úpravě dostaneme

$$\hat{\mu}''(\nu) = \vec{t}^\top(\nu) Hess_\mu(\vec{n}(\nu))(\vec{t}(\nu)) - \nabla \mu(\vec{n}(\nu)) \cdot \vec{n}(\nu).$$

Jelikož pro rozšířenou funkci  $\mu(\vec{x})$  platí

$$\mu(\lambda \vec{x}) = \lambda \mu(\vec{x}) \quad \forall \lambda > 0,$$

po zderivování rovnice podle  $\lambda$  a položení  $\lambda = 1$  získáme vztah

$$\nabla\mu(\vec{x})\vec{x} = \mu(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Speciálně pro  $\vec{x} = \vec{n}$  pak dostaneme rovnost

$$\vec{t}^\top \text{Hess}_\mu(\vec{n})\vec{t} = \hat{\mu}(\nu) + \hat{\mu}''(\nu).$$

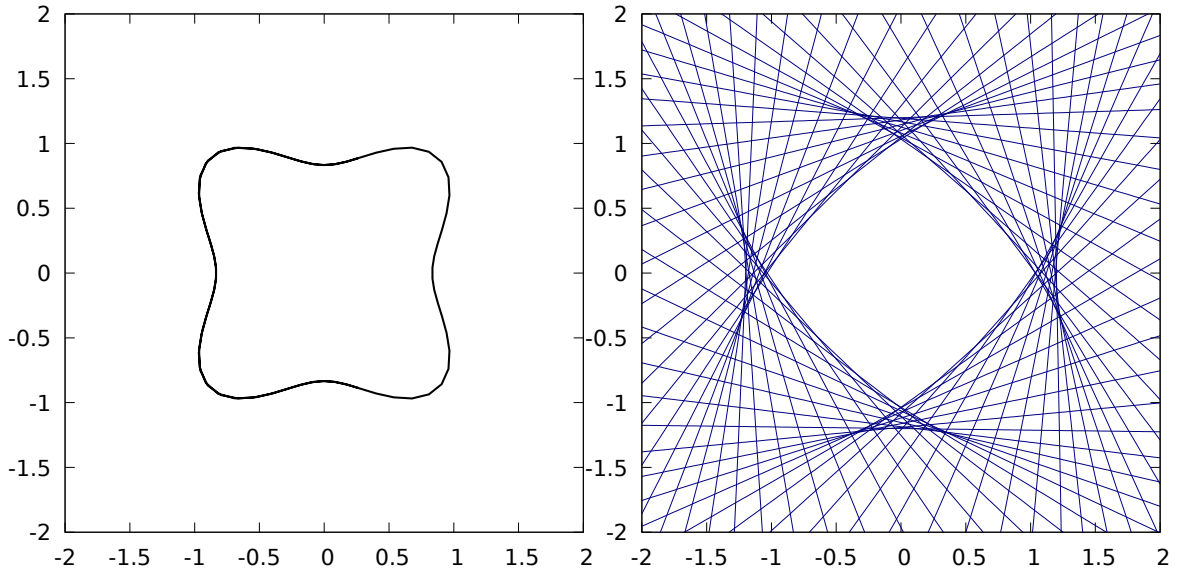
Dále se zavádí dva geometrické obrazce: Frankův diagram a Wulffův tvar. Frankův diagram se značí  $\mathcal{F}_\mu$  a je definován

$$\mathcal{F}_\mu = \left\{ \frac{\vec{n}(\nu)}{\mu(\vec{n}(\nu))} \mid \nu \in S^1 \right\} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mu(\vec{x}) = 1 \}.$$

Wulffův tvar je dán

$$\mathcal{W}_\mu = \bigcap_{\nu \in S^1} \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{x} \cdot \vec{n}(\nu) \leq \mu(\vec{n}(\nu)) \}.$$

$\partial\mathcal{W}$  vyjadřuje limitní tvar vyvíjejících se křivek. Předchozí postup a detailnější informace týkající se anizotropie lze nalézt v [41].



Obrázek 2.1: Příklad:  $\mu(\nu) = 1 + 0,2 \cos 4\nu$ . Vlevo: Frankův diagram, vpravo: obrazec ohraničený čarami tvoří Wulffův tvar. Silná anizotropie se projevuje v existenci konkávních částí ve Frankově diagramu a v existenci „špiček“ ve Wulffově tvaru.

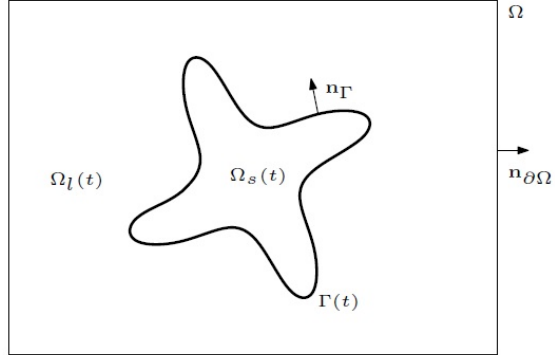
### Příklad $\mathcal{F}$ a $\mathcal{W}$

Mějme  $\hat{\mu}$  ve tvaru  $\hat{\mu}(\nu) = 1 + A \cos m\nu$  pro  $A \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ . Lze pak ověřit, že výraz před křivostí v (2.23) nabývá i záporných hodnot pro  $|A(1 - m^2)| > 1$ . V takovém případě, kdy výraz  $\hat{\mu} + \hat{\mu}''$  nabývá záporných hodnot, se anizotropii říká silná. Na obrázcích 2.1 zobrazen Frankův diagram a Wulffův tvar pro  $A = 0,2, m = 4$ .

## Stefanova úloha

Využitím termodynamických veličin lze vytvořit fyzikální model fázových přechodů, který se nazývá Stefanův model. Ten se zabývá fázovým přechodem prvního druhu a předpokládá existenci ostrého rozhraní mezi pevnou a kapalnou látkou. Na tomto rozhraní se předpokládají skoky veličin, popisujících systém. Stefanova úloha je řešena v [16],[38]. Porovnání s metodou fázového pole lze nalézt v [7] a v [22].

Mějme omezenou oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , kde probíhá fázový přechod prvního druhu z kapalné fáze na pevnou. Dále nechť  $\Omega_l(t) \subset \Omega$  značí oblast, kde se nachází kapalná fáze a  $\Omega_s(t) \subset \Omega$  oblast, kde se nachází pevná fáze. Fázové rozhraní mezi těmito oblastmi označme  $\Gamma(t) := \partial\Omega_s(t) \cap \partial\Omega_l(t)$  (viz 2.2).



Obrázek 2.2: Rozhraní mezi fázemi, [16]

Pak hledáme funkci představující teplotní pole  $u : [0, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  řešící Stefanovu úlohu

$$\begin{aligned}
 \rho c \partial_t u &= \nabla(\lambda \nabla u) && \text{na } \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t), && (2.24) \\
 \lambda \partial_{\vec{n}_\Gamma} u|_s - \lambda \partial_{\vec{n}_\Gamma} u|_l &= Lv_\Gamma && \text{na } \Gamma(t), \\
 u - u^* &= -\frac{\sigma}{\Delta s} \kappa_\Gamma - \alpha \frac{\sigma}{\Delta s} v_\Gamma && \text{na } \Gamma(t), \\
 b_c(u)|_{\partial\Omega} &= 0, \\
 u|_{t=0} &= u_0 && \text{na } \Omega, \\
 \Omega_s(t)|_{t=0} &= \Omega_{s0}.
 \end{aligned}$$

Dále jsou vysvětleny jednotlivé rovnice i symboly v nich použité.

1. První rovnice představuje rovnici vedení tepla, kde
  - $\rho$  je hustota oblasti
  - $c$  je tepelná kapacita oblasti
  - $\lambda$  je tepelná vodivost oblasti
2. Druhá rovnice se nazývá Stefanova podmínka a vyjadřuje nespojitost tepelného toku (veličiny  $\lambda \nabla u$ ) na rozhraní fází  $\Gamma(t)$ .
  - $\vec{n}_\Gamma$  značí normálový vektor k rozhraní  $\Gamma(t)$  mířící směrem ven z  $\Omega_s$
  - $v_\Gamma$  je normálová rychlost rozhraní  $\Gamma(t)$
  - $L$  představuje latentní teplo, tedy teplo uvolněné ztuhnutím jednotky kapalné látky
3. Třetí rovnice je Gibbsova-Thomsonova podmínka dávající do souvislosti rychlost fázového rozhraní  $v_\Gamma$  s podchlazením kapaliny a se zakřivením rozhraní.
  - $u^*$  značí teplotu tání

- $\sigma$  značí povrchové napětí mezi fázemi
  - $\Delta s$  je rozdíl entropií mezi  $\Omega_l$  a  $\Omega_s$
  - $\kappa_\Gamma = \nabla \vec{n}_\Gamma$  je střední křivost nadplochy  $\Gamma(t)$
  - $\alpha > 0$  je koeficient připojovací kinetiky na hranici
4. Čtvrtá rovnice představuje okrajovou podmínku na hranici  $\partial\Omega$  danou funkcí  $b_c(u)$ . Jedná se buď o Dirichletovu, anebo o Neumannovu podmínku.
- \* Dirichletova: pro danou hodnotu  $u_{\partial\Omega}$  je  $b_c$  definováno:
 
$$b_c(u) = u - u_{\partial\Omega}.$$
  - \* Neumannova: pro zadaný tepelný tok  $\vec{g}$  na hranici  $\partial\Omega$  a pro  $\vec{n}_{\partial\Omega}$  značící normálový vektor na hranici je  $b_c$  definováno:
 
$$b_c(u) = (\lambda(u)\nabla u - \vec{g}) \cdot \vec{n}_{\partial\Omega}.$$
5. Pátá rovnice představuje počáteční stav teplotního pole.
6. Poslední rovnice představuje počáteční pozici a tvar pevné fáze.

### Metoda fázového pole

Následující metoda je založena na myšlence neostrého fázového přechodu, tedy předpokládá se existence tenké přechodové vrstvy mezi fázemi. Tato metoda je obsažena v pracích [38], [7], kde je také porovnávána se Stefanovou úlohou.

Mějme hladkou funkci  $p : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow [0, 1]$  pro  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  omezenou oblast. Nechť pro fázové rozhraní mezi kapalnou a pevnou fází platí

$$\Gamma(t) = \left\{ \vec{x} \in \Omega \mid p(t, \vec{x}) = \frac{1}{2} \right\}.$$

Pro kapalný stav nechť odpovídají hodnoty  $p$  blízké nule a pro pevný stav zase hodnoty blízké jedné. Takovou funkci  $p$  nazveme fázové pole.

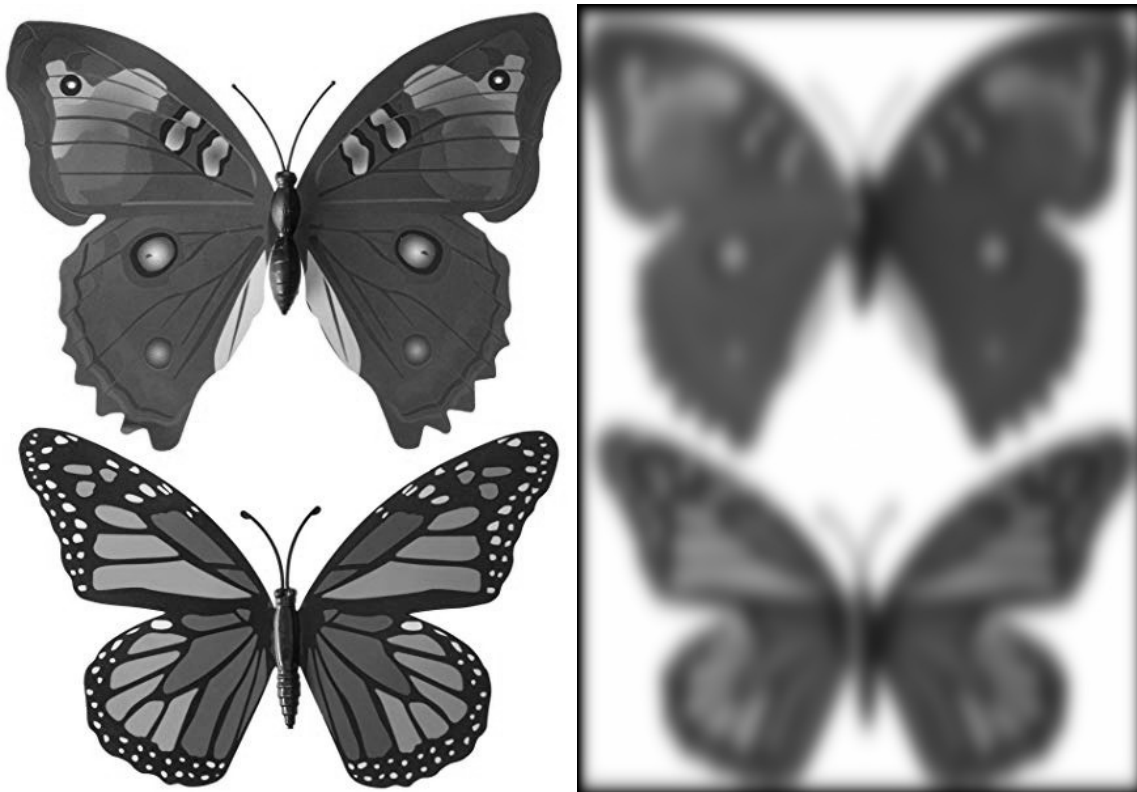
Změna fází probíhá na tenké vrstvě  $\Omega_\Gamma$ , jejíž „tloušťka“ je dána difuzním parametrem  $\xi$ .

Model fázového pole je pak dán soustavou rovnic pro fázové pole  $p(t, \vec{x})$  představující fázové rozhraní a teplotní pole  $u(t, \vec{x})$  pro  $(t, \vec{x}) \in [0, \infty) \times \Omega$

$$\begin{aligned} \rho c \partial_t u &= \nabla(\lambda \nabla u) + L \partial_t p, \\ \tau(\xi) \partial_t p &= \xi^2 \Delta p + f(u, \nabla p, \xi) \end{aligned} \tag{2.25}$$

s odpovídajícími okrajovými a počátečními podmínkami pro funkce  $p$  a  $u$ .

První rovnice opět představuje rovnici vedení tepla. Druhá rovnice se nazývá fázová rovnice nebo Allen-Cahnova rovnice.  $\tau(\xi)$  a  $f(u, p, \nabla p, \xi)$  jsou jisté funkce lišící se podle jednotlivých typů modelu. Jedná se o obdobu Gibbsovy-Thompsonovy rovnice ze Stefanovy úlohy.



Obrázek 2.3: Vlevo originální obrázky, vpravo vliv difúzní rovnice s Dirichletovou okrajovou podmínkou do času  $t=0.001$  (výsledek zpracovaný v rámci výuky na FJFI ČVUT v Praze)

### 2.6.2 Zpracování obrazu

V oblasti zpracování digitálního obrazu lze nalézt mnoho oblastí, kde se využije dynamika křivek. Jde například o odstranění šumu, hledání hran nebo rozpoznávání obrazu. Hledání hran je využitelné například při zpracování snímků z magnetické rezonance. Zpracování obrazu pomocí level-set metod je rozebráno v [31], dále se tomuto tématu věnují [26], [4], [6], [11].

Nyní se zaměříme na problémy při odstraňování šumu. Nejjednodušším způsobem, jak odstranit šum, je aplikovat na obrázek difuzi, tedy rovnici vedení tepla ve 2D. To způsobí odstraňování šumu, ale zároveň i rozmazávání hran a celého obrázku, což většinou není žádoucí. Příklad použití rovnice vedení tepla lze vidět na obrázku 2.3. Víme, že rovnice vedení tepla má fundamentální řešení ve tvaru Gaussovy funkce

$$G(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}.$$

Výsledek působení rovnice vedení tepla na funkci intenzity  $I_0(x, y)$  do času  $\sigma$  je pak ekvivalentní konvoluci  $G_\sigma(x, y) := G(x, y, \sigma)$  s funkcí  $I_0$  rozšířenou na celé  $\mathbb{R}^2$ :

$$G_\sigma(x, y) * I_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x - \xi, y - \eta) I_0(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Tato konvoluce tedy rozmazá celý obrázek, ale hrany chceme zachovat. Proto se rovnice



vedení tepla modifikuje na tvar

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \nabla \cdot (g(|\nabla u|)\nabla u) && \text{na } \Omega \times (0, T), \\ \partial_{\vec{n}} u &= 0 && \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} &= I_0 && \text{na } \Omega, \end{aligned} \quad (2.26)$$

kde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  představuje většinou obdélníkový tvar obrázku,  $I_0(x, y)$  představuje barevnou intenzitu na obrázku. Tato rovnice (2.26) se nazývá Peronova-Malikova úloha [33].  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  je nerostoucí funkce volena tak, aby v blízkosti hran, kde  $|\nabla u|$  je velmi vysoká, difúze v podstatě neprobíhala. Naopak tam, kde je tento gradient nízký požadujeme  $g$  blízké jedničce a tedy difúze probíhá běžným způsobem. Vhodnou volbou  $g$  je například funkce

$$g(\lambda) = \frac{1}{1 + \alpha\lambda},$$

kde pomocí parametru  $\alpha > 0$  lze regulovat citlivost detekce hran. Rovnice (2.26) se však může lokálně chovat jako zpětná rovnice vedení tepla, která je velmi špatně řešitelná. Proto se využívá modifikovaná Peronova-Malikova úloha tvaru

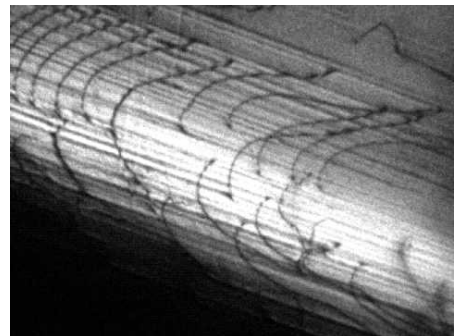
$$\partial_t u = \nabla \cdot (g(|\nabla G_\sigma * u|)\nabla u)$$

s počátečními a okrajovými podmínkami analogickými předchozí úloze, definiční obor stejný,  $\sigma > 0$  pevné. Takto modifikovaná úloha je již dobře řešitelná a má jednoznačné řešení.

Další metodou zpracování obrazu může být Allen-Cahnova rovnice, řešena například v [8] nebo [22].

### 2.6.3 Dislokace

V reálném světě obsahují krystalické látky ve své mřížce určité nedokonalosti. Jde například o chybějící nebo přebývající atomy. Vlastnosti látky bývají silně ovlivněny tímto jevem, což je motivace k jeho výzkumu. Pokud defekty mají tvar čar, nazývají se dislokace. Zkoumání chování těchto dislokací je aktuálním problémem (viz práce [5], [28], [32], [23]). Existují však další typy poruch.



Obrázek 2.4: Tvar dislokací pod mikroskopem (převzato z [29])

- **Bodové poruchy:** Případ chybějícího atomu v mřížce anebo naopak přebytečného atomu nacházejícího se mimo mřížku.
- **Rovinné poruchy:** Perfektní krystal je složen z na sebe položených vrstev atomů v pravidelném uspořádání. Defektem pak je například chybějící část jedné vrstvy, nebo naopak vložená část vrstvy mezi dvě jiné.

Při pohybu dislokace interagují s jinými druhy defektů a jinými dislokacemi. Dochází k topologickým změnám, kdy se jedna dislokace může rozpadnout na více dislokací nebo naopak z více dislokací vznikne jen jedna. Mohou se dokonce navzájem i vyrušit. Jejich pohyb probíhá ve vrstvě s vyšší hustotou atomů, při jevu zvaném Cross-Slip se dislokace

přesouvají na jinou vrstvu. Obecný předpis pro jejich pohyb je MCF  $v = \kappa + F$ , kde  $F$  zahrnuje silové interakce od ostatních defektů, napětí v materiálu, atd. Podrobnější informace lze nalézt v [23].

## Kapitola 3

# Numerické řešení dynamiky křivek

Tato kapitola se zabývá aplikací numerických metod na úlohu (2.12), což je evoluční parciální diferenciální rovnice. Dále se zabývá upravenou úlohou (2.19) pro  $f = 0$ , která zajistí redistribuci uzlů při výpočtu. Numerickým řešením těchto úloh pomocí přímé metody se zabýval například Ševčovič [36] nebo [9]. Přidání vlivu vnější funkce je rozebráno vzápětí. Nakonec jsou porovnána numerická schémata pro úlohu (2.12) a (2.19). Použitím analytického řešení je ověřena důvěryhodnost schémat.

### 3.1 Metoda přímek, Eulerovo schéma

Jedním ze způsobů řešení evoluční PDR je převod na soustavu ODE pomocí metody přímek. Ta spočívá v diskretizaci pouze prostorových proměnných, v tomto případě v diskretizaci intervalu, kde je daná křivka definována. Následně se odpovídající diferenciální výrazy nahradí diferenčními. To se provede následujícím postupem.

Nejdříve aproximujeme křivku lomenou čarou, tedy konečným počtem bodů v rovině. Tento počet označme  $N$ . Mějme zadanou uzavřenou iniciální křivku  $\gamma_0$  definovanou (bez újmy na obecnosti) na  $[0; 2\pi]$ . Takový interval předpokládáme, jelikož  $\gamma_0$  je většinou definována pomocí goniometrických funkcí. Interval se pak rozdělí stejnoměrně po krocích

$$h := \frac{2\pi}{N}.$$

Aproximací počáteční křivky pak bude posloupnost bodů  $(\gamma_i^0)_{i=0}^N \subset \mathbb{R}^2$ , kde  $\gamma_i^0 := \gamma_0(i \cdot h)$ . Platí  $\gamma_0^0 = \gamma_N^0$ .

Po diskretizaci křivky se v rovnici nahradí první a druhá derivace podle  $u$  diferenčním výrazem. Cílem je pak najít  $N + 1$  funkcí  $(\gamma_i(t))_{i=0}^N$  řešících vzniklou soustavu ODR s počáteční podmínkou  $\gamma_i(0) = \gamma_i^0$ .

Tuto soustavu lze řešit jednou z Rungeových-Kuttových metod. Zde se využije nejjednodušší metoda, která se nazývá Eulerova. Použití Eulerovy metody je ekvivalentní použití dopředné časové diference. Další postup zahrnuje časovou diskretizaci. Zvolme časový krok  $\tau$  dostatečně malý. Budeme chtít počítat až do času  $T$ , tedy budeme počítat v  $N_t = T/\tau$  krocích. Vzniklá schémata budou explicitní, tedy nová časová hladina se napočítá pouze pomocí předchozí.

### 3.1.1 Verze bez redistribuce

Nyní zdiskretizujeme parciální diferenciální rovnici (2.12):

$$\partial_t \gamma = \frac{1}{|\partial_u \gamma|} \partial_u \left( \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right), \quad \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0.$$

Řešení aproximujeme hodnotami  $\gamma_i^j \sim \gamma(ih, j\tau)$ . V  $(j+1)$ . početním kroku nalezneme postup výpočtu nové křivky  $(\gamma_i^{j+1})_{i=0}^N$  pomocí předchozí křivky  $(\gamma_i^j)_{i=0}^N$ . Hledáme tedy předpis pro výpočet nového  $i$ -tého uzlu  $\gamma_i^{j+1}$  pomocí uzlů z  $j$ -té časové hladiny.

Výraz  $\partial_u \gamma$  lze pomocí kroku  $h$  aproximovat buď dopřednou diferencí

$$\frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_i^j}{h},$$

nebo zpětnou diferencí

$$\frac{\gamma_i^j - \gamma_{i-1}^j}{h}.$$

Zároveň je tu možnost aproximovat  $|\partial_u \gamma|$  průměrem z dopředné a zpětné difference, což provedeme u první části pravé strany rovnice. Označme  $min_i^j := |\gamma_i^j - \gamma_{i-1}^j|$  vzdálenost  $i$ . uzlu od  $(i-1)$ . uzlu a  $plus_i^j := |\gamma_{i+1}^j - \gamma_i^j|$  vzdálenost  $i$ . od  $(i+1)$ . uzlu. Pak nahrazení bude mít tvar

$$\frac{1}{|\partial_u \gamma|}(ih, j\tau) \approx \frac{2h}{min_i^j + plus_i^j}.$$

Dále aproximujeme vnitřek závorky pomocí dopředné difference

$$\frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|}(ih, j\tau) \approx \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_i^j}{h} \frac{h}{plus_i^j} = \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_i^j}{plus_i^j}.$$

Pak na tento výraz aplikujeme diferencí zpětnou a vyjádříme

$$\partial_u \left( \frac{\partial_u \gamma}{|\partial_u \gamma|} \right)(ih, j\tau) \approx \frac{1}{h} \left( \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_i^j}{plus_i^j} - \frac{\gamma_i^j - \gamma_{i-1}^j}{min_i^j} \right).$$

Derivaci podle času nahradíme dopřednou časovou diferencí, což je ekvivalentní použití Eulerovy metody v metodě přímek:

$$\partial_t \gamma(ih, j\tau) \approx \frac{\gamma_i^{j+1} - \gamma_i^j}{\tau}.$$

Po dosazení všech diferenčních výrazů a po vyjádření  $\gamma_i^{j+1}$  dostaneme numerické schéma

$$\begin{aligned} \gamma_i^{j+1} &= \gamma_i^j + \tau \left[ \frac{2}{plus_i^j + min_i^j} \cdot \left( \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_i^j}{plus_i^j} - \frac{\gamma_i^j - \gamma_{i-1}^j}{min_i^j} \right) \right], \\ \gamma_i^0 &= \gamma_0(ih), \quad i \in \{0, 1 \dots N\}, j \in \{0, 1 \dots N_t\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ve schématu pokládáme  $\gamma_{-1}^j := \gamma_{N-1}^j, \gamma_{N+1}^j := \gamma_1^j$ . Pak i nová časová hladina bude uzavřená křivka, tedy bude platit  $\gamma_0^{j+1} = \gamma_N^{j+1}$ .

### 3.1.2 Verze s redistribucí

Namísto úlohy (2.12) numericky řešíme úlohu

$$\partial_t \gamma = \frac{\partial_{uu} \gamma}{|\partial_u \gamma|^2},$$

kteřá je striktně parabolická. Víme dle věty (2.4.5), že pohyb bodů křivky řízený touto rovnicí se liší od (2.12) jen v tečném směru. Tedy body, představující křivku, se přesouvají v průběhu výpočtu, ale sám pohyb křivky není narušen. Výhoda spočívá ve zvýšení numerické stability a efektivity výpočtu, zvláště, pokud má počáteční křivka místa s vysokou křivostí. V těchto místech se při výpočtu hromadí body diskretizované křivky, což může způsobit potíže při výpočtu.

Diskretizace této rovnice je o něco jednodušší. Namísto  $|\partial_u \gamma|^2$  využijeme průměr druhých mocnin dopředné a zpětné diference. Druhou derivaci podle  $u$  vytvoříme obdobně jako u předchozího schématu, jako zpětnou diferenci z dopředné diference.

$$|\partial_u \gamma|^2(ih, j\tau) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{(\text{plus}_i^j)^2}{h^2} + \frac{(\text{min}_i^j)^2}{h^2} \right),$$

$$\partial_{uu} \gamma(ih, j\tau) \approx \frac{1}{h^2} (\gamma_{i+1}^j - 2\gamma_i^j + \gamma_{i-1}^j).$$

Časová diskretizace zůstává stejná. Po vyjádření dostaneme schéma

$$\begin{aligned} \gamma_i^{j+1} &= \gamma_i^j + 2\tau \cdot \left( \frac{\gamma_{i+1}^j - 2\gamma_i^j + \gamma_{i-1}^j}{(\text{plus}_i^j)^2 + (\text{min}_i^j)^2} \right), \\ \gamma_i^0 &= \gamma_0(ih), \quad i \in \{0, 1 \dots N\}, j \in \{0, 1 \dots N_t\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ve schématu opět pokládáme  $\gamma_{-1}^j := \gamma_{N-1}^j, \gamma_{N+1}^j := \gamma_1^j$ .

## 3.2 Konvergenční analýza

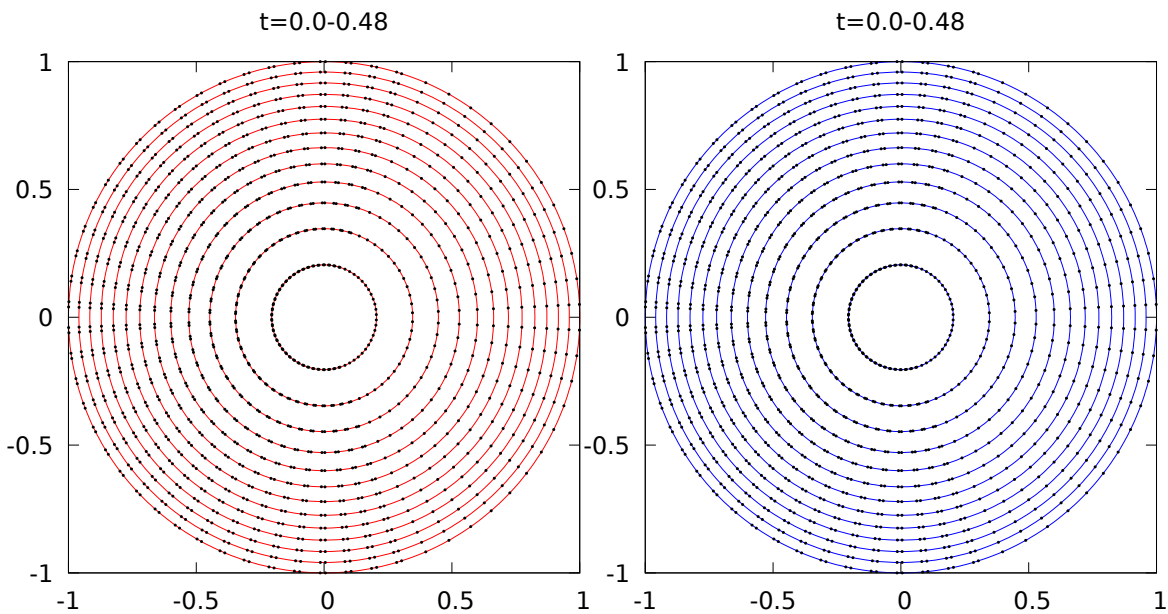
### Vizuální porovnání s analytickým řešením

Nyní je třeba se ujistit, že navržené kódy odpovídají případnému analytickému řešení. Jako toto analytické řešení použijeme vyvíjející se kružnici. V další části textu odvodíme její předpis. Nechť tedy v úloze (2.12) je pro počáteční poloměr  $r_0 > 0$   $\gamma_0(u) = (r_0 \cos u, r_0 \sin u)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ . Křivost v každém bodě kružnice je stejná, proto vektor  $\kappa \vec{N}$  má vždy stejnou velikost. Navíc vždy míří do středu kružnice, proto z této středové symetrie můžeme předpokládat, že vyvíjející se křivka v každém čase zůstane kružnicí. Nechť  $\gamma(t, u) = r(t) (\cos u, \sin u)$ . Pak  $\kappa(t) = (r(t))^{-1}$ . Dále víme, že  $\vec{T} = |\partial_u \gamma|^{-1} \partial_u \gamma = (-\sin u, \cos u)$ . Aby  $\det(\vec{T}, \vec{N}) = 1$  a  $\vec{T} \perp \vec{N}$ , musí platit  $\vec{N} = -(\cos u, \sin u)$ . Po dosazení do rovnice

$$\partial_t \gamma = \kappa \vec{N}$$

dostaneme

$$\dot{r}(t) (\cos u, \sin u) = -\frac{1}{r(t)} (\cos u, \sin u),$$



Obrázek 3.1: Porovnání numerického a analytického řešení pro případ stahujícího se kruhu. Černé tečky značí analytické řešení, červená čára značí numerický výpočet bez redistribuce (schéma (3.1)) a modrá čára numerický výpočet s redistribucí (schéma (3.2)).

z čehož získáme jednoduchou diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\dot{r}(t)r(t) = -1, \quad r(0) = r_0.$$

Zintegrováním od 0 do  $t$  a dosazením počáteční podmínky dostaneme časovou závislost poloměru kružnice:

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2t}.$$

Z ní lze odvodit, že řešení existuje pouze v časovém intervalu  $[0; r_0^2/2)$ .

Teď už jen stačí numerické řešení obou verzí programu porovnat s analytickým řešením.

#### Porovnání výpočtu s analytickým řešením

Na obrázcích 3.1 jsou porovnána napočítaná a analytická řešení, vlevo pomocí verze bez redistribuce, vpravo s redistribucí. Jak lze vidět, řešení se vizuálně shodují.

- Počáteční křivka: kruh o poloměru 1
- Funkce  $f = 0$
- Počet bodů křivky: 300
- Konečný čas výpočtu  $T$ : 0.48 (časový krok  $\tau$ :  $10^{-5}$ , počet časových kroků: 48000)

Stejně jako pro tento konkrétní příklad se v absolutní většině případů výpočet oběma verzemi vizuálně shoduje.

## Výpočet EOC

Dále bychom mohli zkoumat jistou konvergenci křivek při zvyšování počtu uzlů při výpočtu za konstantního časového kroku. K tomu se využije Hausdorffova metrika.

Vypočítáme experimentální řád konvergence (EOC) následujícím způsobem: Mějme vyvíjející se křivku  $\hat{\Gamma}(t)$ , kterou považujeme za správné řešení a pak dvě numericky napočítaná řešení  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$  reprezentovaná různými počty uzlů  $N_1$  a  $N_2$ ,  $N_1 < N_2$ . Tato řešení známe na časových hladinách  $(i\hat{\tau})_{i=0}^m$ , kde  $\hat{\tau}$  je časový krok hladin. Spočteme Hausdorffovy vzdálenosti mezi správným řešením a napočítanými řešeními na těchto hladinách:

$$e_i^{(1)} := \rho(\hat{\Gamma}(i\hat{\tau}), \Gamma_1(i\hat{\tau})),$$
$$e_i^{(2)} := \rho(\hat{\Gamma}(i\hat{\tau}), \Gamma_2(i\hat{\tau})).$$

Pak lze vyčíslit  $L_2$  normu chyb

$$\|e^{(1)}\| := \sqrt{\sum_{i=0}^m \hat{\tau}(e_i^{(1)})^2}, \quad \|e^{(2)}\| := \sqrt{\sum_{i=0}^m \hat{\tau}(e_i^{(2)})^2}.$$

Pak experimentální řád konvergence EOC je definován:

$$EOC(N_1, N_2) := \frac{\log(\|e^{(1)}\|/\|e^{(2)}\|)}{\log(N_2/N_1)}.$$

Takový výpočet nyní provedeme pro případ vyvíjejícího se kruhu.

### Experimentální řád konvergence kruhu

Mějme  $m = 48$  a  $\hat{\tau} = 0.01$ . V tabulce 3.2 jsou napočítané experimentální řády konvergence při postupném zjemňování sítě, tedy zvyšování počtu uzlů sítě. Za správné řešení je považováno numerické řešení pro  $N = 1000$ .

- Verze schématu: s redistribucí
- Počáteční křivka: kruh o poloměru 1
- Funkce:  $f = 0$
- Konečný čas výpočtu  $T$ : 0.48 (časový krok  $\tau$ :  $5 \cdot 10^{-7}$ , počet časových kroků: 960000)

## Rozdíl numerických schémat

Důvodem k použití redistribuce je lepší numerická stabilita, zvláště v případě složitějších funkcí  $f$  by mohla verze bez redistribuce selhat. Na příkladu křivky, která má mnoho „špiček“, si ukážeme význam redistribuce vizuálně.

N	$L_2$ -norma	EOC
50	0,001037	
100	0,000255	2,027218
200	0,000063	2,005434
300	0,000028	1,985077
400	0,000016	1,959249
500	0,000011	1,91642

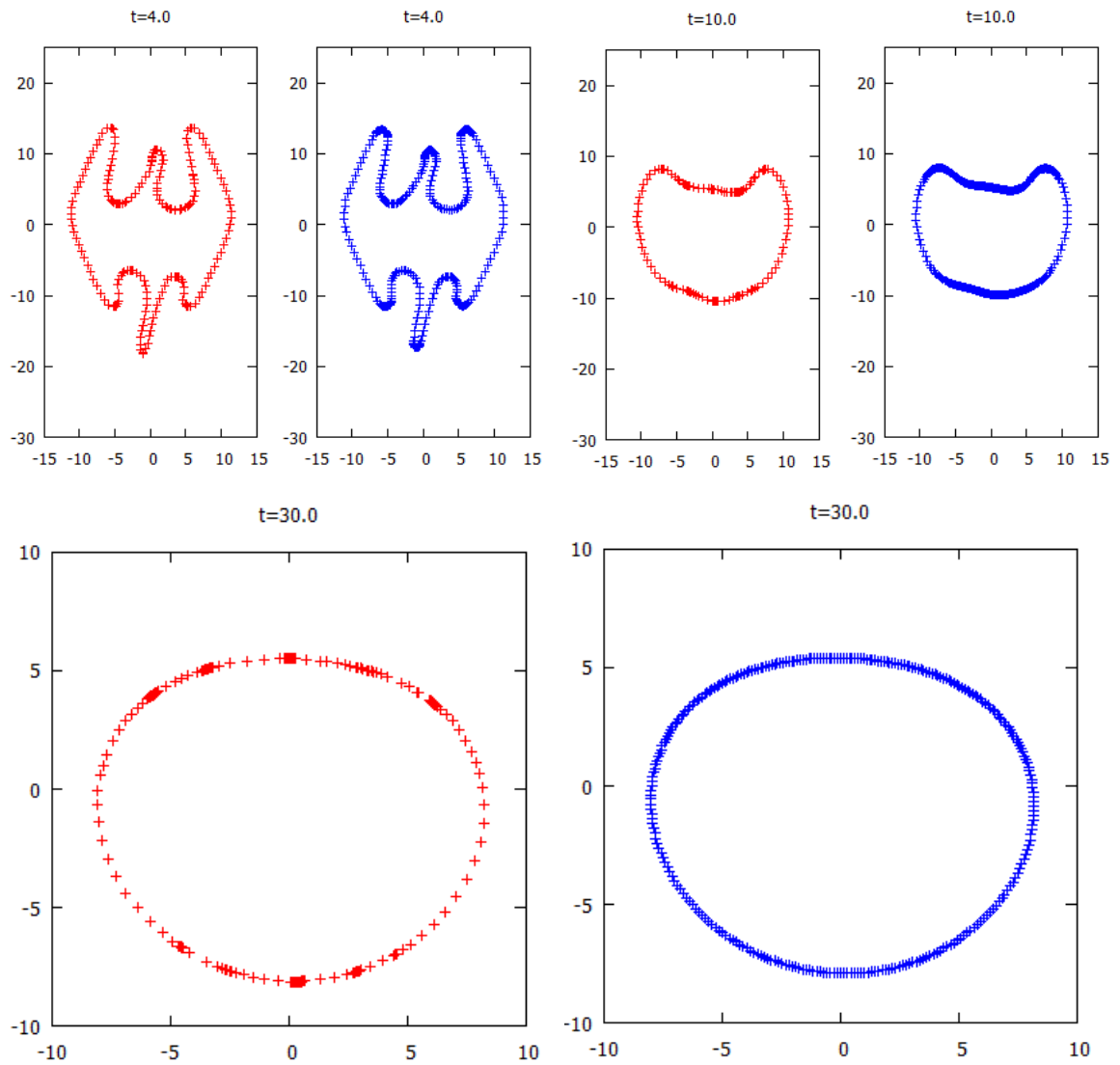
Tabulka 3.1: Tabulka EOC: První sloupec je počet uzlů, druhý představuje napočítanou normu chyby. Ve třetím sloupci je napočítané EOC mezi řešením ve stejném řádku a řešením v předchozím řádku.

### Význam použití redistribuce

Na obrázcích 3.2 zobrazen rozdíl v rozmístění jednotlivých uzlů v průběhu výpočtu při použití schémat (3.1) a (3.2). Výpočet lze také najít na obrázcích 4.1.

- Počáteční křivka: tvaru draka [2].
- Funkce  $f = 0$
- Počet bodů křivky: 300
- Konečný čas výpočtu  $T$ : 30 (časový krok  $\tau$ :  $10^{-4}$ , počet časových kroků:  $3 \cdot 10^5$ )





Obrázek 3.2: Rozdíl v použití obou schémat: červeně je vykresleno řešení bez redistribuce, modře s redistribucí. V čase  $t = 30.0$  lze pozorovat výrazně nerovnoměrné rozložení bodů při použití verze bez redistribuce.

### 3.3 Přidání vnější síly

Dále bychom chtěli studovat chování rovnic (2.11) a (2.19) v případě nenulové vnější síly  $f$ . Ta může obecně být závislá na čase, pozici bodu v rovině a tečném úhlu (ekvivalentně na tečném vektoru), ale i na veličinách jako je délka nebo obsah vnitřku křivky. Nyní chceme do schémat (3.1) a (3.2) zakomponovat člen  $f\vec{N}$ . Víme, že v rovině platí

$$\vec{N} = \frac{(\gamma')^\perp}{|\gamma'|}, \text{ kde } (\gamma')^\perp = (-\gamma'_2, \gamma'_1)^\top.$$

Při výpočtu uzlu  $\gamma_i^{j+1}$  se v obou verzích diskretizace přičte člen

$$\tau f \cdot \left( -\frac{\gamma_{2,i+1}^j - \gamma_{2,i}^j}{plus_i^j}, \frac{\gamma_{1,i+1}^j - \gamma_{1,i}^j}{plus_i^j} \right)^\top,$$

kde čísla 1 a 2 v dolním indexu znamenají složku vektoru. Aproximovala se zde první derivace pomocí dopředné diference.

Schéma pak bude mít tvar

$$\begin{aligned} \gamma_i^{j+1} = & \gamma_i^j + \tau \left[ \frac{2}{plus_i^j + min_i^j} \cdot \left( \frac{\gamma_{i+1}^j - \gamma_i^j}{plus_i^j} - \frac{\gamma_i^j - \gamma_{i-1}^j}{min_i^j} \right) \right] \\ & + \tau f \cdot \left( -\frac{\gamma_{2,i+1}^j - \gamma_{2,i}^j}{plus_i^j}, \frac{\gamma_{1,i+1}^j - \gamma_{1,i}^j}{plus_i^j} \right)^\top, \\ \gamma_i^0 = & \gamma(ih), \quad i \in \{0, 1 \dots N\}, j \in \{0, 1 \dots N_t\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

pro schéma bez redistribuce a

$$\begin{aligned} \gamma_i^{j+1} = & \gamma_i^j + 2\tau \cdot \left( \frac{\gamma_{i+1}^j - 2\gamma_i^j + \gamma_{i-1}^j}{(plus_i^j)^2 + (min_i^j)^2} \right) \\ & + \tau f \cdot \left( -\frac{\gamma_{2,i+1}^j - \gamma_{2,i}^j}{plus_i^j}, \frac{\gamma_{1,i+1}^j - \gamma_{1,i}^j}{plus_i^j} \right)^\top, \\ \gamma_i^0 = & \gamma(ih), \quad i \in \{0, 1 \dots N\}, j \in \{0, 1 \dots N_t\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

pro schéma s redistribucí.

Například volba vnější síly

$$f(\Gamma(t)) = -\frac{1}{L(t)} \int_{\Gamma} \kappa ds$$

způsobí, jak bylo rozebráno dříve, že pohyb zachovává konstantní obsah, zatímco snižuje délku.

Pro Jordanovy křivky podle věty (1.2.5) přejde  $f$  na tvar

$$f(\Gamma(t)) = \mp \frac{2\pi}{L(t)}.$$

V tomto tvaru není těžké vzniklý pohyb implementovat, jelikož  $L(t)$  lze snadno aproximovat součtem délek mezi uzly křivky:

$$L(j\tau) \approx \sum_{i=0}^{N-1} plus_i^j.$$

# Kapitola 4

## Výsledky

V této kapitole se nachází numerické výsledky spočtené pomocí numerického schématu s redistribucí, tedy schémat (3.2) a (3.4).

Již jsme ověřili, že CSF stahuje kruh do bodu. Následují příklady složitějších, avšak Jordanových, počátečních křivek. Příklady zahrnují i působení zmíněných funkcí  $f$ .

Na následujících dvou stranách se nacházejí výpočty vývoje s Jordanovou počáteční křivkou ve tvaru draka, která je zajímavá množstvím „špiček“, tedy míst s vysokou křivostí. Na obrázcích 4.1 je zaznamenám vývoj podle schématu (3.2). Zřetelná je vyhlazovací vlastnost úlohy.

Na další straně je vyobrazen vývoj stejné křivky, tentokrát podle schématu (3.4) s funkcí zachovávající ohraničený obsah. Počátek vývoje je velmi podobný vývoji bez této funkce, později se řešení stabilizuje do tvaru konstantní kružnice, viz obrázky 4.2. Dále je schéma (3.2) použito na obdobnou počáteční křivku, tentokrát ve tvaru mamuta, vývoj na obrázcích 4.3.

Lineární funkce vzdálenosti od počátku je pak použita na obrázcích 4.4 a 4.5, kde je vyobrazen vývoj křivky tvaru kruhu a křivky hvězdovitého tvaru.

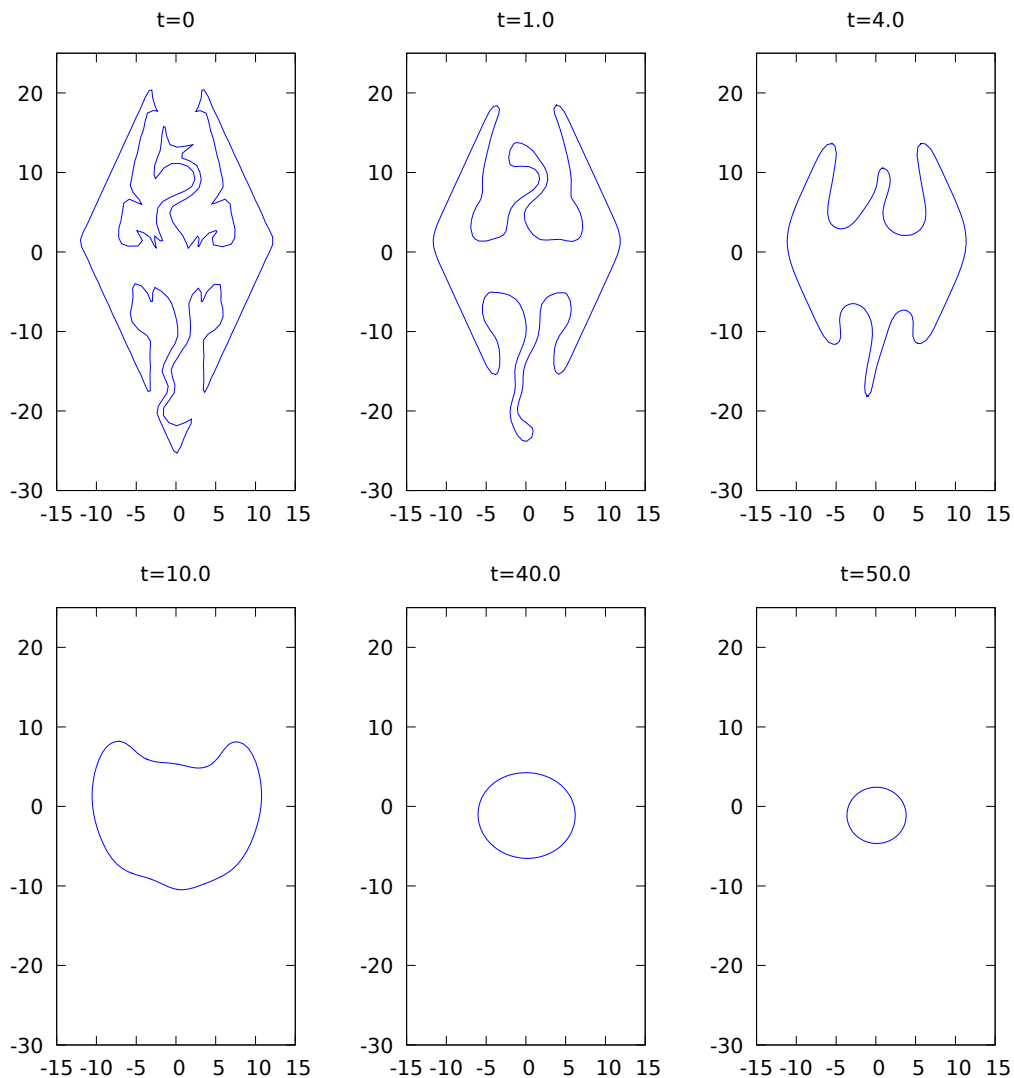
Dále je vhodné prověřit, jak se schéma (3.2) vypořádá s křivkami, které nejsou jednoduché. Počáteční křivka pak bude rozdělena na konečný počet smyček, některé kladně orientované a jiné záporně orientované. Každá z nich se pak bude vyvíjet zvlášť. Pohyb podle CSF funguje i pro záporně orientované smyčky, jelikož vektor  $\kappa\vec{N}$  je nezávislý na orientaci. To znamená, že každá smyčka se stáhne. Menší smyčky při stahování vymizí díky konečné výpočetní přesnosti. Nakonec se tedy celá křivka také stáhne do bodu. Příklady takového vývoje jsou na obrázcích 4.6 a 4.7.

Během numerického výpočtu s vnější silou může dojít ke vzniku záporně orientované smyčky, na té má pak vektor  $\vec{N}$  opačný směr. Ve schématu jsme však při určování vektoru  $\vec{N}$  v členu  $f\vec{N}$  automaticky předpokládali kladně orientovanou Jordanovu křivku, kdy  $\vec{N}$  směřuje do vnitřku křivky. Na smyčce pak pohyb neodpovídá rovnici  $v = \kappa + f$ , ale rovnici  $v = \kappa - f$ . Příklad takového vývoje je na obrázcích 4.8, kde je použita lineární funkce vzdálenosti od počátku. Výřez z tohoto vývoje je pak zobrazen na obrázcích 4.9, kde je znázorněna situace s tečným a normálovým vektorem.

## Vývoj podle CSF, Jordanova křivka 1

Na obrázcích 4.1 je vyobrazený vývoj křivky podle CSF. Lze pozorovat postupné vyhlazení křivky a její následné stažení do kruhu.

- Verze schématu: s redistribucí
- Počáteční křivka: tvaru draka [2]
- Funkce  $f = 0$
- Počet bodů křivky: 450
- Konečný čas výpočtu  $T : 50$  (časový krok  $\tau : 5 \cdot 10^{-4}$ , počet časových kroků:  $10^5$ )

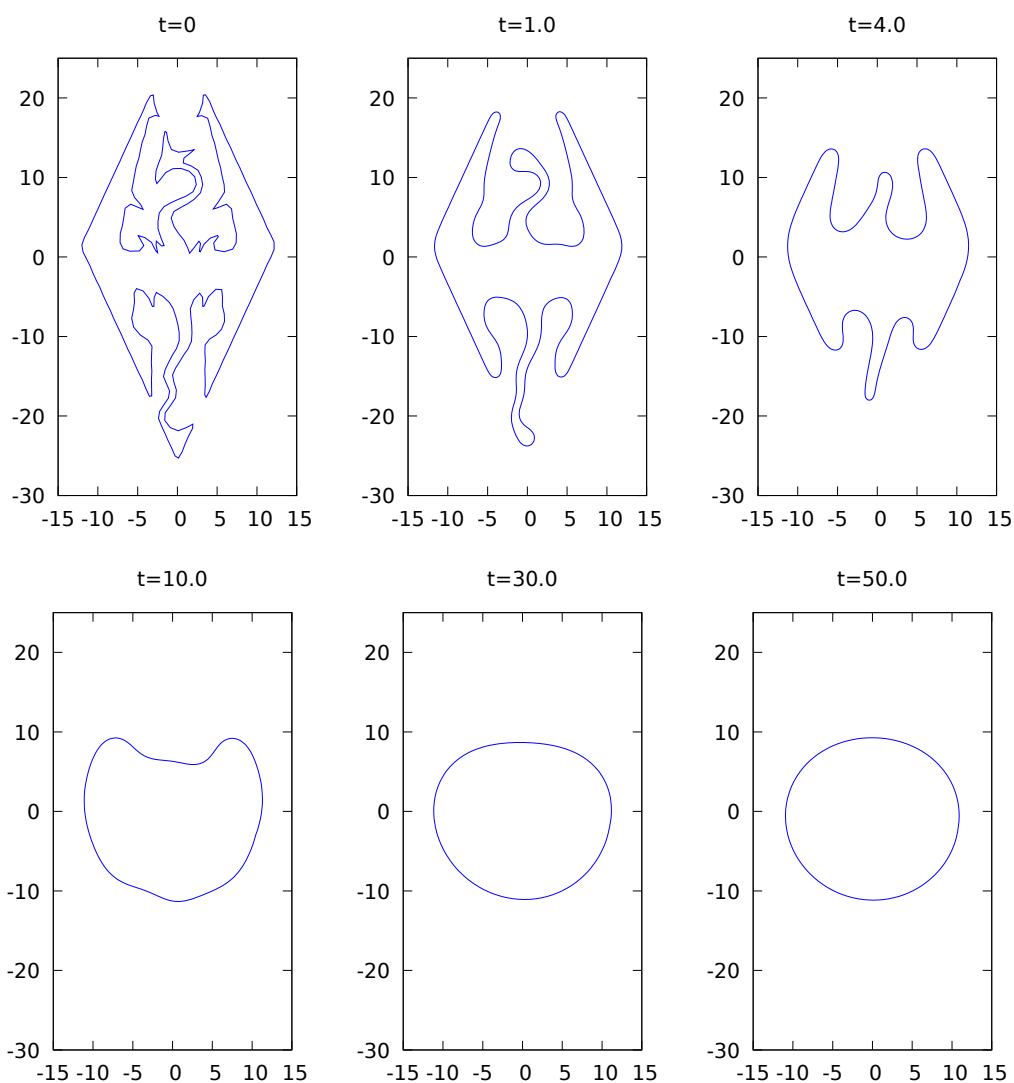


Obrázek 4.1: Příklad vývoje křivky ve tvaru draka pohybem CSF

### Pohyb zachovávající obsah, Jordanova křivka

Na obrázcích 4.2 lze pozorovat vývoj stejné křivky jako na 4.1, tentokrát vývoj probíhá se zachovaným obsahem.

- Verze schématu: s redistribucí
- Počáteční křivka: tvaru draka [2]
- Funkce  $f = -\hat{\kappa} = -\frac{2\pi}{L(\Gamma)}$
- Počet bodů křivky: 450
- Konečný čas výpočtu  $T : 50$  (časový krok  $\tau : 5 \cdot 10^{-4}$ , počet časových kroků:  $10^5$ )

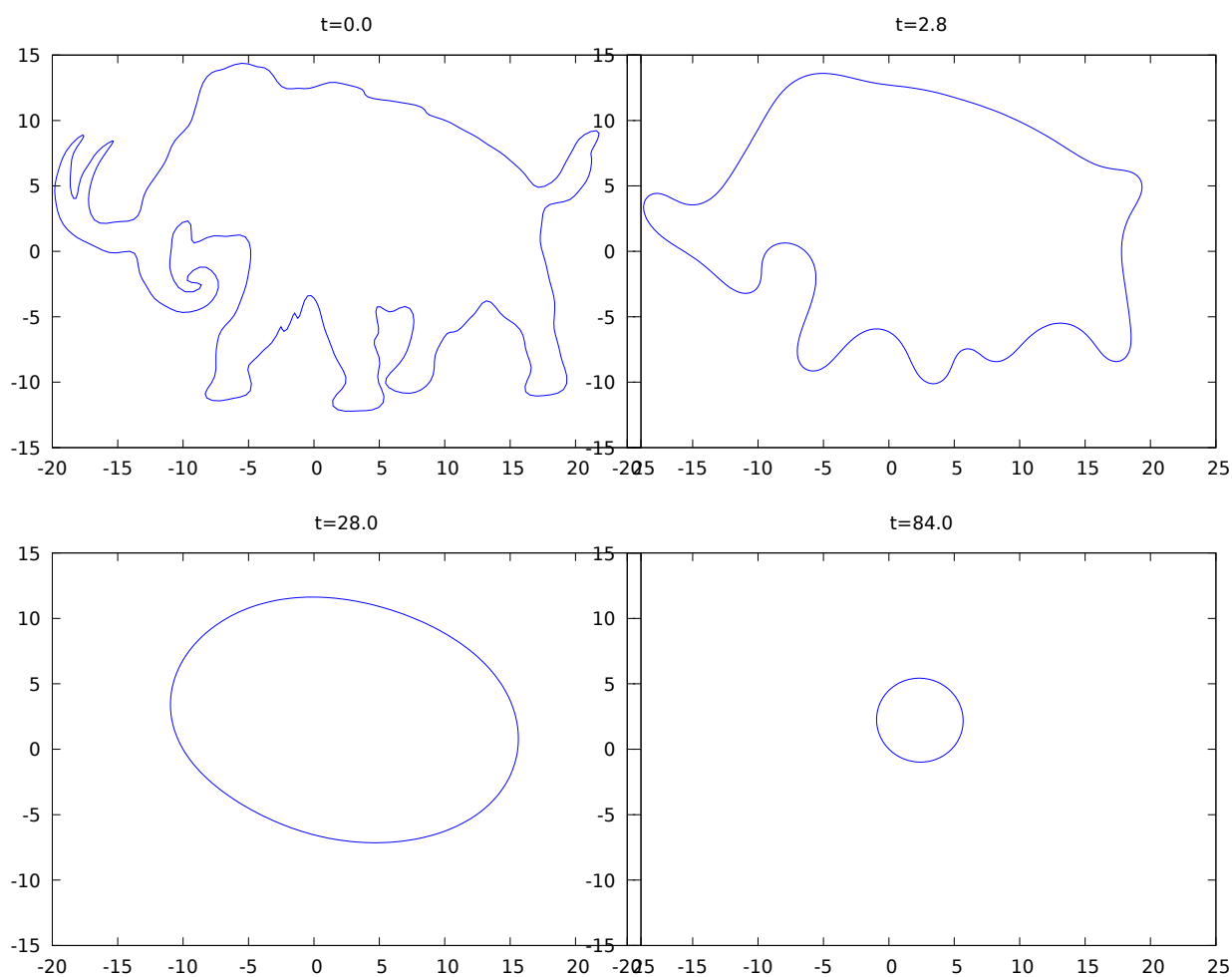


Obrázek 4.2: Počáteční křivka ve tvaru draka při pohybu zachovávajícím obsah

## Vývoj podle CSF, Jordanova křivka 2

Na obrázcích 4.3 lze pozorovat vývoj křivky tvaru mamuta. Křivka se vyvíjí podle CSF, stejně jako na obrázcích 4.1.

- Verze schématu: s redistribucí
- Počáteční křivka: tvaru mamuta [1]
- Funkce  $f = 0$
- Počet bodů křivky: 450
- Konečný čas výpočtu  $T : 84$  (časový krok  $\tau : 5 \cdot 10^{-4}$ , počet časových kroků: 168000)



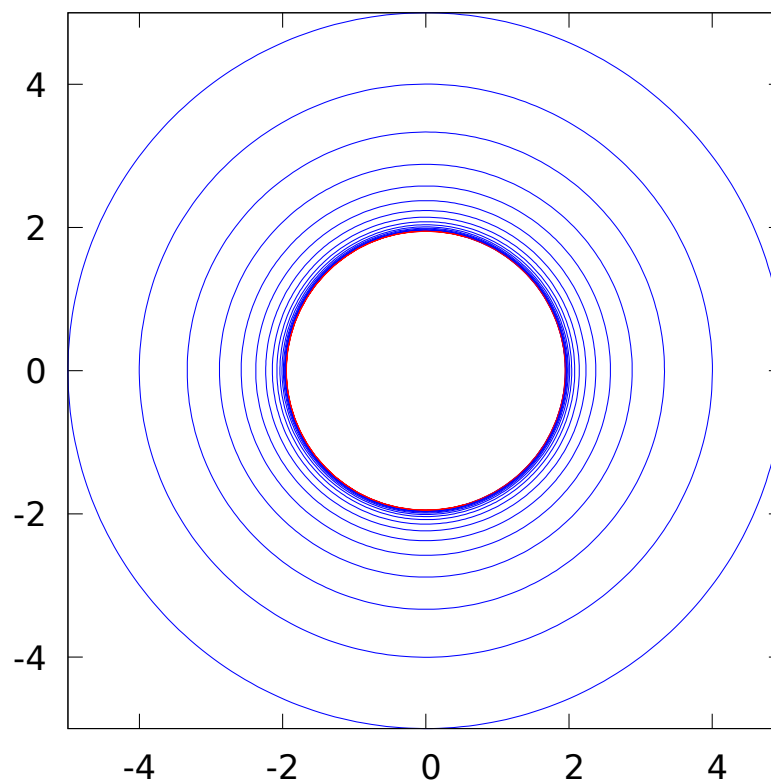
Obrázek 4.3: Počáteční křivka ve tvaru mamuta, pohyb CSF

### Vývoj s lineární funkcí vzdálenosti od počátku - kruh

Na obrázku 4.4 je vyobrazený vývoj kruhu s použitím lineární funkce vzdálenosti od počátku.

- Verze schématu: s redistribucí
- Počáteční křivka: kruh o poloměru 5
- Funkce  $f(r) = 10(r - 2)$ , za  $r$  dosazeno  $|\gamma|$ .
- Počet bodů křivky: 300
- Konečný čas výpočtu kruhu  $T : 0.8$  (časový krok  $\tau : 10^{-5}$  počet časových kroků: 80000)

t=0.0-0.8



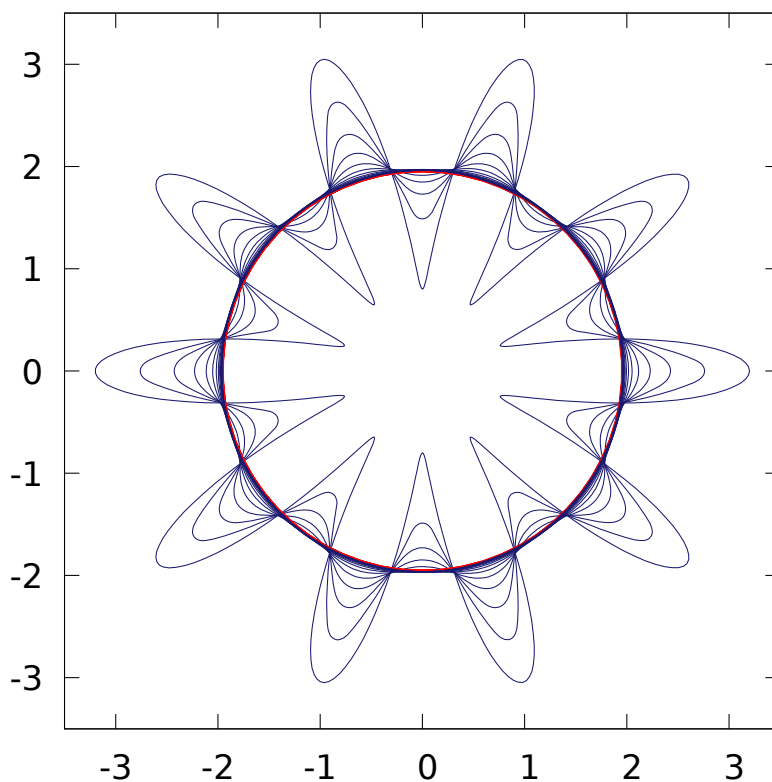
Obrázek 4.4: Vliv funkce  $f(r) = 10(r - 2)$  na vývoj kruhu o poloměru 5. Limitní kruh má poloměr  $r_+ = 1 + 0.3\sqrt{10}$ . Časový krok vyobrazených hladin je 0.04.

### Vývoj s funkcí vzdálenosti od počátku - hvězdovitá křivka

Na obrázku 4.5 je vyobrazený vývoj hvězdovité křivky s použitím lineární funkce vzdálenosti od počátku.

- Verze schématu: s redistribucí
- Počáteční křivka:  $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$   
 $x(t) = 2(1 + 0.6 \cos(10t)) \cos(t)$   
 $y(t) = 2(1 + 0.6 \cos(10t)) \sin(t)$
- Funkce  $f(r) = 10(r - 2)$ , za  $r$  dosazeno  $|\gamma|$
- Počet bodů křivky: 500
- Konečný čas výpočtu  $T : 0.4$  (časový krok  $\tau : 2 \cdot 10^{-6}$  počet časových kroků:  $2 \cdot 10^5$ )

t=0.0-0.4



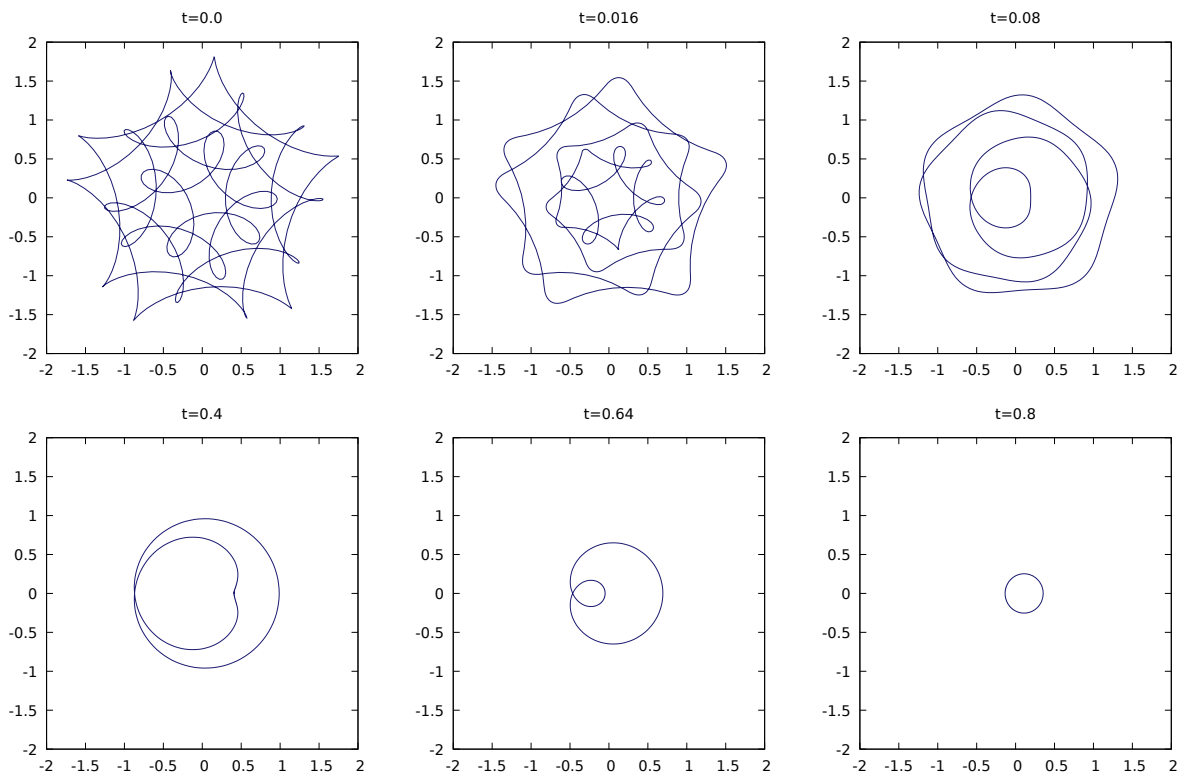
Obrázek 4.5: Vývoj křivky  $\gamma_0(t) = (2(1 + 0.6 \cos(10t)) \cos(t), 2(1 + 0.6 \cos(10t)) \sin(t))$  pod vlivem funkce závislé na vzdálenosti od počátku. Červeně vyznačený limitní kruh má poloměr  $r_+ = 1 + 0.3\sqrt{10}$ . Časový krok vyobrazených hladin je 0.02.



## Vývoj podle CSF, jednoduchá křivka 1

Na příkladě vyobrazeném na obrázcích 4.6 si ukážeme, jak se schéma (3.2) vypořádá s jednoduchou křivkou.

- Verze schématu: s redistribucí
- Počáteční křivka: ( $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ )  
 $x(t) = \cos(5t) + \cos(4t)/2 + \sin(20t)/3$   
 $y(t) = \sin(5t) + \sin(4t)/2 + \cos(20t)/3$
- Funkce  $f = 0$
- Počet bodů křivky: 450
- Konečný čas výpočtu  $T$ : 0.8 (časový krok  $\tau$ :  $10^{-6}$ , počet časových kroků: 800000)

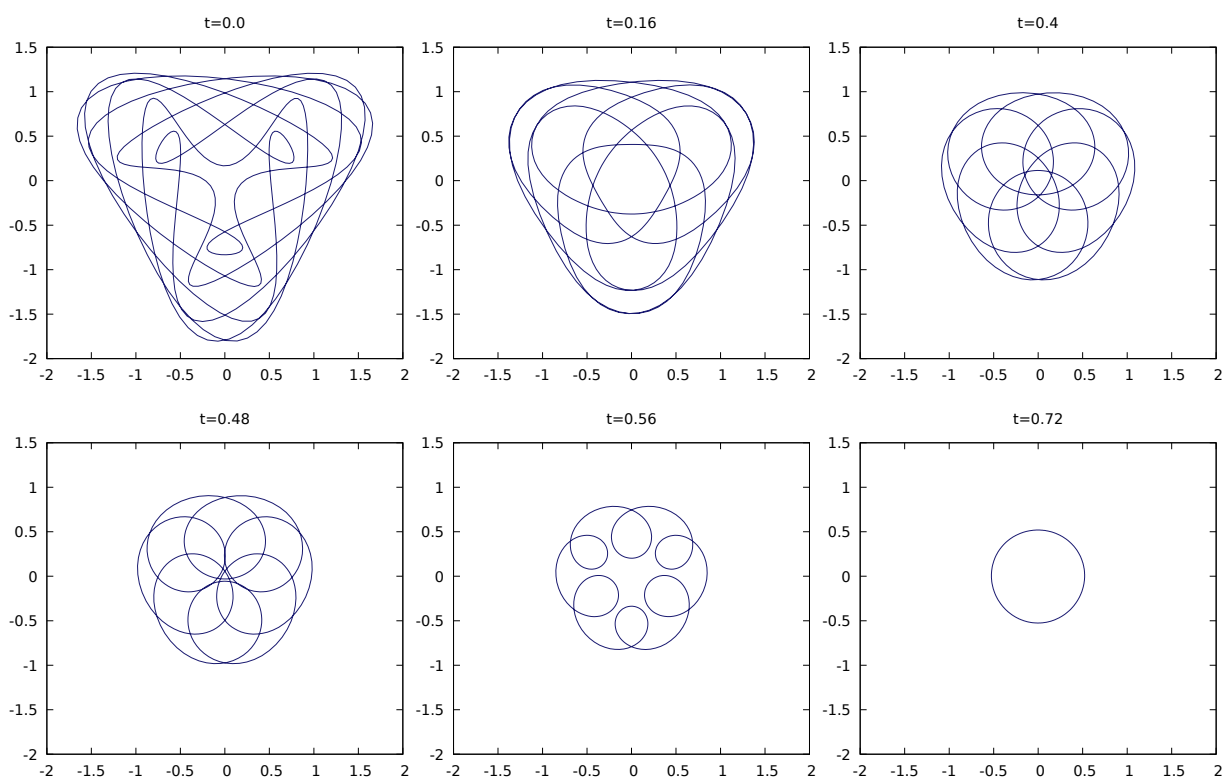


Obrázek 4.6: Nejednoduchá počáteční křivka, pohyb CSF

## Vývoj podle CSF, jednoduchá křivka 2

Další počáteční křivka, která není Jordanova. Vývoj lze pozorovat na obrázcích 4.7.

- Verze schématu: s redistribucí
- Předpis počáteční křivky: ( $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ )  
 $x(t) = \cos(7t) + \cos(13t)/2 + \sin(14t)/3$   
 $y(t) = \sin(7t) + \sin(13t)/2 + \cos(14t)/3$
- Funkce  $f = 0$
- Počet bodů křivky: 450
- Konečný čas výpočtu  $T$ : 0.8 (časový krok  $\tau$ :  $10^{-5}$ , počet časových kroků: 80000)

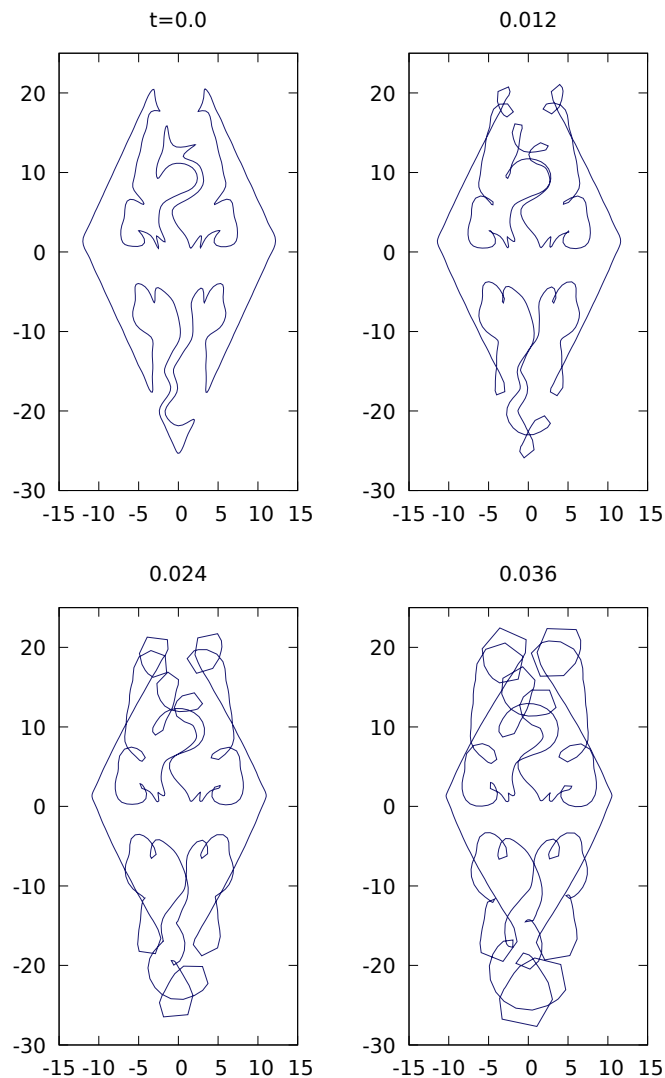


Obrázek 4.7: Další příklad jednoduché počáteční křivky vyvíjející se podle CSF

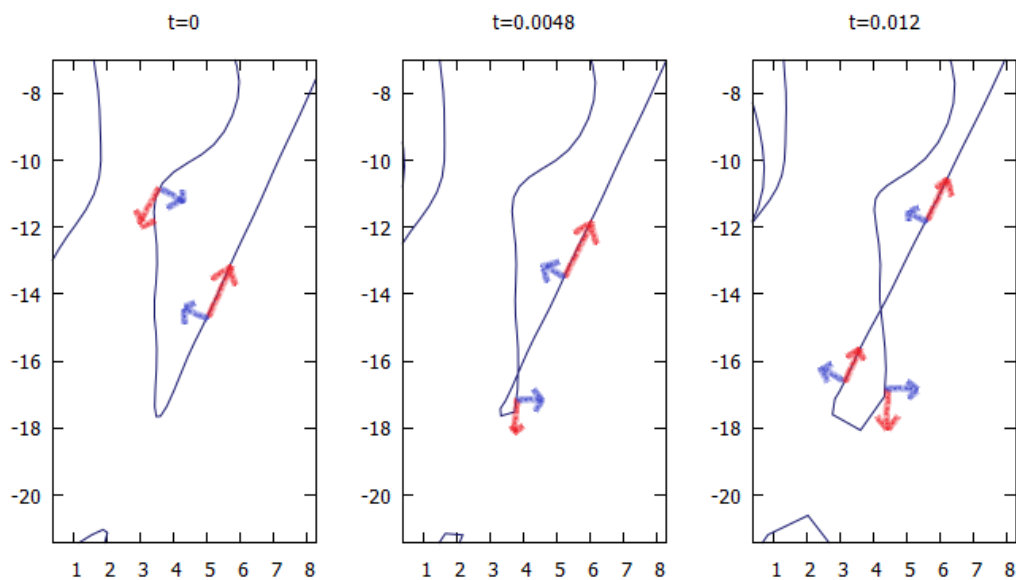
### Příklad nesprávného vývoje

V případě příliš silné funkce může dojít k topologickým změnám, po kterých již vývoj není správný - může dojít k obratu normály jako na obrázcích 4.8.

- Verze schématu: s redistribucí
- Počáteční křivka: tvaru draka [2]
- Funkce:  $f(r) = 5(r - 2)$ , za  $r$  dosazeno  $|\gamma|$
- Počet bodů křivky: 600
- Konečný čas výpočtu  $T$ : 0.036 (časový krok  $\tau$ :  $10^{-7}$ , počet časových kroků: 360000)



Obrázek 4.8: Příklad nesprávného vývoje křivky



Obrázek 4.9: Výřez z vývoje na obrázcích 4.8. Červenou šipkou vyznačen směr tečného vektoru, modrou šipkou směr normálového vektoru. Počáteční křivka je kladně orientovaná.

# Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s možnostmi popisu křivek pomocí diferenciální geometrie a následně použít tyto znalosti ke studiu úloh týkajících se dynamiky křivek.

V první kapitole jsme prostudovali matematický popis křivek. Zmínili jsme například větu o otáčejících se tečnách, díky které jsme odvodili některé zajímavé vlastnosti křivek.

Druhá kapitola pojednávala převážně o matematických vlastnostech rovinného pohybu křivek podle křivosti s využitím informací z první kapitoly.

Ve třetí kapitole jsme sestrojili vlastní numerická schémata řešící úlohu ze druhé kapitoly. Schémata byla explicitní. Zkonstruovali jsme schéma využívající tangenciální redistribuci a tím vylepšili vlastnosti schématu. Řešení spočtené pomocí schémat bez redistribuce i s redistribucí jsme porovnali s analytickým řešením.

V poslední kapitole jsme aplikovali schéma s redistribucí ze třetí kapitoly na různé počáteční křivky. Ověřili jsme funkčnost schématu při aplikaci na jednoduché i nejednoduché křivky. Dále jsme uvedli příklad vývoje, kdy došlo ke vzniku smyčky opačné orientace. Důsledkem byl nesprávný další vývoj na této smyčce.

Do budoucna se zaměříme na vývoj numerických schémat, která by byla stabilnější a efektivnější. Další směr výzkumu se bude zabírat například hyperbolickým pohybem podle křivosti, který vychází z Newtonova pohybového zákona.



# Seznam použitých zdrojů

- [1] Mammoth curve - Wolfram|Alpha. [https://www.wolframalpha.com/input/?i=mammoth+curve&assumption=ClashPrefs\\_\\*PopularCurve.MammothCurve-](https://www.wolframalpha.com/input/?i=mammoth+curve&assumption=ClashPrefs_*PopularCurve.MammothCurve-), datum návštěvy webu: 20.7.2020.
- [2] Skyrim shape-like curve - Wolfram|Alpha. <https://www.wolframalpha.com/input/?i=Skyrim+shape%E2%80%90like+curve&assumption=%22ClashPrefs%22+-%3E+%7B%22PopularCurve%22%2C+%22SkyrimCurve%22%7D>, datum návštěvy webu: 20.7.2020.
- [3] Altschuler, S. J.; Grayson, M. A.: Shortening space curves and flow through singularities. *J. Differential Geometry*, ročník 35, 1992: s. 283–298.
- [4] Beneš, M.; Kimura, M.; Pauš, P.; aj.: Application of a Curvature Adjusted Method in Image Segmentation. *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica (New Series)*, ročník 3, 2008: s. 509–523.
- [5] Beneš, M.; Kratochvíl, J.; Křišťan, J.; aj.: A parametric simulation method for discrete dislocation dynamics. *European Phys. J. ST*, ročník 177, 2009: s. 177–192.
- [6] Beneš, M.; Chalupecký, V.; Mikula, K.: Geometrical Image Segmentation by the Allen-Cahn Equation. *Appl. Numer. Math.*, ročník 51, č. 2-3, Listopad 2004: s. 187–205, ISSN 0168-9274.
- [7] Beneš, M.: Mathematical analysis of phase-field equations with numerically efficient coupling terms, Interfaces and Free Boundaries 3. *Interfaces and Free Boundaries*, ročník 3, 2001: s. 201–221.
- [8] Beneš, M.; Chalupecký, V.; Mikula, K.: Geometrical Image Segmentation by the Allen-Cahn Equation. *Applied Numerical Mathematics*, ročník 51, 2004: s. 187–205.
- [9] Beneš, M.; Ševčovič, D.; Kolář, M.: Curvature driven flow of a family of interacting curves with applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, ročník 43, 2020: s. 4177–4190.
- [10] Cao, F.: *Geometric Curve Evolution and Image Processing*. Berlin: Springer, 2003.
- [11] Chudý, J.: *Zpracování obrazu pomocí degenerovaných parabolických parciálních diferenciálních rovnic*. Diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, obor Matematické inženýrství, 2015.
- [12] Colding, T. H.; Minicozzi, W. P.; Pedersen, E. K.: Mean Curvature Flow. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, ročník 52(2), duben 2015: s. 297–333.

- [13] Deckelnick, K.: Weak solutions of the curve shortening flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, ročník 5, č. 6, 1997: s. 489–510.
- [14] Dexing, K.; Kefeng, L.; Zenggui, W.: Hyperbolic mean curvature flow: evolution of plane curves. *Acta Mathematica Scientia*, ročník 29, Květen 2009: s. 493–514.
- [15] Dolcetta, I. C.; Vita, S. F.; March, R.: Area preserving curve shortening flows: from phase separation to image processing. *Interfaces and Free Boundaries*, ročník 4, 2002: s. 325–343.
- [16] Dvořák, P.: *Matematické modelování mikrostruktur při fázových přechodech*. Diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, obor Matematické inženýrství, 2010.
- [17] Dziuk, G.; Deckelnick, K.; Elliott, C. M.: Computation of geometric partial differential equations and mean curvature flow. *Acta Numerica*, ročník 14, 2005: s. 139–232.
- [18] Gage, M.: Curve shortening makes convex curves circular. *Invent. Math.*, ročník 76, 1984: s. 357–364.
- [19] Gage, M.: On an area-preserving evolution equation for plane curves. *Contemp. Math.*, ročník 51, 1986: s. 51–62.
- [20] Gage, M.; Hamilton, R. S.: The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geometry*, ročník 23, 1986: s. 69–96.
- [21] Grayson, M.: The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. Differential Geom.*, ročník 26, 1987: s. 285–314.
- [22] Gurtin, M. E.: On the Two-Phase Stefan Problem with Interfacial Energy and Entropy. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, ročník 96, Září 1986: s. 199–241.
- [23] Kolář, M.: *Motion of Curves with the Application to Dislocation Dynamics*. Dizertační práce, FJFI ČVUT v Praze, obor Matematické inženýrství, 2018.
- [24] Kublik, C.; Esedoğlu, S.; Fessler, J. A.: Algorithms for Area Preserving Flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, ročník 33, č. 5, 2011: s. 2382–2401.
- [25] Martín, F.; Pérez, J.: An Introduction to the Mean Curvature Flow, Září 2014, notes of a minicourse held during International Fall Workshop on Geometry and Physics in Grenada, Spain.
- [26] Mikula, K.: *Image processing with partial differential equations*, ročník 75. Dodrecht: Kluwer Academic Publishers, první vydání, 2002, s. 283–322.
- [27] Mikula, K.; Ševčovič, D.: Computational and qualitative aspects of evolution of curves driven by curvature and external force. *Computing and Visualization in Science*, ročník 6, č. 4, 2004: s. 211–225.
- [28] Minárik, V.; Beneš, M.; Kratochvíl, J.: Simulation of dynamical interaction between dislocations and dipolar loops. *J. Appl. Phys.*, ročník 107, 2010: str. 061802.
- [29] Minarčík, J.: *Space Curve Evolution and its Applications*. Diplomová práce, FJFI ČVUT v Praze, obor Matematické inženýrství, 2018.
- [30] Oberhuber, T.: *Numerical Solution of Willmore Flow*. Dizertační práce, FJFI ČVUT v Praze, obor Matematické inženýrství, 2009.



- [31] Paragios, N.; Osher, S.: *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. New York: Springer, druhé vydání, 2003.
- [32] Pauš, P.; Kratochvíl, J.; Beneš, M.: A dislocation dynamics analysis of the critical cross-slip annihilation distance and the cyclic saturation stress in fcc single crystals at different temperatures. *Acta Materialia*, ročník 61, č. 20, 2013: s. 7917 – 7923.
- [33] Perona, P.; Malik, J.: Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, ročník 12, č. 7, Červenec 1990: s. 629–639.
- [34] Rotskoff, G.: *The Gauss-Bonnet Theorem*, 2010, university of Chicago, Department of Mathematics.
- [35] Sethian, J.: *Level Set Methods*. Cambridge: Cambridge University Press, první vydání, 1996.
- [36] Ševčovič, D.: Qualitative and quantitative aspects of curvature driven flows of planar curves. In *Topics on partial differential equations, Lecture notes*, ročník 2, editace P. Kaplický; Š. Nečasová, Prague: Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling, MATFYZPRESS, Charles University in Prague, 2007, s. 55–119.
- [37] Sharipov, R. A.: *Course of Differential Geometry: textbook*. Ufa: Bashkir State University, první vydání, 1996.
- [38] Strachota, P.: *Analysis and Application of Numerical Methods for Solving Nonlinear Reaction-Diffusion Equations*. Dizertační práce, FJFI ČVUT v Praze, obor Matematické inženýrství, 2012.
- [39] Taylor, J. E.; Cahn, J. W.: Linking Anisotropic Sharp and Diffuse Surface Motion Laws via Gradient Flows. *Journal of Statistical Physics*, ročník 77, 1994: s. 183–197.
- [40] Tichonov, A. N.; Samarskij, A. A.: *Rovnice matematické fyziky*. Praha: ČSAV, první vydání, 1953.
- [41] Yazaki, S.: An Area-Preserving Crystalline Curvature Flow Equation. In *Topics in Mathematical Modeling, Lecture notes*, ročník 4, editace M. Beneš; E. Feireisl, Prague: Jindřich Nečas Center for Mathematical Modeling, MATFYZPRESS, Charles University in Prague, 2008, s. 169–213.
- [42] Čech, E.: *Bodové množiny*. Praha: Academia, druhé vydání, 1966.