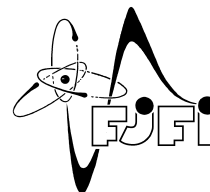


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Obor: Matematické inženýrství
Zaměření: Matematické modelování

Matematické metody fraktální geometrie

Mathematical Methods in Fractal Geometry

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Autor: Michaela Diasová
Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš
Rok: 2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Michaela Diasová
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Matematické modelování
Název práce (česky):	Matematické metody fraktální geometrie
Název práce (anglicky):	Mathematical Methods in Fractal Geometry

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s odpovídajícími pojmy teorie funkcí, topologie, bodových množin a geometrie v bodových množinách.
2. Vyhledejte příklady geometricky složitých množin z teorie funkcí, topologie a teorie bodových množin.
3. Seznamte se se základními matematickými nástroji pro popis a analýzu geometricky složitých množin.
4. Seznamte se s prostředky vizualizace geometricky složitých množin.
5. Vyhledejte nejnovější výsledky v oblasti matematické analýzy těchto množin.

Doporučená literatura:

1. P. S. Aleksandrov, Úvod do obecné theorie množin a funkcí. Nakl. ČSAV, Praha, 1954.
2. G. A. Edgar, Measure, Topology and Fractal Geometry. Springer Verlag, 1990.
3. K. Falconer, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Wiley, 3rd ed. (February 3), 2014.
4. H.-O. Peitgen, P. H. Richter, The Beauty of Fractals. Springer Verlag, New York, 1986.
5. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science, Springer Verlag, New York, 1992.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

prof. Dr. Ing. Michal Beneš

Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13 , 120 00 Praha 2


Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

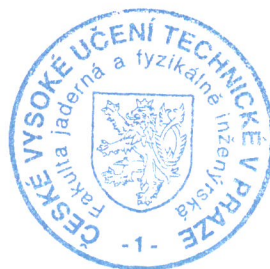
Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019


.....
garant oboru


.....
vedoucí katedry




.....
děkan

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne 24.7.2020

Michaela Diasová

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala svému školiteli prof. Dr. Ing. Michalu Benešovi za vedení mé práce, mnoho rad a čas, který mi po celou dobu věnoval.

Michaela Diasová

Název práce:

Matematické metody fraktální geometrie

Autor: Michaela Diasová

Obor: Matematické inženýrství

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: prof. Dr. Ing. Michal Beneš
Katedra matematiky
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
České vysoké učení technické v Praze

Konzultant: —

Abstrakt: Tato práce se zabývá základními pojmy z fraktální geometrie, představuje významné geometricky složité množiny a popisuje jejich vlastnosti. Tyto množiny jsou zkoumány z hlediska topologie, teorie míry a geometrie. Jsou zde definovány horní a dolní induktivní dimenze a zkoumány jejich sumační vlastnosti. Dále je představena Hausdorffova míra a dimenze společně s dalšími využívanými fraktálními dimenzemi. Následně jsou zde popsány systémy iterovaných funkcí a jejich rekurentní varianta. V závěrečné části jsou vizualizovány některé z geometricky složitých množin pomocí algoritmu chaos game, který tyto systémy využívá, a jsou zde představeny dva způsoby obarvení těchto množin.

Klíčová slova: fraktální geometrie, Hausdorffova dimenze, chaos game, induktivní dimenze, systém iterovaných funkcí

Title:

Mathematical Methods in Fractal Geometry

Author: Michaela Diasová

Abstract: This thesis deals with basic terms of fractal geometry, presents considerable geometrically complex sets and describes its properties. These sets are analyzed in terms of topology, measure theory and geometry. The large and small inductive dimensions are defined and their sum attributes are studied there. Afterwards, the Hausdorff measure and dimension are defined together with other used fractal dimensions. Subsequently, the iterated function systems and their recurrent version are described there. In the final part can be found visualization of some of the geometrically complex sets using the chaos game algorithm, which exploits these systems, and two methods of coloring these sets are introduced.

Key words: fractal geometry, Hausdorff dimension, chaos game, inductive dimension, iterated function system

Obsah

Úvod	1
1 Příklady fraktálních množin	3
1.1 Cantorovo diskontinuum	3
1.2 Sierpiňského trojúhelník	8
1.3 Sierpiňského čtverec	9
1.4 Kochova křivka	10
1.5 Barnsleyho kapradina	12
1.6 Juliovy množiny	13
1.7 Mandelbrotova množina	14
1.8 Fraktály komplexní dynamiky ve vyšších dimenzích	15
2 Bodové množiny	17
2.1 Topologie a metrické prostory	17
2.2 Reálná osa	19
3 Topologické dimenze	23
3.1 Dolní induktivní dimenze	23
3.2 Horní induktivní dimenze	25
3.3 Prostory nulové dimenze	26
3.4 Sumační vlastnosti	28
4 Hausdorffova dimenze	33
4.1 Míra a vnější míra	33
4.2 Hausdorffova míra	38
4.3 Hausdorffova dimenze	38
4.4 Další fraktální dimenze	40
4.4.1 Mřížková dimenze	40
5 Soběpodobnost	43
5.1 Systémy iterovaných funkcí	43
5.1.1 Hausdorffův nadprostor	45
5.1.2 Collage theorem	47
5.2 Rekurentní systémy iterovaných funkcí	48
5.3 L-systémy	49

6	Vizualizace geometricky složitých množin	51
6.1	Chaos game	51
6.2	Vizualizace mnohoúhelníků	52
6.2.1	Sierpiňského trojúhelník	52
6.2.2	Čtverec	55
6.2.3	Pětiúhelník	58
6.2.4	Šestiúhelník	64
	Závěr	69
	Seznam použité literatury	71

Úvod

Tato práce se zabývá významnými pojmy ve fraktální geometrii, vlastnostmi nejnámějších fraktálů, několika způsoby, kterými lze toto téma nahlížet z matematického hlediska, a vizualizací jednoduchých fraktálních množin.

Na počátku práce jsou představeny některé z geometricky složitých množin. Tyto množiny byly v historii často považovány za takzvaná matematická monstra, tedy množiny s neobvyklými vlastnostmi. Jejich zkoumání vyžaduje propojení několika oblastí matematiky, fyziky a informatiky, proto se i v této práci zabýváme danými množinami z několika pohledů.

Co to tedy fraktál respektive fraktální množina je? Přesná a uspokojivá definice fraktálu dodnes neexistuje. V dnešní době je za základní matematickou definici považována ta, kterou představil v roce 1975 Benoit B. Mandelbrot. Ta říká, že fraktál je taková množina, jejíž Hausdorffova dimenze je větší než dimenze topologická. V této práci jsou zavedeny oba pojmy, se kterými tato definice pracuje, a jsou představeny jejich vlastnosti. Fraktály tímto způsobem zkoumáme na jedné straně z pohledu teorie míry a na straně druhé z pohledu topologie metrických prostorů.

Typickou vlastností fraktálních množin je jejich odlišnost od množin v klasické geometrii. Fraktály jsou nepravidelné, často rekurzivně konstruované a na rozdíl od ostatních množin jejich nepravidelnosti nemizí ani při změně měřítka, tedy při přiblížení detailu množiny. Říkáme, že tyto množiny jsou soběpodobné. Tímto tématem se zabývá další z kapitol práce, ve které je rozvedena problematika systémů iterovaných funkcí a jejich rekurentní varianta. Pomocí těchto systémů pak můžeme fraktály jednoduše konstruovat.

Fraktály jsou tolik zajímavé také proto, že jejich geometrie je pro přírodu mnohem přirozenější než geometrie euklidovská. Jedním z popsaných a zkoumaných fraktálů je například pobřeží Velké Británie. Dalšími objekty, které mají fraktální strukturu, jsou například hory, stromy, mraky ale také neurony v lidském těle. Díky tomu se fraktály často využívají v počítačové grafice. S tím souvisí také problém vizualizace, kterým se práce zabývá ve své závěrečné kapitole. Speciálně je představen algoritmus chaos game, pomocí kterého lze některé fraktály vykreslit. Jsou zde také uvedeny výsledky praktické části, jejímž cílem bylo vizualizovat jednoduché fraktály pomocí klasických a rekurentních systémů iterovaných funkcí.

Tato práce vznikla v rámci výzkumných prací projektu „Centrum pokročilých aplikovaných přírodních věd“ č. CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_019/0000778 MŠMT ČR.

Kapitola 1

Příklady fraktálních množin

V této kapitole budou představeny základní a zároveň nejznámější příklady fraktálů a jejich hlavní vlastnosti.

Za otce fraktální geometrie je považován B. B. Mandelbrot, ale první popisy fraktálních množin lze najít už u matematiků druhé poloviny 19. století, mezi které patřili například G. Cantor, G. Peano nebo D. Hilbert. Více viz např. v [1]. V té době byly ale tyto množiny považovány spíše za podivné výjimky mezi ostatními.

1.1 Cantorovo diskontinuum

První množinou, kterou si představíme, je Cantorovo diskontinuum, někdy známé také jako Cantorova množina či Cantorův prach. Poprvé jej publikoval G. Cantor v roce 1883 jako příklad tzv. perfektní množiny, která však není hustá v žádném svém bodě, viz Věty 2.2.7, 2.2.8.

Autor

Georg Cantor, celým jménem Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, se narodil v roce 1845 v ruském Petrohradu. Jeho otec byl dánský obchodník vyznávající luteránství, zatímco matka pocházela ze známé ruské hudebnické rodiny. Mladý Georg vystudoval Realschule v Darmstadtu, kde byly rychle rozpoznány jeho matematické schopnosti. Jeho další kroky nakonec vedly na Univerzitu v Berlíně, kde se setkal s mnoha významnými matematiky své doby a kde získal doktorát. V roce 1869 pak začal učit na univerzitě v Halle, která se stala jeho Alma Mater a kde se také stal profesorem.

Jeho práce se zabývá zejména teorií množin, které přinesl mnoho nových poznatků jako například zavedení ordinálních a kardinálních čísel. Jeho neúspěšná snaha dokázat hypotézu kontinua však nakonec vedla až k depresím a postupnému odklonu od matematiky. Začal se více zabývat historií, literaturou a teologií, která mu díky jeho otci byla také blízká. Nakonec však matematiku přednášet nepřestal a na univerzitě v Halle působil až do roku 1904. Další zajímavé informace o tomto významném matematikovi je možné najít v [2, 3].

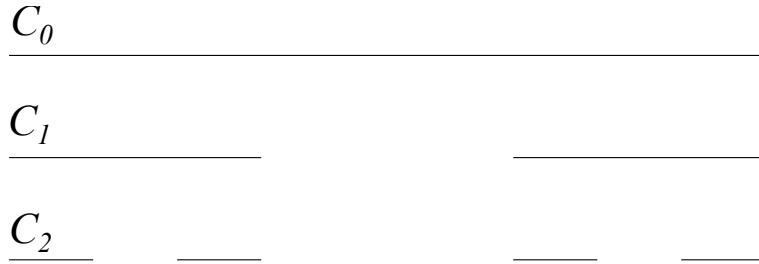
Konstrukce množiny

Cantorovo diskontinuum je množina nekonečně mnoha bodů z intervalu $[0, 1]$. Vzniká z uzavřeného intervalu $C_0 = [0, 1]$ vyjmutím otevřeného intervalu odpovídajícímu prostřední třetině. Dostáváme tak množinu $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. V dalším kroku opět odstraníme prostřední třetiny nově vzniklých

intervalů. Tento postup opakujeme, viz Obrázek 1.1, a generujeme posloupnost C_n takovou, že $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \cdots$. Cantorovo diskontinuum potom definujeme jako

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k. \quad (1.1)$$

Posloupnost množin je definována rekurzivně. Je tedy vidět, že v k -tém kroku je délka jednotlivých intervalů $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ a součet všech intervalů množiny C_k je $\left(\frac{2}{3}\right)^k$. Limitně jde tento součet k nule.



OBRÁZEK 1.1: Konstrukce Cantorova diskontinua

Rozeberme si nyní konstrukci Cantorovy množiny ještě jednou. K původnímu značení si nyní přidáme ještě další, které nám usnadní dokazování následujících tvrzení.

Vezmeme opět uzavřený interval $C_0 = [0, 1] = \Delta$ a řekneme, že je to interval nultého řádu. Nyní interval rozdělíme na tři shodně dlouhé části a víme, že $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Označíme tedy jednotlivé intervaly jako $\Delta_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ a $\Delta_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ a nazýváme je uzavřenými intervaly prvního řádu. Evidentně tedy $C_1 = \Delta_0 \cup \Delta_1$. Interval $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ potom ještě nazýváme otevřeným intervalem prvního řádu a označujeme ho δ . Nyní vezmeme uzavřené intervaly Δ_0, Δ_1 a ty opět rozdělíme a vezmeme jejich první a třetí třetinu. Tím dostaneme uzavřené intervaly druhého řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta_{00} &= \left[0, \frac{1}{9}\right], & \Delta_{01} &= \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] & (\text{na intervalu } \Delta_0), \\ \Delta_{10} &= \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], & \Delta_{11} &= \left[\frac{8}{9}, 1\right] & (\text{na intervalu } \Delta_1) \end{aligned}$$

a samozřejmě také otevřené intervaly prvního řádu ležící mezi nimi

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) & (\text{prostřední třetina } \Delta_0), \\ \delta_1 &= \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) & (\text{prostřední třetina } \Delta_1). \end{aligned}$$

Takto pokračujeme dále. Předpokládejme, že jsme už sestrojili 2^n uzavřených intervalů n -tého řádu, tj. máme intervaly $\Delta_{i_1 \dots i_n}$, kde $i_j \in \{0, 1\}$ pro všechna $j \in \hat{n}$. Každý interval $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ rozdělíme na tři intervaly. První uzavřený interval označíme jako $\Delta_{i_1 \dots i_n 0}$, druhý otevřený jako $\delta_{i_1 \dots i_n}$ a třetí opět uzavřený jako $\Delta_{i_1 \dots i_n 1}$. Toto jsou pak intervaly $n+1$ -ního řádu. Zároveň stále platí, že $C_n = \bigcup_{j \in \hat{n}} \Delta_{i_1 \dots i_n}$, kde $i_j \in \{0, 1\}$ pro všechna $j \in \hat{n}$ a $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Vlastnosti množiny

Každý bod, který je krajním bodem alespoň jednoho z intervalů v libovolném C_k , patří také do množiny C , proto je tato množina nekonečná. Je ale důležité podotknout, že tyto body nejsou jediné, které množina C obsahuje.

Jednou z výhodných variant, jak zapisovat jednotlivé body Cantorova diskontinua, je zápis pomocí triadického rozvoje. Každé číslo mezi 0 a 1 lze totiž zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j 3^j, \text{ kde } a_j \in \{0, 1, 2\}.$$

Bodu $x \in [0, 1]$ lze tedy přiřadit rozvoj $x = (0.a_1 a_2 \dots)_3$. Je nutné navíc zmínit, že čísla ve tvaru $\frac{1}{3^k}$ je možné zapsat dvěma různými rozvoji. Například

$$\frac{1}{3} = (0.1000\dots)_3 = (0.0222\dots)_3.$$

Věta 1.1.1. Buď $x \in [0, 1]$. Pak x je bodem Cantorova diskontinua, právě když x má v triadickém rozvoji pouze číslice 0 a 2.

Důkaz: Podíváme-li se na čísla, které mají ve svém rozvoji 1 na prvním místě, zjistíme, že jsou to čísla mezi $\frac{1}{3} = (0.1000\dots)_3$ a $\frac{2}{3} = (0.1222\dots)_3$. Víme navíc, že právě tyto body mají také rozvoj, který 1 neobsahuje. Dostáváme tedy přesně otevřený interval prvního řádu $\delta = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, který odstraňujeme v prvním kroku. Máme tedy množinu C_1 , která neobsahuje 1 na prvním desetinném místě.

Body, které mají 1 nutně na druhém desetinném místě lze obdobně zapsat jako otevřené intervaly druhého řádu δ_0 a δ_1 . Z toho tedy plyne, že C_2 nemá jedničky na prvním ani druhém desetinném místě.

Pokračujeme-li dále, vidíme, že body, které zůstaly v $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$, odpovídají přesně číslům, které v triadickém rozvoji neobsahují 1. \square

Poznámka 1.1.2. Je tedy vidět, že do Cantorovy množiny patří i jiné body než krajní body intervalů $\Delta_{i_1 \dots i_n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jako příklad můžeme uvést

$$\frac{1}{4} = (0.0202\dots)_3.$$

Věta 1.1.3. Každý interval $\Delta_{i_1 \dots i_n}$, kde $i_j \in \{0, 1\}$ pro všechna $j \in \hat{n}$, lze pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ zapsat ve tvaru

$$\Delta_{i_1 \dots i_n} = \left[\sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j}, \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^n} \right]. \quad (1.2)$$

Důkaz: Řešíme matematickou indukci na n :

- Pro $n = 0$:
Dostáváme $\Delta = [0, 1]$, což platí z definice.
- Indukční krok $n \rightarrow n + 1$:
Předpokládáme, že máme interval

$$\left[\sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j}, \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^n} \right].$$

Chceme z něj vyjmout prostřední třetinu ve tvaru $\delta_n = (a, b)$, jejíž krajní body vypočteme následujícím způsobem.

$$a = \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{\sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^n} - \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j}}{3} = \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}},$$

$$b = \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + 2 \cdot \frac{\sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^n} - \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j}}{3} = \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{2}{3^{n+1}}.$$

Díky tomu také dostáváme uzavřené intervaly $\Delta_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}$ jako

$$\Delta_{i_1 \dots i_n 0} = \left[\sum_{j=1}^n \frac{2}{3^j} i_j, \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}} \right] = \left[\sum_{j=1}^{n+1} \frac{2i_j}{3^j}, \sum_{j=1}^{n+1} \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}} \right],$$

$$\Delta_{i_1 \dots i_n 1} = \left[\sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{2}{3^{n+1}}, \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^n} \right] = \left[\sum_{j=1}^{n+1} \frac{2i_j}{3^j}, \sum_{j=1}^{n+1} \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}} \right].$$

Z toho už ale plyne, že

$$\Delta_{i_1 \dots i_{n+1}} = \left[\sum_{j=1}^{n+1} \frac{2i_j}{3^j}, \sum_{j=1}^{n+1} \frac{2i_j}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}} \right],$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 1.1.4. Cantorova množina C splňuje rovnost

$$C = f_1[C] \cup f_2[C], \text{ kde} \tag{1.3}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Důkaz: Indukce na n :

- Pro $n = 0$:

Máme interval $C_0 = [0, 1]$. Pomocí funkcí f_1, f_2 dostáváme

$$f_1[[0, 1]] \cup f_2[[0, 1]] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] = C_1.$$

- Indukční krok $n \rightarrow n + 1$:

Nyní se podíváme, jak funkce f_1, f_2 působí na uzavřené intervaly n -tého řádu $\Delta_{i_1 \dots i_n}$.

$$\begin{aligned} f_1[\Delta_{i_1 \dots i_n}] &= \left[\sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^{j+1}}, \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^{j+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right] \\ &= \left[\sum_{j=2}^{n+1} \frac{2i_{j-1}}{3^j}, \sum_{j=2}^{n+1} \frac{2i_{j-1}}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}} \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n+1} \frac{2\tilde{i}_j}{3^j}, \sum_{j=1}^{n+1} \frac{2\tilde{i}_j}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}} \right], \text{ kde } \tilde{i}_1 = 0 \text{ a } \tilde{i}_j = i_{j-1} \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, n+1\} \end{aligned}$$

Tím však dostáváme

$$f_1[\Delta_{i_1 \dots i_n}] = \Delta_{\widetilde{i}_1, \dots, \widetilde{i}_{n+1}} = \Delta_{0i_1, \dots, i_n}.$$

Obdobně to ukážeme pro f_2 .

$$\begin{aligned} f_2(\Delta_{i_1 \dots i_n}) &= \left[\sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^{j+1}} + \frac{2}{3}, \sum_{j=1}^n \frac{2i_j}{3^{j+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3} \right] \\ &= \left[\sum_{j=2}^{n+1} \frac{2i_{j-1}}{3^j} + \frac{2}{3}, \sum_{j=2}^{n+1} \frac{2i_{j-1}}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3} \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n+1} \frac{2\widetilde{i}_j}{3^j}, \sum_{j=1}^{n+1} \frac{2\widetilde{i}_j}{3^j} + \frac{1}{3^{n+1}} \right], \text{ kde } \widetilde{i}_1 = 1 \text{ a } \widetilde{i}_j = i_{j-1} \quad \forall j \in \{2, 3, \dots, n+1\} \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy

$$f_2(\Delta_{i_1 \dots i_n}) = \Delta_{\widetilde{i}_1, \dots, \widetilde{i}_{n+1}} = \Delta_{1i_1, \dots, i_n}.$$

Protože $C_n = \bigcup_{j \in \widehat{n}} \Delta_{i_1 \dots i_n}$, kde $i_j \in \{0, 1\}$, dostáváme

$$\begin{aligned} f_1(\Delta_{i_1 \dots i_n}) &= \bigcup_{j \in \widehat{n}} \Delta_{0i_1 \dots i_n} \quad i_j \in \{0, 1\}, \\ f_2(\Delta_{i_1 \dots i_n}) &= \bigcup_{j \in \widehat{n}} \Delta_{1i_1 \dots i_n} \quad i_j \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Z toho už plyne, že $C_{n+1} = f_1(C_n) + f_2(C_n)$.

Nyní musíme ještě ukázat, že obdobná rovnost platí pro $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. To ukážeme přes dvě inkluze.

– $C \subseteq f_1[C] \cup f_2[C]$:

Vezmeme si $x \in C$, pak pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $x \in C_n$. Je tedy pravda, že $x \in C_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To podle důkazu výše znamená, že $x \in f_1[C_n] \cup f_2[C_n]$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme $x \in f_1[C_n]$. Z toho pak plyne, že $\exists x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = C$, a tedy $x \in C$.

Pro $x \in f_2[C_k]$ postupujeme obdobně.

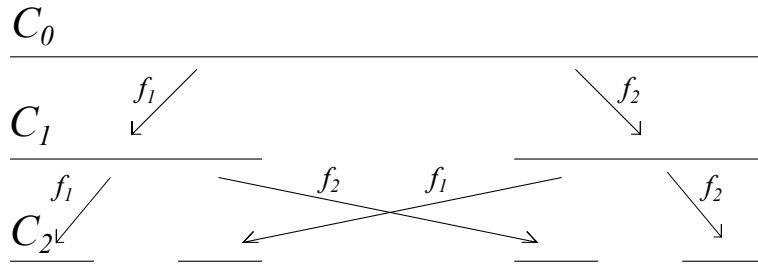
– $f_1[C] \cup f_2[C] \subseteq C$:

Bud $x \in f_1[C] \cup f_2[C]$, pak $x \in f_1[C]$ nebo $x \in f_2[C]$. Opět bereme případ, kdy $x \in f_1[C]$. Opačný případ bychom dokázali obdobně. Dostáváme pak, že $\exists x \in C$. Proto musí platit, že $\exists x \in C_n$ resp. $x \in f_1[C_n] \subseteq C_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak už ale

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{n+1} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n = C.$$

□

Poznámka 1.1.5. Konstrukce důkazů pro Věty 1.1.3, 1.1.4 jsou původním výsledkem práce. Závěrečná část druhého z nich byla upravena podle [4].



OBRÁZEK 1.2: Působení funkcí f_1, f_2 na množiny C_n

Dvojecí funkcí (f_1, f_2) nazýváme systém iterovaných funkcí a množinu C nazýváme invariantní množinou vůči tomuto systému. Tyto vlastnosti budou více rozebrány v Kapitole 5.1.

1.2 Sierpińského trojúhelník

Autor

Wacław Sierpiński se narodil v roce 1882 v rodině polského fyzika. Po absolvování gymnázia začal studovat na univerzitě ve Varšavě, kde na sebe poprvé upozornil, když zvítězil v soutěži vyhlášené katedrou matematiky v roce 1903. V rámci svých studií se zabýval převážně teorií čísel a množin, které zpracoval v mnoha svých článcích a knihách. Stal se uznávaným profesorem a přednášel na univerzitách ve Lvově a Varšavě. Za svůj přínos polské i světové matematice byl v roce 1964 oceněn Řádem znovuzrozeného Polska. Více informací lze najít například v [5].

Konstrukce a vlastnosti množiny

Sierpińského trojúhelník vzniká z rovnostranného trojúhelníku S_0 o straně délky 1. Rozdělíme ho na čtyři shodné trojúhelníky třemi úsečkami spojujícími středy jednotlivých stran. Každý trojúhelník pak má délku strany $\frac{1}{2}$. Množinu S_1 dostaneme odstraněním prostředního trojúhelníku jako podmnožinu původního trojúhelníku S_0 . Tento proces opakujeme až do nekonečna, čímž dostáváme klesající posloupnost množin $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$, viz Obrázek 1.3. Výsledná množina pak odpovídá průniku těchto množin,

$$S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k.$$

Chceme-li spočítat celkový obsah tohoto obrazce, musíme se podívat na obsah jednotlivých trojúhelníků v k -tém kroku. V daném kroku máme vždy 3^{-k} trojúhelníků s délkou strany 2^{-k} . Obsah S_k odpovídající k -té iteraci je tedy roven

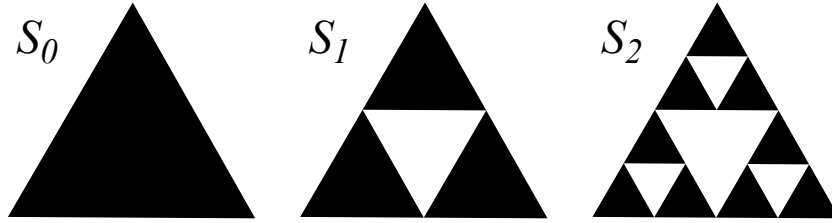
$$3^{-k} \frac{(2^{-k})^2 \sqrt{3}}{4}. \quad (1.4)$$

Věta 1.2.1. Pro Sierpińského trojúhelník S platí rovnost

$$S = f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S], \quad (1.5)$$

$$f_i(x) = \frac{1}{2}(z_i + x) \text{ pro } i \in \{1, 2, 3\},$$

kde z_i odpovídají souřadnicím vrcholů trojúhelníku a x je bod z množiny S . Funkce puštěná na bod působí po složkách.



OBRÁZEK 1.3: Konstrukce Sierpiňského trojúhelníku

Důkaz: Opět musíme indukcí ověřit, že platí $S_{k+1} = f_1[S_k] \cup f_2[S_k] \cup f_3[S_k]$. To lze, protože použijeme-li spojité lineární zobrazení na trojúhelník, dostaneme opět trojúhelník. Zobrazení f_i jsou navíc kontrahující s koeficientem jedna polovina a pevným bodem ve vrcholech původního trojúhelníku v závislosti na i . Tedy původní obrazec pouze zmenší na polovinu směrem k vybranému vrcholu. Pak obdobně jako v důkazu 1.1.4 je třeba ukázat, že $S = f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S]$.

- $S \subseteq f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S]$:

Vezmeme $x \in S$. Pak $x \in S_1$ a tedy x patří do jednoho z trojúhelníků tvořících S_1 . Tyto trojúhelníky si označíme S_{11}, S_{12}, S_{13} . Předpokládejme tedy, že $x \in S_{11}$. Pak ale pro všechna k platí, $x \in S_{k+1} = f_1[S_k] \cup f_2[S_k] \cup f_3[S_k]$. Protože $f_2[S_k] \subseteq f_2[S_0] = S_{12}$ a podobné tvrzení platí i pro $f_3[S_k]$, musí platit že $x \in f_1[S_k]$. Tedy pro všechna k je $2x - z_1 \in S_k$, a tedy

$$2x - z_1 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k = S.$$

Proto pak $x \in f_1[S]$. Obdobně se ukáží i případy f_2 a f_3 , takže dostáváme

$$x \in f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S].$$

- $f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S] \subseteq S$:

Předpokládejme, že $x \in f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S]$. Pak buď $x \in f_1$, nebo $x \in f_2$, nebo $x \in f_3$. Pro první případ pak $2x - z_1 \in S$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí také $2x - z_1 \in S_k$, neboli $x \in f_1[S_k] \subseteq S_{k+1}$. Proto platí

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_{k+1} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k = S.$$

V ostatních případech bychom postupovali podobně. Z toho už plyne požadované. □

1.3 Sierpiňského čtverec

Konstrukce a vlastnosti množiny

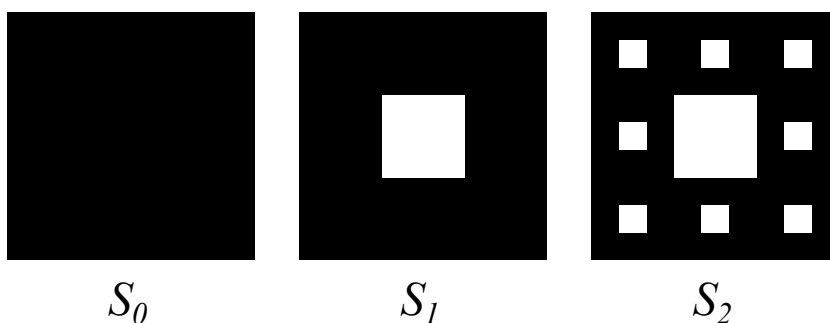
Sierpiňského čtverec, někdy nazývaný také Sierpiňského koberec, je dalším ze skupiny zajímavých množin objevených W. Sierpiňským.

Lze jej sestavit obdobným způsobem jako trojúhelník výše s tím rozdílem, že zde vycházíme ze čtverce S_0 o straně 1, který rozdělíme na devět stejných podmnožin, tj. čtverců, s délkou strany $\frac{1}{3}$. Prostřední čtverec opět odstraníme a získáme množinu S_1 , viz Obrázek 1.4. Pokud

pokračujeme dostáváme znovu klesající posloupnost množin $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$ a definujeme výslednou množinu jako

$$S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k.$$

Pokud se nad touto konstrukcí zamyslíme, zjistíme, že se tato množina sestavuje stejně jako Cantorova množina. Jediný rozdíl je v tom, že u Sierpiňského koberce vše provádíme ve dvou dimenzích zatímco u Cantorovy množiny pouze v jedné. Pokud bychom pokračovali dále do \mathbb{R}^3 dostaneme objekt, který se nazývá Mengerova houba, viz např. [1].



OBRÁZEK 1.4: Konstrukce Sierpiňského koberce

Délka strany jednotlivých čtverců v k -tém kroku je rovna 3^{-k} a počet těchto čtverců odpovídá 8^k . Obsah množiny S_k je tedy roven $\left(\frac{8}{9}\right)^k$.

Všechny fraktální množiny, které jsme si doposud představili, vznikaly odstraněním nějaké části z původní množiny. To ale není zdaleka jediný způsob, kterým lze fraktály tvořit. Jeden z dalších způsobů si ukážeme na následující množině.

1.4 Kochova křivka

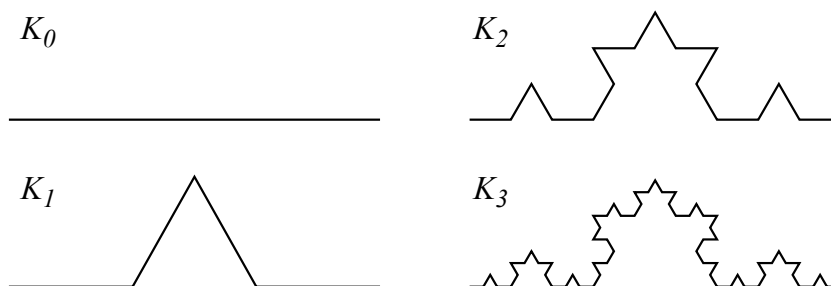
Autor

Helge von Koch se narodil v roce 1870 ve Stockholmu, kde vystudoval střední školu a také nastoupil na univerzitu. Byl studentem významného švédského matematika Mittag-Lefflera, pod jehož vedením sepsal své první články, za které získal na Stockholmské univerzitě doktorát z matematiky. V roce 1911 se zde stal také profesorem. Zabýval se řešením nekonečně mnoha lineárních rovnic, systémy diferenciálních rovnic nebo také teorií čísel. Pro více informací o jeho díle a jeho životě lze najít v [6, 7].

Konstrukce a vlastnosti

Množina, které dnes říkáme Kochova křivka, byla poprvé představena v roce 1904 jako příklad funkce, která je v každém svém bodě spojitá, ale v žádném není diferencovatelná.

Sestrojíme ji tak, že vezmeme úsečku délky 1, ozn. K_0 , a tu rozdělíme na třetiny. Nad prostřední třetinou pak sestrojíme trojúhelník, jehož základnu z výsledné množiny odebereme a dostaneme křivku K_1 . Tento postup opakujeme na každé úsečce znova, viz Obrázek 1.5, až dostaneme výslednou množinu K .

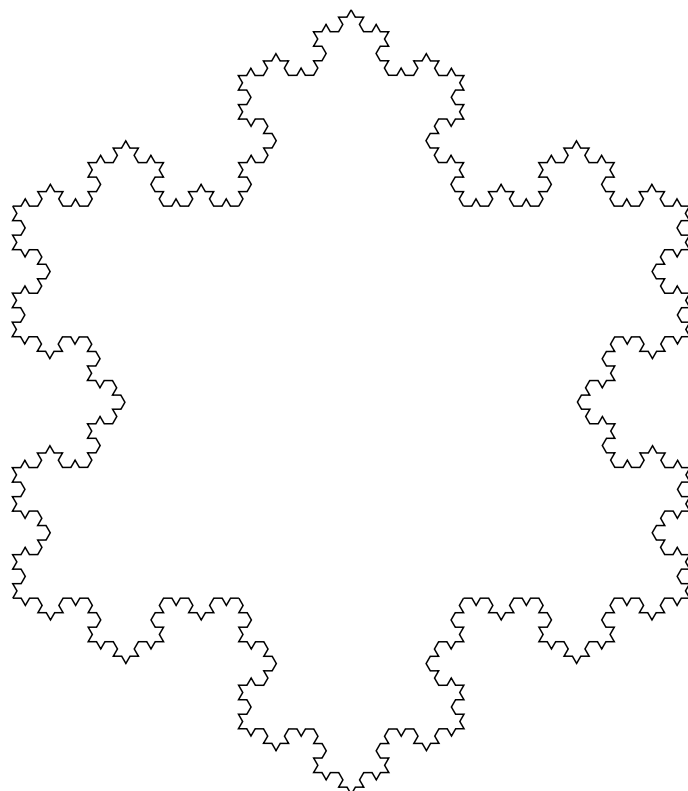


OBRÁZEK 1.5: Konstrukce Kochovy křivky

Množina K_k je tedy složena ze 4^k částí, přičemž každá má délku 3^{-k} . Celkový součet všech jejích částí se tedy limitně blíží nekonečnu.

Ještě známější variantou výše zkonstruované množiny je tzv. Kochova vločka, někdy nazývaná také Kochův ostrov. Ta vznikne spojením tří Kochových křivek, viz Obrázek 1.6. Konstrukci této křivky bychom tedy začínali z rovnostranného trojúhelníku a pro každou stranu bychom postupovali stejně jako u Kochovy křivky.

Tato křivka je tedy uzavřená a evidentně obepíná plochu o konečném obsahu. Délka této křivky v k -tém kroku je ale trojnásobkem k -tého kroku klasické Kochovy křivky, tj. $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k$. Tato hodnota se tedy v limitě stále blíží nekonečnu. Proto tuto křivku také řadíme mezi tzv. matematická monstra.



OBRÁZEK 1.6: Kochova vločka ve čtvrté iteraci

1.5 Barnsleyho kapradina

Autor

Michael Fielding Barnsley se narodil v roce 1945 v Anglii. Studoval matematiku na univerzitě v Oxfordu, kde získal titul BA. Kromě matematiky získal také doktorát z teoretické chemie na univerzitě ve Wisconsinu. V rámci svých následujících prací se začal více zabývat fraktály, díky kterým se proslavil, a přinesl mnoho nových poznatků, například pro jejich vizualizaci. O fraktálech později vydal dvě knihy, ve kterých je shrnuta velká část jeho práce - *Fractals Everywhere* [8] a *SuperFractals* [9]. Dnes žije se svou rodinou v Austrálii, kde spolupracuje s Australskou národní univerzitou. Další informace jsou uvedeny v [10].

Konstrukce množiny

Asi nejnámějším fraktálem, který byl poprvé představen M. Barnsleyem, je Barnsleyho kapradina. Její tvar je dán funkcemi ve tvaru

$$f_i(x) = f_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = A_i x + t_i. \quad (1.6)$$



OBRÁZEK 1.7: Barnsleyho kapradina

Ke každé funkci je pak přiřazena pravděpodobnost p_i , s jakou je aplikována. Tvar funkce (1.6) je obecný a pro jiné hodnoty parametrů bychom dostali naprosto odlišný výsledek. Pro Barnsleyho kapradinu, kterou vidíme na Obrázku 1.7, máme konkrétní hodnoty parametrů funkce (1.6) včetně pravděpodobností uvedené v Tabulce 1.1.

i	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0	0	0,16	0	0	0,01
2	0,85	0,04	-0,04	0,85	0	1,6	0,85
3	0,2	-0,26	0,23	0,22	0	1,6	0,07
4	-0,15	0,28	0,26	0,24	0	0,44	0,07

TABULKA 1.1: Parametry pro Barnsleyho kapradinu

1.6 Juliovy množiny

Autor

Gaston Julia se narodil v roce 1893 v Alžírsku. Už od mládí se zajímal o hudbu a matematiku, a tak učitelé přesvědčili jeho rodiče, aby ho ve studiu podporovali. Získal stipendium v Paříži a později zde také studoval École Normale Supérieure. Jeho studia však byla záhy přerušena první světovou válkou, ve které přišel o nos. Již v 25 letech publikoval první ze svých slavných děl pod názvem *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*. Začal přednášet na několika školách a stal se profesorem na Sorbonně. Jeho práce obsahující více než 200 děl, která byla shrnuta v šesti zvláštních svazcích. Byl zvolen do několika Akademií věd po celé Evropě a v té pařížské se dokonce stal prezidentem. Více v [11, 12, 13].

Konstrukce množiny

Součástí systému iterovaných funkcí nemusí být vždy jen funkce tvaru (1.6). Množinu komplexních čísel \mathbb{C} můžeme také považovat za euklidovskou rovinu.

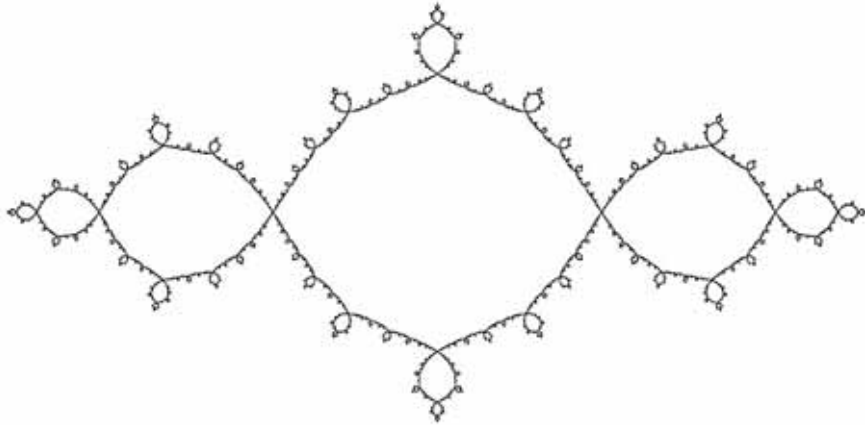
Juliovy množiny jsou totiž tvořeny za pomoci posloupnosti definované jako

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

kde $z_n, c \in \mathbb{C}$ a kde je dán počáteční bod $z_0 \in \mathbb{C}$.

Tato posloupnost může být pro dané c buď omezená, nebo neomezená. Body z_0 , které tvoří hranici mezi těmito dvěma případy, pak nazýváme hranicí Juliovy množiny pro c . Do Juliovy množiny pak patří všechny body z_0 , pro které posloupnost (z_n) nediverguje. Juliovy množiny je tedy nekonečně mnoho, protože se pro každé c liší. Jednu z nejznámějších Juliovy množin pro parametr $c = 1 + 0i$ můžeme vidět na Obrázku 1.8.

Juliovy množiny slouží také ke konstrukci Mandelbrotovy množiny, kterou si představíme v následujícím textu.



OBRÁZEK 1.8: Hranice Juliovy množiny pro $c = 1 + 0i$. Poskytnuto autorem práce [14].

1.7 Mandelbrotova množina

Autor

Benoit B. Mandelbrot se narodil v Polsku v roce 1924. Jeho rodina však brzy emigrovala do Francie, kde měl jeho výchovu na starost jeho strýc Szolem Mandelbrojt, který byl profesorem matematiky v Paříži a který mu později také představil práci G. Julii. Ta ho ale zpočátku příliš nezaujala. Z Francie se dostal do USA, kde působil u IBM nebo také na Yale University. V té době se k Juliově práci vrátil a ta se stala jeho nejvýznamnější inspirací. Pomocí počítačové grafiky pak díky IBM's Watson Research Center, kde pracoval, znázornil některé z nejkrásnějších fraktálů, které dodnes známe. Nezabýval se však jen matematikou, získal profesuru například také z ekonomie nebo medicíny a tyto znalosti pak často využíval. Za svůj přínos nejen matematice získal mnohá ocenění a jeho práce je dodnes v oblasti fraktálů základem.

Více informací o jeho životě a díle lze najít v [15].

Konstrukce množiny

Mandelbrotova množina (viz [16]) je na rozdíl od Juliovy pouze jedna, ale i ji definujeme na \mathbb{C} . Bereme tentokrát posloupnost definovanou jako

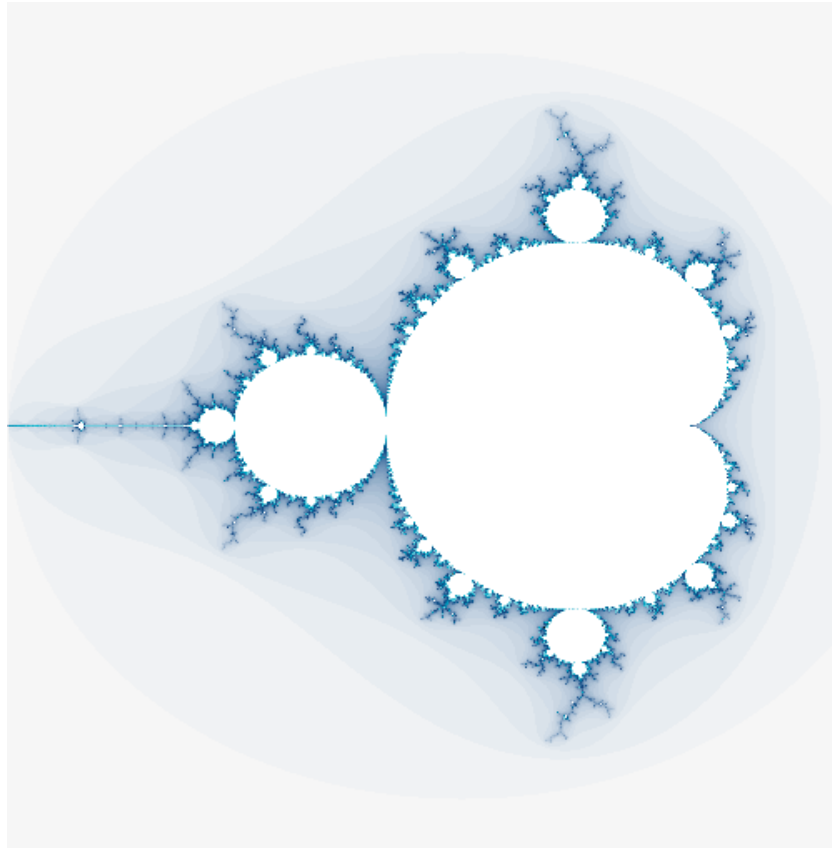
$$z_{n+1} = z_n^2 + z_0.$$

Ve skutečnosti tedy dostáváme

$$z_0 \rightarrow z_0^2 + z_0 \rightarrow (z_0^2 + z_0)^2 + z_0 \rightarrow \dots$$

Body $z_0 \in \mathbb{C}$, pro které tato posloupnost nediverguje, tvoří Mandelbrotovu množinu, jejíž hranici můžeme vidět na Obrázku 1.9.

Mandelbrotova množina je navíc spojena s množinami Juliovy. Druhou variantou, jak ji totiž lze definovat, je jako množinu všech $z_0 \in \mathbb{C}$, pro které je Juliova množina souvislá.



OBRÁZEK 1.9: Mandelbrotova množina. Poskytnuto autorem práce [14].

1.8 Fraktály komplexní dynamiky ve vyšších dimenzích

V předchozích sekcích jsme si ukázali, že fraktály nejsou jenom záležitostí reálných prostorů, ale také těch komplexních. Juliovy množiny stejně jako Mandelbrotova množina jsou definovány na prostoru \mathbb{C} a jsou definovány rekurzivně. Je ale také možné zkoumat fraktální struktury ve vyšších dimenzích tj. v \mathbb{C}^n . Touto oblastí se zabývá komplexní dynamika ve vyšších dimenzích, viz například [17, 18]. Základem je zde hledání kořenů určitých rovnic případně hledání vlastních čísel. Tímto tématem se začali zabývat již P. Fatou a G. Julia a jejich práce stále tvoří základy komplexní dynamiky.

Kapitola 2

Bodové množiny

Tato kapitola je zaměřena na shrnutí základních pojmů a výsledků z teorie množin, které budeme v následujících kapitolách používat. Dále zde budou představeny některé bodové vlastnosti, které jsou významné pro fraktální množiny, jejichž příklady jsme si uvedli dříve. Základní definice stejně jako vlastnosti jsou uvedeny v souladu s [19].

2.1 Topologie a metrické prostory

Definice 2.1.1. Nechť je dána množina libovolných prvků S a $\tau \in \mathcal{P}(S)$, kde $\mathcal{P}(S)$ je potenční množina množiny S . Pak τ nazveme topologie na S , právě když platí

- $\emptyset, S \in \tau$,
- $(\forall \mathcal{A} \in \tau, \text{ systém podmnožin } S) \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau \right)$,
- $(\forall \mathcal{A} \in \tau, \text{ konečný systém podmnožin } S) \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau \right)$.

Jednotlivé prvky τ nazveme otevřené množiny. Jestliže $S \setminus A \in \tau$, pak A nazýváme uzavřená množina. Uspořádanou dvojici (S, τ) nazýváme topologický prostor.

Definice 2.1.2. Buď (S, τ) topologický prostor, $x \in S$. Pak množinu $T \in \tau$ nazveme otevřeným okolím bodu x , pokud $x \in T$. Značíme ho U_x .

Definice 2.1.3. Buď (S, τ) topologický prostor. $\mathcal{B} \subset \tau$ je bází topologie τ , právě když

$$(\forall x \in S)(\forall U_x \in \tau)(\exists B \in \mathcal{B})(x \in B \subset U_x).$$

Definice 2.1.4. Buď (S, τ) topologický prostor, $T \in S$. Množinu

$$\bar{T} = \bigcap_{\substack{T \subset A \\ S \setminus A \in \tau}} A$$

nazýváme uzávěr množiny T . Je evidentní, že $T \subseteq \bar{T}$.

Věta 2.1.5. Buď (S, τ) topologický prostor. Množina $T \subseteq S$ je uzavřená, právě když $T = \bar{T}$.

Důkaz:

\Rightarrow : Buď T uzavřená v S . Pak $S \setminus T$ je otevřená a je pro každý svůj bod $x \in S \setminus T$ okolím ozn. U_x . Pro všechna $x \in S \setminus T$ platí $U_x \cap T = \emptyset$ a tedy $x \notin \bar{T}$.
Pak ale $\bar{T} \subseteq T \Rightarrow T = \bar{T}$.

\Leftarrow : Necht $T = \bar{T}$. Chceme ukázat, že T je uzavřená v S tj. $S \setminus T$ je v S otevřená. Z předpokladu plyne, že

$$(\forall x \in S \setminus T)(\exists U_x)(U_x \cap T = \emptyset).$$

Množina $S \setminus T$ je tedy jako sjednocení okolí všech svých bodů $U_x \subseteq P \setminus T$ otevřená.

□

Důsledek 2.1.6. Uzávěr množiny T je nejmenší uzavřená množina v S , která T obsahuje.

Definice 2.1.7. Buď (S, τ) topologický prostor. Bod $x \in S$ se nazývá hromadný bod množiny $T \subseteq S$, právě když každé jeho okolí obsahuje alespoň jeden bod množiny T různý od x . Bod x nazveme izolovaným bodem S , právě když množina $\{x\}$ je v S otevřená. Množinu všech hromadných bodů množiny T nazýváme derivací množiny T a značíme ji T' .

Poznámka 2.1.8. Z předešlého automaticky plyne, že $\bar{T} = T \cup T'$.

Definice 2.1.9. Řekneme, že množina T , která je podmnožinou topologického prostoru S , je perfektní respektive dokonalá, jestliže $T = T'$.

Definice 2.1.10. Buď (S, τ) topologický prostor. Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ konverguje k bodu x , právě když

$$(\forall U_x \ni x \text{ okolí})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(x_n \in U_x).$$

Značíme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Definice 2.1.11. Řekneme, že topologický prostor (S, τ) je separabilní, právě když existuje množina $T \subseteq S$ tak, že T je spočetná a $\bar{T} = S$, tj. T je hustá v S .

Vzhledem k tomu, že v dalším textu se mnohem častěji než s prostory topologickými budeme setkávat s prostory metrickými, tak si tento pojem a s ním další související nyní zavedeme.

Definice 2.1.12. Uspořádanou dvojici (S, ρ) nazveme metrickým prostorem, právě když S je množina a $\rho : S \times S \rightarrow [0, +\infty)$ je zobrazení, pro které platí

- $(\forall x, y \in S)(\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$,
- $(\forall x, y \in S)(\rho(x, y) = \rho(y, x))$,
- $(\forall x, y, z \in S)(\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z))$ tj. trojúhelníková nerovnost.

Zobrazení ρ pak nazýváme metrikou.

Definice 2.1.13. Buď $x \in S, r > 0$. Pak definujeme

$$B(x, r) = \{y \in S \mid \rho(x, y) < r\},$$

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in S \mid \rho(x, y) \leq r\}$$

a nazýváme je otevřená resp. uzavřená koule.

Poznámka 2.1.14. (S, ρ) je topologický prostor s bází generovanou otevřenými koulemi.

Poznámka 2.1.15. Jako ε -okolí bodu $x \in S$ tedy označujeme $U(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon)$.

Definice 2.1.16. Buď (S, ρ) metrický prostor, $M \subseteq S$. Potom bod $x \in M$ nazveme vnitřním bodem množiny M , pokud není hromadným bodem množiny $S \setminus M$.

Poznámka 2.1.17. Tuto definici lze ekvivalentně vyjádřit v následujícím tvaru.

Bod $x \in M$ nazveme vnitřním bodem množiny M , pokud existuje ε -okolí $U(x, \varepsilon) \subseteq S$ takové, že $U(x, \varepsilon) \subseteq M$.

Věta 2.1.18. Množina M v metrickém prostoru (S, ρ) je otevřená, právě když všechny její body jsou vnitřní body.

Důkaz: Plyne přímo z Poznámky 2.1.17. □

Definice 2.1.19. Řekneme, že množina A , podmnožina metrického prostoru S , je hustá v otevřené množině $B \subseteq S$, jestliže $\overline{A} = B$. Pokud v S neexistuje neprázdná otevřená množina, ve které by byla A hustá, pak řekneme, že A je řídká.

Definice 2.1.20. Buď (S, ρ) metrický prsotor, $A, B \subseteq S$. Potom vzdálenost množin A, B definujeme jako

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Definice 2.1.21. Buď (S, ρ) metrický prostor, $(x_n) \subset S$ posloupnost. Potom daná posloupnost konverguje k x , ozn. $x_n \rightarrow x$, právě když

$$(\forall U_x \text{ okolí } x)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(x_n \in U_x).$$

Poznámka 2.1.22. To tedy znamená, že

$$(\forall r > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\rho(x_n, x) < r).$$

Definice 2.1.23. Buď (S, ρ) metrický prostor, $M \subseteq S$. Potom M nazveme kompaktní, právě když z každé nekonečné posloupnosti bodů množiny M lze vybrat posloupnost konvergující k nějakému bodu množiny M .

Metrický prostor S nazveme kompaktní, právě když je kompaktní jako množina.

2.2 Reálná osa

Pokud na prostoru \mathbb{R} , tedy reálné ose, zavedeme funkci $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako $\rho(x, y) = |x - y|$, můžeme jednoduše ověřit, že tato funkce splňuje vlastnosti metriky. Uspořádaná dvojice (\mathbb{R}, ρ) tedy tvoří metrický prostor. Otevřené koule na tomto prostoru odpovídají otevřeným intervalům a tyto koule na \mathbb{R} generují topologii. Všechny vlastnosti, které byly představeny výše, platí i na reálné ose.

Věta 2.2.1. Každý systém \mathcal{A} tvořený disjunktními intervaly je konečný nebo spočetný.

Důkaz: Každému intervalu, který patří do systému \mathcal{A} , přiřadíme nějaký racionální bod, který v tomto intervalu leží. Intervaly jsou disjunktní, a tak nemůžeme dostat pro dva intervaly stejné racionální číslo. Máme tedy vzájemně jednoznačné zobrazení intervalů z \mathcal{A} na podmnožinu všech racionálních čísel \mathbb{Q} . Ta je spočetná, a proto i systém \mathcal{A} je nejvýše spočetný. \square

Věta 2.2.2. Každá otevřená množina $A \subseteq \mathbb{R}$ je sjednocením nejvýše spočetného systému otevřených disjunktních intervalů, jejichž konce patří do množiny $B = \mathbb{R} \setminus A$.

Důkaz: Buď $a \in A$ libovolný bod. Protože A je otevřená, tak existují intervaly (okolí) obsahující bod a , které jsou podmnožinou A . Označíme A_a jejich sjednocení.

Chceme nyní ukázat, že množina A_a je také interval a to ve tvaru $A_a = (c, d)$ kde c je infimum této množiny a d je její supremum.

Musíme tedy ukázat, že pro každý bod $x \in (c, d)$ platí také $x \in A_a$. To určitě platí pro bod a . Vezmeme tedy $x < a$. Protože $x \in (c, d)$, tak existuje bod x' takový, že $x' < x < a$. Z definice A_a , pak lze najít interval $(e, f) \subseteq A_a$ obsahující x' a zároveň bod a . Pro $x > a$ bychom to dokazovali obdobně.

Pak už ale nutně $(c, d) = A_a$. \square

Poznámka 2.2.3.

- Pro množinu A_a , jak jsme ji definovali výše, platí
 1. $A_a \subseteq A$,
 2. A_a neleží v žádném jiném intervalu obsaženém v A .

Takovéto množiny nazýváme komponenty otevřené množiny A nebo také styčné intervaly k množině $\mathbb{R} \setminus A = B$. Každý bod množiny A je obsažen v některé komponentě.

- Z vlastnosti 2. plyne, že konce žádné komponenty neleží v A , a tedy patří do $B = \mathbb{R} \setminus A$.
- Dle Věty 2.2.2 je množina všech komponent A nejvýše spočetná.

Věta 2.2.4. Bod $x \in B$ je izolovaným bodem uzavřené množiny $A \subseteq \mathbb{R}$, právě když je společným koncem dvou styčných intervalů k A .

Důkaz: Je-li bod x společným koncovým bodem styčných intervalů (a, x) a (x, b) , pak interval (a, b) obsahuje pouze jeden bod množiny B a to právě x .

Naopak, je-li x izolovaným bodem B a interval (a, b) neobsahuje žádný další bod množiny B , potom vezmeme libovolný bod $x' \in (a, x)$. Tento bod musí ležet v nějaké komponentě J množiny $A = \mathbb{R} \setminus B$, která nutně musí obsahovat interval (a, x) . Stejně pro bod $x'' \in (x, b)$ existuje komponenta J' obsahující celý tento interval. Bod x je pak koncovým bodem intervalů J a J' , což jsme chtěli dokázat. \square

Důsledek 2.2.5. Uzavřená množina B je perfektní právě tehdy, když žádné dva styčné intervaly F nemají společný konec.

Věta 2.2.6. Množina B je řídká v \mathbb{R} , právě když její komplement $A = \mathbb{R} \setminus B$ je hustý v \mathbb{R} .

Důkaz:

\Rightarrow : Jestliže je B řídká, pak každý interval, a tedy i každé okolí bodu $x \in \mathbb{R}$, obsahuje body komplementární množiny A . Potom je každý bod $x \in \mathbb{R}$ bodem uzávěru A , a A je tedy hustá.

\Leftarrow : B je z definice řídká v \mathbb{R} , právě když neexistuje interval, ve kterém by byla hustá. Pak B je řídká v \mathbb{R} , právě když každý interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ obsahuje interval (a', b') disjunktní s B .

Buď A hustá otevřená množina v \mathbb{R} a (a, b) libovolný interval. Protože A je hustá, tak existuje v (a, b) bod $c \in A$. Protože je také otevřená, tak existuje interval $(c', c'') \subseteq A$ obsahující bod c . Potom $(a, b) \cap (c', c'') \subseteq A$ a tento průnik neobsahuje žádné body množiny B , a B je tedy řídká.

□

Jednou z nejvýznamnějších množin, které na přímce máme, je Cantorovo diskontinuum definované v první kapitole. Nyní si ukážeme některé jeho další vlastnosti.

Věta 2.2.7. Cantorova množina je perfektní.

Důkaz: Protože Cantorovu množinu jsme definovali jako $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, tak všechny konce intervalů $\delta_{i_1 \dots i_n}$ a body 0, 1 patří množině C . Intervaly $\delta_{i_1 \dots i_n}, (-\infty, 0), (1, +\infty)$ jsou všechny styčné intervaly k uzavřené množině C a žádné dva nemají společné koncové body.

Z Důsledku 2.2.5 proto plyne, že Cantorova množina je perfektní.

□

Věta 2.2.8. Cantorova množina je řídká na \mathbb{R} .

Důkaz: Protože množina C je uzavřená, stačí nám podle Věty 2.2.6 ukázat, že $\mathbb{R} \setminus C$ je hustá v \mathbb{R} . Chceme tedy ukázat, že každý bod v \mathbb{R} je bodem uzávěru $\mathbb{R} \setminus C$, a musíme tedy dokázat, že

$$(\forall x \in C)(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in \mathbb{R} \setminus C)(y \in U(x, \varepsilon)).$$

Berme $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Protože C_n je sjednocení disjunktních intervalů délky $\frac{1}{3^n}$, tak vzdálenost libovolného bodu $x \in C_n$ a tedy i libovolného bodu z C , od každého bodu z $\mathbb{R} \setminus C_n$ je menší než $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

$U(x, \varepsilon)$ má tedy společné body s $\mathbb{R} \setminus C_n$, a tedy i s $\mathbb{R} \setminus C$.

□

Kapitola 3

Topologické dimenze

Jak už bylo zmíněno v úvodu, obecná definice fraktálu stále neexistuje. Nejznámější a zároveň nejvýstižnější definicí tak tedy zůstává Mandelbrotova definice, která říká, že fraktál je taková množina, jejíž Hausdorffova dimenze je větší než topologická. O tom, jak se zavádí Hausdorffova dimenze, pojednává příští kapitola. V této kapitole tedy připomínáme pojem dimenze topologické.

Základní vlastností topologické dimenze je, že pokud jsou dva prostory homeomorfní, pak jsou si jejich dimenze rovny. V tomto textu se budeme dále zabývat induktivními dimenzemi, které jsou pro studium fraktálů výhodné. Existují samozřejmě i další způsoby, jak topologickou dimenzi zavést, ale ty pro nás nyní nejsou tak důležité. Více je možné si o nich přečíst například v [4]. Podle této publikace jsou také vystavěny konstrukce induktivních dimenzí a zkoumány jejich vlastnosti.

3.1 Dolní induktivní dimenze

K definici tohoto pojmu využíváme vlastnosti báze topologie.

Definice 3.1.1. Buď S metrický prostor. Dolní induktivní dimenzi, $\text{ind } S$, definujeme následovně.

- $\text{ind } S = -1 \Leftrightarrow S = \emptyset$,
- $\text{ind } S \leq k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow (\exists \mathcal{B} \text{ báze } S)(\forall B \in \mathcal{B})(\text{ind } \partial B \leq k - 1)$,

$$\text{ind } S = k \Leftrightarrow \text{ind } S \leq k \wedge \text{ind } S \not\leq k - 1,$$

- $\text{ind } S = +\infty \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\text{ind } S > k)$.

Tuto dimenzi také někdy nazýváme Mengerova-Urysohnova.

Věta 3.1.2. Pokud S a T jsou homeomorfní metrické prostory, pak $\text{ind } S = \text{ind } T$.

Důkaz: Matematickou indukcí na k :

- Pro $k = -1$:
Máme $\text{ind } S = -1$. Z toho plyne, že $S = \emptyset$ a zároveň S a T jsou homeomorfní, proto také $T = \emptyset$, a tedy $\text{ind } T = -1 = \text{ind } S$.

- Indukční krok $k \rightarrow k + 1$:

Bud $h : S \rightarrow T$ homeomorfismus a předpokládejme $\text{ind } S = k + 1$. Pak z definice plyne, že

$$(\exists \mathcal{B} \text{ báze } S)(\forall B \in \mathcal{B})(\text{ind } \partial B \leq k)$$

a $\{h[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$ je tedy báze pro otevřené množiny z T .

Zúžení h na ∂B je pak homeomorfismus takový, že pokud $B \in \mathcal{B}$, pak $h[\partial B] = \partial h[B]$ a dle indukčního předpokladu dostáváme

$$\text{ind } \partial h[B] = \text{ind } \partial B \leq k \Rightarrow \text{ind } T = k + 1,$$

a tedy $\text{ind } S = \text{ind } T$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$.

- Pro $k = +\infty$ máme $\text{ind } S = +\infty$. Platí tedy

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\text{ind } T \neq k) \Rightarrow \text{ind } T = +\infty$$

Tedy $\text{ind } S = \text{ind } T$.

□

Věta 3.1.3. Bud S metrický prostor, $T \subseteq S$. Pak $\text{ind } T \leq \text{ind } S$.

Důkaz: Matematickou indukcí na k :

- Pro $k = -1$:
 $\text{ind } S = -1 \Rightarrow S = \emptyset \wedge T \subseteq S \Rightarrow T = \emptyset \Rightarrow \text{ind } T \leq \text{ind } S$
- Indukční krok $k \rightarrow k + 1$:

Předpokládejme $\text{ind } S = k + 1$ a chceme ukázat, že $(\exists \mathcal{B} \text{ báze } T)(\forall B \in \mathcal{B})(\text{ind } \partial B \leq k)$. Necht $x \in T$, V otevřené okolí $x \Leftrightarrow (V \subset T)(x \in V)$ a hledáme tedy $U \subseteq V$, $x \in U$ tak, aby $\text{ind } \partial_T U \leq k$. Množina V je v T otevřená, proto $\exists \tilde{V}$ otevřená v S , kde $V = \tilde{V} \cap T$.

Protože $\text{ind } S \leq k + 1 \wedge x \in \tilde{V} \Rightarrow (\exists \tilde{U} \ni x, U \text{ otevřené v } S)(\text{ind } \partial_S \tilde{U} \leq k)$. Bud dále $U = \tilde{U} \cap T$. Tedy $U \subseteq V$ je otevřená v S a platí

$$\partial_T U \subseteq \partial_S \tilde{U} \Rightarrow \text{ind } \partial_T U \leq \text{ind } \partial_S \tilde{U} \leq k,$$

$$(\exists \mathcal{B} \text{ báze } T)(\forall U \in \mathcal{B})(\text{ind } \partial_T U \leq k),$$

a tedy $\text{ind } T \leq k + 1 = \text{ind } S$.

- Pro $k = +\infty$:
Máme $\text{ind } S = +\infty$ a nerovnost tedy platí triviálně.

□

Poznámka 3.1.4. Bud S metrický prostor, $A, T \subseteq S$. Pak $\partial_T(A \cap T) \subseteq \partial_S A$.

Důkaz: Protože $x \in \partial_T(A \cap T)$, pak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A \cap T \wedge \exists z \in T \setminus (A \cap T))(\rho(y, x) \leq \varepsilon \wedge \rho(z, x) \leq \varepsilon),$$

a protože $y \in A$ a zároveň $z \in S \setminus A$, tak $x \in \partial A$ v S .

□

3.2 Horní induktivní dimenze

K definici pojmu horní induktivní dimenze využíváme pojem oddělování uzavřených množin.

Definice 3.2.1. Buď A, B disjunktní množiny v metrickém prostoru S . Řekneme, že množina L odděluje A a B právě tehdy, když

$$(\exists U, V \subset S \text{ otevřené})(A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \emptyset)(L = S \setminus (U \cup V)).$$

Definice 3.2.2. Buď S metrický prostor. Definujeme horní induktivní dimenzi, $\text{Ind } S$, následovně.

- $\text{Ind } S = -1 \Leftrightarrow S = \emptyset$,
- $\text{Ind } S \leq k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow (\forall A, B \text{ uzavřené}, A \cap B = \emptyset)(\exists L \text{ oddělující } A, B \wedge \text{Ind } L \leq k - 1)$,
 $\text{Ind } S = k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow \text{Ind } S \leq k \wedge \text{Ind } S \not\leq k - 1$,
- $\text{Ind } S = +\infty \Leftrightarrow \text{Ind } S > k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Tato dimenze se někdy také nazývá Brouwerova-Čechova.

Věta 3.2.3. V definici dolní induktivní dimenze platí ekvivalence

$$\text{ind } S \leq k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow (\forall \{x\}, A \subset S \text{ uzavřené}, \{x\} \cap A = \emptyset)(\exists L \text{ odděl. } \{x\}, A)(\text{Ind } L \leq k - 1).$$

Důkaz:

\Rightarrow : Vycházíme z definice dolní induktivní dimenze 3.1.1. Spojením s definicí báze dostáváme

$$(\forall x \in S)(\forall U \subset S, x \in U \text{ otevřené})(\exists B \text{ otevřené})(x \in B \subset U \wedge \text{ind } \partial B \leq k - 1).$$

Vezmeme libovolně $x \in S$ a $A \subset S$ uzavřenou, $x \notin A$. Z toho plyne $(\exists U \ni x)(\overline{U} \cap A = \emptyset)$ a najdeme otevřenou množinu $B \ni x$ takovou, že $\text{ind } \partial B \leq k - 1$ a zároveň $B \subset U$.

Položíme $V := S \setminus \overline{B}$, potom $A \subset V$ a zároveň $V \cap B = \emptyset$. Tedy máme $x \in B$ a $A \subset V$ tak, že x a B můžeme oddělit pomocí $L = S \setminus (B \cup V) = \partial B$, a tedy $\text{ind } L = \text{ind } \partial B \leq k - 1$.

\Leftarrow : Předpokládejme, že platí pravá strana ekvivalence tj.

$$(\forall x \in S)(\forall V \subset S, x \in V \text{ okolí})(L \text{ odděluje } \{x\}, A = S \setminus V)(\text{ind } L \leq k - 1).$$

Buď dále U, W otevřené podmnožiny S takové, že platí $x \in U$, $A \subset W$, $U \cap W = \emptyset$ a $S \setminus L = U \cup W$. Potom máme

$$x \in U \subset S \setminus W \subset S \setminus A = V$$

a zároveň

$$\partial U \subset (S \setminus U) \cap (S \setminus W) = S \setminus (U \cup W) = L.$$

Potom už nutně $\text{ind } \partial U \leq k - 1$ a tedy $\text{ind } S = n$.

□

Poznámka 3.2.4. Věta výše je velmi důležitá, protože nám dovoluje porovnávat dolní induktivní dimenzi s horní. Konstrukce tohoto důkazu je původním výsledkem práce. Je dále upravena podle [20].

Věta 3.2.5. Buď S metrický prostor. Pak $\text{ind } S \leq \text{Ind } S$.

Důkaz: Plyne z Věty 3.2.3 a definice $\text{Ind } S$.

□

3.3 Prostory nulové dimenze

Nyní se zaměříme konkrétně na prostory a množiny, jejichž topologická dimenze je rovna 0, a jejich důležité vlastnosti. Jako příklad množiny s nulovou dimenzí můžeme uvést například Cantorovo diskontinuum, jak si dokážeme dále.

Definice 3.3.1. Buď S metrický prostor a A jeho podmnožina. Řekneme, že A je obojetná, právě když je otevřená a zároveň uzavřená v S .

Podle vět z předchozí kapitoly tedy dostáváme následující poznámku.

Poznámka 3.3.2. Separabilní metrický prostor S má nulovou dimenzi, $\text{ind } S = 0$, právě když platí alespoň jedna z následujících podmínek.

1. $(\exists \mathcal{B} \text{ báze } S)(\forall B \in \mathcal{B})(B \text{ je obojetná}),$
2. $(\forall x \in S, V \subset S \text{ otevřené}, x \in V)(\exists U \subset S \text{ obojetné})(x \in U \subset V),$
3. $(\forall x \in S, A \subset S \text{ uzavřené}, x \notin A)(\emptyset \text{ odděluje } \{x\}, A).$

Dále také platí, že každý neprázdný podprostor prostoru s nulovou dimenzí má také nulovou dimenzi.

Věta 3.3.3. Separabilní metrický prostor S má nulovou dimenzi, právě když

$$(\forall A, B \subset S, \text{ uzavřené, disjunktní})(\exists U \subset S \text{ obojetná})(A \subseteq U \wedge B \subseteq X \setminus U),$$

tj. množiny A, B lze oddělit prázdnou množinou.

Důkaz:

\Rightarrow : Sestrojíme množiny $V_x \subset S$ tak, že $(\forall x \in S)(\exists V_x \subset S, x \in V_x)$ a platí $A \cap V_x = \emptyset$ nebo $B \cap V_x = \emptyset$.

Díky tomu dostáváme pokrytí prostoru S jako $\{V_x\}_{x \in S}$, a protože S je separabilní, je možné najít spočetné podpokrytí $\{V_{x_i}\}_{i=1}^{+\infty}$.

Dále konstruujeme obojetné množiny U_i následujícím způsobem.

$$U_1 := V_{x_1}$$

$$U_i := V_{x_i} \setminus \bigcup_{\substack{j < i \\ j \in \mathbb{N}}} V_{x_j} \subset V_{x_i} \text{ pro všechna } i = 2, 3, \dots$$

Označme dále

$$U := \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{U_i \mid A \cap U_i \neq \emptyset\} \text{ a } V := \bigcup_{i=1}^{+\infty} \{U_i \mid A \cap U_i = \emptyset\}$$

Pak ale platí zároveň $A \subset U$ a $B \subset V = S \setminus U$ a U je tedy obojetné.

\Leftarrow : Plyne triviálně z 3. bodu Poznámky 3.3.2.

□

Věta 3.3.4. Buď S metrický prostor a necht' pro všechna otevřená pokrytí S existuje konečné podpokrytí S z disjunktních, obojetných množin, pak existuje báze topologie na S tvořená obojetnými množinami, a tedy $\text{ind } S = 0$.

Důkaz: Buď $x_0 \in S$ a $U \subseteq S$, $x_0 \in U$. Pak vzdálenost $r := \text{dist}(x_0, S \setminus U) > 0$ a definujeme $V := \{x \in S \mid \rho(x, x_0) > \frac{r}{2}\}$. Množiny U a V tedy pokrývají S a dle předpokladů existuje obojetné podpokrytí. Z toho už plyne existence báze. \square

Poznámka 3.3.5. Protože hodnota dolní indukční dimenze je závislá na topologii, uvažujeme pro následující věty standardní topologii na \mathbb{R} danou otevřenými intervaly.

Věta 3.3.6. Cantorova množina má nulovou dimenzi.

Důkaz: Buď $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ stejně jako v Kapitole 1.1 a \mathcal{A} otevřené pokrytí C .

$$(\forall x \in C)(\exists A_x \in \mathcal{A})(x \in A_x) \text{ a tedy } (\exists r > 0)(B_r(x) \cap C \subseteq A_x)$$

Najdeme dále $n \in \mathbb{N}$, aby $3^{-n} < r$. Potom existuje interval $I_x \ni x$, $I_x \subset C_n$ o délce 3^{-n} , pro který platí $I_x \cap C \subseteq A_x$ a množina $I_x \cap C$ je v C obojetná.

Definujeme otevřené pokrytí C jako $\mathcal{A}_1 = \{I_x \mid x \in C\}$. C je kompaktní, a tedy existuje konečné podpokrytí $\mathcal{A}_2 = \{I_1, \dots, I_k\}$. Definujeme dále množiny

$$J_i = I_i \setminus \bigcup_{\substack{j < i \\ j \in \mathbb{N}}} I_j \text{ pro všechna } i \in \hat{k}.$$

Potom $\mathcal{A}_3 = \{J_1, \dots, J_k\}$ je pokrytí S tvořené disjunktními, obojetnými množinami, a tedy $\text{ind } C = 0$. \square

Věta 3.3.7. Jediné obojetné množiny v \mathbb{R} jsou \emptyset a \mathbb{R} . \mathbb{R} tedy nemá nulovou dimenzi.

Důkaz: (sporem)

Buď $A \subset \mathbb{R}$ tak, že $A \neq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$.

Definujeme posloupnosti $(x_n), (y_n)$ následovně. Bereme libovolně $x_0 \in A$ a $y_0 \notin A$ a definujeme $z_n = \frac{x_n + y_n}{2}$. Pak pokud $z_n \in A$ klademe $x_{n+1} = z_n$, $y_{n+1} = y_n$, v opačném případě $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = z_n$. Je tedy zachováno $x_{n+1} \in A$, $y_{n+1} \notin A$. Platí

$$|x_{n+1} - y_{n+1}| = \frac{|x_n - y_n|}{2} = \frac{|x_0 - y_0|}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Zároveň $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{|x_0 - y_0|}{2^n}$ a (x_n) je tedy Cauchyovská. Buď pak $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Protože $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - y_n| = 0$, tak také $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Bod x je tedy bodem hranice A , tj. $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ \neq \emptyset \Rightarrow$ spor. A není obojetná. \square

Věta 3.3.8. Buď T neprázdná podmnožina \mathbb{R} . Pak T má nulovou dimenzi, právě když neobsahuje žádný interval.

Důkaz:

\Rightarrow : (obměna)

Předpokládáme, že T obsahuje interval, ozn. (a, b) , ten je ale homeomorfní s \mathbb{R} , a tedy dle Věty 3.3.7 nemá nulovou dimenzi. Podle bodu 4 v Poznámce 3.3.2 to znamená, že ani T nemá nulovou dimenzi.

\Leftarrow : Necht T neobsahuje žádný interval. Pak $V := T \cap (a, b)$, kde $a < x < b$, je bazická množina T pro libovolný bod x . Stačí tedy definovat $U := T \cap (c, d)$, kde $c \in (a, x) \setminus T$, $d \in (x, b) \setminus T$, aby platilo

$$(\forall x \in T, V \subset T \text{ otevřené}, x \in A)(\exists U \subset T \text{ obojetné})(x \in U \subset V)$$

□

3.4 Sumační vlastnosti

Cílem této kapitoly je ukázat další vlastnosti induktivních dimenzí. Kromě toho zde však také ukážeme, že induktivní dimenze, jak jsme si je definovali výše, mají nejen obdobné vlastnosti, ale na separabilních metrických prostorech jsou si také rovny. Jejich rovnost je možné ukázat také pro kompaktní metrické prostory, viz [4]. Kromě induktivních dimenzí se ještě velmi často pracuje s tzv. pokrývací dimenzí, ozn. Cov , pro kterou se dá na separabilních a kompaktních metrických prostorech ukázat rovnost s dimenzemi induktivními. Tato tvrzení je také možné najít v [4].

Lemma 3.4.1. Buď S metrický prostor, A, B jsou disjunktní uzavřené množiny, $T \subseteq S$. Pak

1. Buď U, V otevřené množiny, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Pokud $L' \subseteq T$ odděluje $T \cap \bar{U}$ a $T \cap \bar{V}$ v T , pak existuje $L \subseteq S$ oddělující A, B v S , kde $L \cap T \subseteq L'$.
2. Předpokládejme navíc, že $T = \bar{T}$.
Pak pro všechny $L' \subseteq T$ oddělující $T \cap A$ a $T \cap B$ v T , existuje $L \subseteq S$ oddělující A, B v S , kde $L \cap T \subseteq L'$.

Důkaz:

1. Necht platí

$$L' \text{ odděluje } T \cap \bar{U} \text{ a } T \cap \bar{V}$$

Potom $T \setminus L' = U' \cup V'$, kde U', V' jsou otevřené v T a platí

$$T \cap U \subseteq U', \quad T \cap V \subseteq V'.$$

Dále víme, že $U \cap V' = (T \cap U \cap V') \subset U' \cap V' = \emptyset$ a zároveň U je otevřená množina, proto tedy

$$U \cap \bar{V}' = \emptyset \Rightarrow A \cap \bar{V}' = \emptyset.$$

Obdobně lze dokázat, že $B \cap \bar{U}' = \emptyset$.

Pak ale U', V' jsou disjunktní otevřené množiny v S , z čehož plyne, že

$$U' \cap \bar{V}' = \bar{U}' \cap V = \emptyset.$$

Z toho potom dostáváme, že

$$(A \cup U') \cap (\overline{B \cup V'}) = (A \cup U') \cap (\bar{B} \cup \bar{V}') = (A \cap B) \cup (A \cap V') \cup (U' \cap \bar{B}) \cup (U' \cap \bar{V}') = \emptyset.$$

Obdobně bychom ukázali $(\overline{A \cup U'}) \cap (B \cup V') = \emptyset$.

Díky tomu musí existovat v S disjunktní otevřené množiny U'' a V'' , pro které platí $A \cup U' \subseteq U''$ a $B \cup V' \subseteq V''$. Dostáváme tak oddělující množinu jako $L = S \setminus (U'' \cup V'')$ a zároveň

$$T \cap L = (T \setminus (U'' \cup V'')) \subseteq (T \setminus (U' \cup V')) = L'.$$

2. L' odděluje $T \cap A$, $T \cap B$ v $T \Rightarrow$ existují disjunktní otevřené množiny U', V' v T tak, že $T \cap A \subseteq U'$, $T \cap B \subseteq V'$ a zároveň $T \setminus (U' \cup V') = L'$.

Z toho plyne, že množiny A a $(T \setminus U') \cup B$ jsou disjunktní a uzavřené, a tedy

$$A \subseteq S \setminus ((T \setminus U') \cup B) \Rightarrow (\exists U'' \text{ otevřená})(A \subseteq U'' \subseteq \overline{U''} \subseteq S \setminus ((T \setminus U') \cup B)).$$

Obdobně pro množiny B a $(T \setminus V') \cup \overline{U''}$ disjunktní a uzavřené platí

$$(\exists V'' \text{ otevřená})(B \subseteq V'' \subseteq \overline{V''} \subseteq S \setminus ((T \setminus V') \cup \overline{U''})).$$

Dostáváme množiny $A \subseteq U''$, $B \subseteq V''$ a $\overline{U''} \cap \overline{V''} = \emptyset$, na které můžeme použít bod 1. □

Důsledek 3.4.2. Buď S separabilní metrický prostor, A, B disjunktní uzavřené množiny v S , $T \subseteq S$, $\text{ind } T = 0$. Pak existuje množina L oddělující A, B v S , pro kterou $L \cap T = \emptyset$.

Důkaz: Zvolíme U, V otevřené množiny tak, aby $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Množiny $\overline{U} \cap T$, $\overline{V} \cap T$ jsou disjunktní a uzavřené v T , přičemž $\text{ind } T = 0$, a lze je tedy separovat pomocí $L = \emptyset$. Použijeme-li Lemma 3.4.1, dostaneme množinu L oddělující A, B , pro kterou platí $L \cap T \subseteq L' = \emptyset$. □

Věta 3.4.3. Necht' S je separabilní metrický prostor, $A, B \subseteq S$. Pak

$$\text{ind}(A \cup B) \leq 1 + \text{ind } A + \text{ind } B.$$

Důkaz:

- Pokud $\text{ind } A = +\infty$ nebo $\text{ind } B = +\infty$, pak je tvrzení triviální.
- Předpokládejme $\text{ind } A = m$, $\text{ind } B = n$, $m, n \in \{-1, 0, 1, \dots\}$, $m, n < +\infty$.
Indukcí pro $m + n$:

– Pro $m + n = -2$:

Jestliže $A, B = \emptyset$, pak $A \cup B = \emptyset$, a tedy $\text{ind}(A \cup B) = -1 = 1 + (-1) + (-1)$.

– Indukční krok $m + n \rightarrow m + n + 1$:

Necht' $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ nebo $x \in B$. Bereme $x \in A$. Pro $x \in B$ bychom postupovali obdobně.

Buď $V = V$ otevřená v $A \cup B \wedge x \in V$, potom $\{x\}$, $A \setminus V$ jsou odděleny množinou L' , kde $\text{ind } L' \leq m - 1$. Dle lemmatu (3.4.1) pak

$$(\exists L \subset A \cup B)(L \text{ odd. } \{x\}, ((A \cup B) \setminus V) \vee A \cup B \wedge L \cap A \subseteq L').$$

Pak ale $L = (L \cap A) \cup (L \cap B)$ a dle IP platí $\text{ind } L \leq 1 + (m - 1) + n = m + n$. Z definice už nutně $\text{ind}(A \cup B) = 1 + m + n$. □

Důsledek 3.4.4. Buď S separabilní metrický prostor, $T_i \subseteq S$ a $\text{ind } T_i = 0$ pro všechna $i \in \widehat{n+1}$. Pak

$$\text{ind} \bigcup_{i=1}^{n+1} T_i \leq n.$$

Lemma 3.4.5. Buď S metrický prostor. Pak platí

$$(\forall n \in \mathbb{N})(T_n \subseteq S \text{ uzavřená}) \left(\text{ind } T_n = 0 \right) \Rightarrow \text{ind } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = 0.$$

Důkaz: Buď $T := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Pak platí

$$\text{Ind } T = 0 \Leftrightarrow (\forall E, F \subseteq T \text{ disj., uz.}) (\exists U, V \in \tau(T)) (E \subset U \wedge F \subset V, U \cap V = \emptyset, T = U \cup V).$$

Protože $\text{Ind } T_1 = 0$, tak platí $(\exists A_1 \text{ obojetná v } T_1) (T_1 \cap E \subseteq A_1 \wedge T_1 \cap F \subseteq T_1 \setminus A_1)$. Množiny $E \cup A_1$ a $F \cup (T_1 \setminus A_1)$ jsou tedy disjunktní a uzavřené.

Pak

$$(\exists U_1, V_1 \subseteq S \text{ otevřené, } \overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset) (E \cup A_1 \subseteq U_1 \wedge F \cup (T_1 \setminus A_1) \subseteq V_1).$$

Protože $\text{ind } T_2 = 0$, tak platí $(\exists A_2 \text{ obojetná v } T_2) (T_2 \cap \overline{U_1} \subseteq A_2 \wedge T_2 \cap \overline{V_1} \subseteq T_2 \setminus A_2)$. Množiny $\overline{U_1} \cup A_2$ a $\overline{V_1} \cup (T_2 \setminus A_2)$ jsou tedy disjunktní a uzavřené. Potom však

$$(\exists U_2, V_2 \subseteq S \text{ otevřené, } \overline{U_2} \cap \overline{V_2} = \emptyset) (\overline{U_1} \cup A_1 \subseteq U_2 \wedge \overline{V_1} \cup (T_2 \setminus A_2) \subseteq V_2).$$

Takto pokračujeme, abychom dostali posloupnosti $\{U_n\}_{n \geq 1}$ a $\{V_n\}_{n \geq 1}$.

Definujeme $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ a $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Pak jsou U, V disjunktní otevřené množiny $E \subseteq U$ a $F \subseteq V$. Zároveň však také platí, že $(U_n \cup V_n) \cap T_n = T_n \Rightarrow T \subseteq U \cup V$. Pak ale máme oddělující množinu $L = T \setminus ((U \cup V) \cap T) = \emptyset$ a z definice $\text{Ind } T = 0$. \square

Věta 3.4.6. Buď S separabilní metrický prostor, $k \in \mathbb{N}_0$. Necht' dále platí $(\forall n \in \mathbb{N})(T_n \subseteq S \text{ uzavřené}) (\text{ind } T_n \leq k)$. Potom

$$\text{ind } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n \leq k.$$

Důkaz: Definujeme $T := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ a zkoumáme následující případy.

- Pro $k = +\infty$ platí výrok triviálně.
- Pro $k \in \mathbb{N}_0$ dokazujeme matematickou indukci na k .
 - Pro $k = 0$: Viz Lemma 3.4.5.
 - Indukční krok $k - 1 \rightarrow k$:
Dle indukčního předpokladu víme, že

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \mathcal{B}_n \text{ báze } \tau(T_n)) (\forall U \in \mathcal{B}_n) (\text{ind } \partial_{T_n} U \leq k - 1).$$

Množiny $\partial_{T_n} U$ jsou uzavřené v S , a tedy pro spočetné sjednocení $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{U \in \mathcal{B}_n} \partial_{T_n} U$ platí také, že $\text{ind } Y \leq k - 1$.

Označme dále $Z_n = T_n \setminus Y$. Potom $\{U \setminus Y \mid U \in \mathcal{B}_n\}$ je báze $\tau(Z_n)$. Chceme ukázat, že tato báze je tvořená obojetnými množinami.

Množiny $U \setminus Y$ jsou otevřené v Z_n , protože $U \setminus Y = U \cap (T_n \setminus Y) = U \cap Z_n$.

Abychom ukázali uzavřenost množin $U \setminus V$, definujeme $V = Z_n \setminus (U \setminus Y) \subset Z_n$ a bereme $x \in V$. Potom platí, že $x \in T_n \wedge x \notin Y \wedge x \notin U$, a tedy $x \notin U \wedge x \notin \partial_{T_n} U$. Pak ale $(\exists H_x(\varepsilon)$ otevřená) $(H_x(\varepsilon) \cap U = \emptyset)$ a pokud definujeme $H = H_x(\varepsilon) \cap Z_n$, tak $H \in \tau(Z_n)$ tj. H je otevřená. Pro H dále platí, že $x \in H$ a zároveň $H \cap (U \setminus Y) = \emptyset$, díky čemuž je V otevřená v Z_n . $U \setminus Y$ je tedy v Z_n uzavřená.

Báze $\tau(Z_n)$ tedy obsahuje množiny obojetné v Z_n a $\text{ind } Z_n \leq 0$.

Definujeme $Z := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$, kde $Z_n = T_n \setminus Y = T_n \cap Z$ jsou uzavřené v Z a $\text{ind } Z_n \leq 0$, proto platí také $\text{ind } Z \leq 0$. Pak už zřejmě

$$\text{ind } T = \text{ind} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T_n \setminus Y) \cup Y \right) \leq 1 + \text{ind } Z + \text{ind } Y \leq 1 + 0 + k - 1 = k.$$

□

Důsledek 3.4.7. Buď S separabilní metrický prostor, $\text{ind } S = k \in \mathbb{N}$. Potom

$$S = \bigcup_{i=1}^{n+1} T_i, \text{ kde } \text{ind } T_i = 0.$$

Tedy S je sjednocením $k + 1$ množin nulové dimenze.

Věta 3.4.8. Necht S je separabilní metrický prostor a $A, B \subset S$ disjunktní uzavřené množiny. Buď dále $k \in \mathbb{N}_0$ a $T \subseteq S$, $\text{ind } T = k$. Potom existuje množina L oddělující A, B taková, že

$$\text{ind}(T \cap L) \leq k - 1.$$

Důkaz:

- Pro $k = 0$: Tvrzení plyne z Důsledku 3.4.2.
- Pro $k \in \mathbb{N}$:
Dle Důsledku 3.4.7 můžeme říct, že $T = Y \cup Z$, kde $\text{ind } Y = k - 1$ a $\text{ind } Z = 0$. Pak ale z Důsledku 3.4.2 plyne, že $(\exists L$ oddělující $A, B)(L \cap Z = \emptyset)$, a tedy $L \cap T \subseteq Y$. Pak už platí

$$\text{ind}(L \cap T) \leq \text{ind } Y \leq k - 1.$$

□

Věta 3.4.9. Buď S separabilní metrický prostor. Pak platí $\text{Ind } S \leq \text{ind } S$.

Důkaz:

- Pro $\text{ind } S = +\infty$: Tvrzení platí triviálně.
- Pro $\text{ind } S = -1$: Plyne přímo z definic.
- Pro $\text{ind } S = k \in \mathbb{N}_0$ dokazujeme matematickou indukcí na k :
 - Pro $k = 0$: Tvrzení plyne z Poznámky 3.3.2.

– Indukční krok $k - 1 \rightarrow k$:

Nechť $A, B \subseteq S$ jsou množiny disjunktní, uzavřené v S . Pak dle Věty 3.4.8

$$(\exists L \text{ oddělující } A, B)(\text{ind } L \leq k - 1).$$

Dle indukčního předpokladu pak $\text{Ind } L \leq k - 1$, a proto $\text{Ind } S \leq k$.

□

Důsledek 3.4.10. Je-li S separabilní metrický prostor, pak $\text{ind } S = \text{Ind } S$.

Důkaz: Tvrzení plyne přímo z Věty 3.2.5 a Věty 3.4.9.

□

Kapitola 4

Hausdorffova dimenze

Jak bylo již uvedeno, Mandelbrotova definice využívá pojem Hausdorffova dimenze. V této kapitole si tedy pojmu Hausdorffovy míry a poté i Hausdorffovy dimenze zadefinujeme a představíme si některé jejich důležité vlastnosti.

4.1 Míra a vnější míra

Než se dostaneme k samotnému zavedení Hausdorffovy míry a dimenze, je potřeba si nejprve ukázat, jak míru a speciálně vnější míru definujeme a konstruujeme obecně.

Definice 4.1.1. Necht' je dána množina X a \mathcal{F} soubor jejích podmnožin. \mathcal{F} nazýváme σ -algebra na X , právě když platí

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{F}$,
3. $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Definice 4.1.2. Buď X množina a \mathcal{F} σ -algebra na X . Pak míra na \mathcal{F} je funkce $\mathcal{M} : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ taková, že

1. $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$.
2. Pokud $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, je disjunktní posloupnost množin, pak $\mathcal{M}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}(A_n)$.

Definice 4.1.3. Buď X množina a \mathcal{F} σ -algebra na X . Pak vnější mírou na \mathcal{F} nazýváme funkci $\overline{\mathcal{M}} : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$, pro kterou platí

1. $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$,
2. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(B)$,
3. $\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n)$.

V následující části si ukážeme metody, kterými lze vnější míru konstruovat.

Věta 4.1.4. (Metoda I) Buď X libovolná množina a \mathcal{A} soubor podmnožin X , které X pokrývají. Buď dále libovolná funkce $c : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$. Pak existuje jednoznačně daná vnější míra $\overline{\mathcal{M}}$ na X taková, že

1. $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq c(A)$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$.
2. Pokud $\overline{\mathcal{N}}$ je libovolná vnější míra na X , splňující podmínku 1, pak

$$\overline{\mathcal{N}}(B) \leq \overline{\mathcal{M}}(B) \text{ pro všechna } B \subseteq X.$$

Důkaz:

Jednoznačnost konstruované míry:

Pokud máme dvě vnější míry $\overline{\mathcal{M}}_1, \overline{\mathcal{M}}_2$ splňující podmínky věty, pak dle bodu 2 platí pro všechna $B \subseteq X$, že $\overline{\mathcal{M}}_1(B) \leq \overline{\mathcal{M}}_2(B)$ a zároveň $\overline{\mathcal{M}}_2(B) \leq \overline{\mathcal{M}}_1(B)$. Z toho už plyne jejich rovnost.

Existence:

Pro všechny množiny $B \subseteq X$ definujeme

$$\overline{\mathcal{M}}(B) := \inf \sum_{A \in \mathcal{D}} c(A),$$

kde infimum je přes všechna spočetná pokrytí \mathcal{D} pokrývající množinu B množinami z \mathcal{A} .

Chceme ukázat, že $\overline{\mathcal{M}}$ je vnější míra.

- $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$ platí triviálně, protože prázdnou množinu pokryji zase prázdnou množinou.
- $B \subseteq C \Rightarrow$ každé pokrytí C je zároveň pokrytím $B \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}(B) \leq \overline{\mathcal{M}}(C)$.
- Buď dané B_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a chceme ukázat, že $\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_n)$.
Pokud $\overline{\mathcal{M}}(B_n) = +\infty$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak je nerovnost určitě splněna.

Předpokládejme tedy $\overline{\mathcal{M}}(B_n) < +\infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Buď dále $\varepsilon > 0$ a pro všechna n vybereme spočetné pokrytí \mathcal{D} pokrývající množinu B_n množinami z \mathcal{A} tak, aby

$$\sum_{A \in \mathcal{D}_n} c(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(B_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

Nyní $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$ je spočetné pokrytí $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, a platí tedy

$$\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{A \in \mathcal{D}} c(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{A \in \mathcal{D}_n} c(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\varepsilon = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_n) + \varepsilon.$$

Protože ε jsme volili libovolně, platí

$$\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(B_n)$$

Tím jsme splnili podmínky definice a $\overline{\mathcal{M}}$ je tedy vnější míra. Nyní se podíváme, jestli platí také podmínky věty.

1. Pro $A \in \mathcal{A}$ je $\{A\}$ pokrytí A , a tedy

$$\overline{\mathcal{M}}(A) \leq \sum_{B \in \{A\}} c(B) = c(A).$$

2. Předpokládejme, že $\overline{\mathcal{N}}$ je libovolná vnější míra na X , pro kterou platí

$$\overline{\mathcal{N}}(A) \leq c(A) \text{ pro všechna } A \in \mathcal{A}.$$

Pak pro všechna spočetná pokrytí \mathcal{D} množiny B elementy z \mathcal{A} dostáváme

$$\sum_{A \in \mathcal{D}} c(A) \geq \sum_{A \in \mathcal{D}} \overline{\mathcal{N}}(A) \geq \overline{\mathcal{N}}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{D}} A\right) \geq \overline{\mathcal{N}}(B).$$

Z definice $\overline{\mathcal{M}}(B)$ už pak jasně plyne, že $\overline{\mathcal{M}}(B) \geq \overline{\mathcal{N}}(B)$.

□

Věta 4.1.5. Buď X množina a funkce $c : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$. Buď $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$ vnější míra na X konstruovaná dle Metody I, definovaná za pomoci souboru \mathcal{A} a omezená funkcí c . Pak

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}} \leq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}$,
2. $(\forall A \in \mathcal{A})(\forall \varepsilon > 0)(\exists B \in \mathcal{B})(A \subseteq B \wedge c(B) \leq c(A) + \varepsilon) \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}} \leq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$.
3. Buď navíc $K > 0$ konstanta taková, že platí

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\exists B \in \mathcal{B})(A \subseteq B \wedge c(B) \leq K \cdot c(A)),$$

potom $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}} \leq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$.

Důkaz:

1. Vnější míra $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}$ je největší vnější míra splňující $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(B) \leq c(B)$ pro všechna $B \in \mathcal{B}$. Stejnou podmínku ale plní i $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}$, a z maximality $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}$ tedy $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}} \leq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}$.
2. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a necht' je dále $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \dots\} \subseteq \mathcal{A}$ spočetné pokrytí množiny E . Pro všechna A_j vybereme B_j tak, aby $A_j \subseteq B_j$ a zároveň $c(B_j) \leq c(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Pak $\mathcal{D}' = \{B_1, B_2, \dots\}$ je také pokrytím E a

$$\varepsilon + \sum_{j \in \mathbb{N}} c(A_j) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} c(B_j) \geq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(E).$$

Bereme-li infimum přes všechna spočetná pokrytí množiny E , dostáváme

$$\varepsilon + \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(E) \geq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(E).$$

To platí pro všechna $\varepsilon > 0$, a proto $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(E) \geq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(E)$.

3. Buď $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \dots\} \subseteq \mathcal{A}$ spočetné pokrytí množiny E . Pro všechna A_j vybereme B_j tak, aby $A_j \subseteq B_j$ a zároveň $c(B_j) \leq K \cdot c(A_j)$. Pak $\mathcal{D}' = \{B_1, B_2, \dots\}$ je také pokrytím E a

$$K \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} c(A_j) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} c(B_j) \geq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(E).$$

Bereme-li infimum přes všechna spočetná pokrytí množiny E , dostáváme

$$K \cdot \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(E) \geq \overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}}(E).$$

□

Definice 4.1.6. Buď $\overline{\mathcal{M}}$ vnější míra na množině X . Pak množina $A \subseteq X$ je $\overline{\mathcal{M}}$ -měřitelná, právě když $\overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}(E \cap A) + \overline{\mathcal{M}}(E \setminus A)$ pro všechny $E \subseteq X$.

Poznámka 4.1.7. Měřitelnost zde bereme v Carathéodoryho smyslu, jehož definici a vlastnosti lze najít například v Chapter 5.1 v [4].

Věta 4.1.8. Necht' je dán soubor množin \mathcal{F} tvořený $\overline{\mathcal{M}}$ -měřitelnými množinami na X , pak je to σ -algebra a platí

$$\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n).$$

Důkaz: Je zřejmé, že $\emptyset \in \mathcal{F}$, protože pro všechna $E \subseteq X$ platí

$$\overline{\mathcal{M}}(E \cap \emptyset) + \overline{\mathcal{M}}(E \setminus \emptyset) = \overline{\mathcal{M}}(\emptyset) + \overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}(E).$$

Obdobně lze ukázat, že $A \in \mathcal{F}$, právě když její doplněk $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Předpokládejme, že $A_j \in \mathcal{F}$ pro $j = 1, 2, \dots$ a $E \subseteq X$ je libovolná množina. Potom

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}(E) &= \overline{\mathcal{M}}(E \cap A_1) + \overline{\mathcal{M}}(E \setminus A_1) \\ &= \overline{\mathcal{M}}(E \cap A_1) + \overline{\mathcal{M}}((E \setminus A_1) \cap A_2) + \overline{\mathcal{M}}(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=1}^k \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j\right). \end{aligned}$$

Proto $\overline{\mathcal{M}}(E) \geq \sum_{j=1}^k \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right)$, a tedy pro $k \rightarrow +\infty$

$$\overline{\mathcal{M}}(E) \geq \sum_{j=1}^k \overline{\mathcal{M}}\left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right).$$

Ale $E \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right)$, takže platí také

$$\overline{\mathcal{M}}(E) \leq \overline{\mathcal{M}}\left(E \cap \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) + \overline{\mathcal{M}}\left(E \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i\right) \cap A_j\right).$$

Proto $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$ a \mathcal{F} je tedy σ -algebra.

Pokud jsou navíc A_j disjunktní, pak pro $E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ dostáváme

$$\overline{\mathcal{M}}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n).$$

□

Definice 4.1.9. Buď S metrický prostor, $A, B \subseteq S$ a $\overline{\mathcal{M}}$ je vnější míra na S . Řekneme, že $\overline{\mathcal{M}}$ je metrická vnější míra, právě když platí

$$\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) = \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B)$$

pro všechny A, B , kde $\text{dist}(A, B) > 0$.

Definujeme dále metrickou míru \mathcal{M} jako zúžení metrické vnější míry $\overline{\mathcal{M}}$ na $\overline{\mathcal{M}}$ -měřitelné množiny.

Metoda I má ale nevýhodu v tom, že může selhat v poskytnutí míry na otevřených měřitelných množinách, viz [4]. Proto se nyní podíváme na Metodu II, díky které je možné tyto problémy odstranit.

Definice 4.1.10. (Metoda II) Buď dán \mathcal{A} soubor podmnožin metrického prostoru S , funkce $c : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ a předpokládejme, že

$$(\forall x \in S)(\forall \varepsilon > 0)(\exists A \in \mathcal{A})(x \in A \wedge \text{diam } A \leq \varepsilon).$$

Definujeme pro všechna $\varepsilon > 0$ soubor množin

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \{A \in \mathcal{A} \mid \text{diam } A \leq \varepsilon\}.$$

Nechť $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon$ je vnější míra dle Metody I omezená funkcí c definovaná na souboru \mathcal{A}_ε . Pak dle Věty 4.1.5, jestliže máme danou množinu E , pokud ε klesá, pak $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(E)$ roste.

Definujeme tedy

$$\overline{\mathcal{M}}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(E).$$

Věta 4.1.11. Funkce $\overline{\mathcal{M}}$ definovaná pomocí Metody II je metrická vnější míra.

Důkaz: Buď $A, B \subseteq S$, pro které platí $\text{dist}(A, B) > 0$.

Protože $\overline{\mathcal{M}}$ je vnější míra, platí $\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) \leq \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B)$. Chceme tedy dokázat opačnou nerovnost.

Buď $\varepsilon > 0$ takové, že $\varepsilon < \text{dist}(A, B)$, a necht' je \mathcal{D} spočetné pokrytí $A \cup B$ množinami z \mathcal{A}_ε . Pro množiny $D \in \mathcal{D}$ platí, že $\text{diam } D < \text{dist}(A, B)$, takže D protíná nejvýše jednu z množin A, B . Díky tomu můžeme rozdělit pokrytí \mathcal{D} na dvě části, kde \mathcal{D}_1 pokrývá množinu A a \mathcal{D}_2 pokrývá množinu B . Pak ale dostáváme

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} c(D) = \sum_{D \in \mathcal{D}_1} c(D) + \sum_{D \in \mathcal{D}_2} c(D) \geq \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(A) + \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(B).$$

Pokud nyní vezmeme infimum přes všechna pokrytí, dostaneme $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(A \cup B) = \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(A) + \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(B)$. Pro $\varepsilon \rightarrow 0$ pak už

$$\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) = \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B).$$

□

4.2 Hausdorffova míra

Definice 4.2.1. Buď S metrický prostor, $s > 0$. Pak definujeme s -dimenzionální Hausdorffovu vnější míru jako vnější míru podle Metody II, viz Definici 4.1.10, definovanou pomocí množinové funkce $c_s(A) = (\text{diam } A)^s$. Označujeme ji $\overline{\mathcal{H}}^s$.

Protože Metoda II využívá vnější míru konstruovanou pomocí Metody I, ukážeme si nyní konstrukci podle této metody.

Nechť je k předchozí definici navíc dáno $\varepsilon > 0$, \mathcal{A} spočetné ε -pokrytí $F \subseteq S$, tedy spočetné pokrytí takovými množinami, že $\text{diam } A < \varepsilon$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$. Pak definujeme

$$\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \inf \sum_{A \in \mathcal{A}} (\text{diam } A)^s,$$

kde infimum je přes všechna spočetná ε -pokrytí \mathcal{A} množinami z S . Pokud ε klesá, pak hodnota $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s$ roste. Dostáváme tedy, že

$$\overline{\mathcal{H}}^s(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$$

je s -dimenzionální Hausdorffova vnější míra pro množinu F .

Věta 4.2.2. Buď S metrický prostor, $F \subseteq S$. Pokud F je konečná množina, pak $\overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0$ pro všechna $s > 0$.

Důkaz: Protože bodů množiny F je konečně mnoho, tak jsme schopni pro libovolně malé epsilon pokrýt každý bod množinou s nulovým poloměrem, protože každý bod je zde sám sobě okolím. Máme tedy konečné pokrytí množiny F takové, že pro všechna A z pokrývací množiny je $\text{diam } A = 0$. Pak už ale

$$\overline{\mathcal{H}}^s(F) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{A \in \mathcal{A}} (\text{diam } A)^s = 0.$$

□

4.3 Hausdorffova dimenze

Hausdorffovu míru $\overline{\mathcal{H}}^s(F)$ však můžeme také zkoumat jako funkci s pro množinu F . Lze ukázat, že pro rostoucí s funkce $\overline{\mathcal{H}}^s(F)$ klesá. Jak je ale vidět z následující věty, platí mnohem silnější tvrzení.

Věta 4.3.1. Buď F borelovská množina a $0 < s < t$. Pak pokud $\overline{\mathcal{H}}^s(F) < +\infty$, pak $\overline{\mathcal{H}}^t(F) = 0$. Pokud $\overline{\mathcal{H}}^t(F) > 0$, pak $\overline{\mathcal{H}}^s(F) = +\infty$.

Důkaz: Pokud $\text{diam } A < \varepsilon$, pak

$$\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^t(A) \leq (\text{diam } A)^t \leq \varepsilon^{t-s} (\text{diam } A)^s.$$

Pak už podle Věty 4.1.4 platí $\overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^t(F) \leq \varepsilon^{t-s} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F)$ pro všechna F . Potom ale pokud $\overline{\mathcal{H}}^s(F) < +\infty$, pak

$$\overline{\mathcal{H}}^t(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^t(F) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{t-s} \overline{\mathcal{H}}_\varepsilon^s(F) = 0.$$

Druhé tvrzení je jen obměna první implikace. □

Poznámka 4.3.2. Věta 4.3.1 nám vlastně říká, že pro danou množinu F existuje jedinečná mezní hodnota $s_0 \in [0, +\infty]$ taková, že

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{H}}^s(F) &= +\infty \quad \forall s < s_0 \\ \overline{\mathcal{H}}^s(F) &= 0 \quad \forall s > s_0\end{aligned}$$

Definice 4.3.3. Definujeme Hausdorffovu dimenzi množiny F jako

$$\dim_{\mathcal{H}} F = \inf\{s \in [0; +\infty] \mid \overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0\}.$$

Poznámka 4.3.4. Je samozřejmě možné, že $\overline{\mathcal{H}}^s(F) = 0$ pro všechna $s > 0$, potom klademe $\dim_{\mathcal{H}}(F) = 0$. Podobně se může stát, že $\overline{\mathcal{H}}^s(F) = +\infty$ pro všechna $s > 0$, potom $\dim_{\mathcal{H}}(F) = +\infty$.

Věta 4.3.5. Buď A, B borelovské množiny. Pak platí následující tvrzení.

1. Pokud $A \subseteq B$, pak $\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{\mathcal{H}} B$.
2. $\dim_{\mathcal{H}}(A \cup B) = \max\{\dim_{\mathcal{H}} A, \dim_{\mathcal{H}} B\}$.

Důkaz:

1. Předpokládejme, že $A \subseteq B$. Pokud $s > \dim_{\mathcal{H}} B$, potom $\overline{\mathcal{H}}^s(A) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(B) = 0$, a tedy $\dim_{\mathcal{H}} A \leq \dim_{\mathcal{H}} B$.
2. Buď $s > \max\{\dim_{\mathcal{H}} A, \dim_{\mathcal{H}} B\}$. Potom $s > \dim_{\mathcal{H}} A$, takže $\overline{\mathcal{H}}^s(A) = 0$. Podobně $\overline{\mathcal{H}}^s(B) = 0$. Pak $\overline{\mathcal{H}}^s(A \cup B) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(A) + \overline{\mathcal{H}}^s(B) = 0$, a proto $\dim_{\mathcal{H}}(A \cup B) \leq s$. To však platí pro všechna $s > \max\{\dim_{\mathcal{H}} A, \dim_{\mathcal{H}} B\}$, takže dostáváme

$$\dim_{\mathcal{H}}(A \cup B) \leq \max\{\dim_{\mathcal{H}} A, \dim_{\mathcal{H}} B\}.$$

Podle bodu 1 ale zároveň platí, že $\dim_{\mathcal{H}}(A \cup B) \geq \max\{\dim_{\mathcal{H}} A, \dim_{\mathcal{H}} B\}$, proto už se nutně musí rovnat. □

Věta 4.3.6. Buď S metrický prostor, $T \subseteq S$, $f : S \rightarrow T$ podobnost s koeficientem $r > 0$. Buď dále $s > 0$, $F \subseteq S$. Pak

$$\overline{\mathcal{H}}^s(f[F]) = r^s \overline{\mathcal{H}}^s(F),$$

a tedy $\dim_{\mathcal{H}} f[F] = \dim_{\mathcal{H}} F$.

Důkaz: Předpokládejme, že $T = f[S]$. Potom f má inverzi f^{-1} .

Pro množinu $A \subseteq S$ platí, že $\text{diam } f[A] = r \text{ diam } A$. proto platí také $(\text{diam } f[A])^s = r^s (\text{diam } A)^s$. Podle Věty 4.1.4 dostáváme

$$\overline{\mathcal{H}}_{r\varepsilon}^s(f[F]) = r^s \overline{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^s(F).$$

Proto $\overline{\mathcal{H}}_r^s(f[F]) = r^s \overline{\mathcal{H}}^s(F)$ a $\dim_{\mathcal{H}} f[F] = \dim_{\mathcal{H}} F$. □

4.4 Další fraktální dimenze

Jak už bylo zmíněno v úvodu, nejznámější definice fraktálu pochází od B. B. Mandelbrota, viz [16], je založena na porovnání topologické a fraktální, v tomto případě Hausdorffovy, dimenze. Pro jiné účely se ale často využívají obdobné definice, které pouze místo Hausdorffovy využívají jiné fraktální dimenze. Tyto definice nejsou často tak obecné jako původní Mandelbrotova definice, ale pro určité výpočty se mohou hodit lépe. Jedním z příkladů je mřížková dimenze, kterou si představíme dále. Ta se často využívá, protože pro jisté množiny je porovnatelná s dimenzí Hausdorffovou a je mnohem jednodušší ji vypočítat. Další zajímavou dimenzí je například Higuchiho fraktální dimenze, kterou lze použít pro výpočet dimenze některých křivek. V aplikaci ji lze použít například pro výpočet fraktální dimenze DNA, viz [21]. Obecně tyto další fraktální dimenze nemusí hodnotami vůbec odpovídat Hausdorffově dimenzi, přestože je budeme měřit na stejných množinách. Více o takovýchto dimenzích je možné najít například v [22].

Nyní si ukážeme, odkud přesně se Mandelbrotova definice fraktálu vzala. Tuto definici někdy nazýváme jako tzv. nultou definici. Vychází ze znalosti následující věty.

Věta 4.4.1. Buď S metrický prostor, $T \subseteq S$. Potom $\text{Cov } T \leq \dim_{\mathcal{H}} T$, kde Cov je pokrývací topologická dimenze.

Důkaz: Podrobný důkaz je možné najít v [23]. □

Abychom dostali definici fraktálu podle Mandelbrota, stačí nyní brát ve Větě 4.4.1 nerovnost ostrou.

Definice 4.4.2. Buď S metrický prostor. Potom fraktál je taková množina $T \subseteq S$, pro kterou platí $\text{Cov } T < \dim_{\mathcal{H}} T$.

Tato definice ale stále není úplně uspokojivá, protože pro některé množiny se tyto dimenze rovnají i přesto, že bychom je z ostatních hledisek mezi fraktální množiny zařadili. Jednou z takových množin je například tzv. ďábelské schodiště někdy nazývané také Cantorovo schodiště. Jeho definici a vlastnosti je možné najít v [1]. To je dalším z důvodů, proč se hledají jiné fraktální dimenze, které by byly použitelné pro všechny množiny, které bychom chtěli zařadit mezi fraktály. Jednu takovou dimenzi si podle [24] nyní představíme.

Definice 4.4.3. Buď S metrický prostor, $T \subseteq S$. Buď dále $\delta > 0$ a označme $N_{\delta}(T)$ jako nejmenší počet koulí o poloměru δ , kterými jsme schopni T pokrýt. Potom definujeme

$$\dim_F T = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(T)}{\log(1/\delta)}.$$

Tato fraktální dimenze má následující vlastnost.

Věta 4.4.4. Buď S metrický prostor, $T \subseteq S$, $\delta > 0$ a $N_{\delta}(T)$ je nejmenší počet koulí o poloměru δ pokrývajících T . Potom $\dim_{\mathcal{H}} T \leq \dim_F T$.

4.4.1 Mřížková dimenze

Mřížková dimenze, v angl. známá jako box-counting dimension, je jednou z nejvyužívanějších fraktálních dimenzí. To je způsobeno tím, že je možné poměrně snadno sestavit program pro výpočet této dimenze.

Uvedeme si pouze základní definici a několik vlastností. Více informací, stejně jako důkazy lze nalézt v [4, 22].

Definice 4.4.5. Buď A neprázdná omezená podmnožina \mathbb{R}^n a $N_\delta(A)$ nejmenší počet množin s průměrem menším než δ pokrývajících A . Potom definujeme dolní resp. horní mřížkovou dimenzi jako

$$\underline{\dim}_B A = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta},$$

$$\overline{\dim}_B A = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Definice 4.4.6. Buď A neprázdná omezená podmnožina \mathbb{R}^n a $N_\delta(T)$ nejmenší počet množin s průměrem menším než δ pokrývajících T . Potom pokud $\underline{\dim}_B A = \overline{\dim}_B A$, pak definujeme mřížkovou dimenzi, jako

$$\dim_B A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}.$$

Existuje několik ekvivalentních definic v závislosti na volbě pokrývacích množin. Typicky bereme koule nebo krychle pokrývajících vybranou množinu, které mohou a nemusí být disjunktní. Je možné ale brát pokrývací množiny libovolného tvaru.

Je tedy poměrně zřejmé, že mřížková dimenze je zobecněním výše zavedené dimenze \dim_F .

Věta 4.4.7. Buď $A \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná omezená množina. Potom platí

$$\dim_{\mathcal{H}} A \leq \underline{\dim}_B A \leq \overline{\dim}_B A.$$

Tato věta je velmi důležitá, protože nám říká, že Hausdorffova dimenze je vždy menší než dimenze mřížková. V jistých případech, pak může nastávat rovnost.

Kapitola 5

Soběpodobnost

Soběpodobnost je geometrická vlastnost, kterou je možné pozorovat u mnoha přírodních objektů jako jsou například stromy, vločky nebo i krevní řečiště. Blíže si tuto vlastnost můžeme představit například na kvěťáku. To samozřejmě není klasický fraktál, jak ho chápeme matematicky, ale svou strukturou se mu blíží. Pokud totiž rozdělíme kvěťák na několik částí, jednotlivé kusy budou vypadat téměř stejně jako celek, jen menší.

V ideálním matematickém příkladě, takto můžeme fraktál dělit na části až do nekonečna a stále budeme objevovat struktury stejné nebo podobné původnímu fraktálu.

5.1 Systémy iterovaných funkcí

Jedním z nejjednodušších způsobů, jak tvořit a popisovat geometricky složité množiny, je pomocí tzv. systému iterovaných funkcí. Tyto systémy nám ukazují, pomocí jakých transformací množina vznikla a díky tomu jsme pak schopni v jistých případech přesně spočítat také jejich fraktální dimenzi.

Definice 5.1.1. Buď S metrický prostor a zobrazení $f : S \rightarrow S$. Pokud platí

$$(\forall x, y \in S)(\exists r \neq 0)(\rho(f(x), f(y)) = r\rho(x, y)),$$

pak f nazýváme podobnost a r podobnostní koeficient. Pokud navíc $r \in (0, 1)$, pak toto zobrazení nazýváme kontrahující.

Definice 5.1.2. Buď f_1, \dots, f_n , $n \in \mathbb{N}$, kontrahující podobnostní funkce na metrickém prostoru S . Pak (f_1, \dots, f_n) nazýváme systém iterovaných funkcí (IFS). Řekneme dále, že $T \subseteq S$ je invariantní vůči tomuto systému funkcí, právě když platí

$$T = \bigcup_{i=1}^n f_i[T].$$

Věta 5.1.3. Buď (r_1, \dots, r_n) , $n \in \mathbb{N}$, $r_i < 1$ pro všechna $i \in \hat{n}$, soubor podobnostních koeficientů odpovídajících nějakému IFS. Pak $(\exists_1 s > 0) \left(\sum_{i=1}^n r_i^s = 1 \right)$ a platí

$$s = 0 \Leftrightarrow n = 1.$$

Důkaz: Definujme funkci $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ jako

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^n r_i^s.$$

Pak Φ je spojitá funkce, $\Phi(0) = n \geq 1$ a $\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s) = 0$. Z věty o střední hodnotě tedy plyne, že existuje alespoň jedno s takové, že $\Phi(s) = 1$.

$$\frac{d}{ds} \Phi(s) = \sum_{i=1}^n r_i^s \log r_i < 0.$$

Funkce Φ je klesající a existuje tedy právě jedno řešení $\Phi(s) = 1$.

Pro $n > 1$ je tedy $\Phi(0) > 1$, takže $s \neq 0$. □

Definice 5.1.4. Buď (f_1, \dots, f_n) , $n \in \mathbb{N}$, systém iterovaných funkcí na metrickém prostoru S s podobnostními koeficienty (r_1, \dots, r_n) a $T \subseteq S$ invariantní množina k danému IFS. Pak hodnotu s z Věty 5.1.3 nazýváme podobnostní dimenze množiny T .

Problém podobnostní dimenze spočívá v tom, že pro jednu invariantní množinu a různé podobnostní transformace může dávat rozdílné hodnoty.

Příklad 5.1.5. Mějme uzavřený interval $[0, 1]$, který můžeme rozložit dvěma různými způsoby $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] = [0, \frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{3}, 1]$. Těmto rozkladům odpovídají následující transformace

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{2}{3}x & g_1(x) &= \frac{1}{2}x \\ f_2(x) &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & g_2(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tím dostáváme dva soubory podobnostních koeficientů ve tvaru $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Podobnostní dimenzi tedy dostáváme jako řešení rovnic

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{s_1} = 1 \qquad 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{s_2} = 1.$$

Podobnostní dimenze tedy má hodnoty $s_1 = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2}$ a $s_2 = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$. Tyto hodnoty se evidentně nerovnají. Podobnostní dimenze tedy spíše než invariantní množinu charakterizuje systém iterovaných funkcí.

Nyní si uvedeme velmi důležitou větu, která nám říká, že v jistých případech se podobnostní dimenze rovná dimenzi Hausdorffově a dokonce i mřížkové dimenzi. Vzhledem k tomu, že Hausdorffova dimenze už je daná jednoznačně, pro tyto případy je i podobnostní dimenze jedinečná pro vybranou invariantní množinu.

Věta 5.1.6. Buď f_1, \dots, f_n , $n \in \mathbb{N}$, funkce na metrickém prostoru S s koeficienty podobnosti (r_1, \dots, r_n) takové, že existuje neprázdná omezená množina $V \subset S$, pro kterou platí

$$\bigcup_{i=1}^n f_i[V] \subset V$$

a toto sjednocení je disjunktní.

Potom pokud $T = \bigcup_{i=1}^n f_i[T]$ je invariantní množina tohoto systému iterovaných funkcí, pak

$$\dim_{\mathcal{H}} T = \dim_B T = s,$$

kde s je podobnostní dimenze. Navíc pro s platí, že $0 < \mathcal{H}^s < +\infty$.

Důkaz: Viz [22]. □

Příklad 5.1.7. Pro Cantorovo diskontinuum C definované rovnicí (1.1) má soubor podobnostních koeficientů tvar $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ a tedy podobnostní dimenzi s množiny C vypočteme z rovnice $2 \cdot (\frac{1}{3})^s = 1$.

Dostáváme proto $s = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63$.

Pokud za množinu V z Věty 5.1.6 vezmeme množinu C_0 , tak splníme podmínky této věty a hodnota s se rovná také dimenzi Hausdorffově.

Příklad 5.1.8. Pro Sierpinského trojúhelník S máme systém iterovaných funkcí s podobnostními koeficienty $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Pokud za množinu V z Věty 5.1.6 bereme vnitřek trojúhelníku S_0 z konstrukce Sierpiňského trojúhelníku, pak splníme podmínky Věty 5.1.6 a Hausdorffovu dimenzi spočítáme jako řešení

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1.$$

Dostáváme tedy $s = \dim_{\mathcal{H}} S = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58$.

5.1.1 Hausdorffův nadprostor

Než se dostaneme k nejdůležitější větě této kapitoly zabývající se konstrukcí invariantní množiny IFS, je potřeba si definovat, co to je Hausdorffův nadprostor a jak na něm zavádíme metriku. Zaměříme se pouze na základní uvedení problematiky podle knihy [25].

Poznámka 5.1.9. Pracujeme na metrickém prostoru S s metrikou ρ .

Označme

$$S^* = \{A \subset S \mid \emptyset \neq A \text{ je kompaktní}\},$$

$$u(A, B) = \max\{\rho(x, B) \mid x \in A\} \text{ pro } A, B \in S^*,$$

kde $\rho(x, B) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in B\}$. Potom definujeme

$$\rho^*(A, B) := \max\{u(A, B), u(B, A)\}.$$

Věta 5.1.10. Za podmínek a značení z Poznámky 5.1.9 platí $\rho^* : S^* \times S^* \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je na S^* metrika.

Důkaz: Musíme ověřit vlastnosti metriky

1. Chceme ukázat, že $\rho^*(A, B) = \rho^*(B, A)$.
Plyne přímo z definice ρ^* .
2. Dokazujeme, že jestliže $\rho^*(A, B) = 0$, potom $A = B$.
 \Leftarrow : Pokud $A = B$, pak $u(A, B) = 0 = u(B, A)$.
 \Rightarrow : Pokud $\rho^*(A, B) = 0$, potom $(\forall x \in A, y \in B)(\rho(x, y) = 0)$ z čehož už plyne $A = B$, protože ρ je metrika.

3. Poslední vlastností metriky, kterou máme ukázat je $\rho^*(A, B) \leq \rho^*(A, C) + \rho^*(C, B)$.
Z vlastností ρ jako metriky plyne, že $u(A, B) \leq u(A, C) + u(C, B)$ a obdobně $u(B, A) \leq u(B, C) + u(C, A)$. Z definice $\rho^*(A, B) = \max\{u(A, B), u(B, A)\}$ už pak uvedená vlastnost plyne přímo. □

Definice 5.1.11. Metrický prostor (S^*, ρ^*) se nazývá Hausdorffův nadprostor.

Věta 5.1.12. Prostor (S, ρ) má vlastnost V , právě když prostor (S^*, ρ^*) má vlastnost V , pro $V \in \{\text{úplnost, kompaktnost a pre-kompaktnost}\}$.

Důkaz: Viz např [25]. □

Poznámka 5.1.13. Při konstrukci invariantní množiny IFS použijeme vlastnost $V = \text{úplnost}$ a Banachovu větu o pevném bodě.

Věta 5.1.14. Buď S neprázdný úplný metrický prostor a systém iterovaných funkcí (f_1, \dots, f_n) , $n \in \mathbb{N}$ s podobnostními koeficienty (r_1, \dots, r_n) . Pak existuje právě jedna neprázdna kompaktní invariantní množina pro daný soubor funkcí, $T = \bigcup_{i=1}^n f_i[T]$. Množina T je tedy pevným bodem operátoru

$$F[A] = \bigcup_{i=1}^n f_i[A].$$

Důkaz: Předpokládejme Hausdorffův nadprostor a jeho metriku (S^*, ρ^*) . Protože S je úplný, dle Věty 5.1.12 je S^* také úplný. Definujeme funkci $F : S^* \rightarrow S^*$ jako

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i[A].$$

Spojitý obraz kompaktní množiny je množina kompaktní a zároveň sjednocení konečně mnoha kompaktních množin je kompaktní. Proto je-li A kompaktní, pak je i $F[A]$ kompaktní.

Buď $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$, tedy $r < 1$. Chceme ukázat, že $\rho^*(F(A), F(B)) \leq r\rho^*(A, B)$.

Buď dáno $q > \rho^*(A, B)$. Pokud $x \in F(A)$, pak existuje $x' \in A$ tak, že $x = f_i(x')$, pro nějaké $i \in \hat{n}$. Protože $q > \rho^*(A, B)$, tak musí existovat $y' \in B$ tak, že $\rho(x', y') < q$. Pak ale $y = f_i(y') \in F(B)$ splňuje $\rho(x, y) = r_i\rho(x', y') < rq$ a platí to pro všechna $x \in F(A)$.

Obdobně lze ukázat, že $(\forall y \in F(B))(\exists x \in F(A))(\rho(x, y) < rq)$.

Proto tedy $\rho^*(F(A), F(B)) \leq rq$. Toto platí pro všechna $q > \rho^*(A, B)$, pak už ale

$$\rho^*(F(A), F(B)) \leq r\rho^*(A, B).$$

Z Banachovy věty o pevném bodě pak plyne jednoznačnost invariantní množiny. □

Následující důsledek nám ukazuje způsob konstrukce invariantní množiny k danému IFS.

Důsledek 5.1.15. Při stejných předpokladech a značení jako u předchozí věty, je-li $A_0 \subseteq S$ neprázdná kompaktní množina a definujeme-li

$$A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^n f_i[A_k] \text{ pro všechna } k \geq 0,$$

pak posloupnost $\{A_k\}_{k \geq 1}$ konverguje v Hausdorffově metrice k invariantní množině daného souboru iterovaných funkcí.

5.1.2 Collage theorem

Následující lemma a větu představil v roce 1985 M. Barnsley v [8]. Věta je známá jako „The Collage Theorem“ a je velmi důležitá pro zobrazování fraktálů, protože nám ukazuje, jak se množina transformovaná souborem iterovaných funkcí blíží invariantní množině.

Lemma 5.1.16. Buď (S, ρ) úplný metrický prostor a buď $f : S \rightarrow S$ podobnost s koeficientem $0 \leq r < 1$ taková, že $x_0 \in S$ je pevný bod pro toto zobrazení. Potom

$$\rho(x, x_0) \leq (1 - r)^{-1} \rho(x, f(x))$$

pro všechna $x \in S$.

Důkaz: Ze spojitosti ρ je evidentní, že

$$\rho(x, x_0) = \rho(x, \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{on}(x)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x, f^{on}(x)), \quad (5.1)$$

kde $f^{on} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$. Z trojúhelníkové nerovnosti pak plyne, že

$$\rho(x, f^{on}(x)) \leq \sum_{m=1}^n \rho(f^{o(m-1)}(x), f^{om}(x)) \leq \rho(x, f(x))(1 + r + \dots + r^{n-1}).$$

Pokud nyní výraz výše dosadíme do (5.1), dostáváme

$$\rho(x, x_0) \leq \frac{\rho(x, f(x))}{1 - r},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 5.1.17. Necht (S, ρ) je úplný metrický prostor, $T \in S^*$ a $\varepsilon > 0$. Pak pro systém iterovaných funkcí (f_1, \dots, f_n) s podobnostními koeficienty (r_1, \dots, r_n) takový, že $\rho^*\left(T, \bigcup_{i=1}^n f_i(T)\right) \leq \varepsilon$, kde ρ^* je Hausdorffova metrika, jak jsme ji dosali v Poznámce 5.1.9, platí, že

$$\rho^*(T, A) \leq \frac{\varepsilon}{1 - \max\{r_1, \dots, r_n\}},$$

kde A je invariantní množinou IFS.

Důkaz: Plyne z Lemmatu 5.1.16. □

V konkrétních příkladech na prostoru \mathbb{R}^2 resp. \mathbb{C} mají obvykle jednotlivé funkce tvar afinních zobrazení. Typicky tato zobrazení zapisujeme jako

$$f_i(x) = f_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

kde $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ jsou koeficienty odpovídající zobrazení f_i .

5.2 Rekurentní systémy iterovaných funkcí

Pokud v klasickém IFS přiřadíme každé uspořádané dvojici funkcí (f_i, f_j) z tohoto systému číslo, které vyjadřuje s jakou pravděpodobností bude po funkci f_i použita funkce f_j , dostáváme rekurentní systém iteračních funkcí, $i, j \in \hat{n}$, kde n je počet funkcí v IFS. Tento systém představil M. Barnsley v článku [26], ze kterého tato kapitola vychází. V následujícím textu si tedy rekurentní systém zavedeme korektně a představíme si jeho vlastnosti, které jsou podobné jako pro klasické IFS.

Definice 5.2.1. Buď dán metrický prostor (S, ρ) . Rekurentní IFS se skládá ze systému iterovaných funkcí $\{f_1, \dots, f_n\}$ společně s maticí $\{p_{ij} \in [0, 1] \mid i, j \in \hat{n}\}$ tak, že

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{in} = 1 \text{ pro } i \in \hat{n}$$

a zároveň pro všechny i, j existuje konečná posloupnost čísel $a, b, \dots, m \in \hat{n}$ taková, že

$$p_{ia}p_{ab} \dots p_{mj} > 0.$$

Buď (S_j, ρ_j) kompaktní metrické prostory, $j \in \{1, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Nechť jsou dále (S_j^*, ρ_j^*) přidružené prostory s Hausdorffovou metrikou. Pro $f_i : S \rightarrow S$ kontrahující zobrazení a (p_{ij}) jako v definici výše definujeme zobrazení $F_{ij} : S_j^* \rightarrow S_i^*$ pro všechna $(i, j) \in I$, kde $I(i) = \{j \mid p_{ji} > 0\}$ jako

$$F_{ij}(T) = \{f_i(x) \mid x \in T\}.$$

Buď dále $S^{**} = S_1^* \times S_2^* \times \dots \times S_n^*$ prostor, který spojíme s metrikou definovanou jako

$$\rho^{**}((A_1, \dots, A_n), (B_1, \dots, B_n)) = \max\{\rho_j^*(A_j, B_j) \mid j \in \hat{n}\}.$$

Potom (S^{**}, ρ^{**}) je kompaktní metrický prostor, na kterém definujeme $F : S^{**} \rightarrow S^{**}$ předpisem

$$F(A_1, \dots, A_n) = \left(\bigcup_{j \in I(1)} f_{1j}(A_j), \dots, \bigcup_{j \in I(n)} f_{nj}(A_j) \right).$$

Výraz $(i, j) \in I$ je ekvivalentní $I(i) \neq \emptyset$.

Věta 5.2.2. Buď dán (S, ρ) kompaktní metrický prostor a na něm rekurentní IFS (f_i, p_{ij}) , kde $i, j \in \hat{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak pro $F : S^{**} \rightarrow S^{**}$ platí

$$\rho^{**}(F(A), F(B)) \leq r \rho^{**}(A, B), \text{ pro všechna } A, B \in S^{**},$$

kde $r = \max\{r_{ij} \mid (i, j) \in I\}$.

Důsledek 5.2.3. Nechť jsou dány předpoklady stejné jako ve Větě 5.2.2, pak existuje právě jedna množina $A = (A_1, \dots, A_n) \in S^{**}$ taková, že

$$A_i = \bigcup_{j \in I(i)} F_{ij}(A_j) \text{ pro } i \in \hat{n}.$$

To znamená, že $F(A) = A$ a množinu A nazýváme invariantní množina rekurentního IFS.

Důsledek 5.2.4. Necht jsou dány předpoklady stejné jako ve Větě 5.2.2. Pokud pro $T \in S^{**}$ platí

$$\rho^{**}(T, F(T)) \leq \varepsilon, \text{ kde } \varepsilon > 0,$$

potom

$$\rho^{**}(T, A) \leq \frac{\varepsilon}{1-r},$$

kde A je invariantní množina daného rekurentního IFS a $r = \max\{r_1, \dots, r_n\}$.

Důkazy k předcházejícím tvrzením je možné najít v [26].

5.3 L-systémy

Dalším způsobem, jak vytvářet fraktální množiny, jsou tzv. L-systémy známé také jako Lindenmayerovy systémy. Tyto systémy byly původně vyvinuty v biologii pro simulaci růstu rostlin, ale jejich principu se dá využít i pro konstrukci fraktálů.

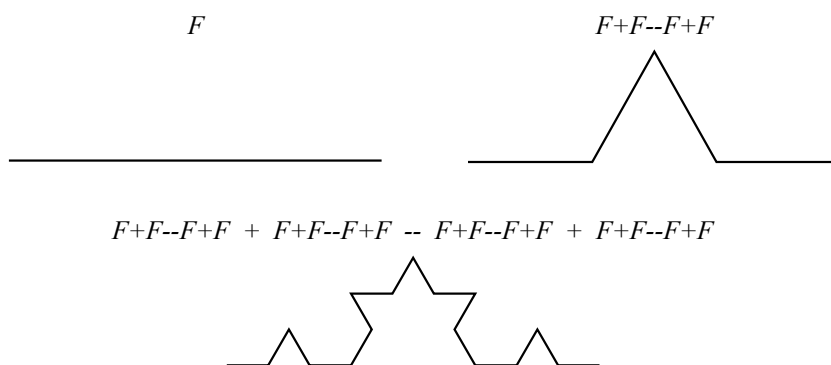
L-systém je soubor přepisovacích pravidel, který se opakovaně aplikuje na vznikající model. Počátečnímu systému se říká axiom a na něj potom pravidla postupně uplatňujeme. L-systém se tvoří postupně po jednotlivých iteracích, které se nazývají generace. Více je možné najít v [27].

Nejjednodušší způsob interpretace je pomocí želví grafiky, viz například [28]. Pravidla pak představují pokyny pro želvičku, jakým směrem se má posunout, zda má kreslit úsečku, otočit se apod. Jak přesně takové vykreslování funguje si můžeme ukázat například na Kochově křivce.

Za axiom zvolíme úsečku a označíme ji jako F . Přepisovací pravidlo je pak ve tvaru

$$F \rightarrow F + F - -F + F,$$

kde $+$ znamená otočení doleva a $-$ otočení doprava, obě o 60° . Výsledek prvních dvou použití můžete vidět na Obrázku 5.1.



OBRÁZEK 5.1: Kochova křivka pomocí L-systému

Kromě $+$, $-$ existují ještě další pravidla, která se využívají právě v želví grafice. Patří mezi ně $[$, která znamená uložení aktuální pozice, a $]$, díky které se želvička vrátí na poslední uloženou pozici. Poslední, co je ještě třeba zmínit, je to, že pokud píšeme písmena velká, pak želvička kreslí a pokud malá, tak pouze postupuje daným směrem, ale bez vytvoření stopy. Díky všem těmto pravidlům je možné v počítačové grafice vytvářet mnoho různých geometrických struktur.

Kapitola 6

Vizualizace geometricky složitých množin

V této kapitole si ukážeme, jakým způsobem je možné dříve představené fraktály znázornit a popíšeme základní zobrazovací metody. Součástí mé práce bylo také vytvoření programů, díky kterým jsme schopni generovat obrázky zajímavých složitých geometrických struktur za pomoci systémů iterovaných funkcí.

6.1 Chaos game

Tato metoda je založena na využití systému iterovaných funkcí a jeho invariantní množiny. Poprvé ji představil M. Barnsley v roce 1988 v [8].

Pomocí algoritmu, který si ukážeme dále, získáváme body $\{(x_n, y_n) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$. Tyto body dle Věty 5.1.17 aproximují invariantní množinu daného IFS.

Algoritmus chaos game pro IFS ve tvaru (f_1, \dots, f_k) je možné zapsat následujícím způsobem.

1. Vybereme náhodně bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
2. Vybereme nahodně $s_0 \in \{1, \dots, k\}$, kde k odpovídá počtu iterovaných funkcí v systému.
3. Vypočítáme $(x_1, y_1) = f_{s_0}(x_0, y_0)$.
4. Vybereme nahodně $s_1 \in \{1, \dots, k\}$.
5. Vypočítáme $(x_2, y_2) = f_{s_1}(x_1, y_1)$.
6. Body 4 ,5 obdobně opakujeme dále.

Podle Věty 5.1.17, pak díky této metodě dostáváme invariantní množinu daného IFS.

Pokud však neuvažujeme pouze základní systém iteračních funkcí, ale máme jeho rekurentní variantu, kde pro každou uspořádanou dvojici funkcí z IFS (f_i, f_j) , kde $i, j \in \hat{k}$, máme pravděpodobnost p_{ij} , je potřeba celý algoritmus modifikovat. Můžeme ho zapsat v následujícím tvaru, kde funkce f_1, \dots, f_k odpovídají funkcím v rekurentním IFS.

1. Vyberem náhodně bod $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
2. Vybereme nahodně $s_0 \in \{1, \dots, k\}$, kde k odpovídá počtu iterovaných funkcí v systému.

3. Vybereme s_1 tak, že $s_1 \in \{1, \dots, k\}$ s pravděpodobností p_{s_0j} přidruženou $s_1 = j$.
4. Vypočítáme $(x_1, y_1) = f_{s_1}(x_0, y_0)$.
5. Vybereme s_2 tak, že $s_2 \in \{1, \dots, k\}$ s pravděpodobností p_{s_1j} přidruženou $s_2 = j$.
6. Vypočítáme $(x_2, y_2) = f_{s_2}(x_1, y_1)$.
7. Body 5, 6 obdobně opakujeme dále.

Cílem mého programu bylo implementovat metodu chaos game a zobrazit jednoduché, vizuálně zajímavé fraktály v jejich základní podobě. Dále jsem zkoumala jejich vznik a strukturu pomocí obarvování daných množin, které bude popsáno dále.

Program je napsán v C++ a pro náhodný výběr byl použit generátor pseudonáhodných čísel s rovnoměrným rozdělením ze třídy `uniform_int_distribution`. Pro vykreslení byly jednotlivé body zapisovány jako jedničky do matice o rozměru 4096×4096 , který odpovídá rozlišení výsledného obrázku. Jednotlivé prvky matice pak byly interpretovány jako černé a bílé pixely a byly odpovídajícím způsobem zapsány do souboru ve formátu `.ppm`, který si nyní představíme.

PPM formát

PPM patří mezi bitmapové formáty a lze ho najít převážně na UNIXových systémech. Zkratka PPM vznikla z anglického Portable Pixmap a oproti PGM (Portable Greymap) jsme v tomto formátu schopni ukládat barevné bitmapy.

Na začátku každého souboru je třeba zapsat tzv. magické číslo, které určuje typ formátu následované hodnotou šířky a výšky v pixelech. Poslední nezbytnou součástí je zapsání hodnoty, která udává, kolik odstínů je mezi černou a bílou. Pro potřeby této práce jsem použila PPM formát s magickým číslem P3, ve kterém je každý pixel ukládán jako tři čísla v desítkové soustavě představující RGB kódování barev oddělená mezerami. Více informací o tomto o mnohých dalších formátech lze najít v [29].

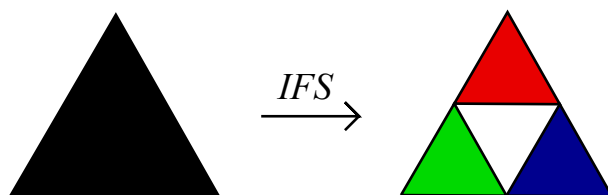
6.2 Vizualizace mnohoúhelníků

Všechny struktury, které budeme dále zobrazovat budou Sierpiňského typu tj. funkce v IFS budou ve tvaru $f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x)$, kde $i \in \hat{n}$, n je počet funkcí v IFS a z_i jsou body v \mathbb{R} . Tyto významné body budou odpovídat vrcholům pravidelných n -úhelníků, proto v dalším textu budeme vznikající struktury označovat podle těchto n -úhelníků.

6.2.1 Sierpiňského trojúhelník

Jak už jsme si popsali v Kapitole 1, Sierpiňského trojúhelník je jedním z nejznámějších fraktálů, navíc je nejčastěji zobrazován právě pomocí chaos game. Na Obrázku 6.1 je vidět, jak působí jednotlivé iterační funkce na celý trojúhelník. Pro vykreslení Sierpiňského trojúhelníku bylo použito nastavení parametrů, které lze vidět v Tabulce 6.1.

Pokud navíc zvětšíme libovolnou část trojúhelníka, je vidět, že se opakuje stáje stejný vzor, viz Obrázek 6.2. Když se zaměříme na detail výřezu v tomto obrázku, je vidět, že už se objevují nepřesnosti způsobené zobrazením jednotlivých pixelů a tedy nedostatečného rozlišení obrázku pro toto přiblížení.



OBRÁZEK 6.1: Působení IFS ve tvaru (6.1) na trojúhelník

Útvar:	Trojúhelník
IFS:	$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x), \quad (6.1)$
	kde $i \in \{1, 2, 3\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů.
Počet iterací:	10^8
Rozlišení:	4096×4096
Obrázek:	6.2

TABULKA 6.1: Nastavení parametrů pro Sierpiňského trojúhelník

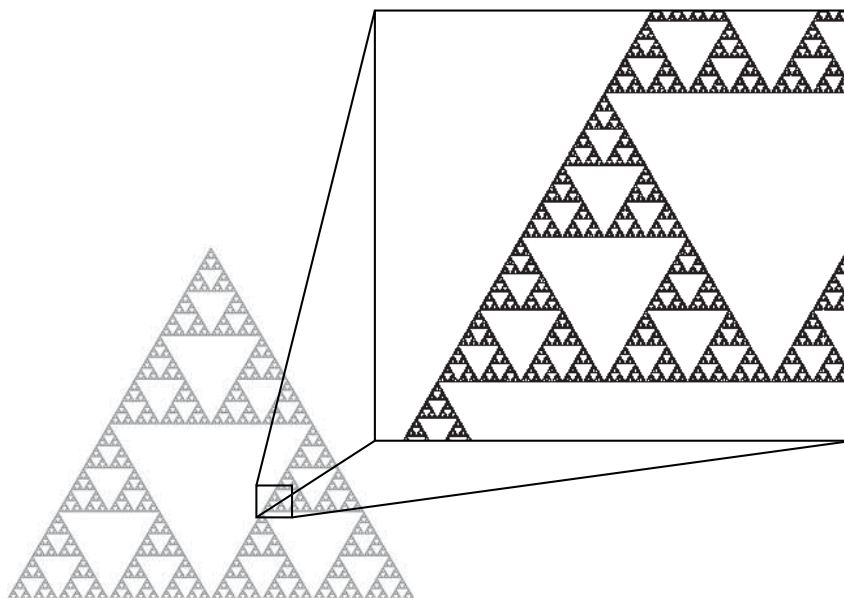
Dále se podíváme, co se s výsledným obrazem stane, pokud změním koeficient zmenšení v systému iterovaných funkcí.

Útvar:	Trojúhelník
IFS:	$\text{a) } f_i(x) = z_i - \frac{1}{1.8}(z_i - x),$ $\text{b) } f_i(x) = z_i - \frac{1}{2.4}(z_i - x),$
	kde $i \in \{1, 2, 3\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů.
Počet iterací:	10^8
Rozlišení:	4096×4096
Obrázek:	6.3

TABULKA 6.2: Nastavení parametrů pro trojúhelník

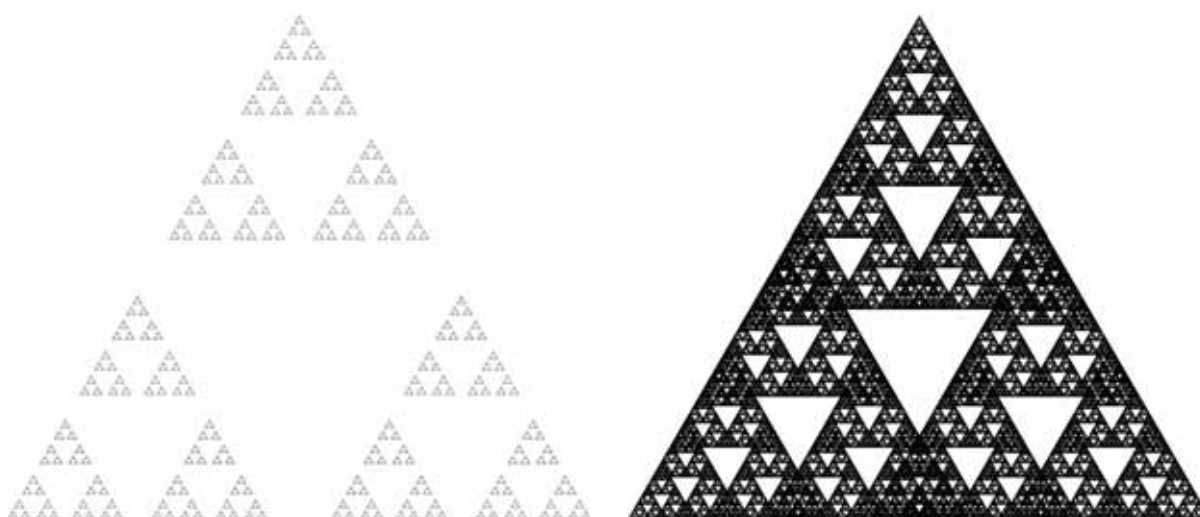
Jak je vidět z Obrázku 6.3, pokud daný koeficient zmenšujeme, trojúhelníky se přestanou dotýkat a výsledný obraz už není spojitý. Na druhou stranu, pokud koeficient zvětšíme, pak se jednotlivé části začnou překrývat.

Tohoto efektu se snažíme využívat pro výpočet Hausdorffovy dimenze obrazců, které se překrývají „jen trochu“, čímž se myslí, že překryv je míry 0. Z teorie totiž víme, že Hausdorffova



OBRÁZEK 6.2: Sierpiňského trojúhelník podle Tabulky 6.1

dimenze se rovná podobnostní pouze pro systémy IFS, pro které se obrazy jejich funkcí neprotínají, viz Věta 5.1.6. Chtěli bychom tedy ukázat, že přiřadíme-li se postupně k Sierpiňskému trojúhelníku tj. koeficient se blíží dvojce, limita pro Hausdorffovy dimenze těchto modifikovaných trojúhelníků jde k dimenzi klasického Sierpiňského trojúhelníku. Hausdorffova míra však není spojitá, a je tedy problém toto dokázat. Tuto otázku tedy necháváme otevřenou pro další zkoumání.



(A) Trojúhelník pro variantu a) s koef. 1.8

(B) Trojúhelník pro variantu b) s koef. 2.4

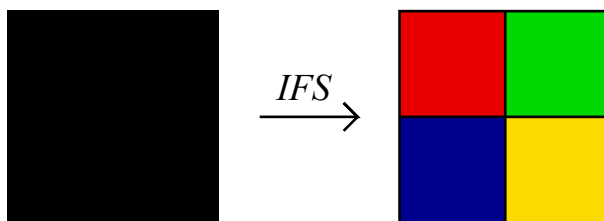
OBRÁZEK 6.3: Struktury v trojúhelníku podle Tabulky 6.2

6.2.2 Čtverec

Dalším útvarem, na který můžeme aplikovat obdobný systém iteračních funkcí jako na trojúhelník, je čtverec. Jediné, co se pro tuto chvíli změní, je počet vrcholů a tedy počet funkcí, které tvoří IFS. Pokud se ale pokusíme tímto způsobem zobrazit fraktál, zjistíme, že se žádná struktura neobjevuje a body pouze postupně vyplňují celý čtverec. To je způsobeno tím, že pokud vezmeme celý čtverec a zapůsobíme na něj funkcemi tvaru

$$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x), \quad (6.2)$$

kde z_i odpovídají souřadnicím vrcholů, dostaneme čtyři čtverce, jejichž strany se dotýkají a které původní čtverec vyplní, viz Obrázek 6.4. Stejný problém pak nastává u všech sudouhelníků, protože jejich poloviční zmenšeniny vždy pokryjí celý původní útvar. U lichouhelníhů je tomu přesně naopak, a proto vždy při použití koeficientu $\frac{1}{2}$ destaneme množinu se složitou strukturou.

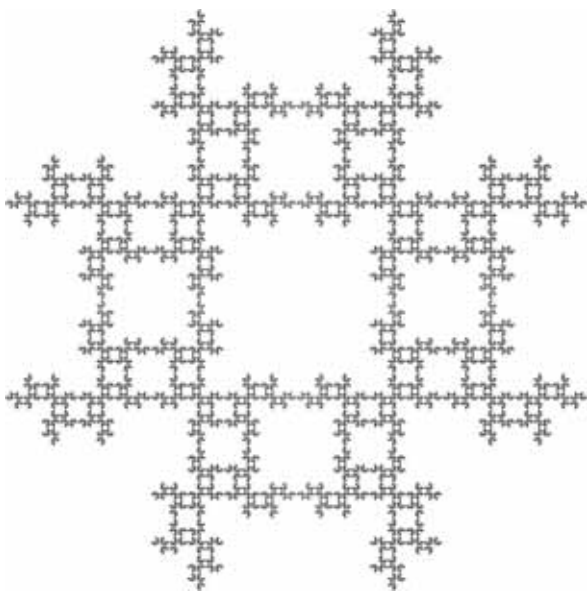


OBRÁZEK 6.4: Působení IFS ve tvaru (6.2) na čtverec

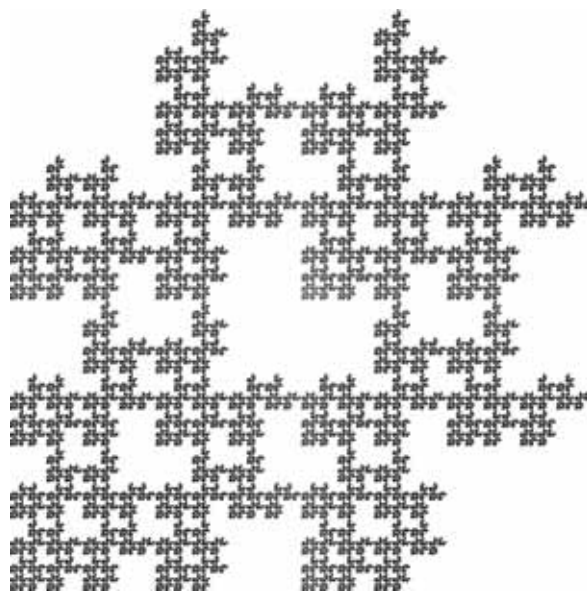
Abychom tedy dostali množinu, která bude mít fraktální strukturu, musíme k těmto zobrazením přidat další pravidla, která toto zobrazování omezí nebo změnit koeficient na jiný než $\frac{1}{2}$. Nejjednodušší pravidlo, které můžeme zavést v rámci chaos game, je takové, že při náhodném výběru iterační funkce nesmíme funkci vybrat dvakrát za sebou. Jak potom vypadá invariantní množina je vidět na Obrázku 6.5a. Takových pravidel však samozřejmě existuje mnoho a některé z nich si ukážeme dále.

Útvar:	Čtverec
IFS:	$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x),$
	kde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů.
Počet iterací:	10^7
Rozlišení:	4096×4096
Pravidlo:	Žádná funkce z IFS se nesmí opakovat dvakrát po sobě.
Obrázek:	6.5a

TABULKA 6.3: První nastavení parametrů pro čtverec



(A) Struktura ve čtverci dle Tabulky 6.3



(B) Struktura ve čtverci dle Tabulky 6.3 bez použití pravidla pro levý dolní vrchol

Jak se však stane, že toto jediné pravidlo změní celou strukturu výsledné množiny? Odpověď na tuto otázku představil M. Barnsley v článku [26] a následně v knize *Fractals Everywhere* [8], kde se zabývá rekurentními IFS. Jak jsme si ukázali již dříve, tyto rekurentní systémy iterovaných funkcí se od klasických systémů liší tím, že ke každé kombinaci funkcí z IFS přiřadíme pravděpodobnost, s jakou po sobě mohou následovat. To přesně pak způsobí, že invariantní množiny pro stejné funkce pouze s odlišnými pravděpodobnostmi mají odlišný tvar, ale nikdy nepřesáhnou invariantní množinu, která je dána IFS bez ovlivnění dalšími pravděpodobnostmi. Zadané pravidlo tedy lze reprezentovat tabulkou pravděpodobností.

Pro čtverec generovaný dle Tabulky 6.3 máme pravděpodobnosti ve tvaru daném Tabulkou 6.4.

i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

TABULKA 6.4: Pravděpodobnosti pro IFS podle Tabulky 6.3

Útvar:	Čtverec
IFS:	$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x),$
	kde $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů.
Počet iterací:	10^7
Rozlišení:	4096×4096
Pravidla:	<p>a) Vybraná funkce nesmí být spojená se sousedním vrcholem (proti směru hodinových ručiček) k předchozí. Obrázek 6.6a</p> <p>b) Pokud se vybere dvakrát po sobě stejná funkce, příští nesmí být spojená s žádným sousedním vrcholem. Obrázek 6.6b</p> <p>c) Vybraná funkce se nesmí být spojená s protilehlým vrcholem k předchozí. Obrázek 6.6c</p> <p>d) Pokud se vybere dvakrát po sobě stejná funkce, pak další nesmí být spojená s protilehlým vrcholem. Obrázek 6.6d</p>
Obrázek:	6.6

TABULKA 6.5: Druhé nastavení parametrů pro čtverec

Pro Obrázky 6.6a, 6.6c si opět vypíšeme tabulky pravděpodobností, které nám ukazují, jakým způsobem je konstruovaná daná invariantní množina. Pro zbylé dva obrázky zatím tyto tabulky pravděpodobností neznáme, přestože by měly fungovat na obdobném principu, bude však nutné zkoumat hlubší závislosti, a tak toto ponecháváme dalšímu zkoumání.

(A) Pravděpodobnosti pro Obrázek 6.6a

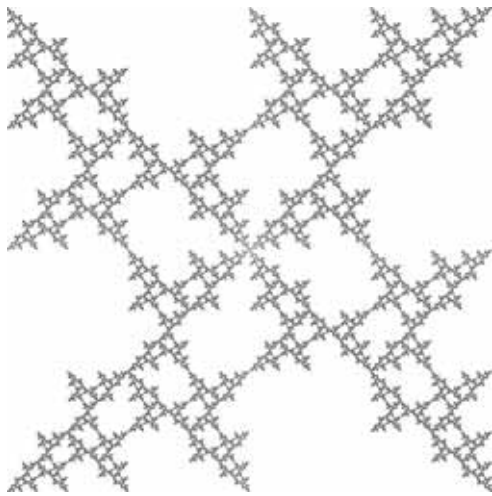
i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(B) Pravděpodobnosti pro Obrázek 6.6c

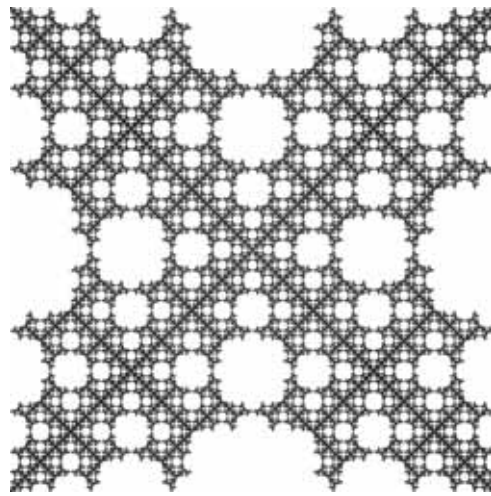
i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
4	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

TABULKA 6.6: Pravděpodobnosti pro IFS dle Tabulky 6.5

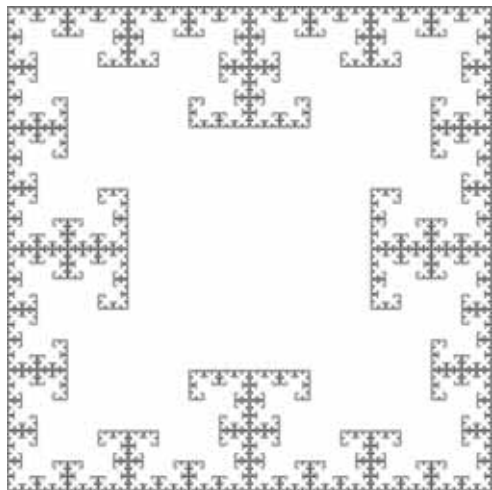
Je vidět, že všechny tyto tabulky pravděpodobností jsou vždy jistým způsobem symetrické, protože stejná pravidla aplikujeme na všechny čtyři vrcholy stejným způsobem. To se pak ukazuje na výsledných obrázcích, které jsou viditelně symetrické. Co se stane, pokud pravidlo například pro jeden vrchol nepoužijeme můžete vidět na Obrázku 6.5b.



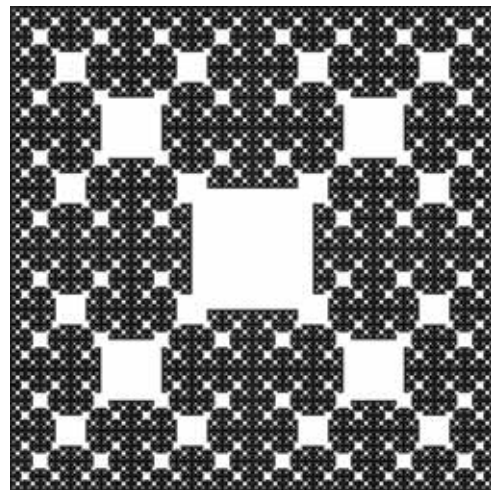
(A) Čtverec pro pravidlo a)



(B) Čtverec pro pravidlo b)



(c) Čtverec pro pravidlo c)



(D) Čtverec pro pravidlo d)

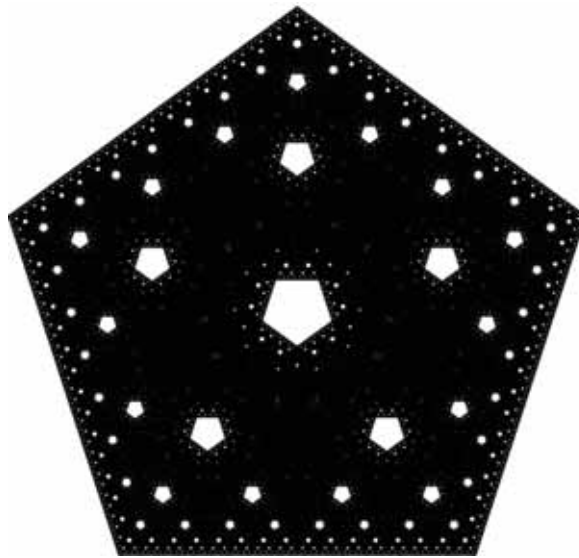
OBRÁZEK 6.6: Struktury ve čtverci podle Tabulky 6.5

6.2.3 Pětiúhelník

Dalším útvarem, který budeme zkoumat je pětiúhelník. Pokud použijeme systém iterovaných funkcí

$$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x), \quad (6.3)$$

kde $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů pravidelného pětiúhelníku, podobný jako na útvary výše, zjistíme, že stejně jako u trojúhelníku se nám objeví složitá struktura, viz Obrázek 6.7. Jak přesně tento útvar vzniká budeme zkoumat později.



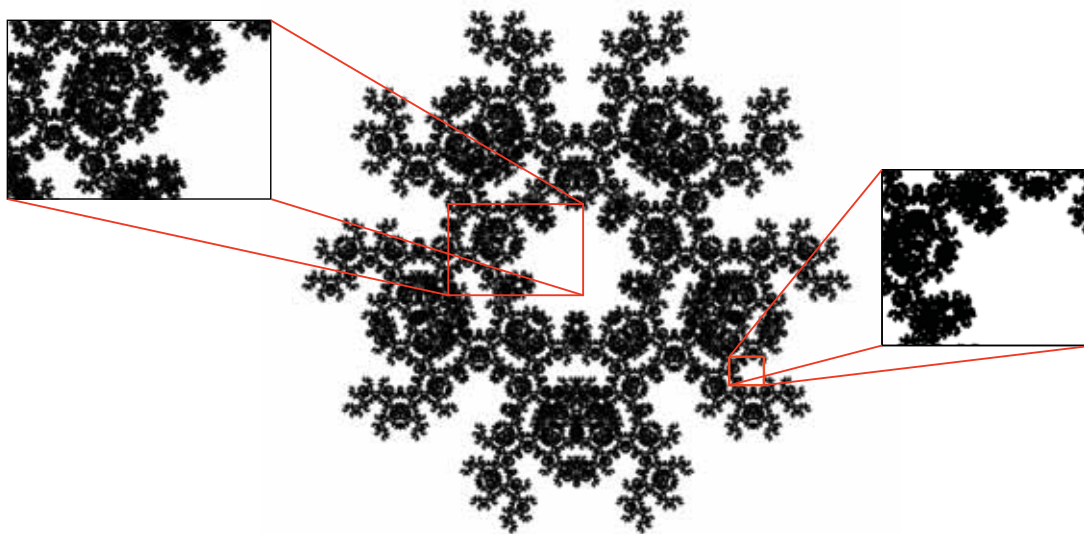
OBRÁZEK 6.7: Působení IFS ve tvaru (6.3) na pětiúhelník

Nyní se opět zaměříme na objekty vznikající za působení pravidel, které jsme si představili již u čtverce. Hned u první zobrazené množiny, Obrázek 6.8, se chvíli zdržíme. Zde je vidět složitá struktura, která je generovaná pomocí tak jednoduchého pravidla jako je zákaz opakování jedné funkce z IFS dvakrát po sobě.

Útvar:	Pětiúhelník
IFS:	
	$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x),$
	kde $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů.
Pravidla:	Žádná funkce z IFS se nesmí opakovat dvakrát po sobě.
Počet iterací:	10^8
Rozlišení:	4096×4096
Obrázek:	6.8

TABULKA 6.7: První nastavení parametrů pro pětiúhelník

Pokud studujeme postupně jednotlivá přiblížení na Obrázku 6.8, můžeme si všimnout, že struktura se stále opakuje. V ideálním případě, bychom tento obraz, mohli přibližovat libovolně dlouho a viděli bychom stále to stejné. V reálném případě jsme ale vždy omezeni rozlišením obrázku. Toho si můžeme všimnout na pravém přiblížení, kde se již objevují nepřesnosti způsobené právě nedostatečným rozlišením.



OBRÁZEK 6.8: Struktura v pětiúhelníku podle Tabulky 6.7

Útvar: Pětiúhelník

IFS:

$$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x),$$

kde $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů.

Počet iterací: 10^7

Rozlišení: 4096×4096

Pravidla: a) Vybraná funkce nesmí být spojena se žádným sousedním vrcholem k předchozí.

Obrázek 6.9a

b) Vybraná funkce nesmí být spojena se sousedním vrcholem (proti směru hodinových ručiček) k předchozí.

Obrázek 6.9b

c) Pokud se vybere dvakrát po sobě stejná funkce, příští nesmí být spojena s žádným sousedním vrcholem.

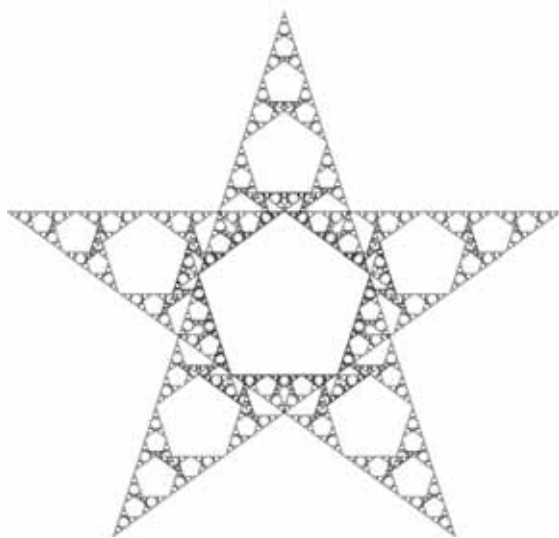
Obrázek 6.9c

d) Pokud se vybere dvakrát po sobě stejná funkce, pak další nesmí být spojena se stejným vrcholem.

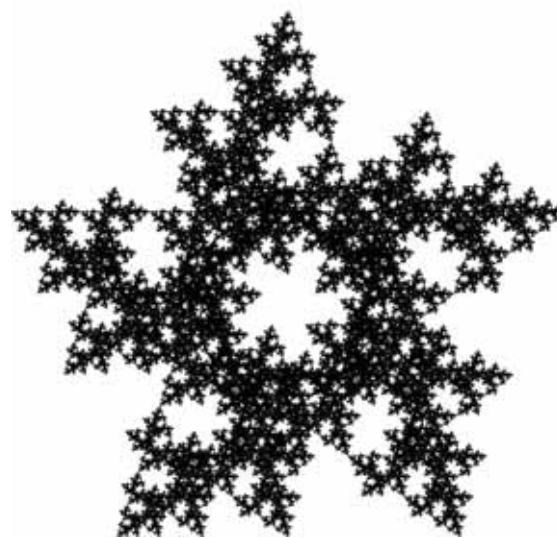
Obrázek 6.9d

Obrázek: 6.9

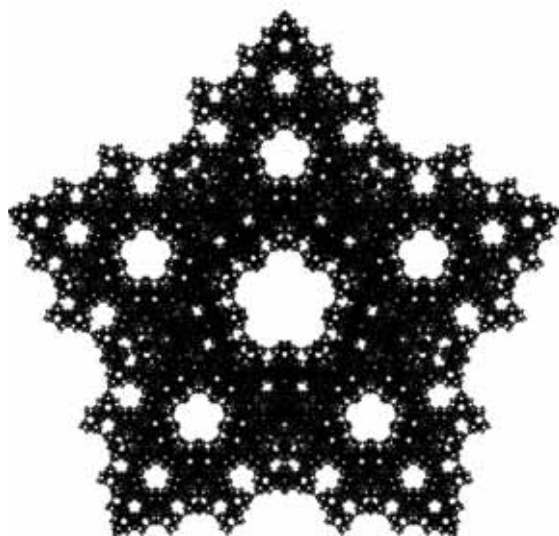
TABULKA 6.8: Druhé nastavení parametrů pro pětiúhelník



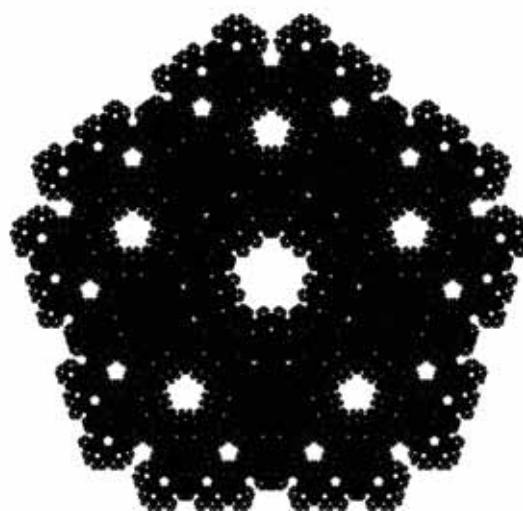
(A) Pětiúhelník pro pravidlo a)



(B) Pětiúhelník pro pravidlo b)



(C) Pětiúhelník pro pravidlo c)



(D) Pětiúhelník pro pravidlo d)

OBRÁZEK 6.9: Struktury v pětiúhelníku podle Tabulky 6.8

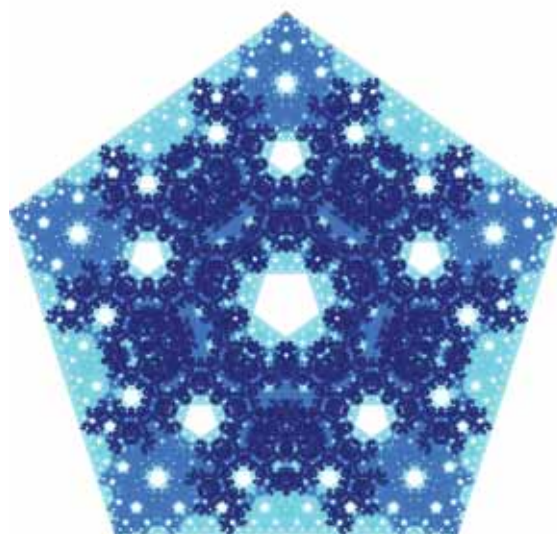
Pro struktury na Obrázcích 6.8, 6.9a, 6.9b, které jsou konstruované pomocí jednoduchých pravidel, si opět uvedeme tabulky pravděpodobností pro jejich rekurentní IFS. Tabulky jsou velmi podobné těm, které jsme mohli vidět u čtverce s jediným rozdílem, který je dán vyšším počtem vrcholů a tedy i vyšším počtem iterovaných funkcí v systému.

(A) Pravděp. pro Obrázek 6.8						(B) Pravděp. pro Obrázek 6.9a					
i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}	p_{i5}	i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}	p_{i5}
1	0	0,25	0,25	0,25	0,25	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
2	0,25	0	0,25	0,25	0,25	2	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	0,25	0,25	0	0,25	0,25	3	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
4	0,25	0,25	0,25	0	0,25	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
5	0,25	0,25	0,25	0,25	0	5	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(c) Pravděp. pro Obrázek 6.9b					
i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}	p_{i5}
1	0,25	0	0,25	0,25	0,25
2	0,25	0,25	0	0,25	0,25
3	0,25	0,25	0,25	0	0,25
4	0,25	0,25	0,25	0,25	0
5	0	0,25	0,25	0,25	0,25

TABULKA 6.9: Pravděpodobnosti pro IFS dle Tabulky 6.7, 6.8

Tyto obrázky nám také ukazují, že čím "slabší" je pravidlo, tím více se invariantní množna blíží k původnímu fraktálu, který jsme si ukázali na Obrázku 6.7. Pravidlo je tím slabší, čím více se jeho pravděpodobnosti blíží rovnoměrnému rozdělení, které nastává, pokud žádné pravidlo nepoužijeme. Pro ilustraci pokud proložíme Obrázky 6.7, 6.8, 6.9a, je viditelné, jak se postupně blížíme k celkové množině, viz Obrázek 6.10.



OBRÁZEK 6.10: Proložení struktur pětiúhelníku

To nás přivádí k další otázce, a to jak vizualizovat základní invariantní množinu tak, aby bylo vidět jakým způsobem vzniká.

Zde byly použity dva různé způsoby obarvení množin pro danou vizualizaci, které si nyní představíme.

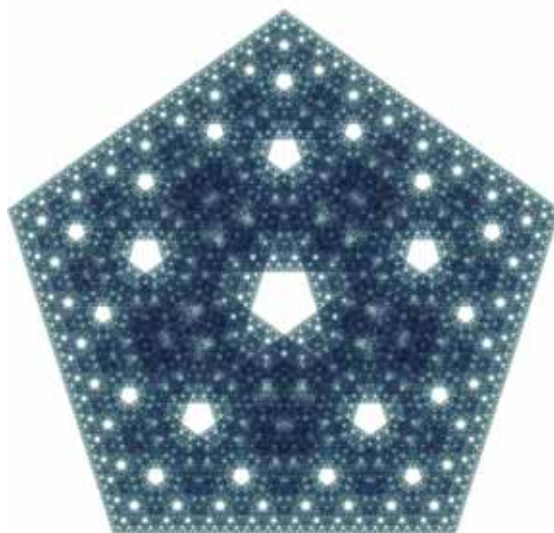
Metoda 1

Tato metoda je založená na různém obarvování bodů podle toho, ve které iteraci jsme daný bod dostali.

Konkrétně máme daný počet iterací N . Jestliže bod vznikne při iteraci s pořadovým číslem v intervalu $\left[1, \frac{1}{4}N\right)$, pak ji obarvíme určitou barvou. Jiné barvy pak přiřadíme iteracím odpovídající intervalům $\left[\frac{1}{4}N, \frac{1}{2}N\right)$, $\left[\frac{1}{2}N, \frac{3}{4}N\right)$ a $\left[\frac{3}{4}N, N\right]$. Výsledná obarvená množina pro $3 \cdot 10^7$ iterací je znázorněna na Obrázku 6.11.

Nevýhodou této metody je, že vzhledem k nižšímu rozlišení obrázku než je celkový počet iterací samozřejmě některé body vznikají ve více iteracích. Barvu pak daný pixel samozřejmě získá až podle poslední iterace, ve které vznikl. Abychom potom dostali obrázek, kde bude vidět nějaká struktura, je potřeba vyladit škálu pomocí které množinu barvíme. Pokud toto nastavíme špatně, může se stát, že body, které dostaneme v poslední části, zakryjí skoro všechny ostatní a vyjde nám obrázek, který bude téměř jednobarevný.

Tato metoda je podobná postupu, který se používá, pokud chceme nalézt mřížkovou dimenzi dané fraktální množiny. Mřížka je v našem případě tvořena pixely, které tvoří výsledný obrázek.



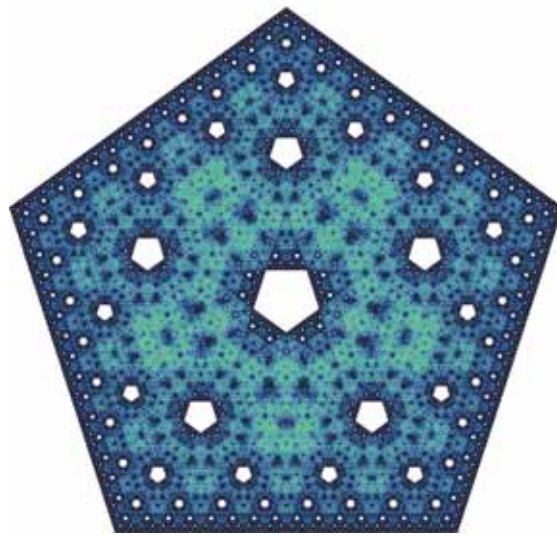
OBRÁZEK 6.11: Struktura pětiúhelníku obarvená podle Metody 1

Metoda 2

Nyní se představíme druhý způsob obarvení invariantní množiny. V tomto případě nás nezajímá, ve které iteraci daný bod vznikl, ale kolikrát vznikl. Vzhledem k tomu, že provádíme řádově stovky milionů až miliardy iterací, ale rozlišení obrázku je vždy dané a odpovídá zhruba $16,75 \cdot 10^6$ pixelů, tak více bodů vzniklých v průběhu algoritmu odpovídá jednomu pixelu. U každého pixelu toto

číslo ukládáme a výslednou množinu pak obarvujeme pomocí následujícího pravidla. Označme tentokrát n_i jako hodnotu, kolik bodů odpovídá jednomu pixelu a n_{max} jako maximum těchto hodnot. Pokud $n_i \in \left[1, \frac{1}{8}n_{max}\right)$, pak tento bod obarvíme určitou barvou. Obdobně barvíme jinými barvami n_i patřící do intervalů $\left[\frac{1}{8}n_{max}, \frac{1}{4}n_{max}\right)$, $\left[\frac{1}{4}n_{max}, \frac{1}{2}n_{max}\right)$ a $\left[\frac{1}{2}n_{max}, n_{max}\right]$. Výsledek této metody při 10^9 iteracích je zobrazen na Obrázku 6.12.

Výhodou této metody je, že můžeme volit téměř libovolný počet iterací, pro který bychom zobrazili i původní černobílou invariantní množinu.



OBRÁZEK 6.12: Struktura pětiúhelníku obarvená podle Metody 2

Pokud porovnáваме výsledky těchto dvou metod pro obarvení, tak je vidět, že celková struktura, která na obou obrázcích vzniká, je velmi podobná a liší se pouze tím, jaké barvy na obrázku převládají. To je způsobeno právě odlišností jednotlivých metod a není možné jednoduše pořadí barev v jedné metodě obrátit, abychom dostali výsledky, které si budou přesněji odpovídat.

6.2.4 Šestiúhelník

Poslední útvar, kterým se budeme zabývat, je šestiúhelník. Použijeme na něj opět obdobný systém iterovaných funkcí jako na útvary dříve tj.

$$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x), \quad (6.4)$$

kde $i \in \{1, \dots, 6\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů. Protože tento útvar je sudoúhelník, potom, jak bylo vysvětleno už u čtverce, pokud použijeme pouze tento základní IFS bez dalších omezení, se žádná fraktální struktura neobjeví. Body, které generuje tento IFS totiž pokryjí celý šestiúhelník.

Opět se tedy zaměříme na působení několika pravidel na tento útvar a ukážeme si tabulky pravděpodobností pro struktury, které jsou generovány pomocí jednoduchých pravidel.

Útvar: Šestiúhelník
IFS:

$$f_i(x) = z_i - \frac{1}{2}(z_i - x),$$

kde $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a z_i odpovídá souřadnicím vrcholů.

Počet iterací: 10^8

Rozlišení: 4096×4096

- Pravidla:**
- Vybraná funkce se nesmí opakovat dvakrát po sobě.
Obrázek 6.13a
 - Vybraná funkce nesmí být spojená se žádným sousedním vrcholem k předchozí.
Obrázek 6.13b
 - Vybraná funkce nesmí být spojená se sousedním vrcholem (proti směru hodinových ručiček) k předchozí.
Obrázek 6.13c
 - Pokud se vybere dvakrát po sobě stejná funkce, pak další nesmí být spojená se stejným vrcholem.
Obrázek 6.13d

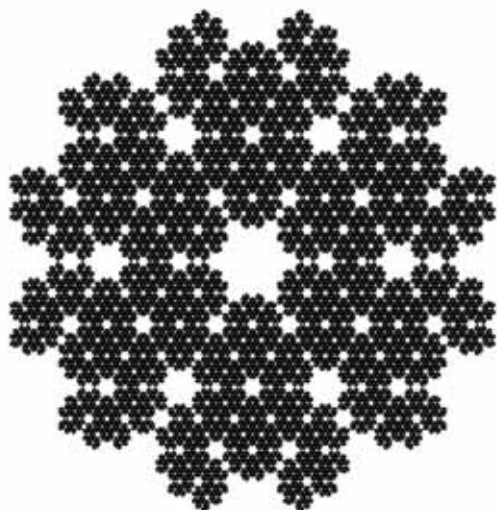
Obrázek: 6.13

TABULKA 6.10: Nastavení parametrů pro šestiúhelník

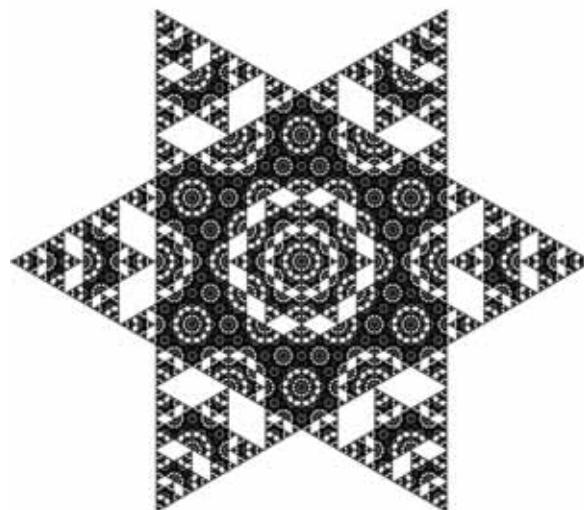
(A) Pravděp. pro Obrázek 6.13a							(B) Pravděp. pro Obrázek 6.13b						
i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}	p_{i5}	p_{i6}	i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}	p_{i5}	p_{i6}
1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	2	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	3	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
6	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

(c) Pravděp. pro Obrázek 6.13c						
i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	p_{i4}	p_{i5}	p_{i6}
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
6	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

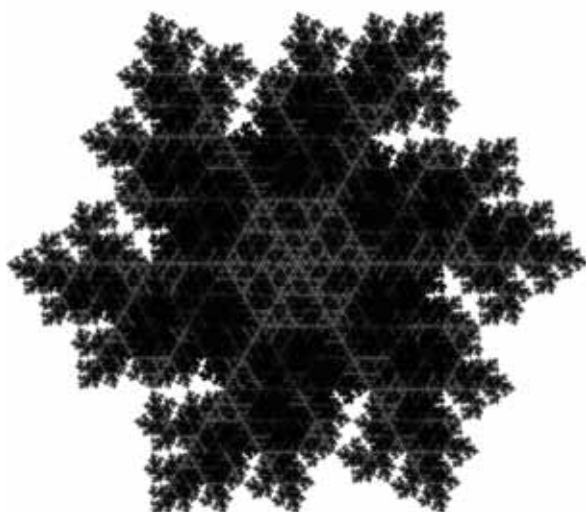
TABULKA 6.11: Pravděpodobnosti pro IFS dle Tabulky 6.10



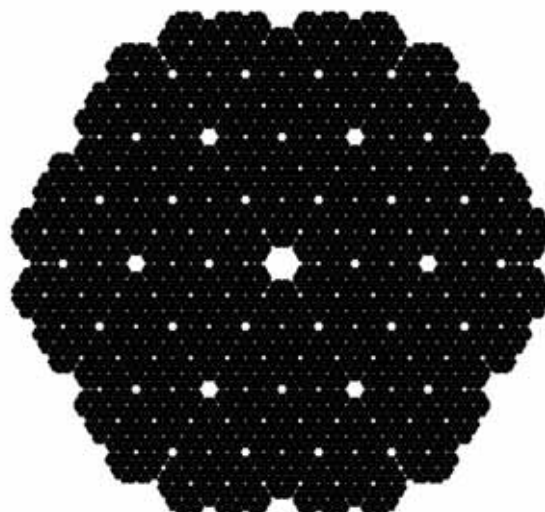
(A) Šestiúhelník pro pravidlo a)



(B) Šestiúhelník pro pravidlo b)



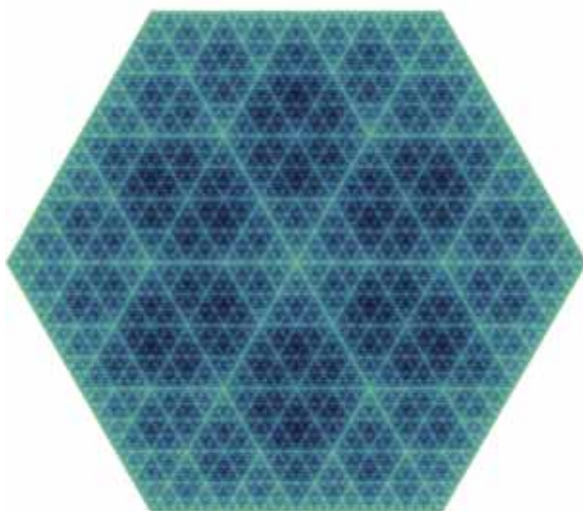
(C) Šestiúhelník pro pravidlo c)



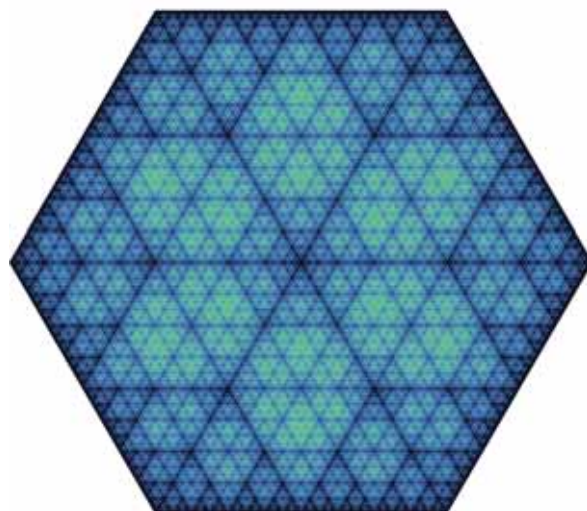
(D) Šestiúhelník pro pravidlo d)

OBRÁZEK 6.13: Struktury v šestiúhelníku podle Tabulky 6.10

Přestože šestiúhelník při působení IFS bez pravidel nevykazuje žádné známky fraktální struktury je poměrně zajímavé zjistit, co se stane, pokud se tuto invariantní množinu pokusíme obarvit. Použitím metod, které jsme si popsali u pětiúhelníku, pak dostaneme následující Obrázky 6.14a, 6.14b. Oproti metodám, jak byly popsány výše, se změní pouze škálování a počet iterací u Metody 1. Pro Metodu 1 dělíme počet iterací $N = 1,5 \cdot 10^8$ na intervaly $\left[1, \frac{1}{27}N\right)$, $\left[\frac{1}{27}N, \frac{1}{9}N\right)$, $\left[\frac{1}{9}N, \frac{1}{3}N\right)$ a $\left[\frac{1}{3}N, N\right]$. V Metodě 2 obarvujeme podle hodnoty n_i , která nám říká, kolikrát daný bod za působení IFS při daném počtu iterací vznikl a n_{max} je maximem těchto hodnot. Obarvujeme podle toho, zda n_i patří do následujících intervalů $\left[1, \frac{1}{64}n_{max}\right)$, $\left[\frac{1}{64}n_{max}, \frac{1}{16}n_{max}\right)$, $\left[\frac{1}{16}n_{max}, \frac{1}{4}n_{max}\right)$, $\left[\frac{1}{4}n_{max}, n_{max}\right]$. Obrázek 6.14b je zobrazen pro 10^9 iterací.



(A) Šestiúhelník obarvený dle Metody 1



(B) Šestiúhelníku obarvený dle Metody 2

Závěr

Cílem této práce bylo seznámení se základními pojmy z teorie bodových množin, topologie a teorie míry týkající se fraktálních množin a jejich geometrie. Dále jsme se zabývali možnostmi vizualizace těchto množin a zobrazením jednoduchých fraktálů pomocí chaos game algoritmu.

Nejprve byly představeny známé geometricky složité množiny, které byly popsány matematikou již v době před vznikem teorie zabývající se fraktální geometrií. V první kapitole se tedy zabýváme jejich popisem a významnými vlastnostmi.

Aby bylo možné fraktální množiny detailně zkoumat, je třeba nahlížet tuto problematiku z různých oblastí matematiky. V dalším textu jsme se tedy zaměřili na bodové vlastnosti takovýchto množin a připomněli jsme pojmy z topologie a metrických prostorů, které budeme dále potřebovat. Více jsme zde zkoumali vlastnosti Cantorovy množiny.

Protože Mandelbrotova definice fraktálu využívá pojmy topologické a Hausdorffovy dimenze, byly tyto pojmy v jednotlivých kapitolách zavedeny. První byly představeny topologické dimenze, přesněji horní a dolní induktivní dimenze, a byly dokázány některé jejich vlastnosti, včetně důležitých sumačních vlastností. Díky těmto vlastnostem byla nakonec dokázána rovnost induktivních dimenzí na separabilních metrických prostorech. Speciálně jsme se pak zaměřili na prostory nulové dimenze. Dále jsme se zabývali Hausdorffovou dimenzí, která vychází z teorie míry a uvedli si také její vlastnosti.

Na fraktální množiny lze však také nahlížet z hlediska soběpodobnosti tj. invariance vůči změně měřítka. V kapitole zabývající se tímto tématem byl definován pojem systém iterovaných funkcí, díky kterému jsme schopni množiny konstruovat a detailněji zkoumat. Zvláštním případem těchto systémů jsou tzv. rekurentní systémy iterovaných funkcí, které kromě systému podobností obsahují navíc také odpovídající soubor pravděpodobností. Je zde dokázán Collage theorem, který představil M. Barnsley a díky kterému jsme schopni některé fraktální množiny zobrazit.

V závěrečné kapitole se zabýváme samotnou vizualizací množin pomocí chaos game algoritmu, který využívá vlastnosti systémů iterovaných funkcí dokázaných dříve. Pomocí tohoto algoritmu byly konstruovány zajímavé příklady jednoduchých fraktálních množin. Dále byly představeny dvě metody obarvení množin, pomocí kterých je možné se lépe zaměřit na způsob jejich vzniku.

Moderní trendy výzkumu matematických metod ve fraktální geometrii se stále vyvíjí. Motivací jsou například problémy spojené s fraktální kompresí obrazu. Tímto tématem se zabývají například [30, 31]. Jsou zde zkoumány vlastnosti specifických fraktálních množin tyto vlastnosti jsou dále využívány pro výpočet Hausdorffovy dimenze grafů některých funkcí (Takagiho funkce, funkce fraktální interpolace). Další zkoumané oblasti jsou často spojeny s biologií. Jedním z řešených problémů je například snaha vypočítat fraktální dimezi otisku prstu tak, aby byla hodnota dimenze pro každý otisk jedinečná. Takový výpočet byl představen v [32] a dovoluje nám každý otisk reprezentovat právě hodnotou fraktální dimenze. Obdobně je vyvíjena snaha vypočítat fraktální dimenzi DNA. Na to lze nahlížet různě. Dva odlišné přístupy lze najít například v [21, 33]. Jedinečnost fraktálů se využívá i v šifrovacích systémech. Například v [34] je šifrování založeno

na vztahu Mandelbrotovy množiny a Juliových množin. Další velkou kapitolou, která je zajímavá pro studium, je oblast multifraktálů, které se vyznačují tím, že jejich fraktální dimenze je lokální a mění se pro různé části multifraktálu. Díky tomu mohou multifraktály nést více informace než jednoduché fraktály, ale na druhou stranu se mnohem složitěji zkoumají. Více informací lze nalézt v [35]. Toto nejsou samozřejmě jediné oblasti, kterými se dnešní fraktální geometrie zabývá, ale názorně ukazují, jak širokého spektra se tato teorie dotýká.

Seznam použité literatury

- [1] H.-O. Peitgen, H. Jürgens, and D. Saupe. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2004.
- [2] J. Ferreirós. The Motives behind Cantor's Set Theory – Physical, Biological, and Philosophical Questions. *Science in context*, 17:49–83, 03 2004.
- [3] J. W. Dauben. Georg Cantor: The Personal Matrix of His Mathematics. *Isis*, 69(4):534–550, 1978.
- [4] G. A. Edgar. *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer, 2nd edition, 2008.
- [5] K. Kuratowski. Waclaw Sierpiński (1882-1969). *Acta Arithmetica*, 21(1):1–5, 1972.
- [6] E. Hellinger and O. Toeplitz. *Encyklopädie der Mathematische Wissenschaften*. Leipzig, 1923.
- [7] L. Garding. *Mathematics and Mathematicians: Mathematics in Sweden Before 1950*. Providence, 1998.
- [8] M. F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press, 2nd edition, 1993.
- [9] M. F. Barnsley. *SuperFractals*. Cambridge University Press, 2006.
- [10] S. Kronzek. Author Interview: Michael F. Barnsley. <https://www.doverpublications.com/barnsley/interview/>, 2020-05-25.
- [11] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. Gaston Julia, 2008. <http://mathshistory.st-andr-ews.ac.uk/Biographies/Julia.html>, 2020-05-19.
- [12] D. S. Alexander. *A history of complex dynamics: from Schröder to Fatou and Julia*. Braunschweig, 1994.
- [13] G. Julia, J. Dixmier, and M. Hervé. *Oeuvres de Gaston Julia. Volume I-IV*. Gauthier-Villars, 1968-1970.
- [14] P. Pauš. *Diplomová práce - Počítačové metody analýzy fraktálních množin*. FJFI ČVUT, Praha, 2006.
- [15] P. Clark. Presentation of Professor Benoit Mandelbrot for the Honorary Degree of Doctor of Science, 1999.
- [16] B. B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.

- [17] J. E. Forneass. *Dynamics in Several Complex Variables*. American Mathematical Soc., 1994.
- [18] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*. Princeton University Press, 3rd edition, 2006.
- [19] P. S. Alexandrov. *Úvod do obecné theorie množin a funkcí*. Nakl. ČSAV, 1954.
- [20] R. Engelking. *Dimension Theory*. North-Holland publishing company, 1978.
- [21] M. Sadikin, I. Wasito, and I. Veritawati. Fractal dimension approach for clustering of dna sequences based on internucleotide distance. In *2013 International Conference of Information and Communication Technology, ICoICT 2013*, pages 82–87, 03 2013.
- [22] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 3rd edition, 2014.
- [23] G. A. Edgar. *Integral, probability, and fractal measures*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [24] R. Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1998.
- [25] E. Čech and V. Jarník. *Bodové množiny*. Jednota Československých matematiků a fysiků, 1936.
- [26] M. F. Barnsley, J. H. Elton, and D. P. Hardin. Recurrent iterated function systems. *Constructive Approximation*, 5:3–31, 1989.
- [27] G. Rozenberg and A. Salomaa. *The Mathematical Theory of L Systems*, pages 161–206. Springer US, Boston, MA, 1976.
- [28] H. Abelson and A. diSessa. *Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. MIT Press, Cambridge, 1981.
- [29] J. D. Murray and W. vanRyper. *Encyclopedia of Graphics File Formats*. O’Reilly & Associates, Inc., USA, 2nd edition, 1996.
- [30] B. Bárány, M. Rams, and K. Simon. Dimension theory of some non-markovian repellers part i: A gentle introduction, 2019. arXiv: 1901.04035.
- [31] B. Bárány, M. Rams, and K. Simon. Dimension theory of some non-markovian repellers part ii: Dynamically defined function graphs, 2019. arXiv: 1901.04037.
- [32] M. Jampour, M. Yaghoobi, M. Ashourzadeh, and A. Soleimani. A new fast technique for fingerprint identification with fractal and chaos game theory. *Fractals-complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society - FRACTALS*, 18, 09 2010.
- [33] P. Dan Cristea and G. A. Popescu. Fractal dimension of human chromosome 22. In *Proceedings of 1st South–East European Symposium on Interdisciplinary Approaches in Fractal Analysis, IAFA 2003*, pages 131–134, 2003.
- [34] S. Agarwal. Symmetric key encryption using iterated fractal functions. *International Journal of Computer Network and Information Security (IJCNIS)*, 9, 04 2017.
- [35] L. Olsen. A multifractal formalism. *Advances in Mathematics*, 116(1):82 – 196, 1995.