



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Matematické modelování fázového rozhraní metodou lattice Boltzmann

Mathematical modelling of phase interface using lattice Boltzmann method

Bakalářská práce

Autor: **Michal Malík**
Vedoucí práce: **Ing. Pavel Eichler**
Konzultant: **Ing. Radek Fučík, Ph.D.**
Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

| | |
|-------------------------|--|
| Student: | Michal Malík |
| Studijní program: | Aplikace přírodních věd |
| Obor: | Matematické inženýrství |
| Zaměření: | Matematické modelování |
| Název práce (česky): | Matematické modelování fázového rozhraní metodou lattice Boltzmann |
| Název práce (anglicky): | Mathematical modelling of phase interface using lattice Boltzmann method |

Pokyny pro vypracování:

1. Popište a prostudujte metodu fázového pole pro sledování rozhraní mezi fázemi.
2. Prozkoumejte možnosti použití metody lattice Boltzmann pro simulaci advekčně-difuzní rovnice.
3. Navrhněte vhodné numerické schéma pro sledování rozhraní pomocí metody fázového pole.
4. Implementujte zvolené numerické schéma pomocí jazyka C++.
5. Otestujte danou implementaci na zvolených testovacích úlohách.

Doporučená literatura:

1. T. Krüger, et al., The lattice Boltzmann method. Springer International Publishing 10, 2017, 978-993.
2. Z. Guo, S. Chang, Lattice Boltzmann method and its applications in engineering. World Scientific, 2013.
3. M. Geier, A. Fakhari, T. Lee, Conservative phase-field lattice Boltzmann model for interface tracking equation. Physical Review E 91(6), 2015, 063309.
4. Ch. Zhang, et al., A Comparative Study of Interface-Conforming ALE-FE scheme and Diffuse Interface AMR-LB scheme for Interfacial Dynamics. Journal of Computational Physics 357, 2019.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Pavel Eichler
KM FJFI ČVUT, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:


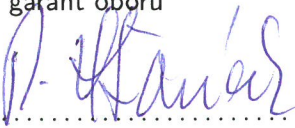
Ing. Radek Fučík, Ph.D.
KM FJFI ČVUT, Trojanova 13, 120 00 Praha 2

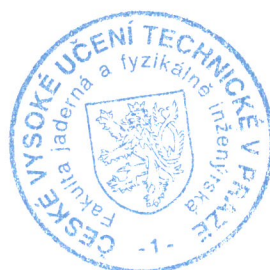
Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

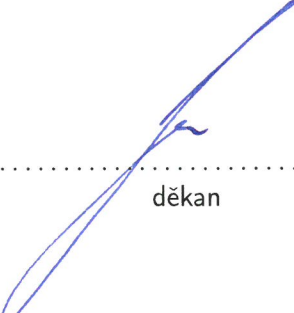
Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019


.....
garant oboru

.....
vedoucí katedry




.....
děkan

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Ing. Pavlovi Eichlerovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce. Dále děkuji svému konzultantovi Ing. Radkovi Fučíkovi, Ph.D. za cenné rady a poznámky k danému tématu a Ing. Jakobovi Klinkovskému za pomoc s přístupem na výpočetní zařízení Katedry matematiky na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské, České vysoké učení technické v Praze. Nakonec bych chtěl poděkovat prof. Michalovi Benešovi za věcné poznámky k metodě fázového pole.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 10. července 2020

Michal Malík

Název práce:

Matematické modelování fázového rozhraní metodou lattice Boltzmann

Autor: Michal Malík

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Matematické modelování

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Pavel Eichler, Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00, Praha 2

Konzultant: Ing. Radek Fučík, Ph.D, Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 120 00, Praha 2

Abstrakt: Tato práce je úvodem do metody fázového pole a mřížkové Boltzmannovy metody pro simulaci vývoje rozhraní mezi dvěma fázemi. Hlavním cílem této práce je představit zmíněné metody a použít je pro modelování vývoje rozhraní mezi dvěma fázemi. Dalším cílem této práce je paralelní implementace algoritmu mřížkové Boltzmannovy metody pro simulaci vývoje rozhraní mezi dvěma fázemi v jazyce C++ a CUDA, úprava výpočtu normálového vektoru a aplikace algoritmu na dvourozměrný případ. Na základě získaných výsledků mřížková Boltzmannova metoda konverguje rychlostí druhého řádu v případě diagonální translace. V případě Zalesakova disku metoda konverguje rychlostí druhého řádu pouze pro některé použité způsoby výpočtu chyb. Pro ostatní způsoby výpočtu chyb konverguje nižší rychlostí nebo diverguje. Při složitějších rychlostních polích mřížková Boltzmannova metoda buď konverguje nižší rychlostí než druhého řádu nebo diverguje.

Klíčová slova: Allenova-Cahnova rovnice, metoda fázového pole, mřížková Boltzmannova metoda, výpočet normálového vektoru

Title:

Mathematical modelling of phase interface using lattice Boltzmann method

Author: Michal Malík

Abstract: This work is an introduction to the phase-field method and the lattice Boltzmann method for the simulation of the interface evolution between two phases. The main goal is to introduce these methods and use them to simulate the interface evolution between two phases. The additional aim of this work is the parallel implementation of the LBM algorithm in C++ and CUDA, the modification of normal vector computation, and the application in the two-dimensional case. Based on the obtained results, the lattice Boltzmann method converges in the case of diagonal translation with speed of second order. In the case of Zalesak's Disk, the method converges with speed of second order only for some used methods of the error computation. For other methods of error computation the method converges with lesser speed or diverges. For more complicated velocity fields, the lattice Boltzmann method either converges with lesser speed than that of second order or diverges.

Key words: Allen-Cahn equation, phase-field method, lattice Boltzmann method, normal vector computation

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Úvod | 7 |
| 2 | Základní pojmy | 8 |
| 3 | Metoda fázového pole | 9 |
| 3.1 | Stefanova úloha | 9 |
| 3.2 | Metoda fázového pole | 11 |
| 3.3 | Sledování rozhraní | 12 |
| 4 | Mřížková Boltzmanova metoda | 14 |
| 4.1 | Diskretizace fázového prostoru | 14 |
| 4.2 | Převody jednotek | 15 |
| 4.3 | Algoritmus | 16 |
| 4.4 | Kolizní operátor | 17 |
| 5 | Numerické testy | 20 |
| 5.1 | Výpočet normálového vektoru | 20 |
| 5.2 | Výpočet chyb | 21 |
| 5.3 | Úlohy | 22 |
| 5.3.1 | Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při diagonální translaci | 24 |
| 5.3.2 | Vývoj rozhraní ve tvaru Zalesakova disku v rotačním rychlostním poli | 34 |
| 5.3.3 | Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice ve smykovém rychlostním poli. | 45 |
| 5.3.4 | Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při deformaci A | 47 |
| 5.3.5 | Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při deformaci B | 49 |
| 6 | Závěr | 51 |

Kapitola 1

Úvod

Jednou z oblastí zájmu výpočetní dynamiky tekutin je simulace proudění dvou a více fází. Takové proudění nazýváme vícefázové [5]. S vícefázovým prouděním se setkáváme například při výrobě papíru, v ropném průmyslu, transportu rud, různých fotografických procesech atd. V přírodě a medicíně ho najdeme například ve formě laviny, mlhy, transportu sedimentů a krevního toku. Vícefázové proudění může být klasifikováno podle typů fází a komponent, které v něm vystupují. Získáváme pak označení jako proudění plyn/pevná látka, kapalina/kapalina atd. Vícefázové proudění se také dělí podle aplikace na fluidní lože, bahnotok atd. [5]

Hranici mezi jednotlivými fázemi nazýváme rozhraní. Při zkoumání vícefázového proudu nás zajímá vývoj této hranice v čase. Metody jako *vrstevnicová metoda* [1] nebo *metoda fázového pole* [2] určují pohyb rozhraní pomocí stavového parametru, který jednotlivým fázím předepisuje specifické hodnoty. Jednotlivá rozhraní jsou reprezentována určitou vrstevnicí tohoto parametru.

V této práci použijeme k simulaci fázového rozhraní *metodu fázového pole*. Jako numerický řešič použijeme *mřížkovou Boltzmannovu metodu* (zkráceně LBM), konkrétně modely *SRT-LBM* a *CLBM* [9]. Mezi další modely LBM, kterými lze řešit fázové rozhraní, patří například *model barevného gradientu*, *model Shan-Chen* a *model volné energie*, viz. [16].

Hlavním cílem této práce je sledovat vývoj rozhraní mezi dvěma fázemi pomocí mřížkové Boltzmannovy metody. V rámci práce byl upraven kód vyvíjený na Katedře matematiky FJFI, ČVUT v Praze. Kód je určený pro simulaci nestlačitelného proudění pomocí LBM. Kód využívá architekturu CUDA od společnosti NVIDIA, která je určená pro výpočty na grafických procesorech. V rámci práce byl kód upraven a odladěn. Šlo především o úpravu kolizního operátoru. Následně jsme kvůli nestabilitě numerických výpočtů, které byly zapříčiněny dělením příliš malým číslem, navrhli různé regularizace a způsoby výpočtu normál. Sledovali jsme, jaký vliv mají tyto aproximace na výsledné řešení. Schopnost LBM řešit simulaci fázového rozhraní jsme vyzkoušeli na několika testovacích úlohách.

Koncept této práce je následující. Nejprve v Kapitole 2 uvedeme definice některých základních pojmů, které budeme v teoretické části této práce používat. Následně v Kapitole 3 představíme model fázového pole a popíšeme, jak ho lze použít ke sledování vývoje rozhraní. V Kapitole 4 uvedeme numerické schéma, tj. mřížkovou Boltzmannovu metodu. Poslední kapitola se věnuje aplikaci mřížkové Boltzmannovy metody na již zmíněné testovací úlohy.

Kapitola 2

Základní pojmy

Pro srozumitelnost následujícího textu zavedeme následující pojmy převzaté z [19].

Definice 1 (Stavový parametr)

Ve fenomenologické teorii termodynamiky je stav makroskopického systému určen pomocí makroskopických veličin zvaných vnější a vnitřní parametry.

Vnější parametry daného systému rozumíme funkce pouze zobecněných souřadnic vnějších těles, se kterými je systém v interakci, např. různá silová pole.

Vnitřní parametry jsou makroskopické veličiny, které jsou při stejných vnějších parametrech charakteristické pouze pro daný systém, např. hustota a tlak.

Nadále budeme pod pojmem stavový parametr uvažovat vnitřní stavový parametr.

Definice 2 (Stav termodynamické rovnováhy)

Každý makroskopický systém, který je od jistého okamžiku v časově neměnných vnějších podmínkách, spěje do stavu termodynamické rovnováhy. V tomto stavu jsou makroskopické stavové parametry konstantní v čase a neprobíhají makroskopické procesy měnící tento stav.

Definice 3 (Homogenní systém)

Homogenním systémem nazýváme fyzikální systém, který je charakterizován tím, že ve stavu termodynamické rovnováhy jeho stavové parametry nezávisí na prostoru.

Definice 4 (Fáze)

Homogenní systémy, které mohou existovat vedle sebe ve stavu termodynamické rovnováhy nazýváme fázemi.

Fáze tvoří nadmnožinu pojmu skupenství (různé fáze se tedy mohou lišit i jinými fyzikálními nebo chemickými vlastnostmi) [19]. V této práci nebudeme rozlišovat mezi pojmem fáze a skupenství.

Definice 5 (Heterogenní systém a rozhraní)

Heterogenní systém se skládá ze dvou a více různých fází, které jsou odděleny nadplochami diskontinuit stavových parametrů. Tyto nadplochy nazýváme rozhraními.

Kapitola 3

Metoda fázového pole

V této kapitole nejprve v Sekci 3.1 uvedeme fyzikální problém, který metoda fázového pole popisuje, zvaný Stefanova úloha. Poté v Sekci 3.2 popíšeme samotnou metodu fázového pole a následně v Sekci 3.3 ukážeme upravenou metodu fázového pole pro sledování dvoufázového rozhraní.

3.1 Stefanova úloha

Stefanova úloha řeší šíření tepla a výměnu latentního tepla v jednodimenzionálním systému kapalina/pevná látka. V následujícím výkladu budeme čerpat z [3, 2, 15].

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast, $\Omega_s(t)$, $\Omega_l(t) \subset \Omega$ jsou disjunktní podoblasti reprezentující pevnou $\Omega_s(t)$, kapalnou $\Omega_l(t)$ fázi a $\Gamma(t) = \partial\Omega_l \cap \partial\Omega_s$ je rozhraní mezi Ω_s a Ω_l , tzn. $\Omega = \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t) \cup \Gamma(t)$. $T : \langle 0, t_{fin} \rangle \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ je teplota.

Měrné specifické latentní teplo L [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$] je určeno vztahem

$$L = H_l(T^*) - H_s(T^*),$$

kde H_s [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$], resp. H_l [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$] je objemová hustota entalpie látky v pevném, resp. kapalném skupenství a T^* [K] je teplota, při které se rovnají volné energie pevné F_s [$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$] a kapalně F_l [$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$] fáze, tzn.

$$F_s(T^*) = F_l(T^*).$$

Objemové hustoty entalpie lze pomocí měrného latentního specifického tepla vypočítat jako

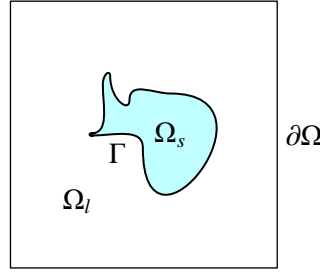
$$H_s(T) = \int_0^T \rho_s(T) c_s(T) dT,$$
$$H_l(T) = \int_0^T \rho_l(T) c_l(T) dT + L,$$

kde $\rho_s(T)$ [kg m^{-3}], resp. $\rho_l(T)$ [kg m^{-3}] je hustota pevné, resp. kapalně fáze a $c_s(T)$ [$\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$], resp. $c_l(T)$ [$\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$] označuje tepelnou kapacitu pevné, resp. kapalně fáze. Označme rozdíl měrných entropií pevné S_s [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$] a kapalně S_l [$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$] fáze jako

$$\Delta s = S_l - S_s,$$

Dále předpokládáme:

- $\Gamma(t)$ je uzavřená křivka a $\Gamma(t) \cap \partial\Omega = \emptyset$, $\forall t > 0$, viz. Obr. 3.1,



Obr. 3.1: Znázornění předpokladu $\Gamma(t)$ je uzavřená a $\Gamma(t) \cap \partial\Omega = \emptyset$, $\forall t > 0$.

- $\frac{sT^*}{L} \ll 1$,
kde s [$\text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$] je plošná hustota entropie rozhraní. Tato podmínka nám umožňuje přepsat Gibbsovu-Thompsonovu podmínku do lineární podoby (3.1c).
- Přítomnost kinetického koeficientu $\alpha > 0$ [$\text{m}^{-2} \text{s}$] odvozeného z Laplaceovy-Youngovy úlohy [20], který upravuje teplotní vztahy na $\Gamma(t)$.

Potom lze formulovat Stefanovu úlohu:

$$\rho_i c_i \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_i \nabla T) \quad i \in \{l, s\} \quad \text{na } \Omega_s(t) \cup \Omega_l(t), \quad (3.1a)$$

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_\Gamma} \Big|_{\Omega_s} - \lambda_l \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_\Gamma} \Big|_{\Omega_l} = Lv_\Gamma \quad \text{na } \Gamma(t), \quad (3.1b)$$

$$T - T^* = -\frac{\sigma}{\Delta s} \kappa_\Gamma - \alpha \frac{\sigma}{\Delta s} \nu_\Gamma \quad \text{na } \Gamma(t), \quad (3.1c)$$

$$b_c(T) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{na } \Omega, \quad (3.1d)$$

$$T \Big|_{t=0} = T_0 \quad \text{na } \Omega, \quad (3.1e)$$

$$\Omega_s(t) \Big|_{t=0} = \Omega_{s0}, \quad (3.1f)$$

$$\Omega_l(t) \Big|_{t=0} = \Omega_{l0}, \quad (3.1g)$$

kde λ_l [$\text{kg m s}^{-3} \text{K}^{-1}$], resp. λ_s [$\text{kg m s}^{-3} \text{K}^{-1}$] je tepelná vodivost kapalné, resp. pevné fáze, ν_Γ [m s^{-1}] je normálová rychlost rozhraní $\Gamma(t)$, \mathbf{n}_Γ [-] je normálový vektor k rozhraní $\Gamma(t)$ směřující ven z Ω_s , $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\Gamma} = \mathbf{n}_\Gamma \cdot \nabla$, κ_Γ [m^{-1}] značí střední křivost rozhraní $\Gamma(t)$, $\sigma = \sigma(T^*)$ [kg s^{-2}] je povrchové napětí mezi fázemi, T_0 je počáteční teplota, Ω_{s0} , resp. Ω_{l0} je počáteční poloha pevné, resp. kapalné fáze a $b_c(T)$ je operátor vyjadřující okrajové podmínky.

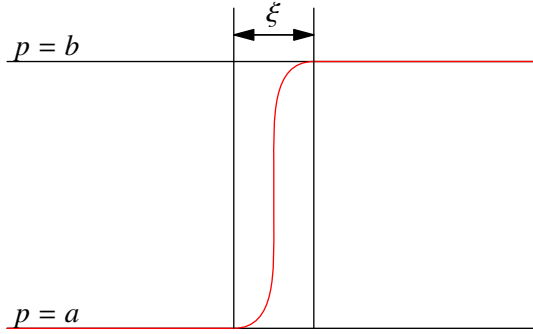
Hranici $\partial\Omega$ rozdělujeme na $\partial\Omega^D$ a $\partial\Omega^N$, tj. $\partial\Omega = \partial\Omega^D \cup \partial\Omega^N$, $\partial\Omega^D \cap \partial\Omega^N = \emptyset$. Na $\partial\Omega^D$, resp. $\partial\Omega^N$ předepíšeme Dirichletovy, resp. Neumannovy okrajové podmínky ve tvaru

$$b_c(T) \Big|_{\partial\Omega^D} = b_c^D(T) = T - T_{\partial\Omega^D}, \quad (3.1h)$$

$$b_c(T) \Big|_{\partial\Omega^N} = b_c^N(T) = (\lambda_i(T) \nabla T - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}_\Gamma, \quad i \in \{l, s\}, \quad (3.1i)$$

kde $T_{\partial\Omega^D}$ je teplota určená Dirichletovou okrajovou podmínkou, \mathbf{q} [kg s^{-3}] je tepelný tok na $\partial\Omega^N$.

Rovnice (3.1a) se nazývá rovnice vedení tepla. Stefanova podmínka (3.1b) popisuje závislost mezi tepelným tokem na $\Gamma(t)$ a rychlostí pohybu volné hranice. Gibbs-Thomsonova podmínka (3.1c) popisuje závislost mezi rychlostí fázového rozhraní, jeho podchlazením a zakřivením. Soustavě (3.1) se říká Stefanova úloha s povrchovým napětím.



Obr. 3.2: Spojitý přechod na rozhraní o šířce ξ [m] mezi fázemi, které jsou určeny konstantní hodnotou stavového parametru $p = a, b$. Hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$ závisí na typu úlohy a tvaru členu $g = g(T, p, \nabla p, \xi)$ rovnice (3.2b).

3.2 Metoda fázového pole

Jednou z metod popisující chování dvoufázového systému, je metoda fázového pole, která se používá například pro modelování tání a tuhnutí. Ve fyzikální teorii lze rozpoznat dva přístupy k modelování těchto procesů, a to Gibbsovu a van der Waalovu teorii [3]. Gibbsova teorie předpokládá ostré rozhraní mezi fázemi, na kterém mají některé termodynamické veličiny skok. Výsledkem tohoto přístupu pro čisté látky je Stefanova úloha, která je popsána v Sekci 3.1.

Metoda fázového pole má původ ve van der Waalově přístupu, na který v roce 1950 navázali Cahn a Hilliard [7]. Tento přístup předpokládá tenké neostře okolí rozhraní konečné šířky ξ [m], kde se termodynamické parametry spojitě mění. Lze ukázat, že při limitě $\xi \rightarrow 0^+$ odpovídá metoda fázového pole Stefanově úloze [7]. Stavovým parametrem, jehož hodnotami popisujeme fáze a rozhraní na zkoumané oblasti Ω , je tlak $p = p(\mathbf{x}, t)$ [kg m⁻¹ s⁻²]. Tlak na každé fázi nabývá konstantní hodnoty specifické pro danou fázi a podobně jako termodynamické parametry se spojitě mění na rozhraní. Necht' $\text{Ran } p \subset \langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Potom se jedné fázi předepisuje hodnota $p = a$ a druhé $p = b$. Na rozhraní se tlak chová jako spojitá monotonní funkce, viz. Obr. 3.2. Chování systému je určeno teplotou $T = T(t, \mathbf{x})$.

Vývoj heterogenního systému lze popsat pomocí soustavy rovnic [7]

$$\rho_i(T)c_i(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_i(T)\nabla T) + L\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \text{na } \Omega \quad (3.2a)$$

$$\tau(\xi)\frac{\partial p}{\partial t} = \xi^2\Delta p + g(T, p, \nabla p, \xi), \quad \text{na } \Omega \quad (3.2b)$$

kde $i \in \{s, l\}$, τ [s] je relaxační parametr. Člen $g = g(T, p, \nabla p, \xi)$ vyjadřuje chování fázového pole. K rovnicím patří okrajové podmínky [3], Dirichletova typu

$$T|_{\partial\Omega} = T_{\partial\Omega}, \quad p|_{\partial\Omega} = p_{\partial\Omega}, \quad (3.2c)$$

nebo Neumannova typu

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}_{\partial\Omega}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_{\partial\Omega}}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.2d)$$

kde $\mathbf{n}_{\partial\Omega}$ je vnější normálový vektor k $\partial\Omega$. Soustavu (3.2) s příslušnými počátečními podmínkami nazveme metodou fázového pole [3]. Rovnice (3.2a) odpovídá rovnici vedení tepla. Rovnice (3.2b) se nazývá fázová nebo Allenova-Cahnova rovnice.

Rovnice (3.2b) popisuje chování systému na rozhraní. Pokud zvolíme tvar relaxačního parametru jako

$$\tau(\xi) = \alpha\xi^2, \quad (3.3)$$

pak lze pomocí asymptotické analýzy [7] ukázat, že fázová rovnice jde v limitě $\xi \rightarrow 0$ ke Gibbsově-Thompsonově vztahu (3.1c), tzn. metoda fázového pole odpovídá Stefanově úloze. Rovnice (3.2b) bude při použití (3.3) ve tvaru

$$\alpha \xi^2 \frac{\partial p}{\partial t} = \xi^2 \Delta p + g(T, p, \nabla p, \xi). \quad (3.4)$$

Pro člen $g = g(T, p, \nabla p, \xi)$ existují různé tvary, jimiž se od sebe liší jednotlivé metody fázového pole [3, 7]. Tímto členem jsou také určeny hodnoty, které stavový parametr nabývá na jednotlivých fázích.

3.3 Sledování rozhraní

Y. Sun a C. Beckermann v [23] navrhli metodu pro sledování rozhraní mezi fázemi, která byla inspirována numerickým řešením metody fázového pole. V práci byla zachována struktura fázové rovnice (3.4), ale nebyly uvedeny reference k termodynamice spojitých fázových přechodů. Zachováním struktury se přenesly některé vlastnosti metody fázového pole a to:

- Rovnice sledující pohyb rozhraní se počítá na celé výpočetní oblasti.
- Heterogenní systém je popsán stavovým parametrem $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ [–]. Pohyb rozhraní tedy dostaneme sledováním dané vrstevnice tohoto stavového parametru.
- ϕ se mezi fázemi spojitě mění přes tenké neostré okolí rozhraní konečné šířky ξ [m].

V metodě fázového pole je započítán pohyb vynucený křivostí. Pokud chceme metodu použít pro nemísitelné a nestlačitelné proudění, je zapotřebí tento pohyb odstranit. To je v [23] provedeno pomocí takzvaného vyvažujícího členu, který byl představen v [10]. Rozhraní je tedy pouze posouváno vnějším polem a není modifikováno křivostí. Na práci [23] navázali P. Chiu a Y. Lin v [6] a fázovou rovnici, ze které byla odstraněna křivost, převedli do konzervativního tvaru. V následujícím odstavci nastíníme odvození v [23, 6].

Modifikovaná Allenova-Cahnova rovnice

Pro odvození modifikované Allenovy-Cahnovy rovnice vyjdeme stejně jako v [23] z advekční rovnice pro rozhraní

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (3.5)$$

kde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ [m s⁻¹] je rychlost rozhraní, která se rozdělí na normální rychlost rozhraní \mathbf{u}_n [m s⁻¹] a rychlost způsobenou vnější advekcí \mathbf{u}_e [m s⁻¹] [23]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_e. \quad (3.6)$$

Předpokládáme [6], že \mathbf{u}_n je násobkem křivosti rozhraní κ

$$\mathbf{u}_n = -M\kappa\mathbf{n}, \quad (3.7)$$

kde M [m² s⁻¹] je kladná konstanta, kterou nazýváme mobilita, a $\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|_2}$ je normála k rozhraní [23]. Křivost lze vyjádřit jako [6]

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\|\nabla \phi\|_2} \left[\Delta \phi - \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \|\nabla \phi\|_2}{\|\nabla \phi\|_2} \right]. \quad (3.8)$$

Dosazením vztahů (3.7) a (3.8) do (3.5) dostaneme rovnici

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \phi = M \left[\Delta \phi - \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \|\nabla \phi\|_2}{\|\nabla \phi\|_2} \right]. \quad (3.9)$$

Nyní zvolíme stavový parametru $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$. Tvar této funkce bude motivovaný profilem stavového parametru pro systém v termodynamické rovnováze v metodě fázového pole [4] a umožní nám zjednodušit rovnici (3.9). Zvolíme ϕ jako

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \tanh \left(2 \frac{\text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma(t))}{\xi} \right), \quad (3.10)$$

kde $\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}$, $t > 0$ je rozhraní, $\text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma(t))$ je vzdálenost bodu \mathbf{x} od rozhraní $\Gamma(t)$ a ξ je parametr určující šířku profilu funkce tangens hyperbolický. Tento tvar stavového parametru nám umožňuje vyjádřit [6]

$$\frac{\nabla \phi \cdot \nabla \|\nabla \phi\|_2}{\|\nabla \phi\|_2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial d^2},$$

kde $d = \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma(t))$ bereme jako nezávislou proměnnou. Díky tomuto vztahu lze přepsat (3.9) do tvaru

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \phi = M \left[\Delta \phi + \frac{8\phi(1 - 4\phi^2)}{\xi^2} \right]. \quad (3.11)$$

Následným přenásobením rovnice faktorem $\frac{\xi^2}{M}$, dostaneme

$$\frac{1}{M} \xi^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\xi^2}{M} \mathbf{u}_e \cdot \nabla \phi = \xi^2 \Delta \phi + 8\phi(1 - 4\phi^2), \quad (3.12)$$

což při $\mathbf{u}_e = 0$ odpovídá Allenově-Cahnově rovnici (3.4). α odpovídá $\frac{1}{M}$ a

$$g(u, \phi, \nabla \phi, \xi) = 8\phi_1(1 - 4\phi^2).$$

Nyní eliminujeme pohyb vynucení křivostí tím, že odečteme $M \|\nabla \phi\|_2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|_2} \right)$ od pravé strany rovnice (3.11) [10, 6].

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u}_e \cdot \nabla \phi = M \left[\Delta \phi + \frac{8\phi(1 - 4\phi^2)}{\xi^2} - \|\nabla \phi\|_2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|_2} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Uvedená rovnice není v konzervativním tvaru. Aplikací stejného postupu jako v [6] získáme za předpokladu nulové divergence pole \mathbf{u}_e následující tvar modifikované konzervativní Allenovy-Cahnovy rovnice [12]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_e \phi) = \nabla \cdot \left[M \left(\nabla \phi - \mathbf{n} \frac{1 - 4\phi^2}{\xi} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Stavový parametru ϕ nabývá na jedné fázi hodnoty $\phi = -\frac{1}{2}$, na druhé $\phi = \frac{1}{2}$ a spojitě se mění na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Kapitola 4

Mřížková Boltzmanova metoda

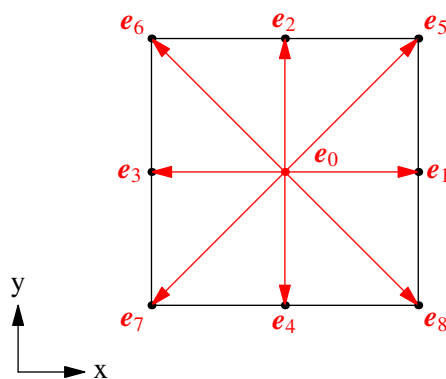
Mřížková Boltzmanova metoda (zkráceně LBM) je jedna z numerických metod používaných pro řešení parciálních diferenciálních rovnic. LBM se vyvinula z *metody buněčných automat* pro řešení dynamiky tekutin [14]. Později bylo dokázáno, že LBM lze odvodit z Boltzmannovy transportní rovnice, viz. např. [8]. Dle [18] víme, že řešení Boltzmannovy transportní rovnice je ekvivalentní s řešením Navierových-Stokesových-Fourierových rovnic popisující dynamiku tekutin.

Simulace tekutin je tedy jedna z možných aplikací LBM. Mezi další použití této metody patří numerické řešení advekční-difuzní rovnice [11], již zmiňovaného vícefázového proudění [16], proudění v pórém prostředí [21], atd.

Ve srovnání s klasickými numerickými metodami pro řešení parciálních diferenciálních rovnic jako je například *metoda konečných diferencí*, *metoda konečných prvků* nebo *metoda konečných objemů*, jsou s výjimkou jednoho kroku algoritmu všechny numerické operace LBM lokální, a proto je LBM vhodná pro paralelizaci. Nevýhodou LBM jsou vysoké nároky na paměť, viz. [18].

4.1 Diskretizace fázového prostoru

LBM používá pro prostorovou diskretizaci parciální diferenciální rovnice pravidelnou mřížku, po které se šíří hypotetické částice. Mřížka je určena rychlostním modelem označovaným $DdQq$ [9], kde d je dimenze prostoru souřadnic a q označuje počet různých směrů, kterými se hypotetické částice po mřížce pohybují. V této práci budeme používat model $D2Q9$, viz. Obr. 4.1.



Obr. 4.1: Model $D2Q9$. $e_i \in \hat{\Xi}$, $i \in \{0, 1, \dots, 8\}$.

Mějme fázový prostor $\Psi = \Omega \times \Xi \times (0, t_{fin})$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je zkoumaná oblast, $\Xi \subseteq \mathbb{R}^2$ je prostor mikroskopických rychlostí a $(0, t_{fin})$ je zkoumaný časový interval, t_{fin} [s]. Necht' v oblasti Ω nejsou tělesa, které bychom museli zohlednit dodatečnými okrajovými podmínkami. Potom provedeme diskretizaci

$$\hat{\Psi} = \hat{\Omega} \times \hat{\Xi} \times \{t_k \mid k \in \{0, 1, \dots, N\}\}, \quad (4.1)$$

kde

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= \{\mathbf{x}_{ij} = (i\Delta\ell, j\Delta\ell)^T \mid i \in \{1, 2, \dots, N_x - 1\}, j \in \{1, 2, \dots, N_y - 1\}\}, \\ \hat{\Xi} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ t_k &= k\Delta t. \end{aligned}$$

$\Delta\ell$ je vzdálenost mezi body mřížky po x-ové, resp. y-ové ose, t_k nazýváme časový krok, $\Delta t = \frac{1}{N}t_{fin}$ [s] je délka časového kroku. Hranice oblasti Ω je diskretizována jako množina bodů

$$\partial\hat{\Omega} = \overline{\hat{\Omega}} \setminus \hat{\Omega},$$

kde

$$\overline{\hat{\Omega}} = \{\mathbf{x}_{ij} = (i\Delta\ell, j\Delta\ell)^T \mid i \in \{0, 1, \dots, N_x\}, j \in \{0, 1, \dots, N_y\}\}. \quad (4.2)$$

Po provedení diskretizace fázového prostoru se přejde k bezrozměrným *LB* jednotkám, viz. Sekce 4.2. Diskrétní schéma *mřížkové Boltzmannovy metody* je [12]

$$f_m(\mathbf{x}_{ij} + \Delta t_{LB} \mathbf{e}_m, t_{k+1}) = f_m(\mathbf{x}_{ij}, t_k) + C_m, \quad m \in \{0, 1, \dots, 8\}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}, \quad \mathbf{x}_{ij} \in \hat{\Omega}, \quad (4.3)$$

kde f_m [–], $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ jsou hustoty pravděpodobnosti a C_m $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ je kolizní operátor. Hustoty pravděpodobnosti reprezentují hypotetické částice, které se po mřížce pohybují mikroskopickými rychlostmi $\mathbf{e}_m \in \hat{\Xi}$ [–], $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$. m -tá hustota pravděpodobnosti se šíří ve směru m -té mikroskopické rychlosti. Δt_{LB} je čas za který hypotetická částice urazí vzdálenost mezi dvěma sousedními body.

4.2 Převody jednotek

LBM pracuje s bezrozměrnými veličinami. Pro simulaci reálné fyzikální úlohy a fyzikální interpretaci numerického řešení je zapotřebí znát převodní vztahy mezi fyzikálními a bezrozměrnými veličinami. Dolními *LB* indexy budeme značit bezrozměrné veličiny, f fyzikální a ch charakteristické.

Definice 6 (Charakteristické veličiny)

Neht' Ω je oblast. Potom charakteristická délka $l_{f,ch}$ [m] je délka libovolné křivky ležící v $\overline{\Omega}$. Hypotetická částice pohybující se po této křivce charakteristickou rychlostí $u_{f,ch}$ [ms^{-1}] urazí vzdálenost $l_{f,ch}$ za charakteristický čas $t_{f,ch}$ [s], tedy $t_{f,ch} = \frac{l_{f,ch}}{u_{f,ch}}$.

$l_{f,ch}$ se obvykle volí jako jeden z rozměrů oblasti nebo jako jeden z rozměrů těles v oblasti umístěných. $u_{f,ch}$ je většinou určena jako maximální nebo průměrná rychlost v oblasti.

Pro řešení fázové rovnice jsou transformace provedeny pomocí bezrozměrného Péceletova čísla Pe [12], které udává poměr mezi advekcí a difuzí. Požadujeme, aby Péceletovo číslo mělo stejnou hodnotu pro fyzikální a bezrozměrné veličiny, tj.

$$Pe = \frac{u_{f,ch} \xi_f}{M_f} = \frac{u_{LB,ch} \xi_{LB}}{M_{LB}}. \quad (4.4)$$

V našem případě budeme za $l_{f,ch}$ uvažovat rozměr čtvercové oblasti $\Omega = (0, l_{f,ch}) \times (0, l_{f,ch})$, který je diskretizován $N_x + 1$ body mřížky, viz. (4.2). Hypotetická částice tuto vzdálenost urazí za $t_{f,ch}$, který je diskretizován do N_t časových kroků. Vzdálenost mezi sousedními body v bezrozměrných jednotkách je Δx_{LB} a bezrozměrný čas, za kterou ji hypotetická částice urazí je Δt_{LB} . Fyzikální veličiny Δx_f , Δt_f vypočteme jako

$$\Delta x_f = \frac{l_{f,ch} \Delta x_{LB}}{N_x + 1},$$

$$\Delta t_f = \frac{t_{f,ch} \Delta x_{LB}}{N_t}.$$

Pro jednoduchost volíme $\Delta x_{LB} = 1$, $\Delta t_{LB} = 1$. Pomocí Δx_f , Δt_f lze transformovat bezrozměrné veličiny na fyzikální

$$t_f = t_{LB} \Delta t_f, \quad (4.5a)$$

$$\xi_f = \xi_{LB} \Delta x_f, \quad (4.5b)$$

$$u_f = u_{LB} \frac{\Delta x_f}{\Delta t_f}, \quad (4.5c)$$

$$M_f = M_{LB} \frac{\Delta x_f^2}{\Delta t_f}. \quad (4.5d)$$

Dosažením vztahů (4.5b), (4.5d) do (4.4) vyplyne, že při řešení simulace fázové rovnice máme pro danou výpočetní síť 1 stupeň volnosti.

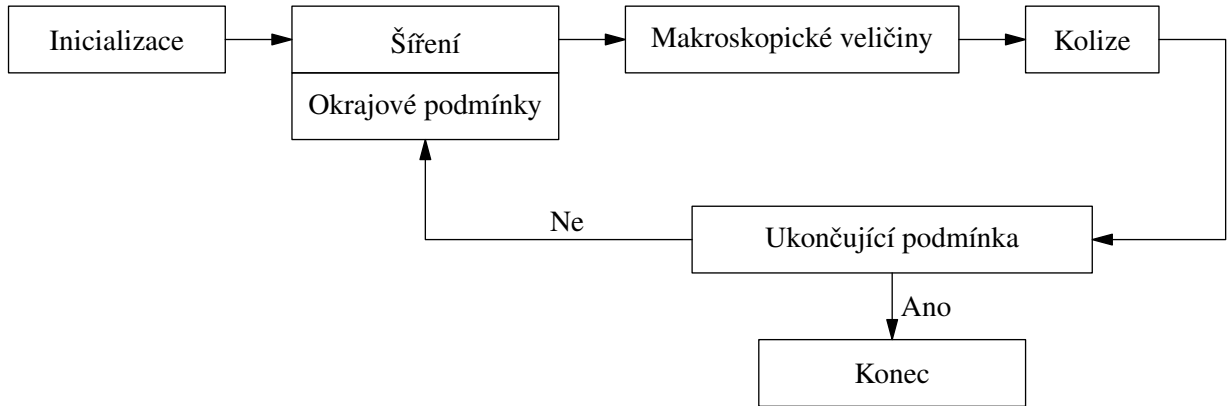
Při řešení fyzikální úlohy známe fyzikální veličiny. Volbou diskretizace oblasti Ω určíme Δx_f .

4.3 Algoritmus

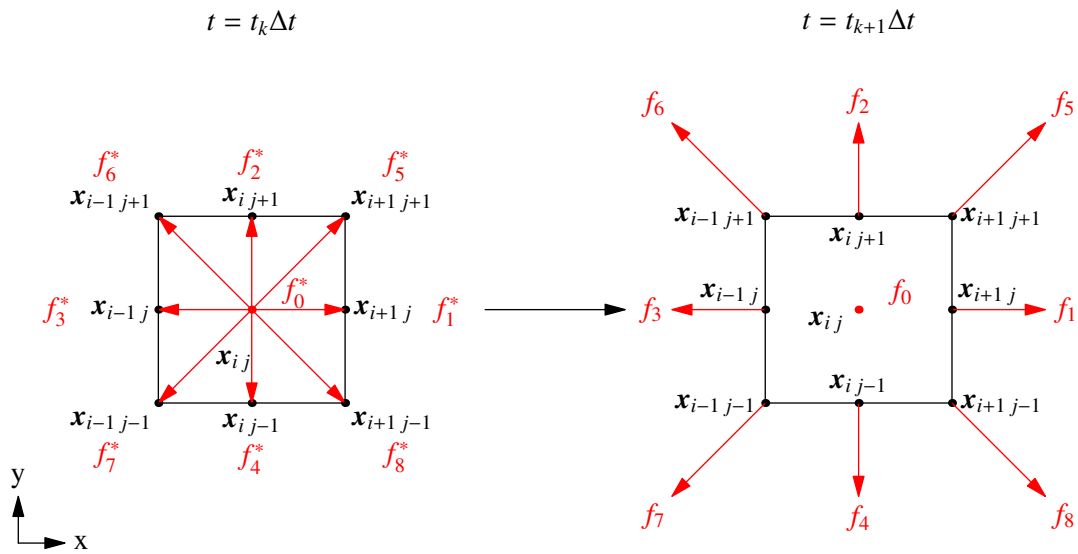
Algoritmus LBM lze rozdělit do několika kroků, viz. Obr. 4.2. V časovém kroku t_0 proběhne *inicializace* neboli nastavení počáteční podmínky, tj. určení hodnot hustot pravděpodobnosti f_m , $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ v každém bodě mřížky. V této práci k *inicializaci* použijeme rovnovážnou hustotu pravděpodobnosti f_m^{eq} , $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ v čase $t = 0$, kterou uvedeme v Sekci 4.4. Následuje výpočet *makroskopických veličin*, které sledujeme. V této práci počítáme pouze jednu makroskopickou veličinu, a to stavový parametr

$$\phi = \sum_{m=0}^8 f_m. \quad (4.6)$$

V kroku zvaném *šíření*, se hustoty pravděpodobnosti šíří do sousedních bodů, viz. Obr. 4.3. Pokud se nacházíme na hranici oblasti, pak *šíření* probíhá podle *okrajových podmínek*, jelikož bychom se provedením kroku *šíření*, dle Obr. 4.3, dostali mimo mřížku. V této práci používáme pouze *periodické okrajové podmínky*, viz. Obr. 4.4. V rovnici (4.3) je *šíření* znázorněno translací hustot pravděpodobnosti. V posledním kroce algoritmu zvaném *kolize* se hustoty pravděpodobnosti přepočítávají přičtením kolizního operátoru, viz. (4.3).



Obr. 4.2: Schématické znázornění algoritmu LBM.



Obr. 4.3: Šíření. Pohyb hustot pravděpodobnosti po skončení kroku kolize f_m^* , $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ v časovém kroku t_k do sousedních bodů dle směrů určených modelem $D2Q9$. f_m , $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ jsou hustoty pravděpodobnosti před zahájením kolize v časovém kroku t_{k+1} .

Aproximací kolizního operátoru se liší některé typy LBM. Rozeznáváme například $SRT-LBM$ ¹ [9], $MRT-LBM$ ² [14], $CLBM$ ³ [9], $ELBM$ ⁴ [17], atd. V této práci využíváme $SRT-LBM$ a $CLBM$, o kterých se více zmíníme v sekci 4.4.

4.4 Kolizní operátor

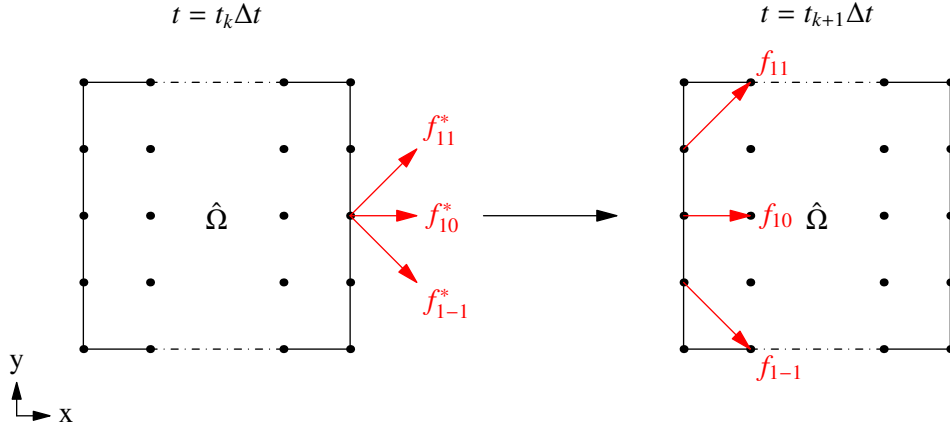
Nyní představíme tvar kolizního operátoru pro $SRT-LBM$ a $CLBM$. Kolizi $CLBM$ provádíme pomocí centrálních momentů. Stejně můžeme postupovat i v $SRT-LBM$. Kolizi v $SRT-LBM$ lze ale provést efektivněji pomocí rovnovážné distribuční funkce f_m^{eq} , $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$. V této Sekci nejprve ukážeme pro

¹LBM s jedním relaxačním časem

²LBM s více relaxačními časy

³Kaskádová LBM

⁴Entropická LBM



Obr. 4.4: Periodická okrajová podmínka. Obrázek znázorňuje šíření hustot pravděpodobnosti f_{11}^* , f_{10}^* , f_{1-1}^* na hranici $\partial\hat{\Omega}$ po skončení kolize v časovém kroku t_k . f_{11} , f_{10} , f_{1-1} jsou hustoty pravděpodobnosti před zahájením kolize v časovém kroku t_{k+1} .

oba kolizní operátory schéma kolize pomocí centrálních momentů a poté uvedeme jednodušší schéma pro *SRT-LBM* pomocí f_m^{eq} . Jak jsme již zmínili v Sekci 4.3, rovnovážnou distribuční funkci používáme při *inicializaci*. V této práci nastavujeme počáteční podmínku pomocí f_m^{eq} jak v případě *SRT-LBM*, tak v *CLBM*.

Symbole $k_{\alpha\beta}$ budeme označovat centrální momenty před provedením kolize a $k_{\alpha\beta}^*$ centrální momenty po kolizním kroku, $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$. Centrální momenty získáme pomocí hustot pravděpodobnosti f_m , $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ [12]

$$k_{\alpha\beta} = \sum_{m=0}^8 f_m \left(e_{m,x} - \frac{u_x}{\tilde{c}} \right)^\alpha \left(e_{m,y} - \frac{u_y}{\tilde{c}} \right)^\beta, \quad (4.7)$$

kde $\mathbf{u}_e = (u_x, u_y)^T$ je externí advekce, $\mathbf{e}_m = (e_{m,x}, e_{m,y})^T$ je mikroskopická rychlost a $\tilde{c} = \frac{\Delta x_{LB}}{\Delta t_{LB}} = 1$ je mřížková rychlost.

Dle stejného postupu jako v [12] získáme tvar kolizního operátoru v prostoru centrálních momentů

$$k_{\alpha\beta}^* = k_{\alpha\beta}(1 - \omega_{\alpha\beta}) + \omega_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}^{eq}, \quad \alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}, \quad (4.8)$$

kde $\omega_{\alpha\beta}$ jsou relaxační frekvence a $k_{\alpha\beta}^{eq}$ rovnovážné centrální momenty, které mají tvar [12]

$$k_{00}^{eq} = k_{00}, \quad (4.9a)$$

$$k_{10}^{eq} = n_x M_{LB} \frac{1 - 4\phi^2}{\xi}, \quad (4.9b)$$

$$k_{01}^{eq} = n_y M_{LB} \frac{1 - 4\phi^2}{\xi}, \quad (4.9c)$$

$$k_{20}^{eq} = u_s^2 k_{00}, \quad (4.9d)$$

$$k_{02}^{eq} = u_s^2 k_{00}, \quad (4.9e)$$

$$k_{11}^{eq} = 0, \quad (4.9f)$$

$$k_{12}^{eq} = u_s^2 k_{10}^{eq}, \quad (4.9g)$$

$$k_{21}^{eq} = u_s^2 k_{01}^{eq}, \quad (4.9h)$$

$$k_{22}^{eq} = u_s^4 k_{00}, \quad (4.9i)$$

kde $u_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [-] je bezrozměrná rychlost zvuku. V této práci budeme počítat normálový vektor $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$ dvěma způsoby a to buď z definice

$$\mathbf{n}_{FD} = \left(\left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|_2} \right)_x, \left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|_2} \right)_y \right)^T, \quad (4.10a)$$

anebo pomocí centrálních momentů [12]

$$\mathbf{n}_G \approx \left(-\frac{k_{10}}{\sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2}}, -\frac{k_{01}}{\sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2}} \right)^T. \quad (4.10b)$$

Nyní určíme relaxační frekvence $\omega_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$. Všimněme si, že $\forall \omega \in \mathbb{R} : k_{00}^* = k_{00} = \phi$, tzn. hodnota stavového parametru ϕ se během kolize nemění. Říkáme, že ϕ je kolizní invariant.

Pro *SRT-LBM* jsou si všechny relaxační frekvence rovny, tj. $\forall \alpha, \beta \omega_{\alpha\beta} = \omega$, a vztaheny k bezrozměrné mobilitě M_{LB} vztahem [12]

$$M_{LB} = u_s^2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \right). \quad (4.11)$$

Můžeme tedy napsat kolizní operátor jednodušším způsobem [18]

$$C_m = -\omega [f_m(\mathbf{x}_{ij}, t) - f_m^{eq}(\mathbf{x}_{ij}, t)], \quad (4.12)$$

kde $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$, $i \in \{0, 1, \dots, N_x\}$, $j \in \{0, 1, \dots, N_y\}$. Rovnovážná hustota pravděpodobnosti f_m^{eq} , $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ je rovna [12]

$$f_m^{eq} = \phi \eta_m \left[1 + \frac{\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{u}_e}{u_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{u}_e)^2}{2u_s^4} - \frac{\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{u}_e}{2u_s^2} \right] + \frac{M_{LB}}{u_s^2} \frac{1 - 4\phi^2}{\xi} \eta_m (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}), \quad (4.13)$$

kde

$$\eta_m = \begin{cases} \frac{4}{9}, & m = 0, \\ \frac{1}{9}, & m \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ \frac{1}{36}, & m \in \{5, 6, 7, 8\} \end{cases}$$

je váhová funkce.

Pro *CLBM* volíme $\omega_{01} = \omega_{10} = \omega$ ze vztahu (4.11) a hodnotu zbylých relaxačních frekvencí nastavíme na 1 viz. [13].

Kapitola 5

Numerické testy

5.1 Výpočet normálového vektoru

V této Sekci se budeme věnovat problematice výpočtu normálového vektoru \mathbf{n} . Ten, jak již bylo zmíněno v Sekci 4.4, počítáme buď z definice (4.10a) nebo pomocí vzorců (4.10b). Pro výpočet z definice jsme $\left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|_2}\right)_x$ a $\left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|_2}\right)_y$ aproximovali centrálními diferencemi

$$(\nabla\phi)_x(\mathbf{x}_{ij}, t) \approx (\nabla\phi)_{cx}(\mathbf{x}_{ij}, t) = \frac{1}{2\Delta x_{LB}}(\phi(\mathbf{x}_{i+1j}, t) - \phi(\mathbf{x}_{i-1j}, t)), \quad (5.1a)$$

$$(\nabla\phi)_y(\mathbf{x}_{ij}, t) \approx (\nabla\phi)_{cy}(\mathbf{x}_{ij}, t) = \frac{1}{2\Delta x_{LB}}(\phi(\mathbf{x}_{ij+1}, t) - \phi(\mathbf{x}_{ij-1}, t)), \quad (5.1b)$$

$$\|\nabla\phi(\mathbf{x}_{ij}, t)\|_2 \approx \sqrt{(\nabla\phi)_{cx}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + (\nabla\phi)_{cy}^2(\mathbf{x}_{ij}, t)}, \quad (5.1c)$$

kde $i \in \{0, 1, \dots, N_x\}$, $j \in \{0, 1, \dots, N_y\}$. Pokud se $i = 0$, resp. $i = N_x$, pak bereme v úvahu periodické okrajové podmínky a dostáváme $i - 1 = N_x$, resp. $i + 1 = 0$. Pro j postupujeme analogicky. S rostoucí vzdáleností bodů mřížky od rozhraní klesají hodnoty $\|\nabla\phi(\mathbf{x}_{ij}, t)\|_2$ a $\sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2}$ k nule, tzn. roste vliv numerických chyb při dělení velmi malým číslem. Z tohoto důvodu je třeba výpočet normálového vektoru upravit. V této práci jsme použili 2 různé úpravy výpočtu. První z nich je takzvaná μ -regularizace normy normálového vektoru, ve které se do odmocniny jmenovatele přičte $\mu \ll 1$

$$\|\nabla\phi(\mathbf{x}_{ij}, t)\|_2 \approx \sqrt{(\nabla\phi)_{cx}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + (\nabla\phi)_{cy}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + \mu^2}, \quad (5.2a)$$

$$\sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2} \approx \sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2 + \mu^2}, \quad (5.2b)$$

tzn. vztahy (4.10a), (4.10b) se při μ -regularizaci transformují na

$$\mathbf{n}_{FD}^\mu \approx \left(\frac{(\nabla\phi)_x}{\sqrt{(\nabla\phi)_{cx}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + (\nabla\phi)_{cy}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + \mu^2}}, \frac{(\nabla\phi)_y}{\sqrt{(\nabla\phi)_{cx}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + (\nabla\phi)_{cy}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + \mu^2}} \right)^T, \quad (5.3a)$$

$$\mathbf{n}_G^\mu \approx \left(-\frac{k_{10}}{\sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2 + \mu^2}}, -\frac{k_{01}}{\sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2 + \mu^2}} \right)^T. \quad (5.3b)$$

Druhá možnost je motivována vlastnostmi metody fázového pole. V (3.10) jsme zvolili tvar stavového parametru ϕ , který byl motivovaný profilem funkce tangens hyperbolický. ϕ jsme omezili shora $\frac{1}{2}$ a zdola $-\frac{1}{2}$. Stavový parametr nabývá těchto hodnot na jednotlivých fázích a na rozhraní se spojitě mění. Z tvaru rovnovážné distribuční funkce (4.13) a centrálních momentů (4.9) lze vidět, že při limitě

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm \frac{1}{2}} (1 - 4\phi^2) = 0$$

se nám vynulují členy, ve kterých vystupuje normálový vektor. Z tohoto důvodu upravíme výpočet k_{10}^{eq} , k_{01}^{eq} , f_m^{eq} , $m \in \{0, 1, \dots, 8\}$ na

$$k_{10}^{eq} = \begin{cases} n_x^\varepsilon M_{LB} \frac{1-4\phi^2}{\xi}, & \phi(\mathbf{x}, t_{k-1}) \in \langle -\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \rangle, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (5.4a)$$

$$k_{01}^{eq} = \begin{cases} n_y^\varepsilon M_{LB} \frac{1-4\phi^2}{\xi}, & \phi(\mathbf{x}, t_{k-1}) \in \langle -\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \rangle, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (5.4b)$$

$$f_m^{eq} = \begin{cases} \phi \eta_m \left[1 + \frac{\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{u}_e}{u_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{u}_e)^2}{2u_s^4} - \frac{\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{u}_e}{2u_s^2} \right] + \frac{M_{LB}}{u_s^2} \frac{1-4\phi^2}{\xi} \eta_m (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{n}^\varepsilon), & \phi(\mathbf{x}, t_{k-1}) \in \langle -\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \rangle, \\ \phi \eta_m \left[1 + \frac{\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{u}_e}{u_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{u}_e)^2}{2u_s^4} - \frac{\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{u}_e}{2u_s^2} \right], & \text{jinak,} \end{cases} \quad (5.4c)$$

kde $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ a $\mathbf{n}^\varepsilon = (n_x^\varepsilon, n_y^\varepsilon)$ je normálový vektor při ε -regularizaci, který má stejně jako u μ -regularizace dvě podoby

$$\mathbf{n}_{FD}^\varepsilon \approx \left(\frac{(\nabla \phi)_x}{\sqrt{(\nabla \phi)_{cx}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + (\nabla \phi)_{cy}^2(\mathbf{x}_{ij}, t)}}, \frac{(\nabla \phi)_y}{\sqrt{(\nabla \phi)_{cx}^2(\mathbf{x}_{ij}, t) + (\nabla \phi)_{cy}^2(\mathbf{x}_{ij}, t)}} \right)^T, \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{n}_G^\varepsilon \approx \left(-\frac{k_{10}}{\sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2}}, -\frac{k_{01}}{\sqrt{k_{10}^2 + k_{01}^2}} \right)^T. \quad (5.5b)$$

V případě (5.5b) dostáváme stejný vztah jako (4.10b).

Důsledkem těchto regularizací má difuze rozdílný vliv uvnitř a vně intervalu $\langle -\frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \rangle$, kde $0 < \varepsilon \ll 1$. Ukazuje se, viz. Sekce 5.3, že s rostoucím ε klesá experimentální řád konvergence a vrstevnice stavového parametru mají tendenci se vzdalovat. Tuto možnost nazýváme ε -regularizace normy normálového vektoru.

5.2 Výpočet chyb

Nyní představíme několik způsobů výpočtu chyb, pomocí kterých jsme vyšetřovali přesnost numerického řešení. *Inicializace* Úloh bude provedena pomocí (3.10). Úlohy jsou nastavené tak, aby při zanedbání difuze mělo rozhraní v časech $t = t_{fin}$ a $t = 0$ stejnou polohu a tvar. V počáteční podmínce není zahrnuta difuze, která se během testu projeví. Přesto se v literatuře [23, 6, 12] řešení v čase $t = t_{fin}$ s počáteční podmínkou srovnává. Jelikož nám analytické řešení rovnice (3.14) není známo, tak budeme postupovat stejně. Výsledky budeme také srovnávat s řešením naměřeným na nejjemnější použité mřížce s rozměry 2048×2048 . Při srovnání s nejjemnější mřížkou jsou v chybách zahrnuty chyby vzniklé lineární interpolací.

| Úloha | Název | Strana |
|-------|---|--------|
| 1 | Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při diagonální translaci | 24 |
| 2 | Vývoj rozhraní ve tvaru Zalesakova disku v rotačním rychlostním poli. | 34 |
| 3 | Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice ve smykovém rychlostním poli. | 45 |
| 4 | Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při deformaci A. | 47 |
| 5 | Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při deformaci B. | 49 |

Tab. 5.1: Seznam testovacích úloh.

Pro přehlednost ve vzorcích a úlohách označíme čtvercovou mřížku $\overline{\Omega} = \{(i\Delta\ell, j\Delta\ell)^T \mid i, j \in \{0, 1, \dots, 32r\}\}$ symbolem $\Delta\ell_r$, kde $r \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$. Stavový parametr v čase $t = 0$ na mřížce $\Delta\ell_r$ označíme $\phi_{\Delta\ell_r}^0$ a stavový parametr v čase $t = t_{fin}$ na mřížce $\Delta\ell_r$ označíme $\phi_{\Delta\ell_r}$.

Použili jsme celkem čtyři způsoby výpočtu chyb

$$L_k^0(\phi_{\Delta\ell_r}) = \left(\frac{\sum_{i,j=0}^{32r} |\phi_{\Delta\ell_r}(\mathbf{x}_{ij}) - \phi_{\Delta\ell_r}^0(\mathbf{x}_{ij})|^k}{\sum_{i,j=0}^{32r} |\phi_{\Delta\ell_r}^0(\mathbf{x}_{ij})|^k} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (5.6a)$$

$$L_k(\phi_{\Delta\ell_r}) = \left(\frac{\sum_{i,j=0}^{32r} |\phi_{\Delta\ell_r}(\mathbf{x}_{ij}) - \phi_{\Delta\ell_{64}}(\mathbf{x}_{ij})|^k (\Delta x_f^{\Delta\ell_r})^2}{\sum_{i,j=0}^{32r} |\phi_{\Delta\ell_{64}}(\mathbf{x}_{ij})|^k (\Delta x_f^{\Delta\ell_{64}})^2} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (5.6b)$$

kde $\Delta x_f^{\Delta\ell_r}$ je fyzikální vzdálenost mezi body mřížky $\Delta\ell_r$. Pomocí těchto chyb jsou vypočítány experimentální řady konvergence [22]

$$\text{EOC}_k(\Delta\ell_r, \Delta\ell_s) = \frac{\ln L_k(\phi_{\Delta\ell_r}) - \ln L_k(\phi_{\Delta\ell_s})}{\ln \Delta x_f^{\Delta\ell_r} - \ln \Delta x_f^{\Delta\ell_s}}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (5.7a)$$

$$\text{EOC}_k^0(\Delta\ell_r, \Delta\ell_s) = \frac{\ln L_k^0(\phi_{\Delta\ell_r}) - \ln L_k^0(\phi_{\Delta\ell_s})}{\ln \Delta x_f^{\Delta\ell_r} - \ln \Delta x_f^{\Delta\ell_s}}, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (5.7b)$$

5.3 Úlohy

Pro ověření schopnosti mřížkové Boltzmannovy metody řešit modifikovanou Allenovu-Cahnovu rovnici (3.14) jsme naši implementaci numerického schématu otestovali na různých úlohách, viz. Tab. 5.1.

Testy byly provedeny na čtvercové oblasti Ω , jejíž rozměr byl zvolen jako charakteristická délka $l_{f,ch}$, tzn. $\Omega = (0, l_{f,ch}) \times (0, l_{f,ch})$. Parametry v Tab. 5.2 jsou společné pro všechny testovací úlohy. Jak jsme již zmínili v Sekci 5.2, *inicializaci* všech úloh jsme prováděli pomocí (3.10). Na všechny úlohy jsme aplikovali periodické okrajové podmínky. Jako ukončující podmínku jsme použili $t = t_{fin}$.

| | | | | | |
|------------|-------|-----|------------|------|-----------------------------------|
| $l_{f,ch}$ | 1 | [m] | $u_{f,ch}$ | 100 | [m s ⁻¹] |
| ξ_f | 0.03 | [m] | M_f | 0.05 | [m ² s ⁻¹] |
| M_{LB} | 0.001 | [-] | Pe | 60 | [-] |

Tab. 5.2: Tabulka společných parametrů pro všechny úlohy

Pro lepší orientaci v textu budeme zkratkou FD označovat normály počítané dle definice pomocí konečných diferencí (5.3a) při μ -regularizaci, resp. (5.5a) při ε -regularizaci. G značí použití vzorců (5.3b) při μ -regularizaci a (5.5b) při ε -regularizaci.

LBM je metoda druhého řádu pro řešení advekční-difuzní rovnice [18]. Očekáváme, že bychom se měli dostat k podobnému řádu i při sledování rozhraní mezi dvěma fázemi. Z tohoto důvodu jsme v tabulkách označili hodnoty experimentálních řádů konvergence v intervalu $\langle 1.7, 2.3 \rangle$ zeleně. Kladné hodnoty blízké nule, tj. v intervalu $\langle 0, 0.3 \rangle$ jsme označili žlutě a záporné hodnoty jsme označili červeně.

5.3.1 Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při diagonální translaci

Úloha 1

V této Úloze bylo rozhraní ve tvaru kružnice o poloměru R_f se středem $\mathbf{S} = (0.5l_{f,ch}, 0.5l_{f,ch})^T$ posouváno rychlostním polem \mathbf{u}_f . Průběh testu je znázorněn na Obr. 5.1.

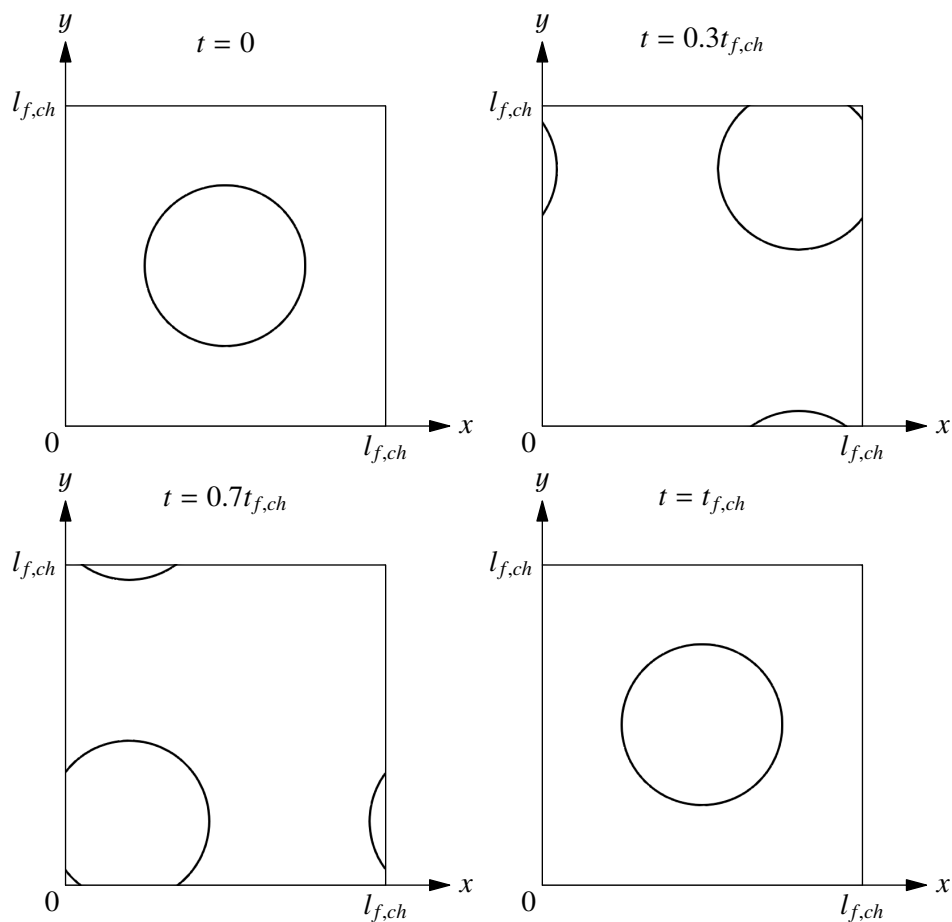
- Rozhraní v čase $t = 0$:

$$\Gamma(0) = \{(x, y) \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{S}\| = R_f\}.$$

| | | |
|-----------|------|-----|
| R_f | 0.25 | [m] |
| t_{fin} | 0.1 | [s] |

- Rychlostní pole:

$$\mathbf{u}_f = (u_{f,ch}, u_{f,ch})^T.$$



Obr. 5.1: Průběh testu **Úlohy 1**. Na obrázcích vidíme rozhraní, tj. nulovou vrstevnici stavového parametru $\phi = 0$. Je zobrazena pouze první desetina výpočetního času. Průběh naznačený na obrázcích se desetkrát opakuje.

V **Úloze 1** jsme použili čtyři regularizace: μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$, $\mu = 10^{-9}$ a ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-9}$. Předtím, než okomentujeme jednotlivé regularizace, zmíníme, že v případě regularizací s $\mu = \varepsilon = 10^{-9}$ vycházejí chyby pro *SRT-LBM* nižší než chyby pro *CLBM*, viz. Tab. 5.4, 5.6. Na Obr. 5.3 lze vidět, že oproti *SRT-LBM* má rozhraní pro *CLBM* na nejhrubší mřížce tendenci deformovat se do čtverce (obrázky pro *CLBM FD* vycházejí podobně jako pro *CLBM G*). Tento jev pozorujeme i na mřížkách $\Delta\ell_2$ a $\Delta\ell_4$. Důsledek tohoto pozorování vidíme na Obr. 5.4, kde tvar rozhraní pro *SRT-LBM* na mřížce $\Delta\ell_2$ se podobá tvaru rozhraní pro *CLBM* na mřížce $\Delta\ell_8$ (pro *CLBM* vypadají obrázky pro *G* a *FD* podobně, ε -regularizace pro *SRT-LBM*, *FD* i *G* vypadá podobně jako μ -regularizace pro *SRT-LBM*, *G*). V tabulkách také vidíme, že chyby na těchto mřížkách jsou stejného řádu. Tento jev je pravděpodobně důsledkem manipulací hodnot k_{12}^{eq} a k_{21}^{eq} . V [12], kde použili pro výpočty *SRT-LBM*, dosadili za tyto momenty výrazy (4.9g) a (4.9h), aby optimalizovali izotropii. Při *CLBM* jsme nastavili $\omega_{12} = \omega_{21} = 1$ a tím jsme změnili velikost vlivu, který k_{12}^{eq} a k_{21}^{eq} mají na kolizní operátor (4.8).

Případ: $\mu = 10^{-2}$

V Tab. 5.3 vidíme, že některé experimentální řady konvergence pro chyby vypočítané pomocí porovnání s počáteční podmínkou, tj. $EOC_i^0(h_{2r}, h_r)$, $i \in \{1, 2\}$, vycházejí záporné. Tato skutečnost znamená, že od uvedených r úloha diverguje. Domníváme se, že pozorovaný jev je důsledkem příliš velkého μ .

Se zvýšením μ klesnou hodnoty rovnovážných centrálních momentů a rovnovážné distribuční funkce (5.4). To znamená, že klesne hodnota členu $n \frac{1-4\phi^2}{\xi}$, který působí proti směru růstu stavového parametru ϕ . To má za následek vzdalování vrstevnic na celé oblasti Ω pro oba kolizní operátory a způsoby výpočtu normál, jak je vidět na Obr. 5.2a, 5.2c. Obrázky pro *CLBM* vypadají podobně jako pro *SRT-LBM*. Hodnoty experimentálních řádů konvergence na hrubých mřížkách jsou pravděpodobně kladné kvůli nedostatku informací pro simulaci hladkého přechodu mezi fázemi.

Z důvodu jednoduché geometrie rozhraní a tvaru rychlostního pole **Úlohy 1** není tento jev dobře pozorovatelný na tvaru rozhraní. V **Úloze 2**, kde má rozhraní a rychlostní pole složitější tvar, je efekt výraznější.

Nyní se podíváme na chyby vypočtené pomocí srovnání s řešením na nejjemnější mřížce, tj. L_1 , L_2 . Experimentální řady konvergence sice nejsou záporné, ale až na výjimky jsou menší než prvního řádu. V některých případech se blíží k nule. Tento jev je také nejspíše způsoben volbou příliš velkého μ .

Případ: $\mu = 10^{-9}$

Na Obr. 5.2b, 5.2d vidíme, že se nám oproti μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$ méně vzdalují vrstevnice. Vzdalování pozorujeme pouze pro *G*. Obrázky pro *CLBM* vycházejí podobně. Experimentální řady konvergence nám již nevycházejí ani záporné ani blízké nule, viz. Tab. 5.4.

Z hodnot chyb a experimentálních řádů konvergence usuzujeme, že **Úloha 1** při μ -regularizaci s $\mu = 10^{-9}$ konverguje rychlostí druhého řádu. Podotkneme ještě, že experimentální řady konvergence na jemnějších mřížkách pro *SRT-LBM* jsou podobné stejným experimentálním řádům konvergence vypočtených při ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-9}$.

Případ: $\varepsilon = 10^{-2}$

Při této regularizaci vyšly podobně jako při μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$ experimentální řady konvergence pro dostatečně velké r záporné, viz. Tab. 5.5. Domníváme se, že to je podobně jako při μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$ důsledkem příliš vysokého ε . Při této regularizaci pokládáme $n \frac{1-4\phi^2}{\xi} = 0$ pro $\phi > 0.49$. To znamená, že na intervalu $\phi \in (0.49, 0.5)$ nepůsobí proti gradientu stavového parametru $\nabla\phi$ žádná síla, tj. vrstevnice s $\phi > 0.49$ se nám budou vzdalovat, viz. Obr. 5.2e. Když porovnáme Obr. 5.2e

s Obr. 5.2a, 5.2c, tak zjistíme, že při ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-2}$ pozorujeme menší vliv tohoto jevu než při μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$, což je znázorněno polohou vrstevnic $\phi = 0.5 - 10^{-2}$ a $\phi = 0.5 - 10^{-5}$. Obr. 5.2e je podobný pro ostatní kombinace kolizního operátoru a výpočtu normál.

Experimentální řády konvergence chyb L_1 , L_2 v Tab. 5.5 již oproti μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$ nevycházejí blízké k nule. Některé hodnoty experimentálních řádů konvergence se pohybují kolem druhého řádu, který od této metody očekáváme. Pro *CLBM* experimentální řády konvergence rostou a převýší hladinu 2.3, a proto můžeme říct, že chyby L_1 , L_2 konvergují rychlostí druhého řádu pro *CLBM*. Ostatní hodnoty v intervalu $\langle 1.7, 2.3 \rangle$ lze označit za výchyly.

Případ: $\varepsilon = 10^{-9}$

V této regularizaci jsme snížili hodnotu ε na $\varepsilon = 10^{-9}$. Důsledek tohoto snížení lze pozorovat na Obr. 5.2f. Obrázky pro ostatní kombinace kolizního operátoru a způsobu výpočtu normál vypadají podobně. Vzdalování vrstevnic, které jsme pozorovali pro μ - a ε -regularizace s μ , $\varepsilon = 10^{-2}$ a μ -regularizaci s $\mu = 10^{-9}$ pro *G* již pro ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-9}$ nepozorujeme.

Z hodnot chyb a experimentálních řádů konvergence v Tab. 5.6 usuzujeme, že **Úloha 1** při ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-9}$ konverguje rychlostí druhého řádu. Podotkneme ještě, že experimentální řády konvergence na jemnějších mřížkách pro *SRT-LBM* jsou podobné experimentálním řádům konvergence vypočtených při μ -regularizaci s $\mu = 10^{-9}$.

| | SRT-LBM | | | | CLBM | | | |
|-----|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | FD | | G | | FD | | G | |
| r | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 |
| 1 | $1.14 \cdot 10^{-1}$ | | $1.76 \cdot 10^{-1}$ | | $1.50 \cdot 10^{-1}$ | | $1.79 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $2.61 \cdot 10^{-2}$ | 2.13 | $2.21 \cdot 10^{-2}$ | 2.99 | $9.63 \cdot 10^{-2}$ | 0.64 | $9.54 \cdot 10^{-2}$ | 0.91 |
| 4 | $2.78 \cdot 10^{-3}$ | 3.23 | $2.04 \cdot 10^{-2}$ | 0.11 | $4.60 \cdot 10^{-2}$ | 1.07 | $4.63 \cdot 10^{-2}$ | 1.04 |
| 8 | $6.28 \cdot 10^{-3}$ | -1.18 | $4.17 \cdot 10^{-2}$ | -1.03 | $1.44 \cdot 10^{-2}$ | 1.67 | $3.17 \cdot 10^{-2}$ | 0.55 |
| 16 | $1.33 \cdot 10^{-2}$ | -1.08 | $9.18 \cdot 10^{-2}$ | -1.14 | $9.09 \cdot 10^{-3}$ | 0.67 | $9.13 \cdot 10^{-2}$ | -1.53 |
| 32 | $2.73 \cdot 10^{-2}$ | -1.03 | $1.63 \cdot 10^{-1}$ | -0.83 | $2.54 \cdot 10^{-2}$ | -1.48 | $1.63 \cdot 10^{-1}$ | -0.84 |
| 64 | $5.74 \cdot 10^{-2}$ | -1.07 | $1.95 \cdot 10^{-1}$ | -0.26 | $5.69 \cdot 10^{-2}$ | -1.16 | $1.95 \cdot 10^{-1}$ | -0.26 |
| r | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 |
| 1 | $1.90 \cdot 10^{-1}$ | | $2.85 \cdot 10^{-1}$ | | $2.65 \cdot 10^{-1}$ | | $2.95 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $6.43 \cdot 10^{-2}$ | 1.56 | $5.00 \cdot 10^{-2}$ | 2.51 | $2.07 \cdot 10^{-1}$ | 0.35 | $2.10 \cdot 10^{-1}$ | 0.49 |
| 4 | $5.06 \cdot 10^{-3}$ | 3.67 | $3.20 \cdot 10^{-2}$ | 0.65 | $9.84 \cdot 10^{-2}$ | 1.07 | $1.07 \cdot 10^{-1}$ | 0.98 |
| 8 | $9.26 \cdot 10^{-3}$ | -0.87 | $6.44 \cdot 10^{-2}$ | -1.01 | $3.17 \cdot 10^{-2}$ | 1.63 | $6.34 \cdot 10^{-2}$ | 0.75 |
| 16 | $1.98 \cdot 10^{-2}$ | -1.10 | $1.48 \cdot 10^{-1}$ | -1.21 | $1.57 \cdot 10^{-2}$ | 1.01 | $1.50 \cdot 10^{-1}$ | -1.24 |
| 32 | $4.14 \cdot 10^{-2}$ | -1.06 | $2.63 \cdot 10^{-1}$ | -0.83 | $3.86 \cdot 10^{-2}$ | -1.30 | $2.63 \cdot 10^{-1}$ | -0.82 |
| 64 | $9.01 \cdot 10^{-2}$ | -1.12 | $3.07 \cdot 10^{-1}$ | -0.22 | $8.93 \cdot 10^{-2}$ | -1.21 | $3.07 \cdot 10^{-1}$ | -0.22 |
| r | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 |
| 1 | $1.50 \cdot 10^{-1}$ | | $3.68 \cdot 10^{-1}$ | | $1.74 \cdot 10^{-1}$ | | $3.40 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $7.02 \cdot 10^{-2}$ | 1.09 | $2.52 \cdot 10^{-1}$ | 0.55 | $1.32 \cdot 10^{-1}$ | 0.40 | $2.78 \cdot 10^{-1}$ | 0.29 |
| 4 | $5.85 \cdot 10^{-2}$ | 0.26 | $2.18 \cdot 10^{-1}$ | 0.21 | $9.29 \cdot 10^{-2}$ | 0.50 | $2.49 \cdot 10^{-1}$ | 0.16 |
| 8 | $5.45 \cdot 10^{-2}$ | 0.10 | $1.92 \cdot 10^{-1}$ | 0.18 | $6.70 \cdot 10^{-2}$ | 0.47 | $2.06 \cdot 10^{-1}$ | 0.28 |
| 16 | $4.72 \cdot 10^{-2}$ | 0.21 | $1.29 \cdot 10^{-1}$ | 0.57 | $5.14 \cdot 10^{-2}$ | 0.38 | $1.29 \cdot 10^{-1}$ | 0.68 |
| 32 | $3.25 \cdot 10^{-2}$ | 0.54 | $4.00 \cdot 10^{-2}$ | 1.69 | $3.37 \cdot 10^{-2}$ | 0.61 | $3.99 \cdot 10^{-2}$ | 1.69 |
| r | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 |
| 1 | $2.20 \cdot 10^{-1}$ | | $4.78 \cdot 10^{-1}$ | | $2.69 \cdot 10^{-1}$ | | $4.33 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $1.14 \cdot 10^{-1}$ | 0.94 | $3.75 \cdot 10^{-1}$ | 0.35 | $2.18 \cdot 10^{-1}$ | 0.30 | $3.88 \cdot 10^{-1}$ | 0.16 |
| 4 | $9.20 \cdot 10^{-2}$ | 0.31 | $3.28 \cdot 10^{-1}$ | 0.19 | $1.41 \cdot 10^{-1}$ | 0.63 | $3.60 \cdot 10^{-1}$ | 0.11 |
| 8 | $8.66 \cdot 10^{-2}$ | 0.09 | $2.89 \cdot 10^{-1}$ | 0.18 | $1.02 \cdot 10^{-1}$ | 0.47 | $3.07 \cdot 10^{-1}$ | 0.23 |
| 16 | $7.60 \cdot 10^{-2}$ | 0.19 | $1.90 \cdot 10^{-1}$ | 0.60 | $8.14 \cdot 10^{-2}$ | 0.32 | $1.90 \cdot 10^{-1}$ | 0.69 |
| 32 | $5.32 \cdot 10^{-2}$ | 0.52 | $5.64 \cdot 10^{-2}$ | 1.75 | $5.49 \cdot 10^{-2}$ | 0.57 | $5.62 \cdot 10^{-2}$ | 1.76 |

Tab. 5.3: Tabulka chyb a experimentálních řádů konvergence pro Úlohu 1 pro μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$.

| | SRT-LBM | | | | CLBM | | | |
|-----|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | FD | | G | | FD | | G | |
| r | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 |
| 1 | $1.20 \cdot 10^{-1}$ | | $2.22 \cdot 10^{-1}$ | | $1.47 \cdot 10^{-1}$ | | $2.18 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $3.11 \cdot 10^{-2}$ | 1.95 | $4.05 \cdot 10^{-2}$ | 2.46 | $9.73 \cdot 10^{-2}$ | 0.60 | $1.10 \cdot 10^{-1}$ | 0.99 |
| 4 | $1.17 \cdot 10^{-3}$ | 4.73 | $1.46 \cdot 10^{-3}$ | 4.79 | $5.77 \cdot 10^{-2}$ | 0.75 | $6.05 \cdot 10^{-2}$ | 0.86 |
| 8 | $1.98 \cdot 10^{-4}$ | 2.56 | $1.97 \cdot 10^{-4}$ | 2.90 | $1.90 \cdot 10^{-2}$ | 1.60 | $1.95 \cdot 10^{-2}$ | 1.63 |
| 16 | $4.81 \cdot 10^{-5}$ | 2.04 | $4.80 \cdot 10^{-5}$ | 2.03 | $2.67 \cdot 10^{-3}$ | 2.83 | $2.68 \cdot 10^{-3}$ | 2.87 |
| 32 | $1.20 \cdot 10^{-5}$ | 2.01 | $1.20 \cdot 10^{-5}$ | 2.00 | $5.09 \cdot 10^{-4}$ | 2.39 | $5.10 \cdot 10^{-4}$ | 2.39 |
| 64 | $2.99 \cdot 10^{-6}$ | 2.00 | $3.02 \cdot 10^{-6}$ | 1.99 | $1.32 \cdot 10^{-4}$ | 1.95 | $1.32 \cdot 10^{-4}$ | 1.95 |
| r | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 |
| 1 | $1.97 \cdot 10^{-1}$ | | $3.64 \cdot 10^{-1}$ | | $2.72 \cdot 10^{-1}$ | | $3.73 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $7.75 \cdot 10^{-2}$ | 1.35 | $7.96 \cdot 10^{-2}$ | 2.19 | $2.34 \cdot 10^{-1}$ | 0.22 | $2.61 \cdot 10^{-1}$ | 0.51 |
| 4 | $3.84 \cdot 10^{-3}$ | 4.33 | $4.21 \cdot 10^{-3}$ | 4.24 | $1.42 \cdot 10^{-1}$ | 0.72 | $1.55 \cdot 10^{-1}$ | 0.76 |
| 8 | $6.50 \cdot 10^{-4}$ | 2.56 | $6.39 \cdot 10^{-4}$ | 2.72 | $4.50 \cdot 10^{-2}$ | 1.66 | $4.74 \cdot 10^{-2}$ | 1.71 |
| 16 | $1.56 \cdot 10^{-4}$ | 2.06 | $1.55 \cdot 10^{-4}$ | 2.04 | $7.69 \cdot 10^{-3}$ | 2.55 | $7.87 \cdot 10^{-3}$ | 2.59 |
| 32 | $3.87 \cdot 10^{-5}$ | 2.01 | $3.86 \cdot 10^{-5}$ | 2.01 | $1.82 \cdot 10^{-3}$ | 2.08 | $1.83 \cdot 10^{-3}$ | 2.11 |
| 64 | $9.66 \cdot 10^{-6}$ | 2.00 | $9.64 \cdot 10^{-6}$ | 2.00 | $4.84 \cdot 10^{-4}$ | 1.91 | $4.84 \cdot 10^{-4}$ | 1.91 |
| r | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 |
| 1 | $1.20 \cdot 10^{-1}$ | | $2.23 \cdot 10^{-1}$ | | $1.48 \cdot 10^{-1}$ | | $2.19 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $3.11 \cdot 10^{-2}$ | 1.95 | $4.05 \cdot 10^{-2}$ | 2.46 | $9.73 \cdot 10^{-2}$ | 0.60 | $1.10 \cdot 10^{-1}$ | 0.99 |
| 4 | $1.17 \cdot 10^{-3}$ | 4.74 | $1.46 \cdot 10^{-3}$ | 4.79 | $5.77 \cdot 10^{-2}$ | 0.75 | $6.05 \cdot 10^{-2}$ | 0.86 |
| 8 | $1.92 \cdot 10^{-4}$ | 2.60 | $1.91 \cdot 10^{-4}$ | 2.93 | $1.90 \cdot 10^{-2}$ | 1.60 | $1.95 \cdot 10^{-2}$ | 1.63 |
| 16 | $4.23 \cdot 10^{-5}$ | 2.18 | $4.22 \cdot 10^{-5}$ | 2.18 | $2.55 \cdot 10^{-3}$ | 2.90 | $2.56 \cdot 10^{-3}$ | 2.93 |
| 32 | $7.25 \cdot 10^{-6}$ | 2.54 | $7.24 \cdot 10^{-6}$ | 2.54 | $3.75 \cdot 10^{-4}$ | 2.77 | $3.76 \cdot 10^{-4}$ | 2.77 |
| r | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 |
| 1 | $1.97 \cdot 10^{-1}$ | | $3.64 \cdot 10^{-1}$ | | $2.72 \cdot 10^{-1}$ | | $3.73 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $7.75 \cdot 10^{-2}$ | 1.35 | $7.96 \cdot 10^{-2}$ | 2.19 | $2.34 \cdot 10^{-1}$ | 0.22 | $2.61 \cdot 10^{-1}$ | 0.51 |
| 4 | $3.82 \cdot 10^{-3}$ | 4.34 | $4.19 \cdot 10^{-3}$ | 4.25 | $1.42 \cdot 10^{-1}$ | 0.72 | $1.55 \cdot 10^{-1}$ | 0.76 |
| 8 | $6.26 \cdot 10^{-4}$ | 2.61 | $6.14 \cdot 10^{-4}$ | 2.77 | $4.48 \cdot 10^{-2}$ | 1.66 | $4.72 \cdot 10^{-2}$ | 1.71 |
| 16 | $1.31 \cdot 10^{-4}$ | 2.26 | $1.30 \cdot 10^{-4}$ | 2.24 | $7.28 \cdot 10^{-3}$ | 2.62 | $7.47 \cdot 10^{-3}$ | 2.66 |
| 32 | $1.94 \cdot 10^{-5}$ | 2.75 | $1.93 \cdot 10^{-5}$ | 2.75 | $1.33 \cdot 10^{-3}$ | 2.46 | $1.33 \cdot 10^{-3}$ | 2.49 |

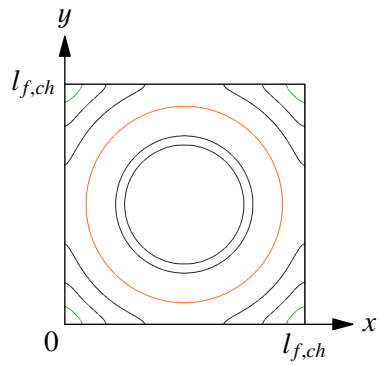
Tab. 5.4: Tabulka chyb a experimentálních řádů konvergence pro **Úlohu 1** pro μ -regularizaci s $\mu = 10^{-9}$.

| | SRT-LBM | | | | CLBM | | | |
|-----|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | FD | | G | | FD | | G | |
| r | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 |
| 1 | $1.85 \cdot 10^{-1}$ | | $1.70 \cdot 10^{-1}$ | | $2.42 \cdot 10^{-1}$ | | $2.03 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $1.63 \cdot 10^{-2}$ | 3.50 | $1.51 \cdot 10^{-2}$ | 3.49 | $1.08 \cdot 10^{-1}$ | 1.16 | $1.03 \cdot 10^{-1}$ | 0.99 |
| 4 | $4.36 \cdot 10^{-3}$ | 1.91 | $4.34 \cdot 10^{-3}$ | 1.80 | $4.95 \cdot 10^{-2}$ | 1.12 | $5.04 \cdot 10^{-2}$ | 1.03 |
| 8 | $5.20 \cdot 10^{-3}$ | -0.25 | $5.20 \cdot 10^{-3}$ | -0.26 | $1.49 \cdot 10^{-2}$ | 1.73 | $1.52 \cdot 10^{-2}$ | 1.73 |
| 16 | $5.56 \cdot 10^{-3}$ | -0.10 | $5.56 \cdot 10^{-3}$ | -0.10 | $3.88 \cdot 10^{-3}$ | 1.94 | $3.92 \cdot 10^{-3}$ | 1.96 |
| 32 | $5.73 \cdot 10^{-3}$ | -0.04 | $5.73 \cdot 10^{-3}$ | -0.04 | $4.98 \cdot 10^{-3}$ | -0.36 | $4.98 \cdot 10^{-3}$ | -0.34 |
| 64 | $5.81 \cdot 10^{-3}$ | -0.02 | $5.81 \cdot 10^{-3}$ | -0.02 | $5.51 \cdot 10^{-3}$ | -0.15 | $5.51 \cdot 10^{-3}$ | -0.15 |
| r | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 |
| 1 | $2.70 \cdot 10^{-1}$ | | $2.61 \cdot 10^{-1}$ | | $3.29 \cdot 10^{-1}$ | | $3.11 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $3.76 \cdot 10^{-2}$ | 2.84 | $3.27 \cdot 10^{-2}$ | 3.00 | $2.13 \cdot 10^{-1}$ | 0.62 | $2.18 \cdot 10^{-1}$ | 0.52 |
| 4 | $6.95 \cdot 10^{-3}$ | 2.44 | $6.86 \cdot 10^{-3}$ | 2.25 | $1.02 \cdot 10^{-1}$ | 1.06 | $1.07 \cdot 10^{-1}$ | 1.03 |
| 8 | $7.47 \cdot 10^{-3}$ | -0.10 | $7.47 \cdot 10^{-3}$ | -0.12 | $3.26 \cdot 10^{-2}$ | 1.65 | $3.39 \cdot 10^{-2}$ | 1.66 |
| 16 | $7.95 \cdot 10^{-3}$ | -0.09 | $7.95 \cdot 10^{-3}$ | -0.10 | $8.09 \cdot 10^{-3}$ | 2.01 | $8.28 \cdot 10^{-3}$ | 2.03 |
| 32 | $8.20 \cdot 10^{-3}$ | -0.04 | $8.20 \cdot 10^{-3}$ | -0.04 | $7.31 \cdot 10^{-3}$ | 0.15 | $7.32 \cdot 10^{-3}$ | 0.18 |
| 64 | $8.31 \cdot 10^{-3}$ | -0.02 | $8.31 \cdot 10^{-3}$ | -0.02 | $7.90 \cdot 10^{-3}$ | -0.11 | $7.90 \cdot 10^{-3}$ | -1.09 |
| r | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 |
| 1 | $1.90 \cdot 10^{-1}$ | | $1.75 \cdot 10^{-1}$ | | $2.46 \cdot 10^{-1}$ | | $2.06 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $2.01 \cdot 10^{-2}$ | 3.24 | $1.95 \cdot 10^{-2}$ | 3.17 | $1.11 \cdot 10^{-1}$ | 1.15 | $1.05 \cdot 10^{-1}$ | 0.97 |
| 4 | $2.42 \cdot 10^{-3}$ | 3.05 | $2.39 \cdot 10^{-3}$ | 3.03 | $5.33 \cdot 10^{-2}$ | 1.06 | $5.41 \cdot 10^{-2}$ | 0.96 |
| 8 | $7.11 \cdot 10^{-4}$ | 1.77 | $7.01 \cdot 10^{-4}$ | 1.77 | $1.84 \cdot 10^{-2}$ | 1.53 | $1.87 \cdot 10^{-2}$ | 1.54 |
| 16 | $2.62 \cdot 10^{-4}$ | 1.44 | $2.59 \cdot 10^{-4}$ | 1.44 | $4.04 \cdot 10^{-3}$ | 2.19 | $4.07 \cdot 10^{-3}$ | 2.20 |
| 32 | $8.54 \cdot 10^{-5}$ | 1.62 | $8.58 \cdot 10^{-5}$ | 1.59 | $7.71 \cdot 10^{-4}$ | 2.39 | $7.74 \cdot 10^{-4}$ | 2.39 |
| r | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 |
| 1 | $2.75 \cdot 10^{-1}$ | | $2.67 \cdot 10^{-1}$ | | $3.32 \cdot 10^{-1}$ | | $3.14 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $4.05 \cdot 10^{-2}$ | 2.76 | $3.65 \cdot 10^{-2}$ | 2.87 | $2.15 \cdot 10^{-1}$ | 0.63 | $2.19 \cdot 10^{-1}$ | 0.52 |
| 4 | $4.70 \cdot 10^{-3}$ | 3.11 | $4.57 \cdot 10^{-3}$ | 2.99 | $1.06 \cdot 10^{-1}$ | 1.03 | $1.10 \cdot 10^{-1}$ | 0.99 |
| 8 | $1.20 \cdot 10^{-3}$ | 1.96 | $1.17 \cdot 10^{-3}$ | 1.96 | $3.63 \cdot 10^{-2}$ | 1.54 | $3.74 \cdot 10^{-2}$ | 1.56 |
| 16 | $4.05 \cdot 10^{-4}$ | 1.57 | $4.01 \cdot 10^{-4}$ | 1.55 | $8.42 \cdot 10^{-3}$ | 2.11 | $8.57 \cdot 10^{-3}$ | 2.13 |
| 32 | $1.42 \cdot 10^{-4}$ | 1.52 | $1.48 \cdot 10^{-4}$ | 1.44 | $1.65 \cdot 10^{-3}$ | 2.35 | $1.66 \cdot 10^{-3}$ | 2.37 |

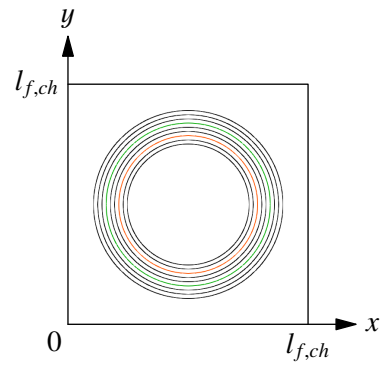
Tab. 5.5: Tabulka chyb a experimentálních řádů konvergence pro **Úlohu 1** pro ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-2}$.

| | SRT-LBM | | | | CLBM | | | |
|-----|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | FD | | G | | FD | | G | |
| r | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 |
| 1 | $1.88 \cdot 10^{-1}$ | | $1.74 \cdot 10^{-1}$ | | $2.47 \cdot 10^{-1}$ | | $2.04 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $1.93 \cdot 10^{-2}$ | 3.29 | $1.63 \cdot 10^{-2}$ | 3.42 | $1.11 \cdot 10^{-1}$ | 1.15 | $1.03 \cdot 10^{-1}$ | 0.98 |
| 4 | $1.17 \cdot 10^{-3}$ | 4.04 | $1.46 \cdot 10^{-3}$ | 3.48 | $4.97 \cdot 10^{-2}$ | 1.16 | $5.07 \cdot 10^{-2}$ | 1.03 |
| 8 | $1.98 \cdot 10^{-4}$ | 2.56 | $1.97 \cdot 10^{-4}$ | 2.89 | $1.52 \cdot 10^{-2}$ | 1.71 | $1.54 \cdot 10^{-2}$ | 1.72 |
| 16 | $4.81 \cdot 10^{-5}$ | 2.04 | $4.80 \cdot 10^{-5}$ | 2.03 | $2.37 \cdot 10^{-3}$ | 2.68 | $2.38 \cdot 10^{-3}$ | 2.69 |
| 32 | $1.20 \cdot 10^{-5}$ | 2.01 | $1.20 \cdot 10^{-5}$ | 2.01 | $5.09 \cdot 10^{-4}$ | 2.22 | $5.10 \cdot 10^{-4}$ | 2.22 |
| 64 | $2.99 \cdot 10^{-6}$ | 2.00 | $2.99 \cdot 10^{-6}$ | 2.00 | $1.32 \cdot 10^{-4}$ | 1.95 | $1.32 \cdot 10^{-4}$ | 1.95 |
| r | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 |
| 1 | $2.72 \cdot 10^{-1}$ | | $2.63 \cdot 10^{-1}$ | | $3.32 \cdot 10^{-1}$ | | $3.12 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $4.20 \cdot 10^{-2}$ | 2.69 | $3.31 \cdot 10^{-2}$ | 2.99 | $2.13 \cdot 10^{-1}$ | 0.64 | $2.17 \cdot 10^{-1}$ | 0.52 |
| 4 | $3.84 \cdot 10^{-3}$ | 3.45 | $4.27 \cdot 10^{-3}$ | 2.96 | $1.01 \cdot 10^{-1}$ | 1.08 | $1.06 \cdot 10^{-1}$ | 1.04 |
| 8 | $6.50 \cdot 10^{-4}$ | 2.56 | $6.39 \cdot 10^{-4}$ | 2.74 | $3.22 \cdot 10^{-2}$ | 1.65 | $3.34 \cdot 10^{-2}$ | 1.66 |
| 16 | $1.56 \cdot 10^{-4}$ | 2.06 | $1.55 \cdot 10^{-4}$ | 2.04 | $6.81 \cdot 10^{-3}$ | 2.24 | $6.92 \cdot 10^{-3}$ | 2.27 |
| 32 | $3.87 \cdot 10^{-5}$ | 2.01 | $3.86 \cdot 10^{-5}$ | 2.01 | $1.82 \cdot 10^{-3}$ | 1.90 | $1.83 \cdot 10^{-3}$ | 1.92 |
| 64 | $9.66 \cdot 10^{-6}$ | 2.00 | $9.64 \cdot 10^{-6}$ | 2.00 | $4.84 \cdot 10^{-4}$ | 1.91 | $4.84 \cdot 10^{-4}$ | 1.91 |
| r | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 |
| 1 | $1.89 \cdot 10^{-1}$ | | $1.74 \cdot 10^{-1}$ | | $2.47 \cdot 10^{-1}$ | | $2.05 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $1.93 \cdot 10^{-2}$ | 3.29 | $1.63 \cdot 10^{-2}$ | 3.42 | $1.11 \cdot 10^{-1}$ | 1.15 | $1.03 \cdot 10^{-1}$ | 0.98 |
| 4 | $1.16 \cdot 10^{-3}$ | 4.05 | $1.45 \cdot 10^{-3}$ | 3.48 | $4.97 \cdot 10^{-2}$ | 1.16 | $5.06 \cdot 10^{-2}$ | 1.03 |
| 8 | $1.92 \cdot 10^{-4}$ | 2.60 | $1.91 \cdot 10^{-4}$ | 2.93 | $1.51 \cdot 10^{-2}$ | 1.72 | $1.54 \cdot 10^{-2}$ | 1.72 |
| 16 | $4.23 \cdot 10^{-5}$ | 2.18 | $4.22 \cdot 10^{-5}$ | 2.18 | $2.24 \cdot 10^{-3}$ | 2.75 | $2.26 \cdot 10^{-3}$ | 2.77 |
| 32 | $7.25 \cdot 10^{-6}$ | 2.54 | $7.23 \cdot 10^{-6}$ | 2.55 | $3.75 \cdot 10^{-4}$ | 2.58 | $3.76 \cdot 10^{-4}$ | 2.59 |
| r | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 |
| 1 | $2.72 \cdot 10^{-1}$ | | $2.63 \cdot 10^{-1}$ | | $3.32 \cdot 10^{-1}$ | | $3.12 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $4.20 \cdot 10^{-2}$ | 2.69 | $3.31 \cdot 10^{-2}$ | 2.99 | $2.13 \cdot 10^{-1}$ | 0.64 | $2.17 \cdot 10^{-1}$ | 0.52 |
| 4 | $3.82 \cdot 10^{-3}$ | 3.46 | $4.25 \cdot 10^{-3}$ | 2.96 | $1.01 \cdot 10^{-1}$ | 1.08 | $1.05 \cdot 10^{-1}$ | 1.04 |
| 8 | $6.26 \cdot 10^{-4}$ | 2.61 | $6.14 \cdot 10^{-4}$ | 2.79 | $3.19 \cdot 10^{-2}$ | 1.66 | $3.31 \cdot 10^{-2}$ | 1.67 |
| 16 | $1.31 \cdot 10^{-4}$ | 2.26 | $1.30 \cdot 10^{-4}$ | 2.24 | $6.36 \cdot 10^{-3}$ | 2.33 | $6.47 \cdot 10^{-3}$ | 2.36 |
| 32 | $1.94 \cdot 10^{-5}$ | 2.75 | $1.93 \cdot 10^{-5}$ | 2.75 | $1.33 \cdot 10^{-3}$ | 2.26 | $1.33 \cdot 10^{-3}$ | 2.28 |

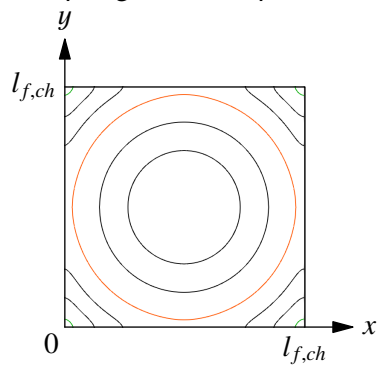
Tab. 5.6: Tabulka chyb a experimentálních řádů konvergence pro **Úlohu 1** pro ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-9}$.



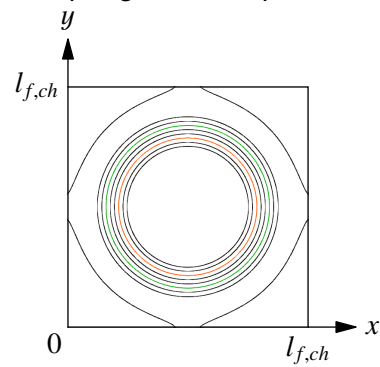
a: μ -regularizace s $\mu = 10^{-2}$, *SRT-LBM, FD*.



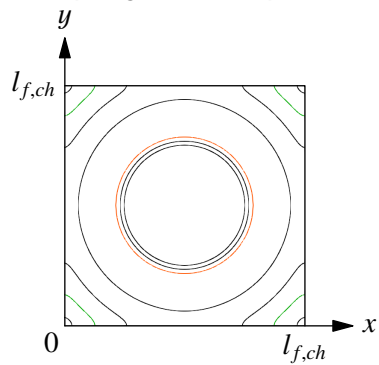
b: μ -regularizace s $\mu = 10^{-9}$, *SRT-LBM, FD*.



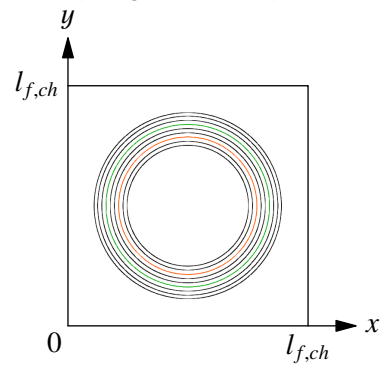
c: μ -regularizace s $\mu = 10^{-2}$, *SRT-LBM, G*.



d: μ -regularizace s $\mu = 10^{-9}$, *SRT-LBM, G*.



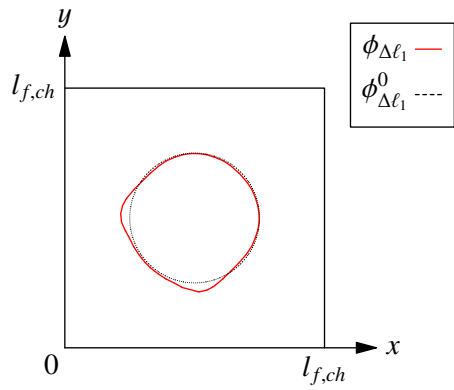
e: ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-2}$, *SRT-LBM, FD*.



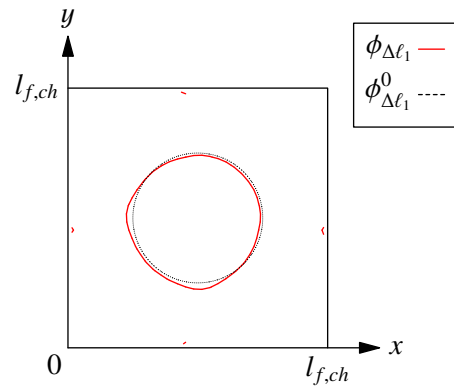
f: ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-9}$, *SRT-LBM, FD*.

| | |
|---|---|
| $\phi_{\Delta\ell_{64}} \in \{0\} \cup \{0.5 - 10^{-i} \mid i \in \{1, 3, 4, 6, 7, 8\}\}$ | — |
| $\phi_{\Delta\ell_{64}} = 0.5 - 10^{-2}$ | — |
| $\phi_{\Delta\ell_{64}} = 0.5 - 10^{-5}$ | — |

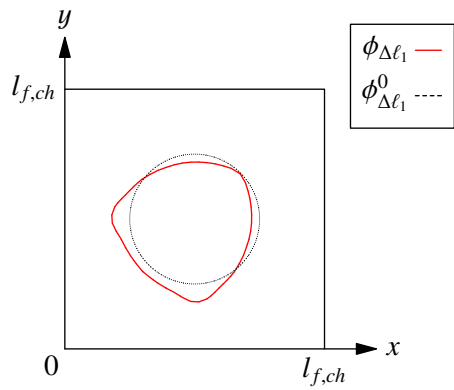
Obr. 5.2: Znázornění vrstevnic stavového parametru při poslední iteraci **Úlohy 1** na mřížce $\Delta\ell_{64}$.



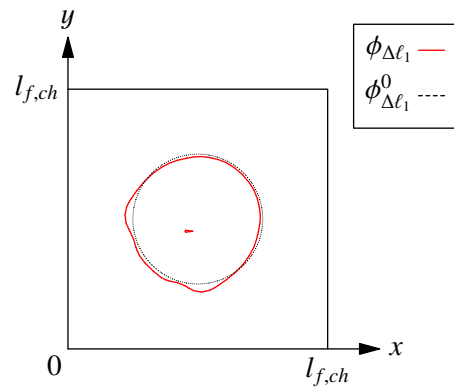
a: μ -regularizace, SRT-LBM, FD.



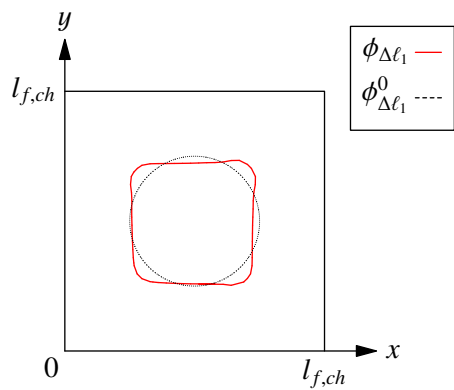
b: ε -regularizace, SRT-LBM, FD.



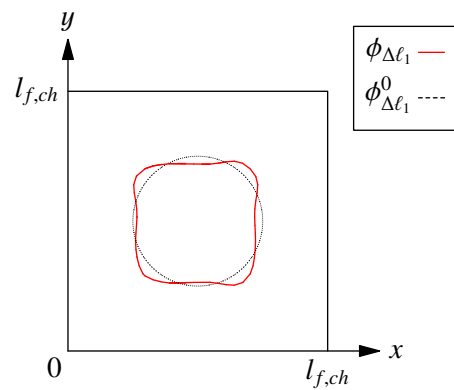
c: μ -regularizace, SRT-LBM, G.



d: ε -regularizace, SRT-LBM, G.

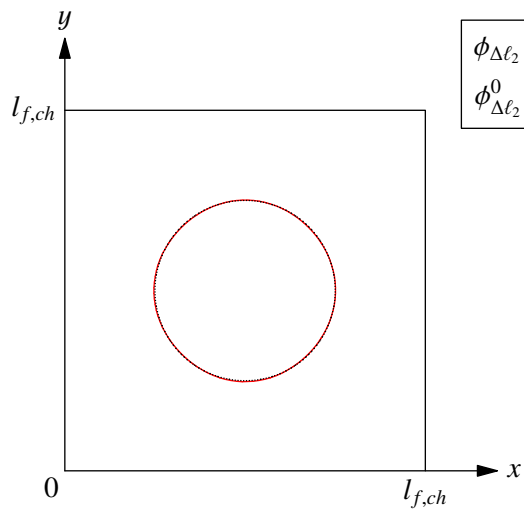


e: μ -regularizace, CLBM, FD.

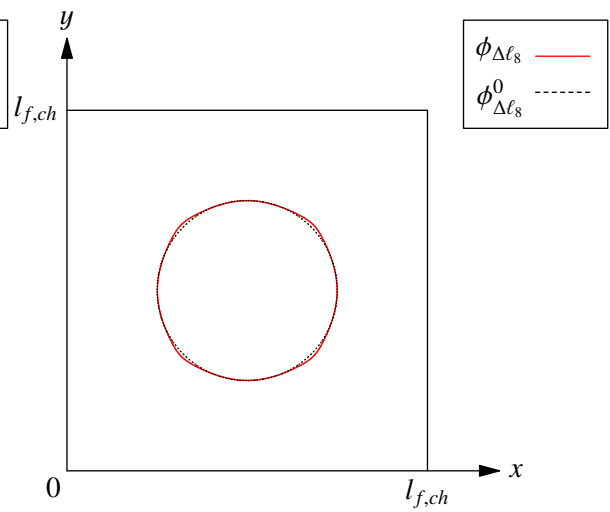


f: ε -regularizace, CLBM, FD.

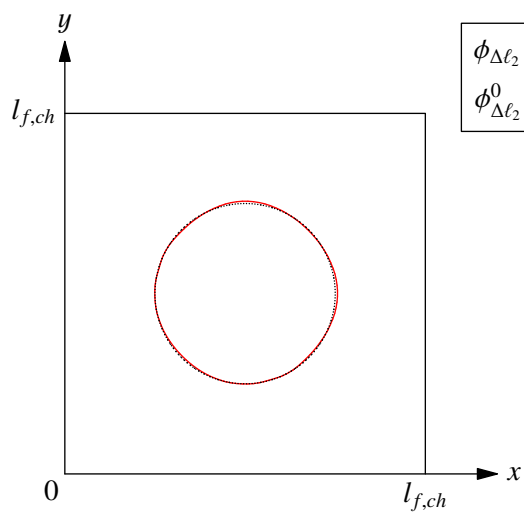
Obr. 5.3: Srovnání rozhraní, tj. nulové vrstevnice stavového parametru $\phi = 0$, na mřížce $\Delta \ell_1$ při poslední iteraci s počáteční podmínkou pro **Úlohu 1**.



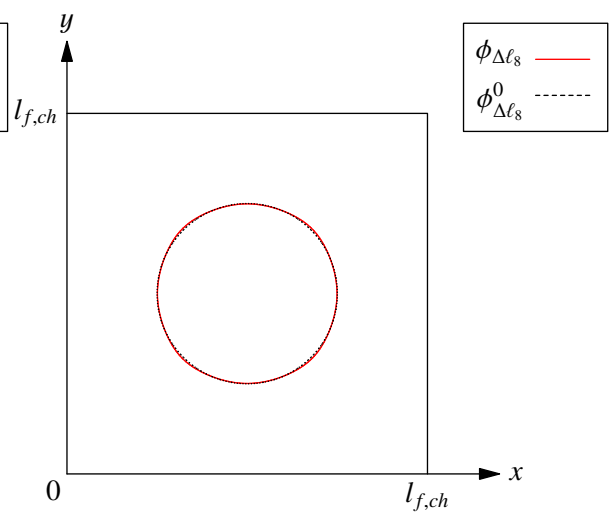
a: μ -regularizace, *SRT-LBM*, *G*.



b: μ -regularizace, *CLBM*, *FD*.



c: μ -regularizace, *SRT-LBM*, *FD*.



d: ε -regularizace, *CLBM*, *FD*.

Obr. 5.4: Rozdíl mezi srovnáním *SRT-LBM* a *CLBM* s počáteční podmínkou pro **Úlohu 1**. Na obrázcích je vykresleno rozhraní, tj. nulová vrstevnice stavového parametru $\phi = 0$.

5.3.2 Vývoj rozhraní ve tvaru Zalesakova disku v rotačním rychlostním poli

Úloha 2

V této Úloze byl Zalesakův disk o poloměru R_f se středem $\mathbf{S} = (0.5l_{f,ch}, 0.5l_{f,ch})^T$ a šířkou šterbiny $2w_f$ otáčen rychlostním polem u_f . Průběh testu je znázorněn na Obr. 5.5.

- Rozhraní v čase $t = 0$:

$$\Gamma(0) = \{(x, y) \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{S}\| = R_f\} \cup \{(x, 0) \mid x \in I_{slot,x}\} \cup \{(0.5l_{f,ch} - w_f, y) \mid y \in I_{slot,y}\} \\ \cup \{(0.5l_{f,ch} + w_f, y) \mid y \in I_{slot,y}\} \setminus \{(x, y) \mid x \in I_{slot,x}^c \wedge y \in (0, 0.4l_{f,ch})\},$$

$$I_{slot,x} = \langle 0.5l_{f,ch} - w_f, 0.5l_{f,ch} + w_f \rangle,$$

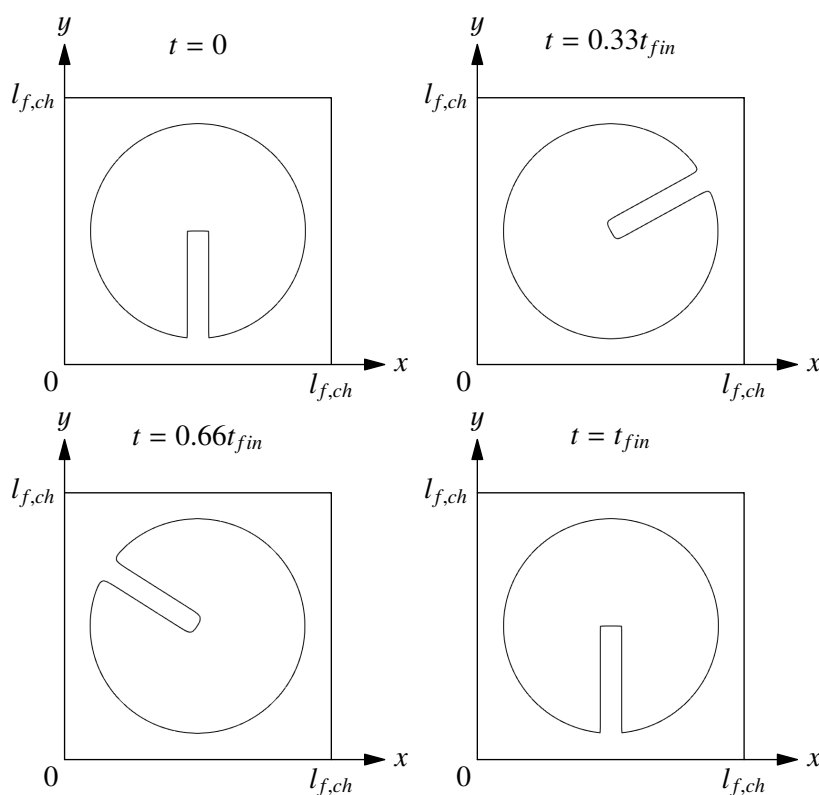
$$I_{slot,y} = \langle 0.5l_{f,ch} - \sqrt{R^2 - w^2}, 0.5l_{f,ch} \rangle.$$

- Rychlostní pole:

$$u_{f,x}(x, y) = -u_{f,ch}\pi\left(\frac{y}{l_{f,ch}} - \frac{1}{2}\right), \quad (5.8a)$$

$$u_{f,y}(x, y) = u_{f,ch}\pi\left(\frac{x}{l_{f,ch}} - \frac{1}{2}\right). \quad (5.8b)$$

| | | |
|-----------|------|-----|
| R_f | 0.4 | [m] |
| w_f | 0.04 | [m] |
| t_{fin} | 0.02 | [s] |



Obr. 5.5: Průběh testu **Úlohy 2**. Na obrázcích vidíme nulovou vrstevnici stavového parametru $\phi = 0$.

V **Úloze 2** jsme použili čtyři regularizace: μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$, $\mu = 10^{-8}$ a ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-8}$. Oproti předchozí úloze jsme nepoužili ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-9}$, jelikož při této regularizaci byl výpočet v důsledku dělení příliš malými hodnotami nestabilní. Pro srovnání μ -regularizace s ε -regularizací jsme také použili $\mu = 10^{-8}$. K nestabilitě výpočtu při $\varepsilon = 10^{-9}$ -regularizaci mohl přispět jev, který pozorujeme na obrázcích Obr. 5.6, 5.7. Vidíme, že stavový parametr jako funkce vzdálenosti od rozhraní není monotónní. Tento jev mohl vzniknout kombinací periodických okrajových podmínek, rychlostního pole (5.8) a volby regularizace.

Předtím, než okomentujeme jednotlivé regularizace, tak zmíníme, že se mřížka $\Delta\ell_1$ ukázala nestabilní pro *SRT-LBM*. Proto jsou chyby vypočtené na této mřížce pro *SRT-LBM* vysoké. Na hrubé mřížce $\Delta\ell_2$ není ve tvaru rozhraní znatelný rozdíl mezi jednotlivými regularizacemi. Pozorujeme také, že mimo mřížku $\Delta\ell_1$ nacházíme pro *SRT-LBM* menší deformace rozhraní než pro *CLBM*, viz. Obr. 5.8. To může být důsledkem poruchy izotropie, což jsme již zmínili v **Úloze 1**.

Případ: $\mu = 10^{-2}$

V Tab. 5.7 vidíme, že některé experimentální řády konvergence chyb vypočítaných pomocí porovnání s počáteční podmínkou, tj. $EOC_i^0(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$, $i \in \{1, 2\}$, vycházejí záporné. Tento jev jsme již zaznamenali při μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$ v **Úloze 1**. I v **Úloze 2** dospíváme k závěru, že tento jev je způsoben příliš velkým μ . Jev se projevuje vzdalováním vrstevnic, viz. Obr. 5.6a (obrázky vypadají podobně pro ostatní kombinace kolizního operátoru a způsobu výpočtu normál). Na této úloze lze efekt tohoto jevu pozorovat i na rozhraní. Na Obr. 5.10 vidíme větší deformaci rozhraní na mřížce $\Delta\ell_{64}$ než na $\Delta\ell_4$.

Experimentální řády konvergence chyb vypočítaných pomocí porovnáním s řešením na nejjemnější mřížce, tj. $EOC_i(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$, $i \in \{1, 2\}$, vycházejí záporné nebo blízké k nule. Stejně jako u chyb spočtených pomocí srovnání s počáteční podmínkou, i tady se domníváme, že je tento jev způsoben volbou vysokého μ .

Případ: $\mu = 10^{-8}$

Oproti předchozí regularizaci jsme snížili μ na hodnotu $\mu = 10^{-8}$. Z Obr. 5.6b (obrázek pro *CLBM*, *FD* vypadá podobně jako pro *SRT-LBM*, *FD*), 5.6c a 5.6d pozorujeme, že se nám při této regularizaci méně vzdalují vrstevnice. Mírný efekt zaznamenáváme pro *SRT-LBM*, *G* a *CLBM*, *G*. Oproti minulému případu nám také na nejjemnější mřížce v přiblížení na Obr. 5.9 tvar rozhraní v čase $t = t_{fin}$ kopíruje tvar rozhraní v čase $t = t_0$.

V Tab. 5.8 se nám již neobjevují záporné hodnoty experimentálních řádů konvergence. Očekávali jsme konvergenci druhého řádu. Tu získáváme u $EOC_1(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$ pro *CLBM*. Druhý řád konvergence také pozorujeme u dvou hodnot $EOC_i^0(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$, $i \in \{1, 2\}$, které můžeme označit za výchyly. Chyby mimo L_1 pro *CLBM* konvergují rychlostí prvního řádu.

Případ: $\varepsilon = 10^{-2}$

V Tab. 5.9 vidíme, že $EOC_k^0(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$, $k \in \{1, 2\}$ klesají s rostoucím r k nule. Domníváme se, že jde o stejný jev, který při ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-2}$ pozorujeme v **Úloze 1**. Pouze kvůli povaze **Úlohy 2**, především kratší době testu, vyšly experimentální řády konvergence až na $EOC_1^0(\Delta\ell_{64}, \Delta\ell_{32})$ pro *SRT-LBM*, *FD* kladné. Vzdalování vrstevnic lze pozorovat na Obr. 5.7a a 5.7c (obrázek pro *SRT-LBM*, *G*, resp. *CLBM*, *G* vyšel podobně jako pro *SRT-LBM*, *FD*, resp. *CLBM*, *FD*). Na rozhraní, tj. vrstevnici $\phi = 0$, by se tato deformace neměla vztahovat. To lze vidět na Obr. 5.9.

Pokud srovnáváme s řešením získaným na nejjemnější mřížce, tj. $EOC_k(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$, $k \in \{1, 2\}$, tak získáváme očekávaný druhý řád konvergence pouze u jediné hodnoty pro $EOC_2(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$, kterou mů-

žeme označit za výchylku. Pro $EOC_1(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$ získáváme druhý řád konvergence pro *SRT-LBM*, *G* a *CLBM*.

Případ: $\varepsilon = 10^{-8}$

V této regularizaci jsme snížili ε na hodnotu $\varepsilon = 10^{-8}$. Důsledkem tohoto snížení je, že se nám vrstevnice méně vzdalují, viz. Obr. 5.7b (obrázky pro *CLBM*, *FD* i *G* vypadají podobně). Menší efekt vzdalování vrstevnic pozorujeme na *SRT-LBM G*, viz. Obr. 5.7d. Stejně jako v předchozí regularizaci tvar rozhraní na nejjemnější mřížce v čase $t = t_{fin}$ kopíruje v přiblížení na Obr. 5.9 rozhraní počáteční podmínky.

Očekávaný druhý řád konvergence získáváme pouze pro $EOC_1(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$ pro *CLBM*, viz. Tab. 5.10. Druhého řádu také dosahují některé hodnoty $EOC_k^0(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$, $k \in \{1, 2\}$ a $EOC_2(\Delta\ell_{2r}, \Delta\ell_r)$, které lze označit za výchylky. Z výsledků usuzujeme, že úloha při ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-8}$ kromě chyby L_1 pro *CLBM* konverguje rychlostí prvního řádu.

| | SRT-LBM | | | | CLBM | | | |
|-----|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | FD | | G | | FD | | G | |
| r | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 |
| 1 | $6.70 \cdot 10^0$ | | $5.35 \cdot 10^0$ | | $1.73 \cdot 10^{-1}$ | | $2.00 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $2.35 \cdot 10^{-2}$ | 8.16 | $3.76 \cdot 10^{-2}$ | 7.15 | $1.01 \cdot 10^{-1}$ | 0.77 | $1.15 \cdot 10^{-1}$ | 0.80 |
| 4 | $4.33 \cdot 10^{-3}$ | 2.44 | $2.37 \cdot 10^{-2}$ | 0.67 | $4.81 \cdot 10^{-2}$ | 1.08 | $5.45 \cdot 10^{-2}$ | 1.07 |
| 8 | $5.49 \cdot 10^{-3}$ | -0.34 | $3.63 \cdot 10^{-2}$ | -0.62 | $1.67 \cdot 10^{-2}$ | 1.52 | $3.36 \cdot 10^{-2}$ | 0.70 |
| 16 | $1.08 \cdot 10^{-2}$ | -0.98 | $7.57 \cdot 10^{-2}$ | -1.06 | $9.36 \cdot 10^{-3}$ | 0.84 | $7.75 \cdot 10^{-2}$ | -1.20 |
| 32 | $2.26 \cdot 10^{-2}$ | -1.06 | $1.29 \cdot 10^{-1}$ | -0.77 | $2.16 \cdot 10^{-2}$ | -1.21 | $1.29 \cdot 10^{-1}$ | -0.74 |
| 64 | $4.86 \cdot 10^{-2}$ | -1.10 | $1.58 \cdot 10^{-1}$ | -0.29 | $4.84 \cdot 10^{-2}$ | -1.16 | $1.58 \cdot 10^{-1}$ | -0.29 |
| r | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 |
| 1 | $8.72 \cdot 10^0$ | | $7.62 \cdot 10^0$ | | $2.33 \cdot 10^{-1}$ | | $2.71 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $4.81 \cdot 10^{-2}$ | 7.50 | $6.45 \cdot 10^{-2}$ | 6.88 | $1.39 \cdot 10^{-1}$ | 0.75 | $1.66 \cdot 10^{-1}$ | 0.71 |
| 4 | $1.65 \cdot 10^{-2}$ | 1.55 | $3.73 \cdot 10^{-2}$ | 0.79 | $7.26 \cdot 10^{-2}$ | 0.94 | $9.24 \cdot 10^{-2}$ | 0.85 |
| 8 | $1.27 \cdot 10^{-2}$ | 0.37 | $5.58 \cdot 10^{-2}$ | -0.58 | $3.40 \cdot 10^{-2}$ | 1.10 | $6.30 \cdot 10^{-2}$ | 0.53 |
| 16 | $1.80 \cdot 10^{-2}$ | -0.50 | $1.18 \cdot 10^{-1}$ | -1.08 | $2.04 \cdot 10^{-2}$ | 0.73 | $1.22 \cdot 10^{-1}$ | -0.96 |
| 32 | $3.51 \cdot 10^{-2}$ | -0.96 | $2.02 \cdot 10^{-1}$ | -0.78 | $3.41 \cdot 10^{-2}$ | -0.74 | $2.03 \cdot 10^{-1}$ | -0.73 |
| 64 | $7.48 \cdot 10^{-2}$ | -1.09 | $2.45 \cdot 10^{-1}$ | -0.28 | $7.46 \cdot 10^{-2}$ | -1.14 | $2.45 \cdot 10^{-1}$ | -0.27 |
| r | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 |
| 1 | $7.00 \cdot 10^0$ | | $6.29 \cdot 10^0$ | | $1.50 \cdot 10^{-1}$ | | $1.44 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $5.64 \cdot 10^{-2}$ | 6.96 | $1.64 \cdot 10^{-1}$ | 5.26 | $9.80 \cdot 10^{-2}$ | 0.62 | $1.50 \cdot 10^{-1}$ | -0.06 |
| 4 | $4.89 \cdot 10^{-2}$ | 0.21 | $1.60 \cdot 10^{-1}$ | 0.04 | $6.75 \cdot 10^{-2}$ | 0.54 | $1.63 \cdot 10^{-1}$ | -0.01 |
| 8 | $4.62 \cdot 10^{-2}$ | 0.08 | $1.45 \cdot 10^{-1}$ | 0.14 | $5.16 \cdot 10^{-2}$ | 0.39 | $1.48 \cdot 10^{-1}$ | 0.14 |
| 16 | $4.04 \cdot 10^{-2}$ | 0.20 | $9.75 \cdot 10^{-2}$ | 0.57 | $4.22 \cdot 10^{-2}$ | 0.29 | $9.54 \cdot 10^{-2}$ | 0.63 |
| 32 | $2.78 \cdot 10^{-2}$ | 0.54 | $3.43 \cdot 10^{-2}$ | 1.51 | $2.84 \cdot 10^{-2}$ | 0.57 | $3.38 \cdot 10^{-2}$ | 1.50 |
| r | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 |
| 1 | $9.09 \cdot 10^0$ | | $8.62 \cdot 10^0$ | | $1.88 \cdot 10^{-1}$ | | $1.56 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $8.80 \cdot 10^{-2}$ | 6.69 | $2.42 \cdot 10^{-1}$ | 5.15 | $1.16 \cdot 10^{-1}$ | 0.69 | $1.73 \cdot 10^{-1}$ | -0.15 |
| 4 | $7.58 \cdot 10^{-2}$ | 0.22 | $2.44 \cdot 10^{-1}$ | -0.01 | $8.69 \cdot 10^{-2}$ | 0.42 | $2.20 \cdot 10^{-1}$ | -0.35 |
| 8 | $7.25 \cdot 10^{-2}$ | 0.06 | $2.20 \cdot 10^{-1}$ | 0.15 | $7.66 \cdot 10^{-2}$ | 0.18 | $2.17 \cdot 10^{-1}$ | 0.02 |
| 16 | $6.43 \cdot 10^{-2}$ | 0.17 | $1.46 \cdot 10^{-1}$ | 0.59 | $6.62 \cdot 10^{-2}$ | 0.21 | $1.45 \cdot 10^{-1}$ | 0.61 |
| 32 | $4.49 \cdot 10^{-2}$ | 0.52 | $4.98 \cdot 10^{-2}$ | 1.56 | $4.56 \cdot 10^{-2}$ | 0.54 | $4.88 \cdot 10^{-2}$ | 1.54 |

Tab. 5.7: Tabulka chyb a experimentálních řádů konvergence **Úlohu 2** pro μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$.

| | SRT-LBM | | | | CLBM | | | |
|-----|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | FD | | G | | FD | | G | |
| r | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 |
| 1 | $6.70 \cdot 10^0$ | | $5.34 \cdot 10^0$ | | $1.71 \cdot 10^{-1}$ | | $1.93 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $2.45 \cdot 10^{-2}$ | 8.10 | $3.65 \cdot 10^{-2}$ | 7.19 | $1.03 \cdot 10^{-1}$ | 0.73 | $1.18 \cdot 10^{-1}$ | 0.72 |
| 4 | $3.36 \cdot 10^{-3}$ | 2.87 | $1.69 \cdot 10^{-2}$ | 1.11 | $5.10 \cdot 10^{-2}$ | 1.02 | $5.67 \cdot 10^{-2}$ | 1.05 |
| 8 | $1.30 \cdot 10^{-3}$ | 1.37 | $8.66 \cdot 10^{-3}$ | 0.96 | $1.84 \cdot 10^{-2}$ | 1.47 | $1.98 \cdot 10^{-2}$ | 1.52 |
| 16 | $6.25 \cdot 10^{-4}$ | 1.05 | $4.44 \cdot 10^{-3}$ | 0.97 | $4.89 \cdot 10^{-3}$ | 1.91 | $4.95 \cdot 10^{-3}$ | 2.00 |
| 32 | $3.31 \cdot 10^{-4}$ | 0.91 | $2.16 \cdot 10^{-3}$ | 1.04 | $1.76 \cdot 10^{-3}$ | 1.48 | $1.70 \cdot 10^{-3}$ | 1.54 |
| 64 | $1.78 \cdot 10^{-4}$ | 0.89 | $9.30 \cdot 10^{-4}$ | 1.22 | $7.15 \cdot 10^{-4}$ | 1.30 | $6.70 \cdot 10^{-4}$ | 1.35 |
| r | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 |
| 1 | $8.61 \cdot 10^0$ | | $7.60 \cdot 10^0$ | | $2.31 \cdot 10^{-1}$ | | $2.64 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $4.91 \cdot 10^{-2}$ | 7.45 | $6.36 \cdot 10^{-2}$ | 6.90 | $1.39 \cdot 10^{-1}$ | 0.73 | $1.67 \cdot 10^{-1}$ | 0.66 |
| 4 | $1.59 \cdot 10^{-2}$ | 1.62 | $2.80 \cdot 10^{-2}$ | 1.18 | $7.28 \cdot 10^{-2}$ | 0.93 | $8.77 \cdot 10^{-2}$ | 0.93 |
| 8 | $9.43 \cdot 10^{-3}$ | 0.76 | $1.49 \cdot 10^{-2}$ | 0.91 | $3.37 \cdot 10^{-2}$ | 1.11 | $3.78 \cdot 10^{-2}$ | 1.22 |
| 16 | $5.85 \cdot 10^{-3}$ | 0.69 | $7.98 \cdot 10^{-3}$ | 0.90 | $1.66 \cdot 10^{-2}$ | 1.02 | $1.61 \cdot 10^{-2}$ | 1.23 |
| 32 | $3.50 \cdot 10^{-3}$ | 0.74 | $4.35 \cdot 10^{-3}$ | 0.88 | $9.27 \cdot 10^{-3}$ | 0.84 | $8.55 \cdot 10^{-3}$ | 0.91 |
| 64 | $1.97 \cdot 10^{-3}$ | 0.83 | $2.57 \cdot 10^{-3}$ | 0.76 | $5.54 \cdot 10^{-3}$ | 0.74 | $5.30 \cdot 10^{-3}$ | 0.70 |
| r | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 |
| 1 | $6.69 \cdot 10^0$ | | $5.33 \cdot 10^0$ | | $1.70 \cdot 10^{-1}$ | | $1.93 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $2.43 \cdot 10^{-2}$ | 8.10 | $3.60 \cdot 10^{-2}$ | 7.21 | $1.03 \cdot 10^{-1}$ | 0.73 | $1.17 \cdot 10^{-1}$ | 0.72 |
| 4 | $3.26 \cdot 10^{-3}$ | 2.90 | $1.64 \cdot 10^{-2}$ | 1.14 | $5.07 \cdot 10^{-2}$ | 1.02 | $5.65 \cdot 10^{-2}$ | 1.05 |
| 8 | $1.17 \cdot 10^{-3}$ | 1.49 | $7.93 \cdot 10^{-3}$ | 1.05 | $1.80 \cdot 10^{-2}$ | 1.49 | $1.94 \cdot 10^{-2}$ | 1.54 |
| 16 | $4.68 \cdot 10^{-4}$ | 1.32 | $3.64 \cdot 10^{-3}$ | 1.12 | $4.34 \cdot 10^{-3}$ | 2.05 | $4.46 \cdot 10^{-3}$ | 2.12 |
| 32 | $1.58 \cdot 10^{-4}$ | 1.56 | $1.31 \cdot 10^{-3}$ | 1.48 | $1.10 \cdot 10^{-3}$ | 1.98 | $1.12 \cdot 10^{-3}$ | 1.99 |
| r | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 |
| 1 | $8.60 \cdot 10^0$ | | $7.60 \cdot 10^0$ | | $2.31 \cdot 10^{-1}$ | | $2.63 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $4.85 \cdot 10^{-2}$ | 7.47 | $6.30 \cdot 10^{-2}$ | 6.91 | $1.39 \cdot 10^{-1}$ | 0.73 | $1.66 \cdot 10^{-1}$ | 0.66 |
| 4 | $1.51 \cdot 10^{-2}$ | 1.69 | $2.71 \cdot 10^{-2}$ | 1.22 | $7.21 \cdot 10^{-2}$ | 0.95 | $8.71 \cdot 10^{-2}$ | 0.93 |
| 8 | $8.11 \cdot 10^{-3}$ | 0.90 | $1.37 \cdot 10^{-2}$ | 0.98 | $3.20 \cdot 10^{-2}$ | 1.17 | $3.63 \cdot 10^{-2}$ | 1.26 |
| 16 | $4.20 \cdot 10^{-3}$ | 0.95 | $6.40 \cdot 10^{-3}$ | 1.10 | $1.34 \cdot 10^{-2}$ | 1.26 | $1.31 \cdot 10^{-2}$ | 1.47 |
| 32 | $1.63 \cdot 10^{-3}$ | 1.37 | $2.35 \cdot 10^{-3}$ | 1.45 | $4.61 \cdot 10^{-3}$ | 1.54 | $4.28 \cdot 10^{-3}$ | 1.61 |

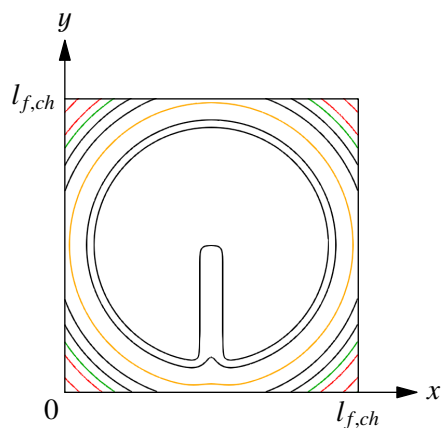
Tab. 5.8: Tabulka chyb a experimentálních řádů konvergence pro Úlohu 2 pro μ -regularizaci s $\mu = 10^{-8}$.

| | SRT-LBM | | | | CLBM | | | |
|-----|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | FD | | G | | FD | | G | |
| r | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 |
| 1 | $1.83 \cdot 10^2$ | | $1.79 \cdot 10^2$ | | $1.97 \cdot 10^{-1}$ | | $2.11 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $2.98 \cdot 10^{-2}$ | 12.58 | $4.15 \cdot 10^{-2}$ | 12.08 | $1.09 \cdot 10^{-1}$ | 0.86 | $1.19 \cdot 10^{-1}$ | 0.83 |
| 4 | $5.60 \cdot 10^{-3}$ | 2.41 | $1.68 \cdot 10^{-2}$ | 1.31 | $5.06 \cdot 10^{-2}$ | 1.10 | $5.54 \cdot 10^{-2}$ | 1.10 |
| 8 | $4.74 \cdot 10^{-3}$ | 0.24 | $8.76 \cdot 10^{-3}$ | 0.94 | $1.70 \cdot 10^{-2}$ | 1.57 | $1.81 \cdot 10^{-2}$ | 1.62 |
| 16 | $4.67 \cdot 10^{-3}$ | 0.02 | $5.35 \cdot 10^{-3}$ | 0.71 | $5.63 \cdot 10^{-3}$ | 1.59 | $5.67 \cdot 10^{-3}$ | 1.67 |
| 32 | $4.64 \cdot 10^{-3}$ | 0.01 | $4.73 \cdot 10^{-3}$ | 0.18 | $4.75 \cdot 10^{-3}$ | 0.25 | $4.67 \cdot 10^{-3}$ | 0.28 |
| 64 | $4.64 \cdot 10^{-3}$ | -0.01 | $4.67 \cdot 10^{-3}$ | 0.02 | $4.61 \cdot 10^{-3}$ | 0.04 | $4.57 \cdot 10^{-3}$ | 0.03 |
| r | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 |
| 1 | $2.51 \cdot 10^2$ | | $2.48 \cdot 10^2$ | | $2.52 \cdot 10^{-1}$ | | $2.81 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $5.92 \cdot 10^{-2}$ | 12.05 | $7.12 \cdot 10^{-2}$ | 11.76 | $1.47 \cdot 10^{-1}$ | 0.78 | $1.70 \cdot 10^{-1}$ | 0.73 |
| 4 | $1.71 \cdot 10^{-2}$ | 1.79 | $2.78 \cdot 10^{-2}$ | 1.36 | $7.60 \cdot 10^{-2}$ | 0.95 | $8.95 \cdot 10^{-2}$ | 0.92 |
| 8 | $1.18 \cdot 10^{-2}$ | 0.54 | $1.48 \cdot 10^{-2}$ | 0.91 | $3.38 \cdot 10^{-2}$ | 1.17 | $3.76 \cdot 10^{-2}$ | 1.25 |
| 16 | $9.29 \cdot 10^{-3}$ | 0.34 | $9.15 \cdot 10^{-3}$ | 0.70 | $1.71 \cdot 10^{-2}$ | 0.98 | $1.66 \cdot 10^{-2}$ | 1.18 |
| 32 | $7.99 \cdot 10^{-3}$ | 0.22 | $7.55 \cdot 10^{-3}$ | 0.28 | $1.15 \cdot 10^{-2}$ | 0.58 | $1.08 \cdot 10^{-2}$ | 0.62 |
| 64 | $7.35 \cdot 10^{-3}$ | 0.12 | $7.11 \cdot 10^{-3}$ | 0.09 | $9.03 \cdot 10^{-3}$ | 0.34 | $8.64 \cdot 10^{-3}$ | 0.33 |
| r | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 |
| 1 | $1.83 \cdot 10^2$ | | $1.79 \cdot 10^2$ | | $1.98 \cdot 10^{-1}$ | | $2.11 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $3.06 \cdot 10^{-2}$ | 12.55 | $3.92 \cdot 10^{-2}$ | 12.16 | $1.12 \cdot 10^{-1}$ | 0.83 | $1.21 \cdot 10^{-1}$ | 0.81 |
| 4 | $3.86 \cdot 10^{-3}$ | 2.99 | $1.34 \cdot 10^{-2}$ | 1.55 | $5.42 \cdot 10^{-2}$ | 1.04 | $5.89 \cdot 10^{-2}$ | 1.04 |
| 8 | $1.45 \cdot 10^{-3}$ | 1.41 | $4.78 \cdot 10^{-3}$ | 1.49 | $2.02 \cdot 10^{-2}$ | 1.43 | $2.14 \cdot 10^{-2}$ | 1.46 |
| 16 | $5.87 \cdot 10^{-4}$ | 1.31 | $1.26 \cdot 10^{-3}$ | 1.92 | $5.59 \cdot 10^{-3}$ | 1.85 | $5.70 \cdot 10^{-3}$ | 1.91 |
| 32 | $1.93 \cdot 10^{-4}$ | 1.61 | $2.85 \cdot 10^{-4}$ | 2.15 | $1.33 \cdot 10^{-3}$ | 2.07 | $1.34 \cdot 10^{-3}$ | 2.10 |
| r | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 |
| 1 | $2.52 \cdot 10^2$ | | $2.48 \cdot 10^2$ | | $2.52 \cdot 10^{-1}$ | | $2.81 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $5.86 \cdot 10^{-2}$ | 12.07 | $6.97 \cdot 10^{-2}$ | 11.80 | $1.49 \cdot 10^{-1}$ | 0.76 | $1.71 \cdot 10^{-1}$ | 0.71 |
| 4 | $1.44 \cdot 10^{-2}$ | 2.03 | $2.36 \cdot 10^{-2}$ | 1.56 | $7.88 \cdot 10^{-2}$ | 0.92 | $9.19 \cdot 10^{-2}$ | 0.90 |
| 8 | $7.53 \cdot 10^{-3}$ | 0.93 | $9.72 \cdot 10^{-3}$ | 1.28 | $3.43 \cdot 10^{-2}$ | 1.20 | $3.86 \cdot 10^{-2}$ | 1.25 |
| 16 | $3.79 \cdot 10^{-3}$ | 0.99 | $3.50 \cdot 10^{-3}$ | 1.47 | $1.33 \cdot 10^{-2}$ | 1.36 | $1.36 \cdot 10^{-2}$ | 1.51 |
| 32 | $1.44 \cdot 10^{-3}$ | 1.40 | $1.11 \cdot 10^{-3}$ | 1.66 | $4.40 \cdot 10^{-2}$ | 1.60 | $4.51 \cdot 10^{-2}$ | 1.59 |

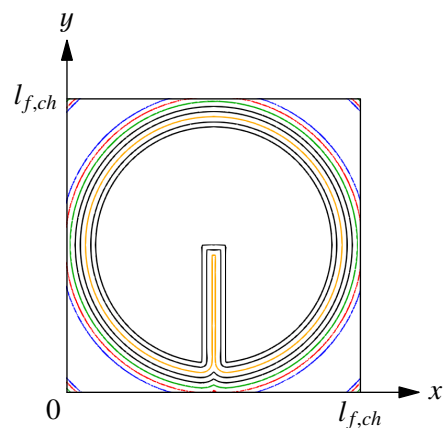
Tab. 5.9: Tabulka chyb a experimentálních řádů konvergence pro **Úlohu 2** pro ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-2}$.

| | SRT-LBM | | | | CLBM | | | |
|-----|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|----------------------|-----------|
| | FD | | G | | FD | | G | |
| r | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 | L_1^0 | EOC_1^0 |
| 1 | $1.86 \cdot 10^2$ | | $1.78 \cdot 10^2$ | | $1.98 \cdot 10^{-1}$ | | $2.12 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $3.03 \cdot 10^{-2}$ | 12.58 | $4.16 \cdot 10^{-2}$ | 12.06 | $1.09 \cdot 10^{-1}$ | 0.86 | $1.19 \cdot 10^{-1}$ | 0.83 |
| 4 | $3.36 \cdot 10^{-3}$ | 3.18 | $1.69 \cdot 10^{-2}$ | 1.30 | $5.12 \cdot 10^{-2}$ | 1.10 | $5.60 \cdot 10^{-2}$ | 1.09 |
| 8 | $1.30 \cdot 10^{-3}$ | 1.37 | $8.66 \cdot 10^{-3}$ | 0.97 | $1.78 \cdot 10^{-2}$ | 1.52 | $1.89 \cdot 10^{-2}$ | 1.57 |
| 16 | $6.25 \cdot 10^{-4}$ | 1.05 | $4.44 \cdot 10^{-3}$ | 0.97 | $4.88 \cdot 10^{-3}$ | 1.87 | $4.94 \cdot 10^{-3}$ | 1.93 |
| 32 | $3.31 \cdot 10^{-4}$ | 0.92 | $2.16 \cdot 10^{-3}$ | 1.04 | $1.76 \cdot 10^{-3}$ | 1.47 | $1.70 \cdot 10^{-3}$ | 1.54 |
| 64 | $1.78 \cdot 10^{-4}$ | 0.89 | $9.31 \cdot 10^{-4}$ | 1.21 | $7.15 \cdot 10^{-4}$ | 1.30 | $6.70 \cdot 10^{-4}$ | 1.35 |
| r | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 | L_2^0 | EOC_2^0 |
| 1 | $2.55 \cdot 10^2$ | | $2.46 \cdot 10^2$ | | $2.52 \cdot 10^{-1}$ | | $2.82 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $5.94 \cdot 10^{-2}$ | 12.07 | $7.14 \cdot 10^{-2}$ | 11.75 | $1.47 \cdot 10^{-1}$ | 0.78 | $1.70 \cdot 10^{-1}$ | 0.73 |
| 4 | $1.59 \cdot 10^{-2}$ | 1.90 | $2.80 \cdot 10^{-2}$ | 1.35 | $7.63 \cdot 10^{-2}$ | 0.95 | $8.99 \cdot 10^{-2}$ | 0.92 |
| 8 | $9.43 \cdot 10^{-3}$ | 0.76 | $1.49 \cdot 10^{-2}$ | 0.91 | $3.42 \cdot 10^{-2}$ | 1.16 | $3.78 \cdot 10^{-2}$ | 1.25 |
| 16 | $5.85 \cdot 10^{-3}$ | 0.69 | $7.99 \cdot 10^{-3}$ | 0.90 | $1.66 \cdot 10^{-2}$ | 1.05 | $1.61 \cdot 10^{-2}$ | 1.23 |
| 32 | $3.50 \cdot 10^{-3}$ | 0.74 | $4.35 \cdot 10^{-3}$ | 0.88 | $9.27 \cdot 10^{-3}$ | 0.84 | $8.55 \cdot 10^{-3}$ | 0.91 |
| 64 | $1.97 \cdot 10^{-3}$ | 0.83 | $2.57 \cdot 10^{-3}$ | 0.76 | $5.54 \cdot 10^{-3}$ | 0.74 | $5.30 \cdot 10^{-3}$ | 0.69 |
| r | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 | L_1 | EOC_1 |
| 1 | $1.85 \cdot 10^2$ | | $1.77 \cdot 10^2$ | | $1.97 \cdot 10^{-1}$ | | $2.11 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $3.02 \cdot 10^{-2}$ | 12.58 | $4.11 \cdot 10^{-2}$ | 12.07 | $1.09 \cdot 10^{-1}$ | 0.86 | $1.19 \cdot 10^{-1}$ | 0.83 |
| 4 | $3.26 \cdot 10^{-3}$ | 3.21 | $1.64 \cdot 10^{-2}$ | 1.33 | $5.09 \cdot 10^{-2}$ | 1.10 | $5.58 \cdot 10^{-2}$ | 1.09 |
| 8 | $1.17 \cdot 10^{-3}$ | 1.49 | $7.93 \cdot 10^{-3}$ | 1.05 | $1.74 \cdot 10^{-2}$ | 1.55 | $1.85 \cdot 10^{-2}$ | 1.59 |
| 16 | $4.68 \cdot 10^{-4}$ | 1.32 | $3.65 \cdot 10^{-3}$ | 1.12 | $4.33 \cdot 10^{-3}$ | 2.01 | $4.45 \cdot 10^{-3}$ | 2.06 |
| 32 | $1.58 \cdot 10^{-4}$ | 1.56 | $1.31 \cdot 10^{-3}$ | 1.48 | $1.10 \cdot 10^{-3}$ | 1.98 | $1.12 \cdot 10^{-3}$ | 1.99 |
| r | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 | L_2 | EOC_2 |
| 1 | $2.55 \cdot 10^2$ | | $2.46 \cdot 10^2$ | | $2.51 \cdot 10^{-1}$ | | $2.81 \cdot 10^{-1}$ | |
| 2 | $5.89 \cdot 10^{-2}$ | 12.08 | $7.09 \cdot 10^{-2}$ | 11.76 | $1.47 \cdot 10^{-1}$ | 0.78 | $1.70 \cdot 10^{-1}$ | 0.72 |
| 4 | $1.51 \cdot 10^{-2}$ | 1.97 | $2.71 \cdot 10^{-2}$ | 1.39 | $7.56 \cdot 10^{-2}$ | 0.96 | $8.93 \cdot 10^{-2}$ | 0.93 |
| 8 | $8.11 \cdot 10^{-3}$ | 0.90 | $1.37 \cdot 10^{-2}$ | 0.98 | $3.25 \cdot 10^{-3}$ | 1.22 | $3.64 \cdot 10^{-2}$ | 1.29 |
| 16 | $4.20 \cdot 10^{-3}$ | 0.95 | $6.40 \cdot 10^{-3}$ | 1.10 | $1.34 \cdot 10^{-2}$ | 1.28 | $1.31 \cdot 10^{-2}$ | 1.48 |
| 32 | $1.63 \cdot 10^{-3}$ | 1.37 | $2.35 \cdot 10^{-3}$ | 1.45 | $4.61 \cdot 10^{-3}$ | 1.54 | $4.28 \cdot 10^{-3}$ | 1.62 |

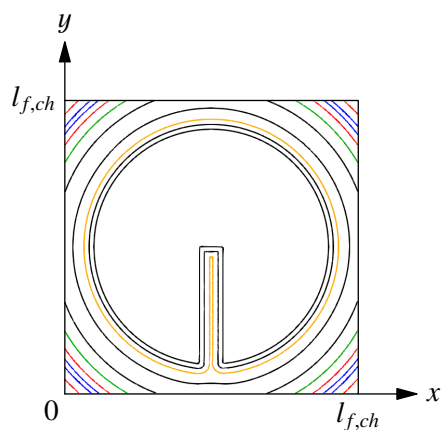
Tab. 5.10: Tabulka chyb a experimentálních řádů konvergence pro **Úlohu 2** pro ε -regularizaci s $\varepsilon = 10^{-8}$.



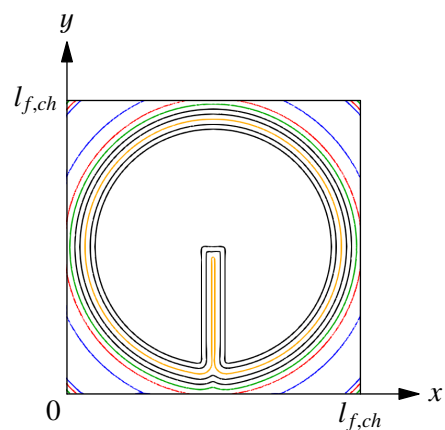
a: μ -regularizace s $\mu = 10^{-2}$, *SRT-LBM, FD*.



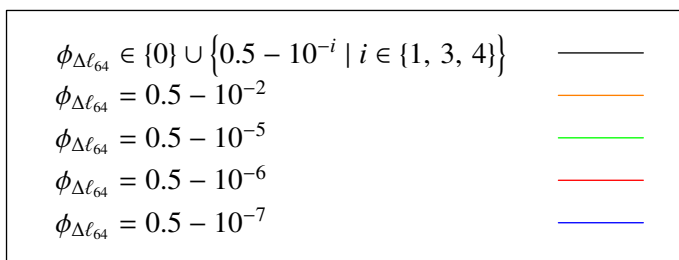
b: μ -regularizace s $\mu = 10^{-8}$, *SRT-LBM, FD*.



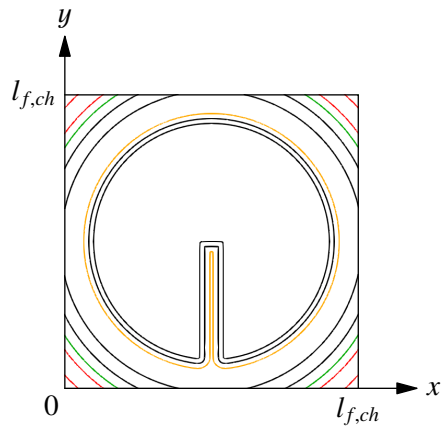
c: μ -regularizace s $\mu = 10^{-8}$, *SRT-LBM, G*.



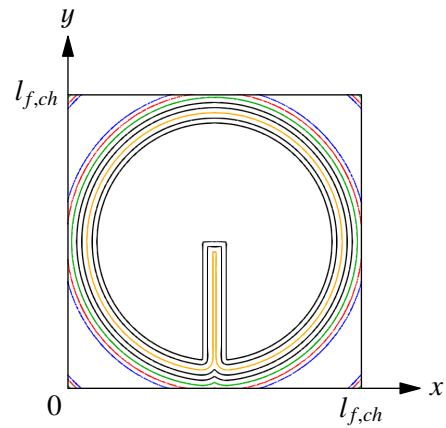
d: μ -regularizace s $\mu = 10^{-8}$, *CLBM, G*.



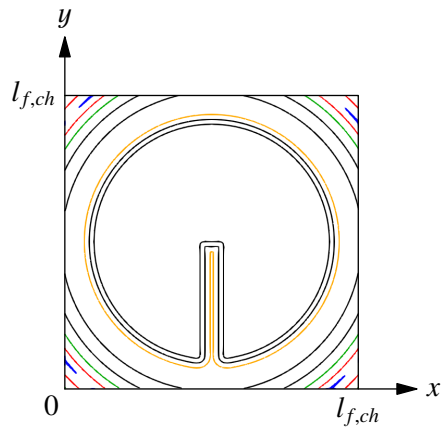
Obr. 5.6: Znázornění vrstevnic stavového parametru při poslední iteraci **Úlohy 2**. Byla použita μ -regularizace a mřížka $\Delta\ell_{64}$.



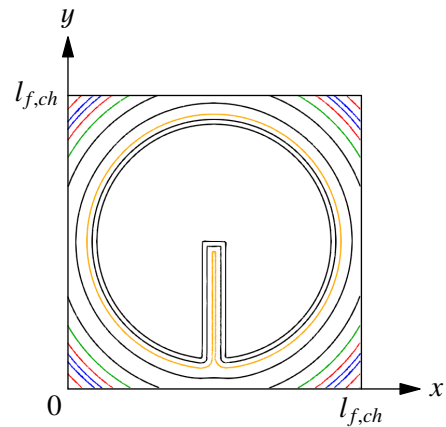
a: ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-2}$, SRT-LBM, FD.



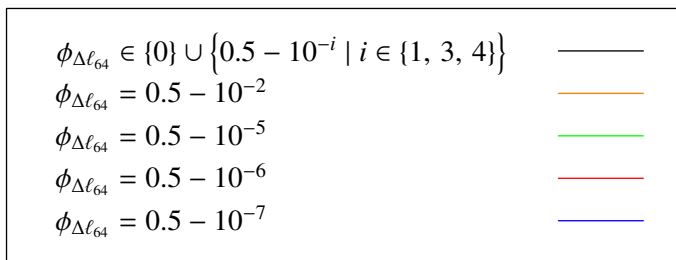
b: ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-8}$, SRT-LBM, FD.



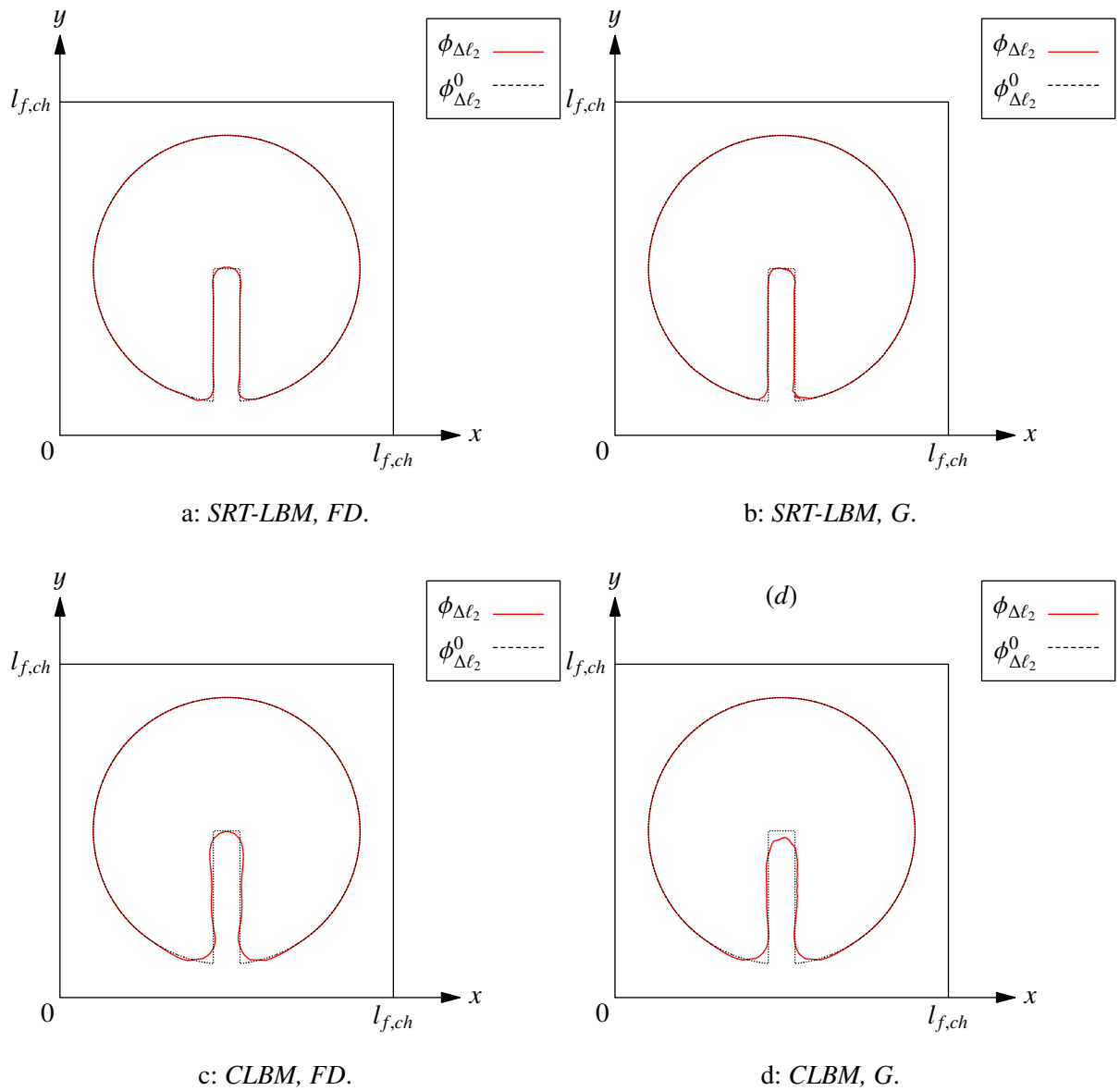
c: ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-2}$, CLBM, FD.



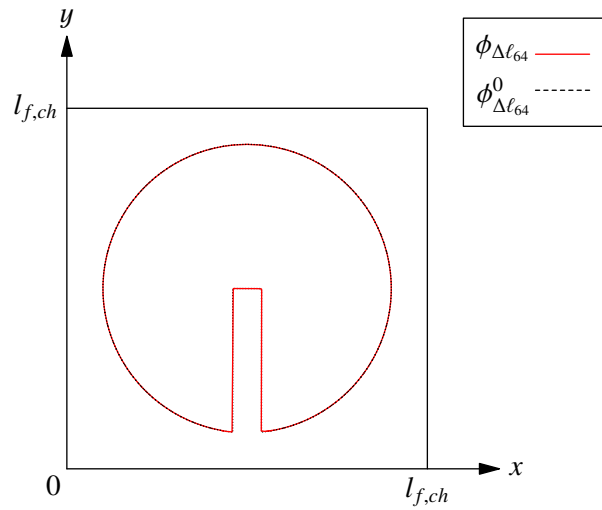
d: ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-8}$, SRT-LBM, G.



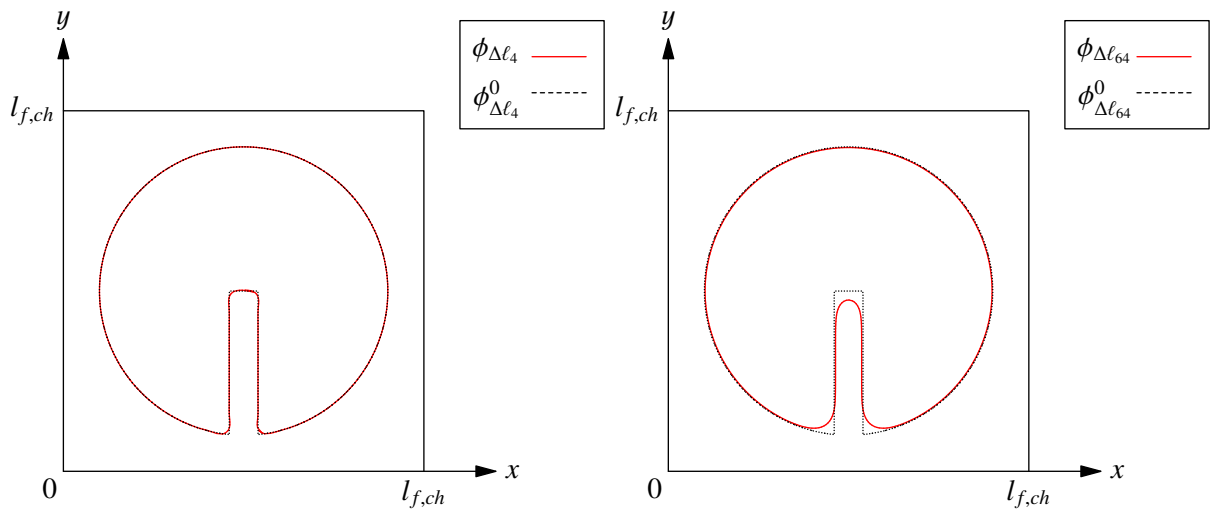
Obr. 5.7: Znázornění vrstevnic stavového parametru při poslední iteraci **Úlohy 2**. Byla použita ε -regularizace a mřížka $\Delta\ell_{64}$.



Obr. 5.8: Srovnání rozhraní, tj. nulové vrstevnice stavového parametru $\phi = 0$, na mřížce $\Delta\ell_2$ při poslední iteraci s počáteční podmínkou pro **Úlohu 2**. Všechny regularizace vypadají podobně.



Obr. 5.9: Srovnání řešení ve finálním čase na mřížce Δl_{64} s počáteční podmínkou pro **Úlohu 2**. Na obrázcích je vykresleno rozhraní, tj. nulová vrstevnice stavového parametru $\phi = 0$. Všechny kombinace kolizních operátorů, způsobů výpočtů normál a regularizací kromě μ -regularizace s $\mu = 10^{-2}$ vypadají v tomto měřítku podobně.



Obr. 5.10: Srovnání řešení ve finálním čase mřížce Δl_{64} s počáteční podmínkou pro **Úlohu 2**. Byla použita μ -regularizace s $\mu = 10^{-2}$. Na obrázcích je zachycena rostoucí deformace rozhraní se zvyšujícím se rozlišením mřížky od $r = 4$ do $r = 64$. Je vykresleno rozhraní, tj. nulová vrstevnice stavového parametru $\phi = 0$. Všechny kombinace kolizních operátorů a způsobů výpočtů normál vypadají v tomto měřítku podobně.

5.3.3 Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice ve smykovém rychlostním poli.

Úloha 3

V této Úloze jsme rozhraní ve tvaru kružnice o poloměru R_f se středem $\mathbf{S} = (0.5l_{f,ch}, 0.3l_{f,ch})^T$ položili do smykového pole \mathbf{u}_f . Průběh testu je znázorněn na Obr. 5.11.

- Rozhraní v čase $t = 0$:

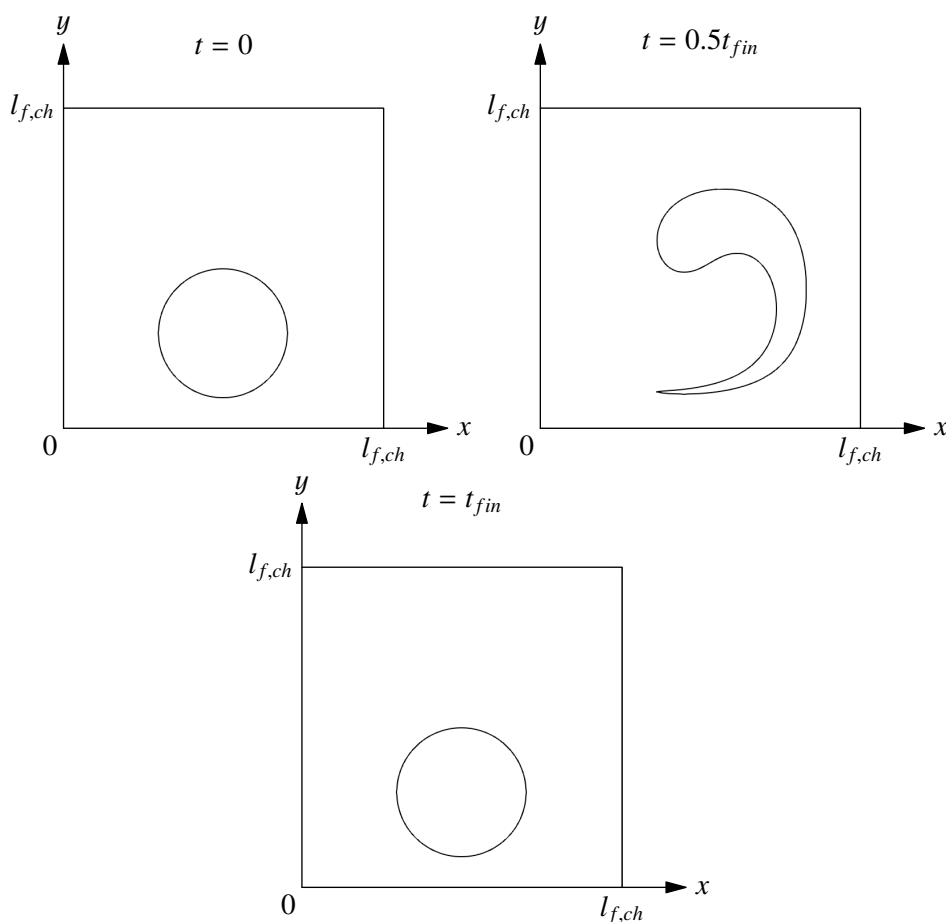
$$\Gamma(0) = \{(x, y) \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{S}\| = R_f\}.$$

| | | |
|-----------|------|-----|
| R_f | 0.25 | [m] |
| t_{fin} | 0.02 | [s] |

- Rychlostní pole:

$$u_{f,x}(x, y, t) = -u_{f,ch}\pi \cos\left[\pi\left(\frac{x}{l_{f,ch}} - \frac{1}{2}\right)\right] \sin\left[\pi\left(\frac{y}{l_{f,ch}} - \frac{1}{2}\right)\right] \operatorname{sgn}\left(\frac{t_{fin}}{2} - t\right), \quad (5.9a)$$

$$u_{f,y}(x, y, t) = u_{f,ch}\pi \sin\left[\pi\left(\frac{x}{l_{f,ch}} - \frac{1}{2}\right)\right] \cos\left[\pi\left(\frac{y}{l_{f,ch}} - \frac{1}{2}\right)\right] \operatorname{sgn}\left(\frac{t_{fin}}{2} - t\right). \quad (5.9b)$$

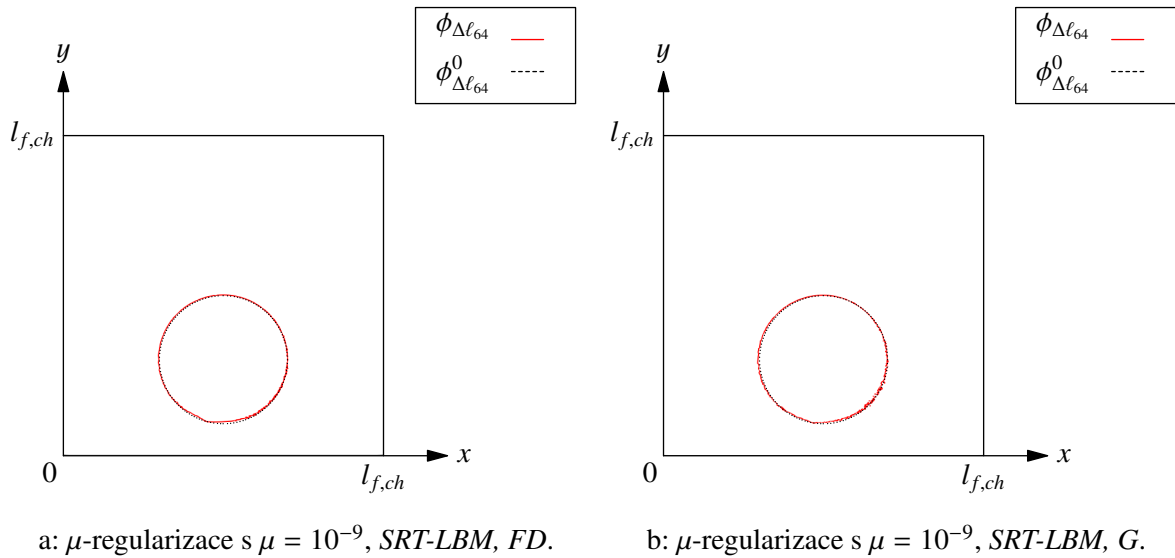


Obr. 5.11: Průběh testu **Úlohy 3**. Na obrázcích vidíme nulovou vrstevnici stavového parametru $\phi = 0$.

V **Úloze 3** jsme použili pouze *SRT-LBM* a μ -, ε -regularizace s $\mu = \varepsilon = 10^{-9}$. I pro tyto regularizace nám oproti **Úlohám 1, 2** vycházely záporné experimentální řady konvergence. V této době nevíme, proč tomu tak je a budeme se tím zabývat v budoucích pracích. Deformace rozhraní na mřížce $\Delta\ell_{64}$ lze vidět na Obr. 5.12 (ε -regularizace vypadá podobně jako μ -regularizace). Chyby nalezneme v Tab. 5.11.

| | $\mu = 10^{-9}$ | | $\varepsilon = 10^{-9}$ | |
|-----------|----------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|
| | L_1^0 | L_2^0 | L_1^0 | L_2^0 |
| <i>FD</i> | $1.30 \cdot 10^{-2}$ | $5.15 \cdot 10^{-2}$ | $1.08 \cdot 10^{-2}$ | $5.15 \cdot 10^{-2}$ |
| <i>G</i> | $1.73 \cdot 10^{-2}$ | $6.45 \cdot 10^{-2}$ | $1.74 \cdot 10^{-2}$ | $6.46 \cdot 10^{-2}$ |

Tab. 5.11: Tabulka chyb naměřených na mřížce $\Delta\ell_{64}$ pro **Úlohu 3**.



Obr. 5.12: Rozdíl mezi srovnáním *FD* a *G* s počáteční podmínkou pro **Úlohu 3** na mřížce $\Delta\ell_{64}$. Na obrázcích je vykresleno rozhraní, tj. nulová vrstevnice stavového parametru $\phi = 0$. ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-9}$ vypadá podobně.

5.3.4 Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při deformaci A

Úloha 4

V této úloze jsme rozhraní ve tvaru kružnice o poloměru R_f se středem $\mathbf{S} = (0.5l_{f,ch}, 0.5l_{f,ch})^T$ deformovali rychlostním polem \mathbf{u}_f . Průběh testu je znázorněn na Obr. 5.13.

- Rozhraní v čase $t = 0$:

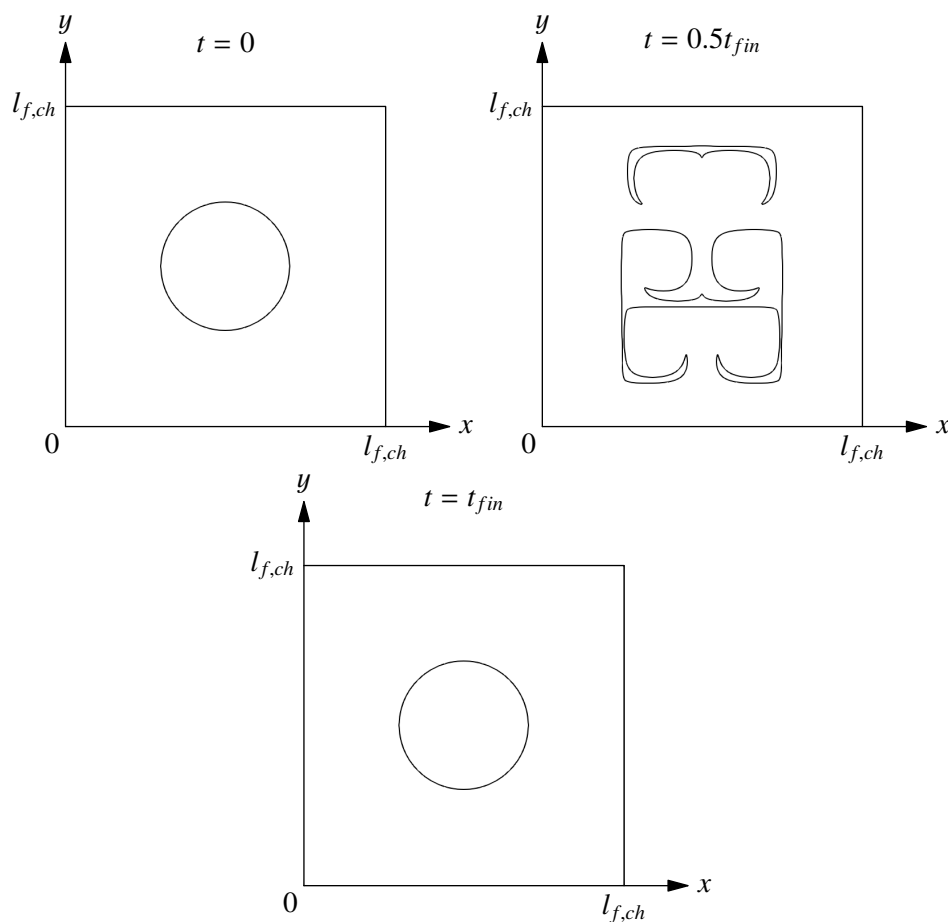
$$\Gamma(0) = \{(x, y) \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{S}\| = R_f\}.$$

| | | |
|-----------|------|-----|
| R_f | 0.2 | [m] |
| t_{fin} | 0.01 | [s] |

- Rychlostní pole:

$$u_{f,x}(x, y, t) = -u_{f,ch} \sin \left[4\pi \left(\frac{x}{l_{f,ch}} + \frac{1}{2} \right) \right] \sin \left[4\pi \left(\frac{y}{l_{f,ch}} + \frac{1}{2} \right) \right] \operatorname{sgn} \left(\frac{t_{fin}}{2} - t \right), \quad (5.10a)$$

$$u_{f,y}(x, y, t) = -u_{f,ch} \cos \left[4\pi \left(\frac{x}{l_{f,ch}} + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[4\pi \left(\frac{y}{l_{f,ch}} + \frac{1}{2} \right) \right] \operatorname{sgn} \left(\frac{t_{fin}}{2} - t \right) \quad (5.10b)$$

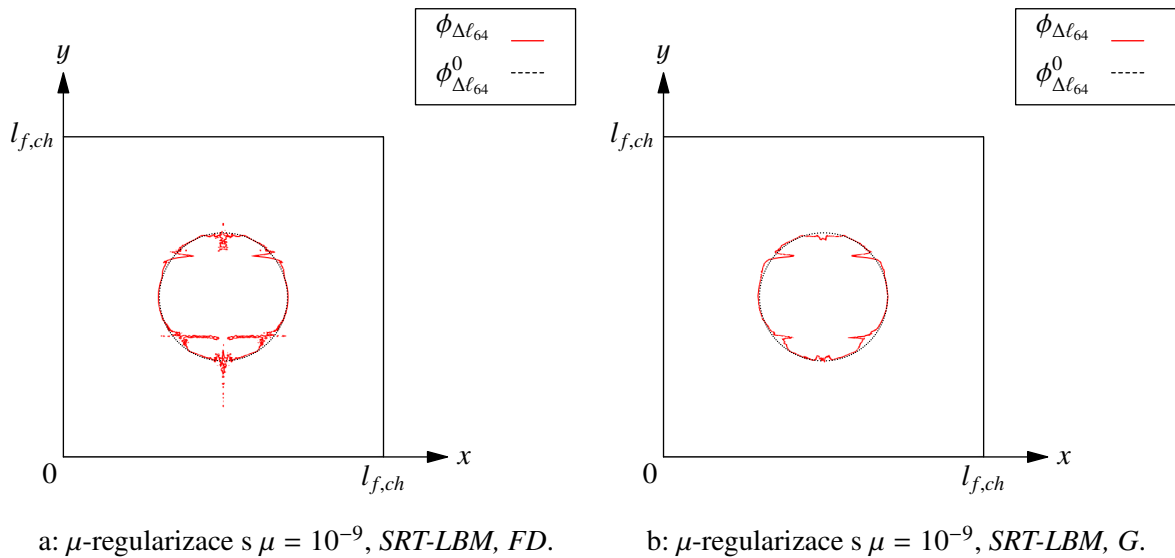


Obr. 5.13: Průběh testu **Úlohy 4**. Na obrázcích vidíme nulovou vrstevnici stavového parametru $\phi = 0$.

V **Úloze 4** jsme použili pouze *SRT-LBM* a μ -, ε -regularizace s $\mu = \varepsilon = 10^{-9}$. I pro tyto regularizace nám oproti **Úlohám 1, 2** a podobně jako v **Úloze 3** vycházely záporné experimentální řady konvergence. V této době nevíme, proč tomu tak je a budeme se tím zabývat v budoucích pracích. Deformace rozhraní na mřížce $\Delta\ell_{64}$ lze vidět na Obr. 5.15 (ε -regularizace vypadá podobně jako μ -regularizace). Chyby nalezneme v Tab. 5.12.

| | $\mu = 10^{-9}$ | | $\varepsilon = 10^{-9}$ | |
|-----------|----------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|
| | L_1^0 | L_2^0 | L_1^0 | L_2^0 |
| <i>FD</i> | $6.23 \cdot 10^{-2}$ | $1.70 \cdot 10^{-1}$ | $6.23 \cdot 10^{-2}$ | $1.70 \cdot 10^{-1}$ |
| <i>G</i> | $6.83 \cdot 10^{-2}$ | $1.78 \cdot 10^{-1}$ | $6.83 \cdot 10^{-2}$ | $1.78 \cdot 10^{-1}$ |

Tab. 5.12: Tabulka chyb naměřených na mřížce $\Delta\ell_{64}$ pro **Úlohu 4**.



Obr. 5.15: Rozdíl mezi srovnáním *FD* a *G* s počáteční podmínkou pro **Úlohu 4** na mřížce $\Delta\ell_{64}$. Na obrázcích je vykresleno rozhraní, tj. nulová vrstevnice stavového parametru $\phi = 0$. ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-9}$ vypadá podobně.

5.3.5 Vývoj rozhraní ve tvaru kružnice při deformaci B

Úloha 5

V této úloze jsme rozhraní ve tvaru kružnice o poloměru R_f se středem $\mathbf{S} = (0.5l_{f,ch}, 0.5l_{f,ch})^T$ deformovali rychlostním polem \mathbf{u}_f . Průběh testu je znázorněn na Obr. 5.

- Rozhraní v čase $t = 0$:

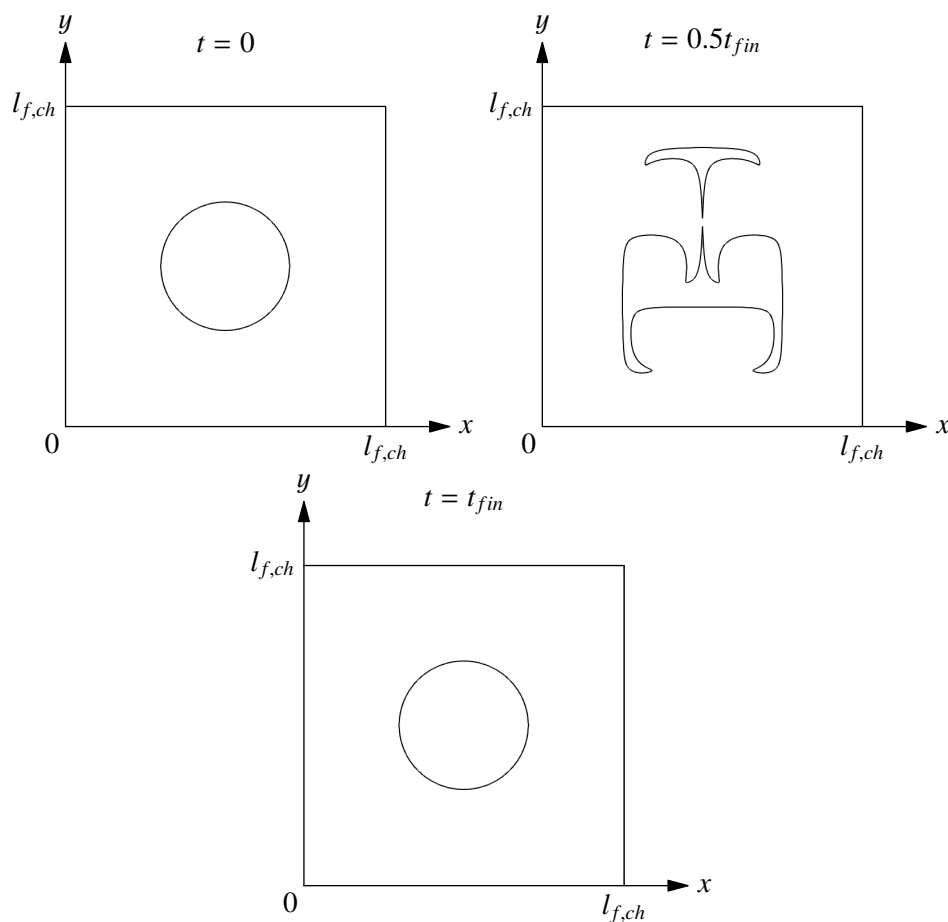
$$\Gamma(0) = \{(x, y) \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{S}\| = R_f\}.$$

| | | |
|-----------|------|-----|
| R_f | 0.2 | [m] |
| t_{fin} | 0.01 | [s] |

- Rychlostní pole:

$$u_{f,x}(x, y, t) = -u_{f,ch} \sin \left[4\pi \left(\frac{x}{l_{f,ch}} + \frac{1}{2} \right) \right] \sin \left[4\pi \left(\frac{y}{l_{f,ch}} + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left(\frac{\pi t}{t_{fin}} \right), \quad (5.11a)$$

$$u_{f,y}(x, y, t) = -u_{f,ch} \cos \left[4\pi \left(\frac{x}{l_{f,ch}} + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[4\pi \left(\frac{y}{l_{f,ch}} + \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left(\frac{\pi t}{t_{fin}} \right). \quad (5.11b)$$

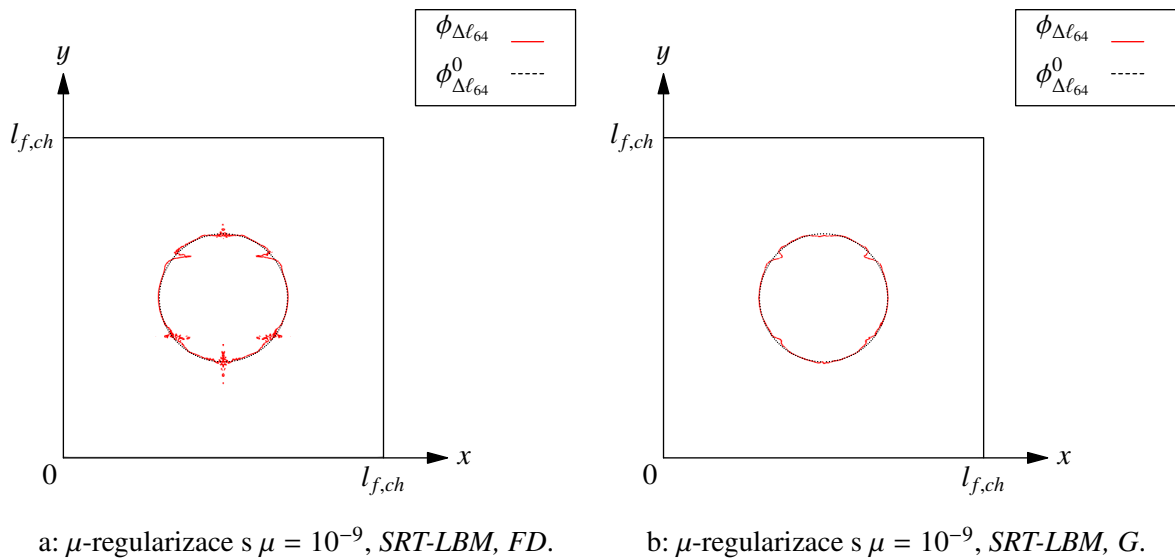


Obr. 5.16: Průběh testu **Úlohy 5**. Na obrázcích vidíme vrstevnici stavového parametru s hodnotou $\phi = 0$.

V této úloze jsme použili pouze *SRT-LBM* a μ -, ε -regularizace s $\mu = \varepsilon = 10^{-9}$. I pro tyto regularizace nám oproti **Úlohám 1, 2** a podobně jako v **Úlohách 3, 4** vycházely záporné experimentální řády konvergence. V této době nevíme, proč tomu tak je a budeme se tím zabývat v budoucích pracích. Oproti **Úloze 4** jsme pouze místo ostrého přechodu rychlostního pole v čase $t = 0.5t_{fin}$ zvolili postupný přechod pomocí členu $\cos\left(\frac{\pi t}{t_{fin}}\right)$. Postupný přechod se projeví menší deformací rozhraní, viz. Obr. 5.17 (obrázky pro ε -regularizaci vypadají podobně). Chyby lze vidět v Tab. 5.13.

| | $\mu = 10^{-9}$ | | $\varepsilon = 10^{-9}$ | |
|-----------|----------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|
| | L_1^0 | L_2^0 | L_1^0 | L_2^0 |
| <i>FD</i> | $3.99 \cdot 10^{-2}$ | $1.26 \cdot 10^{-1}$ | $3.99 \cdot 10^{-2}$ | $1.26 \cdot 10^{-1}$ |
| <i>G</i> | $4.34 \cdot 10^{-2}$ | $1.31 \cdot 10^{-1}$ | $4.34 \cdot 10^{-2}$ | $1.31 \cdot 10^{-1}$ |

Tab. 5.13: Tabulka chyb naměřených na mřížce $\Delta\ell_{64}$ pro **Úlohu 5**.



Obr. 5.17: Rozdíl mezi srovnáním *FD* a *G* s počáteční podmínkou pro **Úlohu 5** na mřížce $\Delta\ell_{64}$. Na obrázcích je vykresleno rozhraní, tj. nulová vrstevnice stavového parametru $\phi = 0$. ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-9}$ vypadá podobně.

Kapitola 6

Závěr

V teoretickém úvodu této práce jsme nejprve uvedli definice některých pojmů, které jsme nadále používali. Kapitola 3 jsme věnovali popisu *metody fázového pole*. Představili jsme kromě této metody i fyzikální model zvaný Stefanova úloha, ke kterému *metoda fázového pole* konverguje. Následně jsme naznačili jak Y. Sun a C. Beckermann v [23] upravili *metodu fázového pole* ke sledování rozhraní. V Kapitole 4 jsme popsali numerický řešič, kterým byla *mřížková Boltzmannova metoda*, a představili upravený kolizní operátor k řešení dvoufázového rozhraní.

Cílem této práce bylo sledovat vývoj rozhraní mezi dvěma fázemi pomocí *mřížkové Boltzmannovy metody*. V praktické části jsme pracovali s kódem určeným pro simulaci nestlačitelného proudění pomocí *mřížkové Boltzmannovy metody*, který je vyvíjen na Katedře matematiky FJFI, ČVUT v Praze. Kód využívá architekturu CUDA od společnosti NVIDIA, která je určená pro výpočty na grafických procesorech. V rámci této práce byl kód upraven na řešení vývoje rozhraní mezi dvěma fázemi. Šlo o úpravu kolizního operátoru a odladění kódu. Následně jsme vyšetřovali, jaký vliv mají různé regularizace a způsoby výpočtů normál na řešení. Zkoumali jsme vliv nejen na rozhraní, ale na celou výpočetní oblast. Nakonec jsme se rozhodli pro μ - a ε -regularizace. Pro výpočet normál pomocí definice jsme se rozhodli pro centrální diference, k jejichž výpočtu jsme používali pouze informace ze sousedních bodů. Schopnost LBM řešit simulaci fázového rozhraní jsme vyzkoušeli na několika testovacích úlohách. Očekávali jsme, že Úlohy budou konvergovat rychlostí druhého řádu, viz. [18].

Praktické části této práce je věnována Kapitola 5, ve které jsme nejprve uvedli již zmíněné μ - a ε -regularizace a představili vzorce pro výpočet chyb a experimentálních řádů konvergence. Nejprve jsme zkoumali jaký vliv tyto regularizace mají na řešení **Úlohy 1** a **2**. To jsme provedli dosazením vysoké hodnoty parametru, konkrétně $\mu = \varepsilon = 10^{-2}$. Zjistili jsme, že regularizace způsobují vzdalování vrstevnic stavového parametru. Mimo případu **Úlohy 1** *CLBM*, *FD* jsme u obou úloh při μ -regularizaci s $\mu = 10^{-2}$ pozorovali záporné hodnoty experimentálních řádů konvergence nebo hodnoty blízké k nule. Tyto hodnoty jsme také pozorovali u ε -regularizace s $\varepsilon = 10^{-2}$ pro chybu L_2^0 mimo **Úlohu 2** *CLBM* a pro chybu L_1^0 . Při této regularizaci jsme ale získali druhý řád konvergence pro **Úlohu 1** pro *CLBM* pro chyby L_1 , L_2 a pro **Úlohu 2** pro *SRT-LBM*, *G* a *CLBM* pro chybu L_1 .

Následně jsme v **Úloze 1** dosadili za μ a ε hodnotu 10^{-9} . Vyšlo nám, že úloha při těchto regularizacích konverguje rychlostí druhého řádu. Při dosazení hodnoty 10^{-8} do μ , ε v **Úloze 2** jsme získali konvergenci druhého řádu pouze pro chybu L_1 pro *CLBM*. Ostatní výsledky **Úlohy 2** konvergují rychlostí prvního řádu. V této době si nejsme jisti proč nám vyšel nižší řád konvergence než u **Úlohy 1** a budeme se tím zabývat v budoucích pracích.

V **Úlohách 3 - 5** nám vyšli záporné experimentální řády konvergence i pro μ -, ε -regularizace s $\mu = \varepsilon = 10^{-9}$. Tímto jevem se také hodláme zabývat v budoucích pracích.

Literatura

- [1] Adalsteinsson, David; Sethian, James A. A fast level set method for propagating interfaces. *J. Comput. Phys.*, 1994, roč. 118, č. 2.
- [2] Beneš, M.. *Phase field model of microstructure growth in solidification of pure substances*. Dizertační práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 1997.
- [3] Beneš, M.. *Matematické modelování procesu tuhnutí v krystalických materiálech pomocí nelineárních parciálních diferenciálních rovnic*. Habilitační práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2001.
- [4] Boettinger, William J; Warren, James A; Beckermann, Christoph; Karma, Alain. Phase-field simulation of solidification. *Annual review of materials research*, 2002, roč. 32, č. 1, s. 163–194.
- [5] Brennen, Christopher Earls; Brennen, Christopher E. *Fundamentals of multiphase flow*. Cambridge university press, 2005.
- [6] Chiu, Pao-Hsiung; Lin, Yan-Ting. A conservative phase field method for solving incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 2011, roč. 230, č. 1, s. 185–204.
- [7] Dvořák, P.. *Matematické modelování mikrostruktur při fázových přechodech*. Diplomová práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2010.
- [8] Eichler, P.. *Matematické modelování subsonického proudění okolo překážek pomocí metody Lattice-Boltzmann na GPU*. Bakalářská práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2016.
- [9] Eichler, P.. *Matematické modelování interakce elastického tělesa s nestlačitelnou tekutinou*. Diplomová práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2018.
- [10] Folch, R.; Casademunt, J.; Hernández-Machado, A.; Ramirez-Piscina, L.. Phase-field model for Hele-Shaw flows with arbitrary viscosity contrast. I. Theoretical approach. *Physical Review E*, 1999, roč. 60, č. 2, str. 1724.
- [11] Gebäck, Tobias; Heintz, Alexei. A lattice Boltzmann method for the advection-diffusion equation with Neumann boundary conditions. *Communications in Computational Physics*, 2014, roč. 15, č. 2, s. 487–505.
- [12] Geier, Martin; Fakhari, Abbas; Lee, Taehun. Conservative phase-field lattice Boltzmann model for interface tracking equation. *Physical Review E*, 2015, roč. 91, č. 6, str. 063309.
- [13] Gruszczyński, G; Mitchell, T; Leonardi, C; Barber, T; aj. A cascaded phase-field lattice Boltzmann model for the simulation of incompressible, immiscible fluids with high density contrast. *Computers & Mathematics with Applications*, 2020, roč. 79, č. 4, s. 1049–1071.

- [14] Guo, Zhaoli; Shu, Chang. *Lattice Boltzmann method and its applications in engineering*, roč. 3. World Scientific, 2013.
- [15] Gurtin, Morton E. On the Two-Phase Stefan Problem with Interfacial Energy and Entropy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 96:200-240, 1986.
- [16] Huang, Haibo; Sukop, Michael; Lu, Xiyun. *Multiphase lattice Boltzmann methods: Theory and application*. John Wiley & Sons, 2015.
- [17] Karlin, Ilya V; Ferrante, Antonio; Öttinger, Hans Christian. Perfect entropy functions of the lattice Boltzmann method. *EPL (Europhysics Letters)*, 1999, roč. 47, č. 2, str. 182.
- [18] Krüger, Timm; Kusumaatmaja, Halim; Kuzmin, Alexandr; Shardt, Orest; Silva, Goncalo; Viggien, Erlend Magnus. The lattice Boltzmann method. *Springer International Publishing*, 2017, roč. 10, s. 978–3.
- [19] Kvasnica, Jozef. *Termodynamika*. Státní nakladatelství technické literatury, 1965.
- [20] Siqueland, Leiv Magne; Skjaeveland, Svein. Derivations of the Young–Laplace equation. *Unpublished Research*, 2014.
- [21] Sousa, Antonio; Nabovati, A.. LBM mesoscale modelling of porous media. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 06 2008, roč. 61, doi:10.2495/HT080061.
- [22] Strachota, Pavel. *Analysis and Application of Numerical Methods for Solving Nonlinear Reaction-Diffusion Equations*. Dizertační práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2012.
- [23] Sun, Ying; Beckermann, Christoph. Sharp interface tracking using the phase-field equation. *Journal of Computational Physics*, 2007, roč. 220, č. 2, s. 626–653.