České vysoké učení technické v Praze
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky
Obor: Aplikované matematicko-stochastické metody

Úvod do teorie kooperativních her: teoretická a experimentální studie

Introduction to cooperative games: theory and experiment

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Dominika Zogatová
Vedoucí práce: Ing. René Levínský, Ph.D.
Rok: 2020

Katedra: matematiky Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Dominika Zogatová
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Úvod do teorie kooperativních her: teoretická a experimentální studie
Název práce (anglicky):	Introduction to cooperative games: theory and experiment

Pokyny pro vypracování:

1. Co je kooperativní hra a její řešení?
2. Shapley value, core, Proper Shapley value a jejich axiomatizace.
3. Jak konstruovat nekooperativní hru jejímž rovnovážným stavem je řešení kooperativní hry.
4. Teorie Nashovského vyjednávání.
5. Které z řešení kooperativních her nejlépe reflektuje reálné chování lidských subjektů v laboratoři?
6. Experiment a jeho statistické vyhodnocení v programovacím jazyku R.

Doporučená literatura:

1. M. Besner, Axiomatizations of the proportional Shapley value. Theory and Decision 86, 2019, 161-183.

2. R. van den Brink, R. Levínský, M. Zelený, On proper Shapley values for monotone TU-games. Internat. J. Game Theory 44(2), 2015, 449–471.

3. S. Beal, S. Ferrieres, E. Rémalia, P. Solal, The proportional Shapley value and applications. GAMES and Economic Behavior 108, 2017, 93-112.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. René Levínský, PhD.
Center for Economic Research and Graduate Education (CERGE), Charles University, Politických vězňů 936/7, 110 00 Praha - Nové Město

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019

....
garant oboru

....
vedoucí katedry

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
-1-

....
děkan

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne ....

....
Dominika Zogatová

Poděkování

Chtěla bych zde poděkovat svému školiteli Ing. Reném Levínskému, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce. Dále bych také ráda poděkovala mé rodině za jejich trpělivost a podporu.

Dominika Zogatová

Název práce:
Úvod do teorie kooperativních her: teoretická a experimentální studie

Autor: Dominika Zogatová

Studijní program: Aplikace přírodních věd
Obor: Aplikované matematicko-stochastické metody
Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. René Levínský, Ph.D.
Center for Economic Research and Graduate Education (CERGE), Charles University

Abstrakt: Přiložená práce slouží jako úvod do kooperativních her. Ve zde popisovaných hrách mohou hráči vzájemně spolupracovat a následně si rozdělit zisk. Tato práce prezentuje a axiomatizuje několik řešení takovýchto situací. Součástí této práce je analýza ekonomického experimentu, který zkoumá vliv neúplnosti informace na vnímáni spravedlnosti. Analýza prokázala, že mezi zde zkoumanými řešeními nejlépe reflektuje chování účastníků experimentu v laboratoři Vlastní Shapleyho hodnota. Dále bylo prokázáno, že informace o vlastních schopnostech nebo individuální schopnosti jako takové, nemají vliv na vnímání spravedlnosti subjekty.

Klíčová slova: kooperativní teorie her, Shapleyho hodnota, Vlastní Shapleyho hodnota, behaviorální ekonomie

Title:
Introduction to cooperative games: theory and experiment

Author: Dominika Zogatová

Abstract: This thesis presents an introduction to cooperative game theory. This theory describes situations in which players form coalitions and redistribute their yield payoff after cooperation. Several solutions of cooperative games are presented and discussed in this paper. Furthermore, we present an experiment which analyzes the effect of incompleteness of information on justice. The Proper Shapley value has been shown to be one of the most accurate in describing human subjects behaviour. Moreover, it has been proven that the information of individual's performance or the performance itself does not have effect on perceived justice.

Key words: cooperative game theory, Shapleyho value, Proper Shapley value, behavioral economics

Obsah

Úvod

Teorie her je disciplína aplikované matematiky, zabývající se popisem konfliktních situací, mezi racionálně smýšlejícími subjekty. Za zakladatele jsou považováni John von Neumann a Oskar Morgenstern, kteří v polovině 20. století publikovali svou knihu *Teorie her a ekonomického chování* [17]. Dalšími matematiky zabývajícími se tímto odvětvím matematiky, byli například John Nash [16], [15], Lloyd Shapley [20], nebo Donald Bruce Gillies [6]. Primárně lze teorii her rozdělit do dvou částí, nekooperativní a kooperativní, která bývá také často nazývaná axiomatickou teorii her. Případy, kdy hráči nemohou mezi sebou kooperovat a vystupují ve hře individuálně, popisuje nekooperativní teorie her. Situacím, ve kterých hráči mohou spolu spolupracovat, za účelem získání lepšího výdělku, se věnuje kooperativní teorie her.

Uplatnění teorie her najdeme zejména v ekonomii, politice, počítačových technologiích, vojenské taktice a sociální psychologii. Nekooperativní teorie her popisuje individuální hry jako aukce, burzovní transakce, karetní hry a jiné. Příkladem situace, kterou se zabývá kooperativní teorie her, je tvorba politických koalic a následné rozdělení mandátů mezi koaličními stranami. Dalším, často prezentovaným příkladem, je stavba vodovodního potrubí mezi městy a následné rozdělení nákladů na tuto stavbu [23].

Tato práce se zaměřuje na hry s přenosnou výhrou. Jsou to hry, ve kterých hráči mohou tvořit koalice, ve kterých hrají a následnou výhru si mezi sebou rozdělí. Kooperativní teorie her prezentuje mnoho logických řešení takovýchto situací, a odpovídá na otázky, s kým je vhodné pro hráče kooperovat, a jak rozdělit společný výdělek.

Cílem této práce je uvést čtenáře do problematiky kooperativní teorie her a seznámit jej s několika možnými řešeními. Součástí práce je rovněž krátký úvod do teorie vyjednávaní. Dále je v této práci prezentován ekonomický experiment, který se zabývá otázkou, jak je ovlivněno vnímání spravedlnosti v případech, kde nejsou známy všechny informace o hráčích. Tato práce si dále klade za cíl rozhodnout, které z prezentovaných řešení her s přenosnou výhrou nejvíce reflektuje chování účastníků experimentu.

Tato bakalářská práce je rozdělena do dvou částí, teoretické a experimentální. V první kapitole je zavedeno značení a uvedena definice kooperativní hry. Druhá kapitola představuje různá řešení a jejich axiomatizaci. Aplikace všech představených konceptů je znázorněna na jednoduché hře tří hráčů. Ve třetí kapitole je teoreticky popsán proces vyjednávaní a další řešení kooperativní hry s přenosnou výhrou. Součástí této kapitoly je dále popis schémata, které umožňuje porovnávat nekooperativní hry s jedním z řešení kooperativních her, Shapleyho hodnotou. Druhou částí této práce je ekonomický experiment a jeho analýza. Ve čtvrté kapitole je představen popis experimentu a jeho analýza v jazyce R. Experimentální část této bakalářské práce je uzavřena prezentací výsledků datové analýzy.

Kapitola 1

Definice kooperativní hry a zavedení značení

Nechť $N = \{1, ..., n\}$ je neprázdná konečná množina hráčů, kde symbol $|N| = n$ značí mohutnost množiny N. Nechť 2^N je potenční množina množiny N, potom funkci $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$, která přiřazuje hodnotu $v(S)$ koalici $S \subseteq N$ a splňuje $v(\emptyset) = 0$ nazveme *charakteristickou funkcí*. Hodnota $v(S)$ je zisk koalice S. Charakteristická funkce v a množina hráčů N společně definují *kooperativní hru s přenosnou výhrou* (z ang. *transferable utility game - TU game*). Nechť dvojice (N, v) je hra s přenosnou výhrou. Množina všech her s přenosnou výhrou je značená $\mathscr{G}$. Nechť dále $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{G}$. Jednohodnotové řešení na $\mathscr{C}$ je funkce f, která přiřazuje každé hře $(N, v) \in \mathscr{C}$ výplatní vektor $x = f(N, v) \in \mathbb{R}^n$. Pro každou hru $(N, v) \in \mathscr{C}$ se její výplatní vektor nazývá *efektivní* pokud platí $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, tj. pokud plně rozděluje výdělek $v(N)$. Řešení f se nazývá efektivní právě tehdy, když přiřazuje efektivní výplatní vektor pro všechny $(N, v) \in \mathscr{C}$.

Nechť $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ je výplatní vektor. Množinu všech efektivních výplatních vektorů značíme jako $X(N, v)$. $X_+(N, v)$ je množina všech efektivních výplatních vektoru pro které platí $x_i > 0$ pro všechna $i \in N$, a $X_0(N, v)$ je množina všech vektorů, pro jejichž složky platí $x_i \geqslant 0$.

Nechť $\mathscr{G}$ je množina her s přenosnou výhrou a $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$. Třídu her $\mathscr{G}$' nazveme *super-additivní* na $\mathscr{G}$ právě tehdy. když $\forall T, S \subseteq N$ takové, že $S \cap T = \emptyset$ a $\forall (v, N) \in \mathscr{G}$' platí $v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T)$.
Nechť $\mathscr{G}'' \subset \mathscr{G}$. $\mathscr{G}''$ se nazývá *monotónní* třídou her pokud $v(S) \geqslant v(T), \forall (v, N) \in \mathscr{G}''$, $\forall T \subseteq S$. Co znamená, že koalice s více hráči vytěží více než jejich *podkoalice*. Pro monotónní hru zjevně platí, že $v(S) \geqslant 0$.

Hráč i je nazýván *dummy* hráč, platí-li $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$, $\forall S \subseteq N$. Hráč j je *nulový* hráč, je-li $v(S \cup \{j\}) = v(S)$, $\forall S \subseteq N$.

Nechť dále pro jednoduchost značení $x_S = \sum_{i \in S} x_i$ a symbol $\mathbb{R}_0^+$ označuje všechna nezáporná reálná čísla. Můžeme dále značit hru (N, v) pouze jako v, pokud bude zřejmé, že myslíme hru a ne charakteristickou funkci hry.

Kapitola 2

Různá řešení a jejich axiomatizace

Je přirozené omezit funkci f požadavky, které reflektují společenské normy, a také vytvořit řešení, které je aplikovatelné na všechny hry s přenosnou výhrou. Je mnoho řešení, které splňují tyto požadavky, a ty nejpopulárnější a nejobecnější jsou zmíněny a vysvětleny v této práci.

Jednoduchá a přirozená řešení f jsou například:

- *Egalitářské pravidlo* - rozděluje výdělek hlavní koalice rovnoměrně mezi členy hlavní koalice, bez ohledu na výdělky různých podkoalic [14].

$$f_i(N, v) = \frac{v(N)}{|N|}$$

- *SCRB* (z ang. *Separable cost remaining benefits method*) [9]

$$f_i(N, v) = \frac{v(N \cup \{i\}) - v(N)}{\sum_{j \in N} v(N \cup \{i\} - v(N))} v(N)$$

Obě tyto řešení nejsou v souladu s axiomy představenými v této práci a nebudou tudíž dále detailně diskutovány. Následující sekce popisují a axiomatizují různá řešení.

2.1 Shapleyho hodnota a její axiomatizace

Hlavním problémem kooperativní teorie her je, jak spravedlivě rozdělit výdělek společné spolupráce mezi hráče, jejichž individuální schopnosti se mohou lišit.

V roce 1953 Lloyd Shapley [20] představil řešení hry s přenosnou výhrou. Jeho pozorování bylo založeno na následujících pěti axiomech:

Axiom 2.1. *Hodnota výplatního vektoru x závisí pouze na charakteristické funkci v. Platí $x = \phi(N, v) = f(N, v) = f(\Gamma)$, kde Γ je zkrácený zápis pro hru (N, v).*

Axiom 2.2. *x je symetrický vektor ve všech svých elementech z N, tj. $\forall S \subset N$ takové, že $i, j \notin S \wedge (v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}))$ platí $f_i(N, v) = f_j(N, v)$.*

To znamená, že pokud nahradíme hráče i hráčem j, a hráče j hráčem i, jejich individuální výdělky se nezmění. Tudíž jakákoli asymetrie se opomíjí.

Axiom 2.3. *Efektivita: $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.*

Jediné uvažované vektory jsou ty, které rozdělují celý výdělek, protože není žádný logický důvod, proč nerozdělit mezi hráče vše.

Axiom 2.4. *Pokud $(N', v') = \beta(N, v)$, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$, pak $x' = \beta x$.*

Pokud vynásobíme hru pozitivním skalárem, pak se všechny výdělky změní odpovídajícím způsobem.

Axiom 2.5. *Pokud $(N, v) = (N', v') + (N'', v'')$, pak*

$$x_i = \begin{cases} x_i' + x_i'', & \text{pro } i \in N' \cap N'' \\ x_i', & \text{pro } i \in N \setminus N'' \\ x_i'', & \text{pro } i \in N \setminus N' \end{cases}$$

Výplata hráče, který hrál pouze v jedné hře zůstává stejná. Zatímco hrál-li hráč v obou hrách, jeho výdělky se sečtou.

Důkaz představen L. Shapleym odvozuje řešení splňující všech pět axiomů. Toto řešení je nazýváno *Shapleyho vektorem:*

$$\phi(N, v) = (\phi_i(N, v))_{i \in N},$$

a dále jeho jednotlivé složky

$$\phi_i(N, v) = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(|N| - |S|)!(|S| - 1)!}{|N|!}(v(S) - v(S - \{i\})) \tag{2.1}$$

se nazývají *Shapleyho hodnotami.*

Tyto hodnoty Shapley odvodil následovně:

Lemma 2.6. *Je-li i dummy hráč, potom $f_i(N, v) = v(\{i\})$.*

Důkaz.
Nechť $\Gamma = (N, v)$.
Nechť dále $\Gamma' = (N', v')$ je jiná hra na množině $N' = N - \{i\}$, kde $v'(S) = v(S)$ pro všechny $S \subseteq N'$ a nechť $\Gamma'' = (N'', v')$ je hra jediného hráče $N'' = \{i\}$, kde $v(\{i\})'' = v(\{i\})$.
Hru Γ''' definujeme vztahem: $\Gamma''' = \Gamma' + \Gamma''$, kde

$$v'''(S) = \begin{cases} v(S - \{i\}) + v(\{i\}), & \text{pro } i \in S \\ v(S), & \text{pro } i \notin S \end{cases}$$

Z předpokladu je hráč i dummy, a tedy $v''' = v$ a $\Gamma''' = \Gamma$. Axiom 2.5 pro $N' = N - \{i\}$, $N'' = \{i\}$ tvrdí, že $f_i = f_i''$. Použitím axiomu 2.3 toto může být modifikováno do tvaru $f_i = f_i'' = v''(N'') = v(\{i\})$. □

Lemma 2.7. *f_i je lineární v každém $v(S)$.*

Důkaz.
Uvažujme charakteristickou funkci v takovou, že:

$$v(S) > v(S \cap T) + v(S \cap (N - T)) \quad T, S \subseteq N.$$

Nechť dále platí pro nějaké $S, T, \epsilon_1, \epsilon_2$:

$$v'(T) = v''(T) = v(T) \quad T \neq S \tag{2.2}$$
$$v'(S) = v(S) - \epsilon_1 \quad \epsilon_1 > 0 \tag{2.3}$$
$$v''(S) = v(S) - \epsilon_2 \quad \epsilon_2 > 0. \tag{2.4}$$

Z rovnic (2.3) a (2.4):

$$v(S) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} v'(S) + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} v''(S).$$

Potom

$$\Gamma = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\Gamma' + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\Gamma'' = \frac{v''(S) - v(S)}{v''(S) - v'(S)}\Gamma' + \frac{v(S) - v'(S)}{v''(S) - v'(S)}\Gamma', \tag{2.5}$$

kde poslední rovnost opět plyne z (2.3) a (2.4).

Následně z rovnice (2.5) a axiomu 2.5

$$f_i(\Gamma) = \frac{v''(S) - v(S)}{v''(S) - v'(S)} f_i(\Gamma) + \frac{v(S) - v'(S)}{v''(S) - v'(S)} f_i(\Gamma'). \tag{2.6}$$

Upravením rovnice (2.6) získáme

$$f_i(\Gamma) = \frac{f_i(\Gamma'') - f_i(\Gamma')}{v''(S) - v'(S)} v(S) + \frac{v''(S) f_i(\Gamma') - v'(S) f_i(\Gamma'')}{v''(S) - v'(S)},$$

což je lineární funkce $v(S)$.

□

Lemma 2.8. *f_i je lineární a homogenní ve všech proměnných $v(S)$.*

Důkaz.
Pokud f_i je homogenní prvního stupně pak použitím lemma 2.7 je tvrzení dokázáno. Axiom 2.4 říká, že $f_i[\beta\Gamma] = \beta f_i[\Gamma]$ pro $\beta > 0$. Stačí ukázat, že tento vztah platí také pro záporné hodnoty β, například $\beta = -1$.
Pro ověření, že platí $f_i[-\Gamma] = -f_i[\Gamma]$ si stačí uvědomit, že $-\Gamma$ je kooperativní hrou pouze tehdy, když Γ je tvořena pouze dummy hráči. A dále z lemma 2.6

$$f_i[\Gamma] = v[\{i\}]$$
$$f_i[-\Gamma] = -v(\{i\}).$$

□

Lemma 2.9. *$f_i = f_i(N, v) = \sum_{S \ni i} \gamma_s v(S) + \sum_{T \not\ni i} \delta_t v(T)$. A koeficient γ_s, resp. δ_t závisí pouze na $|S| = s$, resp. $|T| = t$.*

Důkaz.
Důsledek axiomu 2.2 a lemma 2.8. □

Lemma 2.10. *$\delta_t = -\gamma_{t+1}$ pro $t = 1, ..., n-1$.*

Důkaz.

$$f_i = \sum_{S \ni i} \gamma_s [v(\{i\}) + v(S - \{i\})] + \sum_{T \not\ni i} \delta_t v(T) = \sum_{S \ni i} \gamma_s v(\{i\}) + \sum_{T \not\ni i} v(T)[\delta_t + \gamma_{t+1}]$$

Nechť i je dummy hráč, pak z lemma 2.6 je $\delta_T + \gamma_{T+1} = 0$. □

Lemma 2.11. *$\gamma_s = \frac{(|N|-|S|)!(|S|-1)!}{|N|!}$.*

Důkaz.
Lemma 2.9 a lemma 2.10 implikuje, že řešení ϕ_i lze rozepsat do následujícího tvaru:

$$f_i = \sum_{S \ni i} \gamma_s v(S) - \sum_{T \not\ni i} \gamma_{t+1} v(T) = \sum_{S \ni i} \gamma_s [v(S) - v(S - \{i\})]$$

Řešení musí být efektivní, tudíž:

$$v(N) = \sum_{i \in N} \sum_{S \ni i} \gamma_s [v(S) - v(S - \{i\})].$$

V sumě se objeví γ_s pro každé $i \in S$ a to právě s-krát, kde s je mohutnost množiny S. $-\gamma_{s+1}$ se objeví právě (n-s)-krát pro každé $i \notin S$, tj. pro každé $i \in N - S$.

$$v(N) = \sum_{S \subseteq N} (s\gamma_s - (n-s)\gamma_{s+1}) v(S)$$

a zároveň $v(N)$ nezávisí na $v(S)$ pro $S \subset N$.

$$\begin{aligned} s\gamma_s - (n-s)\gamma_{s+1} &= 0 & S \subset N \\ s\gamma_s &= (n-s)\gamma_{s+1} & s = 1,..n-1 \\ n\gamma_n &= 1 & n = |N| \\ \implies \gamma_n &= \frac{1}{n}, \quad \gamma_{N-1} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \dots \end{aligned}$$

□

Takto odvozené řešení je nazýváno Shapleyho hodnotou a značíme jej $\phi_i, \ \forall \ i \in N$.

Pokud hráč i není součástí koalice $S \subseteq N$ pak Shapleyho hodnota přechází do tvaru:

$$\phi_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N - \{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)), \tag{2.7}$$

kde $(v(S \cup \{i\}) - v(S))$ je přínos hráče $\{i\}$ do koalice $S \subseteq N \setminus \{i\}$.

Zápis Shapelyho hodnoty lze přeformulovat použitím *Hasanyiho dividend* $\Delta_v(S)$ [8]

$$\Delta_v(S) = \begin{cases} v(S) - \sum_{R \subseteq S} \Delta_v(R), & \text{pro } |S| \geqslant 1 \\ 0 & \text{pro } S = \emptyset \end{cases}$$

do kompaktnější formy:

$$\phi_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{1}{|S|} \Delta_v(S), \quad i \in N. \tag{2.8}$$

Zjevně platí $v(S) = \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T)$ pro všechny $S \subseteq N$.

Harsanyiho dividendy určují zisk z kooperace. Pro jednoduchou hru tří hráčů se Harsanyiho dividendy počítají následovně:

$$\begin{aligned} \Delta_v(\{i\}) &= v(\{i\}), \\ \Delta_v(\{i,j\}) &= v(\{i,j\}) - \Delta_v(\{i\}) - \Delta_v(\{j\}), \\ \Delta_v(\{i,j,k\}) &= v(\{i,j,k\}) - \Delta_v(\{i,j\}) - \Delta_v(\{j,k\}) - \Delta_v(\{i,k\}) \\ &\quad - \Delta_v(\{i\}) - \Delta_v(\{j\}) - \Delta_v(\{k\}. \end{aligned}$$

Shapley dále tvrdí [20], že každou hru (N,v) lze vyjádřit jako součet tzv. *jednohlasných* nebo-li *primitivních her*:

$$v = \sum_{\emptyset \neq R \subseteq N} c_R v_R, \qquad c_R v_R = \begin{cases} c_R & \text{pro } R \subseteq S \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Toto pozorování je využíváno k důkazu Youngova teorému, který bude vysloven a dokázán v následující sekci.

Často prezentovaný zápis Shapleyho hodnoty (2.8) lze jednoduchými úvahami odvodit jiným způsobem. Pro jednohlasné hry platí:

$$\begin{aligned} \Delta_v(S) &= 1 \quad S \subset N \\ \Delta_v(T) &= 0 \quad \forall T \subset N,\ T \neq S. \end{aligned}$$

Ze symetrie řešení, lemma 2.6 a faktu, že $v(N) = 1$ víme:

$$f_i(N,v) = \begin{cases} \frac{1}{|S|} & \forall i \in S \\ 0 & \forall i \notin S. \end{cases}$$

Každou hru můžeme zapsat jako součet jednohlasných her, pak:

$$f_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{c_R}{|S|} = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{1}{|S|} \Delta_v(S),$$

kde c_R je skalár z členu sumy rozkladu hry na primitivní hry.

Příklad 2.12.

Nechť $N = \{1,2,3\}$ jsou hráči ve hře, kde pro charakteristickou funkci v platí: $v(1) = 2, v(2) = 1, v(3) = 1, v(1,2) = 3, v(1,3) = 2, v(2,3) = 3, v(1,2,3) = 6$, potom:

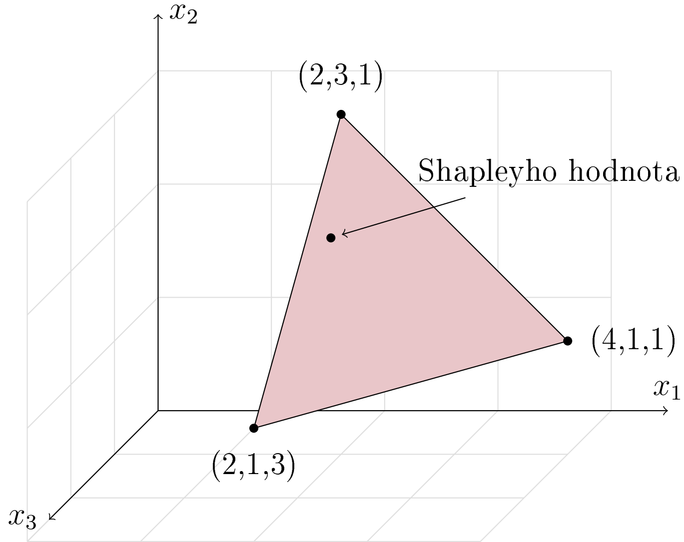
$$\begin{array}{ccc} \Delta_v(1) = 2 & \Delta_v(2) = 1 & \Delta_v(3) = 1 \\ \Delta_v(1,2) = 0 & \Delta_v(1,3) = -1 & \Delta_v(2,3) = 1 \\ & \Delta_v(1,2,3) = 2 & \end{array}$$

a složky Shapleyho vektoru mají následující hodnoty:

$$\begin{aligned} \phi_1(N,v) &= 2 + \frac{0}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \\ \phi_2(N,v) &= 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6} \\ \phi_3(N,v) &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{6} \end{aligned}$$

Všechen výdělek byl rozdělen $\sum_{i=1}^{3} \phi_i(N,v) = v(N) = v(1,2,3) = 6$, a proto řešení ϕ splňuje axiom efektivity.

Obrázek 2.1: Obrázek graficky znázorňuje Shapleyho hodnotu v prostoru imputací výplatního vektoru (z ang. *imputation*) pro příklad 2.12.



2.2 Youngova alternativní axiomatizace

Princip monotonie byl historicky definován několika různými způsoby. Young [23] zavedl obecný (*silný*) princip monotonie pro hru s přenosnou výhrou. Říká, že pokud se hra změní tak, že se přínos hráče do všech koalic zvýší, jeho výplata by neměla klesnout [23]. Princip monotonie může být chápan jako další axiom definující spravedlivost řešení.

Nechť f je řešení hry s přenosnou výhrou, $S \subseteq N$ a $(N, v), (N, w)$ dvě hry z množiny $\mathscr{G}$.

Axiom 2.13(a) *Agregovaná monotonie je definovaná* [13] *jako:*

$$v(N) \geqslant w(N) \text{ a } v(S) = w(S) \quad \forall S \subset N, \quad \text{potom } f_i(v) \geqslant f_i(w) \; \forall i \in N.$$

Tento zápis monotonie však nesplňuje *SCRB* metoda [23], ani nucleolus [13], řešení, které bude definováno v sekci 3.2. Naopak tomuto principu vyhovuje egalitářské pravidlo [23].

Axiom 2.13(b) *Koaliční monotonie je definovaná jako:*

$$v(S \cup \{i\}) \geqslant w(S \cup \{i\}) \text{ a } v(S) = w(S), \text{ potom } f_i(v) \geqslant f_i(w) \; \forall S : i \notin S$$

Takto definovaná monotonie tvrdí, že zvýšení hodnoty určité koalice, kdy hodnota ostatních koalic zůstává stejná, implikuje nesnížení přídělu žádnému z členů této koalice [23].

Axiom 2.13. *Silná monotonie definovaná jako:*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geqslant w(S \cup \{i\}) - w(S) \quad \forall S \subseteq N, \textit{ potom } f_i(v) \geqslant f_i(w) \ \forall i \in N.$$

Shapelyho hodnota splňuje všechny tři formy monotonie [23].

Věta 2.14 (Young [23])**.** *Shapleyho hodnota ϕ je jedinečné symetrické rozdělení výdělku, které je silně monotónní.*

Důkaz.
Shapleyho hodnota je silně monotónní $\iff \forall (N, v), (N, w)$ platí:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S), \ \forall S \subseteq N \implies \phi_i(v) = \phi_i(w), \quad \forall i \in N. \tag{2.9}$$

Nechť w je symetrická hra na N, pro kterou platí $w(S) = 0$, a tedy $w(S \cup \{i\}) - w(S) = 0$, $\forall i, S$. Ze symetrie $\phi_i(w) = \phi_j(w)$ a $\sum_{i \in N} \phi_i(w) = 0$. Tímto pro všechna $i \in N$ $\phi_i(w) = 0$. Z (2.9) $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0 \implies \phi_i(v) = 0 \ \forall i \in N$ a dummy hráč nedostane nic.

Každou hru lze vyjádřit jako součet primitivních her [20]:

$$v = \sum_{\emptyset \neq R \subseteq N} c_R v_R \qquad c_R v_R(S) = \begin{cases} c_R & \text{pro } R \subseteq S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \tag{2.10}$$

Chceme dokázat, že

$$\phi_i(v) = \sum_{\emptyset \neq R \subset N} \phi_i(c_R v_R) \stackrel{?}{=} \sum_{R : i \in R} \frac{c_R}{|R|}. \tag{2.11}$$

Definujme indexovou množinu I jako minimální počet nenulových členů sumy (2.10).

Platnost vztahu (2.11) dokážeme indukcí:

Nechť $I = 0$, potom každý hráč je dummy, a tedy $\phi_i(v) = 0$.

Nechť $I = 1$, potom $v = c_R v_R$ pro nějakou $R \subseteq N$.
Pro $i \notin R$: $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0, \forall S$, a silná monotonie implikuje $\phi_i(v) = 0$. Pro všechny $i, j \in R$ ze symetrie platí $\phi_i(v) = \phi_j(v)$ a z předpokladu efektivnosti výplaty, $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$, dojdeme k závěru, že

$$\phi_i(v) = \frac{c_R}{|R|} \quad \forall i \in R.$$

Indukcí $I \to I+1$.
Nechť $v = \sum_{k=1}^{I+1} c_{R_k} v_{R_k}, \ \ c_{R_k} \neq 0$.
Označme $R = \bigcap_{k=1}^{I+1} R_k$ a nechť $i \notin R$.
Definujeme hru:

$$w = \sum_{k: i \in R_k} c_{R_k} v_{R_k},$$

jejíž index je maximálně I a $v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S) = 0$ pro všechna S.
Indukcí a ze silné monotonie dostaneme vztah:

$$\phi_i(v) = \phi_i(w) = \sum_{k: i \in R_k} \frac{c_{R_k}}{|R_k|}.$$

Zbývá ukázat, že ϕ_i je Shapleyho hodnota pro $i \in R = \bigcap_{k+1}^{I+1} R_k$. Symetrie implikuje, že $\phi_i(v) = K$ pro všechna $i \in R, K \in \mathbb{R}$, a Shapleyho hodnota je také konstantní pro všechna $i \in R$.
Víme, že tyto dvě konstanty se rovnají pro všechna $i \notin R$ a dále také předpokládáme, že řešení jsou efektivní. Z toho plyne, že ϕ_i je Shapleyho hodnota pro $I+1$ a tím je tvrzení dokázáno. □

2.3 Vážená Shapleyho hodnota

Shapley předpokládá symetrické vyjednávací schopnosti hráčů, a Shapleyho hodnota rozděluje dividendy každé koalice rovnoměrně. Pokud ale hráči mají různé schopnosti, vážená Shapleyho hodnota přerozděluje dividendy na základě schopností jednotlivých hráčů. Tyto individuální schopnosti jsou reprezentovány vektorem vah.

Nechť $\omega \in \mathbb{R}^N$ je vektor vah všech hráčů, a dále platí, že $\omega_i > 0, \forall i \in N$, *vážená Shapleyho hodnota* je definovaná jako:

$$\phi_i^{\omega}(N, v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{\omega_i}{\omega_S} \Delta_v(S). \tag{2.12}$$

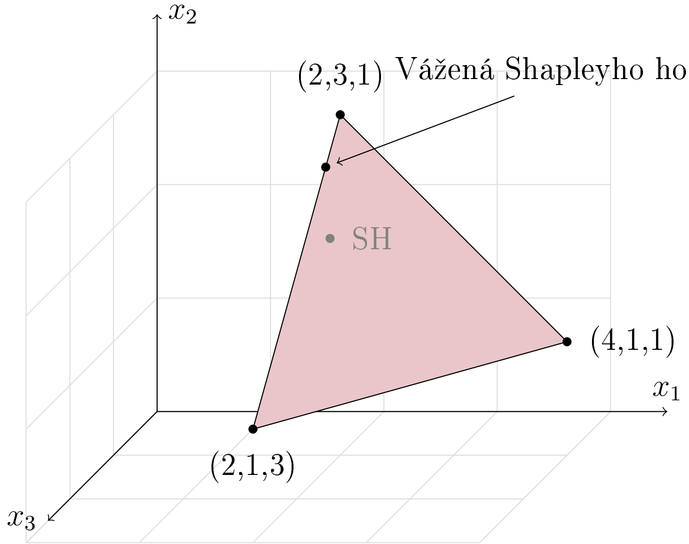
Dále, pokud pro dva pozitivní vektory ω a $\tilde{\omega}$ platí, že $\omega_i/\omega_j = \tilde{\omega}_i/\tilde{\omega}_j$ pro všechna $i, j \in N$, pak $\phi^{\omega}(N, v) = \phi^{\tilde{\omega}}(N, v)$. Vážená Shapleho hodnota se rovná Shapleyho hodnotě právě tehdy, když $\omega_i = \omega_j$ pro všechna $i, j \in N$.

PŘÍKLAD 2.15.
Uvažujme stejnou hru jako v příkladě (2.12) a dále nechť $\omega = (1, 2, 1)$ je vektor vah.
Vážená Shapleyho hodnota má následující hodnoty:

$$\phi_1(N,v) = 2 \cdot \frac{1}{1} + 0 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 2$$
$$\phi_2(N,v) = 1 \cdot \frac{1}{1} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{8}{3}$$
$$\phi_3(N,v) = 1 \cdot \frac{1}{1} + 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

Opět platí, že $\sum_{i \in N} \phi_i^{\omega} = v(N) = 6$ a uvedené řešení je efektivní.

Obrázek 2.2: Obrázek graficky znázorňuje váženou Shapleyho hodnotu v prostoru imputací výplatního vektoru pro daný vektor vah $\omega = (1, 2, 1)$.



2.4 Vlastní Shapleyho hodnota

První definice Vlastní Shapleyho hodnoty byla prezentovaná Vorobjevem a Ljapunovem v roce 1998 [22]. Vlastní Shapleyho hodnota přiřazuje váhy každému hráči tak, aby se jeho vážená Shapelyho hodnota rovnala jeho váze ve hře [4]. To znamená, že hledáme pevný bod ω, tak aby $\phi^{\omega} = \omega$.
Následující odvození, představené v [4] vysvětluje Vlastní Shapleyho hodnotu.
Nechť pro zjednodušení značení $h(x) = \phi^{x}(N,v)$, pro $x \in X_+$ a dále ω^1 je počáteční vektor vah, pro který platí $\omega_i^1 = \omega_j^1$ pro všechna $i, j \in N$. Aplikováním Shapleyho hodnoty $\phi(N,v) = \phi^{\omega^1}(N,v) = h(\omega^1) = \omega^2$ je vytvořen nový vektor vah ω^2. Použitím vážené Shapleyho hodnoty $\phi^{\omega^2}(N,v) = h(\omega^2) = \omega^3$ a opakováním této myšlenky je vygenerovaná posloupnost vektorů vah $(\omega^n)_{n=1}^{\infty}$, kde $\omega^{n+1} = h(\omega^n)$.

Pro hru $(N,v) \in \mathscr{G}$ definujeme více hodnotovou funkci H jako:

$$H(x) = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^n | \{\exists (x^n) \in X_+(N,v)\}\{x^n \to x \wedge h(x^n) \to \alpha\}\right\}.$$

Potom pro hru $(N, v) \in \mathscr{G}$ je výplatní vektor $x \in X_0(N, v)$ Vlastní Shapleyho hodnotou (VSH) hry (N, v) právě tehdy, když $x \in H(x)$.

Vlastní Shapleyho řešení (VSR)

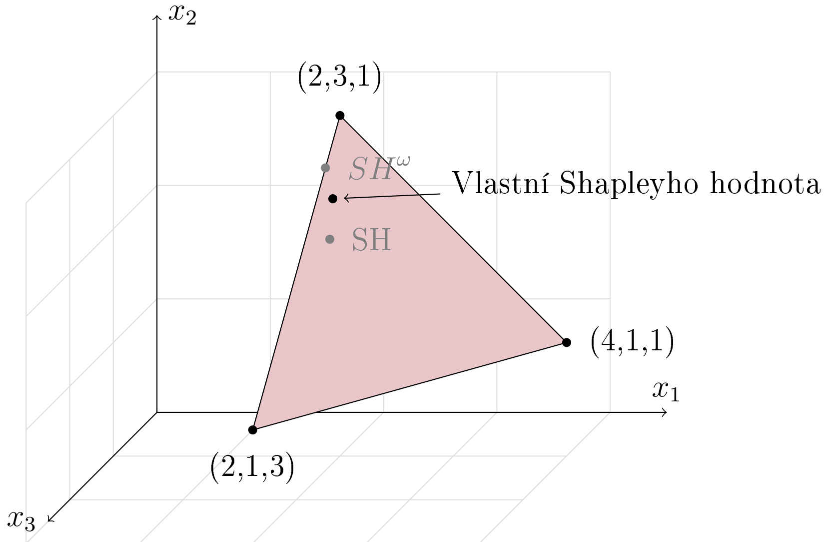
$$VSR(N,v) = \{x \in X(N,v) | \text{ x je VSH hry } (N,v)\}$$

PŘÍKLAD 2.16.
Pro vzorový příklad (2.12) je Vlastní Shapleyho hodnota vypočítána jako

$$\begin{aligned}
x_1 &= \Delta_v(1) \cdot \frac{x_1}{x_1} + \Delta_v(1,2) \cdot \frac{x_1}{x_1+x_2} + \Delta_v(1,3) \cdot \frac{x_1}{x_1+x_3} + \Delta_v(1,2,3) \cdot \frac{x_1}{x_1+x_2+x_3} \\
&= 2 - \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{2 \cdot x_1}{6} \\
x_2 &= \Delta_v(2) \cdot \frac{x_2}{x_2} + \Delta_v(1,2) \cdot \frac{x_2}{x_1+x_2} + \Delta_v(2,3) \cdot \frac{x_2}{x_2+x_3} + \Delta_v(1,2,3) \cdot \frac{x_2}{x_1+x_2+x_3} \\
&= 1 + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \frac{2 \cdot x_2}{6} \\
x_3 &= \Delta_v(3) \cdot \frac{x_3}{x_3} + \Delta_v(1,3) \cdot \frac{x_3}{x_1+x_2} + \Delta_v(2,3) \cdot \frac{x_3}{x_2+x_3} + \Delta_v(1,2,3) \cdot \frac{x_3}{x_1+x_2+x_3} \\
&= 1 - \frac{x_3}{x_1+x_3} + \frac{x_3}{x_2+x_3} + \frac{2 \cdot x_3}{6}.
\end{aligned}$$

Vyřešením výše uvedené soustavy získáme Vlastní Shapleyho hodnotu $VSH = (\frac{51-3\cdot\sqrt{33}}{16}, \frac{27-3\cdot\sqrt{33}}{4}, \frac{15\cdot\sqrt{33}-63}{16})$, a řešení je opět efektivní, $\sum_i VSH_i = v(N) = 6$.

Obrázek 2.3: Obrázek graficky znázorňuje Vlastní Shapleyho hodnotu v prostoru imputací výplatního vektoru.



2.5 Proporcionální Shapleyho hodnota a proporcionální pravidlo

Proporcionální Shapleyho hodnota je vážená Shapleyho hodnota, kde vektor vah se skládá z výdělků jednotlivců ve hře (N, v) [3].

Proporcionální Shapleyho hodnota:

$$\phi_i^p(N, v) = \sum_{i \in S, S \subseteq N} \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} \Delta_v(S) \quad \forall i \in N \tag{2.13}$$

Pokud se schopnosti všech hráčů jako jednotlivců rovnají, pak se proporcionální Shapleyho hodnota $\phi_i^p(N, v)$ rovná Shapleyho hodnotě $\phi_i(N, v)$. Proporcionální Shapleyho hodnota se rovná vážené Shapleyho hodnotě, když pro vektor vah $\omega \in \mathbb{R}^+$ platí $\omega_i(v) = v(\{i\}), \ \forall i \in N$.

Příklad 2.17.
Proporcionální Shapleho hodnota řeší vzorový příklad (2.12) následovně:

$$\begin{aligned}
\phi_1(N, v) &= 2 \cdot \frac{2}{2} + 0 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{12 - 4 + 6}{6} = \frac{14}{6} \\
\phi_2(N, v) &= 1 \cdot \frac{1}{1} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6 + 3 + 3}{6} = \frac{12}{6} \\
\phi_3(N, v) &= 1 \cdot \frac{1}{1} + 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{6 + 3 - 2 + 3}{6} = \frac{10}{6}
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že pro hru dvou hráčů má proporcionální Shapleyho hodnota stejnou hodnotu jako Vlastní Shapleyho hodnota.

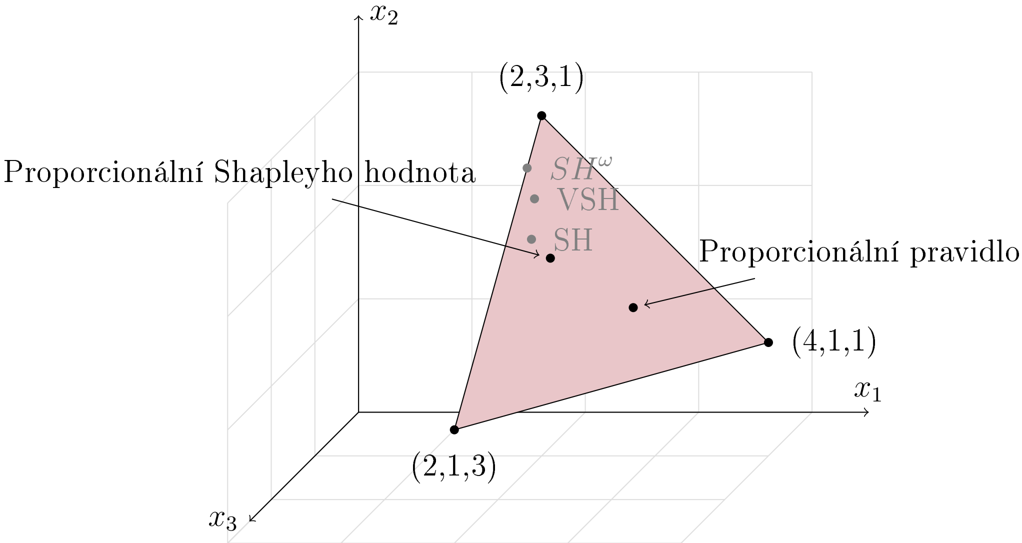
Proporcionální Shapleyho hodnota rozděluje výdělek mezi hráče podle jejich přínosu do různých koalic, kdežto *proporcionální pravidlo:*

$$P_i(N, v) = \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in S} v(\{j\})} v(N) \tag{2.14}$$

rozděluje pouze výdělek hlavní koalice $v(N)$ mezi hráče podle jejich schopností jako jednotlivců [2].

Příklad 2.18.
Podle pravidla (2.14) rozdělení výhry $v(N)$ mezi hráče $N = 1, 2, 3$ v příkladě (2.12) má tvar $P(N, v) = \{P_1(N, v), P_2(N, v), P_3(N, v)\} = \{3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

Obrázek 2.4: Obrázek graficky znázorňuje proporcionální Shapleyho hodnotu a proporcionální pravidlo v prostoru imputací výplatního vektoru.



Kapitola 3

Vyjednávání

3.1 Nashovské vyjednávání

Vyjednávání, které je v tomto případě také možno chápat jako smlouvání, je situací mezi hráči, kdy si jejich cíle neodporují, ale nejsou ani zcela totožné. Hráči mají v takovýchto situacích příležitost hrát s cílem vzájemného prospěchu. Zde zkoumané vyjednávání rozdělil Nash na dva přístupy, *kooperativní* a *nekooperativní*. V kooperativním přístupu k vyjednávání mohou hráči spolu komunikovat, v nekooperativním nikoli. Existují i další přístupy k vyjednávání jako například *Kalai-Smorodinského řešení* (z ang. *Kalai-Smorodinsky bargaining solution*) [12] nebo *rovnostářské řešení* (z ang. *Egalitarian bargaining solution*) [11]. Dále se omezíme na vyjednávání dvou hráčů.

Nekooperativní přístup

Nechť $u_i : M \to \mathbb{R}$ je užitková funkce i-tého hráče, $i \in \{1, 2\}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a bod $(0, 0) \in M$. Množina M obsahuje body, které budou dále nazývány scénáři. Užitková funkce každého z hráčů definuje jeho preference mezi různými scénáři. Nechť A, B, C jsou scénáře z M. Pro hráče a jeho užitkovou funkci platí:

1. Hráč je schopen se rozhodnout mezi dvěma scénáři, který z nich preferuje, nebo zda jsou pro něj oba stejně žádoucí, tj. $u_i(A) > u_i(B) \vee u_i(A) < u_i(B)$ $\vee$ $u_i(A) = u_i(B)$.

2. Pokud je pro hráče scénář A lepší než B, a scénář B lepší než C, platí, že scénář A je lepší než C, tj. $u_i(A) > u_i(B) \wedge u_i(B) > u_i(C)$, pak $u_i(A) > u_i(C)$.

3. Každá kombinace scénářů, které jsou stejně žádoucí, je také stejně žádoucí.

4. Nechť pro scénáře A, B, C platí vztah z bodu 2, potom existuje kombinace scénářů A a C, která je pro hráče stejně žádoucí, jako scénář C.

5. Nechť $0 \leq p \leq 1$ a scénáře A, B jsou stejně žádoucí, potom $pA + (1 - p)C$ a $pB + (1 - p)C$ jsou stejně žádoucí.

Scénáři, ve kterém během vyjednávání nedojede ke shodě mezi hráči, přiřadí užitková funkce hodnotu 0. Tímto bodem neshody nazveme bod $(0, 0) \in M$. Tato funkce je lineární a přiřazuje více žádoucímu scénáři větší hodnotu. Oba hráči se snaží maximalizovat svůj užitek. Nechť je M kompaktní množina scénářů a u_1, u_2 užitkové funkce dvou hráčů. Nechť (u_1, u_2, M) je vyjednávací problém a označme jeho řešení jako m, $\emptyset \neq m \subseteq M$.

Dále Nash [15] tvrdí:

6. Nechť pro body $A, B \in M$ platí:

$$u_1(B) \geq u_1(A) \quad \wedge \quad u_2(B) \geq u_2(A),$$

   potom $A \notin m$, tj. A není řešení vyjednávacího problému.

7. Nechť m' je řešení vyjednávacího problému (u_1, u_2, M'), $M \subseteq M'$ a $m' \subseteq M$, potom m' je řešení vyjednávacího problému (u_1, u_2, M).
8. Pokud je M symetrická, tj. $\forall (x, y) \in M$ je $(y, x) \in M$, pak řešení leží na přímce $u_1 = u_2$.

Řešení splňující výše uvedené podmínky leží v prvním kvadrantu. Je-li M kompaktní a konvexní, pak je toto řešení právě jedno [15].

Kooperativní přístup

V dále zkoumaných hrách mají všichni hráči stejné postavení, ale mohou mít různé schopnosti v oblasti vyjednávací taktiky, blafování, zastrašování nebo argumentace.

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je kompaktní, konvexní množina, $u_i : M \to \mathbb{R}$ užitková funkce a S_i množina strategii i-tého hráče, $i \in \{1, 2\}$. Nechť dále $s_i \in S_i$ je strategie hráče i, $m = (m_1, m_2)$ řešení vyjednávacího procesu dvou hráčů a (S_1, u_1, S_2, u_2, M) hra. Tuto hru, nebo-li vyjednávací proces, budeme dále značit pouze jako (S_1, S_2, M). Nash [16] popsal toto řešení následovně:

1. Pro každou hru (S_1, S_2, M) existuje jedinečné řešení $(m_1, m_2) \in M$.
2. Existuje-li scénář $A \in M$ takový, že $u_1(A) \geqslant m_1$ a $u_2(A) \geqslant m_2$, pak $A = m$.
3. Lineární transformace užitkové funkce nemění řešení (tato transformace však může změnit numerické hodnoty).
4. Řešení nezávisí na tom, který hráč je hráčem číslo jedna.

5. Nechť $M \subseteq M'$ a $(m_1^{'}, m_2^{'}) \in M$. Je-li $(m_1^{'}, m_2^{'})$ řešení hry (S_1, S_2, M'), potom je $(m_1^{'}, m_2^{'})$ řešením hry (S_1, S_2, M) .

6. Pokud omezíme strategii hráče, jeho výdělek se nezlepší:
$$S_1^{''} \subset S_1: \; m_1(S_1^{'}, S_2, M) \leqslant m_1(S_1, S_2, M)$$

7. Omezíme-li výběr obou hráčů na jednu strategii $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, platí
$$m_i(s_1, s_2, M) \leqslant m_i(S_1, S_2, M) \quad i \in \{1, 2\}.$$

Výše uvedené požadavky jednoznačně definují řešení vyjednávacího procesu. Tento koncept je rozšířením Nashova nekooperativního vyjednávaní o situace, ve kterých spolu hráči mohou komunikovat.

3.2 Jádro a nukleolus

Z určitých důvodů může být pro hráče více atraktivní formovat menší koalice, než je ta hlavní. Hráči formují hlavní koalici $v(N)$ právě tehdy, když se hodnota řešení nachází v *jádru* hry.

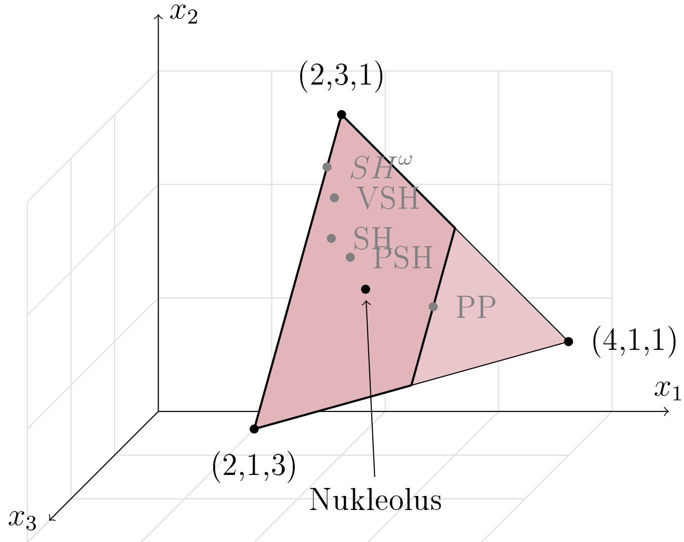
Nechť x je výplatní vektor kooperativní hry (N, v) s přenosnou výhrou. Potom *jádrem* [6] hry nazveme množinu:
$$\mathscr{J}(N, v) = \{x \in X(N, v) | \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S), \quad \forall S \subseteq N\}. \tag{3.1}$$

Příklad 3.1.
Výplatní vektor, který se nachází v jádru, musí pro vzorový příklad (2.12) splňovat:
$$\begin{array}{lll} x_1 \geqslant 2 & x_1 + x_2 \geqslant 3 & \\ x_2 \geqslant 1 & x_1 + x_3 \geqslant 2 & \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_3 \geqslant 1 & x_2 + x_3 \geqslant 3 & \end{array}$$
Takových vektorů je nekonečně mnoho.

Lze říct, že koalice, která má největší námitky vůči výplatnímu vektoru x je ta, která má největší přebytek $v(S) - \sum_{i \in S} x_i$, $S \subseteq N$ [19]. Nechť $x \in X(N, v)$ je výplatní vektor a $\theta(x)$ vektor, kde přebytky $v(S) - \sum_{i \in S} x_i$, $S \subseteq N$ jsou seřazeny vzestupně. Potom *nukleolusem* hry [19] je:
$$\mathscr{N}(X) = \{y \in X | \theta(y) \leqslant \theta(x), \forall x \in X\}.$$

Pokud je jádro neprázdné, potom nukleolus v něm leží [19].

Obrázek 3.1: Obrázek graficky znázorňuje *jádro hry* a *nukleolus* v prostoru imputací výplatního vektoru.



3.3 Konstrukce nekooperativní hry, jejímž řešením je Shapleyho hodnota

Pro studování vztahu mezi kooperativním a nekooperativním přístupem k vyjednávání, je potřeba definovat podmínky, za kterých tyto dva přístupy můžeme porovnávat.

Nechť je N množina hráčů, v charakteristická funkce a $t = \{0, 1, ...\}$ čas. Každý hráč vlastní zdroje a hráči mezi sebou mohou obchodovat. Označme jako Q množinu všech možných stavů, tj. taková množina, která obsahuje všechny rozklady N na disjunktní neprázdné podmnožiny a $q \in Q$ označíme jeden stav. q popisuje skutečnost, kolik hráčů v určitém čase ve hře zůstalo a také, kolik zdrojů každý hráč vlastní. Nechť dále $i, j \in N$ jsou dva hráči, kteří se setkají ve hře. Hráč i nabídne $r_t \in \mathbb{R}^+$ hráči j za jeho zdroje. Tento hráč nabídku buď přijme, prodá své zdroje a odejde ze hry, nebo odmítne a oba hráči pokračují ve hře dál. Hra trvá, pokud jsou ve hře dva nebo více hráčů.

Nashovou rovnováhou nazveme takovou množinu strategií hráče, kdy hráč nemůže změnou své strategie vylepšit svůj výsledek ve hře.

Faruk Gul [7] ukázal, že pokud časové intervaly mezi setkání hráčů jsou dostatečně malé, jednotlivé užitky hráčů v Nashovské rovnováze se rovnají Shapleyho hodnotám:

$$S(M, q) = \sum_{A \subset q} \frac{(\mu(A) - 1)!(\mu(N) - \mu(A))!}{\mu(N)!}(v(A) - v(A \setminus M)),$$

kde $M \in q$ a $\mu(A)$ je počet množin z q, které jsou obsaženy v A. Je zřejmé, že $S(M, q)$ je Shapleyho hodnotou.

Dále [7] tvrdí, že nutnou a postačující podmínku pro charakteristickou funkci, která potvrzuje vhodnost Shapleyho hodnoty, je *hodnotová aditivita* (z ang. *value additivity*):

$$S(L, q) + S(M, q) \leq S(L \cup M, R(q, L, M)),$$

$\forall q \in Q, \forall L, M \in q$, kde $R(q, L, M) = (q \setminus \{L, M\}) \cup \{L \cup M\}, R(q, L, M) \in Q$.

Pro detailnější informace a postup odvození této podmínky je čtenář odkázán na [7]. Otevřeným matematickým problémem zůstává otázka, jak konstruovat nekooperativní hru, jejímž řešením je Vlastní Shapleyho hodnota.

Kapitola 4

Experiment

V první polovině minulého století byla ekonomie vnímaná jako neexperimentální věda, spoléhající se pouze na reálná data. Možnosti porovnávat ekonomickou teorii se skutečnými daty byly velice omezené. V současné době lze v kontrolovaných laboratorních podmínkách zkoumat lidské chování v zjednodušených ekonomických situacích. Vernon Smith, jeden ze zakladatelů experimentální ekonomie, zavedl několik principů, které se používají v ekonomických experimentech dodnes. Na rozdíl od experimentů v jiných oborech, motivací účastníků v ekonomických experimentech jsou peníze. Jedním z předpokladů ekonomické teorie je, že lidská rozhodnutí se řídí rozumem a vlastním zájmem. V reálných komplexních situacích je ale chování lidských subjektů často neracionální a intuitivní. Dalšími ikonickými pracemi v oboru experimentální a behaviorální ekonomie jsou [10] nebo [21].

Cílem níže uvedeného experimentu bylo zjistit, jak se lidé rozhodují při rozdělování výdělku, kdy mají neúplné informace o produktivitě hráčů. To znamená, jaká teoretická řešení se nejvíce přibližují reálným pozorováním.

4.1 Návrh experimentu

Experiment byl proveden v Nizozemsku na Radboud Universiteit Nijmegen. Účastníci, z různých studijních oborů, byli vybráni autory experimentu z databáze ORSEE z Radboud University. K naprogramování experimentu byl použit z-tree software [5]. Experiment se skládal ze sedmi kohort. Jednotlivých kohort se zúčastnilo 30, 30, 18, 24, 24, 15, 21 účastníků.

První úlohou účastníků bylo počítání nul v maticích 10x10 po dobu 3 minut [1]. V maticích se objevovaly pouze nuly a jedničky. Za každou správně vypočítanou matici účastník obdržel 1 JEM (*jednotka experimentální měny*), a následně mu byla vygenerovaná nová matice. Pokud byl účastníkem počet nul zadán nesprávně třikrát, 1 JEM byla odečtena z výsledného výdělku, a účastníkovi byla vygenerovaná nová matice. Hodnota 1 JEM byla stanovena jako 0.25 centů. Penalizace za chybně spočítané matice byla zavedena za účelem odrazení účastníků od tipování výsledku.

Získaná data ukázala, že ze všech 162 účastníků pouze 3 zadali v první úloze počet nul nesprávně třikrát, a je tedy zřejmé, že princip penalizace byl funkční. Cílem této úlohy bylo představit účastníkům náročnost této úlohy a také ukázat, že případné rozdíly v úspěšnosti hráčů nejsou náhodné, a závisí na schopnostech a vynaloženém úsilí.

V druhé úloze byly účastníkům náhodně přiděleny role soudce a hráče, a následně všichni počítali nuly v maticích 10x10 po dobu 15 minut. Role soudce byla přiřazena 1/3 účastníků, a tito účastníci byli obeznámení ze skutečností, že jejich výplata nezávisí na jejich výkonnosti v druhé úloze, a s její fixní hodnotou budou obeznámeni na konci experimentu. Role hráče byla přiřazena 2/3 účastníků. Poté byli všichni účastníci náhodně rozděleni do trojic (2 hráči +1 soudce). Za každý správný počet nul byla dvojice hráčů odměněna 1 JEM a za třikrát chybně zadaný výsledek byla 1 JEM odečtena z výdělku dané dvojice. Po skončení druhé úlohy byl v každé trojici soudcem rozdělen hráčům celkový výdělek.

Jednotlivým soudcům byla představená celková produkce dvou hráčů ($P1, P2$) a také počítačově náhodně vybrané 3 z 15 minut samostatné produkce každého z hráčů. Soudci bylo předloženo pět možných scénářů druhé úlohy, kde pouze jeden byl skutečný a zbytek hypotetický. Možné scénáře byly vždy seřazeny stejně, vždy na čtvrtém místě byla udána reálná produkce hráčů (tabulka 4.1). V kohortách 4, 5, 6 experimentu byli soudci obeznámeni se svým výkonem v první úloze. Ve zbylých kolech tuto informaci neobdrželi, ale zde nelze vyloučit, že účastníci sami nesledovali svoje výsledky.

Tabulka 4.1: Scénáře prezentované účastníkům po dokončení druhé úlohy

scénář	Hráč P1 (3min)	Hráč P2 (3min)	Společný výdělek (15min)	min{P1,P2}/(P1+P2)
1	7	9	88	44%
2	8	4	65	33%
3	6	13	102	32%
4	SKUTEČNOST	SKUTEČNOST	SKUTEČNOST	SKUTEČNOST
5	2	7	52	22%

Soudci rozdělili společný výdělek (získaný oběma hráči za 15min) mezi hráče $P1$ a $P2$. Toto rozdělení bylo přímo spojeno s výslednou výplatou hráčů a soudce s tímto byl obeznámen. Po postupném rozdělení výdělků ve všech pěti případech, se soudcům objevila závěrečná obrazovka, na které mohli přerozdělit výdělek v některém z případů. Tabulka 4.1 byla také předložena hráčům a jejich způsob rozdělení byl zaznamenán. Toto rozdělení již nemělo vliv na výplatu žádného z účastníků experimentu.

Po skončení druhé úlohy všichni účastníci obdrželi informace o své produkci, produkci partnera a také rozdělení společného výdělku soudcem. V poslední fázi experimentu byl účastníkům předložen dotazník (viz Přílohy).

4.2 Analýza dat

Pro další analýzu byla zvolena hladina testu $\alpha = 0.05$.

4.2.1 Teoretické rozdělení výdělku

Níže uvedená představuje čtyři námi zkoumané scénáře. Tyto scénáře byly smyšlené a s produkcí hráčů nesouvisí. Scénář číslo 4 z tabulky 4.1, který neobsahoval homogenní výsledky pro různé hráče, k další analýze použit nebyl, a sloužil pouze k finančnímu ohodnocení účastníků. V tabulce 4.2 jsou popsány scénáře 1, 2, 3 a 5, a pro každý scénář jsou představeny teoretické způsoby rozdělení společného výdělku hráčů $P1$ a $P2$ za celých 15 minut. Nechť dále x_1 označuje výplatu hráče $P1$ a x_2 výplatu hráče $P2$, $v(\{P1\})$, resp. $v(\{P2\})$ označuje tříminutovou produkci hráče $P1$, resp. $P2$, a $v(\{P1, P2\})$ označuje společný výdělek za celou hru. Pokud zisk rozdělíme rovnoměrně, každý z hráčů obdrží $\frac{v(\{P1,P2\})}{2}$, to je polovinu celkového výdělku. Shapleyho hodnota se v této hře rovná:

$$x_1 = v(\{P1\}) + \frac{v(\{P1, P2\}) - v(\{P1\}) - v(\{P2\})}{2},$$
$$x_2 = v(\{P2\}) + \frac{v(\{P1, P2\}) - v(\{P1\}) - v(\{P2\})}{2}.$$

Zde, stejně jako v každé hře dvou hráčů, se Shapleyho hodnota rovná nukleolusu i řešení Nashova vyjednávaní. Třetí zkoumanou možností jak rozdělit společný výdělek je Vlastní Shapleyho hodnota. Analyzovaná situace je hrou dvou hráčů, a pro tento typ her má Vlastní Shapleyho hodnota explicitní tvar:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{v(\{P1\})}{v(\{P1\}) + v(\{P2\})} \cdot v(\{P1, P2\}), \frac{v(\{P2\})}{v(\{P1\}) + v(\{P2\})} \cdot v(\{P1, P2\}) \right).$$

Tabulka 4.2: Teoretická rozdělení pro zkoumané scénáře

	Scénář 1	Scénář 2	Scénář 3	Scénář 5
P1 (3min)	7	8	6	2
P2 (3min)	9	4	13	7
P (15min)	88	65	102	52
Rovné rozdělení	(44 ; 44)	(32.5 ; 32.5)	(51 ; 51)	(26 ; 26)
Shapleyho hodnota	(43 ; 45)	(34.5 ; 30.5)	(47.5 ; 54.5)	(23.5 ; 28.5)
Vlastní Shapleyho hodnota	(38.5 ; 49.5)	(43.3 ; 21.7)	(32.2 ; 69.8)	(11.6 ; 40.4)

Slabším hráčem (ang. *weaker player*) budeme dále nazývat toho, který v zaznamenaných třech minutách vydělal méně. Hráče, který vydělal více, nazveme silnějším (ang. *stronger player*). Testovat budeme tři hypotézy, pro skupinu soudců a skupinu hráčů. Budeme zkoumat, zda jsou data soudců, resp. hráčů jsou rozdělena rovným dílem, podle Shapleyho hodnoty nebo podle Vlastní Shapleyho hodnoty.

Zkoumané hypotézy můžeme zapsat jako:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: X_W = X_{W_R} && \text{vs.} && H_1 : X_W \neq X_{W_R} \\
H_0 &: X_W = X_{W_{SH}} && \text{vs.} && H_1 : X_W \neq X_{W_{SH}} \\
H_0 &: X_W = X_{W_{VSH}} && \text{vs.} && H_1 : X_W \neq X_{W_{VSH}},
\end{aligned}
$$

kde X_W označujeme výplatu slabšího hráče a X_{W_R} teoretickou výplatu slabšího hráče podle rovného rozdělení, $X_{W_{SH}}$ výplatu slabšího hráče podle Shapleyho hodnoty a $X_{W_{VSH}}$ výplatu slabšího hráče podle Vlastní Shapleyho hodnoty.

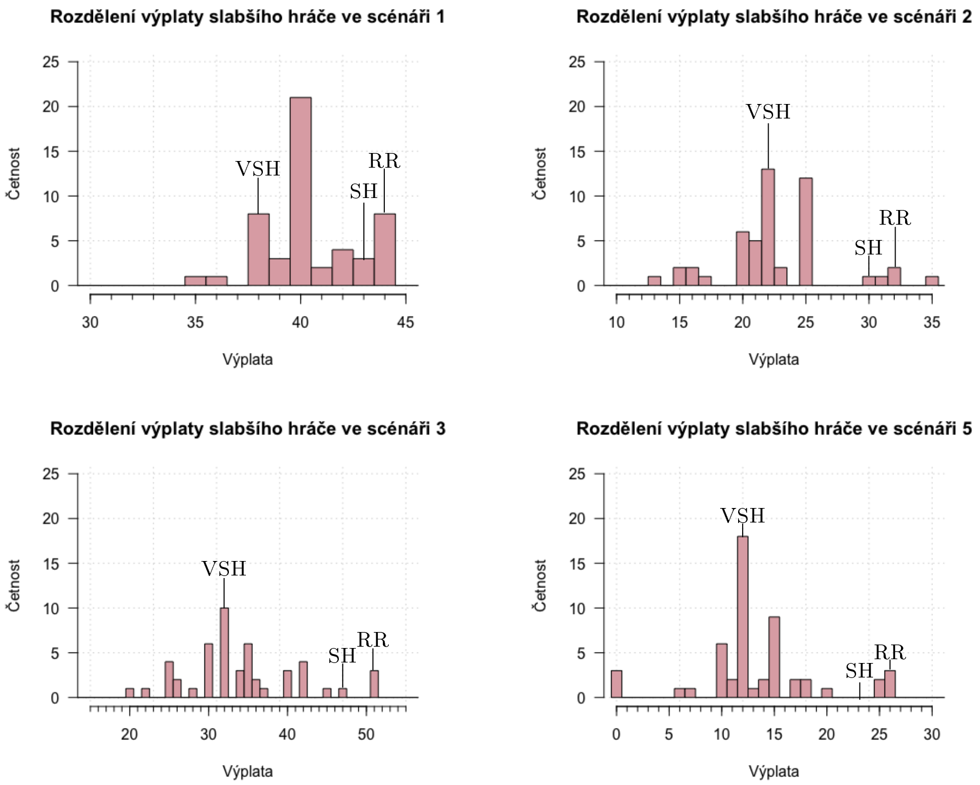
Soudci

Dále budou zkoumány data soudců. Soudci rozhodovali o výplatě dvou hráčů na základě tří náhodně vybraných minut a tento způsob rozdělení výdělku reprezentuje tzv. *distribuční spravedlnost*.

Následující tabulka popisuje veličiny základní statistiky pro rozdělení výdělku slabšímu hráči (tabulka 4.3). Slabší hráč v scénáři 1 vydělal 7 ze společných 16, to je 44%. Průměrně bylo slabšímu hráči soudci přiděleno 39.07 z celkových 88, to je 44% celkové produkce. Ve druhém scénáři slabší hráč vydělal 33% a bylo mu průměrně přiděleno 34%, ve scénáři číslo 3 vydělal 32% a bylo mu přiděleno 32% a ve scénáři 5 vydělal 22% a soudci mu bylo průměrně přiděleno 27% z celkového výdělku. Lze jednoduše vypozorovat, že soudci rozdělovali celkový výdělek mezi hráče proporcionálně, na základě informací o tříminutové produkci každého z hráčů. Je zde patrný trend mírného vyrovnávání výplaty pokud byl rozdíl mezi hráči příliš velký.

Tabulka 4.3: Slabší hráč

	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.1	6.76	40	0	44	44	43	38.5
Scénář 2	22.3	8.5	22	0	55	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	32.3	11.6	32.1	0	60	51	47.5	32.2
Scénář 5	13.8	6.63	12	0	40	26	23.5	11.6



Obrázek 4.1: Histogramy znázorňující rozdělení výplaty slabšímu hráči soudcem

Obrázek 4.1 znázorňuje histogramy výdělku slabšího hráče přiřazeného soudcem.

V další části bylo zkoumáno, zda se data získaná z experimentu shodují s některým z teoretických způsobů rozdělení celkového výdělku. K této analýze bylo nejprve potřeba prokázat normalitu zkoumaných dat, která byla testovaná *Shapiro testem*. V případě, že u dat bylo prokázáno normální rozdělení, byl použit jednovýběrový *t-test*, který prokázal nebo vyvrátil hypotézu, že data experimentu byly rozděleny mezi hráče rovnoměrně, Shapleyho hodnotou nebo Vlastní Shapleho hodnotou. Pokud zkoumaná data nemají normální rozdělení, byl rovněž použit *t-test*, ale jeho výsledek je potvrzen ještě *Wilcoxonovým testem*. Wilcoxonův test je neparametrickým testem, který nepředpokládá normalitu dat a k testovaní shody experimentálních dat s teoretickou hodnotou používá medián. Testována byla vždy shoda experimentálních a teoretických výsledků pro slabšího hráče, pro silnějšího hráče jsou výsledky totožné.

Shapiro test s $p-hodnotou \approx 10^{-16}$ neprokázal normalitu dat scénáře 1 pro slabšího hráče. t-test zamítl hypotézu, že data byla soudci rozdělena rovným rozdělením mezi hráče ($p - hodnota \approx 10^{-6}$) a tento výsledek potvrdil i Wilcoxonův test ($p - hodnota \approx 10^{-9}$). Zamítnutá byla také hypotéza, že celková výplata byla rozdělena dle Shapleyho hodnoty ($p-hodnota \approx 10^{-5}$) a tento výsledek byl potvrzen Wilcoxonovým testem ($p - hodnota \approx 10^{-9}$). t-test nezamítl, že experimentální data jsou rozdělena dle Vlastní Shapleyho hodnoty ($p - hodnota \approx 0.54$), ale tento závěr nebyl potvrzen Wilcoxonovým testem, který nulovou hypotézu zamítl ($p - hodnota \approx 10^{-5}$).

Dále byla zamítnuta normalita dat slabšího hráče u scénáře 2 ($p - hodnota \approx 10^{-6}$). S $p-hodnotou \approx 10^{-12}$ byla použitím t-testu vyvrácená hypotéza, že soudci rozdělili celkový výdělek rovně mezi oba hráče a tento závěr byl potvrzen Wilcoxonovým testem ($p - hodnota \approx 10^{-9}$). Rozděleny nejsou ani podle Shapleyho hodnoty (t-test: $p - hodnota \approx 10^{-9}$, Wilcoxonův test: $p - hodnota \approx 10^{-8}$). Nelze vyvrátit nulovou hypotézu, že soudci rozdělili výdělek podle Vlastní Shapleyho hodnoty (t-test: $p - hodnota \approx 0.59$, Wilcoxonův test: $p - hodnota \approx 0.29$).

Ani data scénáře 3 nebyla normálně rozdělena (p-$hodnota \approx 10^{-4}$). t-test vyvrátil shodu rovnoměrného rozdělení ($p-hodnota \approx 10^{-16}$) a Shapleyho hodnoty ($p-hodnota \approx 10^{-13}$), a výsledek byl u obou případů potvrzen Wilcoxonovým testem (rovnoměrné rozdělení: $p - hodnota \approx 10^{-10}$, Shapleyho hodnota: $p - hodnota \approx 10^{-10}$). t-test $p - hodnotou \approx 0.93$ nevyvrátil nulovou hypotézu, že data se shodují s Vlastní Shapleyho hodnotou a tento závěr potvrdil i Wilcoxonův test ($p-hodnota \approx 0.48$).

Shapiro-Wilkův test vyvrátil hypotézu, že data scénáře 5 pro slabšího hráče jsou normálně rozdělená ($p-hodnota \approx 10^{-6}$). Hypotéza, že se data experimentu shodují s rovnoměrným rozdělením, resp. Shalpeyho hodnotou byly zamítnuty (t-test: $p - hodnota \approx 10^{-16}$, Wilcoxonův test: $p-hodnota \approx 10^{-9}$), resp. (t-test: $p-hodnota \approx 10^{-15}$, Wilcoxonův test: $p - hodnota \approx 10^{-9}$). S $p - hodnotou \approx 0.02$ t-test vyvrátil nulovou hypotézu, že naměřená data se shodují s Vlastní Shapleyho hodnotou a tento závěr byl potvrzen Wilcoxonovým testem s $p - hodnotou \approx 0.003$.

Analýza dat soudců ukázala, že v žádném ze scénářů nebyl výdělek rozdělen podle rovného rozdělení, a ani podle Shapleyho hodnoty. Vlastní Shapleyho hodnota se shoduje nejvíce se získanými daty, ale na hladině testu byla potvrzena pouze u scénářů 2, 3.

Hráči

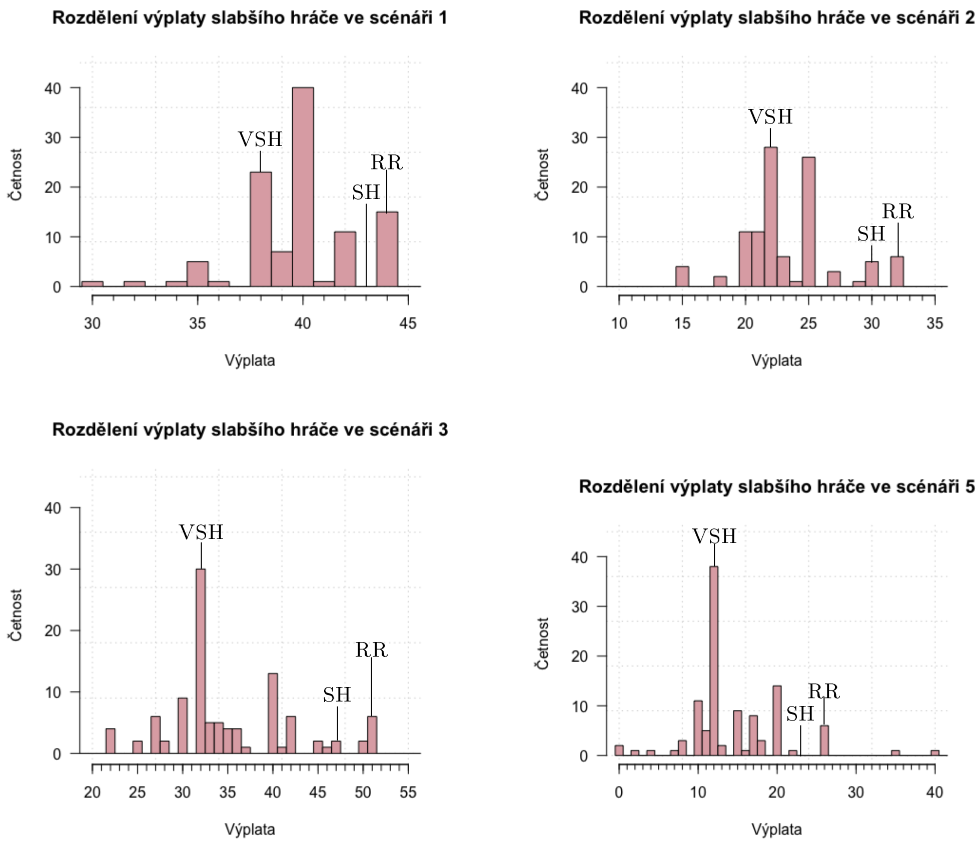
Rozhodnutí hráčů nemělo vliv na výplatu žádného z účastníků experimentu a data znázorňují tzv. *vnímanou spravedlnost.* Zde hráči udávali, co vnímají jako spravedlivé i přesto, že nemohli nijak ovlivnit konečné rozdělení výdělků žádné z dvojic. Experimentální data opět porovnáváme s teoretickými hodnotami.

Tabulka 4.4 níže obsahuje veličiny základní statistiky pro konečné rozdělení celkového výdělku dvojice hráčů $P1$ a $P2$ slabšímu z hráčů. V porovnání s hodnotami v tabulce soudců bylo průměrně v každém ze scénářů přiděleno slabšímu hráči více. V prvním scénáři bylo slabšímu hráči přiděleno průměrně 45% celkového zisku dvojice. Ve druhém scénáři slabší hráč dostal průměrně 37% z celkového zisku a ve třetím scénáři 35%. V scénáři číslo 5 byl slabší hráč odměněn 28% celkového zisku dvojice.

Histogramy na obrázku 4.2 graficky znázorňují rozdělení výplaty slabšího hráče v případech, kdy o potenciálním rozdělení rozhodoval hráč.

Tabulka 4.4: Slabší hráč

	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.8	3.23	40	22.0	49.5	44	43	38.5
Scénář 2	24.1	5.22	22	15	44	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	36.2	9.2	33	22	80	51	47.5	32.2
Scénář 5	14.4	5.99	12	0	40	26	23.5	11.6



Obrázek 4.2: Histogramy znázorňující rozdělení výplaty slabšímu hráči hráčem

Při testování shody dat rozdělení výdělků hráči byl použit totožný postup, jako v případě soudců. Nejprve byla testovaná normalita dat použitím Shapiro-Wilkova testu. Následně byl použit jednovýběrový t-test a v případě, že naměřená data nemají normální rozdělení byl výsledek potvrzen Wilcoxonovým testem. Experimentální data žádného ze scénářů nejsou normálně rozdělená (viz tabulka 4.5). Shodu s teoretickými řešeními jsme vyvrátili také ve všech případech (viz tabulka 4.6).

Tabulka 4.5: $p - hodnoty$ Shapiro-Wilkova testu

	Shapiro
Scénář 1	$\approx 10^{-9}$
Scénář 2	$\approx 10^{-10}$
Scénář 3	$\approx 10^{-9}$
Scénář 5	$\approx 10^{-8}$

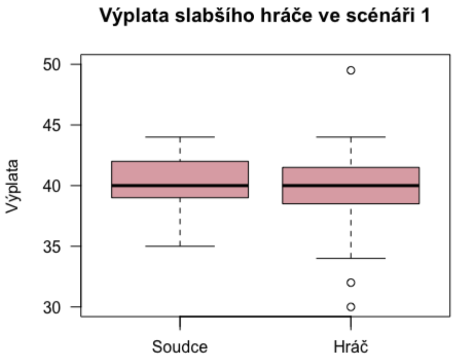
Tabulka 4.6: $p - hodnoty$ t-testu a Wilcoxonova testu

	t-test	Wilcoxon
Scénář 1 x RR	$\approx 10^{-16}$	$\approx 10^{-16}$
Scénář 1 x SH	$\approx 10^{-16}$	$\approx 10^{-16}$
Scénář 1 x VSH	$\approx 10^{-4}$	$\approx 10^{-8}$
Scénář 2 x RR	$\approx 10^{-16}$	$\approx 10^{-16}$
Scénář 2 x SH	$\approx 10^{-16}$	$\approx 10^{-14}$
Scénář 2 x VSH	$\approx 10^{-6}$	$\approx 10^{-6}$
Scénář 3 x RR	$\approx 10^{-16}$	$\approx 10^{-6}$
Scénář 3 x SH	$\approx 10^{-16}$	$\approx 10^{-15}$
Scénář 3 x VSH	$\approx 10^{-5}$	$\approx 10^{-4}$
Scénář 5 x RR	$\approx 10^{-16}$	$\approx 10^{-16}$
Scénář 5 x SH	$\approx 10^{-16}$	$\approx 10^{-16}$
Scénář 5 x VSH	$\approx 10^{-6}$	$\approx 10^{-6}$

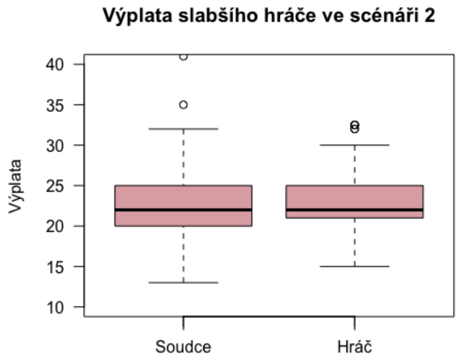
Srovnání soudců s hráči

Ve všech čtyřech analyzovaných scénářích se ukázalo, že hráči přidělují větší část společného výdělku slabšímu hráči v porovnání se soudci. V prvním scénáři vzrostl výdělek slabšího hráče o 2%, v druhém o 8%. Ve scénáři číslo 3 slabší hráč dostal od hráčů o 12% více než od soudců a v scénáři číslo 5 byl tento rozdíl 4%.

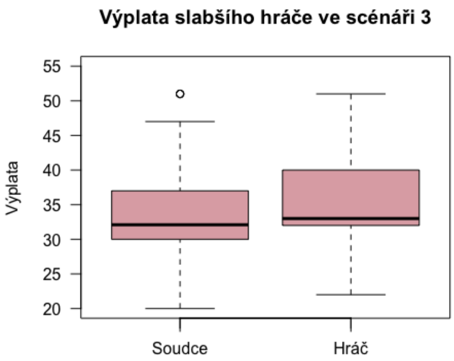
Při testování chování soudců a hráčů se ukázalo, že jsou srovnatelná. V prvním scénáři t-test nevyvrátil nulovou hypotézu (s $p - hodnotou \approx 0.49$), že data se shodují. Tento závěr podpořil i Wilcoxonův test s $p - hodnotou \approx 0.41$. Ke stejnému závěru došlo i testování druhého scénáře (t-test: $p - hodnota \approx 0.17$, Wilcoxonův test: $p - hodnota \approx 0.15$). Rozdíl mezi daty soudců a hráčů ukázal t-test ve scénáři číslo 3 ($p - hodnota \approx 0.04$), ale tento závěr nebyl potvrzen Wilcoxonovým testem ($p - hodnota \approx 0.15$). Poslední zkoumaný scénář také neprokázal statisticky významný rozdíl mezi daty soudců a hráčů (t-test: $p - hodnota \approx 0.57$, Wilcoxonův test: $p - hodnota \approx 0.64$).



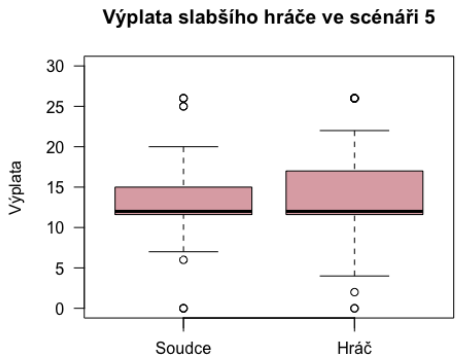
(a) boxplot



(b) boxplot



(c) boxplot



(d) boxplot

Obrázek 4.3: Krabicové diagramy (z ang. *boxplot*) porovnávající rozdělení výplaty slabšímu hráči soudcem a hráčem ve všech zkoumaných scénářích

4.2.2 Analýza dle dalších kritérií

Analýza dle informací získaných o vlastní úspěšnosti v první úloze

Níže uvedené tabulky popisují základní statistiky pro rozdělení celkového výdělku dvojice slabšímu hráči soudci a hráči v případech, kdy znali svojí vlastní produkci v první úloze, a kdy nikoli. V kohortách 4,5,6 byli soudci i hráči informováni o svém vlastním výkonu v první úloze a zkoumanou otázkou je, zda se jejich chování mění, pokud tuto informaci obdrží.

Tabulka 4.7: Základní statistika soudců, kteří znali svůj výkon

	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.4	5	40	20	44	44	43	38.5
Scénář 2	23.8	6.2	22	15	41	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	35.9	9.3	34.5	25	60	51	47.5	32.2
Scénář 5	14.9	7.68	12.5	6	40	26	23.5	11.6

Tabulka 4.8: Základní statistika soudců, kteří neznali svůj výkon

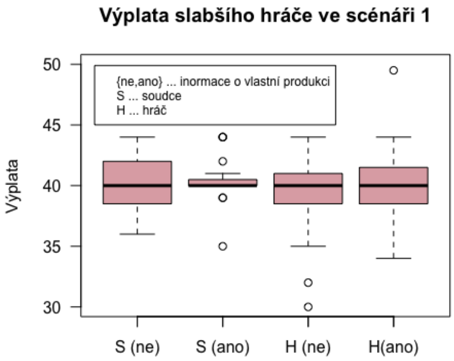
	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	38.9	7.68	40	0	44	44	43	38.5
Scénář 2	21.4	9.58	22	0	55	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	30.3	12.4	32	0	51	51	47.5	32.2
Scénář 5	13.2	5.96	12	0	26	26	23.5	11.6

Tabulka 4.9: Základní statistika hráčů, kteří znali svůj výkon

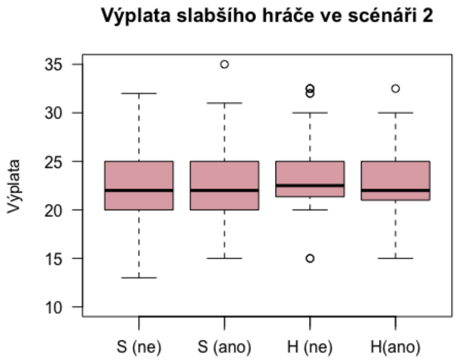
	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.7	3.86	40	22	49.5	44	43	38.5
Scénář 2	23.2	4.59	22	15	42	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	33.9	7.89	32	22	65	51	47.5	32.2
Scénář 5	12.8	4.09	12	0	26	26	23.5	11.6

Tabulka 4.10: Základní statistika hráčů, kteří neznali svůj výkon

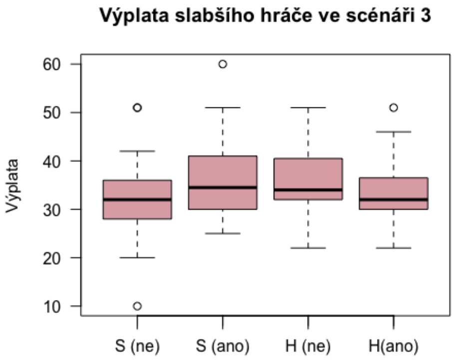
	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.8	2.82	40	30	44	44	43	38.5
Scénář 2	24.6	5.52	22.5	15	44	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	37.5	9.69	34	22	80	51	47.5	32.2
Scénář 5	15.3	6.72	12	0	40	26	23.5	11.6



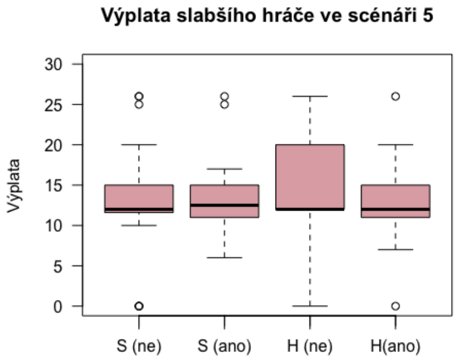
(a) boxplot



(b) boxplot



(c) boxplot



(d) boxplot

Obrázek 4.4: Krabicové diagramy znázorňující rozdělení výplaty slabšímu hráči soudcem a hráčem v případech, kdy znali svou vlastní produkci a kdy nikoli.

Tabulka 4.11 obsahuje $p-hodnoty$ Shapirova testu, který jsme použili pro zkoumání normality dat experimentu. Nulová hypotéza nebyla zamítnuta pouze u dat soudců ve scénáři číslo 3 v případě, že soudci dostali informaci o své vlastní produkci v první úloze s $p - hodnotou \approx 0.06$ na zvolené hladině testu $\alpha = 0.05$. Ve všech dalších zkoumaných případech byla normalita dat zamítnuta.

Při zkoumání dat hráčů se u scénáře číslo 3 a 5 ukázal statisticky významný rozdíl mezi skupinou, která neznala svou vlastní produkci a skupinou, která informace o vlastním výkonu z první úlohy obdržela. t-test s $p - hodnotou \approx 0.03$ vyvrátil nulovou hypotézu, že mezi daty není rozdíl a tento závěr potvrdil také Wilcoxonův test s $p - hodnotou \approx 0.02$. Stejný výsledek ukázala analýza scénáře číslo 5 (t-test: $p - hodnota \approx 0.02$, Wilcoxonův test: $p - hodnota \approx 0.03$).

Ve všech zbylých scénářích nebyl dokázán statisticky významný rozdíl mezi analyzovanými skupinami (viz tabulka 4.12).

Tabulka 4.11: $p - hodnoty$ Shapiro-Wilkova testu

	Shapiro		Shapiro
Scénář 1 Soudce: signal	$\approx 10^{-6}$	Scénář 1 Hráč: signal	$\approx 10^{-7}$
Scénář 2 Soudce: signal	$\approx 10^{-3}$	Scénář 2 Hráč: signal	$\approx 10^{-5}$
Scénář 3 Soudce: signal	≈ 0.06	Scénář 3 Hráč: signal	$\approx 10^{-5}$
Scénář 5 Soudce: signal	$\approx 10^{-4}$	Scénář 5 Hráč: signal	$\approx 10^{-4}$
Scénář 1 Hráč: no signal	$\approx 10^{-9}$	Scénář 1 Hráč: no signal	$\approx 10^{-5}$
Scénář 2 Hráč: no signal	$\approx 10^{-5}$	Scénář 2 Hráč: no signal	$\approx 10^{-8}$
Scénář 3 Hráč: no signal	$\approx 10^{-4}$	Scénář 3 Hráč: no signal	$\approx 10^{-7}$
Scénář 5 Hráč: no signal	$\approx 10^{-4}$	Scénář 5 Hráč: no signal	$\approx 10^{-5}$

Tabulka 4.12: $p - hodnoty$ t-testu a Wilcoxonova testu

	t-test	Wilcoxon
Scénář 1 Soudce: signal vs. no signal	≈ 0.77	≈ 0.8
Scénář 2 Soudce: signal vs. no signal	≈ 0.28	≈ 0.81
Scénář 3 Soudce: signal vs. no signal	≈ 0.07	≈ 0.29
Scénář 5 Soudce: signal vs. no signal	≈ 0.39	≈ 0.71
Scénář 1 Hráč: signal vs. no signal	≈ 0.97	≈ 0.9
Scénář 2 Hráč: signal vs. no signal	≈ 0.15	≈ 0.23
Scénář 3 Hráč: signal vs. no signal	≈ 0.03	≈ 0.02
Scénář 5 Hráč: signal vs. no signal	≈ 0.02	≈ 0.03

Analýza dle výkonu v první úloze

Další analýza se zabývala otázkou, zda je chování soudců, resp. hráčů rozdílné v případě, že oni sami v úlohách byli úspěšní. Soudci, resp. hráči byli rozděleni dle mediánu produkce v první úloze do dvou skupin. Dále uvedené tabulky popisují rozdělení výdělku slabšímu hráči soudci, resp. hráči, kteří sami měli nadprůměrné nebo podprůměrné výsledky.

Tabulka 4.13: Nadprůměrně výkonní soudci

	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.5	2.92	40	32	44	44	43	38.5
Scénář 2	23.5	5.67	22	15	44	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	37.6	13.8	32.6	22	80	51	47.5	32.2
Scénář 5	14	7.35	12	0	40	26	23.5	11.6

Tabulka 4.14: Podprůměrně výkonní soudci

	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	40.5	2.48	40	35	44	44	43	38.5
Scénář 2	23	2.75	22	18	32	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	35.3	6	32.2	27	51	51	47.5	32.2
Scénář 5	14.6	4.42	12	8	26	26	23.5	11.6

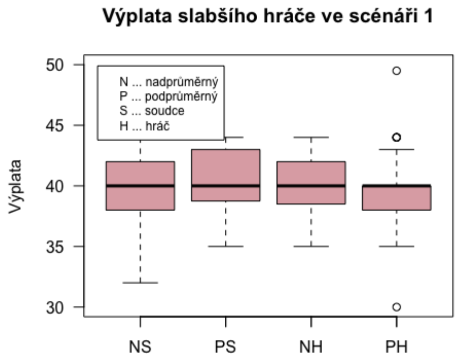
Tabulka 4.15: Nadprůměrně výkonní hráči

	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.8	3.69	40	20	44	44	43	38.5
Scénář 2	23.5	7	22.5	0	43	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	34.8	9.24	34	0	51	51	47.5	32.2
Scénář 5	14.5	6.98	12	0	40	26	23.5	11.6

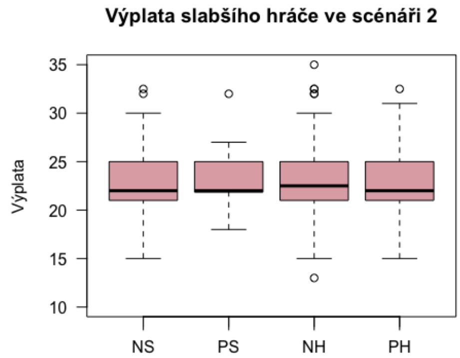
Tabulka 4.16: Podprůměrně výkonní hráči

	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	38.6	7.35	40	0	49.5	44	43	38.5
Scénář 2	23.8	7.9	22	0	55	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	32.9	10.3	32.1	0	60	51	47.5	32.2
Scénář 5	13.7	4.89	12	0	26	26	23.5	11.6

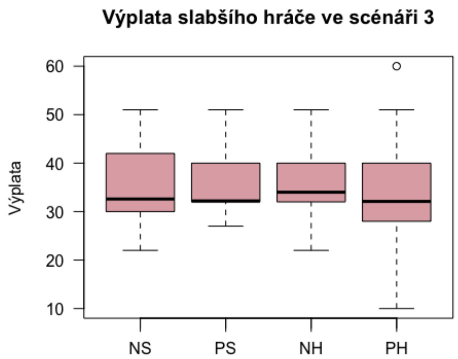
Krabicové diagramy (obrázek 4.5) znázorňují rozdělení celkového výdělku slabšímu hráči ve čtyřech zkoumaných scénářích.



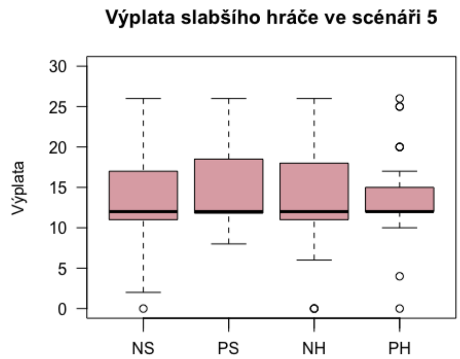
(a) boxplot



(b) boxplot



(c) boxplot



(d) boxplot

Obrázek 4.5: Krabicové diagramy znázorňující rozdělení výplaty slabšímu hráči soudcem a hráčem podle jejich výkonu v první úloze

V žádném ze scénářů nebylo prokázáno, že se liší chování zkoumaných skupin. Normalita dat nebyla vyvrácena pouze u rozdělení výdělku scénáře 1 nadprůměrným soudcem ($p - hodnota \approx 0.04$) a nadprůměrnými i podprůměrnými hráči ($p - hodnota \approx 0.02$). Na zadané hladině testu se nadprůměrná a podprůměrná část soudců, resp. hráčů neliší ve způsobu, jakým rozdělují celkový výdělek mezi dvojici hráčů.

Tabulka 4.17: $p - hodnoty$ Shapiro-Wilkova testu

	Shapiro		Shapiro
Scénář 1: Nadprůměrný soudce	≈ 0.04	Scénář 1: Nadprůměrný hráč	$\approx 10^{-11}$
Scénář 2: Nadprůměrný soudce	$\approx 10^{-4}$	Scénář 2: Nadprůměrný hráč	$\approx 10^{-7}$
Scénář 3: Nadprůměrný soudce	$\approx 10^{-4}$	Scénář 3: Nadprůměrný hráč	$\approx 10^{-6}$
Scénář 5: Nadprůměrný soudce	$\approx 10^{-4}$	Scénář 5: Nadprůměrný hráč	$\approx 10^{-5}$
Scénář 1: Podprůměrný soudce	≈ 0.02	Scénář 1: Podprůměrný hráč	≈ 0.02
Scénář 2: Podprůměrný soudce	$\approx 10^{-3}$	Scénář 2: Podprůměrný hráč	$\approx 10^{-3}$
Scénář 3: Podprůměrný soudce	$\approx 10^{-3}$	Scénář 3: Podprůměrný hráč	$\approx 10^{-3}$
Scénář 5: Podprůměrný soudce	$\approx 10^{-3}$	Scénář 5: Podprůměrný hráč	$\approx 10^{-3}$

Tabulka 4.18: $p - hodnoty$ t-testu a Wilcoxonova testu

	t-test	Wilcoxon
Scénář 1: NS vs. PS	≈ 0.39	≈ 0.4
Scénář 2: NS vs. PS	≈ 0.68	≈ 0.5
Scénář 3: NS vs. PS	≈ 0.4	≈ 0.83
Scénář 5: NS vs. PS	≈ 0.98	≈ 0.55
Scénář 1: NH vs. PH	≈ 0.08	≈ 0.14
Scénář 2: NH vs. PH	≈ 0.98	≈ 0.92
Scénář 3: NH vs. PH	≈ 0.36	≈ 0.27
Scénář 5: NH vs. PH	≈ 0.48	≈ 0.97

Analýza dle pohlaví

Níže uvedené tabulky znázorňují základní statistiky výdělku slabšího hráče ve všech čtyřech analyzovaných scénářích. Při porovnávání chování mužů a žen se ve všech scénářích ukázalo, že muži mají tendenci přidělovat méně slabšímu hráči a naopak ženy mají snahu výdělky hráčů více vyrovnávat. Tento trend je patrný při porovnání průměrného výdělku slabšího hráče z tabulky 4.19 a 4.20, a také při srovnání průměru všech scénářů tabulek 4.21 a 4.22. Ženy soudkyně přidělovaly slabšímu hráči průměrně o 13% více než muži v této pozici, u hráček byl tento nárůst o 4.5% v porovnání s mužskými protějšky. Tato rozdělení výdělku graficky zobrazují krabicové diagramy (obrázek 4.6) (ang. *boxplot*). Tento trend však nebyl potvrzen jako statisticky významný na zvolené hladině testu $\alpha = 0.05$. *p-hodnoty* statistických testů obsahuje tabulka 4.23 a tabulka 4.24.

Tabulka 4.19: Žena - soudce

	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.7	4.03	40	20	44	44	43	38.5
Scénář 2	24.2	7.26	22	15	55	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	33.6	8.97	32	10	60	51	47.5	32.2
Scénář 5	14.4	4.37	12	7	26	26	23.5	11.6

Tabulka 4.20: Muž - soudce

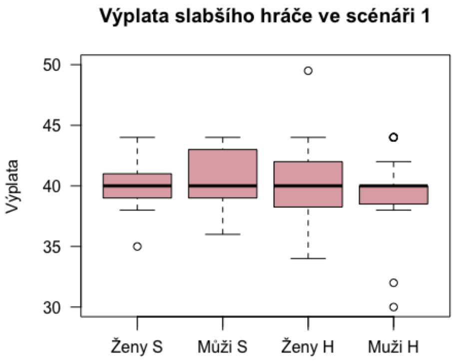
	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	38.2	9.68	40	0	44	44	43	38.5
Scénář 2	19.4	9.59	21.5	0	35	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	30.4	14.8	32.5	0	51	51	47.5	32.2
Scénář 5	12.9	9.2	12	0	40	26	23.5	11.6

Tabulka 4.21: Žena - hráč

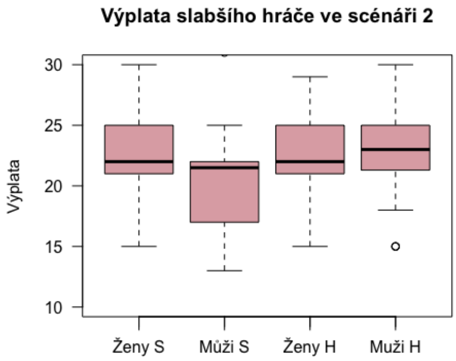
	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.9	3.09	40	34	49.5	44	43	38.5
Scénář 2	24.1	5.25	22	15	44	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	37.2	10.6	32.6	25	80	51	47.5	32.2
Scénář 5	15.5	6.4	12	7	40	26	23.5	11.6

Tabulka 4.22: Muž - hráč

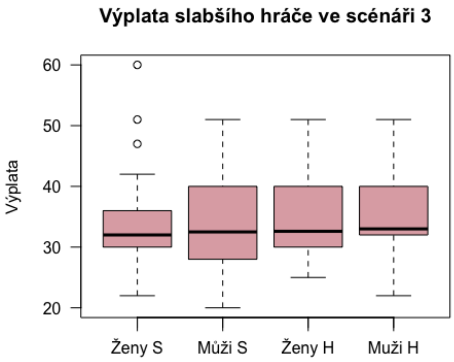
	Průměr	σ	Medián	Minimum	Maximum	RR	SH	VSH
Scénář 1	39.6	3.36	40	22	44	44	43	38.5
Scénář 2	24	5.25	23	14	43	32.5	30.5	21.7
Scénář 3	35.3	7.87	33	22	65	51	47.5	32.2
Scénář 5	13.6	5.55	12	0	26	26	23.5	11.6



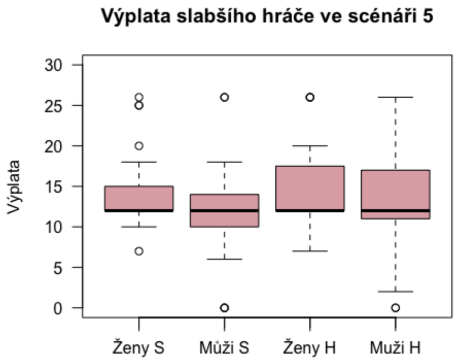
(a) boxplot



(b) boxplot



(c) boxplot



(d) boxplot

Obrázek 4.6: Krabicové diagramy znázorňující rozdělení výplaty slabšímu hráči soudcem (S) a hráčem (H) ve scénářích 1, 2, 3 a 5

Tabulka 4.23: $p - hodnoty$ Shapiro-Wilkova testu

	Shapiro		Shapiro
Scénář 1 - Žena soudce	$\approx 10^{-8}$	Scénář 1 - Žena hráč	≈ 0.01
Scénář 2 - Žena soudce	$\approx 10^{-7}$	Scénář 2 - Žena hráč	$\approx 10^{-8}$
Scénář 3- Žena soudce	≈ 0.04	Scénář 3 - Žena hráč	$\approx 10^{-7}$
Scénář 5- Žena soudce	$\approx 10^{-4}$	Scénář 5 - Žena hráč	$\approx 10^{-7}$
Scénář 1 - Muž soudce	$\approx 10^{-7}$	Scénář 1 - Muž hráč	$\approx 10^{-10}$
Scénář 1 - Muž soudce	$\approx 10^{-3}$	Scénář 2 - Muž hráč	$\approx 10^{-5}$
Scénář 1 - Muž soudce	$\approx 10^{-3}$	Scénář 3 - Muž hráč	$\approx 10^{-4}$
Scénář 1 - Muž soudce	$\approx 10^{-3}$	Scénář 5 - Muž hráč	$\approx 10^{-3}$

Tabulka 4.24: $p-hodnoty$ t-testu a Wilcoxonova testu

	t-test	Wilcoxon
Scénář 1(Soudce): Žena vs. Muž	≈0.51	≈0.72
Scénář 2(Soudce): Žena vs. Muž	≈0.06	≈0.07
Scénář 3(Soudce): Žena vs. Muž	≈0.38	≈0.86
Scénář 5(Soudce): Žena vs. Muž	≈0.49	≈0.09
Scénář 1(Hráč): Žena vs. Muž	≈0.62	≈0.85
Scénář 2(Hráč): Žena vs. Muž	≈0.96	≈0.86
Scénář 3(Hráč): Žena vs. Muž	≈0.3	≈0.97
Scénář 5(Hráč): Žena vs. Muž	≈0.11	≈0.15

Vliv pořadí

Další zkoumanou otázkou je, zda na pořadí hráčů $P1$ a $P2$ záleží, tj. zda to je-li slabší hráč hráčem $P1$, nebo $P2$ má vliv na konečné rozdělení celkového výdělku mezi hráče. Ve scénáři 2 je slabším hráčem hráč $P2$ a ve scénáři 3 jim je hráč $P1$. V obou scénářích byl slabší hráč srovnatelně úspěšný. Dvouvýběrový t-test nezamítl s $p-hodnotou \approx 0.27$, že na zvolené hladině testu není statisticky významný rozdíl mezi výplatou slabšího hráče, je-li slabším hráčem hráč $P1$, nebo $P2$. Tento závěr potvrdil Wilcoxonův test ($p-hodnota \approx 0.21$).

4.2.3 Definice koeficientu

Cílem je rozdělit populaci na skupiny dle jejich vnímání spravedlnosti. K tomuto je vhodné každému subjektu přiřadit hodnotu, která popisuje jeho chování v tomto experimentu. Nechť P_W označuje slabšího hráče, P_S silnějšího a x_W výplatu slabšího hráče. $v(\{P_W\})$ je zisk slabšího hráče v náhodně vybraných třech minutách, $v(\{P_S\})$ je zisk silnějšího hráče v náhodně zaznamenaných třech minutách, a $v(\{P_S, P_W\})$ je jejich společný výdělek v celkových 15 minutách.
Zkoumáme koeficient α definovaný jako:

$$x_W = (1-\alpha)\frac{v(\{P_S, P_W\})}{2} + \alpha\frac{v(\{P_W\})}{v(\{P_W\}) + v(\{P_S\})} \cdot (v(\{P_S, P_W\})).$$

Je zřejmé, že pro $\alpha = 0$ se x_W rovná rovnému rozdělení, a pro $\alpha = 1$ je x_W Vlastní Shapleyho hodnotou. Jednoduchými úpravami získáme také α pro Shapleyho hodnotu:

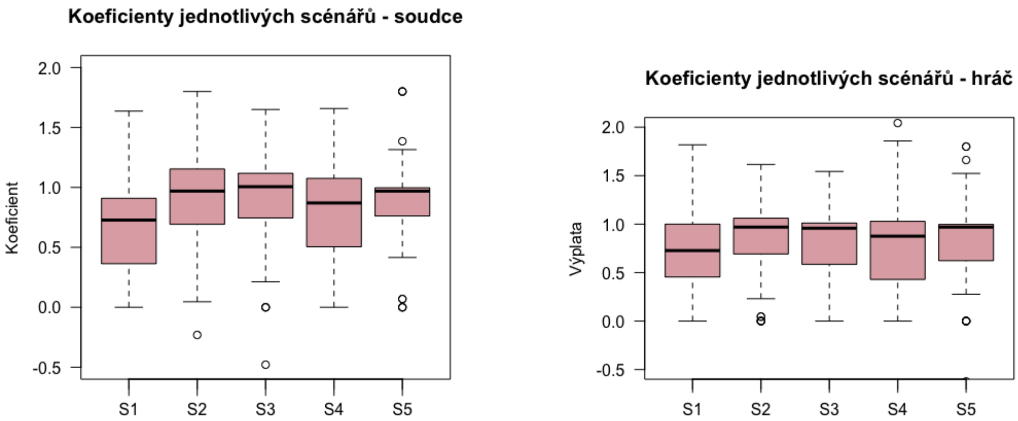
$$\alpha = \frac{v(\{P_W\}) + v(\{P_S\})}{v(\{P_S, P_W\})}$$

Tabulka 4.25 obsahuje hodnoty koeficientu α pro zkoumané scénáře. α_{RR} je koeficient při rovném rozdělení, α_{SH} označuje koeficient Shapleyho hodnoty, a α_{VSH} je koeficient spojený s Vlastní Shapleyho hodnotou.

Tabulka 4.25: Hodnoty koeficientů α pro zkoumané scénáře

	Scénář 1	Scénář 2	Scénář 3	Scénář 5
α_{RR}	0	0	0	0
α_{SH}	0.182	0.185	0.186	0.214
α_{VSH}	1	1	1	1

Rozdělovat subjekty do skupin má smysl v případě, že je jejich chování konzistentní, tj. pokud jejich koeficient je konzistentní. Tvrdíme, že účastník experimentu byl konzistentní, pokud rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou koeficientu mezi pozorovanými čtyřmi scénáři je menší než $\frac{1}{5}$. Pouze 19% soudců a 25% hráčů ukázalo konzistentní chování.



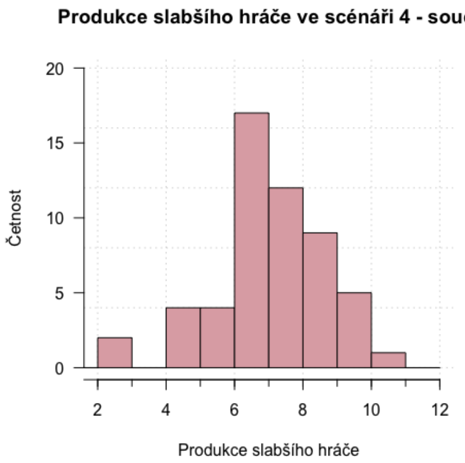
(a) boxplot

(b) boxplot

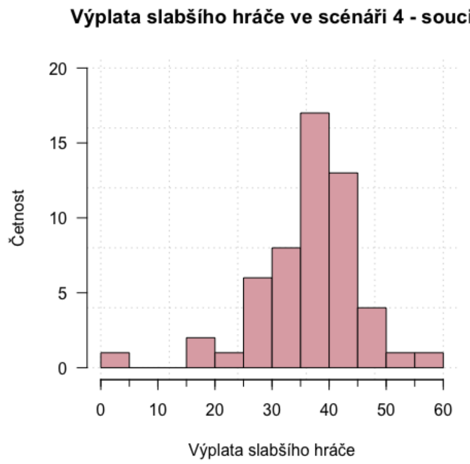
Obrázek 4.7: Krabicové diagramy koeficientů soudců a hráčů všech pěti scénářů

V této části analýzy byla použita skutečná data o produkci účastníků experimentu, tj. data scénáře číslo 4. Předpokládáme, že v tomto scénáři byl rozdíl mezi účastníky experimentu srovnatelný s rozdílem ve scénáři číslo 1. Data tomuto předpokladu skutečně odpovídají a průměrně byl tříminutový výdělek slabšího hráče 43% společného tříminutového výdělku.

S $p - hodnotou \approx 10^{-4}$ jsme ukázali, že ani data scénáře číslo 4 rozdělení výdělku soudci nejsou normálně rozdělená, a proto byl k další analýze zvolen *Kruskal-Wallisův test*. V tomto případě Kruskal-Wallisův test zkoumá, zda se námi analyzované koeficienty liší při porovnávání mezi scénáři. Předpokladem je, že koeficienty scénáře 1 a 4 budou srovnatelné, a stejně nebude statisticky významný rozdíl mezi koeficienty zbylých scénářů. Tyto dvě skupiny koeficientů ale rozdíl mezi sebou mít budou. Kruskal-Wallisův test vyvrátil, že neexistují rozdíly mezi skupinami s $p-hodnotou \approx 10^{-3}$ a následný *Dunnův test* ukázal, mezi kterými skupinami tento rozdíl je. Dunnův test ukázal, že existuje rozdíl mezi koeficienty scénáře 1 a scénáře 2 ($p - hodnota \approx 10^{-4}$), scénáře 1 a scénáře 3 ($p - hodnota \approx 10^{-4}$), scénáře 1 a scénáře 4



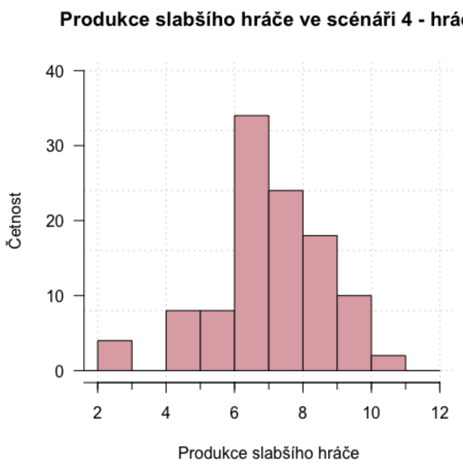
(a) histogram



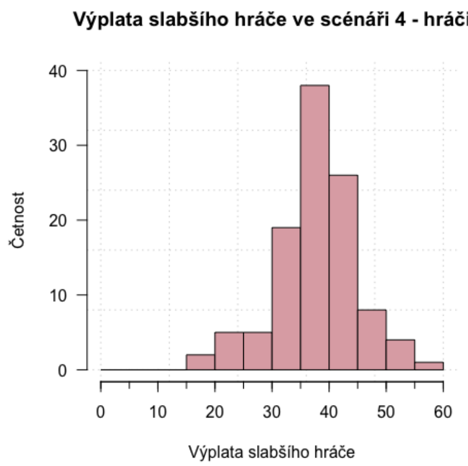
(b) histogram

Obrázek 4.8: Histogramy znázorňující produkci a výplatu slabšího hráče přidělenou soudcem ve scénáři číslo 4

($p - hodnota \approx 0.02$) i scénáře 1 a scénáře 5 ($p - hodnota \approx 10^{-4}$). Mezi zbylými scénáři statistický významný rozdíl na hladině testu prokázán nebyl. Tímto byla potvrzena hypotéza, že se koeficienty scénáře 1 se jsou odlišné od koeficientů scénářů 2,3 a 5. Zajímavým zjištěním je, že scénáře 1 a 4 se také liší, což může být z způsobeno rozptylem v produkci slabšího hráče ve scénáři 4.



(a) histogram



(b) histogram

Obrázek 4.9: Histogramy znázorňující produkci a výplatu slabšího hráče přidělenou hráčem ve scénáři číslo 4

Ani data scénáře 4 hráčů nejsou normálně rozdělena (Shapiro: $p - hodnota \approx 10^{-3}$). V tomto případě Kruskal-Wallis test s $p - hodnotou \approx 0.25$ nevyvrátil nulovou hypotézu, že neexistuje rozdíl mezi koeficienty jednotlivých scénářů.

4.3 Shrnutí

Při podrobné analýze experimentem získaných dat bylo prokázáno, že největší část experimentu podrobené populace rozdělovala výdělek mezi hráče dle Vlastní Shapleyho hodnoty. Nicméně je nutno říci, že získaná data nejsou normálně rozdělena. Lze tedy vyvozovat, že neexistuje pouze jedna společenská norma, kolem které se vnímání spravedlnosti lidskými subjekty pohybuje. Naopak je velmi pravděpodobné, že takovýchto norem je ve společnosti více a získaná experimentální data jsou kombinací více společenských rozdělení.

V uvedeném experimentu je patrný rozdíl mezi distribuční spravedlností soudců a vnímanou spravedlností hráčů. Hráči ve všech případech přidělovali slabšímu hráči větší část výdělku, než soudci. Tento rozdíl však jako statisticky významný prokázán nebyl.

Stejný trend byl viditelný při porovnávaní chování žen a mužů. Obecně, ve všech situacích ženy odměňovaly slabšího hráče větší částí společného výdělku než jejich mužské protějšky. Tento fakt ale na zadané hladině testu dokázán nebyl.

Jedním z nejdůležitějších závěrů analýzy je skutečnost, že soudci ani hráči neprokázali odlišné chování v případech, kdy znali vlastní úspěšnost v úlohách, a kdy tuto informaci neobdrželi. Dalším pozorováním je, že na hladině testu neexistuje vztah mezi vlastními schopnostmi soudců, či hráčů, a tím co vnímají jako spravedlivé rozdělení výdělku.

Bylo statisticky prokázáno, že pořadí hráčů nemá vliv na konečné rozdělení celkového výdělku. To, zda je slabším hráčem hráč jedna, nebo hráč dva nemá vliv na hodnotu jeho konečné výplaty.

Námi zde definovaný koeficient se neukázal jako správný parametr pro klasifikaci populace podle vnímaní spravedlnosti do skupin. Pouze 22% subjektů prokázalo konzistentní chování mezi scénáři, a tedy tento parametr nedokáže dobře popsat jednotlivé jedince. Při porovnávaní koeficientů mezi jednotlivými scénáři se na hladině testu ukázalo, že koeficienty scénáře 1 se liší od všech ostatních. Soudci prokazují odlišné chování v situacích, kdy jsou hráči srovnatelně výkonní (P_W =44%) a kdy jsou rozdíly produkce větší ($P_W \in \{33\%, 32\%, 22\%\}$). Tomuto ale neodpovídá fakt, že existuje rozdíl mezi koeficienty scénáře 1 a scénáře 4. Předpokládáme totiž, že v těchto dvou scénářích jsou slabší hráči srovnatelně úspěšní.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s teorií kooperativních her. V její teoretické části byly definovány a popsány možná řešení problému rozdělení výdělku v kooperativních hrách. Jejich aplikace byla znázorněna na jednoduché hře tří hráčů. Dále byl součástí první části této práce krátký úvod do teorie vyjednávaní a objasnění podmínek, za kterých lze porovnávat kooperativní a nekooperativní hry.

V experimentální části byl detailně popsán experiment a jeho následná analýza. Na základě zkoumaných dat bylo ukázáno, že chování lidských subjektů v laboratorních podmínkách nejlépe vystihuje Vlastní Shapleyho hodnota. Ani přes tento výsledek ji nemůžeme nazvat jedinou společenskou normou. Z výsledku experimentu je rovněž patrné, že existuje rozdíl mezi distribuční spravedlností a vnímanou spravedlností. Avšak tento rozdíl nebyl v této práci prokázán jako statisticky významný. Zajímavým výsledkem datové analýzy je fakt, že navržený koeficient nepopisuje subjekty jako jedince, ale spíše definuje spravedlnost v jednotlivých zkoumaných scénářích.

Zajímavou výzvou je možná konstrukce nekooperativní hry, jejímž rovnovážným stavem je Vlastní Shapleyho hodnota. Tato otázka je netriviální a vyžaduje pokročilé znalosti kooperativní i nekooperativní teorie her a matematické analýzy.

Uvedený experiment skýtá značné možnosti k jeho další analýze a ve spolupráci s autory bude experiment dále analyzován. Dalším krokem bude analýza vnímání spravedlnosti na základě dotazníku, který účastníci vyplnili v poslední části experimentu. K hlubší analýze budou použity další statistické testy a pokročilejší statistické metody. Možným postupem po dokončení analýzy je navržení dalšího experimentu, který potvrdí výsledky tohoto, nebo se zaměří na zkoumání vlivu míry zamlžení informace na vnímání spravedlnosti. Jak je z výše uvedeného patrné teorie her skýtá neomezené možnosti k jejímu dalšímu výzkumu.

Literatura

[1] Abeler, Johannes, Armin Falk, Lorenz Goette, and David Huffman (2011): *Reference Points and Effort Provision*, American Economic Review, 101 (2), 470-92.

[2] Beal, S., Ferrieres, S., Remila, E., Solal, P. (2018): *The proportional Shapley value and applications.* Games and Economic Behavior, 108, 93–112.

[3] Besner, M. (2019): *Axiomatizations of the proportional Shapley value*, Theory and Decision 86 (2) 161–183.

[4] van den Brink, R., Levínský, R., Zelený, M. (2015): *On proper Shapley values for monotone TU-games.* Internat. J. Game Theory, 44(2): 449–471.

[5] Fischbacher, U. (2007): *z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments* Experimental Economics, 10(2), pp.171-178.

[6] Gillies, D.B. (1959): *Solutions to general non-zero-sum games* V: Tucker, A.W., Luce, R.D., ed. *Contributions to the Theory of Games IV.* (Annals of Mathematics Studies 40). Princeton: Princeton University Press, 47–85.

[7] Gul, F. (1989): *Bargaining Foundations of Shapely Value*, Econometrica, 57(1), p.81.

[8] Harsanyi, J.C (1959): *A bargaining model for the cooperative n-person game*, in: *Contributions To the Theory of Games*, Vol. IV, in: Annals of Mathe- matics Studies, vol. 40, Princeton University Press, Princeton, N.J., 325–355.

[9] James, L.D., Lee, R.R. (1971): *Economics of water resources planning* McGraw-Hill Book Co., New York, p. xviii, 615.

[10] Kahneman, D., Knetsch, J. and Thaler, R. (1986): *Fairness and the Assumptions of Economics.* The Journal of Business, 59(S4), p.S285.

[11] Kalai, E., (1977): *Proportional Solutions to Bargaining Situations: Interpersonal Utility Comparisons.* Econometrica, 45(7), p.1623.

[12] Kalai, E. and Smorodinsky, M., (1975): *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem.* Econometrica, 43(3), p.513.

[13] Megiddo, N. (1974): *On the Nonmonotonicity of the Bargaining Set, the Kernel and the Nucleolus of Game.* SIAM Journal on Applied Mathematics, 27(2), 355-358.

[14] Moulin, H., (1987): *The Pure Compensation Problem: Egalitarianism Versus Laissez-Fairism.* The Quarterly Journal of Economics, 102(4), 769.

[15] Nash, J., (1950): *The Bargaining Problem*, Econometrica, 18(2), p.155.

[16] Nash, J. (1953): *Two-Person Cooperative Games.* Econometrica, 21(1), 128–140. doi: 10.2307/1906951

[17] von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944):*Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton: Princeton University Press.

[18] Owen, G. (1995):*Game Theory. 3.* ed. Academic Press, Inc.

[19] Schmeidler, D. (1969): *The Nucleolus of a Characteristic Function Game.* SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol 17, No.6, 1163-1170.

[20] Shapley, L.S. (1953):*A Value for n-person games.* V: Kuhn, H.W., Tucker, A.W., ed. *Contributions to the Theory of Games II.* (Annals of Mathematics Studies 28). Princeton: Princeton Universtiy Press, 307–317.

[21] Tversky, A. and Kahneman, D. (1974): *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases.* Science, 185(4157), pp.1124-1131.

[22] Vorob'ev NN, Liapounov AV (1998): *The proper Shapley value.* In: Petrosyan L, Mazalov M (eds) *Game theory and application*, vol IV. Nova Science, New York, 155–159.

[23] Young, H. P. (1985): *Monotonic solutions of Cooperative Games.* International Journal of Game Theory, 14(2), 65–72.

Dotazník pro účastníky experimentu

Věk:

Pohlaví:

Pracovní hodiny týdně (vyjma hodin studia):

Čistý měsíční příjem:

Níže uvedená tvrzení ohodnoťte na stupnici:

1 – absolutně souhlasím
2 – spíše souhlasím
3 – neutrální
4 – spíše nesouhlasím
5 – absolutně nesouhlasím

1. Je snadné mít dobré výsledky v úlohách s počítáním nul.

2. Aby někdo dosáhl dobrých výsledků v úlohách s počítáním nul, musí tvrdě pracovat.

3. Úloha s počítáním nul byla nudná a tedy nepříjemná.

4. Úloha s počítáním nul byla zábavná a tedy příjemná.

5. Každý je zodpovědný za svůj výsledek v úloze s počítáním nul.

6. Výsledek závisí na štěstí, tudíž nikdo nemůže být zodpovědný za svůj výsledek v úloze s počítáním nul.

7. Počet správně spočítaných matic závisí na vnějších faktorech, které člověk nemůže ovlivnit, a proto nikdo nemůže být zodpovědný za svůj výsledek.

8. Informace o tom, kolik účastník spočítal matic za 3 z 15 minut je postačující informací k získání obrazu o tom, jak těžce a pilně účastník pracoval celých 15 min

9. Informace o tom, kolik účastník spočítal matic za 12 z 15 minut je postačující informací k získání obrazu o tom, jak těžce a pilně účastník pracoval celých 15 min.

10. Pouze s úplnými informacemi o celých 15 minutách práce účastníků je možné získat obraz o tom, jak těžce a pilně účastník pracoval.

11. Skutečnost, kolik účastník spočítal matic v experimentu nijak nevypovídá o skutečnosti, jak těžce a pilně pracoval.

12. V takovém experimentu by měli být všichni účastníci placeni přibližně stejně, nezávisle na jejich výkonu při plnění úkolů experimentu.

13. V takovém experimentu by účastník měl být ohodnocen nejméně dvojnásobkem účastnického poplatku, nezávisle na výkonu při plnění úkolů experimentu.

14. Je v pořádku, že účastníci jsou ohodnocováni na základě jejich výkonu při plnění úkolů experimentu.