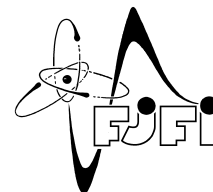


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Odhadování struktury hysteretických materiálů prostřednictvím Preisach-Mayergoyzova prostoru

Structure of hysteretic material evaluated through Preisach-Mayergoyz space

Bakalářská práce

Autor: **Erik Dolejš**
Vedoucí práce: **Ing. Václav Kůs, PhD.**
Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Erik Dolejš
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Odhadování struktury hysteretických materiálů prostřednictvím Preisach-Mayergoyzova prostoru
Název práce (anglicky):	Structure of hysteretic material evaluated through Preisach-Mayergoyz space

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s problematikou defektoskopických metod obecně a poté se soustřeďte na hysteretní chování materiálů popsané prostřednictvím Preisach-Mayergoyzova (PM) prostoru.
2. Implementujte iterační metodu odhadu pravděpodobnostních hustot v trojúhelníkovém PM prostoru. Navrhněte nové vhodné parametrické distribuce a na generovaných datech srovnajte jejich kvalitu popisu elasticity materiálů s jinými známými rozděleními (Guyer, Koen).
3. Seznamte se s entropickými a divergenčními mírami na prostoru distribucí. Odhadnuté PM rozdělení statisticky srovnajte s rozdělením ideálně elastického materiálu. Případně podle potřeby proveďte detekci počtu shluků (komponent) v odhadnutém PM prostoru vybranou metodou strojového učení.
4. Navrhněte PM míru elasticity/poškození a srovnajte ji s některou klasickou materiálovou mírou poškození buď pro generovaná data nebo pro dodaná zemětřesená testovací data z měření zatížení konstrukcí budov s disipativními tlumiči vibrací (poskytnutá SNADS, Univ. Granada, Španělsko).

Doporučená literatura:

1. I. D. Mayergoyz, Mathematical Models of Hysteresis and Their Applications. Academic Press-Elsevier, 2003.
2. A. Benavent-Climent, A. Gallego, L. Romo-Melo, L. Morillas, Health monitoring of web plastifying dampers subjected to cyclic loading through vibration tests. Structural Health Monitoring 13(1), 2014, 33–49.
3. E. Suarez, A. Roldán, et. al., Entropy analysis for damage quantification of hysteretic dampers used as seismic protection of buildings. Applied Sciences 7(628), 2017, 1-14.
4. L. Pardo, Statistical inference based on divergence measures. Chapman & Hall/CRC, Taylor-Francis, London, 2006.
5. V. Aleshin, K. Van Den Abeele, Microcontact-based theory for acoustics in microdamaged materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 55, 2007, 366-390.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Ing. Václav Kůs, PhD.

Katedra matematiky, FJFI ČVUT PRAHA, Trojanova 13, 120 00 Praha 2,

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

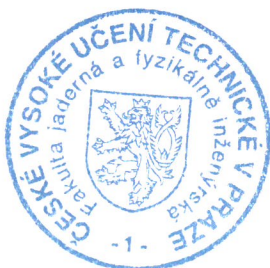
Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019

.....
B
garant oboru

.....
vedoucí katedry



.....
děkan

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat svému školiteli Ing. Václavu Kúsovi, PhD. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 24. července 2020

Erik Dolejš

Název práce:

Odhadování struktury hysteretických materiálů prostřednictvím Preisach-Mayergoyzova prostoru

Autor: Erik Dolejš

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Václav Kůs, PhD., Katedra matematiky, FJFI ČVUT

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá aplikováním Preisach-Mayergoyzova (PM) modelu na vyhodnocení elastických vlastností materiálů. V první části jsou představeny klíčové pojmy hystereze a její popis, dále optimalizační algoritmy, vhodná pravděpodobnostní rozdělení a ϕ -divergence. Tyto poznatky jsou implementovány ve vyvíjeném programu na identifikování PM prostoru. V další části je představeny dva popisy rozložení hysteronů v PM prostoru pomocí jádrových odhadů. Na základě tohoto neparametrického popisu je vytvořen index elasticity popisující schopnost materiálů absorbovat mechanické deformace. Na závěr jsou zpracovány data z testování kovových tlumičů sloužící pro ochranu budov před zemětřesením a jsou pro ně stanoveny navržené indexy elasticity.

Klíčová slova: Jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti, Jaya algoritmus, Preisach-Mayergoyzův model, ϕ -divergence, Optimalizace, Simulované žhání

Title:

Structure of hysteretic material evaluated through Preisach-Mayergoyz space

Author: Erik Dolejš

Abstract: This Bachelor's thesis focuses on the application of Preisach-Mayergoyz (PM) model applied to the evaluation of elastic properties of the material. In the first part of this thesis are explained basic vital terms, such as hysteresis and its properties, optimization algorithms, suitable probability density functions and ϕ -divergences. This knowledge is implemented in the presented program designed to identify PM space. In the next section are proposed two descriptions of PM space of hysteron based on kernel density estimation. Based on this description, the new index of elasticity is proposed, which describes the ability of materials to absorb mechanical deformation. In the end, experimentally measured data of test of steel dampers used for protection against earthquake are processed, and the proposed index of elasticity is evaluated.

Key words: Jaya algorithm, Kernel density estimation, Preisach-Mayergoyz model, ϕ -divergences, Optimization, Simulated annealing

Obsah

Úvod	7
1 Preisach-Mayergoyzův model	8
1.1 Hystereze a její vlastnosti	8
1.2 Preisach-Mayergoyzův model hystereze	9
1.2.1 Preisachova rovina	11
1.3 Další modely hystereze	12
1.4 Aplikace PM modelu	13
2 Identifikace PM prostoru	14
2.1 Optimalizační algoritmy	14
2.1.1 Jaya	14
2.1.2 aDE-Jaya	15
2.1.3 Simulované žhání	17
2.2 Použitá pravděpodobnostní rozdělení	17
2.3 Divergenční míry odlišnosti a jejich vlastnosti	19
2.4 Testování optimalizačních metod	21
2.5 Program na identifikaci PM prostoru	22
3 Jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti	24
3.1 Jádrový odhad pro jednorozměrná data	24
3.2 Chyba jádrového odhadu	25
3.3 Volba optimálního jádra	27
3.4 Volba vyhlazovacího parametru	27
3.5 Jádrový odhad pro vícerozměrná data	29
4 Navržení indexu elasticity	31
4.1 Promítnutí PM prostoru na přeponu	31
4.2 Jádro s trojúhelníkovým nosičem	32
4.3 Nový index elasticity	32
5 Zpracování dat	36
5.1 Identifikace PM prostoru a stanovení indexu elasticity	37
Závěr	40

Úvod

Nedestruktivní testování je velmi efektivním nástrojem pro odhalení defektu, avšak pro materiály s hysterezním chováním se musí použít specifitější přístup. V první kapitole této práce se seznámíme s pojmem hystereze a jejím popisem pomocí tzv. Preisach-Mayergoyzova (PM) modelu. Tento model využijeme při popisu mechanické hystereze materiálů, a proto zde rozebereme jeho vlastnosti. Také si stručně představíme další modely hystereze a nastíníme její využití v praxi pro testování kovových zemětřesných tlumičů.

Jedním z cílů této práce je identifikace PM prostoru, a proto jsou ve druhé kapitole představeny potřebné nástroje pro tuto optimalizační úlohu. Jedná se o optimalizační algoritmy, přičemž v této práci jsme použili relativně nový Jaya algoritmus a také jeho modifikovanou variantu aDE-Jaya. Jako třetí byl použit algoritmus simulovaného žíhání (SA). K popisu PM prostoru jsou použita vybraná pravděpodobnostní, která slouží k popisu rozložení elementární prvku PM prostoru, tzv. hysteronů. Na základě znalosti PM prostoru a vstupního zatížení lze nalézt hysterezní křivku, a tedy naší optimalizační úlohou bude minimalizace míry odlišnosti mezi takto vypočítanou a empiricky naměřenou hysterezní křivkou. K vyjádření této míry odlišnosti představíme různé statistické vzdálenosti a zejména pak ϕ -divergence. Pro úkol této optimalizace je vytvářen program v prostředí Matlab, který se s těmito nástroji snaží najít z naměřených dat nejhodnější PM prostor.

Ve třetí kapitole se pak budeme snažit pro naše účely neparametricky popsat tyto nalezené PM prostory. Proto představíme jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti, jeho vlastnosti a také běžně používaná jádra. Pro jádrový odhad v naší úloze popisu PM prostoru představíme dva speciální jádrové odhady. Tyto jádrové odhady poté použijeme k návrhu indexu elasticity (IE_{LC}) pro zmíněné kovové tlumiče, kterým vyjádříme jejich schopnost pohlcovat deformace vzniklé zemětřesením. Toto bude obsahem čtvrté kapitoly. V závěrečné páté kapitole se zaměříme zpracování konkrétních dat z testování zemětřesných tlumičů, bude se tedy jednat o nalezení odpovídajících PM prostorů, jejich popisu pomocí jádrových odhadů a určení IE_{LC} . Tato data byla poskytnuta Univerzitou v Granadě.

Kapitola 1

Preisach-Mayergoyzův model

V první kapitole budou nejdříve představeny základní pojmy, kterými jsou jev hystereze a jeho vlastnosti, poté Preisachův-Mayergoyzův (PM) model hystereze a následně budou ukázány i další používané modely hystereze a příklady použití PM modelu.

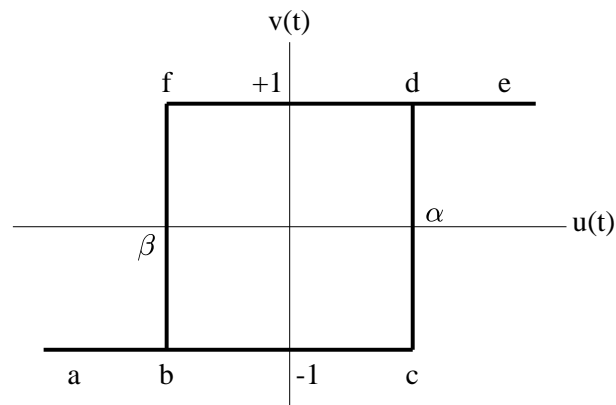
1.1 Hystereze a její vlastnosti

Hystereze je jev, který se objevuje v mnoha fyzikálních, biologických, mechanických či ekonomických systémech. Jedná se o vývoj dynamického systému, který nezávisí pouze na vstupní nezávislé proměnné, ale zároveň i na předchozím vývoji stavu systému. V systému s hysterezním chováním nejsme tedy schopni popsat souvislost mezi vstupní veličinou a výsledkem, aniž bychom znali historii předchozích stavů.

Příkladem systému, který vykazuje hysterezní chování může být například relé na obr. 1.1. Toto relé reaguje na změnu časově závislé vstupní veličiny tak, že se skokově změní výstupní veličina, jakmile vstup dosáhne jisté hodnoty. Pokud je tedy hodnota vstupního signálu $u(t) > \alpha$ (zavírací hodnota), výstupní hodnota $v(t)$ se rovná $+1$. Pokud začne vstupní hodnota klesat, výstup zůstane na hodnotě $+1$ až do okamžiku, kdy vstup dosáhne $u(t) = \beta$ (otevírací hodnota), kdy se $v(t)$ změní na -1 . Obdobně, bude-li se vstup následně zvyšovat, hodnota se změní až po dosažení bodu $u(t) = \alpha$. Proto bez znalosti předchozí historie nejsme schopni jednoznačně rozhodnout, jakou z hodnot $+1$ a -1 nabývá výstup pro hodnoty $\beta < u(t) < \alpha$. Konkrétním příkladem může být bimetalový přepínač. Ten přechází ve stavy zapnuto a vypnuto po dosažení hraničních teplot, a proto není možné bez znalosti vývoje pro teploty mezi těmito hranicemi určit konkrétní stav přepínače.

Hysterezi můžeme charakterizovat podle toho, jestli závisí nebo nezávisí na rychlosti a průběhu vstupního zatížení. V této práci se budeme zabývat pouze hysterezí s tzv. vlastností „rate-independence“, tedy pokud výstupní hodnota závisí pouze na extrémálních hodnotách vstupního signálu bez ohledu na to, jak rychle nebo po jaké trajektorii se tento vstup mění. Tato vlastnost je znázorněna na obr. 1.2, kde můžeme vidět, že různé vstupní signály, které ale mají stejná lokální minima a maxima, generují stejnou hysterezní křivku. Je patrné, že pro fyzikální systémy je to jakási idealizace, a proto lze definovat i „rate-dependent“ modely hystereze. Rozdíly mezi těmito typy hystereze se však začnou projevovat až při velmi rychlých změnách vstupního zatížení, a proto je použití „rate-independent“ modelu hystereze opodstatněné.

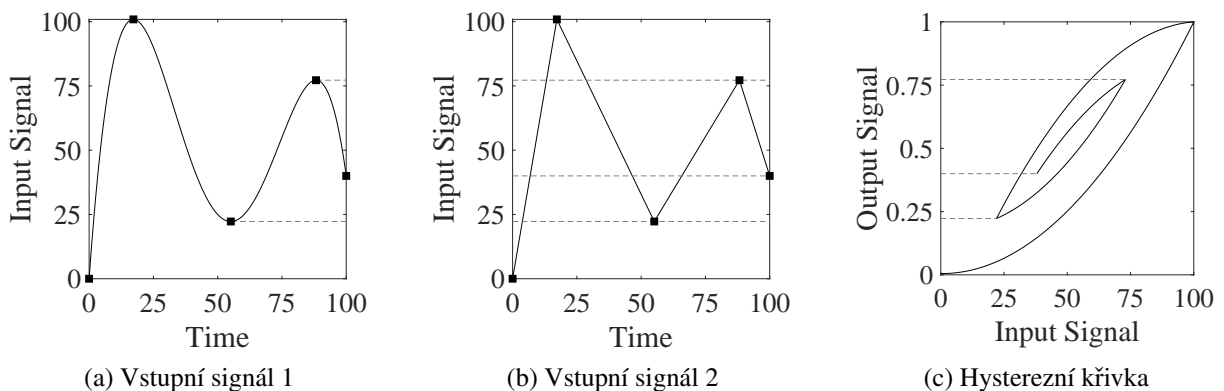
Všechny rate-independent modely hystereze se dají zařadit do následujících dvou kategorií: hystereze s lokální pamětí a hystereze s nelokální pamětí. Hystereze s lokální pamětí splňuje následující vlastnost. Hodnota výstupního signálu v čase t_0 a hodnoty vstupního signálu v následujících časech $t \geq t_0$ jednoznačně určují hodnotu výstupu pro všechny časy $t > t_0$. Jinými slovy, u hystereze s lokální pamětí



Obrázek 1.1: Relé s hysterezí

historie prostřednictvím současné hodnoty výstupu ovlivňuje budoucí hodnoty výstupu. Zatímco u hysterezí s nelokální pamětí, jsou budoucí hodnoty v čase $t \geq t_0$ závislé nejen na současné hodnotě vstupu v čase t_0 , ale také zároveň na předchozí extrémální hodnotě vstupu.

Speciálním případem větvení hysterezní křivky jsou tzv. smyčky („looping behaviour“), které nastávají, pokud vstup variuje tam a zpátky mezi dvěma stejnými hodnotami. Další vlastností spjatou s hysterezí je tzv. zpoždění („lagging“). Jedná se o prodlevu mezi působením sil na systém a projevením jejich účinků. O tom, že se jedná o klíčovou vlastnost hystereze, svědčí i fakt, že tento výraz pochází ze starořeckého výrazu *hysterein* mající význam „zpozdit se“, „být pozadu“.



Obrázek 1.2: Rate-independence vlastnost hystereze

1.2 Preisach-Mayergoyzův model hystereze

Nyní si představíme Preisach-Mayergoyzův (PM) popis hystereze. Základním stavebním kamenem tohoto modelu je tzv. hysterezní operátor $\hat{\gamma}_{\alpha,\beta}$, označovaný též jako hysteron. Tento operátor může být reprezentován obdélníkovou křivkou odpovídajícího relé na obr. 1.1, kde čísla α a β , $\beta < \alpha$, značí zavírací a otevírací hodnoty. Bude-li vstupní signál $u(t)$ monotónně vzrůstat, bude tomu v grafu odpovídat křivka

abcde. Naopak při monotónním poklesu signálu se bude jednat o křivku *edfba*. Matematicky zapíšeme výstup hysteretního operátoru jako

$$\hat{\gamma}_{\alpha,\beta} = \begin{cases} -1, & u(t) \leq \beta, \\ 1, & u(t) \geq \alpha, \\ k, & u(t) \in (\beta, \alpha), \end{cases} \quad (1.1)$$

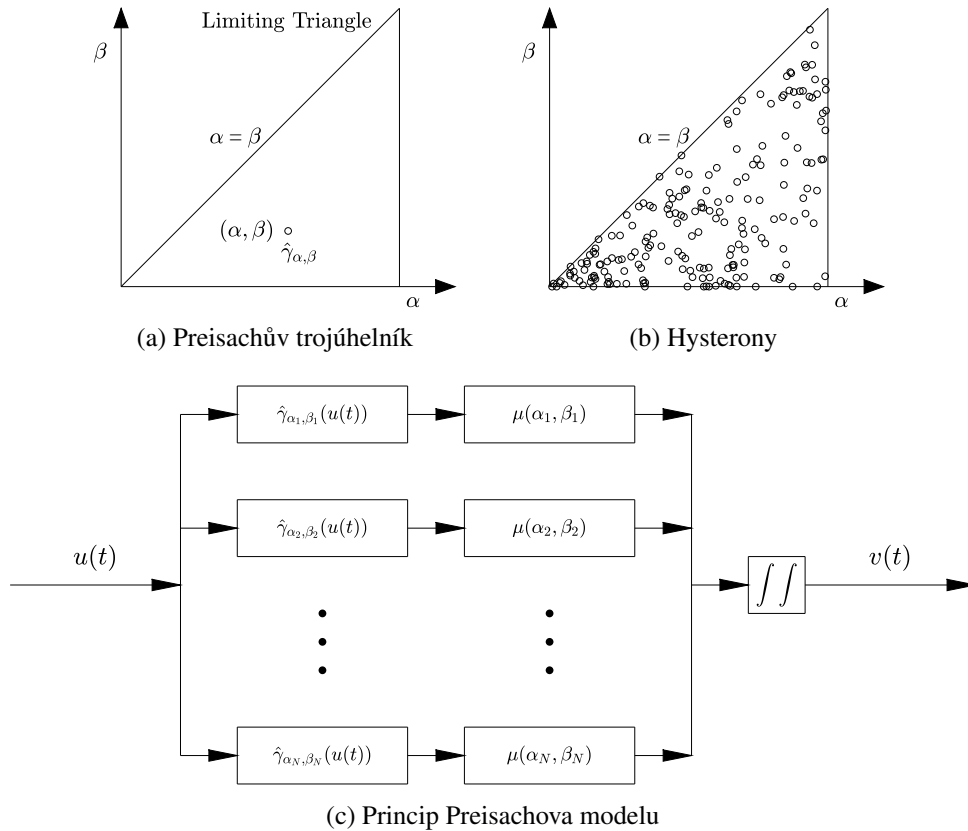
kde

$$k = \begin{cases} 1, & \text{pokud } \exists t^* : u(t^*) > \alpha, \quad \forall \tau \in (t^*, t), u(\tau) \in (\beta, \alpha), \\ -1, & \text{pokud } \exists t^* : u(t^*) < \beta, \quad \forall \tau \in (t^*, t), u(\tau) \in (\beta, \alpha). \end{cases}$$

Dále můžeme uvažovat případ $\alpha = \beta$, který značí hysteron s dokonalou elasticitou, který se zavře a otevře při stejné hodnotě vstupního zatížení. Pokud nyní budeme uvažovat nekonečnou množinu hysteretních operátorů $\hat{\gamma}_{\alpha,\beta}$ a tzv. Preisachovu funkci $\mu(\alpha,\beta)$, která je na $\alpha \leq \beta$ nedegenerovanou hustotou pravděpodobnosti a která tedy udává hustotu výskytu hysteronů v PM prostoru, můžeme PM model hystereze zapsat jako superpozici těchto operátorů

$$v(t) = \hat{\Gamma}[u(t)] = \iint_{\beta \leq \alpha} \mu(\alpha,\beta) \hat{\gamma}_{\alpha,\beta}(u(t)) d\alpha d\beta. \quad (1.2)$$

Symbol $\hat{\Gamma}$ je zde použit pro stručnější zápis výstupu PM modelu hystereze. Tato definice PM prostoru je znázorněna na obr. 1.3.



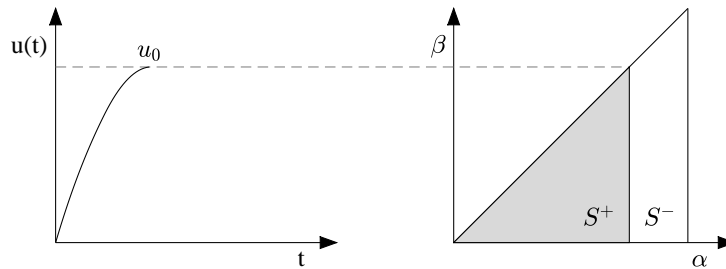
Obrázek 1.3: Schéma Preisach-Mayergoyzova modelu

Otevírací a zavírací hodnoty hysteronů mohou být zaneseny do pravoúhlého trojúhelníku jako body (α, β) , které jednoznačně odpovídají hystereznímu operátoru $\hat{\gamma}_{\alpha, \beta}$. Přeponu tohoto trojúhelníku tvoří limitní přímka $\alpha = \beta$ ideální elasticity. Jak je patrné na diagramu 1.3c, na jednotlivé hysteryony je aplikováno vstupní zatížení a poté jsou vynásobeny $\mu(\alpha, \beta)$. Integrací přes všechny přípustné hodnoty α a β získáme výstup PM modelu. Je patrné, že díky svému čistě matematickému popisu a oproštění od fyzikální podstaty umožňuje tento model obecně popisovat hysterezi a má tak širokou aplikovatelnost.

1.2.1 Preisachova rovina

Preisachovu rovinu můžeme vidět na horních dvou částech obrázku 1.3. Maximální a minimální hodnota vstupního zatížení a hraniční podmínka $\alpha = \beta$ se geometricky projeví jako limitní trojúhelník v této rovině. Každý bod (α, β) v tomto trojúhelníku definuje ojedinelý operátor $\hat{\gamma}_{\alpha, \beta}$, přičemž Preisachova funkce $\mu(\alpha, \beta)$ je mimo limitní trojúhelník dodefinována nulou.

Průběh vstupního zatížení $u(t)$ se projeví na stavu hysteronů uvnitř Preisachova trojúhelníku. Pokud vstup monotónně poroste až do hodnoty u_0 , bude to mít za následek, že všechny elementární operátory $\hat{\gamma}_{\alpha, \beta}$ se zavírací hodnotou menší než u_0 nabudou hodnoty $+1$. Jak je znázorněno na obrázku 1.4, tato situace odpovídá rozdělení limitního trojúhelníku na dvě plochy: $S^+(t)$, kde se nachází všechny hysteryony ve stavu zavřeno, a $S^-(t)$ s hysteryony ve stavu otevřeno.



Obrázek 1.4: Vstupní zatížení a odpovídající Preisachův trojúhelník

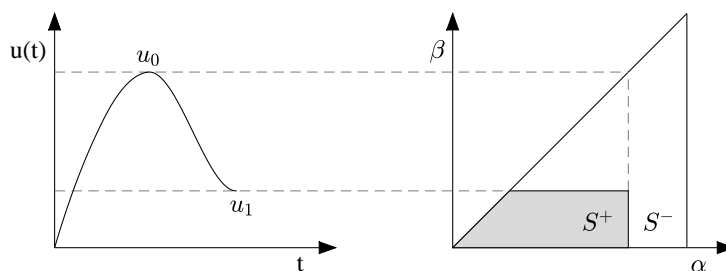
Klesá-li následně vstupní zatížení monotónně z hodnoty u_0 do u_1 , všechny hysteryony, které mají otevírací hodnoty větší než u_1 a které byly zavřeny, přejdou zpět do stavu otevřeno a hodnoty příslušných hysterezních operátorů se změní na -1 . Rozdělení Preisachova trojúhelníku se opět změní. Obdobně může tento vývoj pokračovat monotónním růstem zatížení do hodnoty u_2 atd., jak můžeme vidět na obr. 1.5, resp. 1.6.

Dělicí křivka $L(t)$ těchto dvou ploch odpovídá lokálním maximům a lokálním minimům vstupního zatížení a je patrné že Preisachův model je model s nelokální pamětí. Vezmeme-li v úvahu navíc, že hysterezní operátor nabývá hodnot

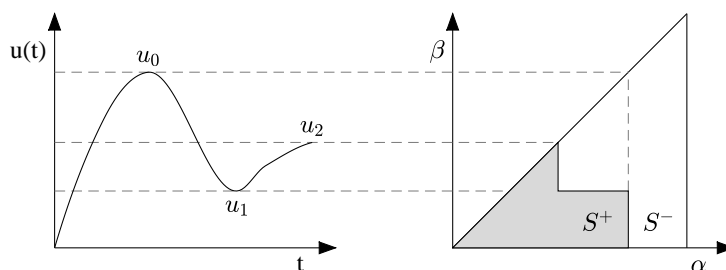
$$\hat{\gamma}_{\alpha, \beta} = \begin{cases} -1, & (\alpha, \beta) \in S^-, \\ 1, & (\alpha, \beta) \in S^+, \end{cases}$$

můžeme přepsat rovnici (1.2) pro výstupní hodnoty na

$$v(t) = \hat{\Gamma}[u(t)] = \iint_{S^+(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-(t)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (1.3)$$



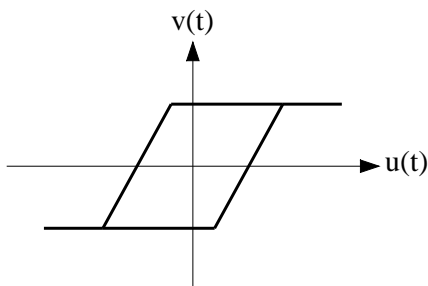
Obrázek 1.5: Pokles vstupního zatížení a odpovídající Preisachův trojúhelník



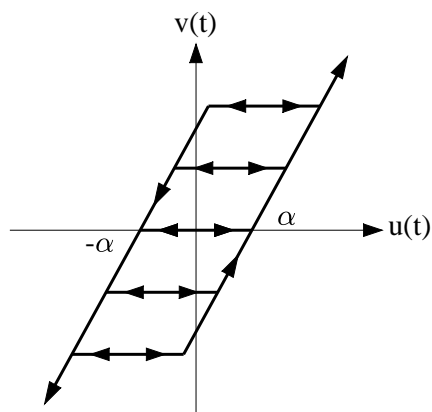
Obrázek 1.6: Opětovný nárůst vstupního zatížení a odpovídající Preisachův trojúhelník

1.3 Další modely hystereze

Systémy s hysterezním chováním jsou nelineární a proto mohou být matematicky náročné na modelování. Zmíníme proto některé z různých přístupů, kterými lze hysterezi popisovat. Hysterezi poprvé popsal James Alfred Ewing ([7]), kolem roku 1890. O výraznější pokrok, zejména v souvislosti s magnetickou hysterezí, se zasloužil Ferenc Preisach ([8]) v roce 1935. Mezi další modely hystereze patří například model M. Krasnoselkiiho a A. Pokrovskiiho ([3]). Ten na rozdíl od Preisachova modelu nepoužívá operátor, který je skokovitý v α, β , ale operátor, který spojitě a monotónně přechází mezi otevírací a zavírací hodnotou (obrázek 1.7). Tento model je sice z matematicky složitější, ale má přesnější výsledky.



Obrázek 1.7: Příklad operátoru Krasnoselkii-Pokrovskiiho modelu



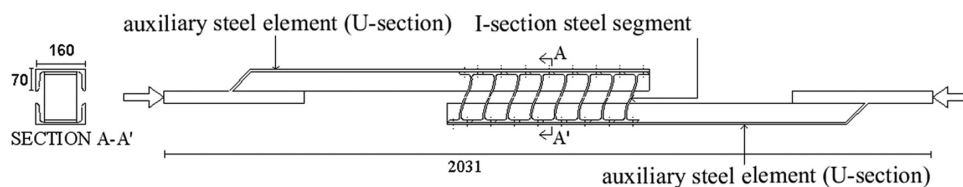
Obrázek 1.8: Vůle v převodech dle Prandlova modelu

Další způsoby popisu jsou například Bouc-Wenův model hystereze ([9]), který je založený na systému nelineárních diferenciálních rovnic, nebo Prandtlův-Išlinského model hystereze ([10]), který patří

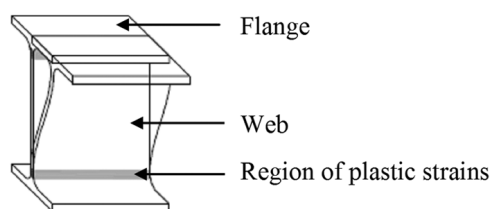
do skupiny modelů Preisachova typu. Na rozdíl od klasického PM modelu však jako elementární prvky nepoužívá relé s hystezí, ale elementární vůle v převodech, jak můžeme vidět na obrázku 1.8. Tento model je výpočetně výhodnější, ale lze ho použít pouze na symetrické hysterezní chování.

1.4 Aplikace PM modelu

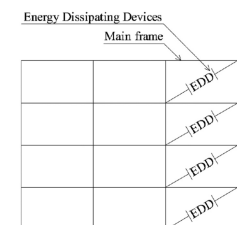
V této práci budeme zkoumat mechanickou hysterezi materiálů a budeme ji využívat k vyhodnocení elasticity, respektive poškození materiálu. Kromě vygenerovaných dat budou použita i naměřená data z měření zatížení disipativních tlumičů vibrací, které slouží k ochraně budov před zemětřesením. Tato data byla poskytnuta Univerzitou v Granadě ve spolupráci s Univerzitou v Madridu a jedná se o testování pasivních ochranných prvků budov, které se typicky skládají z hlavního rámu a sérií tzv. „energy dissipating devices“ (EDDs). Těmi jsou v tomto případě kovové tlumiče, tzv. „web plastifying dampers“ (WPD), jejichž účelem je pohlcení většiny deformace vzniklé zemětřesením. Schéma takového tlumiče a jeho zakomponování můžeme vidět na obrázku 1.9. Více informací lze pak nalézt v [13].



(a) Schéma EDD (tzv. „energy dissipating device“), rozměry v milimetrech



(b) Profil I-sekce



(c) Umístění tlumičů

Obrázek 1.9: Pasivní ochrana před zemětřesením ([13])

Ačkoliv jsou tyto tlumiče efektivním nástrojem pro ochranu budov, je důležité umět efektivně a levně vyhodnotit úroveň jejich poškození. Proto se v druhé polovině této práce budeme zabývat návrhem indexu poškození, resp. elasticity těchto tlumičů a porovnáním s běžně používanými indexy poškození.

Kapitola 2

Identifikace PM prostoru

Jedním z cílů této práce je efektivní nalezení PM prostoru, který odpovídá příslušnému hystereznímu chování materiálů. Jedná se o úlohu, kdy známe vstupní zatížení a k němu příslušnou experimentálně naměřenou hysterezní křivku, a naším úkolem je určit rozložení hysteronů v Preisachova trojúhelníku.

V této kapitole si proto představíme příslušné nástroje pro tento účel. Nejprve představíme použité optimalizační algoritmy, pomocí kterých budeme hledat rozdělení hysteronů $\mu(\alpha, \beta)$. Chceme tedy jednak nalézt vhodné rozdělení pravděpodobnosti a zároveň příslušné parametry tohoto rozdělení. Seznámíme se proto s přehledem použitých rozdělení. Na závěr bude nutné zjistit, jak přesné je nalezené řešení. Z nalezeného PM prostoru a zadaného vstupního zatížení získáme novou hysterezní křivku. Pro vyhodnocení rozdílnosti naměřené a získané hysterezní křivky budou představeny vhodné divergenční míry. Na závěr bude prezentováno softwarová implementace těchto nástrojů.

2.1 Optimalizační algoritmy

V této práci bude zejména využit algoritmus Jaya ([14]), což je relativně nový meta-heuristický optimalizační algoritmus, který představil Rao v roce 2016. Společně s tímto budeme používat i jeho modifikovanou variantu aDE-Jaya ([16]), který je kombinací klasického Jaya algoritmu a diferenciální evoluce (DE), viz [17], což je jeden z typů evolučních algoritmů. Na závěr budeme používat metodu simulovaného žíhání (SA), viz [18], jenž bude sloužit zejména k porovnání efektivnosti předchozích dvou algoritmů.

2.1.1 Jaya

Tento relativně nový algoritmus je založený na tom, že získané průběžné iterační řešení zadaného problému by se mělo pohybovat směrem k nejlepšímu řešení a zároveň by se mělo vyhnout nejhoršímu řešení. Tento algoritmus vyžaduje pouze běžné kontrolní parametry, jakým je velikost populace NP , případně zastavovací podmínky (maximální počet iterací, dosažená přesnost).

Naším obecným cílem je minimalizovat vhodnou účelovou funkci $f(\mathbf{x})$ s D -dimenzionální proměnnou $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_D]$. Algoritmus 2.1 inicializujeme tak, že pro každý prvek z NP -rozměrné populace vygenerujeme hodnoty argumentu účelové funkce. Následně vyhodnotíme funkci $f(\mathbf{x})$ pro každý prvek populace a uložíme index nejlepšího (*best*) a nejhoršího (*worst*) řešení. Poté probíhají samotné iterace Jaya algoritmu, dokud není dosažena požadovaná přesnost řešení nebo není dosažen maximální počet ite-

rací. V každé iteraci jsou všechny proměnné každého prvku populace modifikovány pomocí příslušného Jaya operátoru

$$u_{i,j,k} = x_{i,j,k} + rand_{1,i,j} \cdot (x_{best,j,k} - |x_{i,j,k}|) - rand_{2,i,j} \cdot (x_{worst,j,k} - |x_{i,j,k}|), \quad (2.1)$$

kde index i označuje prvek populace, j pořadové číslo složky vektoru \mathbf{x} a k iteraci, $rand_{1,i,j}$ a $rand_{2,i,j}$ jsou pro každý prvek náhodně vygenerovaná čísla s uniformním rozdělením z intervalu $[0, 1]$ a symbol $|x_{i,j,k}|$ označuje absolutní hodnotu složky proměnné $x_{i,j,k}$. Výraz $rand_{1,i,j} \times (x_{best,j,k} - |x_{i,j,k}|)$ naznačuje tendenci řešení přibližovat se k nejlepšímu řešení a výraz $rand_{2,i,j} \times (x_{worst,j,k} - |x_{i,j,k}|)$ naopak tendenci vyhýbat se nejhoršímu řešení.

Poté co jsou u prvku populace vygenerovány nové proměnné, je vyhodnocena účelová funkce $f(\mathbf{x})$ v novém D -dimenzionálním bodě $\mathbf{u}_{i,k}$, kde opět i značí prvek populace a k iteraci. Pokud je nové řešení lepší, nahrazuje původní vektor $\mathbf{x}_{i,k}$, pokud je horší, tak zůstává hodnota původního vektoru proměnné stejná. Na konci každé iterace cyklu jsou poté znovu vyhodnoceny hodnoty indexů $best$ a $worst$.

Algoritmus 2.1: Pseudokód pro Jaya algoritmus

```

1 Vygenerování počáteční populace, vyhodnocení účelové funkce  $f(\mathbf{x})$  pro každý prvek
2 Nalezení nejlepšího ( $\mathbf{x}_{best}$ ) a nejhoršího ( $\mathbf{x}_{worst}$ ) řešení v populaci
3 while Dosažení zastavovací podmínky do
4   for  $i = 1$  to  $NP$  do //  $NP$  velikost populace
5     for  $j = 1$  to  $D$  do //  $D$  počet složek vektoru proměnné
6        $u_{i,j} = x_{i,j} + rand_{1,j} \cdot (x_{best,j} - |x_{i,j}|) - rand_{2,j} \cdot (x_{worst,j} - |x_{i,j}|)$  // Jaya opeátor
7     end
8     Vyhodnocení účelové funkce  $f(\mathbf{x})$  pro vektor  $\mathbf{u}_i$ 
9     if  $f(\mathbf{u}_i) \leq f(\mathbf{x}_i)$  then
10       $\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i$ 
11    else
12       $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i$ 
13    end
14  end
15  Aktualizace  $\mathbf{x}_{best}$  a  $\mathbf{x}_{worst}$ 
16 end

```

2.1.2 aDE-Jaya

Pro identifikaci našeho problému, tedy hledání hustoty pravděpodobnosti hysteronů v materiálu, byla v článku [16] představena alternativa Jaya algoritmu pro optimalizace parametrů Bouc-Wenova modelu hystereze. V této práci algoritmus 2.2 použijeme i pro optimalizace PM modelu hystereze. Hybrid adaptivní diferenciální evoluce a Jaya algoritmu (aDE-Jaya) je spojení mutačního operátoru DE a Jaya operátoru v mutační fázi algoritmu společně s parametry adaptivní kontroly. Autoři ho navrhli tak, aby vyrovnali schopnosti vyhledávání globálních a lokálních extrémů a také aby zlepšili přesnost hledaného řešení.

Iterace operátoru mutace pomocí DE algoritmu, který z prvků současné generace vytvoří nový prvek, probíhá podle tohoto schématu

$$u_{i,j,k} = x_{r_1,j,k} + F \cdot (x_{r_2,j,k} - x_{r_3,j,k}) \quad (2.2)$$

kde opět index i udává prvek generace, j je pořadové číslo složky vektoru \mathbf{x} a k iteraci, $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ jsou náhodně vybraná přirozená čísla z intervalu $[1, NP]$, která představují indexy prvků populace použitých při mutaci a F je kontrolní parametr pro škálování, který je nejčastěji z intervalu $[0, 1]$. Tato verze mutačního operátoru je jedna z možných variant používaných v DE optimalizaci.

Hybridní mutace v aDE-Jaya algoritmu je použita tak, že při modifikaci prvků populace je přibližně 70% prvků generace změněno pomocí DE mutačního operátoru (2.2) a přibližně 30% prvků je upraveno pomocí Jaya operátoru (2.1). K určení, který z těchto dvou operátorů bude použit, slouží kontrolní parametr míry překročení CR („crossover rate“). Tento výběr garantuje schopnost prohledávat lokální i globální extrémy.

Adaptivní kontrolní parametry v tomto algoritmu jsou dva a tedy mutační faktor F a míra překročení CR . Článek [16] navrhuje nepoužívat fixní hodnoty pro tyto kontrolní parametry, ale pro každý prvek je náhodně rovnoměrně vygenerovat a to parametr F z intervalu $[0.4, 1]$, respektive parametr CR z intervalu $[0.7, 1]$, za tím účelem, aby byla generována různorodost směrů prohledávání. Celou kostru aDE-Jaya algoritmu můžeme vidět v algoritmu 2.2.

Algoritmus 2.2: Pseudokód pro aDE-Jaya algoritmus

```

1 Vygenerování počáteční populace, vyhodnocení účelové funkce  $f(\mathbf{x})$  pro každý prvek
2 Nalezení nejlepšího ( $\mathbf{x}_{best}$ ) a nejhoršího ( $\mathbf{x}_{worst}$ ) řešení v populaci
3 while Dosažení zastavovací podmínky do
4   for  $i = 1$  to  $NP$  do //  $NP$  velikost populace
5      $j_{rand} = randint[1, D]$ 
6      $CR = rand[0.7, 1.0]$ 
7      $F = rand[0.4, 1.0]$ 
8     for  $j = 1$  to  $D$  do //  $D$  počet složek vektoru proměnné
9       if  $rand[0, 1] < CR$  or  $j = j_{rand}$  then
10        if  $rand > 0.3$  then // Operátor hybridní mutace
11          Výběr náhodných indexů  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i, \forall i \in \{1, 2, \dots, NP\}$ 
12           $u_{i,j} = x_{r_1,j} + F \cdot (x_{r_2,j} - x_{r_3,j})$ 
13        else // Jaya opeátor
14           $u_{i,j} = x_{i,j} + rand_{1,j} \cdot (x_{best,j} - |x_{i,j}|) - rand_{2,j} \cdot (x_{worst,j} - |x_{i,j}|)$ 
15        end
16      else
17         $u_{i,j} = x_{i,j}$ 
18      end
19    end
20    Vyhodnocení účelové funkce  $f(\mathbf{x})$  pro vektor  $\mathbf{u}_i$ 
21    if  $f(\mathbf{u}_i) \leq f(\mathbf{x}_i)$  then
22       $\mathbf{x}_i = \mathbf{u}_i$ 
23    else
24       $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i$ 
25    end
26  end
27 Aktualizace  $\mathbf{x}_{best}$  a  $\mathbf{x}_{worst}$ 
28 end

```

2.1.3 Simulované žhání

Simulované žhání (angl. simulated annealing), je další meta-heuristická optimalizační metody. Spočívá v tom, že během prozkoumávání prostoru možných proměnných se snižuje pravděpodobnost přijetí horšího řešení. Fakt, že je umožněno získání horšího výsledku než v předešlé iteraci, je opět důležitý pro možnost nalezení globálních extrémů.

Inicializace algoritmu probíhá zadáním kontrolních parametrů, tedy počáteční teploty $T_0 > 0$, koeficientu ochlazení *koef*, který je z otevřeného intervalu $(0, 1)$, počtu nových řešení K v každé iteraci a zastavovacích podmínek (požadovaná přesnost řešení, maximální počet iterací, počet nových řešení v jedné populaci). Následuje vygenerování počátečního řešení \mathbf{x}_0 a vyhodnocení účelové funkce $f(\mathbf{x})$ v tomto vektoru proměnné.

Následuje samotný cyklus algoritmu 2.3, který probíhá dokud není dosažena požadovaná přesnost řešení, nebo není dosažen maximální počet iterací. Poté pro počet nových řešení K při dané teplotě probíhá cyklus, při kterém je vytvořeno nové řešení podle předpisu $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$, kde $\Delta\mathbf{x}$ je příslušně velký vektor náhodných čísel z intervalu $(-1, 1)$. Vyhodnotíme účelovou funkci f v nově nalezeném bodě \mathbf{x}_1 a pokud je její hodnota nižší než hodnota $f(\mathbf{x}_0)$, přijmeme \mathbf{x}_1 za \mathbf{x}_0 . Pokud je hodnota účelové funkce v novém bodě větší, tak ho s pravděpodobností $p = \exp(-(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0))/T)$ také přijmeme. Je zřejmé, že pravděpodobnost přijetí méně výhodného řešení s rostoucí teplotou klesá. Nesplní-li nový vektor parametrů tyto podmínky, tak \mathbf{x}_0 zůstává nezměněný. Po dokončení tohoto vnitřního cyklu klesne teplota T úměrně se zadaným parametrem *koef*, tzn. $T = \text{koef} \cdot T$.

Algoritmus 2.3: Pseudokód pro SA algoritmus

```

1 Vygenerování počáteční řešení  $\mathbf{x}_0$ , nastavení teploty  $T = T_0$ 
2 Vyhodnocení účelové funkce  $f(\mathbf{x})$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ 
3 while Dosažení zastavovací podmínky do
4   for Počet nových řešení  $K$  do
5     Vytvořit nové řešení  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ 
6     if  $f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_0)$  then
7        $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ 
8     else
9       if  $\text{rand}(0, 1) \leq \exp(-(f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0))/T)$  then
10         $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ 
11      else
12         $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$ 
13      end
14    end
15  end
16  Snížení teploty:  $T = \text{koef} \cdot T$ 
17 end

```

2.2 Použitá pravděpodobnostní rozdělení

Nyní si představíme pravděpodobnostní rozdělení, která budeme v této práci používat. První dvě rozdělení jsou navržena speciálně pro heterogenní materiály, které navrhli Guyer a McCall ([19]). Následuje rozdělení Koen použité v práci ([20]) a také některá klasická pravděpodobnostní rozdělení.

Rozdělení Guyer 1

$$P_c = max \cdot r_c^\alpha, \quad P_o = P_c \cdot r_o^\beta, \quad (2.3)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ jsou parametry rozdělení, P_c a P_o značí hodnotu zavíracího a otevíracího tlaku, max je maximální hodnota vstupního tlaku a r_c, r_o jsou náhodná čísla rovnoměrně vygenerovaná z intervalu $(0, 1)$.

Rozdělení Guyer 2

$$P_c = max \cdot r_c^\alpha, \quad P_o = P_c \cdot r_o^{0.25+0.75\mu}, \quad (2.4)$$

kde $\alpha, \mu \in \mathbb{R}_0^+$ jsou parametry rozdělení, P_c a P_o značí hodnotu zavíracího a otevíracího tlaku, max je maximální hodnota vstupního tlaku a r_c, r_o jsou náhodná čísla rovnoměrně vygenerovaná z intervalu $(0, 1)$.

Rozdělení Koen

$$P_c = max \cdot r_c, \quad P_o = \left(\frac{P_c}{\alpha}\right)^\beta \cdot r_o, \quad (2.5)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$ jsou parametry rozdělení, P_c a P_o značí hodnotu zavíracího a otevíracího tlaku, max je maximální hodnota vstupního tlaku a r_c, r_o jsou náhodná čísla rovnoměrně vygenerovaná z intervalu $(0, 1)$.

Exponenciální rozdělení

$$P_c(x_1) = \mu_1 \exp(-\mu_1 x_1), \quad P_o(x_2) = \mu_2 \exp(-\mu_2 x_2), \quad (2.6)$$

kde $\mu_1, \mu_2 > 0$ jsou parametry rozdělení, P_c a P_o značí hodnotu zavíracího a otevíracího tlaku, $x_1, x_2 \in [0, max]$, kde navíc $x_1 \geq x_2$, max je maximální hodnota vstupního tlaku. Kvůli omezení na tato x_1 a x_2 sice není splněna normalizace hustoty pravděpodobnosti, ale pro naši práci je tato definice zobecněného rozdělení postačující.

Weibullovo rozdělení

$$P_c(x_1) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1} \exp\left(-\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right), \quad P_o(x_2) = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1} \exp\left(-\left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right), \quad (2.7)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ jsou parametry rozdělení, P_c a P_o značí hodnotu zavíracího a otevíracího tlaku, opět požadujeme $x_1, x_2 \in [0, max]$, kde navíc $x_1 \geq x_2$, max je maximální hodnota vstupního tlaku. Omezení x_1 a x_2 je opět dostačující zobecnění pro tuto práci.

Nakonec v této práci představíme nové rozdělení, které vychází z rozdělení představených Guyerem a McCallem a rozdělení Koen.

Rozdělení Guyer 3

$$P_c = max \cdot r_c^\alpha, \quad P_o = P_c \cdot (\gamma \times r_o)^\beta, \quad (2.8)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+$, $\gamma \in (0, 1)$ jsou parametry rozdělení, P_c a P_o značí hodnotu zavíracího a otevíracího tlaku, max je maximální hodnota vstupního tlaku a r_c, r_o jsou náhodná čísla rovnoměrně vygenerovaná z intervalu $(0, 1)$.

V této práci budeme kromě PM prostorů, vzniklých použitím jednoho pravděpodobnostního rozdělení, používat i takové prostory, které vznikly z tzv. distribuční směsi ([21]). Jejich použití umožní v praktických případech lepší popis hystereze.

Definice 2.2.1. (Distribuční směs). Distribuční směsí nazveme každou konvexní kombinaci

$$p(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i(x), \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_i > 0, \quad (2.9)$$

kde k značí počet komponent, $x \in \mathbb{R}$, $p_i(x)$ jsou pravděpodobnostní rozdělení jednotlivých komponent směsi.

2.3 Divergenční míry odlišnosti a jejich vlastnosti

Zbývá představit matematický aparát, který budeme používat pro určení rozdílnosti nalezené a změřené hysterezní křivky, což je hodnota, kterou se snažíme minimalizovat. Schopnost určit, jak moc se od sebe liší dvě křivky využijeme nejen při naší optimalizační úloze, ale také v dalších částech této práce. Prvním nástrojem jsou metriky. V této práci užíváme běžnou L_p metriku definovanou pro spojitě funkce na intervalu (a, b) vztahem

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.10)$$

respektive její diskrétní verze pro L_2 a L_1 metriky, definované vztahy

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\sum_i (f(x_i) - g(x_i))^2}, \quad \|f - g\|_1 = \sum_i |f(x_i) - g(x_i)|, \quad (2.11)$$

kde f a g značí naměřenou a optimalizační nalezenou hysterezní křivku jako funkci vstupního tlaku a x_i značí hodnotu tlaku v i -tém časovém okamžiku. Dále existuje mnoho statistických vzdáleností, které nespĺňují všechny axiomy metriky, ale mohou být pro naše účely užitečné. Jednu takovou skupinu statistických vzdáleností označujeme jako ϕ -divergence.

Definice 2.3.1. (ϕ -divergence). Necht' P, Q jsou libovolné pravděpodobnostní distribuce na měřitelném prostoru $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Potom ϕ -divergenci definujeme jako

$$D_\phi(P, Q) = \int g \phi\left(\frac{f}{g}\right) d\mu = E_Q \left[\phi\left(\frac{f}{g}\right) \right], \quad \phi \in \Phi^* \quad (2.12)$$

kde $g = \frac{dQ}{d\mu}$, $f = \frac{dP}{d\mu}$ jsou hustoty těchto distribucí vzhledem k σ -konečné míře μ a Φ^* je třída všech konvexních funkcí $\phi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, které jsou navíc ryze konvexní¹ na okolí 1 a pro které platí

$$\phi(1) = 0, \quad \phi(0) = \lim_{t \rightarrow 0_+} \phi(t), \quad 0 \phi\left(\frac{0}{0}\right) = 0, \quad 0 \phi\left(\frac{a}{0}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t}, \quad a > 0.$$

¹Řekneme, že funkce f , která spojitá na (a, b) , je na tomto intervalu ryze konvexní, právě tehdy, když pro libovolné $\lambda \in (0, 1)$ platí: $\forall x, y \in (a, b), x < y : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Kromě definice si v této sekci představíme také některé vlastnosti ϕ -divergencí, které jsou ze statistického hlediska důležité. Například je důležité požadovat, aby se výsledná divergence zvětšovala, pokud se budou obě distribuce P a Q od sebe vzdalovat. Více informací a také důkazy k následujícím větám lze pak najít například v [23].

Věta 1. (O oboru hodnot). Necht' P, Q jsou pravděpodobnostní distribuce. Potom platí

$$0 \leq D_\phi(P, Q) \leq \phi(0) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t}, \quad (2.13)$$

kde $\phi \in \Phi^*$. Rovnost $D_\phi(P, Q) = 0$ nastává pokud $P = Q$ a rovnost $D_\phi(P, Q) = \phi(0) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t)}{t}$ nastává pokud $S_P \cap S_Q = \emptyset$, kde S_P a S_Q jsou nosiče distribucí P a Q .

Věta 2. (O monotonii). Necht' P, Q jsou pravděpodobnostní distribuce na měřitelném prostoru $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Necht' P_B, Q_B jsou restrikce na $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Potom

$$D_\phi(P_B, Q_B) \leq D_\phi(P, Q). \quad (2.14)$$

Věta 3. (O symetrii). Necht' P, Q jsou pravděpodobnostní distribuce, $D_\phi(P, Q)$ je ϕ -divergence, kde $\phi \in \Phi^*$. Zavedeme-li konjugovanou funkci k funkci $\phi(x)$ vztahem $\phi^*(t) = t\phi\left(\frac{1}{t}\right)$, potom je $D_{\phi^*}(P, Q)$ také ϕ -divergence a platí

$$D_{\phi^*}(P, Q) = D_\phi(Q, P). \quad (2.15)$$

Existuje-li navíc $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\phi^*(t) = \phi(t) + c(t-1), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.16)$$

potom pro D_ϕ platí symetrie, tedy

$$D_\phi(P, Q) = D_\phi(Q, P). \quad (2.17)$$

Přejdeme-li ke konkrétním příkladům použitých ϕ -divergencí v této práci, tak se jedná o kvadratickou Hellingerovu divergenci definovanou vztahem

$$H^2(P, Q) = \frac{1}{2} \int (\sqrt{f} - \sqrt{g})^2 d\mu, \quad (2.18)$$

pro kterou $\phi(t) = (1 - \sqrt{t})^2$. H^2 dokonce splňuje všechny axiomy metriky.

Další je pak kvadratická LeCammova divergence definovaná jako

$$LC^2(P, Q) = \int \frac{(f-g)^2}{f+g} d\mu, \quad (2.19)$$

pro kterou

$$\phi(t) = \frac{1-t}{2t+2}. \quad (2.20)$$

Tato divergence symetrii a reflexivitu. Odmocníme-li tuto divergenci, tak $LC(P, Q)$ navíc splňuje trojúhelníkovou nerovnost a je tedy metrikou.

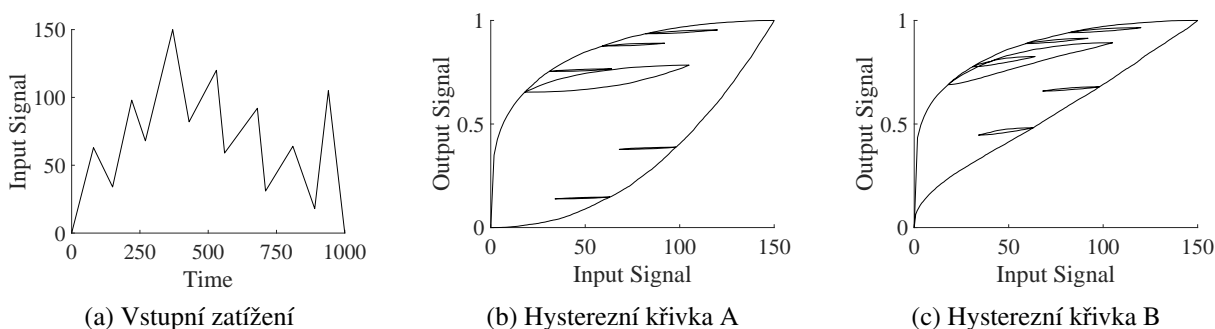
V praxi budeme používat diskrétní verze těchto divergencí na prostoru běžných funkcí, které nemusí být nutně normalizovanými hustotami pravděpodobnosti, tedy

$$H^2(f, g) = \frac{1}{2} \sum_i (\sqrt{f(x_i)} - \sqrt{g(x_i)})^2, \quad LC^2(f, g) = \sum_i \frac{(f(x_i) - g(x_i))^2}{f(x_i) + g(x_i)}, \quad (2.21)$$

kde opět f značí známou a g nalezenou hysterezní křivku vystupující jako funkce tlaku x_i , kde index značí hodnotu tlaku v i -tém časovém okamžiku.

2.4 Testování optimalizačních metod

Obecnější porovnání efektivity Jaya algoritmu vůči SA algoritmu a rychlosti konvergence pro různé optimalizační metody lze najít například v [15], případně v [16]. My se v této sekci zaměříme na testování použitých optimalizačních metod pro speciální komplikovaný problém identifikace PM prostoru. Pro tento účel bylo použito vždy stejné vstupní zatížení a různé hysterezní křivky (obr. 2.1), které vznikly za použití daného vstupního zatížení a vygenerovaných PM prostorů. Pro 2D případ hystereze *A* z obr. 2.1b bylo použito rozdělení Guyer 1 s parametry $\alpha = 0.45$ a $\beta = 3.8$, pro 4D případ hystereze *B* z obr. 2.1c směs rozdělení Guyer 1 s parametry $\alpha = 0.65$, $\beta = 9.35$ a Guyer 2 s parametry $\alpha = 2.52$, $\mu = 0.3$.



Obrázek 2.1: Hysterezní křivky A a B pro testy identifikace PM

Při testování optimalizací bylo při každém běhu algoritmu provedeno 80 iterací s řídicími parametry, které jsou shrnuty v tabulce 2.1, přičemž U zde značí rovnoměrné rozdělení. Parametry NP v Jaya algoritmech a K v SA algoritmu jsou voleny stejně, čímž vždy dojde ke stejnému počtu vygenerování PM prostorů a vypočtení příslušné divergence, což jsou časově a výkonově nejnáročnější úkony u všech algoritmů. Ve všech případech byla použita Hellingerova divergence, pro každý PM prostor je vygenerováno 1000 hysteronů a každý běh algoritmu byl 20-krát zopakován. Veškeré testy byly provedeny v Matlabu verze 2019a a na stolním počítači s procesorem Intel(R) Core i5-7200U CPU @ 2.5GHz.

Algoritmus	Parametr	Hodnota
Jaya	Velikost populace	$NP = 50$
	Velikost populace	$NP = 50$
aDE-Jaya	Mutační faktor	$F \sim U(0.4, 1)$
	Crossover rate	$CR \sim U(0.7, 1)$
SA	Počáteční teplota	$T_0 = 1$
	Počet nových řešení	$K = 50$
	Koeficient klesání teploty	$koef = 0.9$

Tabulka 2.1: Parametry testovaných algoritmů

Výsledky tohoto testování, kterými jsou dosažené Hellingerovy divergence odchylek obou hysterezních křivek, jsou obsaženy v tabulce 2.2. Pro oba případy je zde vždy zaneseno nejlepší a nejhorší řešení, dále průměrné řešení a směrodatná odchylka. Na závěr je uveden průměrný čas provedení 80 iterací algoritmu. Z výsledků je patrné, že za stejný počet iterací dokázaly Jaya algoritmy nalézt lepší řešení než SA algoritmus. Navíc dosáhly i stabilnějších výsledků při opakovaném testování, neboť mají nejmenší směrodatnou odchylku. Modifikovaná varianta aDE-Jaya představená v článku [16] i zde přináší lepší výsledky bez zvýšení časové náročnosti.

Prostor		Jaya	aDE-Jaya	SA
A (2D)	best solution	0.0112	0.0067	0.0150
	worst solution	0.0132	0.0127	0.1174
	average solution	0.0105	0.0103	0.0440
	std solution	0.0013	0.0012	0.0272
	mean time [s]	44.31	42.27	40.76
B (4D)	best solution	0.0063	0.0056	0.0065
	worst solution	0.0334	0.0344	0.0569
	average solution	0.0194	0.0159	0.0340
	std solution	0.0093	0.0097	0.0163
	mean time [s]	38.09	43.67	43.069

Tabulka 2.2: Výsledná Hellingerova vzdálenost obou hysterezí

2.5 Program na identifikaci PM prostoru

V rámci této práce je v prostředí Matlab verze 2019a vytvářen nově koncipovaný software, který pomocí nástrojů představených v předešlých sekcích této kapitoly dokáže generovat a hlavně identifikovat PM prostory z naměřených dat. Tento software byl naprogramován s využitím poznatků z tvorby programu v práci [20], přičemž byly použity nové algoritmy Jaya a aDE-Jaya a také bylo nově vytvořeno celé uživatelské rozhraní. V této části si představíme funkce tohoto programu, přičemž jeho rozhraní můžeme vidět na obrázku 2.2.

Pro generování PM prostoru je nutné uprostřed nahoře v prostředí programu nastavit požadované hodnoty o rozdělení hysteronů, tak jak byly představeny v sekci 2.2. Jedná se tedy o hodnotu minimálního a maximálního vstupního zatížení, počtu komponent distribuční směsi a u jednotlivých složek pak typ pravděpodobnostního rozdělení, jeho parametry a počet hysteronů této složky. Po stisknutí tlačítka „Generate“ se v grafu vlevo nahoře vykreslí příslušný PM prostor. Do této části lze také nahrát PM prostor ze souboru nebo ho vykreslený naopak uložit. Vlevo dole lze pak vygenerovat, nahrát, případně uložit vstupní zatížení a vedle pak nahrát nebo uložit hysterezní křivku.

Přejdeme-li k optimalizační funkci programu, tak uprostřed dole je možné vybrat optimalizační metodu a její vstupní parametry (viz sekce 2.1). Dále se pak vpravo dole zvolí počet složek jejich tvary rozdělení a také počet opakování běhu algoritmu. Po stisknutí tlačítka „Start Optimization“ se spustí optimalizace a po jejím skončení se do rozhraní vypíše nalezené hodnoty parametrů a do prostředního grafu se červeně vykreslí hysterezní křivka, která odpovídá nalezenému PM prostoru působí-li na něj zadané vstupní zatížení. Zastoupení jednotlivých složek v distribuční směsi při optimalizaci je prozatím 1:1, ale to může být předmětem vylepšování v dalším vývoji tohoto programu, stejně tak jako přidávání dalších optimalizačních metod a pravděpodobnostních rozdělení.

Mezi další funkce patří samostatné vygenerování hysterezní křivky odpovídající vstupnímu zatížení aplikovanému na PM prostor vpravo nahoře pomocí tlačítka „PM+Input->Curve“. Dále lze vpravo nahoře zvolit divergenci pro určení odlišnosti naměřené a programem nalezené hysterezní křivky, jak bylo popsáno v sekci 2.3. Tato hodnota se vypíše po stisknutí tlačítka „Divergence“, přičemž hodnota „Divergence*“ udává hodnotu po normování počtem změřených hodnot hysterezí křivky.

The screenshot displays a software interface for identifying PM space. It features several key components:

- PM space plot:** A scatter plot showing 'Opening values' (y-axis, 0-8) versus 'Closing values' (x-axis, 0-8). The data points form a triangular shape.
- Generate PM Space panel:**
 - Input:** Min: 0, Max: 8.453
 - # Components:** 3
 - # Points:** 300
 - Distribution:** Gujer1, Gujer2, Gujer2
 - Parameters:**
 - Alpha: 1.11, Beta: 0.068
 - Alpha: 0.05, Mu: 6.917
 - Alpha: 0.775, Mu: 0.496
 - Buttons:** Load PM, Save PM, Generate, L2, Hellinger, LeCam
- Optimization panel:**
 - SA JAVA aJE JAVA
 - Population: 70, Div: 1e-05
 - Max iter: 250
 - Buttons: PM+Input>Curve, Start Optimization, Divergence
- Input signal plot:** Shows 'Input signal' (y-axis, 0-8) versus 'Time' (x-axis, 0-80). The signal starts at 8, drops to 0, and then rises back to 8.
- Hysteresis curve plot:** Shows 'Output signal' (y-axis, 0-1) versus 'Input signal' (x-axis, 0-8). It displays a hysteresis loop with multiple curves.
- Additional controls:** # Components: 3, # Repetitions: 1, Distribution #1, #2, #3 dropdowns.

Obrázek 2.2: Program na identifikování PM prostoru

Kapitola 3

Jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti

V další části této práce se zaměříme na navržení indexu elasticity, resp. poškození, a to pomocí znalosti rozložení hysterónů v PM prostoru. K tomu účelu použijeme neparametrický popis hustoty pravděpodobnosti. U takového odhadu není nutné znát žádné informace o tvaru odhadované hustoty, ale pouze samotná data, kterými budou získané PM prostory. V našem případě k tomu použijeme jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti.

3.1 Jádrový odhad pro jednorozměrná data

Jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti můžeme chápat jako zobecnění histogramu, který je nejstarším a nejpoužívanějším neparametrickým odhadem. Histogramový odhad byl v práci [20] použit při tvorbě indexu elasticity, a proto se zde budeme zabývat obecnějším přístupem k této problematice. Předpokládejme, že X je spojitá náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, dále X_1, \dots, X_n je náhodný výběr o rozsahu n z této náhodné veličiny. Necht' $\text{supp } f = [a, b]$ a dále dělení tohoto intervalu pomocí M stejně velkých intervalů $[a, a + h)$, $[a + h, a + 2h)$, ..., $[a + (M - 1)h, b)$, kde $h = \frac{b-a}{M}$ budeme nazývat vyhlazovací parametr. Histogram poté definujeme následovně

$$\hat{f}^H(x) = \frac{1}{nh} (\text{počet } X_i \text{ ve stejném intervalu jako } x). \quad (3.1)$$

Dalším neparametrickým odhadem hustoty pravděpodobnosti je naivní odhad, který definujeme

$$\hat{f}^{NO}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n w\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad w(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.2)$$

kde h je vyhlazovací parametr. Zobecněním těchto neparametrických odhadů se dostáváme k jádrovému odhad hustoty pravděpodobnosti.

Definice 3.1.1. (Jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti). Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr o rozsahu n ze spojitě náhodné veličiny X s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$. Necht' symetrická funkce $K(x) \geq 0$, kterou bude nazývat jádrem, splňuje podmínky

$$\int K(x) dx = 1, \quad \int x K(x) dx = 0, \quad \int x^2 K(x) dx > 0. \quad (3.3)$$

Potom $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme jádrový odhad hustoty vztahem

$$\hat{f}(x; h) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i), \quad (3.4)$$

kde $K_h(x) = \frac{1}{h}K\left(\frac{x}{h}\right)$ je škálované jádro a $h \in \mathbb{R}^+$ je vyhlazovací parametr.

3.2 Chyba jádrového odhadu

Pokud označíme skutečnou hustotu pravděpodobnosti jako $f(x)$, potom se můžeme zabývat chybou našeho odhadu $\hat{f}(x; h)$. Je zřejmé, že tento odhad explicitně závisí na vyhlazovacím parametru. Pro měření kvality hustoty v konkrétní bodě x se nejčastěji používá střední kvadratická chyba (*mean squared error*, MSE), která je definována jako

$$\text{MSE}(\hat{f}(x; h)) = \text{E}(\hat{f}(x; h) - f(x))^2. \quad (3.5)$$

Tento tvar můžeme jednoduchými úpravami upravit do tvaru

$$\text{MSE}(\hat{f}(x; h)) = \underbrace{\left(\text{E}\hat{f}(x; h) - f(x)\right)^2}_{\text{Bias}(\hat{f}(x; h))} + \text{Var}\hat{f}(x; h). \quad (3.6)$$

V praxi je žádoucí uvažovat měřítko globální chyby mezi skutečnou hustotou a jejím odhadem. Jednou z možností je integrovaná kvadratická chyba (*integrated squared error*, ISE)

$$\text{ISE}(\hat{f}(\cdot; h)) = \int (\hat{f}(x; h) - f(x))^2 dx. \quad (3.7)$$

Tato chyba sčítá druhé mocniny vzdáleností mezi $f(x)$ a $\hat{f}(x; h)$ jakožto funkce pozorovaných dat, což je stochastická proměnná. Proto vhodnější způsob měření chyby je střední integrovaná kvadratická chyba (*mean integrated square error*, MISE) daná předpisem

$$\text{MISE}(\hat{f}(\cdot; h)) = \text{E}[\text{ISE}(\hat{f}(\cdot; h))] = \text{E} \int (\hat{f}(x; h) - f(x))^2 dx. \quad (3.8)$$

Tento odhad chyby můžeme chápat jako průměrnou hodnotu globální ISE chyby v závislosti na vyhlazovacím parametru. Navíc zaměněním integrálu a střední hodnoty a použitím vztahu (3.6) můžeme MISE zapsat jako

$$\begin{aligned} \text{MISE}(\hat{f}(\cdot; h)) &= \int \text{E}(\hat{f}(x) - f(x))^2 dx = \int \text{MSE}(\hat{f}(x; h)) dx \\ &= \int \text{Bias}^2(\hat{f}(x; h)) dx + \int \text{Var}\hat{f}(x; h) dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tento výraz můžeme dále upravovat. Zaměříme-li se nejprve na střední hodnotu $\hat{f}(x; h)$, pak pomocí substituce a předpokladu, že jádro je normované na jedničku, dostáváme

$$\text{E}\hat{f}(x; h) = \text{E}K_h(x - X) = \frac{1}{h} \int K\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y) dy = \left| z = \frac{x-y}{h} \right| = \int K(z) f(x - hz) dz. \quad (3.10)$$

Použijeme-li Taylorův rozvoj funkce $f(x - hz)$ v bodě x

$$f(x - hz) = f(x) - hzf'(x) + \frac{1}{2}h^2z^2f''(x) + o(h^2), \quad (3.11)$$

pak dostáváme

$$\text{E}\hat{f}(x; h) = f(x) \int K(z) dz - hf'(x) \int zK(z) dz + \frac{1}{2}h^2f''(x) \int z^2K(z) dz + o(h^2). \quad (3.12)$$

Použijeme-li nyní podmínky (3.3), tak můžeme psát

$$E\hat{f}(x; h) = f(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) \int z^2 K(z) dz + o(h^2). \quad (3.13)$$

Zavedeme-li pro zbytek kapitoly značení

$$R(K) = \int K^2(x) dx, \quad \mu_2(K) = \int x^2 K(x) dx, \quad R(f'') = \int (f''(x))^2 dx, \quad (3.14)$$

tak dostáváme

$$\text{Bias}(\hat{f}(x; h)) = \hat{f}(x; h) - f(x) = \frac{1}{2}h^2 \mu_2(K) f''(x) + o(h^2). \quad (3.15)$$

Obdobně můžeme upravit a použít Taylorův rozvoj pro rozptyl $\hat{f}(x; h)$

$$\begin{aligned} \text{Var}\hat{f}(x; h) &= \frac{1}{n} \text{Var} K_h(x - X) = \frac{1}{n} \text{E}K_h(x - X)^2 - \frac{1}{n} (\text{E}K_h(x - X))^2 \\ &= \frac{1}{n} \int K_h(x - y)^2 f(y) dy - \frac{1}{n} \left(\int K_h(x - y) f(y) dy \right)^2 = \left| z = \frac{x - y}{h} \right| \\ &= \frac{1}{nh} \int K^2(z) f(x - hz) dz - \frac{1}{n} \left(\int K(z) f(x - hz) dz \right)^2 \\ &= \frac{1}{nh} \int K^2(z) (f(x) + o(1)) dz - \frac{1}{n} \left(\int K(z) (f(x) + o(1)) dz \right)^2 \\ &= \frac{1}{nh} f(x) \int K^2(z) dz + o\left(\frac{1}{nh}\right) = \frac{1}{nh} R(K) f(x) + o\left(\frac{1}{nh}\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Provedením těchto úprav můžeme nyní za pomoci výrazů (3.15) a (3.16) zapsat střední kvadratickou chybu jako

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{f}(x; h)) &= \left(\frac{1}{2}h^2 \mu_2(K) f''(x) + o(h^2) \right)^2 + \frac{1}{nh} R(K) f(x) + o\left(\frac{1}{nh}\right) \\ &= \frac{1}{4}h^4 \mu_2^2(K) (f''(x))^2 + \frac{1}{nh} R(K) f(x) + o\left(h^4 + \frac{1}{nh}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Zintegrujeme-li nyní výraz (3.17) a využijeme vlastnosti $f(x)$ jakožto hustoty pravděpodobnosti, tak dostáváme

$$\begin{aligned} \text{MISE}(\hat{f}(\cdot; h)) &= \int \text{MSE}(\hat{f}(x; h)) dx \\ &= \frac{1}{4}h^4 \mu_2^2(K) \int (f''(x))^2 dx + \frac{1}{nh} R(K) \int f(x) dx + o\left(h^4 + \frac{1}{nh}\right) \\ &= \frac{1}{4}h^4 \mu_2^2(K) R(f'') + \frac{1}{nh} R(K) + o\left(h^4 + \frac{1}{nh}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Vyšetřováním průběhu funkce $\text{MISE}(\hat{f}(\cdot; h))$ vůči proměnné h zjistíme, že nabývá minima pro hodnotu

$$h_{\text{MISE}} = \left(\frac{R(K)}{\mu_2^2(K) R(f'') n} \right)^{1/5}. \quad (3.19)$$

Dosažením hodnoty (3.19) do rovnice (3.18) dostáváme

$$\text{MISE}(\hat{f}(\cdot; h)) = \frac{5}{4} (\mu_2^2(K) R^4(K) R(f''))^{1/5} n^{-4/5}, \quad (3.20)$$

což nám dává informaci o rychlosti konvergence MISE pro optimální hodnotu vyhlazovacího parametru a minimální hodnotu MISE rovnou nule pro $n \rightarrow \infty$. Jinými slovy lze při použití vyhlazovacího parametru $h = o(n^{-1/5})$ dosáhnout pro MISE řádu konvergence $o(n^{-4/5})$.

3.3 Volba optimálního jádra

Dosažení co možná nejlepšího jádrového odhadu závisí jednak na volbě jádra a zároveň na volbě vyhlazovacího parametru. Jak však ukazuje výraz (3.19), h_{MISE} závisí na neznámé hustotě pravděpodobnosti, kterou se snažíme odhadnout. Nicméně můžeme získat užitečné informace. Přepíšeme-li (3.20), kde je použita optimální hodnota vyhlazovacího parametru, jako

$$\text{MISE}(\hat{f}(\cdot; h)) = C(K) (R(f''))^{1/5} n^{-4/5}, \quad (3.21)$$

kde konstanta $C(K)$ se rovná

$$C(K) = (\mu_2(K))^{2/5} (R(K))^{4/5}.$$

Pokud by kromě konstanty $C(K)$ byly všechny ostatní proměnné konstantní, bude minimalizace MISE spočívat ve zvolení vhodného jádra. Zaměříme se nyní pouze na jádra, která jsou hustotami pravděpodobnosti. Bez újmy na obecnosti také předpokládejme, že hodnota μ_2 je rovna jedné.² Problém minimalizace $C(K)$ se redukuje na úlohu minimalizace $\int K^2(x) dx$ s vazbami $R(K) = \mu_2(K) = 1$. V rozdílném kontextu ukázali Hodges a Lehmann, že řešením tohoto problému je jádro

$$K_e(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{5}x^2\right), & -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Toto jádro poprvé v kontextu odhadu hustoty pravděpodobnosti použil Epanečnikov, a proto se nazývá Epanečnikovo jádro. Jeho tvar spolu s tvary dalších možných jader můžeme vidět na obrázku 3.1 a v tabulce 3.1 pak nalezneme jejich matematický zápis a jejich efektivnosti v porovnání s Epanečnikovým jádrem. Tedy pro každé symetrické jádro K definujeme efektivitu

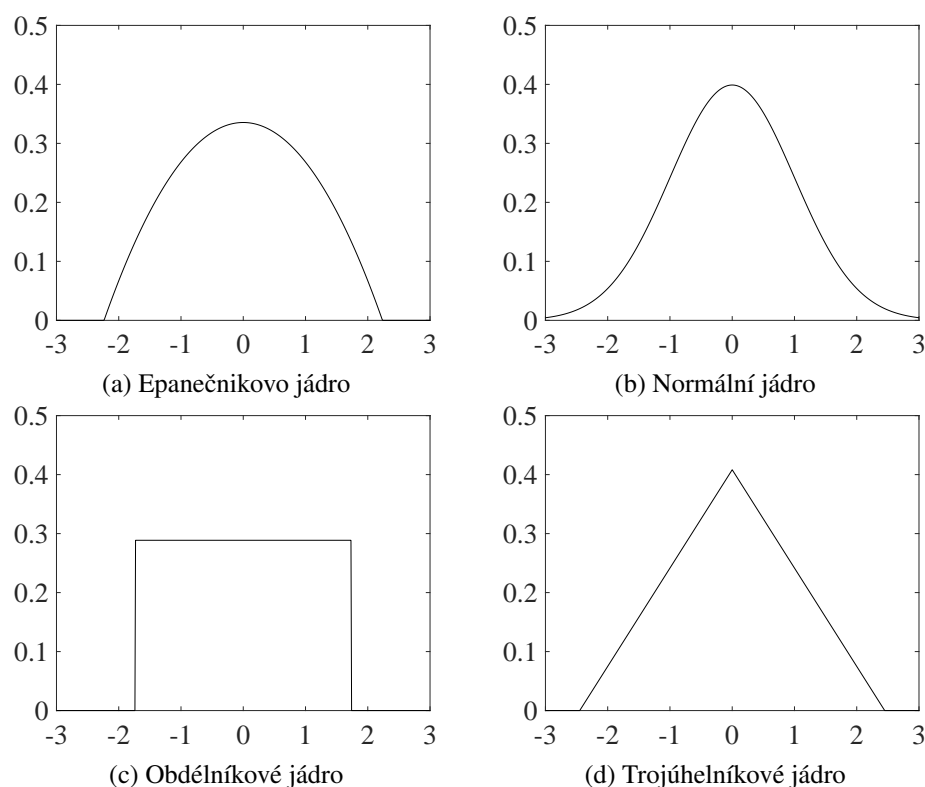
$$\text{eff}(K) = (C(K_e) / C(K))^{5/4}. \quad (3.23)$$

Všechny zde zmíněná jádra mají efektivitu relativně blízko jedné, dokonce i obdélníkové jádro, které se používá při konstrukci naivního odhadu, má $\text{eff} = 0.93$.

3.4 Volba vyhlazovacího parametru

Přejdeme-li k volbě vyhlazovacího parametru h , opět se budeme snažit minimalizovat hodnotu MISE. Zde si představíme několik základních pravidel pro jeho volbu.

²Pokud $\mu_2 \neq 1$, použijeme přeškálované jádro $\sqrt{\mu_2} K(\sqrt{\mu_2}x)$. Toto neovlivní hodnotu $C(K)$.

Obrázek 3.1: Tvary základních jádrových funkcí $K(x)$

Jádro	$\mathbf{K}(x)$	$\mathbf{eff}(K)$
Epanečnickovo	$\begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{5}x^2\right), & -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$	1
Normální (Gaussovo)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$	0.9512
Obdélníkové	$\begin{cases} \frac{1}{2}, & x < 1, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$	0.9295
Trojúhelníkové	$\begin{cases} 1 - x , & x < 1, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$	0.9859

Tabulka 3.1: Přehled jádrových funkcí a jejich efektivity

Metoda referenční hustoty

Tato metoda vychází ze vzorce (3.19), kde jsme spočítali optimální hodnotu vyhlazovacího parametru v závislosti na odhadované hustotě $f(x)$. V této metodě nahradíme neznámou hustotu za referenční, kterou je hustota normálního rozdělení $N(0, \sigma^2)$. Výsledná hodnota parametru má potom tvar

$$\hat{h} = \left(\frac{8\pi^{1/2}R(K)}{3\mu_2^2(K)n} \right)^{1/5} \cdot \hat{\sigma} \approx 1.06\hat{\sigma}n^{-1/5}, \quad (3.24)$$

kde $\hat{\sigma}$ je nějaký vhodný odhad σ , zpravidla bereme výběrovou směrodatnou odchylku.

Metoda krosvalidace nejmenších čtverců

Tato metoda je výpočetně náročnější než ta předchozí a spočívá v přímé minimalizaci hodnoty MISE. Z vlastností střední hodnoty lze snadno upravit rovnici (3.8) na

$$\text{MISE}(\hat{f}(\cdot; h)) = \mathbb{E} \int \hat{f}^2(x; h) dx - 2\mathbb{E} \int \hat{f}(x; h) f(x) dx + \int f^2(x) dx. \quad (3.25)$$

Poslední člen na pravé straně v rovnici (3.25) nezávisí na hodnotě vyhlazovacího parametru, a proto se úloha minimalizace redukuje pouze na první dva členy. Zaved' me nyní funkci

$$\hat{f}_{-i}(X_i; h) = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K_h(X_i - X_j) \quad (3.26)$$

a pomocí ní ještě funkcionál

$$M_0(h) = \int \hat{f}^2(x; h) dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_{-i}(X_i; h). \quad (3.27)$$

Lze ukázat, že funkcionál $M_0(h)$ je nestranným odhadem výrazu

$$\mathbb{E} \int \hat{f}^2(x; h) dx - 2\mathbb{E} \int \hat{f}(x; h) f(x) dx, \quad (3.28)$$

a tedy minimalizace hodnoty $\mathbb{E}(M_0(h))$ přesně odpovídá minimalizaci MISE. Za předpokladu zjednodušení, že hodnota minimalizující $M_0(h)$ také minimalizuje $\mathbb{E}(M_0(h))$, volíme za hodnotu vyhlazovací parametru

$$\hat{h} = \arg \min_{h \in \mathbb{R}^+} M_0(h). \quad (3.29)$$

3.5 Jádrový odhad pro vícerozměrná data

Jednorozměrný odhad hustoty pravděpodobnosti představený dříve v této kapitole lze rozšířit i do více dimenzí. Tento nástroj je však složitější, zejména kvůli potřebě více vyhlazovacích parametrů, a používá se především u odhadu dvourozměrných dat. V této práci si představíme pouze definici vícerozměrného jádrového odhadu.

Definice 3.5.1. (Jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti pro vícerozměrná data). Necht' $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$, kde $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})^\top$ je d -rozměrný vektor, značí náhodný výběr o rozsahu n ze spojitě náhodné veličiny $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^\top$ s hustotou pravděpodobnosti $f(\mathbf{x})$. Necht' jádro $K(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ splňuje podmínky

$$\int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{x} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{x}\mathbf{x}^\top K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mu_2(K) \mathbf{I}, \quad (3.30)$$

kde \mathbf{I} značí jednotkovou matici řádu $d \times d$ a výraz

$$\mu_2(K) = \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} x_i^2 K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} > 0$$

nezávisí na i . Potom $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ definujeme jádrový odhad d -rozměrné hustoty vztahem

$$\hat{f}(\mathbf{x}; \mathbf{H}) = n^{-1} |\mathbf{H}|^{-1/2} \sum_{i=1}^n K(\mathbf{H}^{-1/2}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i)) = n^{-1} \sum_{i=1}^n K_{\mathbf{H}}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i), \quad (3.31)$$

kde $K_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = |\mathbf{H}|^{-1/2} K(\mathbf{H}^{-1/2}\mathbf{x})$ je škálované jádro a \mathbf{H} je symetrická pozitivně definitní matice vyhlazovacích parametrů řádu $d \times d$. Provedeme-li speciální volbu matice vyhlazovacích parametrů $\mathbf{H} = h^2 \mathbf{I}$, kde $h > 0$ a \mathbf{I} je jednotková matice řádu d , potom můžeme psát jádrový odhad ve tvaru

$$\hat{f}(\mathbf{x}; \mathbf{H}) = \frac{1}{nh^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h}\right). \quad (3.32)$$

Vícemdimenzionální jádro K může být voleno jako součinnové jádro z jednodimenzionálních jader ve tvaru $K(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d K(x_i)$, pokud to daná aplikace umožňuje.

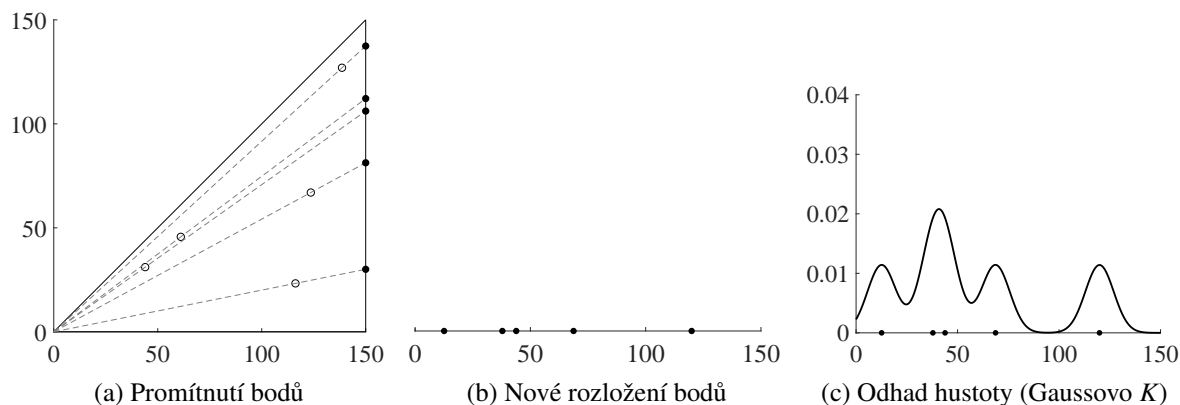
Kapitola 4

Navržení indexu elasticity

V této kapitole si nejdříve představíme různé navržené způsoby, jak neparametricky popsat nalezené PM prostory pomocí jádrových odhadů. Následně se na základě vhodného porovnání těchto odhadů pokusíme navrhnout index elasticity, resp. poškození. Tyto dva pojmy jsou zde vzájemně spojeny, neboť poškození budeme vnímat jako snižující se schopnost materiálu pohlcovat mechanické napětí, tedy snižující se schopnost elasticity/plasticity. Při popisu rozložení hysteronů budeme usilovat o získání jednorozměrných odhadů, přičemž se budeme snažit kvantifikovat již zmíněnou vlastnost PM prostoru, že na diagonále Preisachova trojúhelníku se nachází dokonale elastické hysterony, přičemž hysterony vzdalující se od této diagonály směrem dolů vyjadřují stále větší poškození materiálu. Na vodorovné přeponě trojúhelníku se pak nacházejí dokonale neelastické hysterony.

4.1 Promítnutí PM prostoru na přeponu

První navržený způsob spočívá v promítnutí hysteronů z PM prostoru na svislou přeponu Preisachova trojúhelníku prostřednictvím jeho levého spodního vrcholu a následně použití standardních jednodimenzionálních jádrových odhadů představených v sekci 3.3. Pro názornost je princip tohoto odhadu znázorněn na obrázku 4.1. Každý hysteron společně s levým dolním vrcholem vytvoří přímkou a její průnik se svislou pravou odvěsnou je promítnutým bodem (obr. 4.1a). Následně na tato data ležící na úsečce svislé pravé odvěsny (obr. 4.1b) použijeme jádrový odhad, přičemž tento odhad postupuje ve směru odshora dolů. Tím opět docílíme, že na začátku odhadu budou reprezentovány dokonale elastické hysterony a na konci hysterony poškozené (obr. 4.1c).



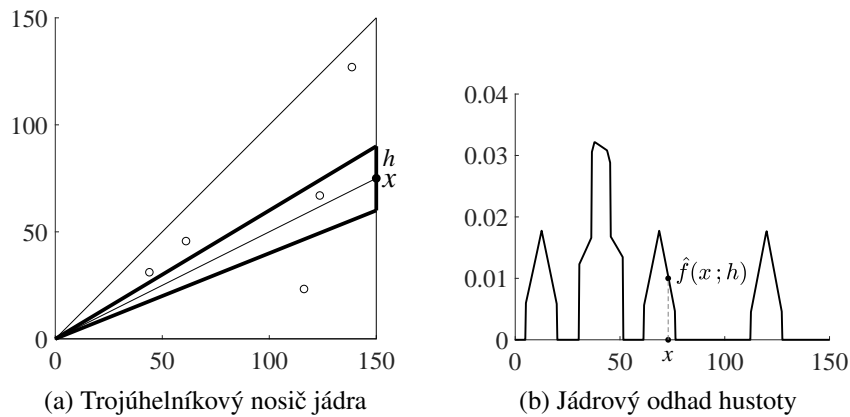
Obrázek 4.1: Jádrový odhad založený na promítnutí PM prostoru na svislou odvěsnu

4.2 Jádru s trojúhelníkovým nosičem

Druhý způsob je založen na přímém dvourozměrném jehlanovitém jádrovém odhadu s nosičem ve tvaru trojúhelníku, který má vždy s Preisachovým trojúhelníkem totožný levý dolní vrchol a k němu protější strana leží na přímce, kterou opět udává svislá odvěsna Preisachova trojúhelníku. Tato protější strana jádra K má délku $2h$, kde h je vyhlazovací parametr (obr. 4.2a). Celé jádro K pak tvoří jehlan nad tímto trojúhelníkovým nosičem s vrcholem v bodě x o výšce 1. Tento jádrový odhad také probíhá shora dolů, aby byla opět zachycena snižující se elasticita hysteronů v PM prostoru. Přejdeme-li k matematickému zápisu tohoto jádra, tak odhad hustoty je vyjádřen pomocí předpisu

$$\hat{f}(x; h) = \frac{1}{nS} \sum_{i=1}^n s(x; h) \left(1 - \frac{d_i(x)}{h}\right) \mathbb{I}_{s(x; h)}(X_i), \quad (4.1)$$

kde n je počet dat, S je obsah Preisachova trojúhelníku, $s(x; h)$ je obsah nosiče jádra závislého na proměnné x a vyhlazovacím parametru h . Dále $d_i(x)$ je funkce udávající kolmou vzdálenost hysteronu X_i od přímky dané počátkem soustavy souřadnic a bodem x . Zde $\mathbb{I}_{s(x; h)}$ je charakteristická funkce pro nosič $s(x; h)$.

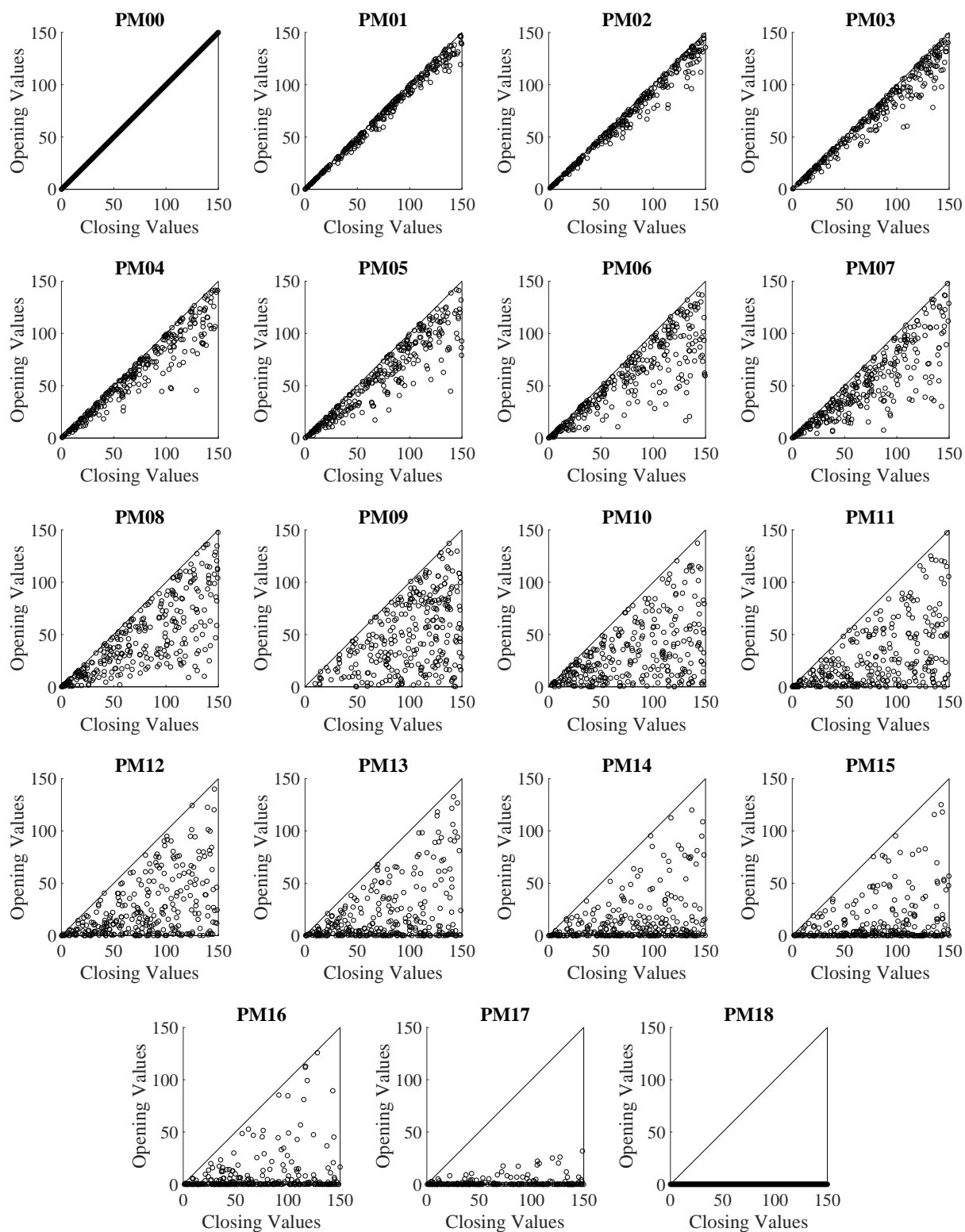


Obrázek 4.2: Jádrový odhad založený na 2D jádru K s trojúhelníkovým nosičem

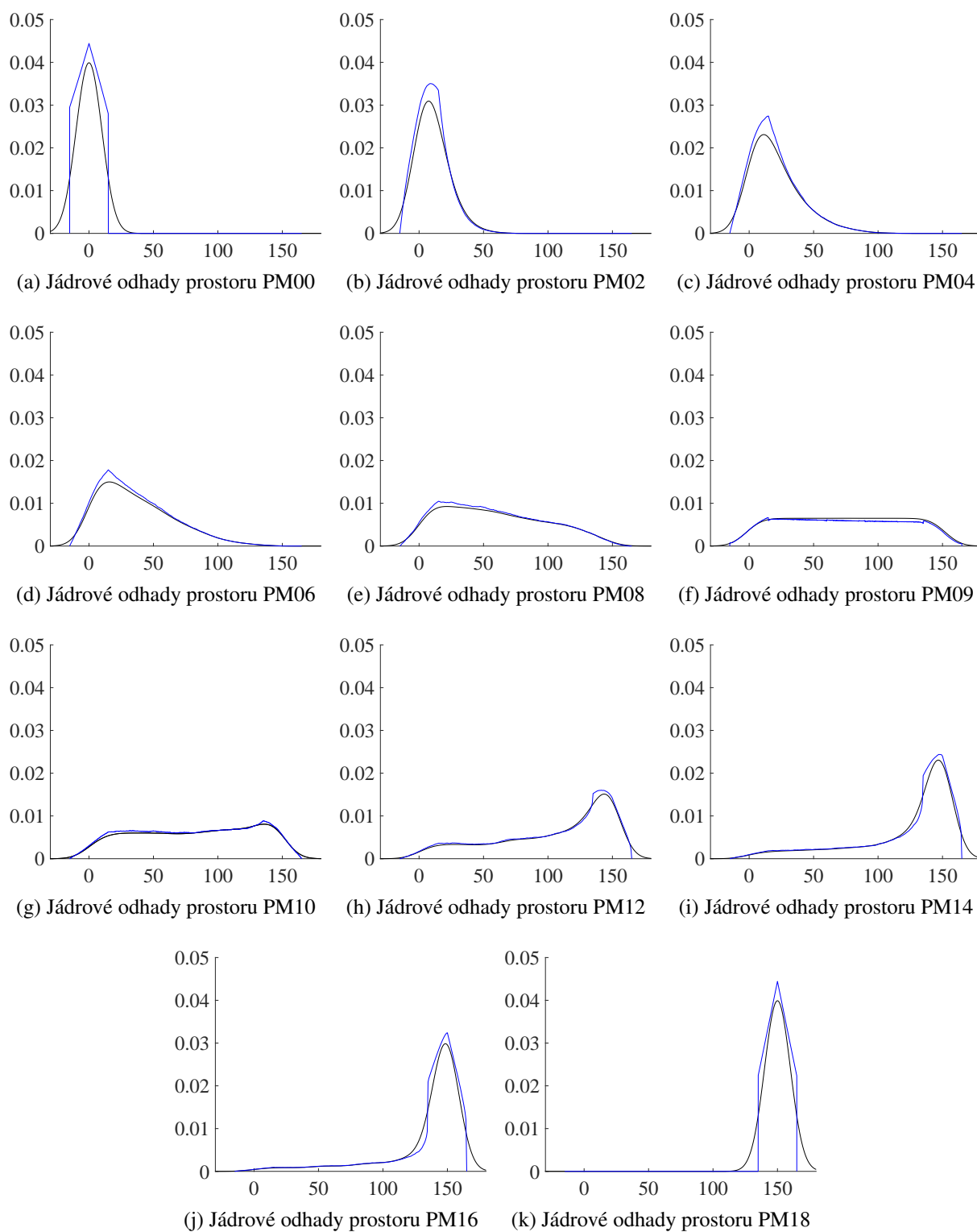
4.3 Nový index elasticity

Na základě jádrových odhadů v této kapitole se budeme snažit navrhnout index elasticity za pomoci vygenerovaných testovacích PM prostorů. Počet hysteronů pro každý generovaný PM prostor je 5000. Rozložení hysteronů v těchto prostorech můžeme vidět na obrázku 4.3, přičemž jednotlivé PM prostory jsou označeny jako PM00, PM01, ..., PM18. Referenční prostor PM00 je již několikrát zmíněný dokonale elastický PM prostor se všemi hysterony na diagonále. Dále pak prostor PM09 má hysterony rovnoměrně rozloženy po celém Preisachově trojúhelníku a nakonec prostor PM18 má naopak všechny hysterony na spodní odvěsne a tudíž se jedná o dokonale neelastický PM prostor. Ve zbylých prostorech hysterony lineárně přecházejí mezi těmito stěžejními prostory.

Na tuto sadu testovacích PM prostorů použijeme obě navržená jádra. Na obrázku 4.4 jsou znázorněny vybrané jádrové odhady příslušných PM prostorů, přičemž normální jádrový odhad po promítnutí bodů (viz sekce 4.1) s vyhlazovacím parametrem $h_1 = 10$ je znázorněn černě a jádrový odhad s jehlanovitým jádrem s trojúhelníkovým supportem (viz sekce 4.2) s vyhlazovacím parametrem $h_2 = 15$ je znázorněn modře.

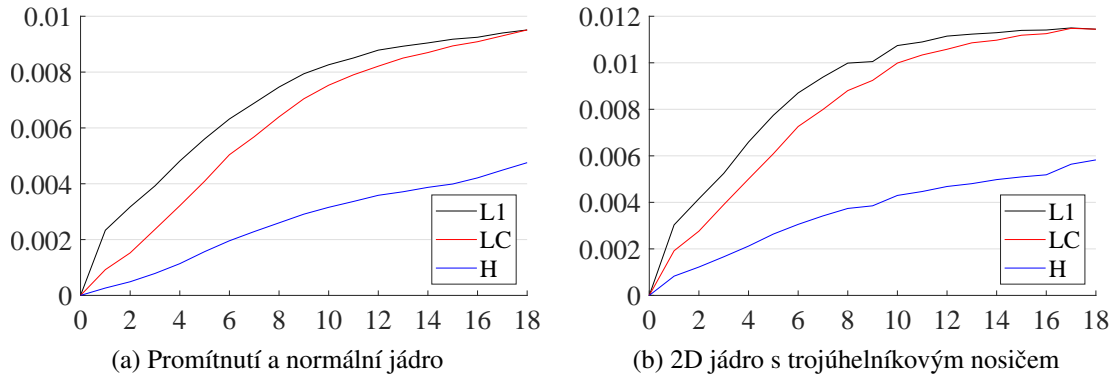


Obrázek 4.3: Testovací vygenerované PM prostory



Obrázek 4.4: Jádrové odhady hustoty

Když nyní máme jádrové odhady testovacích PM prostorů, zbývá určit jejich vzájemnou odlišnost. K tomu účelu poslouží ϕ -divergence představené v sekci 2.3. Navrhovaný index elasticity bude odpovídat vhodné statistické vzdálenosti daného PM prostoru vůči referenčnímu dokonale elastickému PM prostoru. Vzdálenosti jádrových odhadů testovacích prostorů PM01, ..., PM18 vůči referenčnímu PM00 jsme zanesli do grafu 4.5a s použitím průmětu na přeponu a normálního jádra, resp. 4.5b s použitím navrženého 2D jehlanovitého jádra s trojúhelníkovým nosičem. Použité divergence jsou vždy Hellingerova (H), či LeCamova (LC) divergence a L_1 vzdálenost.

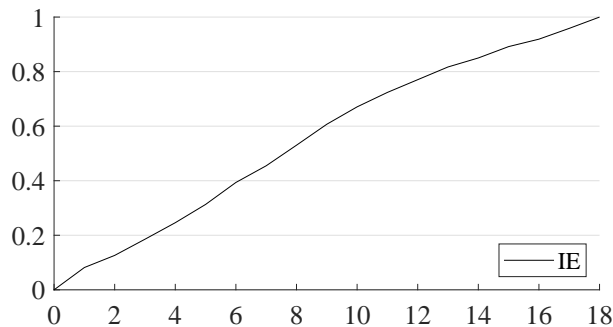


Obrázek 4.5: Odlišnost jádrových odhadů PM prostorů PM00 až PM18 vůči prostoru PM00

Je patrné, že o něco vyrovnanější průběh poskytuje verze jádra s promítnutím na přeponu s použitím LeCamovy divergence. V obou případech je patrná nižší citlivost Hellingerovy divergence H na odlišnosti v elasticity PM prostoru, avšak její průběh je naopak lineárnější než u LC a L_1 . Po vhodném přeškálování by byla H využitelná. Pro navržení nového indexu elasticity IE jsme vybrali LC míru spočtenou metodou promítnutí hysteronů na svislou odvěsnu PM prostoru s Gaussovským normálním jádrovým odhadem, protože vykazuje nejvyrovnanější citlivost v počáteční fázi ztráty elasticity a má dostatečný rozsah hodnot. Výsledný index elasticity definujeme jako přeškálovanou LeCamovu divergenci vůči referenčnímu prostoru a to

$$IE_{LC} = \frac{(LC \cdot 100)^{1+LC \cdot 100}}{IE_{LC}^{max}}, \quad (4.2)$$

kde IE_{LC}^{max} je maximální hodnota indexu elasticity (hodnota pro dokonale neelastický PM prostor), díky čemuž navržený index nabývá hodnot z intervalu $[0, 1]$, a to 0 pro dokonale elastický prostor a 1 pro plně poškozený neelastický prostor. Vyrovnaný průběh tohoto indexu elasticity pro testovací PM prostory můžeme vidět na obrázku 4.6.

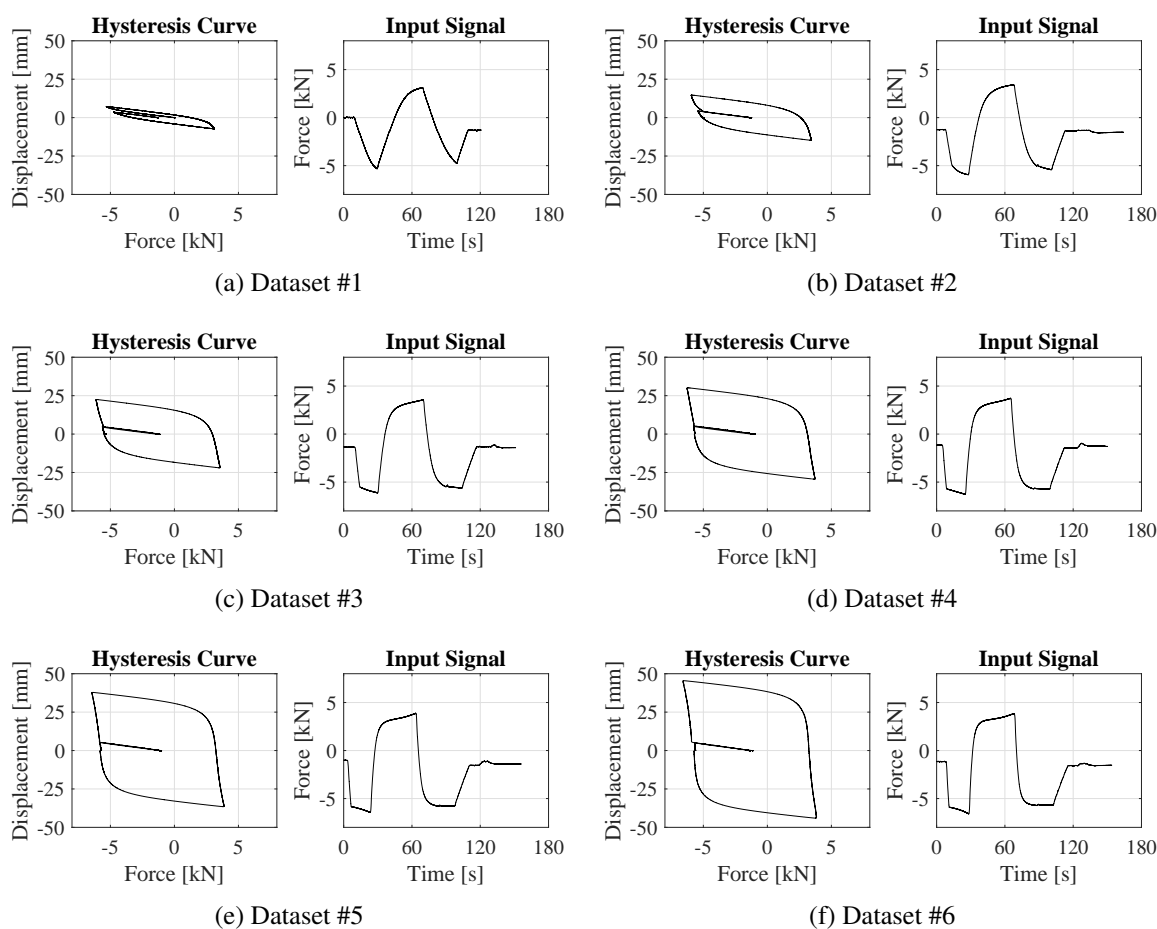


Obrázek 4.6: Index elasticity testovacích PM prostorů PM00 až PM18

Kapitola 5

Zpracování dat

Kromě práce s generovanými daty, jsme v této práci použili i reálná data z testování ocelových tlumičů (viz 1.4). Tato data byla upravena a použita v rámci práce [20]. Při experimentu byl první vibrační test proveden ještě s nepoužitým tlumičem a ty další vždy po zátěžovém testu simulujícím zemětřesení. Celkem tedy máme k dispozici šest datových sad, kde každá obsahuje průběh vstupního zatížení a naměřenou deformační hysteretzní křivku (obr. 5.1). Cílem naší práce bude zachytit klesající elasticitu tohoto tlumiče pomocí našeho nově navrženého indexu elasticity IE_{LC} .



Obrázek 5.1: Naměřená data z testování ocelových zemětřesných tlumičů

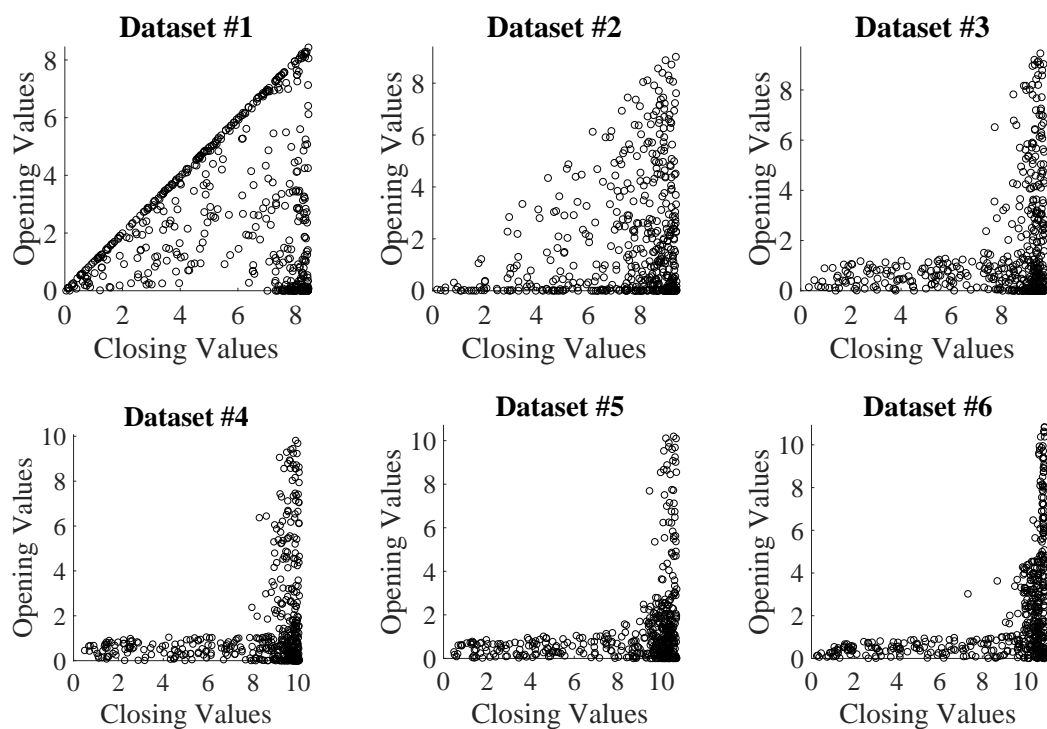
5.1 Identifikace PM prostoru a stanovení indexu elasticity

Pro nalezení příslušných PM prostorů jsme použili nově koncipovaný program (viz kapitola 2), přičemž nejlepších výsledků bylo dosaženo s pomocí aDE-JAYA algoritmu. Maximální počet iterací byl nastaven na 250 a optimalizace proběhla pro každou sadu dat na všechny představené pravděpodobnostní rozdělení (Guyer 1, Guyer 2, Guyer 3, Koen) a také na jejich dvou a tříložkové distribuční směsi, prozatím se zastoupením 1:1 ve směsi. Nejlepší výsledky pro jednotlivé zátěžové testy můžeme vidět v tabulce 5.1, přičemž H^* značí normovanou Hellingerovu divergenci mezi empiricky naměřenou hysterezní křivkou a hysterezní křivkou odpovídající nalezenému PM prostoru. Normování vzniklo vydělením Hellingerovi divergence počtem měřených bodů hysterezní křivky. Příslušné PM prostory pak nalezneme na obrázku 5.2. Je patrné, že se hysterony v jednotlivých PM prostorech postupně odsouvají od dokonale elastické diagonály, což odpovídá našemu očekávání.

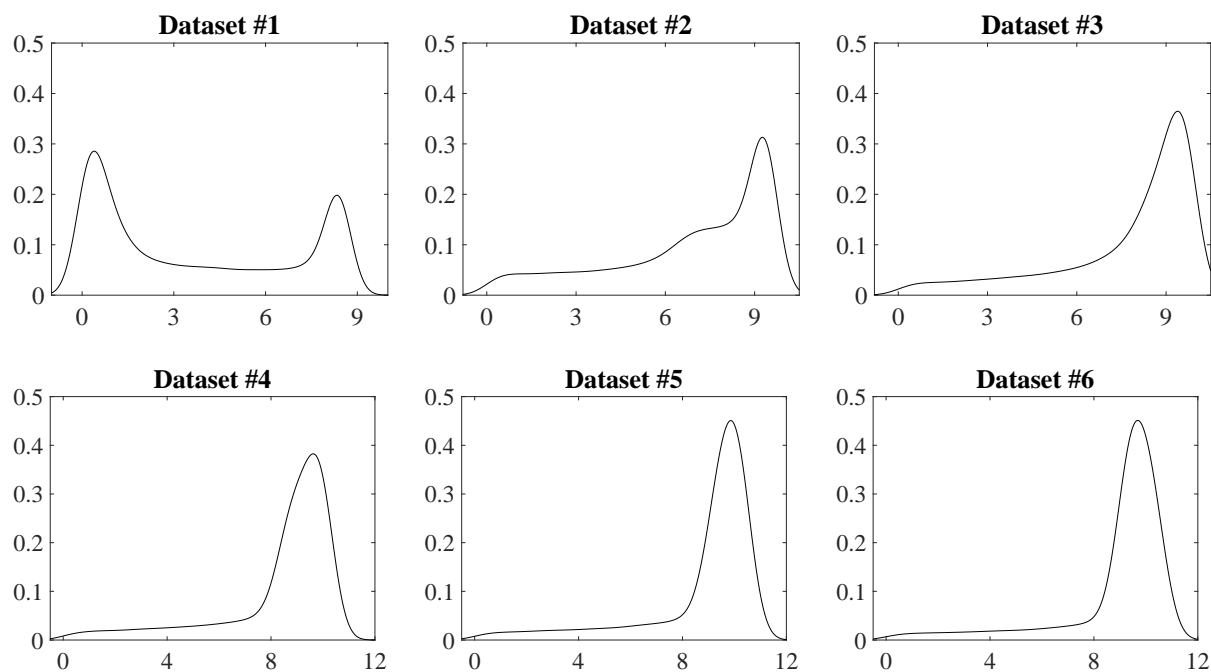
Dataset #1	1. komponenta	Guyer1	$\alpha = 1.110, \beta = 0.068$
	2. komponenta	Guyer2	$\alpha = 0.050, \mu = 6.917$
	3. komponenta	Guyer2	$\alpha = 0.775, \mu = 0.496$
	$H^* = 5.142 \cdot 10^{-5}$		
Dataset #2	1. komponenta	Guyer2	$\alpha = 0.139, \mu = 0.918$
	2. komponenta	Guyer2	$\alpha = 0.034, \mu = 19.417$
	3. komponenta	Koen	$\alpha = 1.483, \beta = 0.527$
	$H^* = 5.429 \cdot 10^{-5}$		
Dataset #3	1. komponenta	Guyer2	$\alpha = 0.061, \mu = 3.181$
	2. komponenta	Guyer2	$\alpha = 0.047, \mu = 5.249$
	3. komponenta	Koen	$\alpha = 0.010, \beta = 0.013$
	$H^* = 8.912 \cdot 10^{-5}$		
Dataset #4	1. komponenta	Guyer1	$\alpha = 0.054, \beta = 3.338$
	2. komponenta	Guyer1	$\alpha = 0.069, \beta = 4.905$
	3. komponenta	Guyer3	$\alpha = 0.422, \beta = 0.658, \gamma = 0.063$
	$H^* = 3.741 \cdot 10^{-4}$		
Dataset #5	1. komponenta	Guyer2	$\alpha = 0.265, \mu = 3.845$
	2. komponenta	Guyer3	$\alpha = 0.045, \beta = 1.082, \gamma = 0.147$
	$H^* = 7.619 \cdot 10^{-4}$		
Dataset #6	1. komponenta	Guyer1	$\alpha = 0.141, \beta = 3.817$
	2. komponenta	Guyer3	$\alpha = 0.055, \beta = 0.462, \gamma = 0.011$
	$H^* = 0.001023$		

Tabulka 5.1: Rozdělení a parametry identifikovaných PM prostorů tlumiče

Budeme-li chtít tuto míru ztráty elasticity matematicky kvantifikovat, pak přistoupíme k jádrovému odhadu založeném na promítnutí na svislou odvěsnu (viz sekce 4.1). Použili jsme normální jádro s hodnotou vyhlazovacího parametru $h = 10$. Výsledné odhady hustoty pravděpodobnosti můžeme vidět na obrázku 5.3. Vypočtené hodnoty nového indexu elasticity IE_{LC} představeném ve vzorci (4.2), který je založen na LeCamově divergenci jádrového odhadu nalezeného PM prostoru vůči jádrovému odhadu referenčního dokonale elastického PM prostoru, nalezneme v tabulce 5.2.



Obrázek 5.2: Nalezené PM prostory



Obrázek 5.3: Jádrové odhady hustoty pravděpodobnosti PM prostorů tlumiče

Test	#1	#2	#3	#4	#5	#6
IE_{LC}	0.538	0.872	0.899	0.908	0.91	0.915

Tabulka 5.2: Výsledné indexy elasticity

Výsledky ukazují, že tento index s postupnými zátěžovými testy monotónně roste, což podporuje jeho možné využití v praxi. Můžeme vidět, že největší změna IE_{LC} proběhla mezi prvním a druhým měřením, zatímco ve zbylých měřeních po ztrátě elasticity roste již relativně pomalu. Takový vývoj elasticity zemětřesných tlumičů popisuje jak článek [13], kde je použit mechanický index poškození (MID), tak i práce [20], kde byl navržen index elasticity za pomoci histogramových odhadů hustoty pravděpodobnosti. Značnou výhodou nového indexu IE_{LC} je právě jeho velmi dobrá citlivost na rané počáteční fáze ztráty elasticity, kdy dochází jen k mírnému prvnímu poškození plasticity zemětřesných tlumičů způsobenému první deformací. Jak je vidět z obou podobných hysterezních křivek #1 a #2 na obr. 5.1, klasické indexy poškození založené pouze na přímých výpočtech z tvaru hysterezní křivky této citlivosti zpravidla nedosahují.

Závěr

Cílem této práce bylo zaprvé identifikování Preisach-Mayergozova (PM) prostoru ze znalosti vstupního zatížení a hysterézni křivky. Dále nalézt vhodný popis tohoto PM pomocí neparаметrických odhadů a z této znalosti vyhodnotit míru elasticity daného materiálu a také tyto nástroje aplikovat na konkrétní data. Na začátku jsme se seznámili s pojmem hysterese a jejím popisu pomocí PM prostoru, dále vlastnostmi tohoto popisu. Dále jsme se seznámili hysterony, tedy s elementárními prvky tohoto popisu a také jejich interpretace v Preisachově trojúhelníku.

V prostředí Matlab byl dále vytvořen nově koncipovaný program, jehož účel je identifikace PM prostoru. K optimalizaci používá tento program Jaya algoritmus a také jeho modifikovanou variantu aDE-Jaya, která je hybridem mezi klasický Jaya algoritmem a algoritmem diferenciální evoluce (DE). Byl také použit algoritmus Simulovaného žhání (SA). Nejstabilnějších výsledků bylo dosaženo pomocí algoritmu aDE-Jaya. Pro popis PM prostorů byly použity speciální pravděpodobnostní rozdělení a to Guyer 1, Guyer 2 a Koen. Také bylo představeno modifikované rozdělení nazvané Guyer 3. Kromě samotných rozdělení byly použity jejich distribuční směsi a to nejvýše tříprvkové směsi se zastoupením složek 1:1, což může být vylepšeno v rámci další práce. Optimalizovanou veličinou byla míra odlišnosti mezi naměřenou hysterézni křivkou a hysterézni křivkou získanou z nalezeného PM prostoru. Pro vyjádření této odlišnosti byla použita jedna klasická L_1 vzdálenost a také Hellingerova a LeCamova divergence. Nejvhodnější se ukázala být pro tento účel Hellingerova divergence.

Poté co byl vytvořen vhodný nástroj identifikaci PM prostoru jsme se zaměřili na neparаметrický popis nalezených PM prostorů. Pro tento účel byl představen jádrový odhad hustoty pravděpodobnosti, jeho statistické vlastnosti a také standardně používána jádra, např. Epanečnikovo, obdélníkové nebo Gaussovo jádro. Pro naši konkrétní problematiku popisu PM prostoru byly představeny dva jádrové odhady, jeden založený na promítnutí všech hysterónů svislou odvěsnu a následném použití klasických jednodimenzionálních jádrových odhadů. Druhý odhad je založen na dvourozměrném jehlanovitém jádru s trojúhelníkovým nosičem. Stabilnějších výsledků při použití na testovacích vygenerovaných PM prostorech bylo dosaženo s prvním jádrem založeném na promítnutí a následné použití Gaussova jádra. Nicméně jádro s trojúhelníkovým nosičem může být dalším výzkumu. Z takto vzniklých jádrových odhadů byl pak vytvořen index elasticity (IE_{LC}), který udává schopnost materiálu pohlcovat elastické napětí.

Na závěr této práce byly zpracovány data z testování kovových zemětřesných tlumičů. Jednalo se postupné zatěžování tlumiče umělým deformacím odpovídajících zemětřesení. Byly pro tyto testy nalezeny vhodné PM prostory a následně jádrové odhady těchto PM prostorů. Pomocí těchto odhadů byl pak vypočten návrh IE_{LC} a stejně jako s běžně používanými metodami vyhodnocení stavu tlumičů se ukázalo, že největší změna mezi prvním a druhým testem a také že tento index se s postupnými testy měnil monotónně.

Literatura

- [1] I. D. Mayergoyz. *Mathematical models of hysteresis and their applications*. Academic Press - Elsevier, 2003
- [2] <https://en.wikipedia.org/>. ([cit. 2020-5-3]).
- [3] M. A. Krasnoselskii, A. V. Pokrovskii. *Systems with hysteresis*. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- [4] K. A. Morris. *What is Hysteresis?*. Applied Mechanics Reviews, 64(5), 2011
- [5] L. Liu, Y. Yang. *Modeling and precision control of systems with hysteresis*. Amsterdam: Elsevier, 2015
- [6] M. Brokate, J. Sprekels. *Hysteresis nad Phase Transitions*. Berlin: Springer-Verlag, 1996
- [7] J. A. Ewing. *On hysteresis in the relation of strain to stress*. British Association Reports, str. 502, 1889
- [8] F. Preisach. *Über die magnetische Nachwirkung*. Zeitschrift für Physik, Vol. 94, 1935
- [9] M. Ismail, F. Ikhoulane, J. Rodellar. *The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey*. Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 16(2), 161-188, 2009
- [10] F. Šolc. *Modelování hystereze v mechatronických systémech*. Automatizace, ročník 50(1), str. 18-24, 2007
- [11] G. Bertotti. *Dynamic Generalization of the Scalar Preisach Model of Hysteresis*. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28(5), 1992
- [12] M. R. Zakerzadeh, H. Sayyaadi, *Experimental comparison of some phenomenological hysteresis models in characterizing hysteresis behavior of shape memory alloy actuators*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 23(12), 1287-1309, 2012
- [13] A. Benavent-Climent, A. Gallego, L. Romo-Melo, L. Morillas. *Health monitoring of web plastifying dampers subjected to cyclic loading through vibration tests*. Structural Health Monitoring, Vol. 13(1), 33-49, 2014
- [14] R. V. Rao. *Jaya: A simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems*. International Journal of Industrial Engineering Computations, Vol. 7(1), 19-34, 2016
- [15] R. V. Rao. *Jaya: An Advanced Optimization Algorithm and its Engineering Applications*. Cham, Switzerland: Springer, 2019

- [16] N. N. Son, C. V. Kien, H. P. H. Anh. *Parameters identification of Bouc–Wen hysteresis model for piezoelectric actuators using hybrid adaptive differential evolution and Jaya algorithm*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 87, 2020
- [17] R. Storn, K. Price. *Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces*. Journal of Global Optimization, Vol. 11(4), 341-359, 1997
- [18] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr., M. P. Vecchi. *Optimization by Simulated Annealing*, Science 220(4598), 671-680, 1983
- [19] K. R. McCall, R. A. Guyer. *Equation of state and wave propagation in hysteretic nonlinear elastic materials*. Journal of Geophysical Research, Vol. 90(B12), 1994
- [20] C. Kožená. *Použití Preisach-Mayergoyzova prostoru pro hodnocení elasticity a poškození hysteretických materiálů*. Diplomová práce, FJFI, ČVUT, 2018
- [21] J.-P. Marin, K. Mengersen, C. P. Robert. *Bayesian Modelling and Inference on Mixtures of Distributions*. Handbook of Statistics, Vol. 25, 459-507, 2005
- [22] L. Pardo. *Statistical Inference Based on Divergence Measures*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall, 2006
- [23] I. Vajda. *Information-Theoretic Methods in Statistics*. Výzkumná zpráva, ÚTIA AV ČR, 1995
- [24] Y. Polyanskiy, Y. Wu. *Lecture notes on information theory*. Výukový materiál, MIT, 2017
- [25] A. Gramacki. *Nonparametric kernel density estimation and its computational aspects*. Cham, Switzerland: Springer, 2018
- [26] J. Orava. *Volba vyhlazovacího parametru při jádrových odhadech hustoty*. Diplomová práce, PřF, MU, 2008
- [27] B. W. Silverman. *Density estimation for statistics and data analysis*. New York: Chapman & Hall, 1998