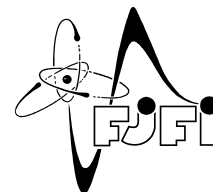


ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



# **Asymptotické vlastnosti statistické rigidity v částicových systémech s balanční vlastností**

## **Asymptotic properties of statistical rigidity in particle systems with a balancing property**

Bakalářská práce

Autor: **Daniel Wohlrath**  
Vedoucí práce: **Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**  
Akademický rok: 2019/2020

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Daniel Wohlrath
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Asymptotické vlastnosti statistické rigidity v částicových systémech s balanční vlastností
Název práce (anglicky):	Asymptotic properties of statistical rigidity in particle systems with a balancing property

### Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se se třídou balancovaných hustot a sumarizujte základní vlastnosti této třídy.
2. Metodami regresní analýzy testujte splnění balanční vlastnosti v reálných dopravních datech.
3. Rigorózními prostředky zaveďte statistickou rigiditu a frekvenční rozptyl pro částicový systém s pevným počátkem a studujte jejich průběh pro ryze náhodný systém a pro čistě deterministický systém.
4. Aplikací vhodné integrální transformace nalezněte teoretickou závislost parametrů lineární asymptoty statistické rigidity na hodnotách parametrů hustoty pravděpodobnosti pro rozteče sousedních částic.
5. Numerickými prostředky validujte platnost získaných teoretických předpovědí.
6. Pro gamma-distribované (a škálované) rozteče odvoďte závislost kompresibility příslušného částicového systému na hodnotě parametru gamma rozdělení.
7. Pokuste se o analogickou formuli pro případ GIG-distribovaných roztečí.

Doporučená literatura:

1. K. Zvára, Regrese. Matfyzpress, 2008.
2. N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, Continuous Univariate Distributions. Vol. 1 (second edition), New York: John Wiley and Sons, 1994.
3. B. Jorgensen, Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. Lecture Notes in Statistics 9, New York: Springer-Verlag, 1982.
4. M. Krbálek, P. Šeba, Spectral rigidity of vehicular streams (Random Matrix Theory approach). J. Phys. A: Math. Theor. 42, 2009.
5. M. Krbálek, M. Krbálková, 3s-Unification for Vehicular Headway Modeling. In 'Proceedings of SPMS 2018', Dobřichovice, 2018.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 12000 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019

.....  
B  
garant oboru  
.....  
P. Krbálek  
vedoucí katedry



.....  
.....  
děkan

*Poděkování:*

Rád bych zde poděkoval svému školiteli Doc. Mgr. Milanu Krbálkovi, Ph.D. za jeho ochotu, vstřícnost, cenné rady a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

*Čestné prohlášení:*

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 24. července 2020

Jméno autora

*Název práce:*

**Asymptotické vlastnosti statistické rigidity v částicových systémech s balanční vlastností**

*Autor:* Daniel Wohlrath

*Obor:* Matematické inženýrství

*Zaměření:* Aplikované matematicko-stochastické metody

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D., Katedra matematiky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13, 12000 Praha 2

*Abstrakt:* Tato práce se zabývá částicovými systémy s balanční vlastností, které mají praktické využití v teorii dopravy při modelování pravděpodobnostních rozdělání roztečí vozidel na vozovce. Nejdříve jsme shrnuli základní vlastnosti třídy balancovaných hustot a přidružených částicových systémů. Představili jsme unifikační proceduru analýzy dat dopravního proudu, jejíž aplikací na reálných datech z holandské dálnice jsme metodou regresní analýzy ověřili balanční vlastnost časových světlostí. Dále jsme rigorózními prostředky zavedli statistickou rigidity a pomocí centrálního limitního teorému jsme odvodili závislost statistické kompresibility na parametrech Erlangovy hustoty. Na závěr jsme ověřili pomocí grafů předpokládané chování statistické rigidity pro známé balancované částicové systémy.

*Klíčová slova:* balancovaná hustota, časová světlost, částicový systém, intervalová frekvence, statistická rigidity, trendová funkce

*Title:*

**Asymptotic properties of statistical rigidity in particle systems with a balancing property**

*Author:* Daniel Wohlrath

*Abstract:* This thesis deals with particle systems with a balancing property which have practical use in modeling vehicle headways. First, we summarized basic properties of balanced density functions and associated particle systems. We presented a unification procedure that is used for analysing traffic data and by applying this procedure to empirical data (recorded at a Dutch freeway) we verified, using methods of regression analysis, the balancing property of time clearances. Further, we rigorously defined statistical rigidity and via the central limit theorem we derived the dependancy of statistical compressibility on parametres belonging tu Erlang's density function. At last, we showed by graphs that the behaviour of statistical rigidity in well-known balanced particle systems is in accordance with previous derivations.

*Key words:* balanced density function, interval frequency, particle system, statistical rigidity, time clearance, trend function

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>1 Balancovaný částicový systém</b>	<b>8</b>
1.1 Částicové systémy a jejich popis . . . . .	8
1.2 Třída balancovaných hustot . . . . .	13
1.3 Charakteristiky prvního řádu pro BČS . . . . .	18
1.4 Ukázky shlukové a trendové funkce . . . . .	22
<b>2 Analýza reálných dat</b>	<b>28</b>
2.1 Typický vzorek dopravních dat . . . . .	28
2.2 Popis dopravního systému . . . . .	29
2.2.1 Mikroskopický popis . . . . .	29
2.2.2 Makroskopický popis . . . . .	29
2.3 Fundamentální diagram a unifikační procedura . . . . .	31
2.4 Balanční chvost rozdělení časových světlostí . . . . .	33
2.4.1 Analýza hlavního pruhu . . . . .	34
2.4.2 Analýza předjížděcího pruhu . . . . .	36
<b>3 Charakteristiky druhého řádu pro BČS</b>	<b>39</b>
3.1 Rozptyl intervalové frekvence a statistická rigidita . . . . .	39
3.2 Ukázky statistické rigidity . . . . .	42
<b>Závěr</b>	<b>46</b>

# Úvod

Časové a prostorové rozestupy vozidel na vozovce představují základní náhodné veličiny teorie dopravních proudů. Modelování pravděpodobnostních rozdělení rozestupů je v současné době intenzivně rozvíjená vědecká oblast a během své krátké historie dospěla k poměrně překvapivým výsledkům. Mezi tyto výsledky patří například specifické požadavky na hustotu pravděpodobnosti rozestupů, konkrétně pak požadavek balančního axiomu, kterému je v této práci věnována největší pozornost.

Hlavním cílem této práce bylo vybudování a podrobné shrnutí vlastností stochastického částicového 1-dimenzionálního systému se specifickou balanční vlastností, který představuje matematickou interpretaci jednoproudé silnice, na které se vozidla nemohou předjíždět. Dále bylo odvozeno asymptotické chování balancovaných částicových systémů prostřednictvím analýzy asymptotického chování tzv. trendové funkce  $\lambda(L)$  a statistické rigidity  $\Delta(L)$ , které jsou známými zástupci charakteristik prvního a druhého řádu částicového systému.

Dalším cílem této práce bylo částečně analyzovat reálná data z holandské dálnice, která byla poskytnuta univerzitou *Delft University of Technology*. Byl vysvětlen postup třístupňové unifikační procedury, který představuje standardní postup při analýze dopravních měření. Předmětem analýzy naměřených dat bylo ověření balanční vlastnosti pravděpodobnostního rozdělení časových světlostí. Toto ověření bylo uskutečněno metodou regresní analýzy.

# Kapitola 1

## Balancovaný částicový systém

### 1.1 Částicové systémy a jejich popis

Uvažujme nejvýše spočetnou množinu bezrozměrných částic uspořádaných na kladné poloose s částicí v počátku  $\xi = 0$ , kterou nazveme referenční, nebo také nultou částicí. Dále necht' se vzdálenostní rozestupy mezi částicemi mění náhodně a pořadí částic vůči částici referenční zůstává zachováno.

Tento matematický model se nazývá *stochastický částicový 1-dimenzionální systém s pevným počátkem* a je využíván v teorii dopravy při modelování časových a prostorových rozestupů vozidel. Právě aplikace v teorii dopravy je velkou motivací pro studium podobných částicových systémů, a tedy i této práce.

S pojmem částicové systémy se můžeme setkat také v oblasti grafických aplikací, kde představují modelovací a animační techniku pro vytváření objektů, které není možné snadno reprezentovat svým povrchem nebo objemem. Nejčastěji se jedná o přírodní jevy jakými jsou například proudění vody, oheň, kouř či exploze. Takové částicové systémy ale v tomto textu uvažovat nebudeme. [14]

Informace o 1-dimenzionálním částicovém systému může být zadána pomocí následujících pojmů:

#### Rozteč sousedních částic

Pro  $k \in \mathbb{N}_0$  se vzdálenost mezi  $k$ -tou a  $(k+1)$ -ní částicí nazývá  $k$ -tou roztečí, ozn.  $\mathcal{R}_k$ .

Rozteč je absolutně spojitá nezáporná náhodná veličina, a tedy její rozdělení je popsáno příslušnou hustotou pravděpodobnosti  $g_k$ , ozn.  $\mathcal{R}_k \sim g_k$ .



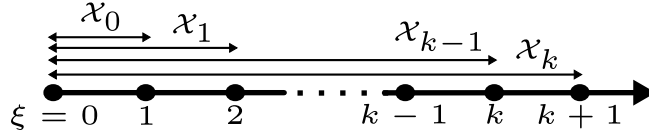
Obrázek 1.1: Grafické znázornění definice roztečí

V dalším textu budeme uvažovat rozteče  $\{\mathcal{R}_k\}_{k=0}^{\infty}$  se stejným rozdělením pravděpodobnosti, ozn.  $\mathcal{R}_k \stackrel{i.d.}{\sim} g$ . Pro takové částicové systémy se hustota pravděpodobnosti pro rozteč  $\mathcal{R}_0$  nazývá *generátor částicového systému*. Důvodem, proč budeme uvažovat pouze částicové systémy s generátorem, je mimo praktičnost pro odvozování charakteristik částicových systémů i perfektní soulad se všeobecně akceptovanými vlastnostmi mikrostruktury dopravních systémů. [5]



**Multirozteč částice**

Pro  $k \in \mathbb{N}_0$  se vzdálenost referenční částice od  $(k + 1)$ -ní částice nazývá  $k$ -tá multirozteč  $\mathcal{X}_k$ . Multirozteč je absolutně spojitá nezáporná veličina s příslušnou hustotou pravděpodobnosti.



Obrázek 1.2: Grafické znázornění definice multiroztečí

Pro přehlednost vzájemného vztahu mez multiroztečemi a roztečemi jsou uvedeny následující vztahy:

1.  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{R}_0 \sim g_0$ ,
2.  $\mathcal{X}_k = \sum_{l=0}^k \mathcal{R}_l \sim ?$

Nabízí se otázka, jaké rozdělení bude mít  $k$ -tá multirozteč  $\mathcal{X}_k$  v závislosti na rozdělení roztečí  $\{\mathcal{R}_l\}_{l=0}^k$ . Za účelem kompaktnějších a ucelenějších výsledků budeme předpokládat navíc nezávislost roztečí, tedy posloupnost  $\{\mathcal{R}_l\}_{l=0}^k$  necht' je i.i.d.<sup>1</sup>. Předpoklad i.i.d. se využívá v mnoha analytických studiích souvisejících s modelováním dopravních toků, ve skutečnosti je však v dopravě závislost mezi roztečemi jednotlivých automobilů za určitých okolností velmi výrazná a odhaluje komplexnost interakčních zákonů mezi řidiči. [5]

Dovolíme si tedy předpoklad nezávislosti použít v následující větě, která nám vhodnou aplikací umožní získat rozdělení pravděpodobnosti pro  $k$ -tou multirozteč  $\mathcal{X}_k$ .

Nejdříve je však potřeba definovat operaci konvoluce dvou klasických funkcí.

**Definice 1.1** (Konvoluce). Bud' reálné funkce  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Pak konvoluci funkcí  $f, g$  definujeme následujícím způsobem:

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nyní již můžeme vyslovit požadovanou větu.

**Věta 1.2.** Necht'  $X_1, \dots, X_n$  jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotami pravděpodobnosti  $f_{X_k}(x_k)$  pro  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Pak pro náhodnou veličinu  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  platí

$$S_n \sim \star_{i=1}^n f_i(x),$$

kde pro  $k \in \mathbb{N}$  definujeme  $\star_{i=1}^k f_i(x) := \underbrace{(f_1 \star f_2 \star \dots \star f_k)}_{k-1 \text{ konvolucí}}(x)$ .

*Důkaz.* Definujme  $n$ -rozměrnou náhodnou veličinu  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  se sdruženou hustotou pravděpodobnosti  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) := f_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$  a transformaci  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  následujícím způsobem:

$$h : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n X_i \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> Angl. zkratka pro identically and independently distributed

Jelikož taková transformace  $h$  je regulární a prostá na  $\mathbb{R}^n$ , pak náhodná veličina  $Y := h(X)$  má hustotu pravděpodobnosti

$$f_Y(\mathbf{y}) = f_X(h^{-1}(\mathbf{y})) \left| \det \mathcal{J}_{h^{-1}}(\mathbf{y}) \right| \quad \text{pro } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

kde  $\mathcal{J}_{h^{-1}}(\mathbf{y})$  je matice první derivace inverzní transformace  $h^{-1}$ .

Z definice transformace  $h$  plyne

$$\left| \mathcal{J}_{h^{-1}}(\mathbf{y}) \right| = 1,$$

a tedy dosazením do (1.1) dostáváme

$$f_Y(\mathbf{y}) = f_X(h^{-1}(\mathbf{y})). \quad (1.2)$$

Pro nezávislou  $n$ -tici náhodných veličin platí, že jejich sdružená hustota pravděpodobnosti je rovna součinu marginálních hustot, tedy

$$f_X(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i). \quad (1.3)$$

Dále můžeme upravovat vztah (1.2) následovně:

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= f_X(h^{-1}(\mathbf{y})) \\ &\stackrel{(1.3)}{=} f_{X_1}(y_1 - y_2 - \dots - y_n) \prod_{i=2}^n f_{X_i}(y_i). \end{aligned}$$

Marginální hustotu pro složku  $Y_1$  získáme postupnou integrací přes zbylé proměnné

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}}}_{n-1} f_Y(\mathbf{y}) \, dy_2 \dots dy_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_{X_1}(y_1 - y_2 - \dots - y_n)}_{n-1} \prod_{i=2}^n f_{X_i}(y_i) \, dy_2 \dots dy_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(f_{X_1} \star f_{X_2})}_{n-2}(y_1 - y_3 - \dots - y_n) \prod_{i=3}^n f_{X_i}(y_i) \, dy_3 \dots dy_n \\ &\quad \vdots \\ &= (f_{X_1} \star f_{X_2} \star \dots \star f_{X_n})(y_1). \end{aligned}$$

□

Aplikací předešlé věty na rozteče a multirozteče v částicovém systému zjistíme, že pokud

$$\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_k \stackrel{i.i.d.}{\sim} g,$$

potom je hustota pravděpodobnosti pro  $k$ -tou multirozteč dána  $k$  iteracemi konvoluce generátoru částicového systému

$$\mathcal{X}_k \sim \star_{i=0}^k g. \quad (1.4)$$

Abychom ze znalosti hustoty pravděpodobnosti pro multirozteč  $\mathcal{X}_k$  byli schopni zpětně zrekonstruovat hustotu pro i.i.d. rozteče  $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_k$ , tedy generátor  $g$ , potřebujeme zjistit, zda je zobrazení

$$\varphi_k: g \mapsto \star_{i=0}^k g \quad (1.5)$$

prosté, případně za jakých podmínek.

**Věta 1.3.** *Bud'  $f$  po částech spojitá hustota pravděpodobnosti, tedy*

1.  $f \in \mathcal{PC}(\mathbb{R})$ ,<sup>2</sup>
2.  $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ ,
3.  $f \geq 0$ .

*Pak je zobrazení  $\varphi_k$  definované vztahem (1.5) pro  $f$  prosté.*

*Důkaz.* Bud'  $f, g$  dvě po částech spojitá hustoty pravděpodobnosti takové, že

$$\varphi_k(f) = \varphi_k(g).$$

Aplikací Laplaceovy transformace získáme

$$F^k(p) = G^k(p),$$

kde  $F$ , resp.  $G$  je příslušný Laplaceův obraz funkce  $f$ , resp.  $g$ . Řešení této rovnice v  $\mathbb{C}$  dostaneme ve tvaru

$$F(p) = G(p) \cdot \exp\left(i2\pi \frac{j(p)}{k}\right),$$

kde  $j(p) \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Jelikož Laplaceův obraz je holomorfní, musí být  $j$  konstantní, a zároveň z jednoznačnosti Laplaceovy transformace dále vyplývá, že vzory si jsou rovny až na množinu Lebesgueovy míry nula, dohromady tedy

$$f(x) \sim g(x) \exp\left(i2\pi \frac{j}{k}\right).$$

Z reálnosti funkce  $f$  vyplývají dvě možné situace:

$$j = \begin{cases} 0 & \implies f \sim g, \\ -\frac{k}{2} & \implies f \sim -g. \end{cases}$$

- Příklad  $j = -\frac{k}{2}$  nemůže nastat, protože pro takové  $f, g$  nemohou být splněny předpoklady kladené na hustoty pravděpodobnosti.
- Musí tedy nastat případ  $j = 0$ . Jelikož jsou navíc funkce  $f, g$  spojitá zleva v každém bodě, musí platit

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x).$$

□

Za účelem zachování předešlé vlastnosti funkce definované předpisem (1.5) nadále předpokládáme, že generátor je po částech spojitá hustota pravděpodobnosti. Poté jsme schopni přecházet mezi popisy částicového systému

$$(\mathcal{R}_0, g) \leftrightarrow (\mathcal{X}_k, \star_{n=0}^k g) \tag{1.6}$$

bez ztráty informace.

Další způsob zadání informace o částicovém systému je pomocí intervalové frekvence.

<sup>2</sup>Funkce je po částech spojitá na množině  $G \subset \mathbb{R}$ , pokud má na této množině konečně mnoho skoků konečné délky a je spojitá zleva v každém bodě.

**Intervalová frekvence  $\mathcal{N}_L$** 

$\mathcal{N}_L$  je diskrétní náhodná veličina, která popisuje počet částic na intervalu  $(0, L)$ . Je definována pro  $L > 0$  vztahem

$$\mathcal{N}_L := \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_k < L\}} = \max \{k : \mathcal{X}_k < L\}, \quad (1.7)$$

kde  $\mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_k < L\}}$  je indikátor množiny  $\{\mathcal{X}_k < L\}$ , tedy

$$\mathbb{1}_{\{\mathcal{X}_k < L\}} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \mathcal{X}_k < L, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Intervalová frekvence je charakterizována hodnotami pravděpodobnosti  $\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k]$  pro  $k \in \mathbb{N}_0$  a parametrizována hodnotou  $L > 0$ .

Věty 1.2 a 1.3 odkrývají vztah mezi  $\mathcal{R}_k$  a  $\mathcal{X}_k$ . Pokud ukážeme, že  $\mathcal{N}_L$  lze vyjádřit pomocí generátoru a naopak, završíme tím otázku ekvivalence typů popisu částicových systémů. V praxi se tedy při platnosti určitých předpokladů může přecházet mezi typy popisů v závislosti na aplikaci daného modelu, či dat, které jsou k dispozici.

Z důvodu pohodlnějšího zápisu budeme v dalším textu označovat generátor částicového systému symbolem  $g_0$ , tedy  $g \equiv g_0$ .

1.  $\mathcal{N}_L$  a závislost na generátoru  $g_0$ 

- Pro  $L > 0$  a  $k = 0$  platí

$$\mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0] = \mathbb{P}[\mathcal{R}_0 \geq L] = 1 - \mathbb{P}[\mathcal{R}_0 < L] = 1 - G_0(L), \quad (1.8)$$

kde  $G_0$  je kumulativní distribuční funkce příslušná generátoru, tj.  $G_0(x) = \int_0^x g_0(\tau) d\tau$ .

- Dále pro  $k \in \mathbb{N}$  platí

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] &= \mathbb{P}[\mathcal{X}_{k-1} < L \cap \mathcal{X}_k \geq L] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_{k-1} < L \cap [\mathcal{X}_k < L]^C] \\ &= \mathbb{P}[[\mathcal{X}_{k-1} < L] \setminus [\mathcal{X}_k < L]] = \mathbb{P}[\mathcal{X}_{k-1} < L] - \mathbb{P}[\mathcal{X}_k < L] \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_{k-1} \sim g_{k-1} \\ G_{k-1}(x) = \int_0^x g_{k-1}(\tau) d\tau \end{array} \right\} = G_{k-1}(L) - G_k(L) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$= \int_0^L g_{k-1}(\tau) d\tau - \int_0^L g_k(\tau) d\tau \quad (1.10)$$

$$= \int_0^L \star_{n=0}^{k-1} g_0(\tau) d\tau - \int_0^L \star_{n=0}^k g_0(\tau) d\tau. \quad (1.11)$$

Pomocí vztahů (1.8), (1.11) je vyjádřena závislost intervalové frekvence na generátoru.

2. Generátor  $g_0$  a závislost na  $\mathcal{N}_L$ 

- Dle (1.8) již víme, že

$$G_0(L) = 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 0].$$

Generátor  $g_0$  získáme derivací distribuční funkce, která je spojitá, protože  $\mathcal{R}_0$  i  $\mathcal{X}_k$  jsou spojitě náhodné veličiny. Navíc  $g_0$  je po částech spojitá, a tedy derivace bude dána jednoznačně, a sice

$$g_0(x) = \frac{dG_0(x)}{dx} = -\frac{d\mathbb{P}[\mathcal{N}_x = 0]}{dx}. \quad (1.12)$$

- Dále pro  $k = 1$  dle (1.9) platí, že

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = 1] = G_0(x) - G_1(x) &\implies G_1(x) = G_0(x) - \mathbb{P}[\mathcal{N}_x = 1] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\mathcal{N}_x = 0] - \mathbb{P}[\mathcal{N}_x = 1]. \end{aligned}$$

- Analogicky pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$  lze dospět ke vztahu

$$G_k(x) = 1 - \sum_{m=0}^k \mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m],$$

jehož derivací obdržíme společně s (1.12) závislost generátou na intervalové frekvenci pro libovolné  $x > 0$  a  $k \in \mathbb{N}$  ve tvaru:

$$\star_{n=0}^k g_0(x) = g_k(x) = - \sum_{m=0}^k \frac{d\mathbb{P}[\mathcal{N}_x = m]}{dx}. \quad (1.13)$$

Shrneme-li právě dosažené výsledky, máme

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_0, g_0) &\stackrel{(1.11)}{\rightarrow} \mathcal{N}_L, \\ \mathcal{N}_L &\stackrel{(1.13)}{\rightarrow} (\mathcal{X}_k, \star_{n=0}^k g_0). \end{aligned}$$

Spolu s (1.6) jsme tím plně zodpověděli otázku ekvivalence popisů částicových systémů.

## 1.2 Třída balancovaných hustot

Motivace k zavedení následující speciální třídy funkcí je nalezena opět v teorii dopravy, ve vědecké disciplíně zabývající se modelováním distribučních funkcí pro časové a prostorové rozestupy na vozovce, disciplíně zvané VHM<sup>3</sup>.

Vědeckí pracovníci již od počátku tohoto vědního oboru, jehož kořeny sahají do 30. let minulého století, testují a vytvářejí nové distribuční modely, které nejlépe odpovídají naměřeným datům a splňují mnoho požadavků a předpokladů vytvořených vzhledem k různorodosti této disciplíny.

Ve VHM bylo již navrženo a následně zavrženo mnoho distribučních funkcí, které měly nejpřesnějším možným způsobem odpovídat empirickým datům. Zavrženy byly například z důvodu mylných předpokladů, či z nedostatečného množství měřených dat a následných chybných závěrů. Mezi zamítnuté modely pravděpodobnostních rozdělení patří například známé *Gaussovo rozdělení*, či *exponenciální rozdělení*. [7]

Problém nalezení správného rozdělení pravděpodobnosti pro rozteče je stále otevřen. Některé studie uvažují tzv. GIG rozdělení<sup>4</sup>, které má mimo jiné tzv. *plató* v počátku. Toto plató představuje velice nízkou pravděpodobnost výskytu velmi malých vzdáleností mezi částicemi, což reprezentuje snahu řidiče zabránit srážce s předcházejícím vozidlem.

V této práci se budeme zabývat speciální třídou funkcí, tzv. *balancovanými hustotami*, které, jak se postupem času ukazuje, jako jediné mohou teoreticky, vzhledem k povaze dopravních systémů, popisovat rozdělení vozidel na vozovce. [5]

**Definice 1.4** (Třída balancovaných hustot  $\mathcal{B}$ ). Bud'  $g$  reálná funkce reálné proměnné a necht' jsou splněny následující axiomy:

<sup>3</sup>Vehicle Headway Modeling

<sup>4</sup>Generalized inverse Gaussian distribution, předpis viz (1.17)

1.  $Dom(g) = \mathbb{R}$ ,
2.  $Ran(g) \subset \mathbb{R}_0^+$ ,
3.  $Supp(g) \subset \mathbb{R}_0^+$ ,
4. spojitost po částech, tj.  $g \in PC(\mathbb{R})$ ,
5. balanční axiom, tj.  $\exists \omega \in \mathbb{R}^+$ :
  - (a)  $\forall \alpha > \omega : \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)e^{\alpha x} = +\infty$ ,
  - (b)  $\forall \alpha < \omega : \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)e^{\alpha x} = 0$ .

Pak  $g$  nazveme balancovanou hustotou s balančním indexem  $\omega$ , značíme  $g \in \mathcal{B}(\omega)$ .

Třída  $\mathcal{B}$  je unikátní zvláště díky vlastnosti balančního axiomu, která vyjadřuje exponenciální pokles funkce v nekonečno. Jak takové balancované hustoty vypadají, nám zodpoví následující věta, která nám poskytuje nutnou a postačující podmínku pro příslušnost funkce do  $\mathcal{B}$ .

**Věta 1.5** (Ekvivalentní definice balancované hustoty). *Funkce  $f$  splňující axiomy 1–4 z definice 1.4 je balancovaná hustota s balančním indexem  $\omega$  právě tehdy, když*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(f(x))}{x} + \omega = 0. \quad (1.14)$$

*Důkaz.*

- Buď nejprve  $f \in \mathcal{B}(\omega)$ .

Pak pro libovolné  $\beta$  takové, že  $\beta > \omega$  vyplývá z vlastnosti balančního axiomu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{\beta x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\beta x}}{f(x)} = 0 \implies \exists x_0 > 0, \forall x > x_0: e^{-\beta x} < f(x).$$

Analogicky  $\forall \alpha < \omega$  vyplývá existence  $\tilde{x}_0 > 0$  tak, že  $\forall x > \tilde{x}_0$  platí  $f(x) < e^{-\alpha x}$ .

Z předchozího plyne pro  $x > \max\{x_0, \tilde{x}_0\}$ :

$$e^{-\beta x} < f(x) < e^{-\alpha x} \implies -\beta < \frac{\ln(f(x))}{x} < -\alpha,$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  lze k sobě přiblížit libovolně blízko a po provedení limitního přechodu  $x \rightarrow \infty$  dosáhneme požadované rovnosti.

- Necht' nyní platí (1.14) a volme  $\alpha < \omega$  a  $\beta > \omega$  pevné, ale libovolné.

Z definice limity

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0, \forall x > x_0: \left| \frac{\ln(f(x))}{x} + \omega \right| < \varepsilon$$

vyplývá:

$$1. f(x) < e^{-x(\omega-\varepsilon)} \implies f(x)e^{\alpha x} < e^{-x(\omega-\alpha-\varepsilon)}.$$

Navíc, protože k libovolnému  $\alpha < \omega$  existuje  $\varepsilon > 0$  takové, že  $\omega - \alpha > \varepsilon$ , pak platí

$$\forall \alpha < \omega : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{\alpha x} = 0.$$

$$2. f(x) > e^{-x(\omega+\varepsilon)} \implies f(x)e^{\beta x} > e^{-x(\omega-\beta+\varepsilon)}.$$

Navíc, protože k libovolnému  $\beta > \omega$  existuje  $\varepsilon > 0$  takové, že  $\omega - \beta < -\varepsilon$ , pak platí

$$\forall \beta > \omega : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{\beta x} = +\infty.$$

□

Abychom získali bližší představu o třídě  $\mathcal{B}$ , uvedeme nyní příklady několika známých balancovaných hustot.

### Exponenciální hustota

$$f_{exp}(x; \lambda) = \Theta(x) \lambda e^{-\lambda x}, \quad (1.15)$$

kde  $\Theta(x)$  je Heavisidova funkce a parametr  $\lambda > 0$ .

### Erlangova hustota

$$f_E(x; \lambda, n) = \Theta(x) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad (1.16)$$

kde  $\lambda > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### Gamma hustota

$$f_\Gamma(x; \lambda, \alpha) = \Theta(x) \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},$$

kde  $\Gamma(\alpha)$  je Gamma funkce<sup>5</sup> a parametry  $\alpha$ ,  $\lambda > 0$ .

### GIG hustota

$$f_{GIG}(x; a, b, p) = \Theta(x) \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2\mathcal{K}_p(\sqrt{ab})} x^{p-1} \exp\left(-\frac{ax + \frac{b}{x}}{2}\right), \quad (1.17)$$

kde  $\mathcal{K}_p$  je modifikovaná Besselova funkce druhého druhu<sup>6</sup> a parametry  $a, b > 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

Shrňme nyní základní vlastnosti a poznatky této třídy, které přímo vyplývají z definice, nebo aplikace věty 1.5.

Nechť  $\alpha \geq 0$ ,  $c > 0$  a  $f \in \mathcal{B}(\omega)$ ,  $g \in \mathcal{B}(\varkappa)$ . Pak platí:

1.  $f(x) + \alpha g(x) \in \mathcal{B}(\min\{\omega, \varkappa\})$ ,
2.  $f(x) \cdot g(x) \in \mathcal{B}(\omega + \varkappa)$ ,
3.  $x^\alpha f(x) \in \mathcal{B}(\omega)$ ,
4.  $e^{\beta x} f(x) \in \mathcal{B}(\omega - \beta)$  pro  $\beta < \omega$ ,
5.  $f(cx) \in \mathcal{B}(c\omega)$ ,
6.  $f, g$  jsou integrabilní,
7.  $f, g$  jsou omezené.

<sup>5</sup>Gamma funkce, neboli Eulerův integrál druhého druhu

<sup>6</sup>Modifikovaná Besselova funkce druhého druhu, nebo také Macdonaldova funkce

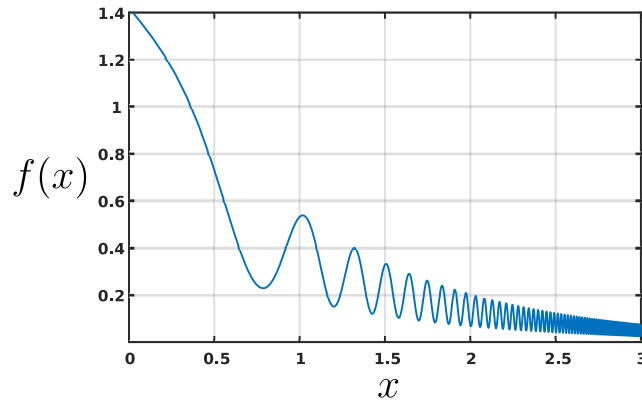
I když víme, že balancovaná hustota klesá v nekonečnu jako  $e^{-\omega x}$ , tak i kdybychom ji byli schopni derivovat, nemůžeme o její derivaci prohlásit, že opět splňuje balanční axiom. Jako protipříklad uvažujme funkci

$$f(x) = e^{-x} \left( 1 + \frac{\sin(e^{x^2})}{10} \right), \quad (1.18)$$

jejíž graf je znázorněn na obrázku 1.3. Jistě platí  $f \in \mathcal{B}(1) \cap C^1$ , avšak derivaci získáme

$$f'(x) = \underbrace{-f(x)}_{\text{omezené}} + e^{-x} \cdot \underbrace{\frac{\cos(e^{x^2}) e^{x^2} x}{5}}_{\text{neomezené}},$$

pro níž neexistuje limita v nekonečnu.



Obrázek 1.3: Balancovaná hustota (1.18), jejíž derivace je neomezená

Mnoho funkcí splňuje balanční axiom se shodným balančním indexem  $\omega$ . Jak se takové funkce mezi sebou odlišují, popisuje tzv. *balanční jádro*.

**Definice 1.6** (Balanční jádro). Buď  $f \in \mathcal{B}(\omega)$ , pak funkci  $g(x) = f(x)e^{\omega x}$  nazýváme balančním jádrem hustoty  $f$ .

Balanční index jsme v definici 1.4 definovali pouze pro kladná  $\omega$ , avšak díky větě 1.5 lze definici rozšířit i pro nulovou hodnotu  $\omega$ , což využijeme při formulaci následujícího tvrzení, které nám přinese další indicii o tvaru balancovaných hustot.

**Věta 1.7.**  $f$  je balancovaná hustota s balančním indexem  $\omega$  právě tehdy, když je ve tvaru

$$f(x) = g(x)e^{-\omega x}, \quad (1.19)$$

kde  $g$  splňuje axiomy 1–4 z definice 1.4 a platí  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(g(x))}{x} = 0$ , tedy pro balanční jádro platí  $g \in \mathcal{B}(0)$ .

*Důkaz.* Z definice balančního jádra vyplývá tvar (1.19). Jeho úpravou dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(g(x))}{x} - \omega = -\omega \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(g(x))}{x} = 0.$$

Tedy dle věty 1.5 je  $f \in \mathcal{B}(\omega)$  právě tehdy, když  $g \in \mathcal{B}(0)$ . □



Jakmile najdeme funkci splňující axiomy 1–4 z definice 1.4, která  $\forall \alpha > 0$  roste pomaleji než  $e^{\alpha x}$ , pak víme, že existuje balancovaná hustota, pro níž je jádrem. Balanční jádra mohou být zároveň rychleji rostoucí než libovolný polynom, tvořící další speciální třídu funkcí.

Pro balancované hustoty pravděpodobnosti<sup>7</sup> jistě platí všechny vztahy odvozené v sekci 1.1, dává tedy smysl zavést nový částicový systém pomocí třídy  $\mathcal{B}$  s unikátními vlastnostmi.

**Definice 1.8** (Částicový systém s balanční vlastností). Částicovým systémem s balanční vlastností, nebo také balancovaným částicovým systémem (dále jen BČS), rozumíme zadanou posloupnost multiroztečí  $\{\mathcal{X}_k\}_{k=0}^{\infty} = \left\{ \sum_{l=0}^k \mathcal{R}_l \right\}_{k=0}^{\infty}$  splňující následující axiomy:

1. Axiom i.i.d.

- $\{\mathcal{R}_k\}_{k=0}^{\infty}$  je posloupnost stejně rozdělených a nezávislých roztečí.

2. Axiom balančního generátoru

- Generátor částicového systému  $g_0 \sim \mathcal{R}_0$  je balancovaná hustota pravděpodobnosti.

Pokud je generátorem BČS některá z uvedených známých hustot  $f_{exp}, f_E, f_{\Gamma}, f_{GIG}$ , nazýváme potom příslušný BČS exponenciální<sup>8</sup>, Erlangův, Gamma, či GIG.

Jelikož v BČS víme, že rozteče mají všechny momenty konečné, můžeme zodpovědět otázku, zda-li může být nekonečně mnoho částic na intervalu konečné délky. Tedy zda  $\mathcal{N}_L$  může nabývat nekonečné hodnoty pro nějaké  $L < +\infty$ . Abychom ukázali, že tato situace nemůže nastat, využijeme tvrzení ze zákona velkých čísel

$$\frac{\mathcal{X}_k}{k+1} \xrightarrow{\text{s.j.}} \mathbb{E}[\mathcal{R}_0].$$

Jelikož  $\mathbb{E}[\mathcal{R}_0] > 0$ , pak musí  $\mathcal{X}_k \xrightarrow{\text{s.j.}} +\infty$ . Proto platí  $\mathcal{X}_k < L$  nanejvýš pro konečně mnoho hodnot  $k$ , a tedy dle definice (1.7) musí být  $\mathcal{N}_L$  konečné.

Navíc víme, že i když  $\mathcal{N}_L < +\infty$  pro všechna  $L$ , tak platí skoro jistě

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{N}_L = +\infty. \quad (1.20)$$

Protože jediný způsob, jak na intervalu nekonečné délky může být pouze konečný počet částic je, když pro nějaké  $k \in \mathbb{N}_0$  platí  $\mathcal{X}_k = +\infty$ , potom platí

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{N}_L < +\infty \right] &= \mathbb{P} \{ \exists k : \mathcal{X}_k = +\infty \} = \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{ \mathcal{X}_k = +\infty \} \right\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P} \{ \mathcal{X}_k = +\infty \} = 0, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost vyplývá z faktu, že rozteče  $\mathcal{R}_k$  mají v BČS konečnou střední hodnotu. Tím jsme dokázali (1.20), přičemž podotkněme, že v obecném částicovém systému nejsme schopni předešlé závěry vyvodit právě kvůli nevědomosti o konečnosti momentů roztečí.

Nadále budeme v textu označovat střední hodnotu roztečí BČS jako  $\mu_1$ , tedy  $\mathbb{E}[\mathcal{R}_0] = \mu_1$ . Pro takový systém odvodíme asymptotické chování intervalové frekvence, o kterém jsme již dokázali, že platí

$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathcal{N}_L \stackrel{\text{s.j.}}{=} +\infty$ . Bude nás tedy zajímat, jakým způsobem  $\mathcal{N}_L$  roste nadevšechny meze.

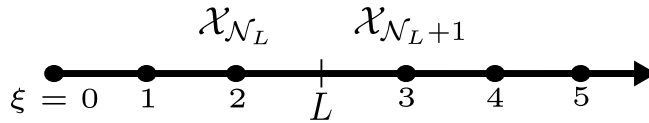
<sup>7</sup>Funkce  $f$  je balancovaná hustota pravděpodobnosti právě tehdy, když  $f \in \mathcal{B}(\omega) \wedge \int_{\mathbb{R}} f = 1$ .

<sup>8</sup>Exponenciální, nebo také Poissonův částicový systém

**Věta 1.9** (Zákon velkých čísel BČS). *Bud' BČS, kde  $\mathbb{E}[\mathcal{R}_0] = \mu_1$ . Pak platí*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}_L}{L} \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{1}{\mu_1}. \quad (1.21)$$

*Důkaz.* Jistě platí  $\mu_1 > 0$ , jelikož  $\mathcal{R}_0 \sim g_0 \in \mathcal{B}$ . Definujme tedy náhodnou veličinu  $\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L} := \mathcal{X}_\gamma$ , kde  $\gamma = \max\{k : \mathcal{X}_k < L\}$  viz obrázek 1.4. Veličina  $\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L}$  odpovídá multirozteči částice nejvzdálenější referenční částici, která leží v intervalu  $(0, L)$ . Analogicky definujeme  $\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L+1}$  odpovídající multirozteči částice umístěné v intervalu  $[L, +\infty)$ , která je referenční částici nejbližší.



Obrázek 1.4: Ilustrace  $\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L}$  pro konkrétní volbu  $L$

Pro  $\mathcal{N}_L > 0$  dostáváme

$$\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L} < L \leq \mathcal{X}_{\mathcal{N}_L+1} \iff \frac{\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L}}{\mathcal{N}_L} < \frac{L}{\mathcal{N}_L} \leq \frac{\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L+1}}{\mathcal{N}_L}. \quad (1.22)$$

Protože  $\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L} = \sum_{k=0}^{\mathcal{N}_L-1} \mathcal{R}_k$  je součtem i.i.d. integrabilních veličin, pak dle zákona velkých čísel platí

$$\frac{\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L}}{\mathcal{N}_L} \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} \mu_1 \text{ pro } \mathcal{N}_L \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} +\infty.$$

Navíc jsme již v této sekci odvodili, že  $\mathcal{N}_L \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} +\infty$  právě tehdy, když  $L \rightarrow +\infty$ . Potom však obdržíme

$$\frac{\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L}}{\mathcal{N}_L} \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} \mu_1 \text{ pro } L \rightarrow +\infty.$$

Následně úpravou druhé nerovnosti v (1.22) dostáváme pro  $L \rightarrow +\infty$ :

$$\frac{\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L+1}}{\mathcal{N}_L} = \underbrace{\frac{\mathcal{X}_{\mathcal{N}_L+1}}{\mathcal{N}_L+1}}_{\stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} \mu_1} \cdot \underbrace{\frac{\mathcal{N}_L+1}{\mathcal{N}_L}}_{\stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} 1} \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} \mu_1.$$

Z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne  $\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{\mathcal{N}_L} \stackrel{\text{s.j.}}{=} \mu_1$ .  $\square$

Tento výsledek je velmi intuitivní, protože pokud jsou částice od sebe v průměru vzdáleny o  $\mu_1$  jednotek, pak je podíl délky intervalu a počtu částic na tomto intervalu přibližně roven právě  $\mu_1$ .

### 1.3 Charakteristiky prvního řádu pro BČS

Mějme k dispozici námi definovaný částicový systém, který představuje jednoproudou silnici, na které se auta nesmějí předjíždět. Pravděpodobnost, že první částice bude v nějaké vzdálenosti od referenční částice je principiálně stejná, jako pravděpodobnost porouchání nějakého výrobku v nějakém časovém intervalu od jeho zakoupení. Pokud bychom mohli porouchaný výrobek okamžitě vyměnit za nový, mající stejné rozdělení pravděpodobnosti poruchy, a tento postup výměny mohli opakovat, pak

se jedná o proces identický částicovému systému, tedy se stejnými vlastnostmi, které jsme prozatím odvodili.

Uvažujme nyní, že máme v zásobě nekonečně mnoho žárovek, jejichž životnosti jsou i.i.d. náhodné veličiny. Dále předpokládejme, že používáme vždy právě jednu žárovku a když se porouchá, tak ji okamžitě vyměníme za novou. V tomto případě jsou časy mezi jednotlivými poruchami žárovek ekvivalentní roztečím částic, čas  $k$ -té výměny žárovky je ekvivalentní umístění  $k$ -té částice a počet výměn v čase  $t > 0$  je roven intervalové frekvenci  $\mathcal{N}_t$ , tedy se jedná o částicový systém. Takový systém se nazývá *renewal process*, neboli proces obnovy a je základním objektem v teorii obnovy.

Touto úvahou můžeme elegantně propojit teorii částicových systémů s teorií obnovy, jejíž aplikace zahrnuje například nalezení optimální strategie pro výměnu opotřebovaných strojů v továrnách, nebo porovnávání dlouhodobých benefitů různých pojistných strategií. V obou oborech má důležitou roli střední hodnota intervalové frekvence/střední počet poruch za čas  $\tau$ , proto se v této sekci pokusíme odvodit její tvar a některé její vlastnosti. [8, 9]

**Definice 1.10** (Trendová funkce). Pro BČS nazýváme střední hodnotu intervalové frekvence trendovou funkcí, kterou označujeme

$$\lambda(L) = \mathbb{E}[\mathcal{N}_L].$$

Jelikož  $\mathcal{N}_L$  je nezáporná diskrétní veličina, tak platí

$$\begin{aligned} \lambda(L) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^k \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[\mathcal{N}_L \geq n] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[\mathcal{X}_{n-1} < L] = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n(L), \end{aligned} \tag{1.23}$$

kde  $G_n$  je kumulativní distribuční funkce veličiny  $\mathcal{X}_n$ .

V praxi bývá uzavřený tvar trendové funkce obtížně dosažitelný, protože nejsme schopni analyticky počítat konvoluce hustot ve vztahu (1.23). Pro speciální případy je však výpočet trendové funkce velmi jednoduchý, viz sekci 1.4.

Další tvar trendové funkce můžeme odvodit pomocí zákona o iteraci středních hodnot:

$$\begin{aligned} \lambda(L) &= \mathbb{E}[\mathcal{N}_L] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathcal{N}_L | \mathcal{R}_0]] \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{N}_L | \mathcal{R}_0 = x] g_0(x) dx && \text{pro } \mathcal{R}_0 \geq L \implies \mathcal{N}_L = 0 \\ &= \int_0^L \mathbb{E}[\mathcal{N}_L | \mathcal{R}_0 = x] g_0(x) dx. \end{aligned}$$

Nyní si uvědomme, že každou částici můžeme považovat za novou referenční částici a celý systém posunout. Pokud tak učiníme s první částicí, která je interpretována pomocí nulté rozteče, a systém posuneme, obdržíme pak

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathbb{E}[\mathcal{N}_L | \mathcal{R}_0 = x] g_0(x) dx &= \int_0^L \mathbb{E}[1 + \mathcal{N}_{L-x}] g_0(x) dx \\ &= G_0(L) + \int_0^L \lambda(L-x) g_0(x) dx \\ &= G_0(L) + (\lambda \star g_0)(L). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Z tvaru (1.24) pak můžeme získat pomocí Laplaceovy transformace další způsob pro výpočet trendové funkce, protože platí

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &= \frac{\mathcal{L}[g_0](s)}{s} + \Lambda(s) \cdot \mathcal{L}[g_0](s) \\ &\iff \\ \Lambda(s)(1 - \mathcal{L}[g_0](s)) &= \frac{\mathcal{L}[g_0](s)}{s},\end{aligned}$$

kde jsme označili  $\Lambda(s)$  Laplaceův obraz trendové funkce. Dále víme, že generátor je balancovaná hustota, tedy  $g_0 \in \mathcal{B}(\omega)$ , proto

$$\forall s, \operatorname{Re}(s) > -\omega : |\mathcal{L}[g_0](s)| < 1 \implies \Lambda(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\mathcal{L}[g_0](s)}{1 - \mathcal{L}[g_0](s)}.$$

Pokud tedy nejsme schopni explicitně počítat konvoluce v definici, můžeme se pokusit najít tvar trendové funkce pomocí metod hledání inverzní Laplaceovy transformace, která je ve tvaru

$$\lambda(L) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{\mathcal{L}[g_0](s)}{1 - \mathcal{L}[g_0](s)} \right]. \quad (1.25)$$

Zavedeme nyní *shlukovou funkci*, která představuje hustotu částic, a díky které dokážeme lépe interpretovat výsledek dosažený v (1.24).

**Definice 1.11** (Shluková funkce). Bud' BČS s generátorem  $g_0$ , pak definujeme shlukovou funkci  $r$  vztahem

$$r(L) = \frac{d\lambda}{dL}(L) = \frac{d}{dL} \sum_{k=0}^{+\infty} G_k(L) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(L), \quad \forall L > 0.$$

Poznamenejme, že záměna derivace a sumy v definici shlukové funkce byla korektní, protože existuje  $c \in (0, L)$ :  $\lambda(c) < +\infty$ , a zároveň  $r$  konverguje stejnoměrně na  $(0, L)$ . Důkaz o konečnosti trendové funkce dokonce v každém bodě lze najít např. v [10]. V tomto textu pouze dokážeme konvergenci shlukové funkce na každém omezeném intervalu.

**Věta 1.12.** *Shluková funkce  $r$  konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu.*

*Důkaz.* Protože  $g_0 \in \mathcal{B}$  je omezená funkce, tak

$$\exists M > 0: g_0 \leq M \implies g_1(x) = g_0(x) \star g_0(x) = \Theta(x) \int_0^x g_0(y)g_0(x-y) dy \leq \Theta(x) M^2 x.$$

Nechť nyní platí pro pevné  $k \in \mathbb{N}$  indukční předpoklad

$$g_k(x) \leq M^{k+1} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \quad (1.26)$$

Poté platí

$$\begin{aligned}g_{k+1}(x) &= g_k(x) \star g_0(x) = \Theta(x) \int_0^x g_k(y)g_0(x-y) dy \\ &\leq \Theta(x) M^{k+1} \frac{1}{k!} M \int_0^x y^k dy = \Theta(x) \frac{M^{k+2}}{(k+1)!} x^{k+1}.\end{aligned}$$

Tímto jsme  $\forall k \in \mathbb{N}$  dokázali platnost vztahu (1.26), který využijeme k nalezení konvergentní majoranty pro shlukovou funkci  $r$  na libovolném intervalu  $(0, L)$ , kde  $L > 0$ .

Z právě dokázaného vyplývá, že  $\forall x \in (0, L)$  platí:

$$r(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} M^{k+1} \frac{x^k}{k!} = Me^{Mx} \leq Me^{ML} \in \mathbb{R}.$$

Našli jsme tedy konvergentní majorantní řadu pro  $r$  a z Weierstrassova kritéria plyne dokazované tvrzení.  $\square$

Matematická interpretace shlukové funkce je, že  $r(L) \cdot dL$  popisuje pravděpodobnost výskytu částice v intervalu  $(L, L + dL)$ . Shluková funkce je ve skutečnosti intenzita, se kterou se částice vyskytují. V literatuře se však výrazy intenzita a hustota částic vzájemně zaměňují, a tak mezi nimi nebudeme rozlišovat.

S využitím shlukové funkce můžeme pokračovat v (1.24) s úpravami tvaru trendové funkce

$$\begin{aligned} \lambda(L) &= G_0(L) + \frac{d}{dL}(\lambda \star G_0)(L) \\ &= G_0(L) + (r \star G_0)(L) \\ &= (\delta(L) + r(L)) \star G_0(L), \end{aligned} \tag{1.27}$$

kde  $\delta(L)$  je Diracova delta funkce a oprávněnost provedených záměn derivace s konvolucí vyplývá z úvahy v důkazu věty 1.13 a omezenosti shlukové funkce.

Tento zápis ve smyslu distribucí jistě dává smysl, protože shluková funkce i distribuční funkce generátoru jsou funkce třídy  $L_{loc}^1$ . O takových *klasických funkcích* víme, že pro ně existuje jednoznačné přiřazení k jejich příslušným regulárním distribucím.

Diracova delta funkce figurující ve vyjádření (1.27) odpovídá tomu, že se referenční částice s jistotou nachází v počátku. Konvoluce shlukové funkce a kumulativní distribuční funkce generátoru pak určitým způsobem odpovídá vyjádření pravděpodobnosti výskytu částice v dané vzdálenosti od výskytu předchozí částice. Podařilo se nám tedy vyjádřit střední počet částic na intervalu  $(0, L)$  pomocí vzájemných pozic dvou sousedních částic. Dále poznamenejme, že i když generátor BČS nemusí být spojitá funkce, tak  $\lambda(L)$  je vždy spojitá, což plyne z její diferencovatelnosti, kterou jsme ověřili při zavedení shlukové funkce.

Zajímalo by nás, jestli umíme z tvaru trendové funkce určit BČS, se kterým pracujeme. Skutečnost, že mezi distribuční funkcí generátoru a trendovou funkcí existuje korespondence 1:1, dokážeme v následující větě.

**Věta 1.13.** *Trendová funkce  $\lambda$  jednoznačně určuje distribuční funkci generátoru, a tedy i příslušný BČS.*

*Důkaz.* Při značení  $\mathcal{L}[\lambda](s) = \Lambda(s)$  dostaneme aplikací Laplaceovy transformace na výraz (1.24)

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= \mathcal{L}[G_0](s) + \mathcal{L}[(\lambda \star g_0)(L)](s) \\ &= \mathcal{L}[G_0](s) + \mathcal{L}\left[\frac{d}{dL}(\lambda \star G_0)(L)\right](s) \end{aligned} \tag{1.28}$$

$$= \mathcal{L}[G_0](s) + s\Lambda(s)\mathcal{L}[G_0](s), \tag{1.29}$$

kde jsme v (1.28) zaměnili derivaci s operací konvoluce a následně v (1.29) jsme využili vlastnost Laplaceovy transformace. Záměna derivace byla korektní, protože distribuční funkce  $G_0$  je diferencovatelná, a její derivací je generátor BČS, který je omezený. Navíc platí

$$|\lambda(L)g_0(L)| \leq |\max\{g_0\}\lambda(L)| < +\infty, \quad \forall L > 0.$$

Tím jsme našli integrabilní majorantu na intervalu požadovaném pro záměnu derivace s konvolučním integrálem. Ostatní podmínky pro záměnu jsou jistě triviálně splněny.

Jednoduchou úpravou (1.29) dostaneme

$$\mathcal{L}[G_0](s) = \frac{\Lambda(s)}{1 + s\Lambda(s)}.$$

Tvrzení pak plyne z jednoznačnosti Laplaceovy transformace.  $\square$

Jak bylo již zmíněno, získat trendovou funkci může být velice obtížné, a proto se přistupuje k různým aproximacím. Mohli bychom očekávat, že pokud pro intervalovou frekvenci platí věta 1.9, pak pro její střední hodnotu vyplývá, že také  $\frac{\lambda(L)}{L} \xrightarrow{\text{s.j.}} \frac{1}{\mu_1}$ . Toto tvrzení jistě neplatí obecně pro libovolnou náhodnou veličinu, ale speciálně v případě intervalové frekvence ano. Důkaz této věty, která se v teorii obnovy nazývá *Elementary renewal theorem*, lze nalézt například v [10]. Zformulujme pouze znění této věty, kterou si dovolíme v souvislosti s tímto textem pojmenovat *Základní věta teorie částicových systémů*.

**Věta 1.14** (Základní věta teorie částicových systémů). *Bud' BČS, pak platí*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\lambda(L)}{L} \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{1}{\mu_1},$$

přičemž používáme značení pro střední hodnotu roztečí  $\mathbb{E}[\mathcal{R}_0] = \mu_1$ .

Tvrzení této věty nám poskytuje cennou informaci o prvním přiblížení asymptotického chování trendové funkce, a sice, že stoupá lineárně s délkou intervalu. Dokonce lze dokázat, viz [11], že platí

$$\lambda(L) = \frac{L}{\mu_1} + q + o(1), \quad (1.30)$$

kde  $q$  se nazývá *intercept trendové funkce*. Uvedeme jednu z jeho nejznámějších aproximací, ve které se využívá znalost prvního a druhého momentu roztečí

$$q = \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - 1,$$

kde  $\mu_1 = \mathbb{E}[\mathcal{R}_0]$ , resp.  $\mu_2 = \mathbb{E}[\mathcal{R}_0^2]$  je první, resp. druhý obecný moment  $\mathcal{R}_0$ .

Tato aproximace může být dále rozšířena a zpřesněna využitím znalosti momentů vyššího řádu. [2]

## 1.4 Ukázky shlukové a trendové funkce

V této sekci je znázorněno pomocí grafů chování shlukové a trendové funkce BČS, kde generátory jsou známé balancované hustoty uvedené v sekci 1.2. Uvedené grafy budou odpovídat pouze konkrétním hodnotám střední hodnoty roztečí, a sice  $\mu_1 \in \{0,5; 1; 2\}$ .

### Poissonův BČS

Generátor částicového systému je ve tvaru

$$f_{exp}(x; \lambda) = \Theta(x) \lambda e^{-\lambda x}.$$

Ze vztahu (1.11) lze odvodit, že v Poissonově BČS má intervalová frekvence Poissonovo diskrétní rozdělení. Následným dosazením do definice trendové funkce dostaneme

$$\begin{aligned}\lambda(L) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda L} \frac{(\lambda L)^k}{k!} \\ &= \lambda L e^{-\lambda L} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda L)^k}{k!} \\ &= \lambda L = \frac{L}{\mu_1}.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Tedy pro Poissonův BČS je trendová funkce lineární se sklonem  $\lambda$ . Zároveň dle věty 1.13 víme, že takové přiřazení trendové funkce je jednoznačné a ze základní věty teorie částicových systémů plyne, že se každá trendová funkce BČS asymptoticky chová jako  $\frac{L}{\mu_1}$ . Z toho vyplývá, že Poissonův BČS je jediný částicový systém, který je popsán lineární trendovou funkcí.

Příslušnou shlukovou funkci obdržíme derivací vztahu (1.31)

$$r(x) = \frac{d\lambda}{dL} = \frac{1}{\mu_1}.$$

Grafy chování trendové a shlukové funkce pro Poissonův BČS jsou zobrazeny na obrázku 1.5.

### Erlangův a Gamma BČS

Jelikož neceločíselné hodnoty parametru  $\alpha$  v Gamma rozdělení nepřináší oproti tvaru Erlangovy hustoty žádné neočekávané chování shlukové či trendové funkce, jsou případy těchto dvou BČS sloučeny do společné ukázky.

Generátor částicového systému je ve tvaru

$$f_{E,\Gamma}(x; \lambda, n) = \Theta(x) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}.$$

Pro ilustraci uvedeme ukázky pouze pro 3 různé hodnoty parametru  $n \in \{1; 2; 6\}$ .

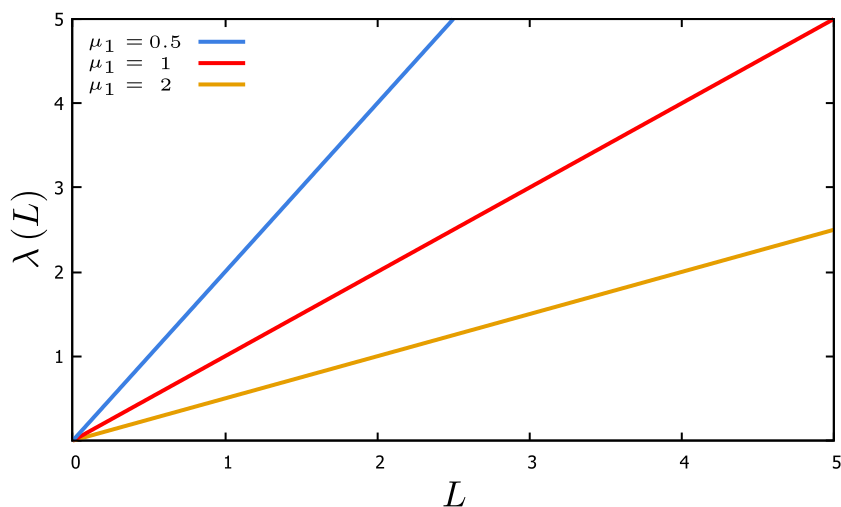
- Volbou  $n = 1$  dostaneme tvar exponenciálního rozdělení, pro které jsou trendová a shluková funkce zobrazeny na obrázku 1.5.
- Pro volbu  $n = 2$  dostaneme postupně s využitím podmínek středních hodnot  $\mu_1 \in \{0,5; 1; 2\}$  hodnoty pro parametr  $\lambda \in \{4; 2; 1\}$ . Chování příslušné trendové a shlukové funkce je zobrazeno na obrázku 1.6.
- Pro volbu  $n = 6$  získáme hodnoty parametru postupně  $\lambda \in \{12; 6; 3\}$ . Trendová a shluková funkce jsou zobrazeny na obrázku 1.7.

V případě Poissonova, Erlangova a Gamma částicového systému jsme schopni určit shlukovou a trendovou funkci analyticky, avšak pro GIG hustotu jsme nuceni použít numerického výpočtu. V případě tohoto textu byly výpočty uskutečněny v programovém prostředí MATLAB.

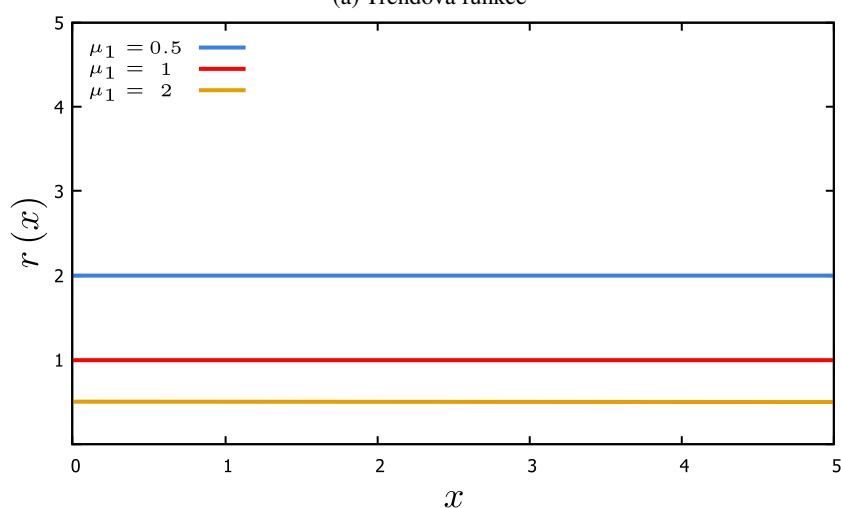
### GIG BČS

Generátor částicového systému je ve tvaru

$$f_{GIG}(x; a, b, p) = \Theta(x) \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2\mathcal{K}_p(\sqrt{ab})} x^{p-1} \exp\left(-\frac{ax + \frac{b}{x}}{2}\right).$$



(a) Trendová funkce

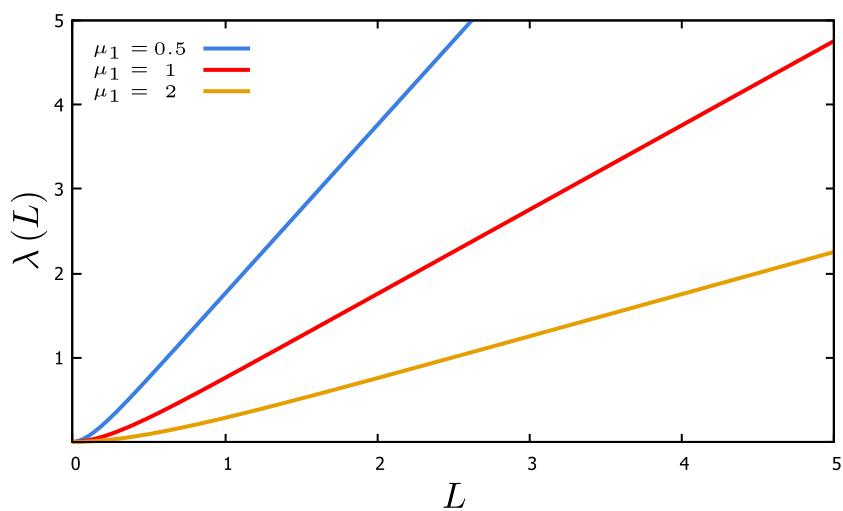


(b) Shluková funkce

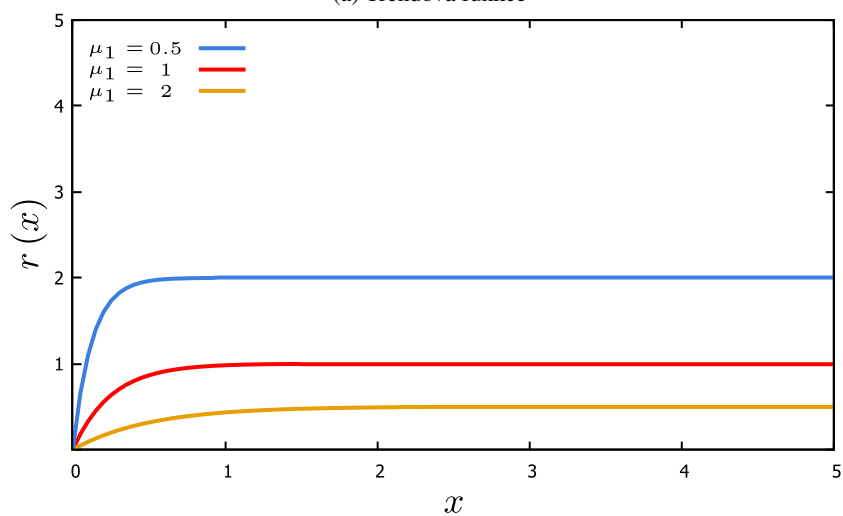
Obrázek 1.5: Trendová a shluková funkce pro Poissonův BCŠ s různými středními hodnotami generátoru

Uvažujme pouze hodnoty parametrů  $b = 2$  a  $p = 6$ , kde  $a$  určíme z podmínky střední hodnoty. Důvodem, proč jsou parametry zvoleny tímto způsobem je, aby v ukázkách shlukové a trendové funkce byla zahrnuta netriviální závislost generátoru na členu  $x^{p-1}$  a zároveň jednoduchý netriviální způsob závislosti členu  $\exp\left(-\frac{b}{2x}\right)$ . Chování příslušné trendové a shlukové funkce je zobrazeno na obrázku 1.8.



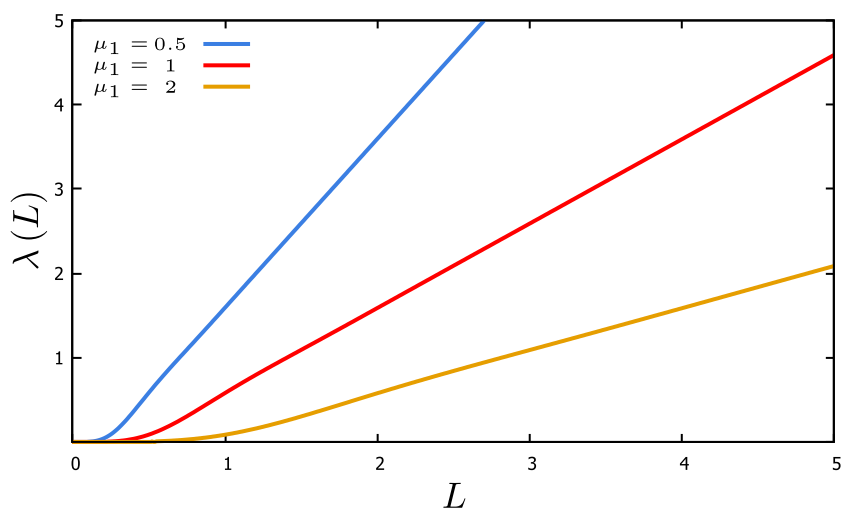


(a) Trendová funkce

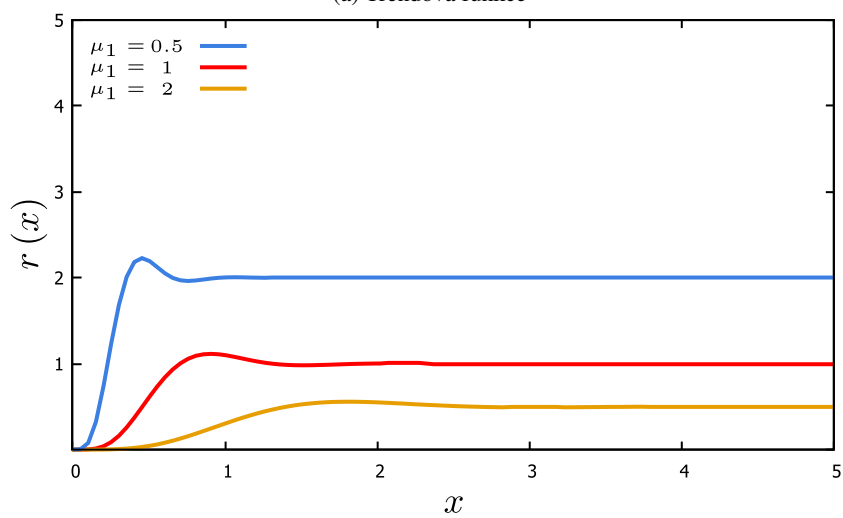


(b) Shluková funkce

Obrázek 1.6: Trendová a shluková funkce pro Erlangův BČS s parametrem  $n = 2$  a různými středními hodnotami generátoru

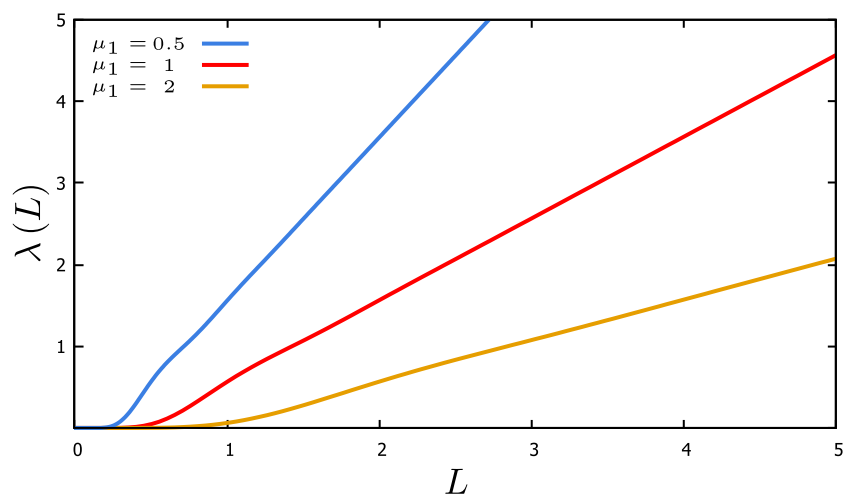


(a) Trendová funkce

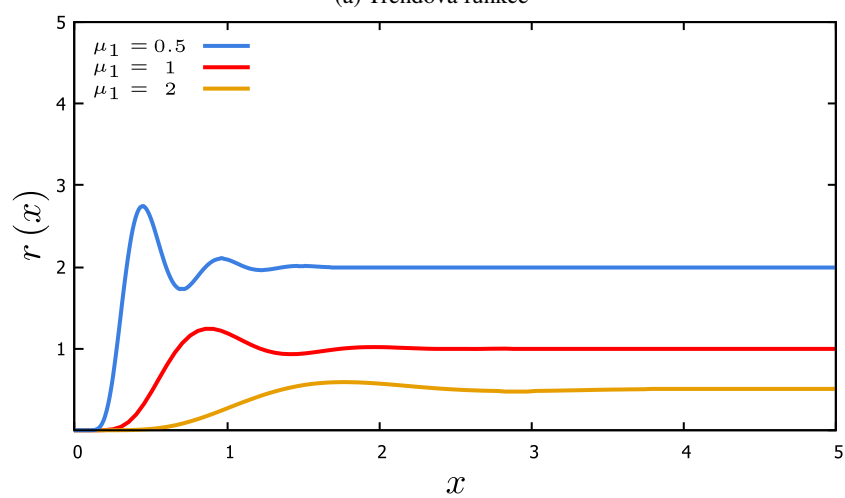


(b) Shluková funkce

Obrázek 1.7: Trendová a shluková funkce pro Erlangův BČS s parametrem  $n = 6$  a různými středními hodnotami generátoru



(a) Trendová funkce



(b) Shluková funkce

Obrázek 1.8: Trendová a shluková funkce pro GIG BČS s parametry  $p = 6, b = 2$  a různými středními hodnotami generátoru

## Kapitola 2

# Analýza reálných dat

### 2.1 Typický vzorek dopravních dat

Metody měření dat v dopravních proudech jsou typicky rozděleny do dvou kategorií:

- intrusivní metody – např. indukční smyčky, piezoelektrické kabely,
- neintrusivní metody – např. detekční drony, pasivní infračervené senzory.

Za účelem analýzy velkého množství dat je k měření nejvhodnější použití dvousmyčkových indukčních detektorů, které se řadí mezi intrusivní metody měření. V praxi se dvousmyčka umístí pod vozovku do časově neměnné pozice, která se nazývá *linie detektoru*, a při přejezdu vozidla zaznamenává změnu efektivního napětí LC obvodu. Z těchto změn elektromagnetického pole dvousmyčky lze vyvodit požadované dopravní mikroveličiny, kterými jsou čas protnutí vstupní linie detektoru, čas protnutí výstupní linie detektoru, rychlost vozidel a jejich délka. [5]

Typický výstup takového měření v jednom jízdním pruhu je ve tvaru

$$T^{(in)} = \{\tau_k^{(in)} \in \mathbb{R} : k \in \{0, \dots, N\}, \tau_{k-1}^{(in)} < \tau_k^{(in)}, \tau_0^{(in)} := 0\}, \quad (2.1)$$

$$T^{(out)} = \{\tau_k^{(out)} \in \mathbb{R} : k \in \{0, \dots, N\}, \tau_{k-1}^{(in)} < \tau_{k-1}^{(out)} \leq \tau_k^{(in)} < \tau_k^{(out)}, \tau_0^{(out)} := 0\}, \quad (2.2)$$

$$\Upsilon = \{v_k \in \mathbb{R}^+ : k \in \{0, \dots, N\}\}, \quad (2.3)$$

$$\Lambda = \{l_k \in \mathbb{R}^+ : k \in \{0, \dots, N\}\}, \quad (2.4)$$

kde  $\tau_k^{(in)}$ , resp.  $\tau_k^{(out)}$  je čas, kdy přední, resp. zadní nárazník  $k$ -tého vozidla protnul linii detektoru,  $v_k$  je rychlost  $k$ -tého vozidla při průjezdu linií detektoru a  $l_k$  délka  $k$ -tého vozidla.

Je-li při měření dvousmyčkou navíc k dispozici technologie ke zpracování obrazu, lze získat další soubory dat, které udávají pozici předních, resp. zadních nárazníků  $M$  vozidel v konkrétním čase. Takové dvojnásobné měření se v praxi provádí pouze výjimečně, proto jsou většinou pozice jednotlivých vozidel zatíženy systematickou chybou, jelikož jsou odvozeny z časových údajů, rychlostí a délek vozidel, které se při měření dvousmyčkou nazývají *primárními veličinami*. Aktuální pozice předních, resp. zadních nárazníků se poté nazývají *sekundárními veličinami*. [5]

## 2.2 Popis dopravního systému

### 2.2.1 Mikroskopický popis

Při přechodu od modelu částicového systému představeného v kapitole 1, v němž jsou částice bezrozměrné, k modelu s rozměrnými částicemi se nabízí více možností, jak nahlížet na rozestupy mezi částicemi, neboli rozteče.

V oblasti VHM se používají pro časový rozestup mezi částicemi následující dva mírně odlišné pojmy, které se často zaměňují, nicméně jejich rozdíl je zřejmý.

#### Časový odstup<sup>1</sup>

je definován jako uplynulý čas mezi detekcí předního nárazníku předchozího vozidla a detekcí předního nárazníku následujícího vozidla. Časový odstup je náhodná veličina a definujeme empirickou hodnotu časového odstupu mezi  $k$ -tým a  $(k + 1)$ -ním vozidlem jako

$$t_k := \tau_k^{(in)} - \tau_{k-1}^{(in)}.$$

#### Časová světlost<sup>2</sup>

je čas mezi protnutím linie detektoru zadním nárazníkem předchozího vozidla a protnutím linie detektoru předním nárazníkem následujícího vozidla. Empirickou hodnotu časové světlosti mezi  $k$ -tým a  $(k + 1)$ -ním vozidlem definujeme jako

$$z_k := \tau_k^{(in)} - \tau_{k-1}^{(out)}.$$

Analogickým způsobem lze také definovat prostorový odstup a prostorovou světlost,<sup>3</sup> přičemž každou z uvedených variant definice rozestupu můžeme ztotožnit s definicí roztečí uvedenou v sekci 1.1.

V tomto textu se budeme zabývat časovými světlostmi. Odůvodněním této volby je například úvaha, že řidič většinou udržuje rozestup s předchozím vozidlem dle vzdálenosti mezi svým předním nárazníkem a zadním nárazníkem předcházejícího vozidla, nikoliv jeho předního. Výjimkou může být případ, kdy předchozí vozidlo je velmi dlouhé (například se jedná o kamion), a proto zkušený řidič bude při udržování odstupu s tímto vozidlem zohledňovat i jeho délku, a tedy i pozici předního nárazníku. Taková statistická analýza je však nad rámec tohoto textu.

Stav dopravního systému může být popsán pomocí veličin příslušných jednotlivým vozidlům, kterými jsou například jednotlivé časové a prostorové světlosti/odstupy, rychlosti a délky vozidel. V tom případě se jedná o mikroskopický popis dopravního systému. K popisu se mohou také využít veličiny, které odpovídají většímu souboru vozidel, například 50-ti po sobě jedoucích vozidel. Poté takový popis dopravního systému nazýváme makroskopický.

### 2.2.2 Makroskopický popis

Mezi tři základní fázové veličiny popisující makroskopický stav souboru vozidel patří:

- hustota provozu  $\rho(\xi, \tau)$ ,
- intenzita provozu  $I(\xi, \tau)$ ,
- průměrná rychlost souboru  $V(\xi, \tau)$ ,

<sup>1</sup>Angl. time headway

<sup>2</sup>Angl. time clearance

<sup>3</sup>Angl. spatial headway a spatial clearance

kde  $\xi \in \mathbb{R}$  značí prostorové souřadnice a  $\tau \in \mathbb{R}^+$  značí čas. Pro definici těchto fázových veličin je potřeba zavést pojem *vyhlazeného počtu částic*.

**Definice 2.1** (Vyhlazený počet částic). Bud' soubor  $M \in \mathbb{N}$  bezrozměrných částic, které se v čase  $\tau$  nachází v souřadnicích  $\alpha_1(\tau) > \alpha_2(\tau) > \dots > \alpha_M(\tau)$ . Dále bud'  $p(x) \in C^2(\mathbb{R})$  hustota pravděpodobnosti s nulovou střední hodnotou. Pak definujeme vyhlazený počet částic jako

$$N(\xi, \tau) := \int_{-\infty}^{\xi} \sum_{k=1}^M p(y - \alpha_k(\tau)) dy.$$

Rozumnou volbou hustoty  $p(x)$  z definice 2.1 se jeví například hustota normálního rozdělení, či libovolná hladká hustota pravděpodobnosti s kompaktním nosičem. Ilustrace chování vyhlazeného počtu částic je zobrazena na obrázku 2.1, ze kterého je zřejmé, že veličina  $N$  je určitým vyhlazením intervalové frekvence  $N_L$ , která je stupňovitou funkcí.

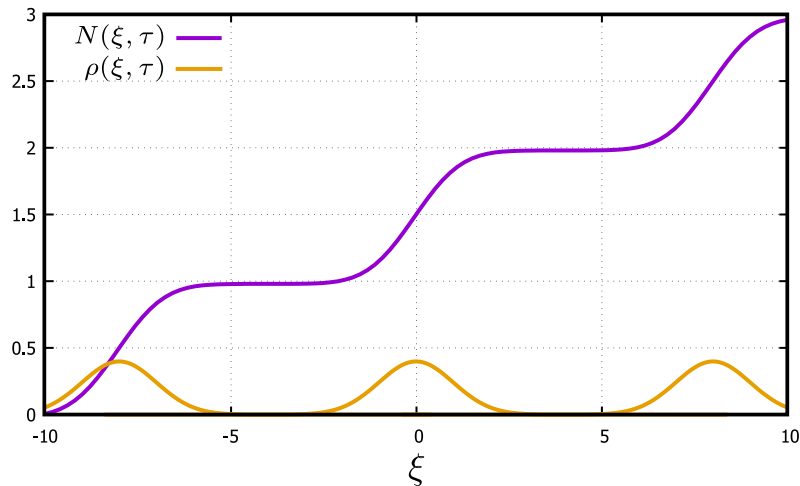
Pomocí vyhlazeného počtu částic definujeme hustotu a intenzitu provozu jako

$$\rho(\xi, \tau) := \frac{\partial N(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad I(\xi, \tau) := -\frac{\partial N(\xi, \tau)}{\partial \tau}.$$

Tvary pro hustotu a intenzitu poté můžeme zjednodušit

$$\rho(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^M p(\xi - \alpha_k(\tau)), \quad I(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^M v_k(\tau) p(\xi - \alpha_k(\tau)),$$

kde  $v_k(\tau) = \frac{d\alpha_k(\tau)}{d\tau}$  je rychlost  $k$ -té částice v čase  $\tau$ . Ilustrace chování hustoty provozu je znázorněna na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Graf vyhlazeného počtu částic  $N(\xi, \tau)$  a hustoty provozu  $\rho(\xi, \tau)$  pro soubor tří částic umístěných v bodech  $\xi \in \{-8, 0, 8\}$  v čase  $\tau$ , přičemž jako hustota  $p(x)$  z definice 2.1 byla použita hustota standardizovaného normálního rozdělení.

Z dostatečné hladkosti hustoty pravděpodobnosti  $p(x)$  z definice 2.1 plyne

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \tau} = \frac{\partial^2 N}{\partial \tau \partial \xi} = -\frac{\partial I}{\partial \xi}.$$

Dostáváme tedy rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial \rho(\xi, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial I(\xi, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad \forall (\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,$$

kteřá v interpretaci dopravního systému vyjadřuje zákon zachování počtu vozidel.

Omezením se na homogenní dopravní proudy, kde platí  $\forall k : v_k(\tau) = V(\tau)$ , obdržíme rovnost

$$I(\xi, \tau) = V(\tau)\rho(\xi, \tau), \quad (2.5)$$

kteřá je v případě nízkého počtu vozidel v analyzovaném souboru obecně přijatelnou aproximací vztahu mezi třemi základními fázovými veličinami. [5]

### 2.3 Fundamentální diagram a unifikační procedura

V reálném dopravním proudu se typicky vyskytují známé charakteristické znaky, kterými jsou například výrazná nelinearita v kondenzovaných stavech (stav kondenzované dopravy popsán na str. 32), chaotický vývoj fázových proměnných a další, viz [3]. Tyto efekty způsobují, že rozsáhlejší datové soubory vozidel vykazují značné nehomogenity. Jejich mikrostruktura je poté také značně nehomogenní, což způsobuje, že příslušné hustoty pravděpodobnosti nejsou jedno-komponentové, spíše naopak mají průběh typický pro systémy smíšené z více různých rozdělení. Pokud chceme najít homogenní charakteristiku, musíme při analýze kompletních datových záznamů aplikovat nejdříve tzv. *třístupňovou unifikační proceduru*, která zabraňuje nežádoucímu mísení dopravních stavů s různými statistickými vlastnostmi (např. rezistivita, stochastická rigidita, kompresibilita), nebo také se zásadně odlišnými dopravními vlastnostmi (např. časové a prostorové odstupy/světlosti, rychlosti vozidel). [5]

K identifikaci různých dopravních stavů se využívá *fundamentální diagram*, čímž rozumíme grafické znázornění vztahu mezi třemi základními makroskopickými veličinami dopravního proudu, tedy mezi intenzitou  $I$ , hustotou  $\rho$  a průměrnou rychlostí souboru  $V$ , viz obrázky 2.2 a 2.3.

V minulosti se předpokládala funkční závislost intenzity na hustotě  $I = I(\rho)$  a analogicky také funkční závislost průměrné rychlosti na hustotě  $V = V(\rho)$ . Tato domněnka byla vyvrácena Kernerovou<sup>4</sup> třífázovou teorií a jeho hypotézou o dvou-dimenzionálních stavech dopravního proudu. Z Kernerovy práce vyplynulo, že předpoklad funkčního vztahu  $I = I(\rho)$ , resp.  $V = V(\rho)$  není oprávněný a měly by se uvažovat binární relace ve tvaru

$$\Omega_{ID} = \{(\rho_i, I_i) : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \subset (0, +\infty)^2,$$

$$\Omega_{VD} = \{(\rho_i, V_i) : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \subset (0, +\infty)^2,$$

kde  $m$  je počet naměřených vzorků, který každý obsahuje  $M$  následujících se vozidel a  $(\rho_i, I_i)$ , resp.  $(\rho_i, V_i)$  je hustota a intenzita, resp. hustota a průměrná rychlost příslušná  $i$ -tému vzorku. [5]

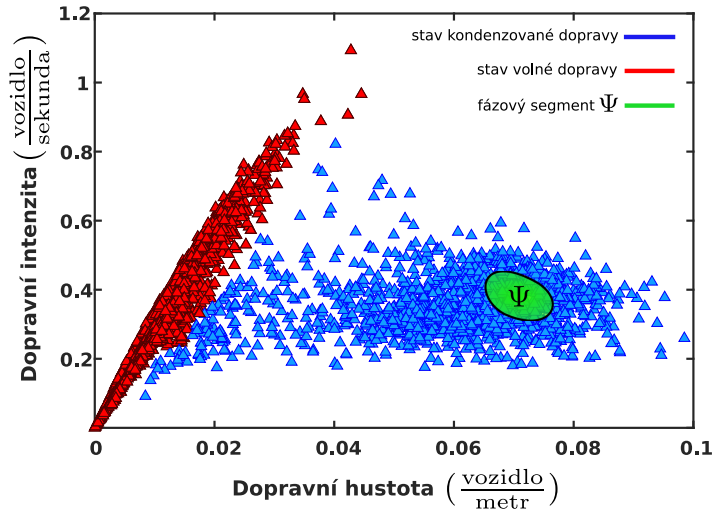
Z fundamentálního diagramu na obrázku 2.2 jsou zřetelné dva stavy dopravního systému:

- **stav volné dopravy**

- vozidla mezi sebou neinteragují v takové míře, aby byla nucena zpomalovat, proto s rostoucí hustotou provozu roste lineárně intenzita provozu,

- **stav kondenzované dopravy**

<sup>4</sup>Boris S. Kerner (\*1947), německý inženýr a fyzik narozen v Moskvě

Obrázek 2.2: Fundamentální diagram zobrazující binární relace  $\Omega_{ID}$ 

- při rostoucí hustotě provozu již musí vozidla mezi sebou výrazněji interagovat, což vede k jejich zpomalení, a tedy i ke stagnaci růstu intenzity provozu, či dokonce k jejímu snížení.

Získání tvaru fundamentálního diagramu úzce souvisí s unifikační procedurou, která je nezbytnou součástí jakékoliv analýzy dopravních dat. Tato procedura se skládá ze tří částí:

- 1) vzorkování – rozdělení dat do téměř homogenních vzorků několika sousedních vozidel,
- 2) segmentace – výběr vzorků náležících malé oblasti fundamentálního diagramu a vyřazení ostatních vzorků z další analýzy,
- 3) škálování – vhodné přeškálování náhodných proměnných (odstupů, světlostí) v každém vzorku, který nebyl vyřazen v segmentační fázi.

Nyní představme podrobný postup této unifikační procedury.

### Vzorkování

Mějme k dispozici datové soubory (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) a zvolme vzorkovací velikost  $M \in \mathbb{N}$ . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že celkový počet vzorků je  $m \in \mathbb{N}$ , kde  $mM = N$ . Pak obdržíme pro  $i \in \{1, \dots, m\}$  datové vzorky

$$S_i = \left\{ (\tau_k^{(in)}, \tau_k^{(out)}, v_k, l_k) \in \mathbb{R}^4 : k = (i-1)M + 1, (i-1)M + 2, \dots, iM \right\}.$$

Pro každý vzorek určíme lokální intenzitu  $I$  a lokální průměrnou rychlost  $V$  ze vztahů

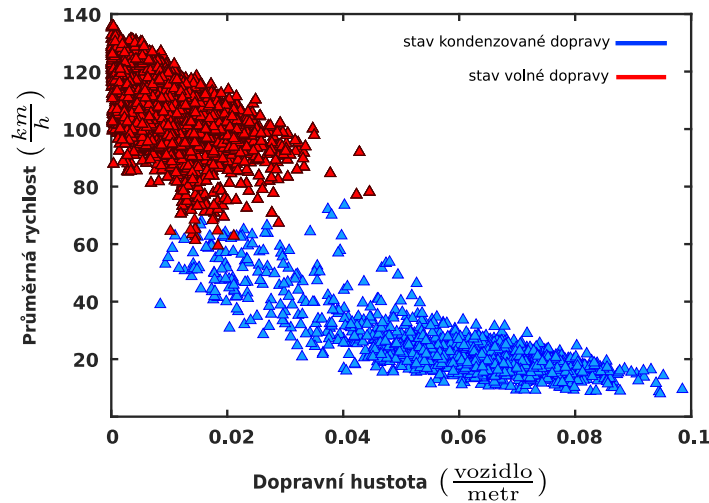
$$I = \frac{M}{\tau_M^{(out)} - \tau_1^{(in)}}, \quad V = \frac{\sum_{k=1}^M v_k}{M} \quad (2.6)$$

a pro odhad lokální hustoty  $\rho$  využijeme vztah (2.5), tedy  $\rho = I/V$ . Tímto postupem získáme binární relace  $\Omega_{ID}$ , resp.  $\Omega_{VD}$  viz obrázek 2.2, resp. 2.3.

### Segmentace

Z fundamentálního diagramu vyberme (malou) oblast  $\Psi$ , jak je znázorněno na obrázku 2.2, a z následné analýzy vyloučíme vzorky  $S_i$ , pro jejichž příslušné binární relace platí  $(\rho_i, I_i) \notin \Psi$ . Statistické rozdělení odstupů, světlostí nebo individuálních rychlostí bude tedy odhadováno z téměř homogenních dat.





Obrázek 2.3: Fundamentální diagram zobrazující binární relace  $\Omega_{VD}$ , kde kondenzovaný a volný stav dopravy odpovídají vzorkům označeným ve fundamentálním diagramu na obrázku 2.2.

### Škálování

V každém vzorku, který nebyl v předchozí fázi procedury vyloučen, provedeme přeškálování náhodné proměnné, která je předmětem statistické analýzy, aby měla střední hodnotu 1. Buď tedy  $Z_i = \{z_k : k = (i-1)M + 1, \dots, iM\}$  množina empirických hodnot analyzované veličiny<sup>5</sup>, která přísluší jednomu vzorku, kde  $i \in \{1, \dots, n \leq m\}$  určuje pořadí vzorků příslušných segmentační fázi. Pak definujeme škálovaný tvar  $y_k$  veličiny  $z_k$  jako<sup>6</sup>

$$y_k := \frac{z_k \cdot M}{\sum_k z_k} = \frac{z_k}{\langle Z_i \rangle}. \quad (2.7)$$

Po provedení škálování veličin v každém vzorku můžeme na tyto data aplikovat standardní statistickou analýzu dat, viz sekci 2.4.

## 2.4 Balanční chvost rozdělení časových světlostí

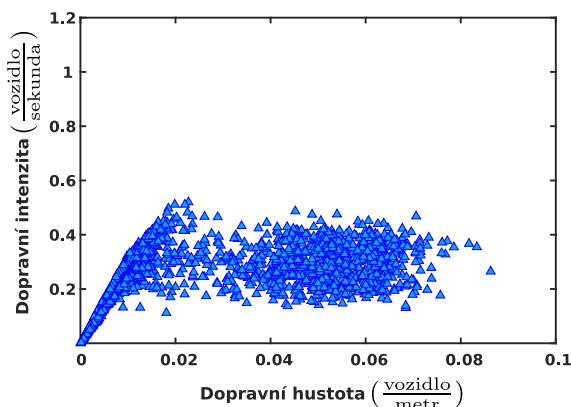
V této sekci ověříme na základě reálných dat balanční vlastnost časových světlostí. Zpracovaná data byla poskytnuta univerzitou *Delft University of Technology* a byla naměřena na třípruhové holandské dálnici metodou indukční dvousmyčky, jejíž princip byl vysvětlen v sekci 2.1. Datové soubory jsou ve tvaru (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), a proto se může na jednotlivé dopravní pruhy aplikovat třístupňová unifikáční procedura představená v sekci 2.3.

Na pozorované dálnici bylo během 49-ti dnů naměřeno více než 1 300 000 vozidel ve všech třech jízdnicích, včetně odstavného. Protože naměřená data v odstavném pruhu jsou velmi řídká, nemá smysl, abychom je analyzovali stejným způsobem, jako data z hlavního a předjížděcího pruhu, a proto byla z analýzy vynechána.

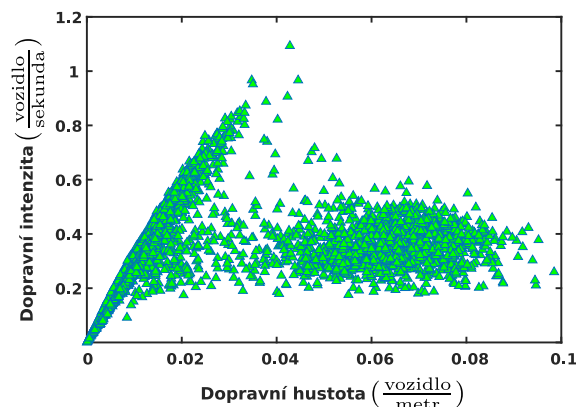
Datové soubory hlavního a předjížděcího pruhu byly rozděleny do vzorků po 50-ti vozidlech, tedy podle značení z minulé sekce  $M = 50$ . Následně byly pro každý vzorek vypočteny lokální intenzita, průměrná rychlost a hustota dle vztahů (2.6), čímž vznikly binární relace  $\Omega_{ID}$ , které vytvářejí fundamentální diagramy, viz obrázky 2.4 a 2.5.

<sup>5</sup>V případě, že analyzovaná veličina je odstup či světlost, pak pro index  $k$  platí pouze  $k = (i-1)M + 1, \dots, iM - 1$ .

<sup>6</sup>V případě, že  $z_k$  je odstup či světlost, pak se definice  $y_k$  upraví přenásobením pravé strany (2.7) koeficientem  $(M-1)/M$ .



Obrázek 2.4: Fundamentální diagram  $\Omega_{ID}$  pro hlavní pruh

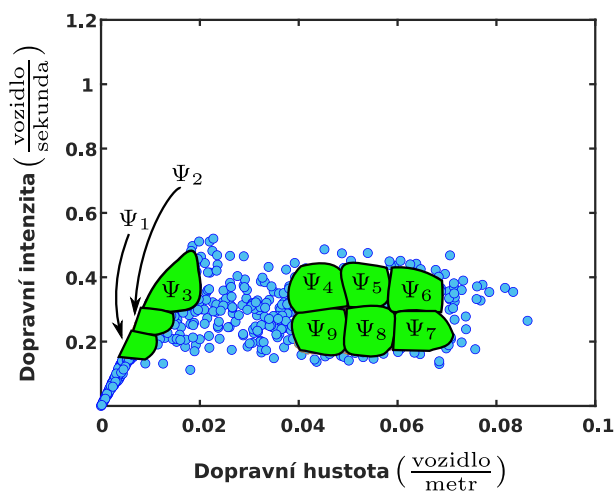


Obrázek 2.5: Fundamentální diagram  $\Omega_{ID}$  pro předjížděcí pruh

Uvedené fundamentální diagramy mají dva jasně rozlišitelné stavy dopravního proudu, avšak při stejné hustotě provozu se v předjížděcím pruhu dosahuje ve volné fázi značně vyšších hodnot intenzity provozu, než v hlavním pruhu. To je pravděpodobně způsobeno tím, že vozidla v předjížděcím pruhu jezdí obecně vyšší rychlostí. Navíc, narozdíl od předjížděcího pruhu, intenzita v hlavním pruhu pouze ojediněle překročí hranici 1/2 vozidel za sekundu, tedy 1800 vozidel za hodinu. Tento fakt může být způsoben tím, že povaha řidičů v hlavním pruhu je spíše pasivní ve smyslu zvyšování, či udržování stejné rychlosti při postupném zvyšování hustoty provozu. Důvodem toho plyne provoz v hlavním pruhu obecně pomaleji než v předjížděcím, kam řidiči z hlavního pruhu často přejíždějí, pokud mají zájem se dostat do cílové destinace rychleji, a to za případnou cenu toho, že musí být opatrnější a obezřetnější kvůli možným srážkám s ostatními vozidly.

### 2.4.1 Analýza hlavního pruhu

V další fázi bylo z fundamentálního diagramu pro hlavní pruh vybráno 9 segmentů, viz obrázek 2.6, ze kterých byly postupně extrahovány příslušné vzorky a škálovány jejich časové světlosti.



Obrázek 2.6: Rozdělení fundamentálního diagramu hlavního pruhu na segmenty  $\Psi_i$

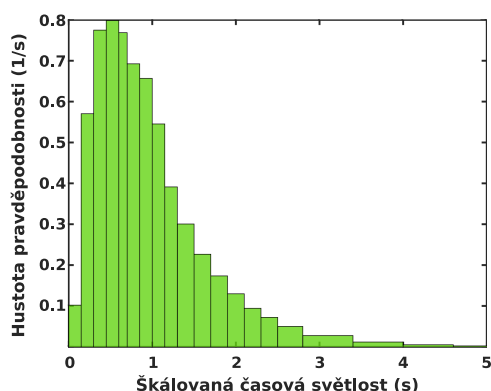
Dále byly pro škálované světlosti vytvořeny histogramové odhady hustoty pravděpodobnosti, viz např. obrázek 2.7. Za účelem ověření jejich balanční vlastnosti byly hodnoty příslušné jednotlivým *binům* histogramu zlogaritmovány a následně metodou lineární regrese byla prostřednictvím aplikace *cf-tool* v programovém prostředí MATLAB odhadnuta přímka, která nejlépe aproximuje hodnoty příslušné chvostu hustoty škálovaných časových světlostí, viz např. obrázek 2.8. V tomto textu byly za chvost rozdělení škálovaných světlostí považovány hodnoty hustoty příslušné škálovaným světlostem větších než 2,5 sekundy.

Uveď me nyní ukázky histogramových odhadů pro různé segmenty fundamentálního diagramu z obrázku 2.6 a ověřme fakt, že jejich zlogaritmované hodnoty klesají od jisté hodnoty lineárně. Tím bude ověřena vlastnost balančního chvostu.

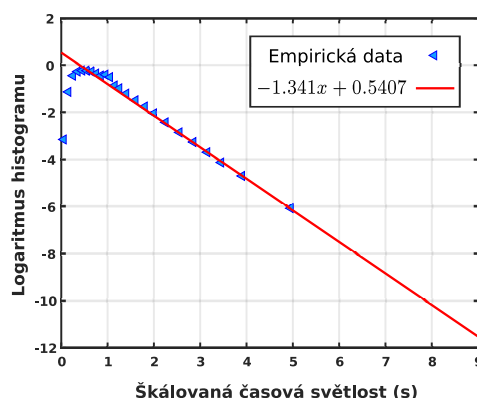
Pro ilustraci uvedeme ukážku pouze jednoho segmentu z volné fáze a jednoho segmentu z kondenzované fáze. Ostatní segmenty byly také testovány, ale všechny vykazovaly téměř stejné charakteristické rysy a žádné výrazně odlišné chování, proto je zde nebudeme uvádět.

### Fázový Segment $\Psi_2$

Provedením škálování v příslušných vzorcích získáme histogramový odhad hustoty zobrazený na obrázku 2.7. Poté jeho zlogaritmovanými hodnotami, které náleží škálovaným časovým světlostem větší než 2,5 sekundy, proložíme přímku pomocí lineární regrese, viz obrázek 2.8. Statistické vlastnosti tohoto odhadu jsou shrnuty v tabulce 2.1.



Obrázek 2.7: Histogramový odhad hustoty rozdělení škálovaných časových světlostí v hlavním pruhu v segmentu  $\Psi_2$



Obrázek 2.8: Ověření balančního chvostu hustoty škálovaných světlostí v segmentu  $\Psi_2$

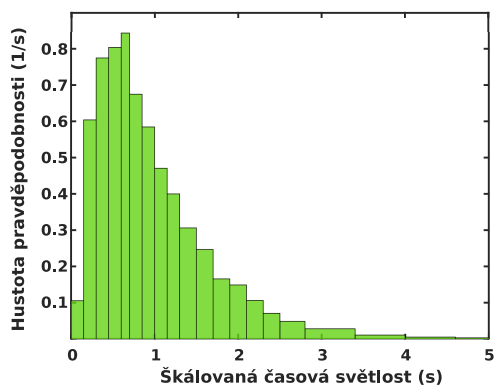
### Fázový segment $\Psi_5$

Analogickým způsobem získáme histogramový odhad, viz obrázek 2.9, a odhad jeho logaritmu, viz obrázek 2.10, pro vybraný segment  $\Psi_5$  z kondenzované fáze dopravy.

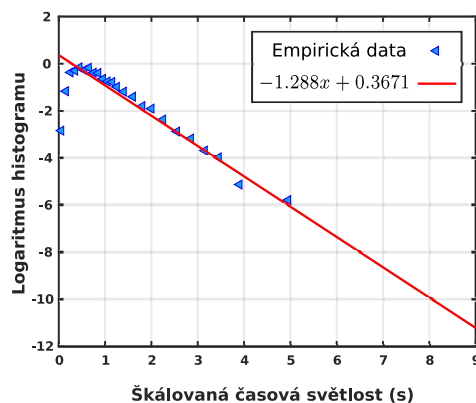
Aplikace *cf-tool* v prostředí MATLAB poskytuje různé statistiky, které popisují míru shody dat s regresním modelem. Pro uvedené segmenty  $\Psi_2$  a  $\Psi_5$  jsou tyto statistiky shrnuty v tabulce 2.1, ve které SSE odpovídá reziduálnímu součtu čtverců,<sup>7</sup> který byl při hledání optimální přímky minimalizován. Nízká hodnota SSE odpovídá dobrému odhadu. Dále R-square označuje tzv.  $R^2$  statistiku, která vyjadřuje poměr variability v datech vysvětlené lineárním modelem. Hodnoty této statistiky blízké jedné odpovídají dobrému vysvětlení dat pomocí daného modelu. Konečně RMSE<sup>8</sup> označuje odmocninu ze střední kvadratické chyby a opět platí, že hodnoty blízké nule svědčí o vysoké kvalitě odhadu. Z uvedených

<sup>7</sup> Angl. summed square of residuals

<sup>8</sup> Angl. root mean squared error



Obrázek 2.9: Histogramový odhad hustoty rozdělení škálovaných časových světlostí v hlavním pruhu v segmentu  $\Psi_5$



Obrázek 2.10: Ověření balančního chvostu hustoty škálovaných světlostí v segmentu  $\Psi_5$

Segment	SSE	R-square	RMSE
$\Psi_2$	0.004	0.9993	0.0336
$\Psi_5$	0.301	0.9533	0.2745

Tabulka 2.1: Tabulka statistik vyjadřující dobrou shodu dat s příslušnými lineárními modely na obrázcích 2.8, 2.10

histogramů, jejich logaritmů a z tabulky 2.1 můžeme učinit závěr, že balanční vlastnost časových světlostí v hlavním pruhu byla potvrzena, tedy pravděpodobnost, že vozidla v hlavním pruhu budou udržovat velké časové rozestupy klesá exponenciálně.

## 2.4.2 Analýza předjížděcího pruhu

Dle postupu unifikační procedury bude nejdříve fundamentální diagram rozdělen na 8 segmentů a poté bude provedena analýza časových světlostí pro každý segment zvlášť. Podrobně bude analyzován pouze jeden zástupce z volné fáze a jeden zástupce z kondenzované fáze, jelikož ostatní segmenty nevykazovaly žádné neočekávané chování. Z uvedených grafů a tabulky statistik dobré shody 2.2 bude zřejmé, že i v hlavním pruhu mají časové světlosti balanční vlastnost, proto bude pozornost soustředěna především na rozdílnost mezi hlavním a předjížděcím pruhem.

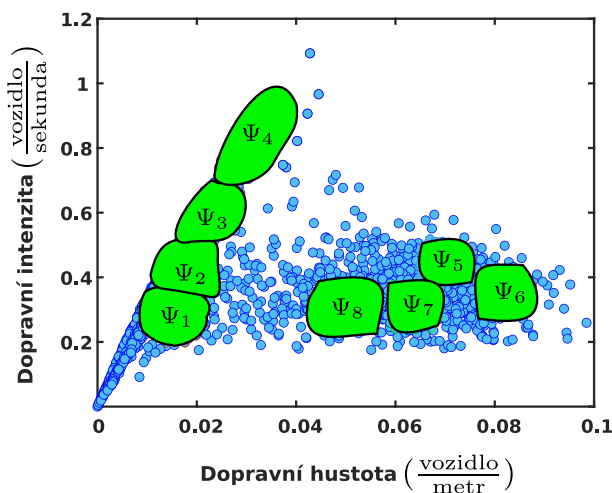
### Fázový segment $\Psi_4$

Z obrázku 2.12 je zřetelné, že hustota pravděpodobnosti nabývá okolo své střední hodnoty vyšších hodnot než v případech v hlavním pruhu. Tento efekt odpovídá nižšímu rozptylu příslušné hustoty, ne však nutně vyšší hodnotě balančního indexu.

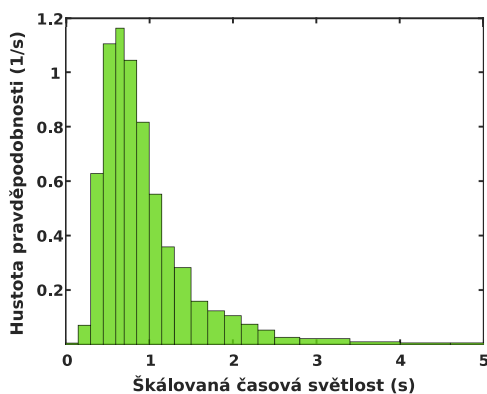
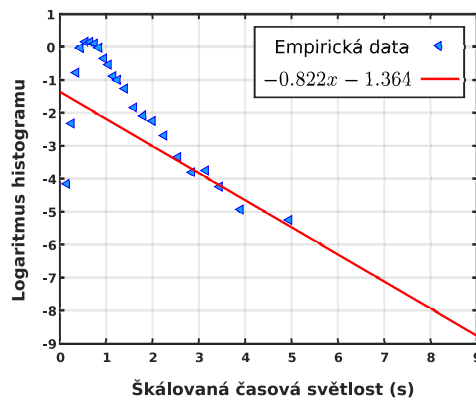
### Fázový segment $\Psi_6$

Rozptyl hustoty na obrázku 2.14 je ještě nižší, než v segmentu  $\Psi_4$ . Tento fakt odpovídá tomu, že ve stavu s velmi vysokou dopravní hustotou již jednotlivá vozidla nemají téměř žádný rozsah výběru rozestupu, který udržují s předešlým vozidlem.

Statistiky uskutečněných modelů lineární regrese v segmentech  $\Psi_4$  a  $\Psi_6$ , viz obrázky 2.13, 2.15, nabývají opět velmi příznivých hodnot, viz tabulka 2.2. Tímto tedy byla ověřena balanční vlastnost časových světlostí i v předjížděcím pruhu.

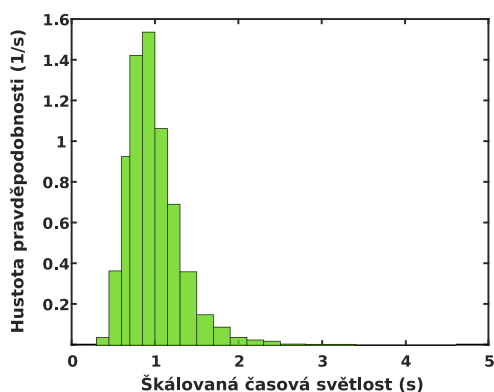


Obrázek 2.11: Rozdělení fundamentálního diagramu předjížděcího pruhu na segmenty

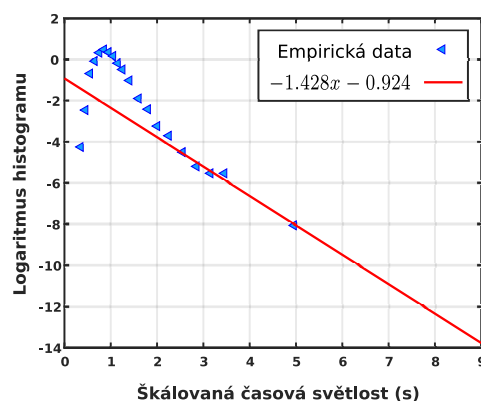
Obrázek 2.12: Histogramový odhad hustoty rozdělení škálovaných časových světlostí v předjížděcím pruhu v segmentu  $\Psi_4$ Obrázek 2.13: Ověření balančního chvostu hustoty škálovaných světlostí v segmentu  $\Psi_4$ 

Na závěr této analýzy porovnejme hodnoty balančního indexu v hlavním a předjížděcím pruhu. V obou dopravních pruzích se hodnota balančního indexu ve volné fázi příliš nelišila, viz tabulka 2.3, přičemž v hlavním pruhu jsou hodnoty konzistentně vyšší, než v předjížděcím. K rozdílnému chování dochází v kondenzované fázi, kde se hodnota balančních indexů výrazně vyvíjí v závislosti na poloze segmentu. Balanční indexy jednotlivých segmentů náležících kondenzované fázi jsou shrnuty v tabulce 2.4.

Je potřeba poznamenat, že segmentu  $\Psi_k$  v hlavním pruhu nemusí odpovídat stejné hodnoty hustoty a intenzity jako segmentu  $\Psi_k$  v předjížděcím pruhu. Tyto dva segmenty dokonce ani nemusí náležet stejnému dopravnímu stavu. Tento fakt byl zohledněn v tabulkách 2.3 a 2.4 ponecháním určitých buněk prázdnými.



Obrázek 2.14: Histogramový odhad hustoty rozdělení škálovaných časových světlostí v předjížděcím pruhu v segmentu  $\Psi_6$



Obrázek 2.15: Ověření balančního chvostu hustoty škálovaných světlostí v segmentu  $\Psi_6$

Segment	SSE	R-square	RMSE
$\Psi_4$	0.232	0.9152	0.241
$\Psi_6$	0.163	0.9777	0.233

Tabulka 2.2: Tabulka statistik vyjadřující dobrou shodu dat s příslušnými lineárními modely na obrázcích 2.13, 2.15

Segment:	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$
hlavní pruh:	1.33	1.34	1.33	
předjížděcí pruh:	0.67	0.66	0.67	0.82

Tabulka 2.3: Hodnoty balančních indexů v segmentech náležících volné fázi v hlavním a předjížděcím pruhu

Segment:	$\Psi_4$	$\Psi_5$	$\Psi_6$	$\Psi_7$	$\Psi_8$	$\Psi_9$
hlavní pruh:	1.16	1.29	1.36	1.33	1.71	1.31
předjížděcí pruh:		1.72	1.43	0.64	0.78	

Tabulka 2.4: Hodnoty balančních indexů v segmentech náležících kondenzované fázi v hlavním a předjížděcím pruhu

## Kapitola 3

# Charakteristiky druhého řádu pro BČS

### 3.1 Rozptyl intervalové frekvence a statistická rigidita

V návaznosti na kapitolu 1 uvažujme obecný BČS, který je zadán pomocí generátoru  $g_0$  a intervalové frekvence  $\mathcal{N}_L$ . Máme již k dispozici limitní větu, udávající asymptotické chování středního počtu částic na intervalu  $(0, L)$  pro  $L \rightarrow +\infty$ . V této kapitole se budeme zabývat dalším přiblížením asymptotického chování částicového systému, konkrétně rozptylem intervalové frekvence a *statistickou rigiditou*, která bude níže definována. Již víme, že mezi trendovou funkcí a generátorem BČS existuje jednoznačný vztah. Dále ukažme, že podobný vztah existuje i mezi generátorem a rozptylem intervalové frekvence.

S využitím značení prvního, resp. druhého obecného momentu roztečí  $\mathbb{E}[\mathcal{R}_0] = \mu_1$ , resp.  $\mathbb{E}[\mathcal{R}_0^2] = \mu_2$  označme rozptyl roztečí

$$\text{Var}[\mathcal{R}_0^2] = \mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2,$$

který je v případě BČS kladný a konečný.

Další charakteristikou druhého řádu pro BČS je rozptyl intervalové frekvence, tzv. *rozptyl počtu částic*,

$$\text{Var}[\mathcal{N}_L^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \mathbb{E}[\mathcal{N}_L])^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k].$$

V praxi se rozptyl intervalové frekvence získá z formule

$$\text{Var}[\mathcal{N}_L^2] = \mathbb{E}[\mathcal{N}_L^2] - \lambda^2(L),$$

kde  $\lambda(L)$  je trendová funkce a tvar  $\mathbb{E}[\mathcal{N}_L^2]$  lze zjednodušit následujícím výpočtem:

$$\begin{aligned} \psi(L) &\stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathbb{E}[\mathcal{N}_L^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathcal{N}_L^2 | \mathcal{R}_0]] \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{N}_L^2 | \mathcal{R}_0 = x] g_0(x) dx = \int_0^L \mathbb{E}[\mathcal{N}_L^2 | \mathcal{R}_0 = x] g_0(x) dx \\ &= \int_0^L \mathbb{E}[(1 + \mathcal{N}_{L-x})^2] g_0(x) dx = \int_0^L (1 + 2\lambda(L-x) + \psi(L-x)) g_0(x) dx \\ &= G_0(L) + 2(\lambda \star g_0)(L) + (\psi \star g_0)(L). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Poznamenejme, že tento postup je velmi podobný odvození tvaru trendové funkce v sekci 1.3, kde jsme také využili zákon iterace středních hodnot. Ověřme nyní dosazením do (3.1), že řešení této rovnice je ve tvaru

$$\psi(L) = \lambda(L) + 2(\lambda \star r)(L),$$

kde  $r$  je shluková funkce. S využitím dříve odvozeného vztahu (1.24) dostaneme

$$\begin{aligned}\psi(L) &= G_0(L) + 2(\lambda \star g_0)(L) + (\psi \star g_0)(L) \\ &= \underbrace{\lambda(L) - (\lambda \star g_0)(L)}_{=G_0(L)} + 2(\lambda \star g_0)(L) + 2((\lambda \star r) \star g_0)(L) + (\lambda \star g_0)(L) \\ &= \lambda(L) + 2(\lambda \star g_0)(L) + 2((\lambda \star r) \star g_0)(L).\end{aligned}\quad (3.2)$$

Nyní derivací (1.24) dostáváme vztah

$$r(L) = g_0(L) + (r \star g_0)(L) \iff r(L) - g_0(L) = (r \star g_0)(L),$$

jehož dosazením do (3.2) a využitím asociativity konvoluce získáme

$$\begin{aligned}\psi(L) &= \lambda(L) + 2(\lambda \star g_0)(L) + 2(\lambda \star r)(L) - 2(\lambda \star g_0)(L) \\ &= \lambda(L) + 2(\lambda \star r)(L).\end{aligned}$$

Tím bylo dokázáno, že v BČS lze rozptyl intervalové frekvence vyjádřit vztahem

$$\text{Var}[\mathcal{N}_L] = \lambda(L) + 2(\lambda \star r)(L) - \lambda^2(L).\quad (3.3)$$

Velmi důležitou limitní větou je centrální limitní teorém pro částicové systémy, ze kterého mimo jiné vyplývá věta 1.9.

**Věta 3.1** (Centrální limitní teorém). *Bud' BČS se střední hodnotou roztečí  $\mu_1$  a rozptylem roztečí  $\sigma^2$ . Potom platí*

$$\frac{\mathcal{N}_L - L/\mu_1}{\sigma \sqrt{L/\mu_1^3}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \quad \text{pro } L \rightarrow +\infty,\quad (3.4)$$

kde  $\xrightarrow{\mathcal{D}}$  značí konvergenci v distribuci a náhodná veličina  $Z$  má standardizované normální rozdělení.

Z asymptotické normality (3.4) nutně neplyne konvergence rozptylu

$$\frac{\text{Var}[\mathcal{N}_L]}{L} \xrightarrow{\text{s.j.}} \frac{\sigma^2}{\mu_1^3},$$

avšak podobně větě 1.14 lze tuto konvergenci dokázat, protože dokonce platí obecnější tvrzení

$$\text{Var}[\mathcal{N}_L] = \chi L + \varkappa + o(1),\quad (3.5)$$

kde  $\chi$  je sklon lineární asymptoty rozptylu a nazývá se *statistická kompresibilita*,  $\varkappa$  je *intercept rozptylu intervalové frekvence* a v BČS platí

$$\chi = \frac{\sigma^2}{\mu_1^3}.\quad (3.6)$$

Vyjádření interceptu  $\varkappa$  je složitější a spolu s důkazem tvrzení (3.5) je uveden např. v [1, 12].

V teorii dopravy se k odhalení spojení mezi generátorem  $g_0$  a intervalovou frekvencí nevyužívá rozptylu intervalové frekvence, nýbrž je používán pojem *statistická rigidita*. Statistická rigidita poskytuje nástroj vhodnější k popisu a porovnávání různých BČS a jejich vlastností, mezi které patří např. interakční pravidla mezi částicemi. Mimo teorii dopravy nacházejí veličiny obdobné statistické rigiditě úspěšné aplikace i např. v dynamice pohybu davu.<sup>1</sup> [4]

<sup>1</sup> Angl. pedestrian dynamics



**Definice 3.2** (Statistická rigidita). Bud' BČS, pak definujeme statistickou rigiditu vztahem

$$\Delta(L) := \mathbb{E}[(\mathcal{N}_L - L/\mu_1)^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - L/\mu_1)^2 \mathbb{P}[\mathcal{N}_L = k].$$

Vztah mezi statistickou rigiditou a rozptylem intervalové frekvence je zřejmý ze vztahu

$$\Delta(L) = \text{Var}[\mathcal{N}_L] + (\lambda(L) - L/\mu_1)^2.$$

Z vlastnosti trendové funkce BČS (1.30) totiž vyplývá, že

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} (\lambda(L) - L/\mu_1)^2 = q^2,$$

kde  $q$  je intercept trendové funkce, a tedy

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\Delta(L)}{L} = \frac{\text{Var}[\mathcal{N}_L]}{L} \stackrel{\text{s.j.}}{=} \frac{\sigma^2}{\mu_1^3} = \chi.$$

Proto mají lineární asymptoty statistické rigidity i rozptylu počtu částic stejný sklon  $\chi$ . Navíc s využitím aproximací (1.30), (3.5) lze najít limitní tvar statistické rigidity

$$\begin{aligned} \Delta(L) &= \chi L + \varkappa + o(1) + (q + o(1))^2 \\ &= \chi L + \underbrace{\varkappa + q^2}_{=\gamma} + o(1) \\ &= \chi L + \gamma + o(1), \end{aligned} \tag{3.7}$$

který udává vztah mezi *interceptem statistické rigidity*  $\gamma$  a interceptem rozptylu intervalové frekvence  $\varkappa$

$$\gamma = \varkappa + q^2.$$

Speciálně pro Poissonův BČS platí  $\forall L > 0$ :

$$\lambda(L) = L/\mu_1 \implies \Delta(L) = \text{Var}[\mathcal{N}_L],$$

tedy pojmy statistická rigidita a rozptyl intervalové frekvence splývají. Zároveň z jednoznačnosti trendové funkce vyplývá, že tato skutečnost nastává pouze pro Poissonův BČS.

V *deterministickém systému*, ve kterém je  $\sigma^2 = 0$ , platí

$$\begin{aligned} \lambda(L) &= \frac{L}{\mu_1} - \frac{1}{2} + o(1), \\ \text{Var}[\mathcal{N}_L] &= \varkappa + o(1), \end{aligned}$$

z čehož vyplývá pro statistickou rigiditu

$$\Delta(L) \stackrel{\text{s.j.}}{\rightarrow} \varkappa + \frac{1}{4} \quad \text{pro } L \rightarrow +\infty.$$

Z předchozího je zřejmé, že statistická rigidita konverguje ke konstantě právě tehdy, když platí podmínka  $\sigma^2 = 0$ . Tato podmínka nastává pouze v deterministickém systému, a proto pro BČS, kde  $\sigma^2 > 0$ , platí obecně  $\Delta(L) \rightarrow +\infty$ .

### 3.2 Ukázky statistické rigidity

V této sekci odvodíme obecný tvar statistické kompresibility  $\chi$  v Erlangově BČS v závislosti na parametrech generátoru  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda > 0$ . Dále uvedeme grafy statistické rigidity ve známých BČS pro určité hodnoty parametrů, které budou obecně ilustrovat její chování, a navíc znázorníme rozdíly mezi statistickou rigiditou a rozptylem intervalové frekvence. V následujícím textu rozlišme parametr generátoru  $\lambda$  a trendovou funkci  $\lambda(L)$  pomocí zdůraznění závislosti trendové funkce na  $L > 0$ .

#### Poissonův BČS

Poissonův BČS je případem Erlangova BČS pro hodnotu parametru  $n = 1$  s generátorem ve tvaru

$$f_{exp}(x; \lambda) = \Theta(x) \lambda e^{-\lambda x},$$

pro který platí  $\mu_1 = 1/\lambda$ ,  $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ . Dosazením do vztahu (3.6) získáme tvar statistické kompresibility v Poissonově BČS

$$\chi = \lambda = \frac{1}{\mu_1}.$$

Tento výsledek lze ověřit jednoduchým výpočtem výrazu (3.3), protože platí

$$\begin{aligned} \lambda(L) &= \frac{L}{\mu_1}, \quad r(L) = \frac{1}{\mu_1}, \\ 2(\lambda \star r)(L) &= \frac{2}{\mu_1^2} \int_0^L y \, dy = \frac{L^2}{\mu_1^2}. \end{aligned}$$

Získáme tak funkční předpis pro statistickou rigiditu

$$\begin{aligned} \Delta(L) &= \text{Var}[N_L] \\ &= \lambda(L) + 2(\lambda \star r)(L) - \lambda^2(L) \\ &= \frac{L}{\mu_1}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

který je v Poissonově BČS funkčním předpisem i pro rozptyl intervalové frekvence a trendovou funkci, jejíž graf je zobrazen na obrázku 1.5 nahoře. Z výrazu (3.8) je zřejmé, že pro intercept platí  $\varkappa = 0$ .

#### Erlangův BČS

Pro Erlangův BČS má generátor tvar

$$f_E(x; \lambda, n) = \Theta(x) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}. \tag{3.9}$$

Pomocí substituce  $\lambda x = y$  a vlastnosti Gamma funkce<sup>2</sup> vypočteme příslušné momenty hustoty (3.9)

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x} \, dx & \mu_2 &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-\lambda x} \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda(n-1)!} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} \, dy & &= \frac{1}{\lambda^2(n-1)!} \int_0^{+\infty} y^{n+1} e^{-y} \, dy \\ &= \frac{1}{\lambda(n-1)!} \Gamma(n+1) & &= \frac{1}{\lambda^2(n-1)!} \Gamma(n+2) \\ &= \frac{n}{\lambda}, & &= \frac{n(n+1)}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Pro Gamma funkci platí  $\forall n \in \mathbb{N}: \Gamma(n) = (n-1)!$

ze kterých vyjádříme rozptyl roztečí

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{n}{\lambda^2}.$$

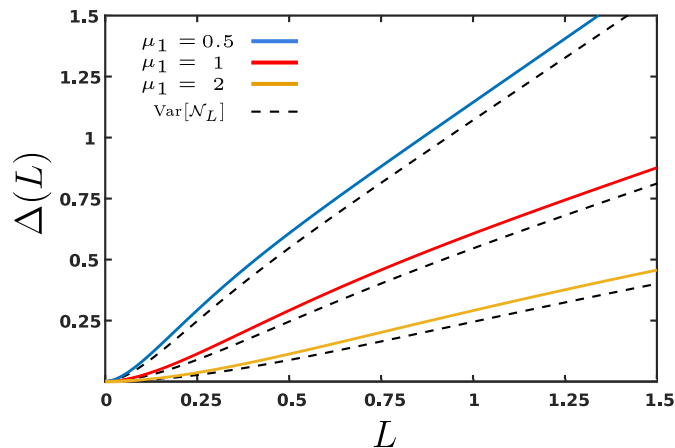
Následným dosazením do (3.6) dostáváme obecný tvar statistické kompresibility pro Erlangův BČS v závislosti na parametrech generátoru  $n$ ,  $\lambda$

$$\chi = \frac{\lambda}{n^2}.$$

Na obrázku 3.1 jsou zobrazeny grafy statistické rigidity a rozptylu intervalové frekvence pro hodnotu parametru  $n = 2$  a střední hodnoty generátoru  $\mu_1 \in \{0,5; 1; 2\}$ . Z obrázku je zřetelné, že

$$\forall L > 0: \Delta(L) > \text{Var}[\mathcal{N}_L],$$

zároveň jsou od jisté hodnoty  $L_0$  grafy těchto dvou veličin rovnoběžné, a tedy se liší pouze o konstantu, která je dle (3.7) rovna kvadrátu interceptu trendové funkce  $q^2$ .



Obrázek 3.1: Graf statistické rigidity a rozptylu počtu částic v Erlangově BČS s hodnotou parametru  $n = 2$  pro různé střední hodnoty generátoru. Statistická rigidita je označena plnou barevnou čarou a příslušný rozptyl počtu částic, mající stejný sklon lineární asymptoty, je označen přerušovanou černou čarou.

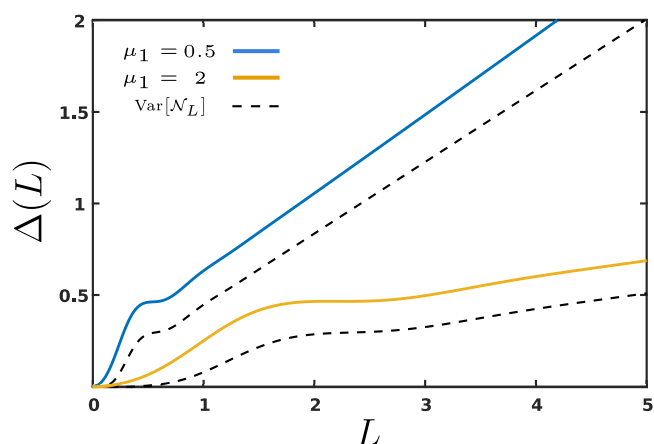
Na obrázku 3.2 jsou zobrazeny grafy statistické rigidity a rozptylu intervalové frekvence pro parametr  $n = 6$  a střední hodnoty generátoru  $\mu_1 \in \{0,5; 2\}$ . Na obrázku je pozorovatelné podobné chování statistické rigidity, jako v případě  $n = 2$ , avšak u hodnot blízké  $L = 0$  lze pozorovat strmý nárůst podobný nárůstu shlukové funkce na obrázku 1.7 dole.

### GIG BČS

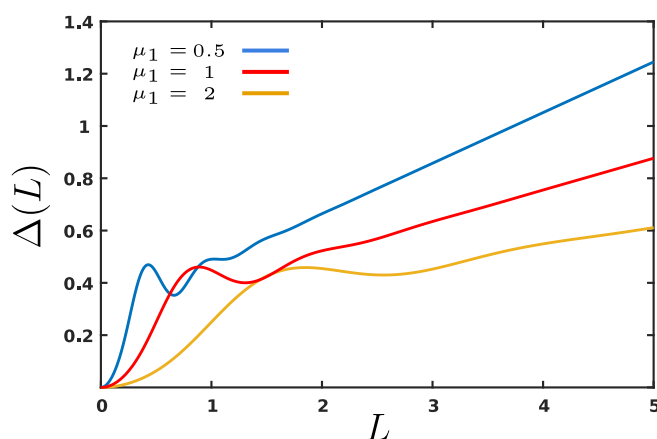
Nyní uvedeme ukázky statistické rigidity pro GIG BČS s volbou parametrů  $b = 2$ ,  $p = 6$  v generátoru

$$f_{GIG}(x; a, b, p) = \Theta(x) \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2\mathcal{K}_p(\sqrt{ab})} x^{p-1} \exp\left(-\frac{ax + \frac{b}{x}}{2}\right),$$

kde parametr  $a$  byl následně určen z podmínky na střední hodnotu  $\mu_1 \in \{0,5; 1; 2\}$ .

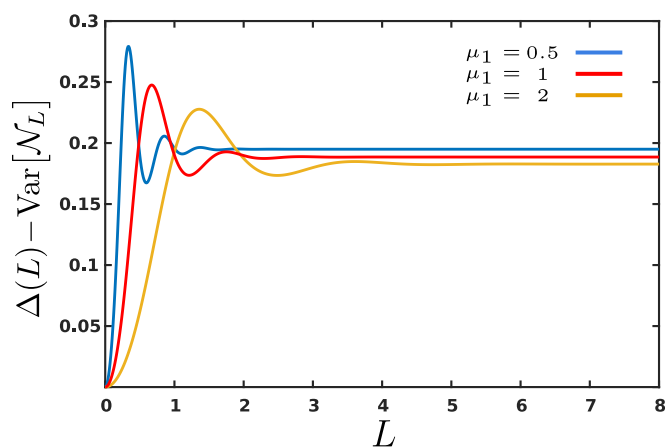


Obrázek 3.2: Graf statistické rigidity a rozptylu počtu částic v Erlangově BČS s hodnotou parametru  $n = 6$  pro různé střední hodnoty generátoru. Statistická rigidita je označena plnou barevnou čarou a příslušný rozptyl počtu částic, mající stejný sklon lineární asymptoty, je označen přerušovanou černou čarou.



Obrázek 3.3: Graf statistické rigidity v GIG BČS s parametry  $b = 2$ ,  $p = 6$  pro různé střední hodnoty generátoru.

Na obrázku 3.3 je zobrazen vývoj statistické rigidity pro různé střední hodnoty generátoru a na obrázku 3.4 je zobrazen rozdíl statistické rigidity a rozptylu intervalové frekvence. Z obrázku 3.4 je opět zřejmé, že od určitého  $L_0$  je rozdíl statistické rigidity a rozptylu intervalové frekvence konstantní, což potvrzuje analytické odvození (3.7).



Obrázek 3.4: Graf rozdílu statistické rigidity  $\Delta(L)$  a rozptylu intervalové frekvence  $\text{Var}[\mathcal{N}_L]$  v GIG BČS s parametry  $b = 2$ ,  $p = 6$  pro různé střední hodnoty generátoru.

# Závěr

V první části této práce jsme nejdříve pro generátor částicového systému postupně vybudovali potřebné požadavky, pro které jsme ukázali, že při jejich splnění jsou způsoby zadání částicových systémů pomocí známých veličin ekvivalentní. Dále jsme definovali třídu balancovaných hustot a částicový systém s balanční vlastností. Pro tuto třídu a přidružené částicové systémy jsme shrnuli jejich vlastnosti, přičemž netriviální tvrzení jsme zformulovali do vět, které jsme až na výjimky dokázali. Nejdůležitější asymptotickou charakteristikou prvního řádu v balancovaném částicovém systému je lineární asymptota trendové funkce, kterou jsme pro příklady známých balancovaných systémů ověřili numerickými výpočty a výsledky zobrazili pomocí grafů.

Ve druhé části jsme při analýze dopravních dat postupovali dle představené unifikční procedury a pomocí lineární regrese jsme ověřili balanční vlastnost časových světlostí v hlavním i předjížděcím pruhu. Navíc jsme zaznamenali hodnoty balančních indexů v závislosti na typu dopravního pruhu a oblasti ve fundamentálním diagramu. Preciznější analýza uvedených výsledků může být náplní budoucích prací zabývajících se podobnou tematikou.

Ve třetí části jsme pokračovali odvozováním asymptotického chování balancovaného částicového systému pomocí charakteristik druhého řádu, mezi které patří rozptyl generátoru, rozptyl intervalové frekvence a statistická rigidita. Pomocí centrálního limitního teorému pro balancované částicové systémy jsme odvodili limitní tvar statistické rigidity, a sice

$$\Delta(L) = \chi L + \varkappa + q^2 + o(1),$$

kde  $\chi$  je statistická kompresibilita,  $\varkappa$  je intercept rozptylu intervalové frekvence,  $q$  je intercept trendové funkce a v balancovaném částicovém systému platí  $\chi = \sigma^2/\mu_1^3$ , kde  $\sigma^2$  je rozptyl generátoru a  $\mu_1$  je střední hodnota generátoru. Na závěr jsme tyto analytické předpovědi ověřili ve známých balancovaných systémech numerickými výpočty a zdůraznili rozdíl v chování statistické rigidity a rozptylu intervalové frekvence.

# Literatura

- [1] D. J. Daley, N. R. Mohan. *Asymptotic Behaviour of the Variance of Renewal Processes and Random Walks*. The Annals of Probability, vol. 6, no. 3, 1978, pp. 516–521. JSTOR.
- [2] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley India Pvt. Limited, 1968.
- [3] D. Helbing. *Traffic and related self-driven many-particle systems*, Rev. Mod. Phys. 73, 1067, 2001.
- [4] O. Kollert, M. Krbálek, T. Hobza, M. Krbálková. *Statistical rigidity of vehicular streams—theory versus reality*. Journal of Physics Communications. DOI: 10.1088/2399-6528/ab0d47.
- [5] M. Krbálek, M. Krbálková. *3s-Unification for Vehicular Headway Modeling*. Proceedings of SPMS 2018, Dobřichovice 2018 (2018). ISBN 978-80-01-06501-3.
- [6] M. Krbálek, P. Šeba. *Spectral rigidity of vehicular streams (Random Matrix Theory approach)*. J. Phys. A: Math. Theor. 42, 2009.
- [7] L. Li, X. M. Chen. *Vehicle headway modeling and its inferences in macroscopic/microscopic traffic flow theory: A survey*, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 76 (2017) 170–188.
- [8] S. Maghsoodloo, D. Helvacı. *Renewal and Renewal-Intensity Functions with Minimal Repair*. Journal of Quality and Reliability Engineering, 19 Mar 2014. DOI: 10.1155/2014/857437.
- [9] S. M. Ross. *Renewal Theory and Its Applications*. Introduction to Probability Models. 10th ed. Elsevier, 2010, 421 - 495. ISBN 978-0-12-375686-2.
- [10] S. M. Ross. *Renewal Theory*. In: *Stochastic Processes*. 2nd ed. Wiley, 1996, s. 98-161. ISBN 0-471-12062-6.
- [11] W. L. Smith. *Infinitesimal renewal processes*. In: *Contributions to Probability and Statistics*. Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1960.
- [12] R. M. Soland. *Letter to the Editor—Availability of Renewal Functions for Gamma and Weibull Distributions with Increasing Hazard Rate*. Operations Research 17(3):536-543, 1969. DOI:10.1287/opre.17.3.536.
- [13] S. Täcklind. *Fourieranalytische behandlung vom erneuerungsproblem*. Scandinavian Actuarial Journal, vol. 1945, no. 1-2, pp. 68–105, 1945.
- [14] P. Tišnovský. *Hrátky se systémem LÖVE - částicové systémy* [online]. 16. 6. 2009 [cit. 2020-03-15]. ISSN 1212-8309. Dostupné z: <https://www.root.cz/clanky/hratky-se-systemem-love-casticove-systemy/>.