



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



Supernáhodné stavy termodynamického dopravního plynu a jejich matematické vlastnosti

Superrandom states of thermodynamic traffic gas and their mathematical properties

Bakalářská práce

Autor: **Vít Pánek**
Vedoucí práce: **Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**
Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Vít Pánek
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Obor:	Matematické inženýrství
Zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Supernáhodné stavy termodynamického dopravního plynu a jejich matematické vlastnosti
Název práce (anglicky):	Superrandom states of thermodynamic traffic gas and their mathematical properties

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se se základním fyzikálním popisem dopravního proudu a s termodynamickým dopravním modelem.
2. Studujte obecné vlastnosti třídy balancovaných hustot a odvoďte pomocí nich limitní hodnoty pro parametry a momenty normovaných a škálovaných hustot.
3. Analyzujte (teoreticky i numericky) statistické vlastnosti termodynamického dopravního plynu ve stacionárních stavech.
4. Detekujte supernáhodné stavy v reálných dopravních datech a diskutujte příčiny vzniku těchto stavů na víceproudujících komunikacích.
5. Formulujte specifickou verzi termodynamického plynu korespondující s empirickými vlastnostmi dopravy.

Doporučená literatura:

1. M. Treiber, A. Kesting, Traffic flow dynamics: data, models and simulation. New York, Springer, 2013.
2. D. Helbing, Traffic and related self-driven many-particle systems. Rev. Mod. Phys. 73, 2001, 1067-1141.
3. M. Krbálek, Equilibrium distributions in thermodynamical traffic gas. J. Phys. A: Math. Theor. 40, 2007, 5813-5821.
4. M. Krbálek, M. Krbálková, 3s-Unification for Vehicular Headway Modeling. In 'Proceedings of SPMS 2018', Dobřichovice, 2018.
5. L. Li., X.M. Chen, Vehicle headway modeling and its inferences in macroscopic/microscopic traffic flow theory: A survey. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 76, 2017, 170-188.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

Doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

Katedra matematiky , Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská , České vysoké učení technické v Praze, Trojanova 13 , 120 00 Praha 2

Jméno a pracoviště konzultanta:

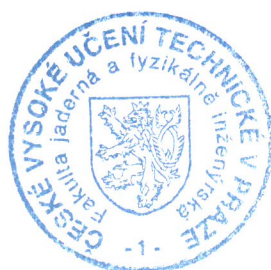
Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2019

Datum odevzdání bakalářské práce: 7.7.2020

Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 23. října 2019

.....
PO
garant oboru
P. Hájek
.....
vedoucí katedry



.....
děkan

Poděkování:

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli docentu Mgr. Milanu Krbálkovi, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 7. července 2020

30.7.2020 Vít Pánek

Název práce:

Supernáhodné stavy termodynamického dopravního plynu a jejich matematické vlastnosti

Autor: Vít Pánek

Obor: Matematické inženýrství

Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D., České vysoké učení technické v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá modelem termodynamického dopravního plynu, rozptylem světlostí v dopravních datech a supernáhodnými stavy v teorii dopravy. Část práce je věnována úvodu do statistického odhadování odstupů vozidel a jeho historii. Dále se věnuje modelu termodynamického dopravního plynu a jeho matematickým vlastnostem. Příslušné distribuce světlostí jsou popsány funkcemi ze třídy GIG, která je obzvláště vhodná pro studium mikrostruktury dopravních toků. Supernáhodné stavy v teorii dopravy a jejich distribuce světlostí nebyly blíže popsány a jejich zkoumání je zcela nová disciplína v tomto oboru.

Klíčová slova: balancované hustoty, distribuce světlostí, dopravní data, MacDonalldova funkce, statistické odhadování odstupů vozidel (VHM), rozptyl světlostí, superpoissonovské stavy, supernáhodné stavy, termodynamický dopravní plyn, zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení (GIG)

Title:

Superrandom states of thermodynamic traffic gas and their mathematical properties

Author: Vít Pánek

Abstract: In this thesis we follow up with thermodynamical traffic gas model, clearance variances in traffic data and superrandom states in traffic theory. Part of this thesis is dealing with introduction to statistical headway modeling and its history. Further we analyze thermodynamical traffic gas model and its mathematical properties. Corresponding clearance distributions are described by function from distribution family GIG, which is particularly suitable for studying a microstructure of traffic flows. Superrandom states in traffic theory and its clearance distributions have not been investigated so far and associated research is therefore a brand new discipline in this field.

Key words: balanced densities, clearance distributions, clearance variance, generalized inverse Gaussian distribution (GIG), MacDonald function, super-Poisson states, super random states, thermodynamical traffic gas, traffic data, vehicular headway modeling (VHM)

Obsah

Úvod	9
1 Historie a základní popis VHM	10
1.1 Historie a vývoj VHM	10
1.2 Základní veličiny VHM	14
1.2.1 Mikroveličiny	14
1.2.2 Makroveličiny	15
1.3 Fundamentální diagram	16
1.4 3D graf headway distribuce	17
2 Model termodynamického plynu	19
2.1 Interakční síly a jejich specifikace	20
2.2 Celková energie souboru částic	21
2.3 Stacionární stavy	22
2.4 Model termodynamického plynu	22
3 Třída balancovaných hustot	24
3.1 Vlastnosti balancovaných hustot	24
3.2 Zástupci třídy \mathcal{B}	30
3.2.1 Exponenciální rozdělení	30
3.2.2 Gamma rozdělení	32
3.2.3 GIG rozdělení	34

4	Algoritmická realizace	40
4.1	Sestavení algoritmu	41
4.2	Algoritmická realizace	43
5	Klasifikace částicových systémů	46
5.1	Charakteristiky balančního částicového systému	47
5.2	Klasifikace systémů podle rozptylu světlostí	49
5.2.1	Deterministické stavy	50
5.2.2	Poissonovské stavy	50
5.2.3	Subpoissonovské stavy	50
5.2.4	Superpoissonovské stavy	51
6	Analýza rozptylu empirických dat	53
6.1	3-s Unifikace dat	53
6.2	Analýza rozptylu	53
6.3	Odhad parametrů pro určitý segment	54
7	Supernáhodná varianta dopravního plynu	58
7.1	Kombinovaný potenciál	58
7.2	Model termodynamického dopravního plynu	59
	Závěr	63

Úvod

Vzrůstající automobilová doprava ve 30. letech 20. století dospěla do fáze, ve které se začínaly tvořit první dopravní kongesce a vznikla potřeba tento nový problém popisovat a analyzovat. Dopravní inženýři dokázali na základě popisu dopravní komunikace lépe odhadnout její parametry např. kapacitu. Výzkum dopravního toku se tak projevil jako velmi užitečný pro efektivnější výstavbu nových silnic, dálnic nebo křižovatek. To zapříčinilo vznik dnes již rozsáhlé vědecké disciplíny fyziky dopravy.

Tato práce je zaměřená na jednu z částí fyziky dopravy, a to na modelování odstupů vozidel neboli *Vehicle Headway Modeling* (VHM). Jednou ze základních veličin fyziky dopravy je odstup vozidel. Na tuto veličinu lze nahlížet jako na prostorový nebo časový odstup mezi jednotlivými vozidly. Jelikož každý řidič vyhodnocuje dopravní situace na vozovce rozdílně, nelze přesně předpokládat jeho reakci. Jeho chování je tedy do určité míry náhodné a nemůžeme s jistotou říci, jaký budou mít vozidla odstup. Proto na tuto veličinu musíme pohlížet jako na náhodnou. Kde se bude vozidlo nacházet dokážeme říci pouze s určitou pravděpodobností, a proto je zapotřebí stochastický popis odstupů pomocí statistických rozdělení.

Pro statistické odhadování odstupů vozidel se hojně využívají distribuce ze třídy balancovaných hustot, jelikož některé z nich velmi dobře popisují dopravní realitu. Třída GIG distribucí (podtřída balancovaných hustot) se považuje za jednu z nejnadhodnějších pro VHM, jelikož je analyticky odvozená z jistého dopravního modelu. Z tohoto důvodu se v této práci blíže podíváme na matematickou teorii balancovaných hustot.

Hlavním cílem této práce je navržení modelu termodynamického dopravního plynu, jehož stacionární stav je supernáhodný. Popis takových stavů je v teorii dopravy nová disciplína, která není takřka vůbec probídaná. Proto nejprve lokalizujeme výskyt těchto stavů v empirických datech a odhadneme parametry distribuce popisující světlosti v supernáhodných stavech. Poté se pokusíme realizovat kýžený model s odhadnutými parametry a výsledky porovnáme s teoretickými předpoklady.

Kapitola 1

Historie a základní popis VHM

1.1 Historie a vývoj VHM

Vehicular Headway Modeling (VHM) je disciplína fyziky dopravy, která analyzuje a predikuje změny stavu mikrostruktury dopravního systému zapříčiněné změnou makroveličin daného systému. Mezi makroveličiny řadíme hustotu provozu, intenzitu nebo průměrnou rychlost. Do kategorie dopravních mikroveličin patří individuální rychlost, časový a prostorový odstup nebo časová a prostorová světlost.

Prvopočátky odhadování odstupů vozidel za pomoci statistických metod sahají do 30. let 20. století, kdy v roce 1936 W.F. Adams přišel s návrhem modelu statistiky odstupů, který využívá normální nebo exponenciální rozdělení. Jeho práce inspirovala mnoho dalších výzkumníků a začaly tak vznikat modely používající např. posunuté exponenciální, log-normální nebo gamma rozdělení. Zpočátku byly tyto modely vztažené na konkrétní situaci a neexistovalo komplexnější řešení. Po otestování modelů empirickými daty se v první fázi VHM vytvořily 4 základní předpoklady.

1. Všechna vozidla mají rychlost volného proudu a vzájemná interakce mezi vozidly je zanedbatelná.
2. Rozdělení odstupů uvnitř úseku silnice je určeno pouze tím, jak vozidla vstupují do tohoto úseku, tj. rozdělení odstupů je stejné jako rozdělení na vjezdu do tohoto úseku.
3. Jakýkoliv naměřený odstup je nezávislý na jiném odstupu.
4. Všechny tyto distribuce jsou unimodální a nemají těžký chvost.

Jelikož doprava nebyla tak hustá a nevznikaly závažnější kongesce, tyto předpoklady popisovaly skutečnost relativně dobře.

POZNÁMKA 1.1.1. Rychlost, jíž se pohybují vozidla ve volném dopravním proudění neboli ve volné dopravní fázi, si označíme jako v_F a chápeme ji jako jakousi průměrnou hodnotu.

Od 70. let 20. století doprava začala být hustší, zlepšila se technika sběru dat a pozornost výzkumu této disciplíny se upínala převážně k přesnějšímu sběru dat a hledání distribucí fungujících pro komplexnější

modely. V této době vznikl důležitý model využívající M3 distribuci. Tento model byl určený pro odhady při kratších odstupech a osvědčil se zejména v predikci kapacity nesignalizovaných křižovatek a kruhových objezdů.

Klíčové předpoklady pro modely vytvořené od 70. do 90. let vypadají následovně:

1. Všechna vozidla se pohybují rychlostí v_F , ale vzájemná interakce některých vozidel není zanedbatelná. To způsobí, že se volně jedoucí vozidla mohou řídit jinou distribucí odstupů než vozidla vedoucí. To však stále nenutí vozidla zpomalit.
2. Rozdělení odstupů uvnitř úseku silnice je určeno pouze tím, jak vozidla vstupují do tohoto úseku.
3. Ne všechny naměřené odstupy jsou nezávislé na jiných naměřených odstupech.

Některé z těchto distribucí lépe popisovaly a odhadovaly skutečnost, ale nepředpokládalo se, že pohyb vozidel v modelech typu „Následuj vedoucí vozidlo“ závisí na rychlosti.

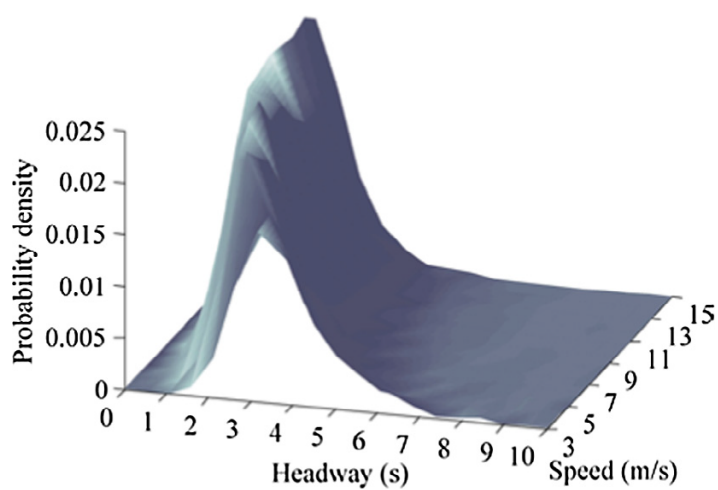
V 90. letech se zlepšila přesnost měření odstupů i monitorovací technika, a v důsledku toho se klíčové předpoklady pro distribuční modely výrazně změnilly. Bylo dokázáno, že distribuce odstupů jsou závislé na rychlosti, zejména pokud je dopravní proud hustý.

Vzhledem k těmto poznatkům se předpoklady změnilly následovně:

1. Vozidla mohou mít rozdílné rychlosti. Pokud je rychlost menší než v_F , rozdělení odstupů je závislé na rychlosti a interakce většiny vozidel není zanedbatelná.
2. Rozdělení odstupů uvnitř úseku není stejné jako rozdělení rychlostí vozidel vstupujících do daného úseku a obě veličiny se mění s prostorem a časem.

Na ilustrativním obrázku 1.1 lze vidět, že střední hodnota odstupu se s rostoucí rychlostí snižuje. Z toho vyplývá, že řidiči jsou v husté dopravě opatrnější a udržují si větší rozestupy.

V tabulce 1.1 jsou chronologicky seřazeny významnější distribuce používané pro odhadování odstupů vozidel. Jako první je uveden již zmíněný Adams, který položil základy pro obor VHM. V této práci se podrobněji podíváme na exponenciální, gamma a GIG rozdělení, přičemž funkce z třídy GIG budou z uvedené trojice pro tuto práci nejzásadnější.



Obrázek 1.1: Data získaná z NGSIM zpracovaná v článku *A Markov Model for Headway/Spacing Distribution of Road Traffic*, X. Chen, L. Li, Y. Zhang, [8].

rok	autor	rozdělení	příslušné hustoty
1936	Adams	Gaussovo	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
1936	Adams	exponenciální	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \lambda \geq 0$
1955	Schuhl	hyperexponenciální	[5]
1955	Gerlough	posunutá exponenciální	$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-K)} \quad x \geq K$
1966	Greenberg	posunutá log-normální	$f(x) = \frac{1}{(x-K)\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln(x-K)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \geq K$
1968	Dawson, Chimini	hyperlang	[5]
1968	Buckley	gamma	$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x-K}{\beta}} \quad x \geq K$
1975	Cowan	M3 rozdělení	[6]
1976	Branston	semi-poissonovské	[5]
1998	Hoogendoorn, Bovy	mixed-vehicle-type	[5]
2003	Krbálek, Helbing	superhyperbolické	$f(x) = A\theta(x)e^{-\frac{\beta}{x^\alpha}} e^{-\lambda x} \quad \alpha, \beta, \lambda > 0$
2007	Krbálek	GIG	$f(x) = A\theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} \quad A, \alpha, \beta, \lambda > 0$
2009	Yin	Log-logistické	$f(x) = \frac{e^{-(\ln x - \mu)/\sigma}}{\sigma(1 + e^{-(\ln x - \mu)/\sigma})^2} \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2}$
2012	Zou	bivariační	[10]
2017	Tang	multivariační t-skosené	[9]

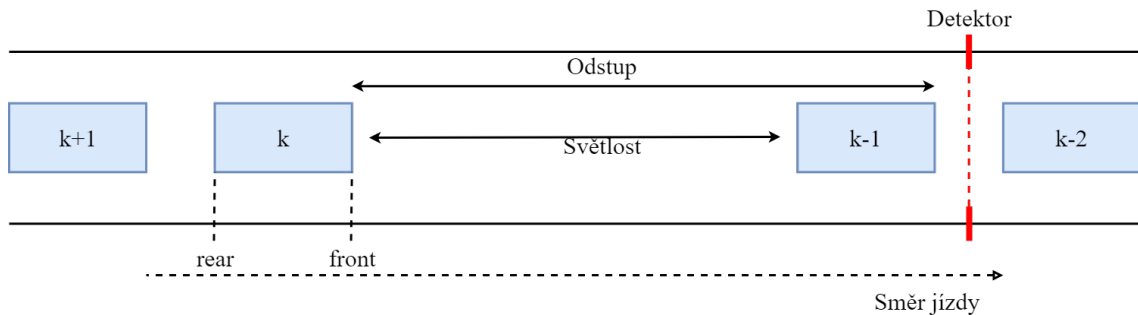
Tabulka 1.1: Chronologický přehled použitých distribucí, převzato z [5].

1.2 Základní veličiny VHM

V této sekci si zavedeme základní veličiny popisující dopravní provoz z pohledu statistického odhadování odstupů vozidel a uvedeme si vztahy propojující tyto veličiny.

1.2.1 Mikroveličiny

Na obrázku 1.2 modré obdélníky značí čtyři vozidla v systému k vozidel a černé šipky značí prostorové veličiny - odstup (*headway*) a světlost (*clearance*). Červeně je vyznačen detektor a jeho linie, šipka s přerušovanou čarou určuje směr jízdy. Polohu zadního nárazníku značíme *rear*, polohu předního *front*.



Obrázek 1.2: Znáornění odstupů a světlosti.

Prostorový odstup definujeme jako vzdálenost mezi totožnými komponenty vozidla, například vzdálenost mezi předními nárazníky po sobě jdoucích vozidel. *Prostorová světlost* je definována jako čistá vzdálenost mezi po sobě jedoucích vozidel, tedy vzdálenost od zadního nárazníku vedoucího vozidla a předního nárazníku následujícího vozidla.

Časový odstup a světlost jsou definovány obdobně. Časový odstup je doba začínající detekcí předního nárazníku vedoucího vozidla na detektoru (viz obr. 1.2) a končící detekcí předního nárazníku následujícího vozidla. Časová světlost je doba začínající detekcí zadního nárazníku vedoucího vozidla a končící detekcí předního nárazníku následujícího vozidla.

Symbolem $\xi_k^{(rear)}$, resp. $\xi_k^{(front)}$ značíme lokaci zadního resp. předního nárazníku k -tého vozidla a hodnoty prostorového odstupů s_k , resp. prostorové světlosti r_k definujeme vztahem

$$s_k = \xi_{k-1}^{(front)} - \xi_k^{(front)},$$

resp.

$$r_k = \xi_{k-1}^{(rear)} - \xi_k^{(front)}.$$

Symbolem $\tau_k^{(in)}$, resp. $\tau_k^{(out)}$ rozumíme čas, kdy přední resp. zadní nárazník k -tého vozidla protnul linii detektoru a hodnoty časového odstupů t_k , resp. časové světlosti z_k definujeme vztahem

$$t_k = \tau_k^{(in)} - \tau_{k-1}^{(in)},$$

resp.

$$z_k = \tau_k^{(in)} - \tau_{k-1}^{(out)}.$$

1.2.2 Makroveličiny

Stav dopravního systému plně určují tři základní veličiny - *dopravní hustota* $\varrho(\xi, \tau)$, *dopravní intenzita* $I(\xi, \tau)$ - někdy označovaná jako tok a *průměrná rychlost* dopravního proudění $V(\xi, \tau)$. Typickými jednotkami pro tyto veličiny jsou $\varrho[\frac{\text{vozidlo}}{\text{kilometr}}]$, $I[\frac{\text{vozidlo}}{\text{hodina}}]$ a $V[\frac{\text{kilometr}}{\text{hodina}}]$. Pro jejich korektní matematické zavedení je nutné nejprve zavést tzv. *vyhlazený počet částic* $N(\xi, \tau)$.

Uvažujme soubor m bezrozměrných vozidel (částic) jdoucích za sebou v jednom pruhu délky ξ . Vyhlazený počet částic je poté dán vztahem

$$N(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} \sum_{k=1}^m p(x - \alpha_k(\tau)) dx,$$

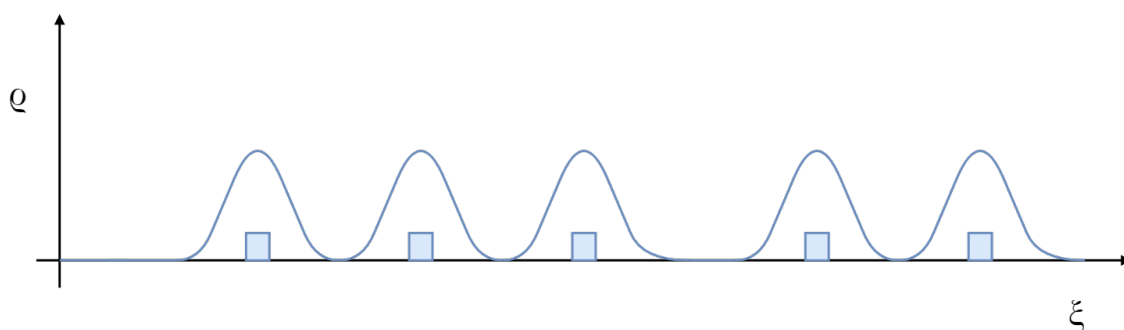
kde $\alpha_k(\tau)$ je poloha k -té částice v čase τ a hustota pravděpodobnosti $p(\xi)$ je jádrová funkce reprezentující „hustotu“ indukovanou jedním vozidlem. Nejčastějším zástupcem jádrové funkce je Gaussova funkce. Korektně zavedená intenzita provozu je

$$I = -\frac{\partial N(\xi, \tau)}{\partial \tau},$$

kde znaménko minus reprezentuje úbytek částic. Pokud I roste, v intervalu $(-\infty, x)$ totiž částic ubývá. Hustota provozu zavedená pomocí $N(\xi, \tau)$ je

$$\varrho(\xi, \tau) = \frac{\partial N(\xi, \tau)}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^m p(\xi - \alpha_k(\tau)).$$

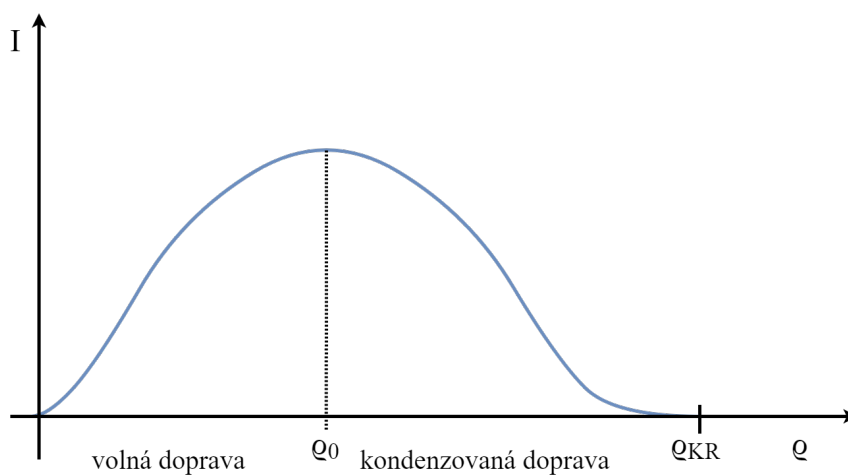
Jak si takto zavedenou hustotu představit můžeme vidět na obrázku 1.3, kde modré čtverečky znázorňují částice - bezrozměrná vozidla.



Obrázek 1.3: Znázornění dopravní hustoty zavedené pomocí vyhlazeného počtu částic.

1.3 Fundamentální diagram

K vizualizaci tří základních makroveličin (rychlost, hustota, intenzita) se používá tzv. fundamentální diagram, který ukazuje závislost intenzity toku na hustotě dopravy s konstantní rychlostí. Mezi starší náhledy na dopravní fáze se řadí dvoufázová teorie, která připouští existenci pouze dvou stavů, tedy volné a kondenzované dopravy. Na obrázku 1.4 můžeme vidět ilustrativní dvoufázový diagram.

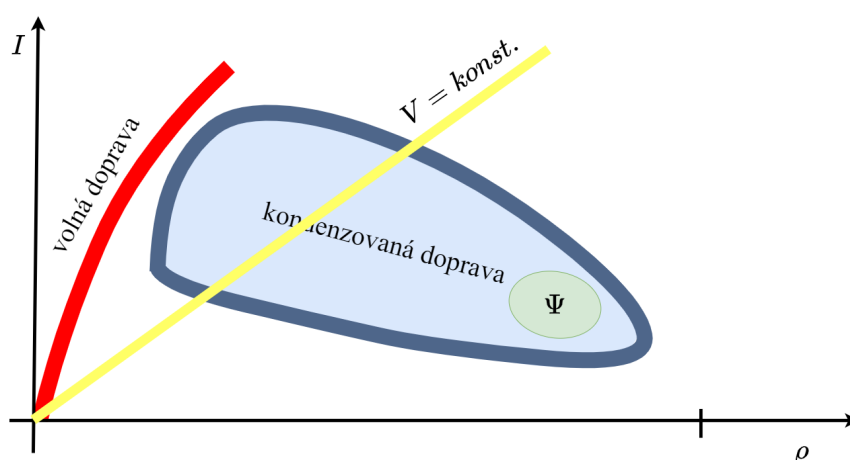


Obrázek 1.4: Starší náhled na dopravní fáze.

Pokud ve volné fázi hustota dopravy roste, roste i intenzita proudění, dokud hustota dopravy nepřekročí nějakou hodnotu hustoty Q_0 a z volné fáze přechází systém do kondenzované. V kondenzované fázi naopak platí, že pokud se hustota zvyšuje, intenzita proudění se snižuje, dokud hustota nevystoupá až na kritickou hodnotu Q_{KR} . Kritická hustota už je taková hustota, při které je intenzita nulová a žádné auto již neprojde. Tento náhled znázorněný na obrázku 1.4 se však ukázal příliš zjednodušující a schéma toho fundamentálního diagramu bylo nahrazeno schématem Kernerovy třífázové teorie [1].

Oproti dvoufázové teorii Kernerova teorie uvažuje existenci dvou podfází v kondenzované dopravě. Tyto podfáze jsou:

- *synchronizovaný tok* - rychlost vozidel se synchronizuje, ale pohyb vozidel není výrazně omezen. Vzniká například při lokálním zúžení silnice.
- *wide moving jam* (rozsáhlá pohybující se kongesce) - charakterizuje ji propagační rychlost kongesce, která je záporná a zachovává se i v případě, kdy je rychlost vybraného vozidla uvnitř kongesce nulová.

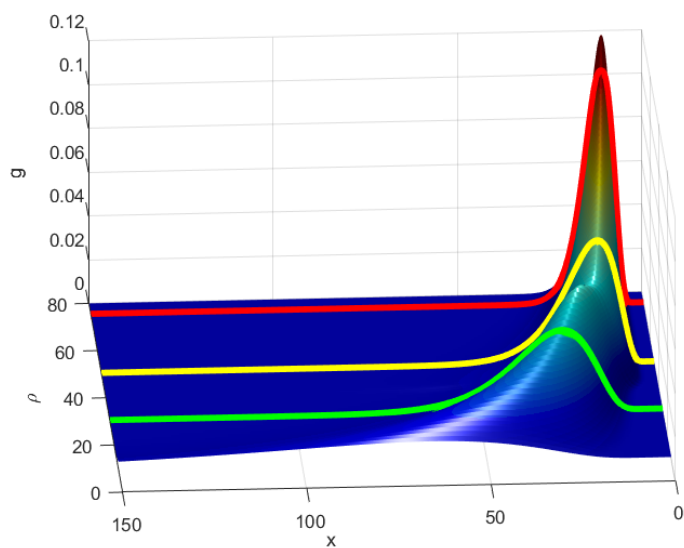


Obrázek 1.5: Schéma fundamentálního diagramu.

Na obrázku 1.5 si můžeme všimnout, že fundamentálním diagramem v Kernerově teorii již není křivka, ale relace. Kerner uvádí, že pokud uvažujeme synchronizovaný proud identických vozidel s identickými řidiči, ve kterém se pohybují s toutéž na čase nezávislou rychlostí (žlutě na obrázku 1.5) a vozidla mají mezi sebou stejné rozestupy, pak při konstantní rychlosti v kondenzované dopravě je množina přípustných stavů daných dvojicí intenzita-hustota nekonečná. To znamená, že v kondenzované dopravě neudrží řidič nějaký specifický rozstup a z pohledu prostorové světlosti má libovolnou možnost volby. Stav provozu pro stejnou rychlost tedy tvoří dvojrozměrnou oblast.

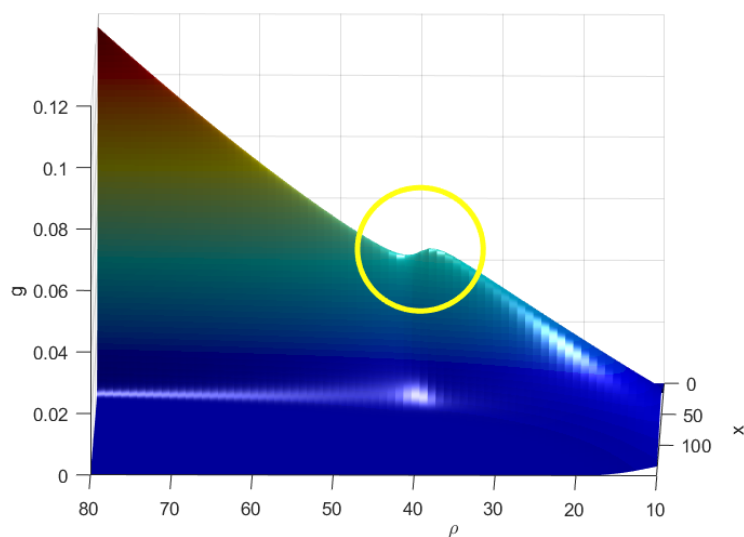
1.4 3D graf headway distribuce

Na obrázku 1.6 vidíme graf headway distribuce (tj. pravděpodobnostního rozdělení rozstupů vozidel) závislý na velikosti odstavu a hustotě provozu. Pro nižší hodnoty hustoty má rozdělení odstupů větší rozptyl, jelikož řidiči mají dostatek prostoru a mezi vozidly mohou být i větší rozestupy. S rostoucí hustotou se rozptyl odstupů snižuje a kolem střední hodnoty se sdružuje více a více hodnot odstupů. Střední hodnota odstupů se se zvyšující hustotou snižuje, to je dobře vidět na obrázku 1.6, kde střední hodnota graficky přibližně odpovídá vrcholům vyobrazené plochy. Tato plocha je vykreslená na základě normovaných (nikoli škálovaných) reálných dopravních dat a zvýrazněné křivky jsou hustoty pravděpodobnosti odstupů při hustotě provozu 30 (zeleně), 50 (žlutě) a 75 (červeně).



Obrázek 1.6: Graf headway distribuce.

Na obrázku 1.7 ve vyznačené kružnici (jindy stále rostoucí) střední hodnota klesne. Jedná se o přechod z volné do kondenzované dopravní fáze. Hustota provozu je taková, že řidiči musí zpomalit, ale mají ještě dostatek prostoru na vlastní volbu velikosti odstupů. V tomto přechodu rozptyl roste. Po dalším růstu hustoty už rozptyl pouze klesá.



Obrázek 1.7: Přechod z volné do kondenzované fáze.

Kapitola 2

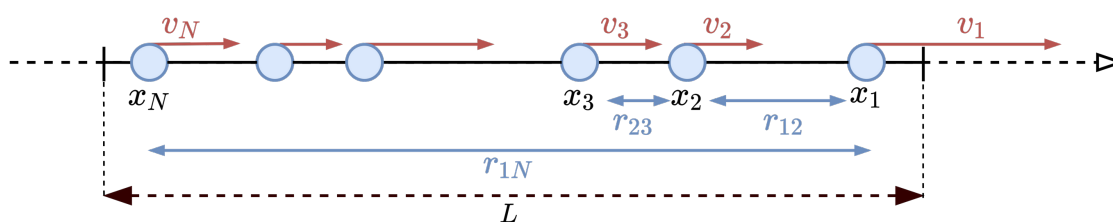
Model termodynamického plynu

Model dopravního termodynamického plynu je model využívající mikroskopické veličiny dopravního systému a jeho snahou je získat matematické předpovědi pro statistická rozdělení mikroskopických veličin, jako jsou například okamžité rychlosti či prostorové a časové rozestupy. Aby bylo možné takový model formulovat, je třeba na tyto dopravní veličiny nahlížet jako na náhodné veličiny, které jsou popsány příslušnými hustotami pravděpodobnosti a distribučními funkcemi.

Uvedeme si nejjednodušší model dopravního toku, a to částicový plyn o N částicích pohybujících se na jednodimenzionální křivce ve dvoudimenzionálním prostoru. V praxi si to můžeme představit jako jednosměrnou komunikaci o jednom pruhu bez křižovatek, výjezdů či vjezdů, kde se vozidla nemohou vzájemně předjíždět. Pro zavedení tohoto modelu uvažujeme pevný počet částic N , částice jsou seřazeny podle polohy a nemají možnost měnit pořadí. Sledovaný úsek uvažujeme jako úsečku délky L . Pro vstup resp. výstup ze sledovaného úseku zavedeme periodicitu okrajových podmínek následovně:

$$x_{k+N}(\tau) = x_k(\tau) + L, \quad v_{k+N}(\tau) = v_k(\tau), \quad k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

kde $x_k(\tau)$ značí lokaci k -té částice v čase τ a $v_k(\tau)$ značí okamžitou rychlost k -té částice v čase τ .



Obrázek 2.1: Částicový plyn na úsečce délky L .

Na obrázku 2.1 máme znázorněné různé vzdálenosti r_{ik} , nazveme je rozestupy. Indexováním i, k rozumíme vzdálenost mezi i -tou a k -tou částicí, tedy

$$r_{ik} = |x_k - x_i|,$$

kde $i, k \in \hat{N}$.

2.1 Interakční síly a jejich specifikace

Částice na sebe vzájemně reagují a, aby nedošlo ke kolizi, působí mezi nimi *repulzivní síly*. Tyto síly mají simulovat běžné dopravní interakce, kdy se řidič bržděním snaží zamezit srážce s vozidlem před ním. Tato síla je závislá na vzdálenosti po sobě jedoucích vozidel, a tedy čím blíže jsou, tím je síla větší a s rostoucí vzdáleností tato síla výrazně slábne. Abychom zajistili bezkoliznost systému, odpudivá síla $F(r)$, kde r je vzdálenost, má vlastnost $\lim_{r \rightarrow 0_+} F(r) = +\infty$. Naopak vymizení interakce pro velké vzdálenosti je zajištěno vlastností $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = 0$. Dle druhé vlastnosti se silový popis dělí na interakce

- s neomezeným nosičem, kde $\text{supp}(F) = (0, +\infty)$,
- s omezeným nosičem, kde $\text{supp}(F)$ je omezená množina.

V druhém případě existuje nějaké $K > 0$ tak, že pro $r > K$ je příslušná síla nulová, tedy $F(r) = 0$. Hyperbolická třída funkcí vyhovuje požadavkům pro výše uvedený silový popis. Jedná se o třídu funkcí

$$F(r) = \frac{1}{r^\gamma},$$

kde $\gamma \in (0, +\infty)$. K silovému popisu si ještě uvedeme odpovídající silový potenciál $\varphi(r)$, pro který v jednodimenzionálních prostorech platí

$$F(r) = \frac{d\varphi}{dr} \Leftrightarrow \varphi = - \int_0^r F(s) ds + C.$$

Tyto potenciály pro různá $\gamma \in (0, +\infty)$ si ukážeme v tabulce níže.

Název potenciálu	γ	$\varphi(r)$
mocninný potenciál	$(0, 1)$	$\frac{1}{\gamma-1} r^{1-\gamma}$
logaritmický potenciál	1	$-\ln(r)$
subhyperbolický potenciál	$(1, 2)$	$\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$
(vyvážený) hyperbolický potenciál	2	$\frac{1}{r}$
superhyperbolický potenciál	> 2	$\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$

Potenciály se dále dělí dle dosahovosti interakčních sil. Doteď jsme uvažovali pouze vzájemné působení dvou vybraných vozidel, jejichž vzdálenost je r . Je ale třeba vzít v potaz, že řidič neinteraguje pouze s jedním vozidlem, ale jeho rozhodování na vozovce ovlivňují i další vozidla. Označíme si symbolem I_k množinu indexů částic (řidičů), se kterými k -tý řidič interaguje. Mějme systém o N částicích, pak potenciály dle dosahu se dělí následovně:

- *Dlouhodobý potenciál*
 $I_k = \{1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N\}$ a k -tá částice interaguje se všemi částicemi v systému.

- *Krátkodosahový potenciál*
 $I_k = \{k - 1, k + 1\}$ a k -tá částice interaguje jen s předchozí a následující částicí.
- *Lokálně dosahový potenciál*
 $I_k = \{i \in \hat{N} : x_i \in \mathcal{U}_\epsilon^*(x_k)\}$, kde $\mathcal{U}_\epsilon^*(x_k)$ je redukované okolí bodu x_k při zvoleném $\epsilon > 0$. k -tá částice tedy interaguje pouze s částicemi, které se nachází v jejím okolí o poloměru ϵ .
- *Středně dosahový potenciál*
 $I_k = \{k - m, k + m : m \in \hat{s}\}$, kde s je přirozené číslo určující délku dosahu a platí $1 < s \ll N$. k -tá částice interaguje s nejbližšími sousedy až po $k - s$ -tou resp. $k + s$ -tou částicí včetně.

2.2 Celková energie souboru částic

Potenciál k -té částice má hodnotu $\varphi_k = \sum_{i \in I_k} \varphi_{ki}(r_{ik})$, kde $\varphi_{ki}(r_{ik})$ je potenciál popisující interakci mezi i -tou a k -tou částicí. V heterogenních systémech jsou potenciály voleny různě v závislosti na dvojici (i, k) . V homogenních systémech jsou potenciály mezi všemi částicemi stejné a tedy jednotlivé síly nezávisí na indexaci a potenciál $\varphi_{ki}(r)$ můžeme používat bez indexace, tedy $\varphi_{ki}(r) = \varphi(r)$. Celková potenciální energie souboru částic nabývá hodnoty

$$U = \sum_{k=1}^N \varphi_k = \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi_{ki}(r_{ik}).$$

V dopravních systémech neuvažujeme pro klidový stav souboru nulovou rychlost všech elementů, avšak klidový stav si definujeme jako stav, kdy všechny částice mají svou vlastní optimální rychlost w_k . V takovém případě je kinetická energie nulová a pro takový systém definujeme kinetickou energii jako

$$T = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} (v_k - w_k)^2,$$

kde m_k značí hmotnost k -té částice. Celková energie (hamiltonián) je tvaru

$$H = T + U = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} (v_k - w_k)^2 + \sum_{k=1}^N \sum_{i \in I_k} \varphi_{ki}(r_{ik}).$$

Homogenním systémem rozumíme systém, který splňuje:

- Hmotnosti všech částic jsou stejné a bez újmy na obecnosti můžeme tuto hmotnost volit jednotkovou.
- Všechny částice mají stejnou optimální rychlost, tedy $\forall k \in \hat{N} : w_k = w$.
- Všechny dvoutělesové potenciály jsou stejného tvaru a pro všechny dvojice (k, i) , kde $k, i \in \hat{N}$, platí $\varphi_{ki}(r) = \varphi(r)$.

Systémy nesplňující výše uvedené body považujeme za *heterogenní*.

Pokud budeme uvažovat homogenní, krátkodosahový systém, pak se celková energie (nebo-li hamiltonián) H zjednoduší do tvaru

$$H = H(\vec{v}, \vec{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (v_k - w)^2 + \sum_{k=1}^N \varphi(r_k).$$

2.3 Stacionární stavy

Stacionárním stavem systému nazveme stav, kdy se celková energie systému ustálí na konstantní hodnotě a dále na této hodnotě setrvává. V *deterministickém systému* při znalosti počátečního nastavení, tj. lokace částic v čase $\tau = 0$, můžeme analyticky vyřešit otázky dalšího vývoje systému například otázky na polohu či okamžitou rychlost v čase $\tau > 0$. Tento koncept má nepravděpodobnostní povahu, tím pádem všechny naše předpovědi platí se stoprocentní jistotou. Stacionárním stavem v tomto případě označíme stav, ve kterém se ustálí na konstantní hodnotě rychlosti vozidel i jejich rozestupy a dále se v čase již nemění. Tím pádem i celková energie je ustálena.

Ve *stochastickém systému* již není možné analyticky určovat předpovědi se stoprocentní jistotou, ale vývoj systému a jejich veličin lze předpovídat jen s určitou pravděpodobností. Z toho vyplývá, že i stacionární stav bude popsán hustotami pravděpodobnosti např. pro rychlosti vozidel nebo jejich rozestupy. Pro takový popis využijeme sdruženou hustotu pravděpodobnosti vektoru rychlostí a rozestupů závislých na čase, tedy

$$P(\vec{v}, \vec{r}) = P(v_1(\tau), v_2(\tau), \dots, v_N(\tau), r_1(\tau), r_2(\tau), \dots, r_N(\tau)).$$

Za stacionární stav lze považovat stav, kdy změna hustoty pravděpodobnosti $P(\vec{v}, \vec{r})$ v čase τ je nulová.

2.4 Model termodynamického plynu

Pro popis dopravních systémů můžeme použít částicový model termodynamického plynu, který využívá postupy fyziky termodynamických systémů. Uvažujme teplotní rezervoár (lázeň) o termodynamické teplotě T , ve kterém se neuspořádaně pohybují částice. Pokud do tohoto rezervoáru vložíme výše diskutovaný soubor částic, budou částice rezervoáru interagovat s naším souborem prostřednictvím náhodných srážek. Uspořádanost deterministického systému může být narušována a systém se tak může stát stochastickým, přičemž míra náhodnosti je závislá na teplotě lázně T . Pokud by teplota lázně byla nulová, uspořádanost se nemění a uspořádání zůstává deterministické. Jestliže teplota T narůstá nade všechny meze, pak míra náhodnosti je maximální. V teorii dopravy se namísto termodynamické teploty T užívá veličina zvaná *stochastická rezistivita*, která určuje odolnost systému vůči stochastickým perturbacím, tedy vůči vlivům teplotní lázně. Tuto veličinu značíme symbolem β a je s teplotou T propojena vztahem

$$\beta = \frac{1}{K_B T},$$

kde K_B je Boltzmannova konstanta. V závislosti na hodnotě stochastické rezistivity si uvedeme tři stavy:

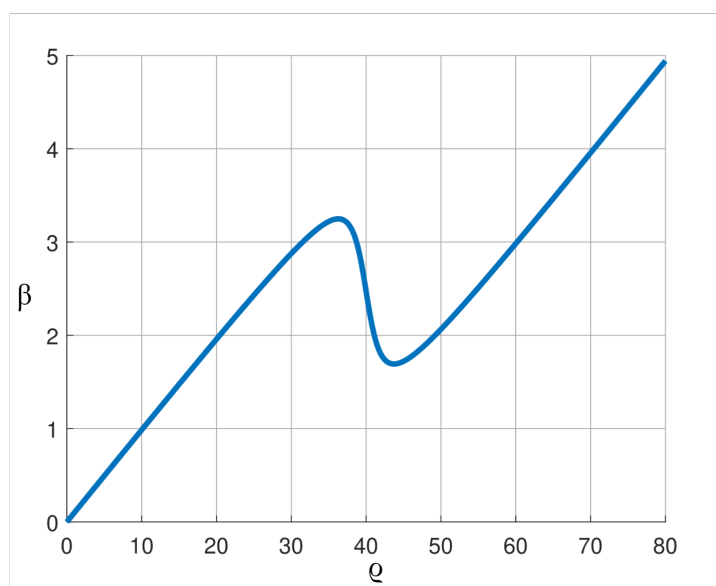
- *Poissonovské stavy*
Míra fluktuace náhodných veličin je maximální a $\beta = 0$.
- *Subpoissonovské stavy*
Hodnota míry fluktuace je větší než nulová, $\beta > 0$.
- *Deterministické stavy*
Míra fluktuací je nulová a $\beta \rightarrow +\infty$.

Stochastická rezistivita

V dopravních modelech označuje β rezistivitu, která vyjadřuje odolnost systému vůči stochastickému šumu a je závislá na hustotě provozu, tedy $\beta = \beta(\rho)$. Abychom si mohli lépe představit, co stochastická rezistivita ve skutečnosti popisuje, podíváme se na dva krajní případy.

- Při nízké hustotě provozu řidič není prakticky ovlivněn chováním řidičů v jeho okolí. Odstupy od ostatních vozidel jsou dostatečně velké na to, aby řidič mohl jet libovolnou rychlostí, a tak je systém výrazně ovlivněn stochastickým šumem, kdy odolnost vůči šumu je velmi nízká a v krajním hypotetickém případě se β rovná nule.
- Při vysoké hustotě provozu je pohyb vozidla silně ovlivněn okolními vozidly. Řidič už nemá tolik prostoru k tomu, aby se sám rozhodl jakou pojede rychlostí a jaký si dá odstup. Pohyb vozidel se do jisté míry synchronizuje, stochastický vliv je v tuto chvíli velmi nízký a odolnost vůči šumu vysoká, v krajním hypotetickém případě tedy $\beta \rightarrow +\infty$.

Z tohoto základního popisu se může zdát, že s rostoucí hustotou rezistivita pouze stoupá, avšak v přechodu mezi volnou a kondenzovanou dopravou rezistivita dočasně klesne. Při houstnoucí dopravě vozidla zpomalují a v určité chvíli má řidič relativně nízkou rychlost, ale dostatečně velké odstupy. V této chvíli má větší prostor k tomu se rozhodnout, jak pojede a rezistivita klesá. Následným zhuštěním dopravy se odstupy zmenší a řidič musí více reagovat na okolní vozidla. Rezistivita v této fázi opět stoupá.



Obrázek 2.2: Symbolické znázornění empirické závislosti mezi rezistivitou β a hustotou provozu ρ .

Nás bude nejvíce zajímat model homogenního plynu s krátkodosahovým potenciálem. Rozdělení roztečí mezi jednotlivými částicemi ve stacionárním stavu v tomto modelu dobře odpovídá rozdělení světlostí v empirických datech. V závislosti na konkrétní volbě potenciálu je pak takový částicový systém určen funkcí z třídy balancovaných hustot, která je podrobněji rozebrána v následující kapitole.

Kapitola 3

Třída balancovaných hustot

Pro statistické odhadování odstupů vozidel se ukázala jako velmi výhodná třída balancovaných hustot, jelikož hustoty z této třídy dobře popisují reálná data a některé z těchto funkcí splňují i všechny empirické předpoklady, jako je třeba existence tzv. *plató* v nule nebo exponenciální pokles chvostu.

3.1 Vlastnosti balancovaných hustot

Pro přehlednost si nejprve uvedeme stručný soupis používaných symbolů.

symbol	název
$\mathcal{L}(\mathbb{R})$	třída integrabilních funkcí na \mathbb{R}
$\text{PC}(\mathbb{R})$	třída po částech spojitých funkcí na \mathbb{R}
\mathcal{B}	třída balancovaných hustot
$\theta(x)$	Heavisideova funkce
$\mathcal{L}[f(x)]$	Laplaceův obraz funkce $f(x)$

Definice 3.1.1.

Řekneme, že funkce $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ patří do \mathcal{B} , pokud splňuje následující axiomy pro příslušnost do \mathcal{B} :

1. $\text{Ran}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$
2. $g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$
3. $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$
4. $g(x) \in \text{PC}(\mathbb{R})$
5. $\text{supp}(g) \subset \langle 0, +\infty \rangle$
6. balanční axiom: $\exists \kappa \in \mathbb{R}^+$
 $\alpha > \kappa \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = +\infty,$
 $\alpha < \kappa \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = 0.$

V této kapitole se budeme často setkávat s momenty funkcí, proto si je pro balancované hustoty definujeme.

Definice 3.1.2 (Moment hustoty).

Nechť $g(x) \in \mathcal{B}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Pokud $x^n g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, pak číslo

$$\mu_n(g) = \int_{\mathbb{R}} x^n g(x) dx$$

nazveme n -tým (necentrálním) momentem $g(x)$.

POZNÁMKA 3.1.1. Takové κ z balančního axiomu nazýváme balančním indexem, značíme $\text{inb}(g) = \kappa$. Pokud $\mu_0(g) = 1$, pak řekneme, že $g(x)$ je balancovaná hustota pravděpodobnosti a označíme $g(x) \in \mathcal{B}_1$. Pokud $\mu_0(g) = \mu_1(g) = 1$, pak řekneme, že $g(x)$ je škálovaná hustota pravděpodobnosti a označíme $g(x) \in \mathcal{B}_{11}$.

Z 6. balančního axiomu navíc vyplývá nutná podmínka pro příslušnost do \mathcal{B} .

Důsledek 3.1.1 (Nutná podmínka pro příslušnost do \mathcal{B}).

$$g(x) \in \mathcal{B} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Důkaz.

Z balančního axiomu víme, že existuje κ kladné, tak že pokud zvolíme $\alpha < \kappa$, pak

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)e^{\alpha x} = 0.$$

Pro volbu $\alpha = 0$ dostávám požadovanou rovnost, a tedy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

□

Z 6. axiomu dále víme, že pro funkce z \mathcal{B} balanční index existuje a jeho hodnotu lze vždy najít díky balančnímu kritériu

Věta 3.1.1 (Balanční kritérium).

Výroky, $g(x)$ splňuje balanční axiom a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(x)}{x} \in (-\infty, 0)$, jsou ekvivalentní, přičemž

$$\text{inb}(g) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(x)}{x}. \quad (3.1)$$

POZNÁMKA 3.1.2. Pokud je funkce $g(x)$ z balančního kritéria diferencovatelná, můžeme na limitu (3.1) použít l'Hospitalovo pravidlo a získáme vzorec pro výpočet balančního indexu ve tvaru

$$\text{inb}(g) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Věta 3.1.2 (O rozsáhlosti soustavy \mathcal{B}).

Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{B}$ a $A > 0, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, c > 0$. Pak platí:

1. $f(x) + \alpha g(x) \in \mathcal{B}$,
2. $x^\alpha f(x) \in \mathcal{B}$,
3. $e^{\beta x} f(x) \in \mathcal{B}$, je-li $\beta < \text{inb}(f)$,
4. $Af(cx) \in \mathcal{B}$.

A navíc platí:

1. $\text{inb}(\alpha g) = \text{inb}(g) \wedge \text{inb}(f + g) = \min \{\text{inb}(f), \text{inb}(g)\}$,
2. $\text{inb}(x^\alpha f(x)) = \text{inb}(f)$,
3. $\text{inb}(e^{\beta x} f(x)) = \text{inb}(f) - \beta$,
4. $\text{inb}(Af(cx)) = c \cdot \text{inb}(f)$.

Z 2. bodu věty o rozsáhlosti soustavy \mathcal{B} a 2. axiomu pro příslušnost do \mathcal{B} , tedy o integrabilitě funkcí z \mathcal{B} plyne:

Důsledek 3.1.2.

Všechny momenty libovolné balancované hustoty $f(x)$ existují a jsou konečné, tedy

$$(\forall f(x) \in \mathcal{B}) (\forall k \in \mathbb{N}) \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Tyto momenty můžeme seskupit do tzv. momentového kódu

Definice 3.1.3 (Momentový kód).

Nechť $f(x) \in \mathcal{B}$, pak posloupnost $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ vytvořenou z momentů hustoty $f(x)$ nazveme momentovým kódem hustoty $f(x)$.

Věta 3.1.3 (Nutná podmínka pro momentový kód balancované hustoty).

Je-li $(\mu_k)_{k=0}^{+\infty}$ momentový kód balancované hustoty $g(x)$, pak pro všechny $\delta \in (-\varkappa, \varkappa)$, kde $\varkappa = \text{inb}(g)$, platí

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mu_k}{k!} \delta^k = 0.$$

Důkaz.

Důkaz provedeme tak, že dokážeme konvergenci řady

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu_k}{k!} \delta^k \quad \forall \delta \in (-\varkappa, \varkappa). \quad (3.2)$$

Rozepíšeme si k -tý moment dle definice

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mu_k}{k!} \delta^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) dx$$

a provedeme záměnu sumy a integrálu, kde její korektnost ověříme pomocí integrabilní majoranty

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta^k}{k!} x^k g(x) dx. \quad (3.3)$$

Jelikož $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k \delta^k}{k!}$ jsou kladné členy rozvoje $e^{\delta x}$, omezíme sumu

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta^k}{k!} x^k g(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{\delta x} g(x) dx.$$

Pokud dokážeme, že integrál výše konverguje, máme dokázanou i konvergenci řady (3.2). Jelikož $\delta \in (-\varkappa, \varkappa)$ a funkce $g(x) \in \mathcal{B}$, můžeme využít věty o rozsáhlosti soustavy \mathcal{B} . Tím pádem funkce $g(x)e^{\delta x}$, kterou si označíme jako $h(x)$, je také funkcí z \mathcal{B} pro libovolné $\delta \in (-\varkappa, \varkappa)$. Pak integrál

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\delta x} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h(x) dx$$

z definice balančních hustot konverguje. Tím pádem je nalezena integrabilní majoranta požadovaná v rovnosti (3.3) a řada (3.2) konverguje. Z nutné podmínky pro konvergenci číselné řady dostáváme požadované tvrzení

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mu_k}{k!} \delta^k = 0, \forall \delta \in (-\varkappa, \varkappa).$$

□

Důležitá vlastnost pro tzv. multirozteče při zavádění balančního částicového systému je konvoluce funkcí z \mathcal{B} .

Věta 3.1.4 (Konvoluce funkcí z \mathcal{B}).

Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{B}$ a $\text{inb}(f) = \omega_1 \wedge \text{inb}(g) = \omega_2$, potom $(f * g)(x) \in \mathcal{B}$ a $\text{inb}(f * g) = \min\{\omega_1, \omega_2\}$.

Nyní se přesuneme k vlastnostem Laplaceovy transformace balancované hustoty.

Laplaceova transformace

Obraz Laplaceovy transformace funkce $f(x) \in \mathcal{B}$ si označíme symbolem $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$, tedy

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-sx} dx. \quad (3.4)$$

To, zda integrál v rovnosti (3.4) konverguje, závisí na s . Pro takovou funkci $f(x)$ konverguje pro libovolné $s \geq 0$ a patří do $\text{Dom}(F)$.

Věta 3.1.5 (Pomocná věta pro Laplaceovu transformaci).

$$g(x) \in \mathcal{B} \wedge \text{inb}(g) = \varkappa \Rightarrow \forall \mu < \varkappa : g(x)e^{\mu x} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

Důkaz.

Přímo vyplývá z 3. bodu věty 3.1.2 □

POZNÁMKA 3.1.3. Pokud do integrálu (3.4) za s dosadíme $-\mu$, tak do $\text{Dom}(F)$ budou podle věty 3.1.5 patřit všechna $\mu < \varkappa = \text{inb}(f)$. To znamená, že integrál (3.4) konverguje i pro jistá $s < 0$.

O definičním oboru Laplaceovy transformace víme, že $\langle 0, +\infty \rangle \subset \text{Dom}(F)$ a zároveň platí, že $(-\varkappa, +\infty) \subset \text{Dom}(F)$. Z toho plyne, že existuje $\delta > 0$ taková, že i okolí $U_\delta(0)$ je podmnožinou $\text{Dom}(F)$.

Důsledek 3.1.3.

Definičním oborem $F(s)$ je interval $(-\text{inb}(f), +\infty)$. Z toho vyplývá, že \varkappa -okolí bodu nula $U_\varkappa(0)$ je podmnožinou $\text{Dom}(F(s))$.

Věta 3.1.6 (Vlastnosti $F(s)$).

Je-li $f(x) \in \mathcal{B}$, pak $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ je spojitá na $(-\omega, +\infty)$, kde $\omega = \text{inb}(f)$ a pro $F(s)$ platí:

1. $F(s) \in C^\infty(\text{Dom}(F))$,
2. $F(s)$ nezáporná na $\text{Dom}(F)$,
3. $F(s)$ je klesající na $\text{Dom}(F)$, tedy $\forall s \in \text{Dom}(F) : F'(s) < 0$,
4. $F(0) = \mu_0$,
5. $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$,
6. $F(s)$ je omezená na $\langle 0, +\infty \rangle$.

Věta 3.1.7 (O analytičnosti $G(s)$ v nule).

Nechť $g(x) \in \mathcal{B}$, $G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$. Pak $G(s)$ je analytická v bodě $s = 0$ a pro její Taylorovy koeficienty platí rovnost $a_k = \frac{(-1)^k \mu_k}{k!}$ ($\forall k \in \mathbb{N}$).

Důkaz.

Funkce $g(x)$ je analytická v bodě x_0 , pokud platí

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1}(x) = 0,$$

kde $R_{n+1}(x)$ je Lagrangeův zbytek. V tomto případě budeme ověřovat konvergenci Lagrangeova zbytku funkce $G(s)$ v bodě $s_0 = 0$. Ten je tvaru

$$R_{n+1}(s) = \frac{G^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (s - s_0)^{n+1} = \frac{G^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} s^{n+1},$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a ξ je nějaké číslo mezi s a s_0 . Abychom mohli určit tvar Lagrangeova zbytku, musíme funkci $G(s) = \int_0^{+\infty} g(x)e^{-sx} dx$ zderivovat. Tím dostáváme

$$G^{(n+1)}(s) = \int_0^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{n+1} g(x) e^{-sx} dx \tag{3.5}$$

Uvažujme

$$0 < \xi < \text{inb}(g),$$

a ukážeme, že Lagrangeův zbytek konverguje k nule

$$|R_{n+1}(s)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} s^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} x^{n+1} g(x) e^{-\xi x} dx \right|.$$

Nyní můžeme nahradit $g(x)e^{-\xi x}$ za nějakou jinou funkci z \mathcal{B} . Máme naplněné předpoklady věty o rozsáhlosti 3.1.2 a díky 3. bodu této věty víme, že $g(x)e^{-\xi x}$ je taky nějaká funkce z \mathcal{B} , označíme jako $h(x) \in \mathcal{B}$. Pro balanční index takové funkce $h(x)$ dle věty o rozsáhlosti platí $\text{inb}(h) = \text{inb}(g) + \xi$. Spolu se členem $(-1)^{n+1}$ odstraníme i absolutní hodnotu a dostaneme

$$|R_{n+1}(s)| = \left| \frac{(-1)^{n+1} s^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} x^{n+1} g(x) e^{-\xi x} dx \right| = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} x^{n+1} h(x) dx.$$

Tentokrát se podíváme na 2. bod věty o rozsáhlosti, který nám říká, že i funkce $x^{n+1}h(x)$ je balancovanou hustotou a pro všechny balancované hustoty platí, že jsou integrabilní. Tím máme splněny všechny předpoklady definice 3.1.2 a integrál $\int_0^{+\infty} x^{n+1} h(x) dx$ se rovná $n+1$ momentu hustoty $h(x)$. Tím pádem

$$\frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^{+\infty} x^{n+1} h(x) dx = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \mu_{n+1}(h),$$

což je vlastně nutná podmínka pro momentový kód balancované hustoty a pro všechny $s \in (-\text{inb}(h), \text{inb}(h))$ platí

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu_{n+1}(h)}{(n+1)!} s^{n+1} = 0.$$

Tím jsme dokázali konvergenci Lagrangeova zbytku k nule pro všechna $s \in (-\text{inb}(h), \text{inb}(h))$, tedy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n+1}(s) = 0, \forall s \in (-\text{inb}(g) - \xi, \text{inb}(g) + \xi).$$

□

Z předchozí věty 3.1.7 vyplývá existence MacLaurinovy řady funkce $G(s)$ a z důkazu této věty víme o poloměru konvergence R , že musí platit $R \geq \text{inb}(g)$ a zároveň z $\text{Dom}(G)$ víme, že $R \leq \text{inb}(g)$. Z toho vyplývá, že poloměr konvergence příslušné řady je roven balančnímu indexu, tedy $R = \text{inb}(g)$. V rovnosti (3.5) jsme již derivovali $G(s)$ a pro k -tou derivaci po dosazení $s = 0$ zjistíme, že $G^{(k)}(0) = (-1)^k \mu_k(g)$ a MacLaurinova řada distribuční funkce $G(s)$ je

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mu_k(g)}{k!} s^k.$$

Díky tomuto poznatku můžeme z momentového kódu restaurovat původní hustotu $g(x)$, a to jednoznačně až na množinu nulové míry.

3.2 Zástupci třídy \mathcal{B}

V nadcházející sekci budeme hojně využívat tzv. Heavisideovu funkci $\theta(x)$, která je definována předpisem

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0. \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Mezi nejpoužívanější zástupce třídy \mathcal{B} patří například exponenciální, gamma nebo zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení nebo-li *GIG (Generalized Inverse Gaussian)*. Na tyto funkce se podíváme blíže a zaměříme se na jejich normování a škálování.

3.2.1 Exponenciální rozdělení

Pro statistické odhadování odstupů vozidel bylo exponenciální rozdělení použito jako jedno z prvních. Toto rozdělení se používá v Poissonovském částicovém systému, ve kterém mezi sebou jednotlivé částice neinteragují.

Obecný předpis exponenciálního rozdělení je následující

$$g_E(x) = \theta(x)Ae^{-\lambda x},$$

kde $A > 0, \lambda > 0$.

Škálování

Aby libovolná balancovaná hustota $g(x)$ byla normalizovaná, musí být její nultý moment roven jedné. Aby byla $g(x)$ škálovaná, musí být navíc i její první moment roven jedné, tj.

$$g_E(x) \in \mathcal{B}_{11} \Leftrightarrow \mu_0(g_E) = \mu_1(g_E) = 1,$$

kde symbolem \mathcal{B}_{11} rozumíme třídu škálovaných balančních hustot. Budeme hledat hodnoty konstant λ a A takové, aby $g_E(x)$ splňovala výše uvedenou podmínku. Nejprve normalizujeme g_E , tj. vypočteme nultý moment

$$\mu_0(g_E) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)Ae^{-\lambda x} dx = A \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{A}{\lambda}.$$

Požadujeme, aby nultý moment byl roven jedné, tj. aby

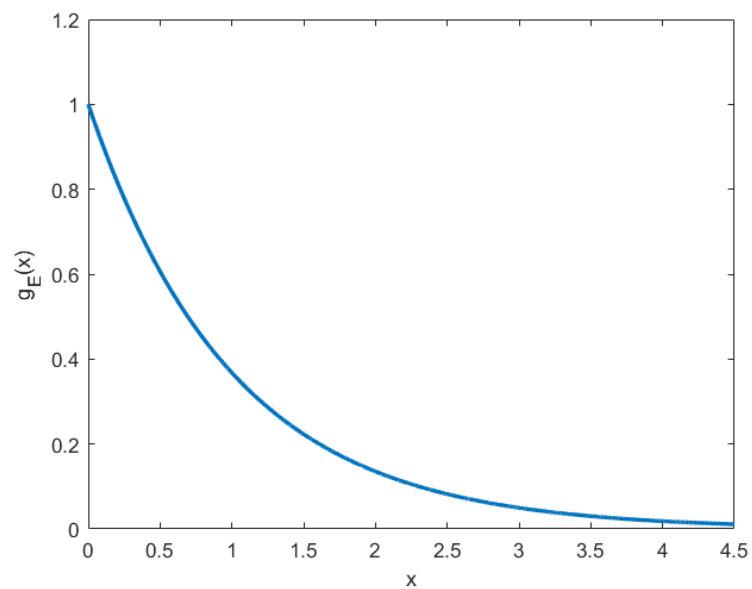
$$\mu_0(g_E) = \frac{A}{\lambda} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow A = \lambda.$$

Analogicky postupujeme i u prvního momentu, kdy

$$\begin{aligned} \mu_1(g_E) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\lambda x e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \stackrel{p.p.}{=} \left. \begin{array}{l} u = x \\ u' = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} v' = e^{-\lambda x} \\ v = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \end{array} \\ &= \lambda \left(\left[\frac{x e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \right) = \frac{1}{\lambda} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \lambda = 1. \end{aligned}$$

Pro splnění podmínky $\mu_0 = \mu_1 = 1$ musí být tedy konstanty A, λ rovny jedné. Škálovaná verze exponenciálního rozdělení má tvar

$$g_E(x) = \theta(x)e^{-x} \in \mathcal{B}_{11}.$$



Obrázek 3.1: Tvar škálovaného exponenciálního rozdělení.

Rozptyl

Pro rozptyl náhodné veličiny X s exponenciálním rozdělením platí, že

$$\text{Var}(X) = \mu_2(g_E) - \mu_1^2(g_E).$$

První moment $\mu_1 = 1$ známe, tudíž dopočteme ještě druhý moment škálované g_E ze vztahu

$$\begin{aligned} \mu_2(g_E) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x)x^2 e^{-x} dx \stackrel{p.p.}{=} \left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ u' = 2x \end{array} \right| \begin{array}{l} v' = e^{-x} \\ v = -e^{-x} \end{array} = [-x^2 e^{-x}]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \stackrel{p.p.}{=} \\ &\stackrel{p.p.}{=} \left. \begin{array}{l} u = x \\ u' = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} v' = e^{-x} \\ v = -e^{-x} \end{array} = 2 \left([-x e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right) = 2. \end{aligned}$$

Nyní máme vše potřebné a jen dosadíme. Odtud

$$\text{Var}(X) = \mu_2(g_E) - \mu_1^2(g_E) = 1.$$

3.2.2 Gamma rozdělení

Gamma rozdělení budeme značit $g_\Gamma(x)$. Pro statistické odhadování odstupů vozidel ho jako první použil Buckley v roce 1968. Obecný předpis pro gamma rozdělení je tvaru

$$g_\Gamma(x) = \theta(x) A x^{\alpha-1} e^{-\lambda x},$$

kde $A > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$.

Škálování

Budeme opět hledat parametry λ a A tak, aby funkce g_Γ byla škálovaná. Pro škálování takového rozdělení budeme potřebovat takzvanou gamma funkci a ta je dána předpisem

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx. \quad (3.6)$$

Dále si uvedeme ještě užitečný vztah

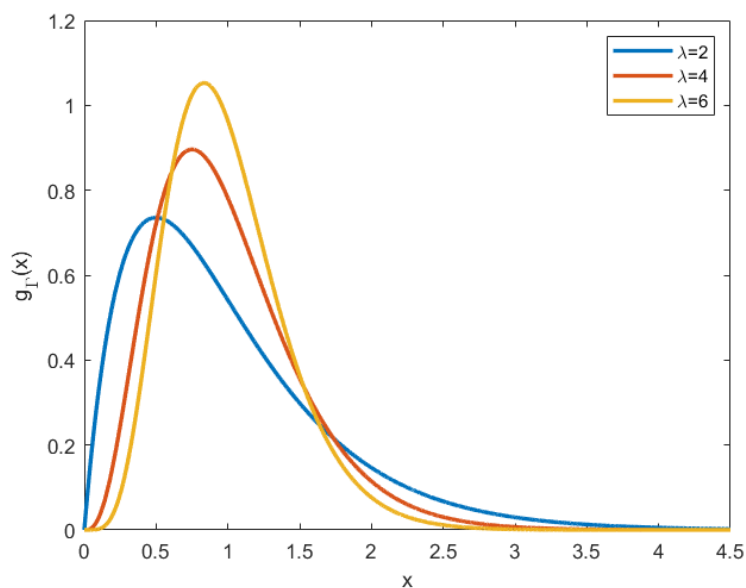
$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t). \quad (3.7)$$

Opět začneme výpočtem

$$\begin{aligned}\mu_0(g_\Gamma) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x) A x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = A \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \lambda x \\ dt = \lambda dx \end{array} \right| = \\ &= A \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\lambda^{\alpha-1}} e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \frac{A}{\lambda^\alpha} \Gamma(\alpha) \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow A = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \\ \mu_1(g_\Gamma) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \lambda x \\ dt = \lambda dx \end{array} \right| = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\lambda^\alpha} e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \lambda = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha = \lambda\end{aligned}$$

nultého momentu. Nalezli jsme parametry tak, aby $\mu_0(g_\Gamma) = \mu_1(g_\Gamma) = 1$. Tvar škálovaného gamma rozdělení je proto

$$g_\Gamma(x) = \theta(x) \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\lambda x}. \quad (3.8)$$



Obrázek 3.2: Tvar škálovaného gamma rozdělení pro různé hodnoty parametru λ .

Rozptyl

Abychom určili rozptyl náhodné veličiny s gamma rozdělením, musíme zjistit, jakých hodnot nabývá parametr λ . Aby funkce (3.8) byla spojitá, musí být nutně $\lambda \geq 1$. Nyní vypočteme druhý moment

$$\begin{aligned}\mu_2(g_\Gamma) &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda+1} e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \lambda x \\ dt = \lambda dx \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda^{\lambda+1}} e^{-t} \frac{dt}{\lambda} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(\lambda)} t^{\lambda+1} e^{-t} dt \stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda)} \stackrel{(3.7)}{=} \frac{(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)}{\lambda\Gamma(\lambda+1)} = 1 + \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Jelikož $\lambda \geq 1$ a $\mu_2(g_\Gamma) = 1 + \frac{1}{\lambda}$ plyne odtud, že $1 < \mu_2(g_\Gamma) \leq 2$. Pro rozptyl náhodné veličiny X s gamma rozdělením pak platí

$$\text{Var}(X) = \mu_2(g_\Gamma) - \mu_1^2(g_\Gamma) = \frac{1}{\lambda}.$$

Z toho plyne, že pro rozptyl takové náhodné veličiny platí

$$0 < \text{Var}(X) \leq 1.$$

3.2.3 GIG rozdělení

Rozdělení, které se zatím jeví jako jedno z nejvhodnějších pro VHM, je GIG (*Generalized Inverse Gaussian*) nebo-li zobecněné inverzní Gaussovo rozdělení. Splňuje jak empirické tak i teoretické předpoklady pro hustotu pravděpodobnosti a patří do třídy balancovaných hustot. Výjimečnost GIG rozdělení spočívá v tom, že bylo odvozeno analyticky pro jistý dopravní model. Konkrétně se jedná o termodynamický částicový plyn s hyperbolickým odpudivým potenciálem, tj. $\varphi(r) = \frac{1}{r}$, kde r je vzdálenost. Jelikož řidiči chtějí zamezit srážce, vyvarují se velmi malých odstupů a tato odpudivá síla dobře simuluje jejich rozhodovací proces. Toto rozdělení je aktuálně nejčastěji používané ve VHM. Bylo odvozeno analyticky a zároveň odpovídá empirické dopravní realitě. Obecný předpis GIG distribuce je

$$g_{GIG} = A\theta(x)x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}, \quad (3.9)$$

kde $A > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$. Pokud si zavedeme model termodynamického dopravního plynu s krátkodosahovým hyperbolickým potenciálem, pak GIG rozdělení popisuje rozdělení rozestupů mezi sousedními vozidly ve stacionárním stavu. V takovém případě je parametr α tzv. tenze, parametr λ nazveme koncentrací a parametr β označíme jako intenzitu. Parametr β v takovém modelu odpovídá již zmíněné stochastické rezistivitě, která je závislá na hustotě provozu, tedy $\beta = \beta(\rho)$.

Můžeme si všimnout, že v obecném předpisu g_{GIG} se nachází několik parametrů. Některých z nich se zbavíme při normalizaci a škálování a u některých se dokáže, že jsou závislé na parametru jiném. Ve výsledku budeme mít z funkce o čtyřech parametrech funkci dvouparametrickou. Nejdůležitějším parametrem pro finální tvar křivky však bude parametr β .

MacDonaldova funkce

K účelům snadnějšího výpočtu momentů GIG distribuce si zavedeme MacDonaldovu funkci označovanou též jako modifikovaná Besselova funkce druhého druhu. MacDonaldova funkce $K_a(x)$ řádu $a \in \mathbb{R}$ je

definována předpisem

$$K_a(x) = x^{-a} 2^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-\frac{x^2}{4y}} e^{-y} dy, \quad (3.10)$$

kde $x > 0$. Pro vyčíslení nejen několika prvních momentů, ale všech momentů g_{GIG} , využijeme některé z následujících rekurentních vztahů.

Věta 3.2.1 (Rekurentní vztahy $K_a(x)$).

Nechť $K_a(x)$ je MacDonalдова funkce a $x > 0$, pak platí:

$$1. K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) = -\frac{2a}{x} K_a(x) \quad (3.11)$$

$$2. K'_a(x) = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x} K_a(x) \quad (3.12)$$

$$3. K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = -2K'_a(x)$$

$$4. K'_a(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x} K_a(x)$$

Důkaz.

1.

$$\begin{aligned} K_a(x) &= x^{-a} 2^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-\frac{x^2}{4y}-y} dy \stackrel{p.p.}{=} \left| \begin{array}{ll} u = e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} & v' = y^{a-1} \\ u' = \left(\frac{x^2}{4y^2} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} & v = \frac{y^a}{a} \end{array} \right| = \\ &= -x^{-a} 2^{a-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{4y^2} - 1\right) \frac{y^a}{a} e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy = \\ &= -\frac{x^{-a+2} 2^{a-3}}{a} \int_0^{+\infty} y^{a-2} e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy + \frac{x^{-a} 2^{a-1}}{a} \int_0^{+\infty} y^a e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy = K_a(x), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} K_{a-1}(x) - K_{a+1}(x) &= x^{-a+1} 2^{a-2} \int_0^{+\infty} y^{a-2} e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy - x^{-a-1} 2^a \int_0^{+\infty} y^a e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy = \\ &= -\frac{2a}{x} \left(-\frac{x^{-a+2} 2^{a-3}}{a} \int_0^{+\infty} y^{a-2} e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy + \frac{x^{-a} 2^{a-1}}{a} \int_0^{+\infty} y^a e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy \right) \stackrel{(3.13)}{=} -\frac{2a}{x} K_a(x). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} K'_a(x) &= -ax^{-a-1} 2^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy + x^{-a} 2^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a-1} \left(\frac{-2x}{4y}\right) e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy = \\ &= -\frac{a}{x} K_a(x) - x^{-a+1} 2^{a-2} \int_0^{+\infty} y^{a-2} e^{-\frac{x^2}{4y^2}-y} dy = -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x} K_a(x) = K'_a(x). \end{aligned}$$

Poslední dva vztahy dokážeme jen použitím již dokázaných vztahů.

3.

$$\begin{aligned} & -2K'_a(x) \stackrel{(3.12)}{=} -2\left(-K_{a-1}(x) - \frac{a}{x}K_a(x)\right) \stackrel{(3.11)}{=} \\ & \stackrel{(3.11)}{=} 2K_{a-1}(x) - K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x) = K_{a-1}(x) + K_{a+1}(x). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} & K'_a(x) \stackrel{(3.12)}{=} -K_{a-1}(x) - \frac{a}{x}K_a(x) \stackrel{(3.11)}{=} \\ & \stackrel{(3.11)}{=} \frac{2a}{x}K_a(x) - K_{a+1}(x) - \frac{a}{x}K_a(x) = -K_{a+1}(x) + \frac{a}{x}K_a(x). \end{aligned}$$

□

Výpočet momentů

Nejdříve splníme normalizační podmínku $\mu_0(g_{GIG}) = 1$. Provádíme analogicky jako u předchozích distribucí, a sice

$$\begin{aligned} \mu_0(g_{GIG}) &= A \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \lambda x \\ dt = \lambda dx \end{array} \right| = A \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\lambda^\alpha} \exp\left(-\frac{\beta\lambda}{t} - t\right) \frac{dt}{\lambda} = \\ &= \frac{A}{\lambda^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} t^\alpha \exp\left(-\frac{4\beta\lambda}{4t} - t\right) dt = \frac{A}{\lambda^{\alpha+1}} \frac{(2\sqrt{\beta\lambda})^{\alpha+1}}{2^\alpha} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow A &= \frac{\lambda^{\alpha+1}}{2(\beta\lambda)^{\frac{\alpha+1}{2}} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = \frac{1}{2K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Škálování g_{GIG} již není tak snadné, proto vypočítáme prozatím $\mu_1(g_{GIG})$ a pro výpočet dalších momentů budeme předpokládat, že $\mu_1(g_{GIG}) = 1$. Při výpočtu μ_1 postupujeme obdobně jako u $\mu_0(g_{GIG})$, a to

$$\begin{aligned} \mu_1(g_{GIG}) &= A \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \lambda x \\ dt = \lambda dx \end{array} \right| = \frac{A}{\lambda^{\alpha+2}} \int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{4\beta\lambda}{4t} - t\right) dt = \\ &= \frac{A}{\lambda^{\alpha+2}} \frac{(2\sqrt{\beta\lambda})^{\alpha+2}}{2^{\alpha+2}} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda}) = 2A \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha+2}{2}} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda}) \stackrel{(3.14)}{=} \frac{K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \mu_1(g_{GIG}) &= \frac{K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Pro normalizovaný tvar g_{GIG} můžeme snad odvodit vzorec pro výpočet k -tého momentu

$$\begin{aligned} \mu_k(g_{GIG}) &= A \int_0^{+\infty} x^{\alpha+k} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \lambda x \\ dt = \lambda dx \end{array} \right| = \frac{A}{\lambda^{\alpha+k+1}} \int_0^{+\infty} t^{\alpha+k} \exp\left(-\frac{4\beta\lambda}{4t} - t\right) dt = \\ &= \frac{A}{\lambda^{\alpha+k+1}} \frac{(2\sqrt{\beta\lambda})^{\alpha+k+1}}{2^{\alpha+k}} K_{\alpha+k+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) \stackrel{(3.14)}{=} \frac{K_{\alpha+k+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme vztah pro výpočet k -tého momentu

$$\mu_k(g_{GIG}) = \frac{K_{\alpha+k+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \quad (\forall k \in \mathbb{N}). \quad (3.15)$$

Vzorec pro výpočet libovolného k -tého momentu pro normalizované rozdělení již máme, avšak zapsaný pouze v řeči MacDonalldových funkcí. Pokusíme se najít vztah pro snazší vyčíslení druhého a poté třetího momentu. Budeme předpokládat, že rozdělení je i škálované, tj. že platí

$$\mu_1(g_{GIG}) = \frac{K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = 1. \quad (3.16)$$

Pro naše účely si upravíme rovnost vycházející z (3.16) do tvaru

$$K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda}) = K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

Naším cílem je zapsat druhý moment bez použití MacDonalldových funkcí. K tomu je potřeba první rekurentní vztah (3.11) pro MacDonalldovy funkce. Po dosazení $k = 2$ do vzorce (3.15) máme

$$\begin{aligned} \mu_2(g_{GIG}) &= \frac{K_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{2}{2}} \stackrel{(3.11)}{=} \frac{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) + \frac{2(\alpha+2)}{2\sqrt{\beta\lambda}} K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \stackrel{(3.17)}{=} \\ &\stackrel{(3.17)}{=} \frac{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) + \frac{(\alpha+2)}{\sqrt{\beta\lambda}} K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda}) \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{\alpha+2}{\beta}\right) \left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \frac{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\alpha+2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Druhý moment jsme převedli do přehlednějšího tvaru

$$\mu_2(g_{GIG}) = \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\alpha+2}{\lambda} \quad (3.18)$$

a analogicky provedeme pro $\mu_3(g_{GIG})$

$$\begin{aligned} \mu_3(g_{GIG}) &= \frac{K_{\alpha+4}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \stackrel{(3.11)}{=} \frac{K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda}) + \frac{2(\alpha+3)}{2\sqrt{\beta\lambda}} K_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right) + \frac{\alpha+3}{\sqrt{\beta\lambda}} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K_{\alpha+3}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)\right) \stackrel{(3.18)}{=} \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\alpha+3}{\lambda} \mu_2(g_{GIG}). \end{aligned}$$

Odtud

$$\mu_3(g_{GIG}) = \frac{\beta}{\lambda} + \frac{\alpha+3}{\lambda} \mu_2(g_{GIG}). \quad (3.19)$$

Z posledních dvou výsledků (3.18) a (3.19) získáváme podezření, že bude existovat rekurentní vzorec, který by nám mohl výpočet k -tého momentu usnadnit a urychlit. Vzorec pro výpočet k -tého momentu (3.15) upravíme pomocí rovnosti (3.11) do tvaru

$$\begin{aligned} \mu_k(g_{GIG}) &= \frac{K_{\alpha+k+1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \stackrel{(3.11)}{=} \frac{K_{\alpha+k-1}(2\sqrt{\beta\lambda}) + \frac{2(\alpha+k)}{2(2\sqrt{\beta\lambda})} K_{\alpha+k}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} = \\ &= \frac{K_{\alpha+k-1}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} + \frac{\alpha+k}{\sqrt{\beta\lambda}} \frac{K_{\alpha+k}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^{\frac{k}{2}} \stackrel{(3.15)}{=} \frac{\beta}{\lambda} \mu_{k-2}(g_{GIG}) + \frac{\alpha+k}{\lambda} \mu_{k-1}(g_{GIG}). \end{aligned}$$

Odvodili jsme si rekurentní vzorec pro výpočet k -tého momentu

$$\mu_k(g_{GIG}) = \frac{\beta}{\lambda} \mu_{k-2}(g_{GIG}) + \frac{\alpha + k}{\lambda} \mu_{k-1}(g_{GIG}), \quad (3.20)$$

který platí pro $k \geq 2$, neboť předpokládáme, že $\mu_0(g_{GIG}) = \mu_1(g_{GIG}) = 1$.

Rozptyl

Druhý moment jsme již spočetli a rozdělení uvažujeme škálované. Rozptyl náhodné veličiny mající GIG rozdělení je tedy následující

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha + \beta + 2}{\lambda} - 1. \quad (3.21)$$

Řešení škálovací rovnice

Rovnost (3.16) představuje škálovací rovnici pro GIG rozdělení. Pokusíme se ji numericky vyřešit v prostředí *MATLAB* a pomocí lineární regrese odhadneme její sklon a intercept. Budeme vykreslovat křivku $\lambda = \lambda(\beta)$, kde parametr α zvolíme pevně. Numericky tedy řešíme rovnost

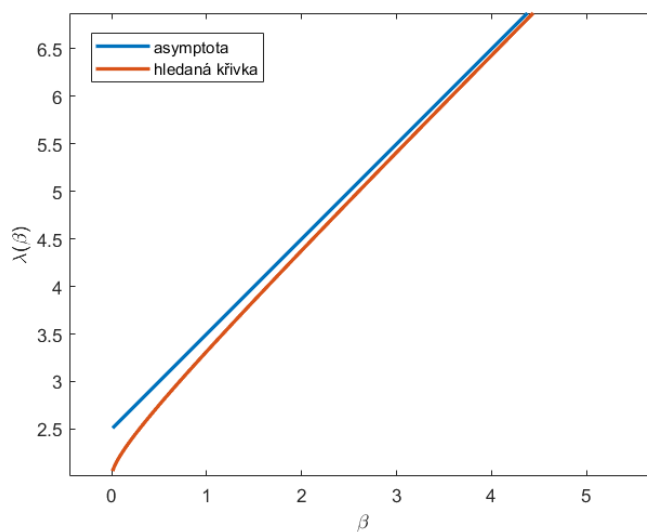
$$\frac{K_{\alpha+2}(2\sqrt{\beta\lambda})}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}$$

a parametr α budeme volit libovolně pevně. Hledáme sklon k a intercept q funkce $\lambda = k\beta + q$. Výsledky zapíšeme do tabulky.

β	α	k	q	α	k	q	α	k	q
(0, 1)	0	1.2380	1.1143	1	1.2210	2.0567	5	1.1298	6.0100
(10, 11)	0	1.0027	1.4393	1	1.0042	2.4046	5	1.0081	6.2998
(100, 101)	0	1.0000	1.4927	1	1.0001	2.4879	5	1.0001	6.4694
(1000, 1001)	0	1.0000	1.4993	1	1.0000	2.4988	5	1.0000	6.4968
(10000, 10001)	0	1.0000	1.4999	1	1.0000	2.4999	5	1.0000	6.4997
(100000, 100001)	0	1.0000	1.5000	1	1.0000	2.5000	5	1.0000	6.5000

U těchto tří pozorování pro $\alpha = 0, 1, 5$ sklon k při větších hodnotách β konverguje k jedné. Co se týče interceptu, můžeme si všimnout, že ten závisí na parametru α . Jelikož pro větší hodnoty β konverguje $k \rightarrow 1$ a $q \rightarrow \alpha + \frac{3}{2}$, funkce $\lambda = \lambda(\beta)$ má lineární asymptotu ve tvaru

$$\lambda \approx \beta + \alpha + \frac{3}{2}. \quad (3.22)$$



Obrázek 3.3: Porovnání hledané funkce $\lambda = \lambda(\beta)$ a její asymptoty, kde $\alpha = 1$.

Řešení (3.22) je ale pro malé hodnoty parametru β nepřesné. Úloha škálování GIG rozdělení byla vyřešena prozatím pro $\alpha \geq 0$, kde řešení škálovací rovnice je ve tvaru

$$\lambda(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{4+\alpha}}}.$$

Formule uvedená výše je zcela nové řešení, které prozatím pan docent Milan Krbálek nepublikoval. Škálovanou verzí hustoty g_{GIG} rozumíme

$$g_{GIG} = \theta(x) \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{x^\alpha}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x}. \quad (3.23)$$

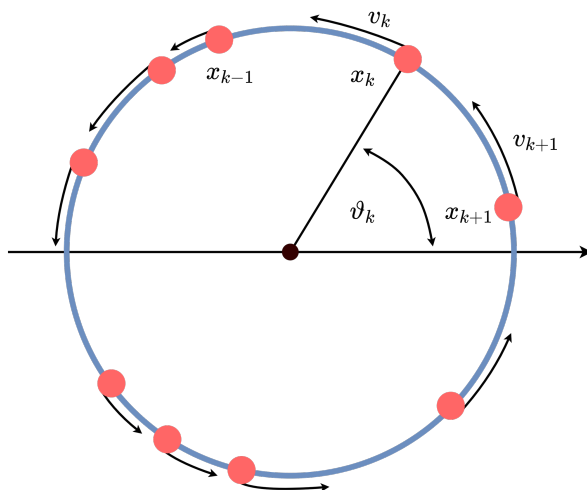
Kapitola 4

Algoritmická realizace

V kapitole 2 jsme si zavedli popis termodynamického plynu na úsečce s periodickými okrajovými podmínkami. Nyní přejdeme kruhovou variantu tohoto modelu, kdy jsou lokace popsány svými úhlovými složkami $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N$, kde $\vartheta_{k+N}(\tau) = \vartheta_k(\tau) + 2\pi$. Pro kruhovou variantu systému délky L si definujeme vzdálenost mezi i -tou a k -tou částicí jako

$$r_{ik} = R \arccos(\cos(\vartheta_i - \vartheta_k)),$$

kde $R = \frac{L}{2\pi}$ je poloměrem daného kruhu.



Obrázek 4.1: Částicový plyn na kružnici délky L .

Potenciální energii pro kruhovou verzi krátkodosahového systému zavedeme jako

$$U = \sum_{k=1}^N \varphi(\vartheta_k - \vartheta_k).$$

Nyní si pomocí algoritmu Metropolis-Hastings ověříme, že krátkodosahový částicový systém s logaritmickým potenciálem spadá do stacionárního stavu a navíc rozdělení roztečí odpovídá teoretickým předpokladům. Algoritmus sestavíme v prostředí *MATLAB*.

4.1 Sestavení algoritmu

Algoritmus převzatý z práce [7] aplikujeme na kruhovou krátkodosahovou variantu systému (viz obr. 4.1) s logaritmickým potenciálem. Rychlost částice nahradíme délkou kroku v jedné iteraci. Hodnotu stochastické rezistivity označíme symbolem β , koeficientu šumu symbolem σ a počet částic písmenem N . Umístění částice v čase t popíšeme úhlovými lokacemi $\vartheta_1(t) < \vartheta_2(t) < \dots < \vartheta_N(t)$. Rozteč mezi j -tou a k -tou částicí v čase t definujeme vztahem

$$r_{jk}(t) = \frac{N}{2\pi} \arccos(\cos[\vartheta_j(t) - \vartheta_k(t)]).$$

Nejprve pevně zvolíme parametry $\beta \geq 0, \sigma > 0$ a počet částic N . Libovolně zvolíme počáteční rozmístění $\vartheta_1(0) < \vartheta_2(0) < \dots < \vartheta_N(0)$ a spočteme počáteční potenciální energii

$$U(0) = - \sum_k \ln(r_{k,k+1}(0)).$$

Pokud platí tzv. unfoldovací podmínka $\sum_{k=1}^n r_{k,k+1} = N$, pak spustíme cyklus, jehož jedna iterace probíhá následovně:

1. Z času t přecházíme na $t + 1$.
2. Vypočteme aktuální potenciální energii

$$U(t) = - \sum_k \ln(r_{k,k+1}(t)).$$

3. Zvolíme libovolně index $\ell \in \hat{N}$.
4. Vygenerujeme číslo δ z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(-1, 1)$.
5. Definujeme předpokládanou pozici ℓ -té částice jako $\vartheta_\ell(t + 1) = \vartheta_\ell(t) + \delta \frac{2\pi}{N} \sigma$.
6. Pokud se ℓ -tá částice v čase $t + 1$ dostane před $\ell + 1$ částicí v čase t , tedy $\vartheta_\ell(t + 1) \geq \vartheta_{\ell+1}(t)$ nebo se dostane za $\ell - 1$ částicí v čase t , tedy $\vartheta_\ell(t + 1) \leq \vartheta_{\ell-1}(t)$, pak se vrátíme zpět do bodu 1. V takovém případě zachováme úhlové lokace i potenciální energii stejnou jako v čase t , tedy $\vec{\vartheta}(t + 1) = \vec{\vartheta}(t), U(t + 1) = U(t)$. V případě, že částice zůstane v kroku $t + 1$ mezi svými sousedními částicemi, pokračujeme na krok 7.
7. Vypočteme potenciální energii po posunutí pouze ℓ -té částice

$$W = - \sum_k \ln(r_{k,k+1}(t + 1)),$$

kde $\vartheta_k(t + 1) = \vartheta_k(t)$ pro všechny $k \neq \ell$.

8. Pokud se hodnota potenciální energie snížila nebo zůstala stejná $W \leq U(t)$, pak $U(t + 1) = W$.
9. Pokud se hodnota potenciální energie zvýšila, pak vypočteme tzv. Boltzmannův faktor $h = e^{-\beta(W-U(t))}$ a vygenerujeme číslo γ z rovnoměrného rozdělení na intervalu $(0, 1)$. Pokud
 - $h \geq \gamma$, pak $U(t + 1) = W$.

- $h < \gamma$, pak $\vec{\vartheta}(t + 1) = \vec{\vartheta}(t)$, $U(t + 1) = U(t)$.

10. Vracíme se do bodu 1.

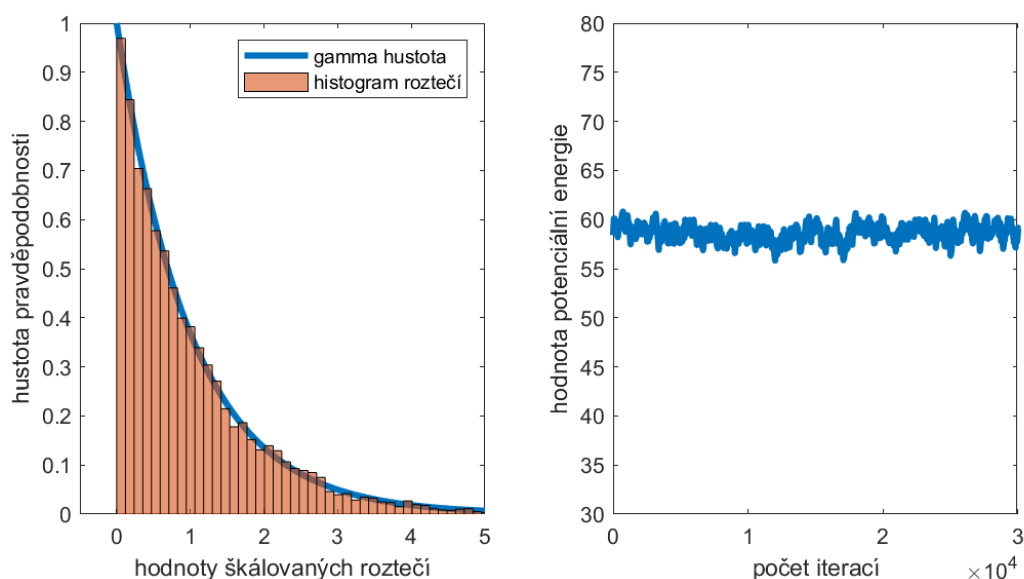
Cílem je snižovat energii systému, dokud se neustálí na konstantní hodnotě. Pokud je energie systému ustálená na konstantní hodnotě, pak se systém nachází ve stacionárním stavu a rozdělení roztečí by mělo odpovídat některému ze zmíněných rozdělení. Jelikož se jedná o krátkodosahový systém s logaritmickým potenciálem, mělo by rozdělení roztečí odpovídat, v závislosti na parametru β , gamma rozdělení. Pro hodnotu parametru $\beta = 0$ by rozdělení mělo odpovídat exponenciálnímu rozdělení.

4.2 Algoritmická realizace

V této algoritmické realizaci náhodně rozmístíme 100 částic na kružnici, koeficientu šumu σ přiřadíme hodnotu 0.9 a provedeme 30 000 iterací. Při takovém nastavení s daným β jsme spustili algoritmus 100krát. Výsledné křivky potenciální energie jsou průměrem tohoto sta pozorování a histogramy tvoří soubor hodnot roztečí z těchto všech pozorování. Výsledky pro různé hodnoty parametru β jsou zaznamenány v následujících histogramech proložených funkcí

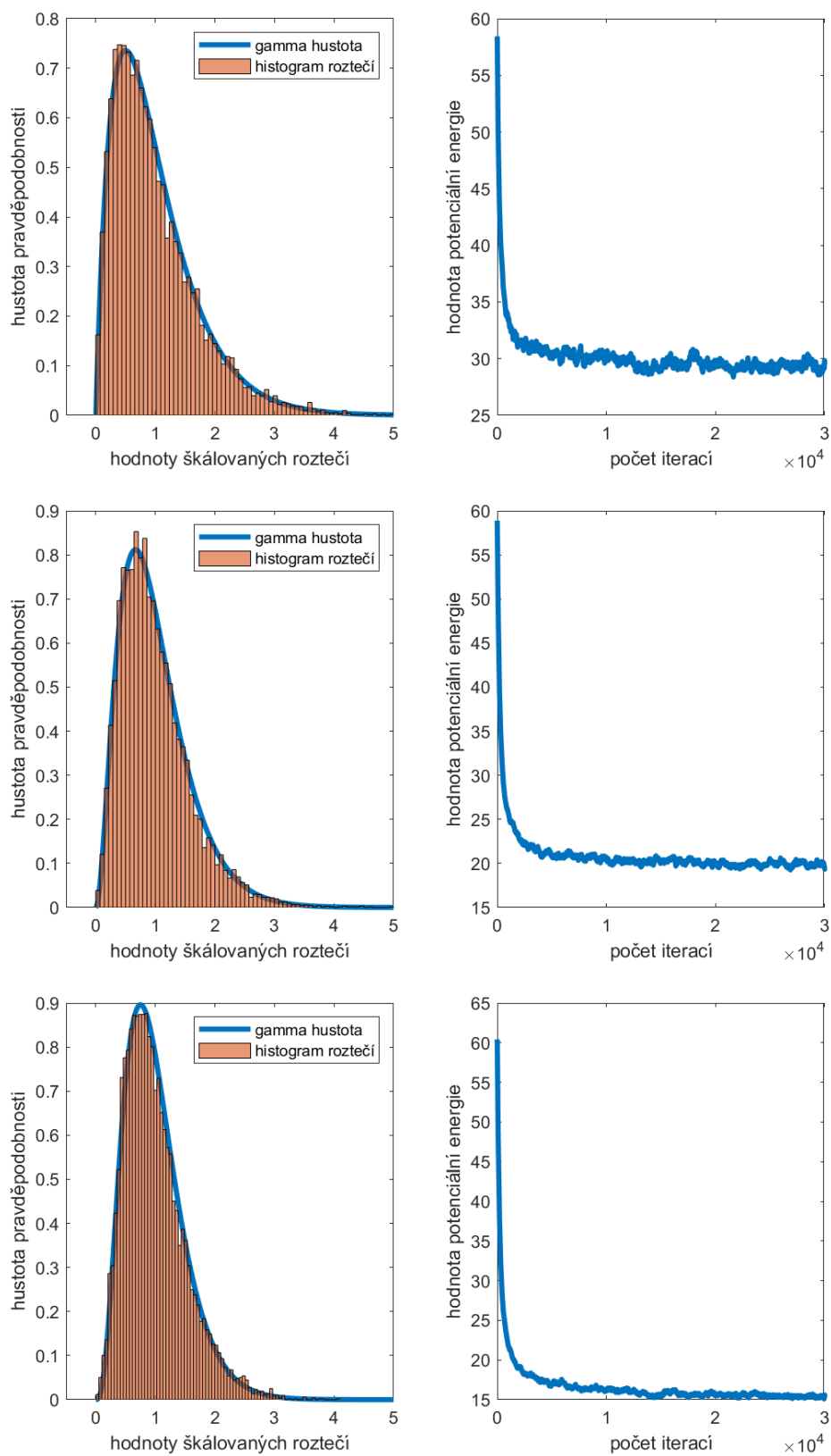
$$g_{\Gamma}(x) = \frac{\lambda^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\lambda x}, \quad (4.1)$$

kde parametr $\lambda = \beta + 1$. Graf vlevo je zmíněný histogram a graf vpravo je vývoj potenciální energie.

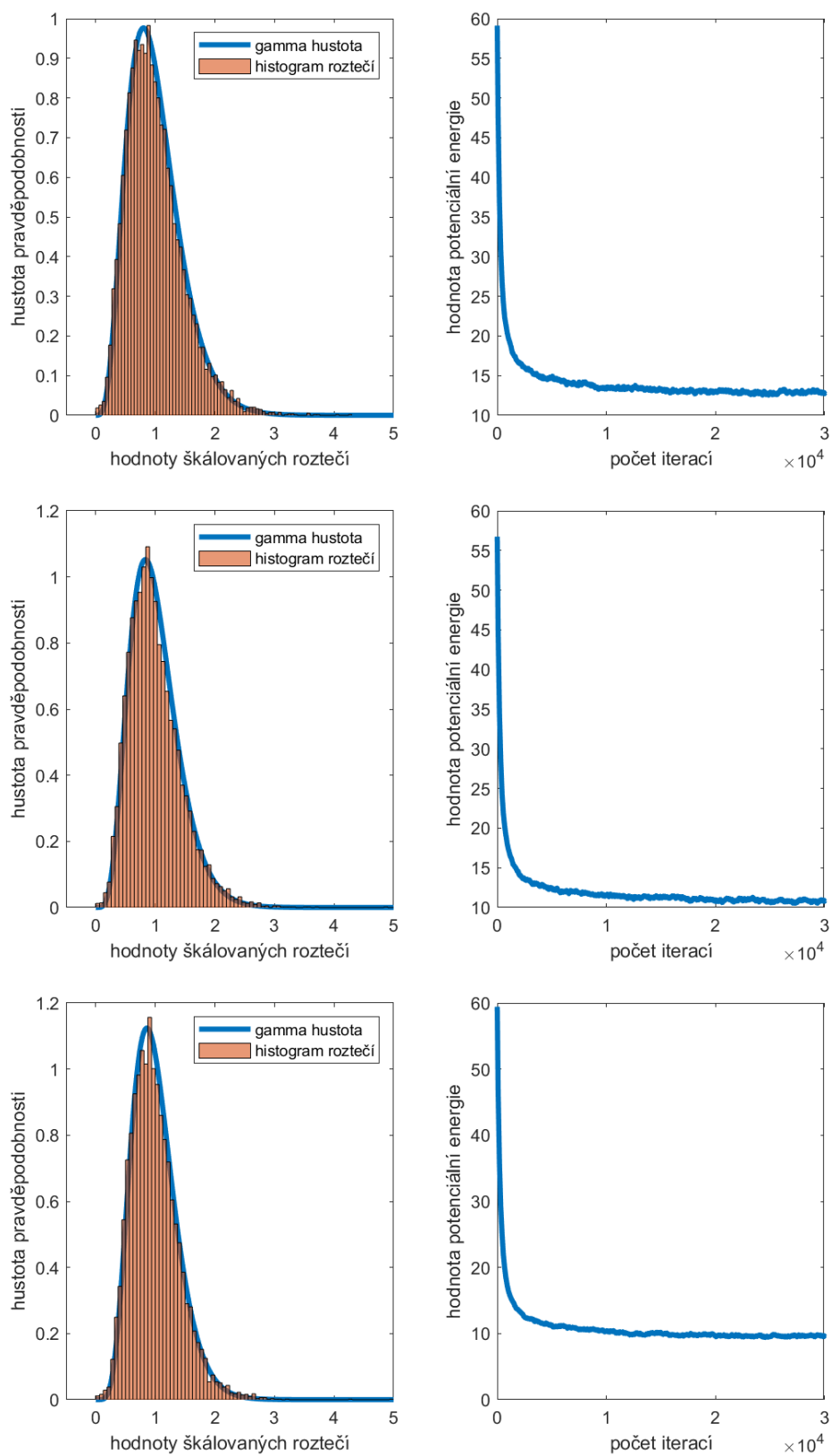


Obrázek 4.2: $\beta = 0$.

Po dosažení nulové hodnoty parametru β je funkce (4.1) exponenciální funkcí. V takovém případě se jedná o systém, který je v Poissonovském stavu, tedy stavu, kdy je míra fluktuace náhodných veličin maximální. Potenciální energie se ve všech případech ustálí na konstantní hodnotě a systém se nachází ve stacionárním stavu. Pro všechny hodnoty parametru β hustota pravděpodobnosti g_{Γ} dané histogramy velmi dobře prokládá, jak můžeme vidět níže. Ověřili jsme, že tento algoritmus funguje správně a odpovídá teoretickým předpokladům. Můžeme ho proto dále použít pro dopravní modelování a i pro jiné než logaritmické potenciály.



Obrázek 4.3: Horní obr. $\beta = 1$, prostřední $\beta = 2$ a spodní $\beta = 3$.



Obrázek 4.4: Horní obr. $\beta = 4$, prostřední $\beta = 5$ a spodní $\beta = 6$.

Kapitola 5

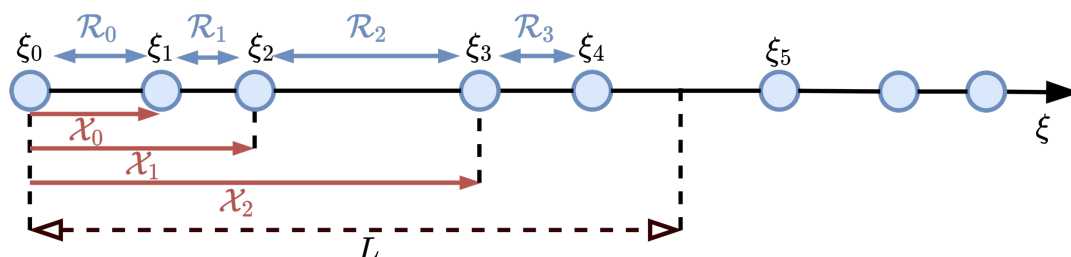
Klasifikace částicových systémů

Před zavedením balančního částicového systému si nejprve definujeme některé veličiny částicových systémů. Uvažujeme jednodimenzionální částicový systém s pevným počátkem. V počátku leží částice, kterou nazýváme referenční. Na obrázku 5.1 polohu referenční částice značíme ξ_0 . Jednotlivé polohy částic budeme značit $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$, ale pracovat budeme spíše se vzdálenostmi mezi částicemi, které si definujeme níže. Mezi tři základní veličiny částicového systému patří:

1. *Rozteče sousedních částic* si definujeme jako posloupnost náhodných veličin $(\mathcal{R}_k)_{k=0}^{+\infty}$, které jsou
 - absolutně spojité,
 - nezáporné.
2. *Multirozteče* jsou vzdálenosti dané částice od částice referenční. Tedy \mathcal{X}_k je vzdálenost $k+1$ částice od referenční částice. k -tou multirozteč definujeme vztahem

$$\mathcal{X}_k = \sum_{i=0}^k \mathcal{R}_i.$$

3. *Intervalová frekvence* N_L určuje počet částic vyskytujících se v intervalu $(0, L)$ za referenční částicí. N_L je diskrétní náhodná veličina parametrizovaná hodnotou L , popsaná pravděpodobností $\mathcal{P}[N_L = k]$, tedy pravděpodobností výskytu k částic v intervalu $(0, L)$.



Obrázek 5.1: Veličiny částicového systému.

Vlastnost, která je potřebná pro zavedení balančního částicového systému, je konvoluční kompatibilita. Pokud máme dvě absolutně spojité náhodné veličiny X, Y s příslušnými hustotami $g(x), h(y)$, pak jsou tyto

náhodné veličiny konvolučně kompatibilní, pokud má náhodná veličina $Z = X + Y$ rozdělení popsané hustotou $f(z) = (g \star h)(z)$.

Balančním částicovým systémem rozumíme posloupnost multiroztečí $(X_k)_{k=0}^{+\infty}$ zavedených předpisem $X_k = \sum_{n=0}^k \mathcal{R}_n$ splňující axiomy:

1. *Axiom konvoluční kompatibility*: Posloupnost $(\mathcal{R}_n)_{n=0}^{+\infty}$ je posloupností nezáporných, absolutně spojitých, stejně rozdělených a konvolučně kompatibilních náhodných veličin.
2. *Axiom balancovaného generátoru*: Hustota pravděpodobnosti $h(x)$ veličiny \mathcal{R}_0 (tzv. *generátor balančního částicového systému*) patří do třídy \mathcal{B} balancovaných hustot, tj. $h(x) \in \mathcal{B}$.

Takový systém nazveme škálovaným balančním částicovým systémem splňuje-li navíc generátor vlastnost $h(x) \in \mathcal{B}_{11}$, tj. střední hodnoty všech roztečí jsou rovny jedné, $E(\mathcal{R}_0) = E(\mathcal{R}_1) = E(\mathcal{R}_2) = \dots = 1$.

Balanční částicový systém, jehož rozteče jsou nezávislé a stejně rozdělené, je plně zadán generátorem $h(x)$, kde $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots \sim h(x)$. Pro výše uvedené veličiny platí následující vztahy:

- $X_k = \sum_{m=0}^k \mathcal{R}_m \sim \star_{m=0}^k h(x)$.
- $\mathcal{P}[N_L = 0] = 1 - H(L)$, kde $H(x) = \int_{-\infty}^x h(x) dx$.
- $\mathcal{P}[N_L = k] = G_{k-1}(L) - G_k(L)$, kde $G_k(x)$ jsou distribuční funkce příslušné multiroztečím $X_k \sim g_k(x)$ a vzhledem k zavedení částicového systému pro ně platí, že

$$G_k(x) = \int_{-\infty}^x g_k(y) dy, \quad g_k(x) = \star_{m=0}^k h(x).$$

- $h(x) = \frac{dH}{dx} = -\theta(x) \frac{d}{dx} \mathcal{P}[N_x = 0]$.
- $G_k(x) = 1 - \sum_{m=0}^k \mathcal{P}[N_x = m]$ a $g_k(x) = -\theta(x) \sum_{m=0}^k \frac{d\mathcal{P}[N_x=m]}{dx}$.

Tyto rovnosti plně demonstrují záměnnost jednotlivých popisů libovolného částicového systému.

5.1 Charakteristiky balančního částicového systému

K popisu částicových systémů se také užívají číselné (bodové) charakteristiky. My se budeme zabývat charakteristikami prvního řádu, tj. střední hodnoty příslušných náhodných veličin, a charakteristikami druhého řádu, tj. rozptyly, druhé momenty a další související charakteristiky příslušných náhodných veličin.

Charakteristiky prvního řádu

Mezi charakteristiky prvního řádu řadíme *střední hodnotu roztečí*, tj.

$$E(\mathcal{R}_k) = \int_{\mathbb{R}} xh(x) dx,$$

což je vlastně první moment generátoru systému $\mu_1(h)$. Dále *střední hodnotu multiroztečí*, tj.

$$E(\mathcal{X}_k) = \int_{\mathbb{R}} xg_k(x) dx$$

a pro diskrétní popis definujeme tzv. *trendovou funkci* jako střední hodnotu intervalové frekvence N_L , tedy

$$\omega(L) = E(N_L) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathcal{P}[N_L = k].$$

V teorii balančních částicových systémů budeme symbolem \varkappa značit první moment generátoru a pro výše uvedené charakteristiky platí

- $E(\mathcal{X}_k) = (k + 1)\varkappa$,
- $\omega(L) = E(N_L) = \int_0^{L+\infty} \sum_{k=0} g_k(x) dx$.

Charakteristiky druhého řádu

Základními charakteristikami každého balančního systému jsou také charakteristiky druhého řádu, které jsou odvozené od druhých momentů příslušných náhodných veličin. Patří mezi ně

- *rozptyl rozteče*

$$\text{Var}(\mathcal{R}_k) = \mu_2(h) - (\mu_1(h))^2 = \mu_2(h) - \varkappa^2,$$

- *rozptyl multirozteče*

$$\text{Var}(\mathcal{X}_k) = E(\mathcal{X}_k^2) - (E(\mathcal{X}_k))^2,$$

- *druhý moment intervalové frekvence*

$$E(N_L^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \mathcal{P}[N_L = k],$$

- *frekvenční rozptyl*

$$\square(L) = E(N_L - E(N_L))^2 = E(N_L - \omega(L))^2,$$

- *a stochastická rigidita*

$$\Delta(L) = E(N_L - L)^2.$$

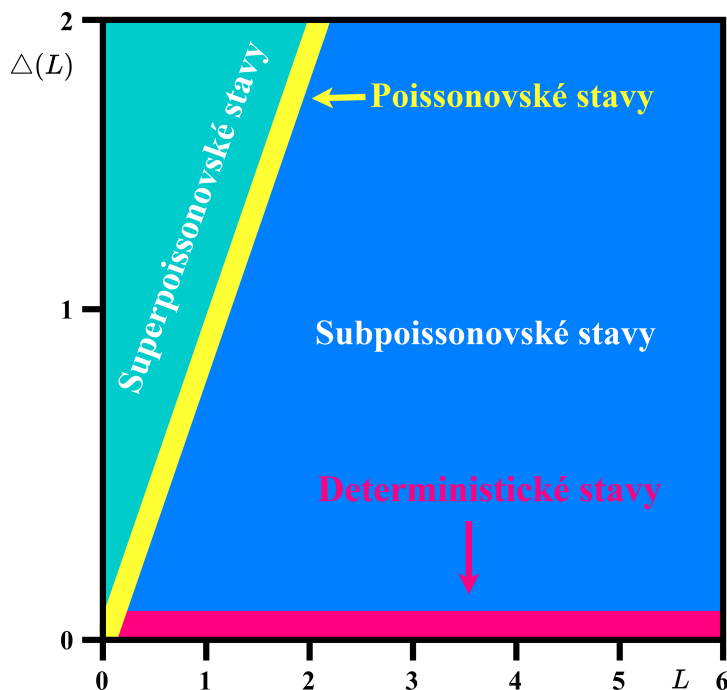
Stochastická rigidita má oproti frekvenčnímu rozptylu tu výhodu, že pro definici rigidity není potřeba znát střední hodnotu intervalové frekvence. Další důležitou výhodou a zjednodušující vlastností stochastické rigidity je existence výrazné lineární asymptoty, ke které se přibližuje velice blízko za počátkem souřadného systému. Předpis této lineární asymptoty označme jako $\chi L + \zeta$, kde parametr χ nazveme *stochastickou kompresibilitou* a parametr ζ nazveme *interceptem*. V balančním částicovém systému zadaném generátorem $h(x)$ je stochastická kompresibilita rovna rozptylu sousedních roztečí, tj.

$$\chi = \mu_2(h) - \kappa^2.$$

Pro stochastickou kompresibilitu ve škálovaných balančních částicových systémech tedy platí

$$\chi = \mu_2(h) - 1.$$

Balanční částicové systémy lze dle hodnoty kompresibility klasifikovat. Na obrázku 5.2 můžeme vidět čtyři barevně označené oblasti, a to *deterministické stavy* (červeně), *subpoissonovské stavy* (modře), *poissonovské stavy* (žlutě) a *superpoissonovské stavy* (tyrkysově).



Obrázek 5.2: Klasifikace náhodných stavů v částicových systémech dle závislosti stochastické rigidity $\Delta(L)$ na délce intervalu L .

5.2 Klasifikace systémů podle rozptylu světlostí

Všechny náhodné veličiny s příslušnými hustotami pravděpodobnosti budeme nyní uvažovat škálované, tedy že střední hodnota dané náhodné veličiny je rovna jedné. Výše uvedené stavy si rozebereme, roztrídíme dle rozptylu světlostí a využijeme poznatky ze třetí kapitoly o rozptylech náhodných veličin.

5.2.1 Deterministické stavy

V deterministických částicových systémech je hodnota stochastické rigidity nulová, tedy kompresibilita i intercept jsou rovny nule. Rozptyl vzdáleností mezi částicemi je tedy nulový a v každém intervalu je stejný počet částic, které tím pádem musí být uspořádané ekvidistantně. V dopravních systémech je deterministický systém takový, kde vozidla jsou ekvidistantně uspořádaná a všechna mají stejnou konstantní rychlost. Po přenesení do modelu termodynamického dopravního plynu toto odpovídá stavu, kdy hodnota teplotního rezervoáru T je nulová a tudíž stochastická rezistivita β roste nade všechny meze, tj. při nadkritických hodnotách provozu. Příkladem částicového systému, který splňuje tyto požadavky, je tzv. *Diracův částicový systém*.

5.2.2 Poissonovské stavy

Je-li rozptyl náhodné veličiny roven její střední hodnotě, pak takový systém nazveme poissonovským. Jedná se o pomyslnou horní hranici subpoissonovského stavu, kde jednotlivé částice o sobě vzájemně nevědí, a tudíž neinteragují. V termodynamické variantě toto odpovídá stavu, kdy rezistivita β je rovna nule. Stochastické rysy se naplno projeví, částice se pohybují maximálně nezávisle. V teorii částicových systémů je dokázáno, že počet částic na intervalu $(0, L)$ za referenční částicí podléhá Poissonovu rozdělení. Generátoru takového systému odpovídá funkce $g_E(x) = \theta(x)e^{-x}$. V dopravě můžeme tento stav zaznamenat při extrémně nízkých hustotách provozu, což je například poloprázdná dálnice s hustotou pět vozidel na kilometr.

5.2.3 Subpoissonovské stavy

Pohybuje-li se rozptyl příslušné náhodné veličiny v systému v rozmezí $0 < \text{Var}(X) < 1$, pak nazveme takový systém subpoissonovským. V subpoissonovských systémech je hodnota směrodatné odchylky větší než nula, ale menší než její střední hodnota. Mezi takové systémy patří například systémy chodců pohybující se v úzkém koridoru nebo soubor vozidel pohybujících se na jednosměrné komunikaci.

Ve třetí kapitole jsme si odvodili, že rozptyl náhodné veličiny X , která má škálované gamma rozdělení, se pohybuje právě v požadovaném rozmezí. Tedy pro náhodnou veličinu $X \sim g_\Gamma(x) \in \mathcal{B}_{11}$ platí, že

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Aby pro rozptyl platilo $0 < \text{Var}(X) < 1$, parametr λ musí být nutně větší než 1. Při volbě $\lambda = 1$ bychom se dostali do poissonovského stavu, kde je rozptyl roven jedné. Takovou náhodnou veličinou mohou být v částicových systémech například rozteče nebo v dopravní teorii světlosti či odstupy. V modelu termodynamického dopravního plynu toto odpovídá situaci, kdy stochastická rezistivita β leží v intervalu $(0, +\infty)$. Jednotlivá vozidla vzájemně interagují, avšak oproti deterministickému stavu nejsou potlačeny stochastické rysy dopravy. Ve statistickém odhadování odstupů vozidel má však gamma rozdělení vadu, kterou je absence vlastnosti empirického předpokladu platí v nule.

5.2.4 Superpoissonovské stavy

V superpoissonovských stavech, nebo také supernáhodných stavech, je rozptyl roztečí větší než jedna. To znamená, že v takovém systému jsou realizace náhodné veličiny rozptýleny kolem své střední hodnoty ještě více, než v systému, kde o sobě jednotlivé elementy vůbec nevědí. Zpočátku se považovala měření spadající do této oblasti za chybu měření. S postupem času se ale ukázalo, že měření chybná nejsou a mezi jednotlivými elementy nepůsobí pouze odpuzivé, nebo-li repulzivní síly, ale i síla přitažlivá, nebo-li atraktivní. Pokud tedy v částicovém systému působí striktně repulzivní síly, pak superpoissonovský stav nemůže nastat. Pokud je v částicovém systému detekována kompresibilita větší než jedna, pak lze předpokládat, že v tomto systému mezi jednotlivými elementy působí i atraktivní síla. Tato atraktivní síla má, stejně jako síla repulzivní, psychicko-sociální původ. Řidiči, kteří se nachází v rychlejším pruhu, mají tendenci dohánět vozidlo před sebou, a tato tendence je právě příčinou přitažlivé síly. Tento stav v dopravě nastává například při nižších hustotách provozu (cca do 40 vozidel na kilometr) v rychlém dopravním pruhu na dálnici.

V žádném z výše uvedených stavů nebylo záměrně zmíněno rozdělení GIG. Náhodná veličina s GIG rozdělením při vhodně zvolených parametrech, může splňovat požadavky na rozptyl náhodné veličiny pro všechny uvedené stavy. Navíc, jak již bylo řečeno, splňuje i všechny empirické předpoklady. Shrnutím klasifikace systémů podle rozptylu světlostí je následující tabulka.

Stav	rozptyl	střední hodnota	hustota pravděpodobnosti	název rozdělení
Deterministický	0	1	$\delta(1 - x)$	Diracovo
Poissonův	1	1	$\theta(x)e^{-x}$	exponenciální
Subpoissonův	(0, 1)	1	$\theta(x)\frac{\lambda^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\lambda x}$	Gamma
Superpoissonův	> 1	1	(3.23)	GIG (pro určité parametry)

Tabulka 5.1: Rozdělení stavů dle rozptylu.

V tabulce 5.1 je poslední řádek poněkud zavádějící, pro dosažení supernáhodného stavu je třeba vhodné nastavení parametrů. Naší snahou je totiž nalézt variantu termodynamického plynu, jehož stacionární stav je supernáhodný. Uvedeme si ještě jednu podobnou tabulku, nyní však pouze pro rozdělení GIG. Vyžadujeme aby střední hodnota GIG rozdělení byla rovna jedné, tudíž předpis GIG hustoty pravděpodobnosti je dán vztahem

$$g_{GIG} = \theta(x) \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\beta} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{x^\alpha}{K_{\alpha+1}(2\sqrt{\beta\lambda})} e^{-\frac{\beta}{x}} e^{-\lambda x},$$

kde o parametru λ z třetí kapitoly víme, že $\lambda = \beta + \alpha + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{\frac{4\beta}{4+\alpha}}}$ pro nezáporné hodnoty parametru α . Dále pro parametr β a λ platí, že jsou kladné.

Stav	rozptyl	střední hodnota	hodnota parametrů
Deterministický	0	1	$\alpha \in \mathbb{R}, \beta \rightarrow +\infty$
Poissonův	1	1	$\alpha = 0, \beta = 0$
Subpoissonův	(0, 1)	1	$\alpha + \beta + 2 < 2\lambda$
Superpoissonův	> 1	1	$\alpha + \beta + 2 > 2\lambda$

Tabulka 5.2: Rozdělení stavů dle rozptylu pro GIG.

Jelikož empirické hodnoty náležící do superpoissonovského stavu se donedávna považovali za chybu měření, není tato oblast probádaná a o nastavení parametrů v této části nemáme mnoho informací. V následující kapitole se za pomoci analýzy rozptylu světlostí pokusíme zjistit, kdy tyto stavy nastávají. Poté v těchto supernáhodných oblastech odhadneme parametry funkce (3.23), kterou budeme data prokládat.

Kapitola 6

Analýza rozptylu empirických dat

6.1 3-s Unifikace dat

V této kapitole provedeme analýzu dat, které nám poskytla holandská univerzita *Delft University of Technology*. Data z reálného dopravního proudu vykazují výraznou nelinearitu u kondenzovaných stavů, chaotický vývoj u stavových proměnných nebo strmé nárůsty hustoty. Rozsáhlejší vzorky souboru vozidel je třeba pro další zkoumání a pro získání smysluplného výsledku nejprve roztrždit. Po roztržení dat, tak zamezíme jejich nežádoucímu míchaní z volné a kondenzované dopravní fáze. Statistické vlastnosti jednotlivých veličin a parametrů zůstanou zachovány. Použijeme tzv. *3-s unifikací proceduru* převzatou z práce [2] a jak název napovídá, skládá se ze třech fází.

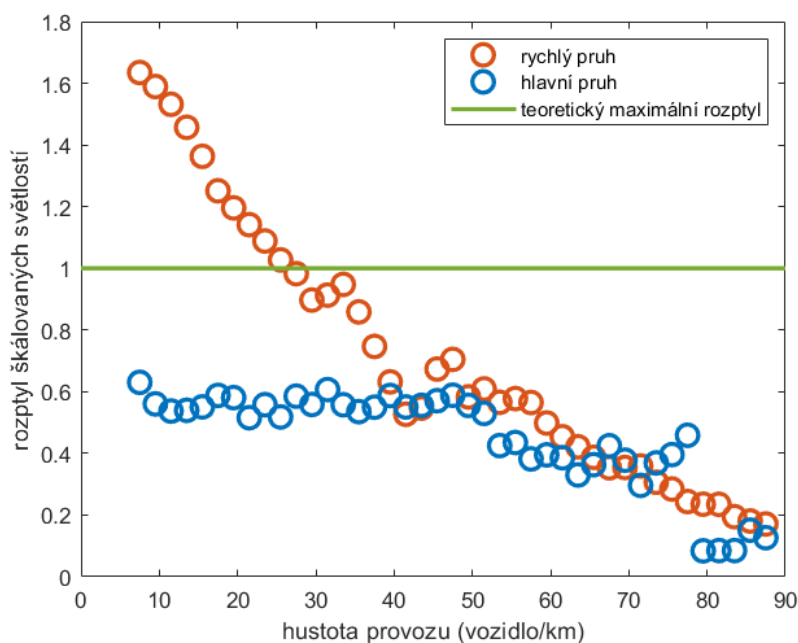
1. *Vzorkovací fáze* - rozdělení celého datového souboru na malé homogenní vzorky M sousedních vozidel. Počet M označujeme termínem vzorkovací velikost.
2. *Škálovací fáze* - přeškálování náhodných proměnných, jako třeba odstupů nebo světlostí, na střední hodnotu rovnou jedné.
3. *Segmentační fáze* - pro každý vzorek jsou vypočteny hodnoty fázových proměnných (hustoty, intenzity, průměrné rychlosti) a zvolíme malý fázový segment Ψ (viz 1.5). Vzorek z dalšího zpracování vyloučíme, jestliže hodnoty fázových proměnných příslušného vzorku leží mimo zvolený segment. Data pro statistické rozdělení rychlostí, odstupů a světlostí jsou díky tomu téměř homogenní.

6.2 Analýza rozptylu

Jedná se o data z holandské dálnice o dvou jízdnicích pruzích. Máme dostupný čas momentu průjezdu předního nárazníku vozidla detektorem, rychlost průjezdu vozidla na detektoru a délku vozidla. Data budeme analyzovat pro rychlý a hlavní pruh dálnice.

Výsledek této analýzy dopravních dat můžeme vidět na obrázku 6.1. Předpokládaná horní hranice hodnoty rozptylu světlostí je překonána v rychlém dopravním pruhu při nižších hustotách provozu. Tedy

rozptyly světlostí při nízkých hustotách provozu na rychlejším pruhu dálnice jsou ještě větší, než rozteče částic v systémech, kde o sobě jednotlivé částice nevědí a mezi sebou vůbec neinteragují.



Obrázek 6.1: Analýza rozptylu světlostí v empirických datech.

Můžeme tedy předpokládat, že mezi vozidly, při těchto určitých hustotách, působí i síly atraktivní. Tyto atraktivní síly se pokusíme v následující kapitole popsat a opět sestavit algoritmus na principu Metropolis-Hastings tak, aby částicový systém měl stacionární stav, který je výrazně supernáhodný.

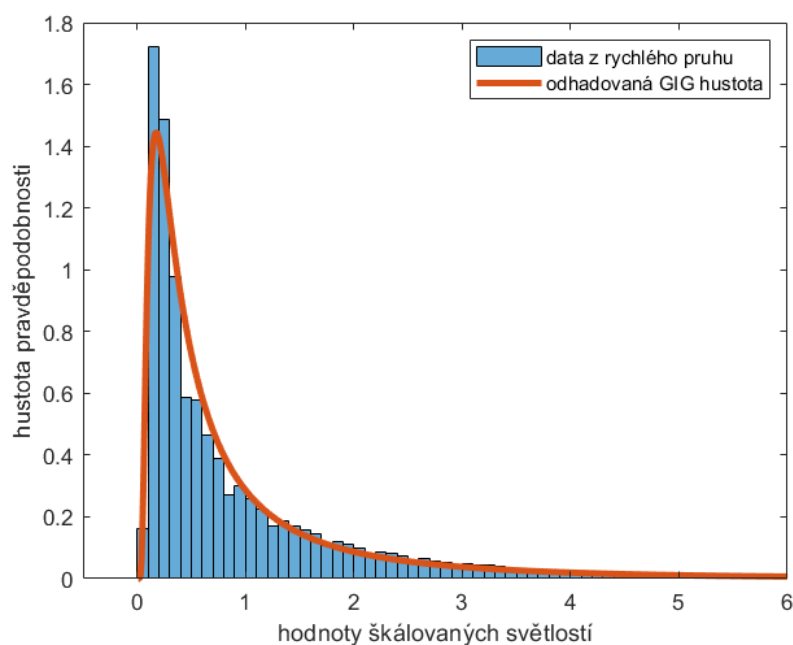
6.3 Odhad parametrů pro určitý segment

Pro vzorek světlostí, jejichž rozptyl je větší než jedna, se pokusíme odhadnout parametry rozdělení GIG (3.23). Odhadovat budeme pomocí metody maximální věrohodnosti. Výsledky si shrneme v tabulce. Jednotlivé vzorky světlostí jsou vybírány dle hustoty provozu.

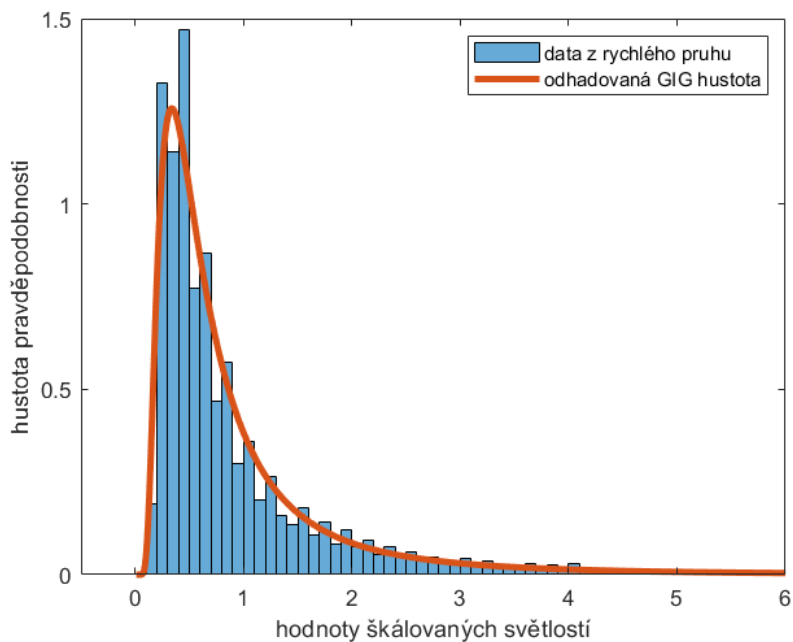
V tabulce 6.1 se nám potvrdila teoretická předpověď pro parametr β , tedy s rostoucí hustotou roste i rezistivita systému. Hodnoty parametru alfa vyšly ve všech supernáhodných případech záporné. Tyto parametry využijeme při realizaci supernáhodné varianty modelu termodynamického dopravního plynu.

interval hustoty	(5,10)	(9,14)	(13,18)	(17,22)	(21,26)
α	-1.5940	-1.2485	-2.733	-3.1367	-3.6271
β	0.2860	0.2172	0.9303	1.2416	1.6303
λ	0.2294	0.1550	0.0718	0.0419	0.0013
rozptyl světlostí	1.6349	1.5318	1.3632	1.1960	1.0886

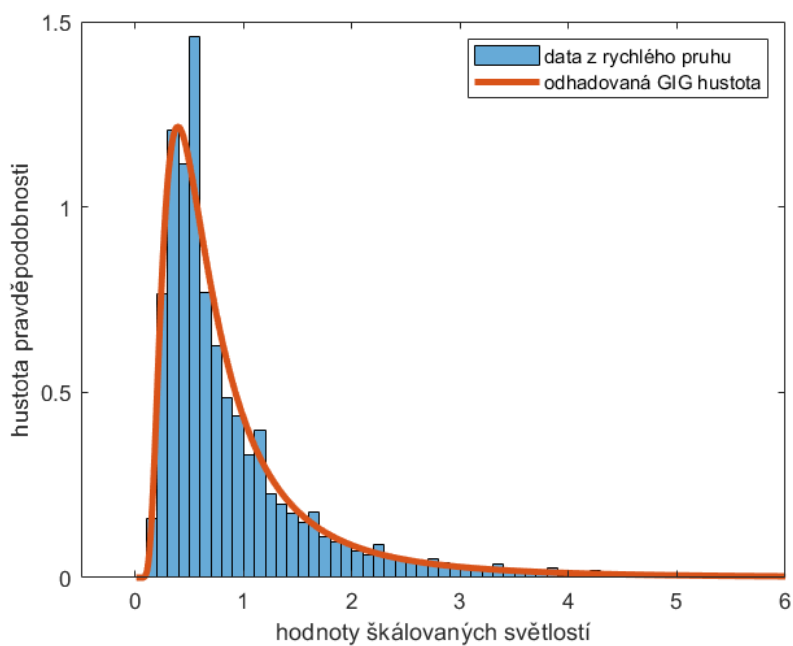
Tabulka 6.1: Odhadované hodnoty parametrů pro daný interval hustoty v rychlém dálničním pruhu.



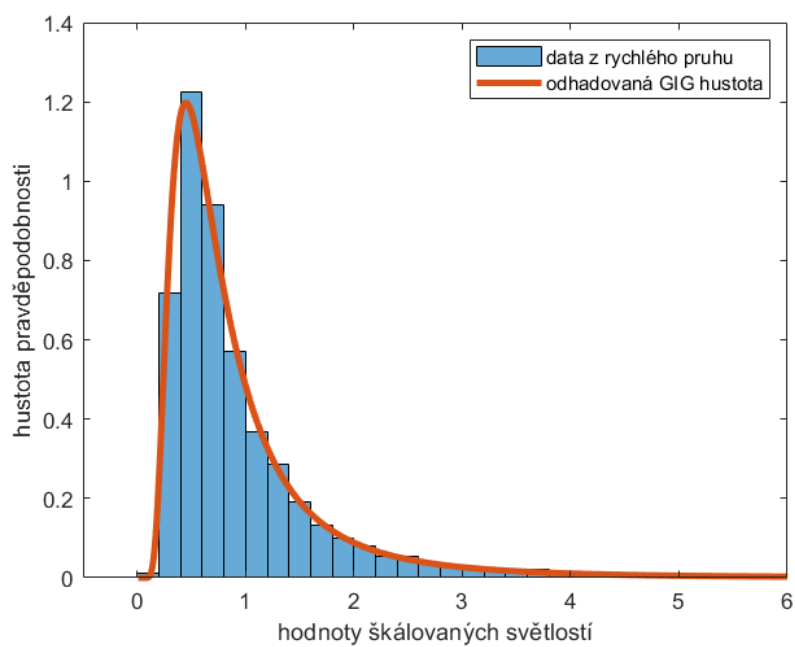
Obrázek 6.2: Odhad pro rychlý pruh s hustotou v intervalu (5,10).



Obrázek 6.3: Odhad pro rychlý pruh s hustotou v intervalu (13,18).



Obrázek 6.4: Odhad pro rychlý pruh s hustotou v intervalu (17,22).



Obrázek 6.5: Odhad pro rychlý pruh s hustotou v intervalu (21,26).

Kapitola 7

Supernáhodná varianta dopravního plynu

7.1 Kombinovaný potenciál

Jak jsme již zmiňovali, za určitých podmínek je pro přesný popis částicového systému třeba uvažovat i sílu přitažlivou. Pro tento popis použijeme potenciál

$$\varphi(r) = \kappa \ln(r) + \frac{1}{r}, \quad (7.1)$$

kde κ je kladný parametr, tzv. *silový koeficient*, vyjadřující poměr mezi přitažlivou složkou $\kappa \ln(r)$ a odpuzivou složkou $\frac{1}{r}$. Nejdříve spočteme dle vztahu $F(r) = -\frac{d\varphi}{dr}$ příslušnou sílu a ověříme vlastnost pro vymizení interakce při dlouhých vzdálenostech a vlastnost pro zabránění srážky. Zderivováním potenciálu získáme sílu

$$F(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2}.$$

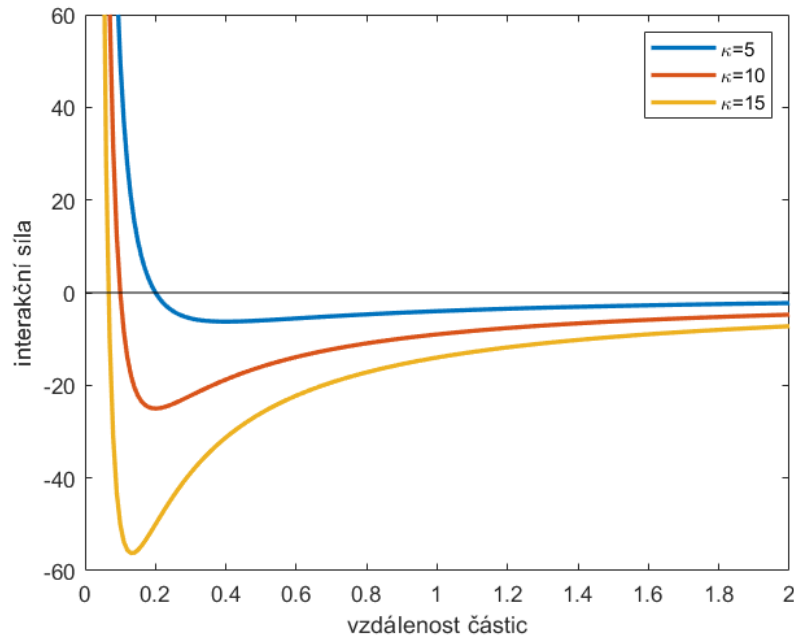
Ověříme, že tato síla zabráni srážce, tedy

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} F(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{-\kappa r + 1}{r^2} = +\infty,$$

a zda-li vykazuje vlastnost vymizení interakce pro velké vzdálenosti, tedy

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} -\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2} = 0.$$

Obě vlastnosti máme splněné a s touto silou má tedy smysl dále pracovat. Potenciál $\varphi(r)$ budeme nazývat *kombinovaný potenciál*, jelikož kombinuje dvě složky, a to repulzivní a atraktivní složku. Atraktivní složku zastává člen $\kappa \ln(r)$, resp. $-\frac{\kappa}{r}$ a repulzivní složku zastává člen $\frac{1}{r}$, resp. $\frac{1}{r^2}$. Můžeme se podívat na obrázek 7.1, kde je znázorněn průběh kombinované síly.

Obrázek 7.1: Průběh síly při různé volbě κ .

7.2 Model termodynamického dopravního plynu

Úkolem této bakalářské práce je navrhnout vlastní variantu termodynamického dopravního plynu, jehož stacionární stav je výrazně supernáhodný. Tento návrh spočívá ve vhodném zvolení parametrů kombinovaného potenciálu. Zda-li je stacionární stav systému, ve kterém působí mezi částicemi určená síla, supernáhodný, si opět ověříme pomocí algoritmické realizace. Budeme opět uvažovat kruhovou variantu modelu termodynamického dopravního plynu. Algoritmus bude probíhat téměř totožně jako algoritmus v kapitole 4. Jediná změna bude ve tvaru potenciálu, který v této variantě budeme volit jako kombinovaný podle vztahu (7.1).

V šesté kapitole jsme z analýzy rozptylů zjistili, že supernáhodné stavy nastávají při nižších hustotách provozu. Parametry α , β a λ zvolíme dle tabulky odhadů z předchozí kapitoly. Tvar hustoty pravděpodobnosti $g(x)$ odhadující distribuci světlostí v částicovém systému, ve kterém mezi částicemi působí síly určené potenciálem $\varphi(x)$, je odvozen v práci [3] a má tvar $g(x) = Ae^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x}$. Jak volit κ určující působení atraktivní síly lze odvodit následovně:

$$g(x) = Ae^{-\beta\varphi(x)}e^{-\lambda x} = Ae^{-\beta[\kappa \ln x + 1/x]}e^{-\lambda x} = Ax^{-\beta\kappa}e^{-\frac{\beta}{x}}e^{-\lambda x}.$$

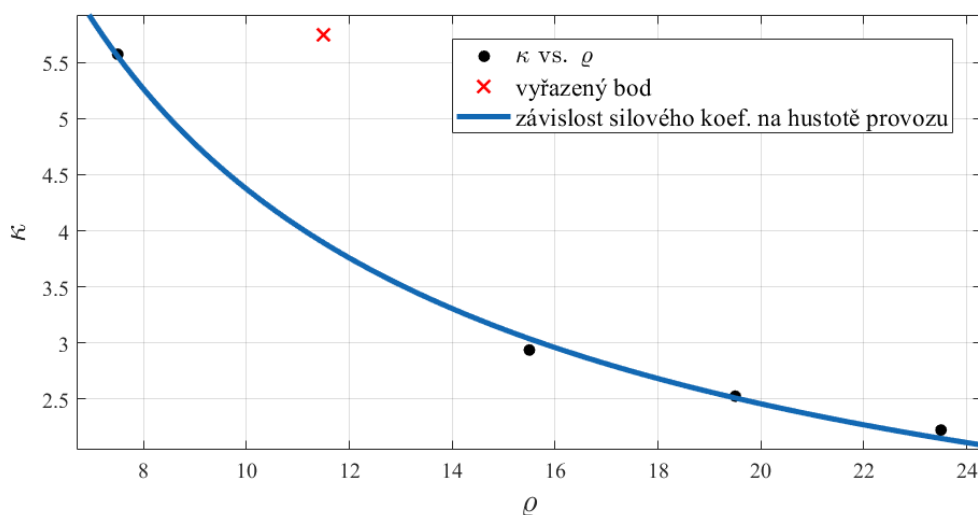
Protože na odhad používáme funkci g_{GIG} (3.9), pak pro parametr α platí rovnost $\alpha = -\kappa \cdot \beta$. Parametr κ budeme volit v závislosti na parametru α a β jako $\kappa = -\frac{\alpha}{\beta}$. Zreplikujeme si tabulku 6.1, přidáme k ní vypočtené hodnoty parametru κ a rozptyl roztečí z této simulace.

I přestože je rozptyl simulace menší než jedna, některé z pokusů při parametrech pro hustoty (17,22) a (21,26) skončily v superpoissonovském stavu. Uvedený rozptyl simulace je totiž průměrný rozptyl pro sto realizací cyklu. Jak můžeme vidět na grafech níže, potenciální energie systému se ustálila a nacházíme se tedy ve stacionárním stavu, který je supernáhodný. Jelikož druhé pozorování pro hustotu (9,14)

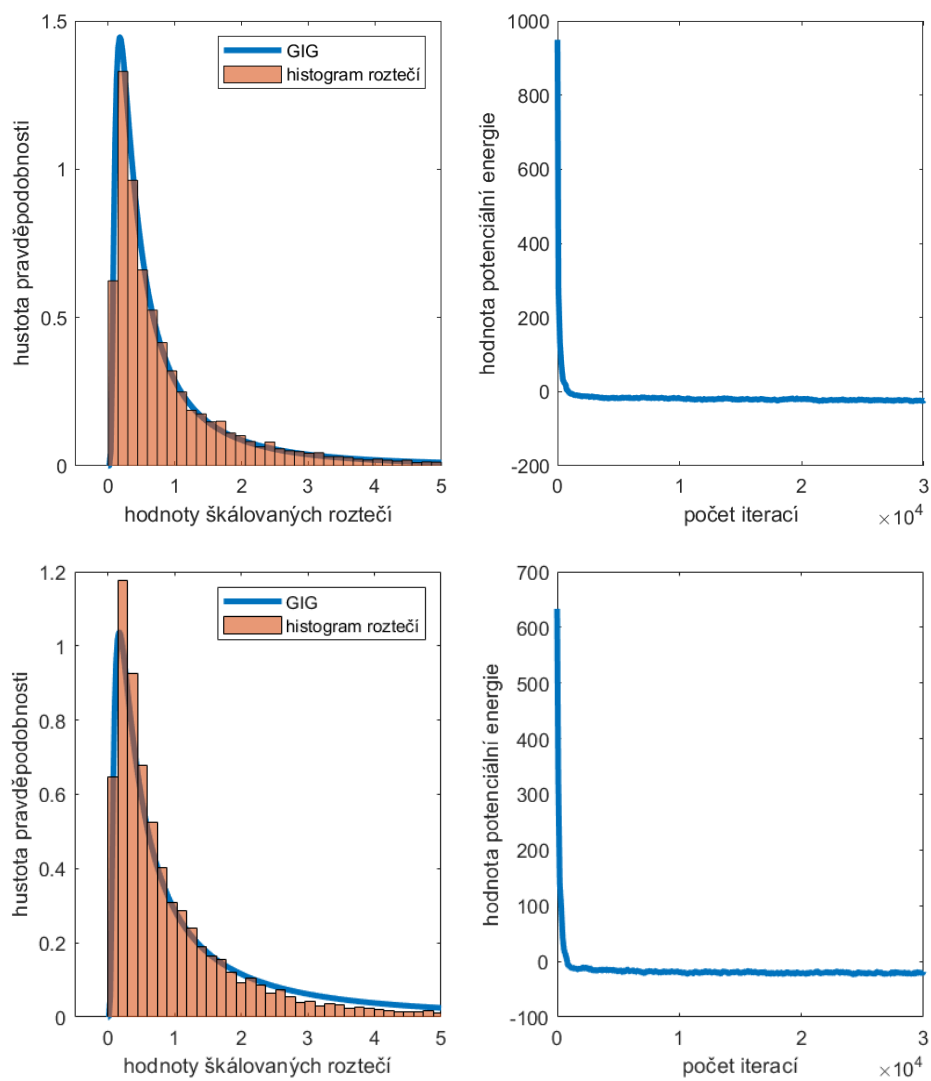
interval hustoty	(5,10)	(9,14)	(13,18)	(17,22)	(21,26)
α	-1.5940	-1.2485	-2.733	-3.1367	-3.6271
β	0.2860	0.2172	0.9303	1.2416	1.6303
λ	0.2294	0.1550	0.0718	0.0419	0.0013
κ	5.5734	5.7482	2.9378	2.5263	2.2248
rozptyl simulace	1.5180	1.3559	1.2263	0.9559	0.9462
rozptyl empirický	1.6349	1.5318	1.3632	1.1960	1.0886

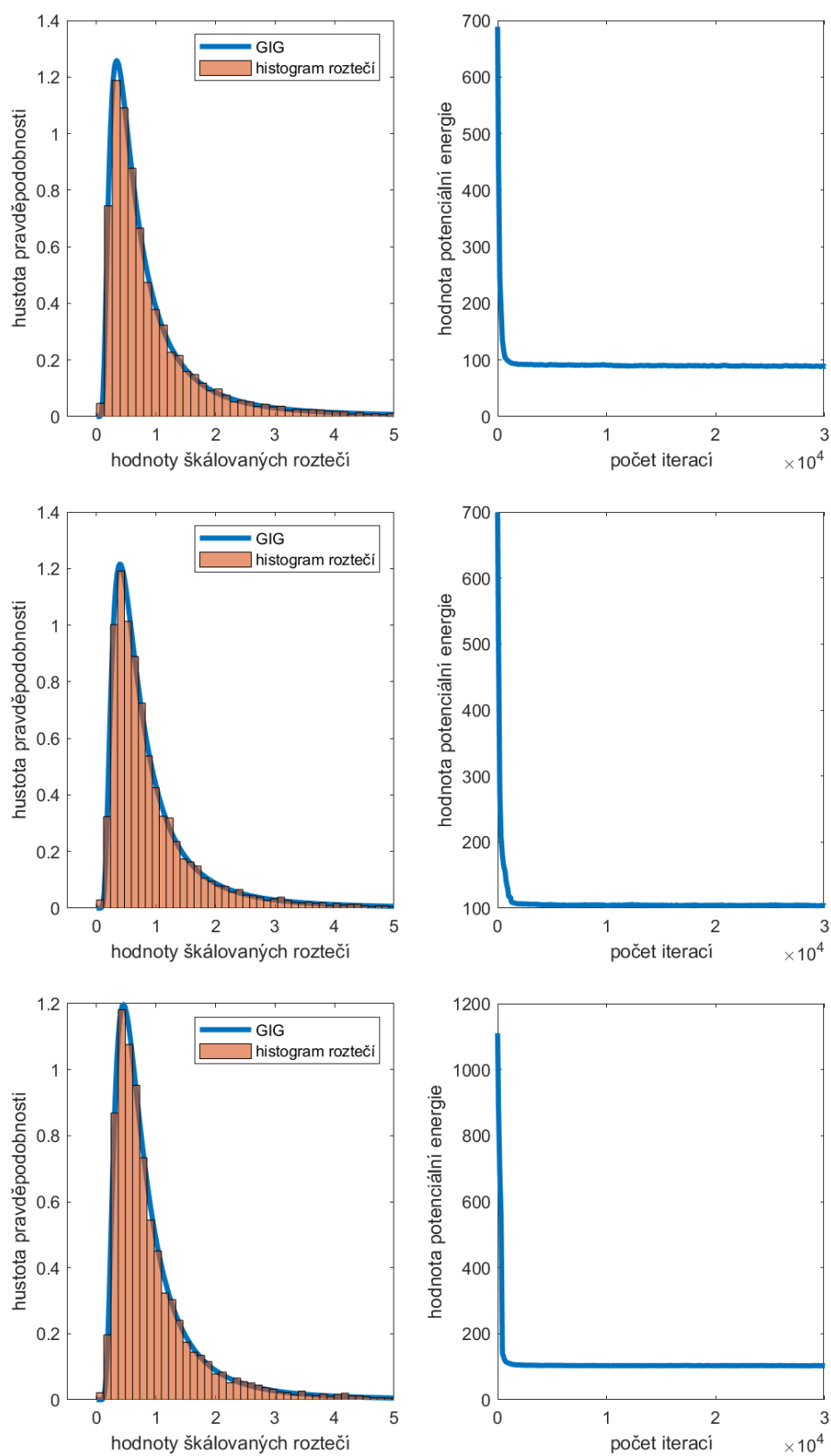
Tabulka 7.1: Porovnání rozptylů z empirických dat rychlého pruhu a navržené simulace.

nesplňuje klesající trend parametru α a histogram roztečí není tak dobře popsán příslušnou hustotou (viz obr. 7.3 a 7.4), je možné se domnívat, že vznikla chyba již u odhadování parametrů u empirických dat. Pokusíme se odhadnout závislost κ na hustotě provozu a pozorování zatížené chybou odhadu vyřadíme. Na obrázku 7.2 vidíme odhadovanou závislost κ na hustotě, což potvrzuje výsledky z empirických dat a působení přitažlivé síly s rostoucí hustotou vymizí.

Obrázek 7.2: Křivka popisující závislost $\kappa = \kappa(\rho)$.

Na obrázcích níže (obr. 7.3, obr. 7.4) vidíme porovnání rozdělení světlostí pro numerický model termodynamického plynu s kombinovaným potenciálem. Histogram reprezentuje výstup numerického modelu, zatímco křivka představuje funkci ze třídy GIG ve tvaru (3.23), kde hodnoty parametrů α , β a λ jsou uvedené v tabulce 7.1. Křivka vpravo značí průběh potenciální energie, která se relativně rychle ustálí na takřka konstantní hodnotě, což nám potvrzuje stacionární stav systému.

Obrázek 7.3: Horní obr. $\rho \in (5, 10)$ a spodní $\rho \in (9, 14)$.

Obrázek 7.4: Horní obr. $\rho \in (13, 18)$, prostřední $\rho \in (17, 21)$ a spodní $\rho \in (21, 26)$.

Závěr

V prvních dvou kapitolách práce jsme čtenáře seznámili s oborem VHM a termodynamickým modelem dopravního plynu. Vytvořili jsme několik vizualizací headway distribucí a základních veličin dopravních systémů

Ve třetí kapitole jsme uvedli základní vlastnosti balančních hustot, přičemž se podařilo vyslovit a dokázat vylepšenou větu o nutné podmínce momentového kódu 3.1.3. Tím pádem jsme mohli zlepšit i důkaz věty o analytičnosti $G(s)$ v nule 3.1.7. Díky tomuto poznatku z důkazu také vyplývá, že poloměr konvergence MacLaurinovy řady funkce $G(s)$ je roven přímo balančnímu indexu příslušné hustoty, tedy $R = \text{inb}(g)$. Dosud byla dokázána pouze nerovnost $R \leq \text{inb}(g)$. Užitečným, avšak neočekávaným, poznatkem třetí kapitoly je rekurentní vzorec pro výpočet k -tého momentu (3.20) škálované hustoty pravděpodobnosti pro třídu GIG ve tvaru

$$\mu_k(g_{GIG}) = \frac{\beta}{\lambda} \mu_{k-2}(g_{GIG}) + \frac{\alpha + k}{\lambda} \mu_{k-1}(g_{GIG}).$$

Podařilo se nám tedy odvodit vzorec pro výpočet k -tého momentu funkce ze třídy GIG bez nutnosti vyčíslení hodnot MacDonalldovy funkce.

V další kapitole jsme ověřili funkčnost algoritmu pro dopravní modelování, abychom mohli tento algoritmus aplikovat na supernáhodnou variantu. Superpoissonovský stav v teorii dopravy je dosud neprobádaná oblast, a proto jsme se pokusili více popsat příslušné distribuce světlostí. V šesté kapitole jsme lokalizovali výskyt supernáhodných stavů a v těchto segmentech odhadli parametry distribuce GIG pro tyto stavy. Ukázalo se, že parametr α (tenze) hustoty g_{GIG} je ve všech případech supernáhodného stavu záporný. Pro zápornou tenzi bohužel nemáme analyticky vyřešenou škálovací rovnici pro g_{GIG} , a tak tento poznatek nabádá k rozsáhlejšímu řešení úlohy škálování. Rozptyly světlostí v reálných datech i odhadnuté parametry odpovídaly teoretické předpovědi. Obsahem poslední kapitoly je varianta modelu termodynamického dopravního plynu, jejíž stacionární stav je supernáhodný. V tomto případě jsme použili hodnoty odhadnutých parametrů z reálných dat a pokusili se nasimulovat částicový systém se supernáhodným stacionárním stavem, což se ve většině případů podařilo. Při dalším zkoumání jsme zjistili, že hodnota parametru κ , určující vliv přitažlivé síly, se zvyšující se hustotou provozu stále klesá. Z toho si vyvozujeme, že při vyšších hustotách provozu působení přitažlivé složky síly zcela vymizí, což by odpovídalo i skutečnosti, že supernáhodné stavy se ve vyšších hustotách provozu již nevyskytují. Tento výsledek navíc zcela souhlasí s intuitivní představou o změnách chování řidičů vynucených změnami dopravní hustoty.

Literatura

- [1] Kerner, B.S., 2004. *The Physics of Traffic*, Springer-Verlag, New York.
- [2] Krbálek M., Krbálková M., 2018., 3s-Unification for Vehicular Headway Modeling, *J. Phys. A: Math. Theor.* 40(2007) 5813-5821, doi:10.1088/1751-8113/40/22/004
- [3] Krbálek, M., 2007. Equilibrium distributions in a thermodynamical traffic gas. *J. Phys. A: Math. Theor.* 40 (22), 5813–5821.
- [4] Krbálek, Milan. Theoretical predictions for vehicular headways and their clusters, *J. Phys. A: Math. Theor.* 46 (2013), 445101.
- [5] Li, L., Chen, X.M., 2017. *Transportation Research Part C* 76, 170.
- [6] Luttinen, Tapio. (1999). Properties of Cowan's M3 Headway Distribution. *Transportation Research Record.* 1678. 189-196. 10.3141/1678-23.
- [7] Scharf, Rainer and Izrailev, Felix. (1999). Dyson's Coulomb gas on a circle and intermediate eigenvalue statistics. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 23. 963. 10.1088/0305-4470/23/6/018.
- [8] X. Chen, L. Li and Y. Zhang, "A Markov Model for Headway/Spacing Distribution of Road Traffic," in *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 773-785, Dec. 2010, doi: 10.1109/TITS.2010.2050141.
- [9] Yajie Zou and Hang Yang and Yunlong Zhang and Jinjun Tang and Weibin Zhang.: *Mixture modeling of freeway speed and headway data using multivariate skew-t distributions.* *Transportmetrica A: Transport Science*, vol. 13, num. 7, 657-678, 2017, Taylor and Francis, <https://doi.org/10.1080/23249935.2017.1318973>
- [10] Yajie Zou, Yunlong Zhang, Xinxin Zhu (2014) Constructing a bivariate distribution for freeway speed and headway data, *Transportmetrica A: Transport Science*, 10:3, 255-272, DOI: 10.1080/18128602.2012.745099