

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE**

**FAKULTA STROJNÍ**

**ÚSTAV MECHANIKY, BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY**



**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**MODELOVÁNÍ CYKlickÉ ViskoPlASTICITy KOVŮ**

**CONSTITUTIVE MODELLING OF CYCLIC VISCOPLASTICITY**

**PRAHA 2020**

**BC. ONDŘEJ HAVLÍČEK**

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Havlíček** Jméno: **Ondřej** Osobní číslo: **457527**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Modelování cyklické viskoplasticity kovů**

Název diplomové práce anglicky:

**Constitutive modelling of cyclic viscoplasticity**

Pokyny pro vypracování:

Vypracujte rešerši na téma modelování cyklické viskoplasticity kovů.  
Vytvořte skript pro kalibraci kinematičtého a izotropního zpevnění z vybraných experimentálních dat.  
Zvolte vhodnou funkci tečení a stanovte její parametry pro vybraná experimentální data.  
Získané parametry zvoleného modelu viskoplasticity aplikujte na 1D úlože řešené pomocí MKP.

Seznam doporučené literatury:

Halama, R. (2009). Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity kovů: habilitační práce.  
Chaboche, J. L. (2008). A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. International journal of plasticity, 24(10), 1642-1693.  
Dunne, F., & Petrinic, N. (2005). Introduction to computational plasticity. Oxford University Press on Demand.  
Zhang, S. L., & Xuan, F. Z. (2017). Interaction of cyclic softening and stress relaxation of 9–12% Cr steel under strain-controlled fatigue-creep condition: experimental and modeling. International Journal of Plasticity, 98, 45-64.  
Barrett, R. A., O'Donoghue, P. E., & Leen, S. B. (2013). An improved unified viscoplastic constitutive model for strain-rate sensitivity in high temperature fatigue. International Journal of Fatigue, 48, 192-204.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Michal Bartošák, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS**


Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:


Datum zadání diplomové práce: **22.04.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **07.08.2020**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_

  
Ing. Michal Bartošák, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce

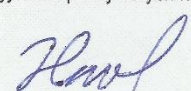
  
doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

  
prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.  
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

25.06.2020  
Datum převzetí zadání

  
Podpis studenta

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně, a to výhradně s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

V Praze dne:

Bc. Ondřej Havlíček

## **Poděkování**

Rád bych poděkoval svému vedoucímu diplomové práce Ing. Michalu Bartošákovi Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

# Anotační list

Jméno autora:	Bc. Ondřej HAVLÍČEK
Název DP:	Modelování cyklické viskoplasticity kovů
Anglický název:	Constitutive modelling of cyclic viscoplasticity
Rok:	2020
Studijní program:	(N2301) Strojní inženýrství
Obor studia:	(3901T003) Aplikovaná mechanika
Ústav:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
Vedoucí DP:	Ing. Michal BARTOŠÁK, Ph.D.
Bibliografické údaje:	počet stran: 71 počet obrázků: 42 počet tabulek: 5 počet příloh: 2
Klíčová slova:	Nízkocyklová únava, cyklická plasticita a viskoplasticita, metoda konečných prvků
Keywords:	Low-cycle fatigue, cyclic plasticity and viscoplasticity, finite element method
Anotace:	Tato diplomová práce se zabývá studiem cyklické plasticity a viskoplasticity kovů. V první části této práce jsou uvedeny základní principy a postupy běžně používané v inkrementální teorii plasticity a viskoplasticity a také přehled unifikovaných a neunifikovaných modelů pro popis viskoplasticity. Dále je provedena kalibrace dvou vybraných modelů na základě experimentálních dat ze zkoušky nízkocyklové únavy. Pro simulaci komplexního popisu cyklického chování materiálu byl navržen upravený unifikovaný viskoplastický model s hyperbolickým zákonem tečení, s rozšířeným izotropním zpevněním a paměťovým efektem.
Abstract:	This diploma thesis is focused on the constitutive modelling of cyclic plasticity and viscoplasticity. The first part of the thesis introduces the basic principles and procedures that are commonly used in incremental theory of plasticity and viskoplasticity, and an overview of unified and non-unified viscoplastic constitutive models. The material parameters of two selected viscoplastic models are determined on the basis of low-cycle fatigue tests. A modified unified viscoplastic material model with hyperbolic sine flow rule, improved isotropic hardening function and strain memory effect is proposed for simulating complex rate- and range-dependent cyclic behaviour of the material.

# Obsah

<b>Seznam zkratk a symbolů .....</b>	<b>7</b>
<b>1 Úvod.....</b>	<b>9</b>
<b>2 Inkrementální teorie plasticity a viskoplasticity .....</b>	<b>10</b>
2.1 Aditivní zákon.....	10
2.2 Podmínka plasticity .....	11
2.3 Pravidlo zpevnění.....	12
2.3.1 Izotropní zpevnění.....	12
2.3.2 Kinematické zpevnění .....	12
2.3.3 Kombinované zpevnění.....	13
2.4 Podmínka konzistence .....	13
2.5 Pravidlo normality.....	14
2.6 Viskoplasticita.....	15
<b>3 Modelování cyklické plasticity a viskoplasticity.....</b>	<b>17</b>
3.1 Konstitutivní rovnice kinematického zpevnění.....	17
3.1.1 Pragerův model.....	17
3.1.2 Armstrong-Frederickův model.....	18
3.2 Konstitutivní rovnice kombinovaného zpevnění.....	19
3.2.1 Chabocheho kombinovaný model izotropního a kinematického zpevnění .....	19
3.2.2 Rozšíření izotropního zpevnění .....	20
3.2.3 Paměťová plocha.....	21
3.2.4 Rozšíření kinematického zpevnění.....	22
3.3 Two-layer viscoplasticity model .....	23
3.4 Chabocheho unifikovaný model viskoplasticity .....	24
<b>4 Navržený model s hyperbolickým zákonem tečení .....</b>	<b>26</b>
4.1 Implementace modelu.....	28
4.1.1 Numerická integrace konstitutivních rovnic.....	28
4.1.2 Diskretizace konstitutivních rovnic.....	32
<b>5 Kalibrace vybraných modelů plasticity a viskoplasticity.....</b>	<b>34</b>

5.1	Identifikace parametrů kinematického zpevnění.....	34
5.2	Identifikace parametrů izotropního zpevnění.....	36
5.3	Identifikace parametrů modelu two-layer viscoplasticity .....	37
5.4	Identifikace modelu s hyperbolickým zákonem tečení.....	38
5.4.1	Identifikace upraveného pravidla izotropního zpevnění.....	38
5.4.2	Identifikace funkce tečení.....	40
<b>6</b>	<b>Simulace cyklické viskoplasticity .....</b>	<b>41</b>
6.1	Popis experimentálních dat .....	41
6.2	Model v programu Abaqus .....	43
6.3	Výsledky kalibrace two-layer viscoplasticity modelu .....	44
6.3.1	Výsledky kalibrace kinematického a izotropního zpevnění .....	44
6.3.2	Výsledky kalibrace funkce tečení .....	46
6.3.3	Dílčí zhodnocení výsledků .....	51
6.4	Výsledky kalibrace navrženého unifikovaného modelu .....	53
6.4.1	Výsledky kalibrace kinematického a izotropního zpevnění .....	53
6.4.2	Výsledky kalibrace funkce tečení .....	56
6.4.3	Dílčí zhodnocení výsledků .....	61
<b>7</b>	<b>Závěr .....</b>	<b>62</b>
	<b>Seznam použité literatury .....</b>	<b>64</b>
	<b>Seznam obrázků.....</b>	<b>69</b>
	<b>Seznam tabulek .....</b>	<b>71</b>
	<b>Seznam příloh .....</b>	<b>71</b>
	<b>Přílohy.....</b>	<b>1</b>
	Příloha A .....	1
	Příloha B.....	3

## Seznam zkratk a symbolů

### Latinská abeceda

$\mathbf{a}, \mathbf{a}_i$	Deviátor kinematického tenzoru, část deviátoru
$A$	Parametr viskózního tečení
$A$	Parametr izotropního zpevnění
$b$	Parametr izotropního zpevnění
$b_r$	Parametr statického zotavení
$B$	Parametr izotropního zpevnění
$C$	Parametr izotropního zpevnění
$\mathbf{C}$	Matice elastických konstant (tenzor 4. řádu)
$C_i$	Parametr kinematického zpevnění
$CF$	Cílová funkce
$d_0$	Počáteční průměr
$err$	Tolerance konvergence
$E$	Youngův modul pružnosti
$f$	Podmínka plasticity, plocha plasticity
$f_v$	Poměr elastických modulů
$F$	Paměťová plocha
$G$	Smykový modul
$h$	Plastický modul
$H$	Parametr lineární části izotropního zpevnění
$i_{max}$	Maximální počet iterací
$I$	Jednotková matice
$K$	Parametr funkce tečení
$K_p$	Statický elasticko-plastický modul
$K_v$	Viskoelastický modul
$l_0$	Počáteční délka
$m_r$	Izotropní parametr časové závislosti
$n$	Parametr viskózního tečení
$\mathbf{n}$	Jednotkový tenzor k ploše plasticity
$\mathbf{n}'$	Jednotkový tenzor k paměťové ploše
$N$	Počet cyklů
NCÚ	Nízkocyklová únava
$N_f$	Životnost
$p$	Akumulovaná plastická deformace, ekvivalentní viskoplastická deformace



$q$	Poloměr paměťové plochy
$Q$	Parametr izotropního zpevnění
$Q_r$	Izotropní parametr časové závislosti
$R$	Izotropní proměnná
$\mathbf{s}$	Deviátor tenzoru napětí
$t$	Čas
$T$	Teplota
UMAT	Uživatelsky definovaný materiálový model
$Y$	Poloměr plochy plasticity
$Z$	Zavedená substitute

### Řecká abeceda

$\alpha$	Parametr hyperbolického zákona tečení
$\boldsymbol{\alpha}, \alpha_i$	Kinematický tenzor napětí, část kinematického tenzoru
$\beta$	Parametr hyperbolického zákona tečení
$\gamma_i$	Parametr kinematického zpevnění
$\gamma_r$	Parametr statického zotavení
$\varepsilon$	Logaritmická deformace
$\varepsilon_a$	Amplituda deformace
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenzor celkové deformace
$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	Elastická deformace
$\boldsymbol{\varepsilon}_p$	Tenzor (visko)plastické deformace
$\eta$	Parametr paměťové plochy
$d\lambda$	Skalární součinitel, plastický násobek
$\nu$	Poissonovo číslo
$\xi_p$	Poloha paměťové plochy
$\sigma$	Cauchyho napětí
$\sigma_{1,2,3}$	Hlavní napětí
$\sigma_{max}$	Maximální napětí, amplituda napětí
$\sigma^{tr}$	Elastický prediktor
$\sigma_v$	Viskózní napětí
$\sigma_y$	Počáteční mez kluzu
$\sigma_{y0}$	Mez kluzu bez izotropního zpevnění
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenzor napětí
$\Psi$	Směr zatěžování
$\Omega$	Viskoplastický potenciál

# 1 Úvod

V mnoha současných průmyslových aplikacích je zahrnuto časově proměnné namáhání strojních součástí, které může vést k únavě materiálu. V poslední době je kladen vysoký požadavek na bezpečnost, ale také na optimální poměr výrobní ceny a dlouhodobé funkčnosti. Vývoj nových matematických konstitutivních rovnic pro popis plastického a viskoplastického chování materiálů byl důležitým cílem výzkumu v posledních desetiletích. V současnosti se využívá stále více numerických metod pro predikci životnosti cílového produktu pro očekávané provozní zatížení. Nejčastěji je v této oblasti využívána metoda konečných prvků. Tento trend je přímo navázán na současný vývoj nové výpočetní techniky, která je stále rychlejší, efektivnější a dostupnější. Díky tomu je možné řešit složitější úlohy v kratším časovém horizontu, nežli tomu bylo před několika lety.

Většina existujících teorií popisujících cyklické chování materiálu je z větší míry fenomenologická. Každý model cyklické plasticity, resp. viskoplasticity má pouze omezené možnosti použití. Fenomenologické modely není možné ověřit teoreticky, ale je nutné, je validovat na základě experimentálních zkoušek. Tyto zkoušky by se měly co nejvíce blížit podmínkám ve finální aplikaci. Toto však může být náročné nejen z časových, ale i technických možností. V praxi se často provádí zkoušky nízkocyklové únavy, nebo teplotně-mechanické únavy.

Tato diplomová práce je rozdělena do několika částí. Ve druhé kapitole budou představeny základní principy a postupy, které se běžně používají v inkrementální teorii plasticity a viskoplasticity. Dále budou ve třetí kapitole uvedeny základní modely popisující cyklickou plasticitu, resp. viskoplasticitu, mezi které patří například neunifikovaný two-layer viscoplasticity model, nebo Chabocheho unifikovaný model viskoplasticity. Pro vybrané modely bude obecně popsán postup kalibrace materiálových parametrů na základě experimentálních dat získaných ze zkoušek nízkocyklové únavy, které byly provedeny pro konstantní rychlost deformace a konstantní amplitudu deformace. Ve 4. kapitole bude představen nově navržený unifikovaný model s hyperbolickým zákonem tečení, který umožní komplexní popis cyklického zpevnění. Pomocí tohoto modelu a two-layer viscoplasticity modelu budou v závěru simulovány zkoušky nízkocyklové únavy. Výsledky těchto simulací pak budou porovnávány s výsledky experimentálních zkoušek pro nízkolegovanou chrom-molybdenovou ocel 42CrMo4. V příloze této diplomové práce jsou uvedeny dva skripty v programu Matlab, které slouží pro kalibraci kinematického a izotropního zpevnění.

## 2 Inkrementální teorie plasticity a viskoplasticity

Chování materiálu, při kterém dochází ke vzniku trvalých nevratných deformací a napětově-deformační odezva materiálu je časově nezávislá, je označováno jako plastické. Pokud je chování materiálu závislé na rychlosti deformace, je označováno jako viskoplastické. Jedním z nejčastěji používaných přístupů k numerickému modelování elastoplastického, resp. viskoplastického chování materiálu je inkrementální teorie plasticity, resp. viskoplasticity. V kapitolách 2.1 až 2.5 budou uvedeny základy principy a metody, které se běžně používají při modelování plasticity, ale tyto principy platí i pro viskoplasticitu. Detailněji je tato problematika popsána např. v [1]. Dále pak budou uvedeny postupy pro modelování viskózního chování.

### 2.1 Aditivní zákon

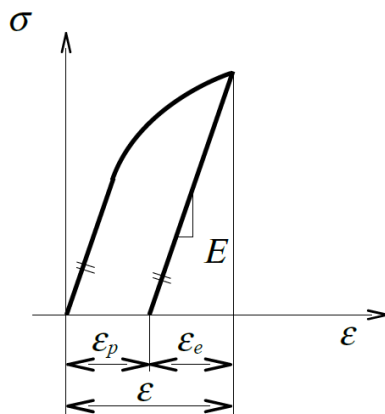
Nejprve je uvažován jednoosý stav napjatosti. Vznik trvalých deformací při tahové zkoušce nastává po překročení meze kluzu  $\sigma_y$  a při následném odlehčení se materiál chová elasticky. Celková deformace  $\varepsilon$  je tedy dána jako součet elastické  $\varepsilon_e$  a plastické složky  $\varepsilon_p$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad (2.1)$$

pro elastickou složku platí Hookeův zákon

$$\sigma = E\varepsilon_e, \quad (2.2)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu a  $\sigma$  je napětí viz. obr. 2.1. Přímá úměrnost mezi napětím a elastickou deformací platí ve kterémkoli bodě, i nad mezí kluzu při zatěžování, či odlehčování [2].



obr. 2.1 - Aditivní zákon [1]

Pro víceosé namáhání lze získat obdobné vztahy. Tenzor celkové deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je dán superpozicí elastické  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  a plastické složky  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (2.3)$$

a také zde platí zobecněný Hookeův zákon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad (2.4)$$

kde  $\mathbf{C}$  je matice elastických konstant (tenzor čtvrtého řádu) a  $\boldsymbol{\sigma}$  představuje tenzor napětí [2].

## 2.2 Podmínka plasticity

Podmínka plasticity vyjadřuje, kdy dochází ke tvorbě plastické deformace. V případě jednoosého namáhání a uvažování ideálního elastoplastického materiálu lze podmínku plasticity vyjádřit pomocí funkce plasticity  $f(\boldsymbol{\sigma})$  jako

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y = |\sigma| - \sigma_y = 0. \quad (2.5)$$

Tedy pro ideální elastoplastický materiál nemůže napětí  $\sigma$  přesáhnout mez kluzu  $\sigma_y$ . Při odlehčení není splněna podmínka plasticity a materiál se chová pouze elasticky. Pro víceosé namáhání je třeba uvažovat všechny složky tenzoru napětí.  $\bar{f}(\boldsymbol{\sigma})$  představuje funkci vyjadřující ekvivalentní hodnotu napětí a závisí na zvolené hypotéze plasticity. Pro houževnaté materiály se nejčastěji používá von Missesova podmínka plasticity, kterou je možno vyjádřit pomocí hlavních napětí  $\sigma_{1,2,3}$

$$\bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}, \quad (2.6)$$

nebo pomocí deviátoru tenzoru napětí  $\mathbf{s}$

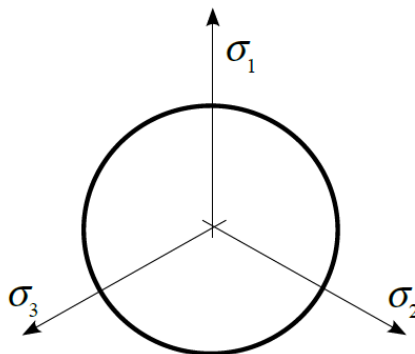
$$\bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}}. \quad (2.7)$$

Tenzor napětí lze rozdělit na sférickou část a deviátor napětí. Deviátor napětí je definován jako

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}, \quad (2.8)$$

kde  $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  označuje stopu tenzoru a  $\mathbf{I}$  je jednotková matice. Při plastické deformaci se objem tělesa prakticky nemění, sférická část nemá vliv na plastické přetvoření a uplatňuje se pouze deviátor [2].

Podmínku plasticity lze zobrazit do prostoru hlavních napětí. Toto zobrazení se nazývá plocha plasticity. U podmínky von Misses jde o válec s osou ležící na přímce  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ .



obr. 2.2 - Plocha plasticity [1]

Častěji se jako plocha plasticity označuje její průmět do deviátorové roviny. Tímto průmětem je kružnice viz. obr. 2.2. V případě ideálně elastoplastického materiálu je tato plocha neměnná, její změny vyjadřuje příslušné pravidlo zpevnění. K plastické deformaci může dojít pouze, pokud bod znázorňující aktuální stav napjatosti leží na ploše plasticity [2].

## 2.3 Pravidlo zpevnění

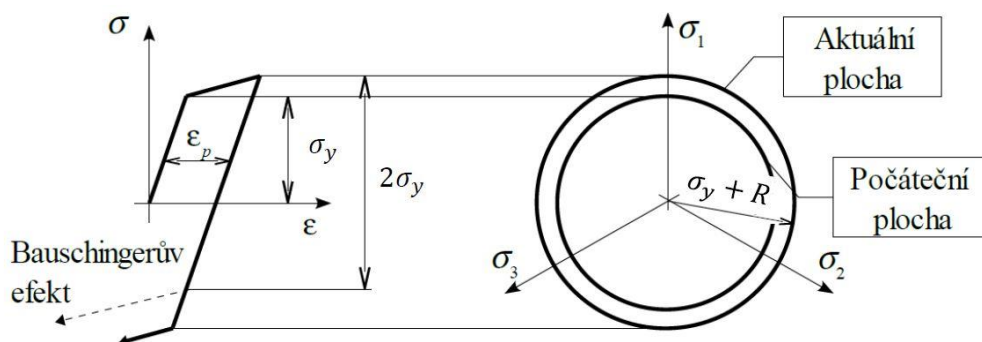
U reálných materiálů je nutné zahrnout vliv deformačního zpevnění, které se projevuje změnou plochy plasticity. Plocha plasticity může obecně měnit svoji polohu, velikost i tvar. Dle typu změny lze poté rozdělit pravidla zpevnění na izotropní, kinematické, nebo kombinované.

### 2.3.1 Izotropní zpevnění

U tohoto typu zpevnění se mění pouze velikost plochy plasticity, ne však její poloha. Například pro von Misesovu podmínku to znamená, že se mění poloměr plochy plasticity. Funkci plasticity je možno vyjádřit jako

$$f(\boldsymbol{\sigma}, R) = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y - R = 0, \quad (2.9)$$

kde skalární izotropní proměnná  $R$  udává změnu velikosti plochy plasticity a součet  $\sigma_y + R$  může být interpretován jako nová hodnota meze kluzu v aktuálním napěťovém stavu. Užití modelu pouze s izotropním zpevněním není vhodné pro cyklické namáhání, jelikož tento model správně nezachycuje Bauschingerův efekt. Tato skutečnost je patrna na obr. 2.3 [2].



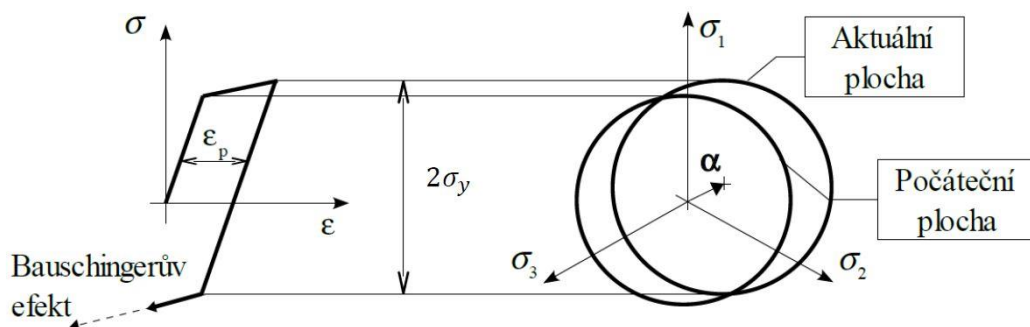
obr. 2.3 - Izotropní zpevnění [1]

### 2.3.2 Kinematické zpevnění

Kinematické pravidlo popisuje opačný případ, kdy se velikost plochy plasticity nemění, ale mění se její poloha v prostoru hlavních napětí. Aktuální polohu středu plochy plasticity definuje kinematický tenzor napětí  $\boldsymbol{\alpha}$ , který představuje vnitřní řídicí proměnou ve funkci plasticity

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \sigma_y = 0. \quad (2.10)$$

Tento typ zpevnění dokáže správně zachytit Bauschingerův efekt, což je patrné z obr. 2.4. Při překročení meze kluzu u jednoosého namáhání a následném odlehčení z plastického stavu dojde znovu k plastické deformaci v opačném směru až při změně napětí o dvojnásobek meze kluzu [2].



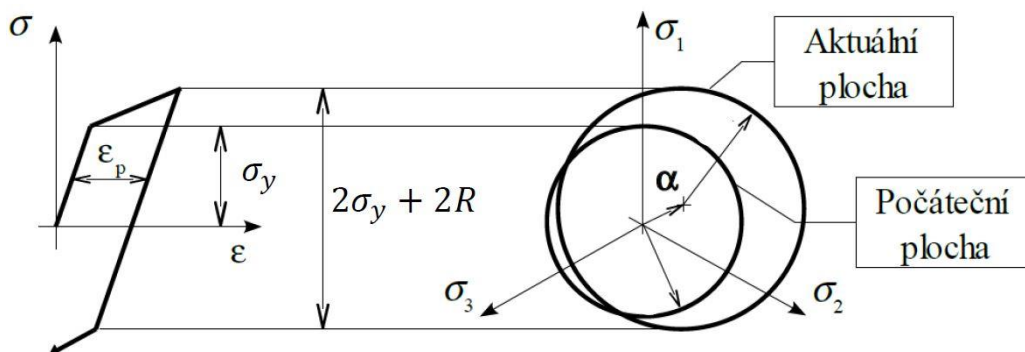
obr. 2.4 - Kinematické zpevnění [1]

### 2.3.3 Kombinované zpevnění

Tento typ zpevnění je kombinací předchozích dvou. Umožňuje správně zachytit Bauschingerův efekt a také popsat rozdíly mezi statickou a cyklickou deformační křivkou. Plocha plasticity zde může měnit svoji polohu a zároveň měnit své rozměry viz. obr. 2.5. Von Misesovu podmínku plasticity je možno vyjádřit jako

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, R) = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \sigma_y - R = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{a}) : (\boldsymbol{s} - \boldsymbol{a})} - \sigma_y - R = 0, \quad (2.11)$$

kde  $\boldsymbol{a}$  je deviatorová část kinematického tenzoru napětí  $\boldsymbol{\alpha}$  [2].



obr. 2.5 - Kombinované zpevnění [1]

## 2.4 Podmínka konzistence

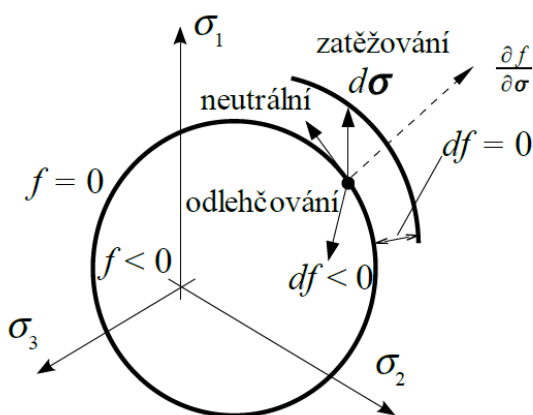
Podmínka konzistence vyjadřuje požadavek, aby se bod, vyjadřující napěťový stav, nedostal vně plochy plasticity během aktivního zatěžování. Matematicky lze tuto podmínku vyjádřit pomocí totálního diferenciálu funkce plasticity

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : d\boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial R} dR = 0. \quad (2.12)$$

Tento vztah je vyjádřen pro model kombinovaného zpevnění z předchozí kapitoly. Výraz  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  představuje jednotkový vektor vnější normály k ploše plasticity. Poté první člen  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma}$  v rovnici představuje skalární součin přírůstku deformace a normály k ploše plasticity. Dle hodnoty tohoto členu lze rozlišit tři možnosti, které mohou nastat:

- *Zatěžování:*  $f = 0, df = 0, \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma > 0$ , přírůstek napětí směřuje vně plochy plasticity.
- *Neutrální zatěžování:*  $f = 0, df = 0, \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma = 0$ , přírůstek napětí má směr tečny k ploše plasticity a bod charakterizující napěťový stav zůstává na ploše plasticity.
- *Odlehčování:*  $f = 0, df < 0, \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma < 0$ , v tomto případě dochází ke změně chování z elastoplastického na elastické, jelikož přestává platit podmínka plasticity [1].

Z uvedeného plyne, že při aktivním zatížení musí dojít k posunu, nebo ke změně velikosti plochy plasticity (musí dojít ke změně vnitřních proměnných), aby bod, charakterizující napěťový stav, neopustil plochu plasticity viz. obr. 2.6 [2].



obr. 2.6 - Podmínka konzistence [1]

## 2.5 Pravidlo normality

Toto pravidlo vyjadřuje, jak se bude vyvíjet přírůstek plastické deformace v případě aktivního zatěžování. V případě jednoosého namáhání musí platit pravidlo, že kladný přírůstek napětí vyvolá kladnou změnu plastické deformace. Toto lze obecně zapsat jako

$$d\sigma : d\varepsilon_p > 0, \tag{2.13}$$

pokud se tento výraz porovná s pravidlem aktivního zatěžování, lze poté pravidlo normality vyjádřit jako

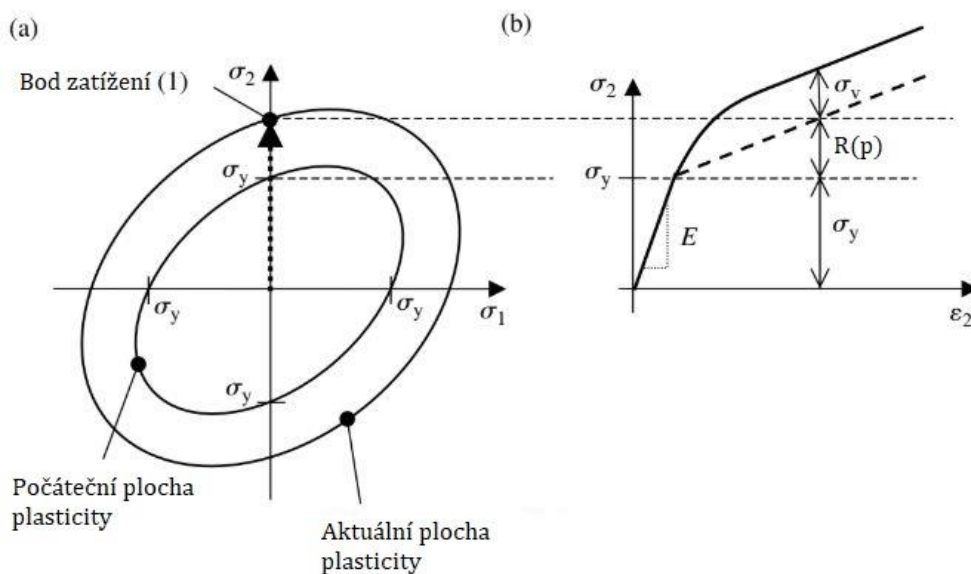
$$d\varepsilon_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \tag{2.14}$$

kde  $d\lambda$  je skalární součinitel (plastický násobek). Obecně je skalární součinitel roven přírůstku akumulované plastické deformace  $p$ , v případě jednoosého namáhání, je pak přímo roven absolutní hodnotě přírůstku axiální plastické deformace  $|d\varepsilon_{px}|$  [2].

## 2.6 Viskoplasticita

Doposud bylo uvažováno pouze časově nezávislé plastické chování materiálu, tedy chování, při kterém nezávisí na rychlosti zatěžování, ať už u deformačně, nebo napětově řízených zkoušek. Chování materiálu, které je závislé na rychlosti zatěžování, se nazývá viskoplastické. Velmi podobným mechanismem je také creep. Podle běžné konvence se jako viskoplasticita označuje rychlostně závislé plastické chování, při kterém je hlavním deformačním procesem krystalografický skluz, často doprovázený difúzně aktivovaným dislokačním šplhem. Naopak creep označuje nevratnou nízko rychlostní deformaci, řízenou především difúzí, nebo méně často také dislokačním skluzem. V obou případech jde o teplotně aktivované děje [3].

Pro viskoplasticitu lze použít stejné předpoklady, které byly zmíněny výše. Platí zde aditivní zákon, rozklad tenzoru deformace se ovšem liší podle toho, jestli se jedná o unifikované, nebo neunifikované modely. Pro neunifikované modely [4; 5; 6; 7] platí rozklad tenzoru deformace na elastickou, plastickou a creepovou (viskózní) složku. Naopak u unifikovaných modelů [8; 9; 10; 11] se druhé dvě složky nerozlišují a tenzor deformace je tedy rozložen na elastickou a viskoplastickou složku. Dále lze použít podmínku plasticity a materiál může zpevňovat dle izotropního, kinematického, nebo kombinovaného pravidla zpevnění. Hlavním rozdílem, mezi plasticitou a viskoplasticitou, je to, že se nadále nedá formálně použít podmínka konzistence a bod zatěžování se může nacházet vně plochy plasticity. Zavádí se zde nový pojem viskózního napětí  $\sigma_v$ . Jeho hodnota udává vzdálenost ekvidistantní plochy, na které se nachází bod zatěžování, od plochy plasticity, která odpovídá nulové rychlosti deformace. Názorně je tento problém zobrazen pro případ jednoosé napjatosti na obr. 2.7. Následující poznatky platí pouze pro unifikované modely. Na obr. 2.7(a), je zobrazena plocha plasticity s bodem charakterizujícím aktuální napětový stav (bod 1). Na obr. 2.7(b), je pak odpovídající stav zobrazen pomocí



obr. 2.7 - Viskózní napětí [3]



napěťově-deformační křivky. V případě rychlostně nezávislé plasticity, a při uvažování jednoosé napjatosti, je napětí dáno součtem meze kluzu, izotropního a kinematického zpevnění (v obrázku je pro jednoduchost uvažováno pouze lineární izotropní zpevnění)

$$\sigma = \sigma_y + R + \alpha . \quad (2.15)$$

Průběh napětí je zobrazen čárkovanou čarou. Pro případ viskoplasticity je nutné přičíst viskózní napětí

$$\sigma = \sigma_y + R + \alpha + \sigma_v , \quad (2.16)$$

což je zobrazeno plnou čarou [3].

Existuje mnoho rovnic, které definují viskózní napětí, ale nejčastěji se používá závislost na rychlosti akumulované plastické deformace. Užítím například mocninné funkce tečení pro jednoosou napjatost ve tvaru

$$\sigma_v = A\dot{p}^n , \quad (2.17)$$

kde  $A$  a  $n$  jsou materiálové konstanty, lze upravit rovnici (2.16) do tvaru

$$\dot{p} = \left( \frac{\sigma - \alpha - R - \sigma_y}{A} \right)^{\frac{1}{n}} . \quad (2.18)$$

Vztah mezi rychlostí akumulované plastické deformace, napětím a zpevněním je označován jako konstitutivní rovnice a nahrazuje podmínku konzistence. Pro obecnou napjatost lze rovnici přepsat do tvaru

$$\dot{p} = \left( \frac{\bar{f}(\sigma - \alpha) - R - \sigma_y}{A} \right)^{\frac{1}{n}} . \quad (2.19)$$

V dalších kapitolách této práce budou představeny modely, které využívají mocninnou, nebo hyperbolickou funkci tečení [3].

### 3 Modelování cyklické plasticity a viskoplasticity

V oblasti modelování cyklické plasticity bylo vyvinuto velké množství možností, jakým způsobem zachytit chování materiálu, které by se přiblížilo k poznatkům pozorovaným při experimentech [2; 7; 12; 13; 14; 15; 16; 17]. V této kapitole budou především představeny modely s jednou plochou plasticity, díky jejich robustnosti a rozšířenosti. Hlavním představitelem této skupiny je elastoplastický model s izotropním a kinematickým pravidlem zpevnění dle Chabocheho. Tento model byl postupem času upravován a rozšiřován tak, aby umožnil popis různých jevů v oblasti cyklické viskoplasticity. Modely viskoplasticity lze rozdělit do dvou skupin: unifikované a neunifikované modely. Mezi neunifikované modely lze zařadit two-layer viscoplasticity model, který bude v této kapitole představen. Představitelem druhé skupiny může být např. Chabocheho unifikovaný model viskoplasticity. Základem většiny modelů plasticity i viskoplasticity je kinematické a izotropní zpevnění. Jednotlivé modely zpevnění se především liší v konstitutivní rovnici pro stanovení kinematického tenzoru napětí  $\alpha$  a izotropní proměnné  $R$ . Ostatní teorie modelování nelineárního chování materiálu zde nebudou komentovány. Výjimku tvoří model využívající paměťové plochy v prostoru plastických deformací. Toho bude využito pro modelování cyklického zpevnění při různé amplitudě deformace. Dále budou v této kapitole představeny možnosti modelování viskózního chování zavedením různých funkcí tečení. V žádném modelu nebude uvažován vliv teploty. Je nutné poznamenat, že tato kapitola by neměla sloužit, jako kompletní přehled možností modelování, ale spíše jako představení základních modelů a jejich úprav vedoucích k lepšímu popisu viskoplastického chování. Toho bude následně využito k postupnému zlepšování simulace experimentálních zkoušek v praktické části této diplomové práce.

#### 3.1 Konstitutivní rovnice kinematického zpevnění

V této kapitole budou představeny dva základní modely kinematického zpevnění. Lineární Pragerův model [12] a nelineární Armstrong-Frederickův model [13].

##### 3.1.1 Pragerův model

Tento model kinematického zpevnění patří mezi nejjednodušší. Změna kinematického tenzoru je dána rovnicí

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{3} C \cdot \dot{\epsilon}_p, \quad (3.1)$$

kde  $C$  je parametr zpevnění, který v případě jednoosého zatěžování přímo odpovídá plastickému modulu  $h$ . Tento modul udává sklon aproximované deformační křivky vyjádřené v závislosti na plastické deformaci. Tento bilineární model kinematického zpevnění dává pouze lineární závislost napětí, což neodpovídá běžnému chování houževnatých materiálů. Tento důvod vedl k rozvíjení modelů zpevnění s nelineárním chováním [12; 18].

### 3.1.2 Armstrong-Frederickův model

Jedním z prvních modelů, který zavádí nelinearitu, je Armstrong-Frederickův model [13]. Nelineární odezvy je dosaženo přidáním tzv. paměťové složky k Pragerovu modelu

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{3}C \cdot \dot{\varepsilon}_p - \gamma\alpha\dot{p}, \quad (3.2)$$

kde  $C$  a  $\gamma$  jsou materiálové parametry a  $dp$  je přírůstek akumulované plastické deformace. Změna kinematického tenzoru napětí tedy také závisí na aktuální poloze plochy plasticity, což souvisí s předchozí historií zatěžování. Napěťově-deformační odezva je v tomto případě exponenciální. Úpravou předchozí rovnice pro jednoosé namáhání lze dojít k diferenciální rovnici

$$d\alpha = Cd\varepsilon_p - \gamma\alpha|\varepsilon_p|, \quad (3.3)$$

ze které lze separací proměnných, integrací a užitím podmínky plasticity získat vztah pro napětí

$$\sigma = \Psi\sigma_y + \Psi\frac{C}{\gamma} + \left(\alpha_0 - \frac{C}{\gamma}\right)e^{-\Psi\gamma(\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})}, \quad (3.4)$$

kde  $\Psi$  udává směr zatěžování ( $\Psi = 1$  pro tah a  $\Psi = -1$  pro tlak). Hodnoty  $\alpha_0$  a  $\varepsilon_{p0}$  vyplývají z počáteční podmínky [18].

Pro získání představy o vlivu parametrů  $C$  a  $\gamma$  je vhodné upravit předchozí rovnici pro zatěžování z nezatíženého stavu a vyšetřovat její limitní vlastnosti. Dosazením nulových počátečních podmínek pro plastickou deformaci a kinematické napětí vznikne vztah

$$\sigma = \sigma_y + \frac{C}{\gamma}(1 - e^{-\gamma\varepsilon_p}). \quad (3.5)$$

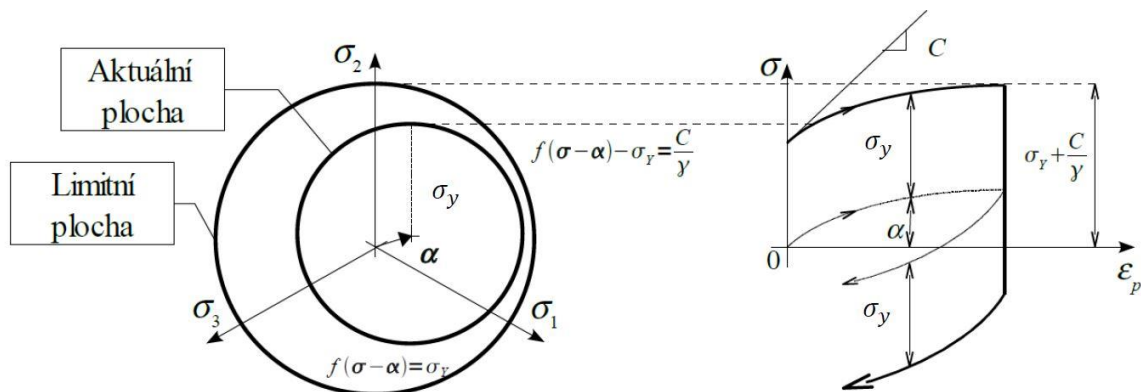
Pomocí limity první derivace předchozí rovnice lze určit význam parametru  $C$ , tedy

$$\lim_{\varepsilon_p \rightarrow 0} \left[ \frac{C}{\gamma} e^{-\gamma\varepsilon_p} \right] = C. \quad (3.6)$$

Parametr  $C$  udává sklon tečny při nulové hodnotě plastické deformace (na mezi kluzu). Význam druhého parametru je patrný z maximální hodnoty napětí, která může být dosažena při monotónním tahovém zatěžování. Opětovným použitím limity, tentokrát na původní rovnici, získáme vztah

$$\lim_{\varepsilon_p \rightarrow \infty} \left[ \sigma_y + \frac{C}{\gamma}(1 - e^{-\gamma\varepsilon_p}) \right] = \sigma_y + \frac{C}{\gamma}. \quad (3.7)$$

Z toho je patrné, že funkce (3.5) je rostoucí a parametr  $\gamma$  udává rychlost se kterou se funkce blíží k limitní hodnotě  $\sigma_y + \frac{C}{\gamma}$ . V modelu je díky tomuto také nepřímo zahrnuta limitní plocha.



obr. 3.1 - Význam parametrů A-F modelu [1]

Obdobným způsobem by mohla být stanovena také minimální hodnota napětí při tlakovém namáhání. Význam obou parametrů je také znázorněn na obr. 3.1. Kde je naznačeno, jakým způsobem je možné odhadnout parametry z experimentálních dat. Uvedený nelineární model kinematického zpevnění dokáže správně zachytit Bauschingerův efekt i tvar hysterezních smyček pro malý rozkmit plastické deformace, a je tedy vhodný pro popis cyklického namáhání. Při větším rozkmitu deformace a složitějším tvaru hysterezních smyček nemusí být tento model dostačující. Tuto nevýhodu odstraňuje následující model, který při popisu napět'ově-deformační odezvy používá složitější závislosti [18].

### 3.2 Konstitutivní rovnice kombinovaného zpevnění

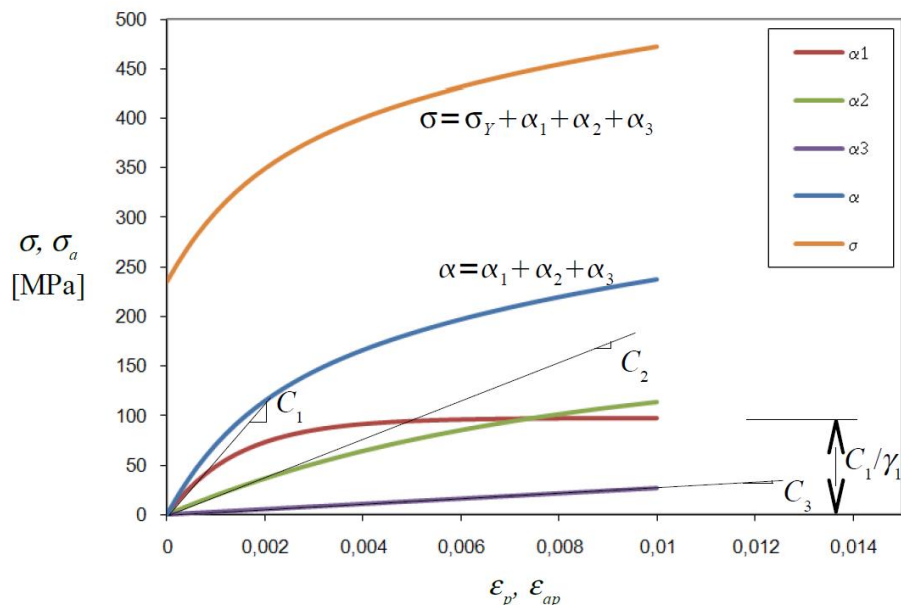
V této kapitole bude nejprve představen kombinovaný model izotropního a kinematického zpevnění dle Chabocheho [2] a dále zde budou uvedeny možné úpravy konstitutivních rovnic včetně zavedení paměť'ového efektu a statického zotavení.

#### 3.2.1 Chabocheho kombinovaný model izotropního a kinematického zpevnění

Hlavní myšlenka tohoto modelu spočívá v sestavení kinematického napětí jako superpozice několika částí

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}^i. \tag{3.8}$$

Jednotlivé části jsou definovány vlastní evoluční rovnicí (3.2) z předchozího modelu. Nejčastěji se používá model se dvěma ( $N = 2$ ), nebo se třemi ( $N = 3$ ) kinematickými částmi. Tento počet je ve většině případů dostačující pro zlepšení aproximace experimentálních dat. Jelikož je každá část dána stejnou evoluční rovnicí, platí pro materiálové parametry obdobné závěry, jako u Armstrong-Frederickova modelu. Jedna z částí může být dána Pragerovým pravidlem (3.1),



obr. 3.2 - Chabocheho kombinovaný model izotropního a kinematického zpevnění [18]

potom je chování této části lineární, jak naznačuje obr. 3.2. Pro získání vztahu pro napětí je nutné, integrovat každou evoluční rovnici zvlášť a poté získat celkový vztah jejich superpozicí. Výsledný vztah pro jednoosou napjatost je pak velmi podobný rovnici (3.4)

$$\sigma = \Psi\sigma_y + \sum_{i=1}^N \Psi \frac{C_i}{\gamma_i} + \left( \alpha_0^i - \frac{C_i}{\gamma_i} \right) e^{-\Psi\gamma_i(\varepsilon_p - \varepsilon_{p0})}. \quad (3.9)$$

Izotropní zpevnění, resp. změkčení, v tomto modelu popisuje cyklické zpevnění, resp. změkčení. Velikost plochy plasticity  $Y$  bývá v takovém případě vyjádřena pomocí počáteční hodnoty meze kluzu a izotropní proměnné  $R$ , která je závislá na akumulované plastické deformaci

$$Y = \sigma_y + R(p). \quad (3.10)$$

Uvedený vztah je doplněn o konstitutivní rovnici s nelineárním pravidlem

$$\dot{R} = b(Q - R)\dot{p}, \quad (3.11)$$

kde  $b$  udává rychlost, s jakou se izotropní proměnná stabilizuje a parametr  $Q$  udává přímo hodnotu, na níž se izotropní proměnná ustálí. Takovéto izotropní zpevnění umožňuje popsat materiál v případě, že u něj dochází ke stabilizaci cyklického zpevnění [18; 19].

### 3.2.2 Rozšíření izotropního zpevnění

Dosud použitý model izotropního zpevnění popsáný rovnicí (3.11) byl vhodný pouze pro materiály, které vykazují stabilizaci cyklického zpevnění a jejich chování není závislé na amplitudě plastické deformace a čase. Pro zachycení takovýchto vlastností je možné modifikovat izotropní zpevnění. Rozšířený model může být popsán rovnicemi [14]

$$\dot{R} = b(Q(q) - R)\dot{p} + b_r|Q_r - R|^{m_r-1}(Q_r - R) + H(1 + bp)\dot{p} \quad (3.12)$$

$$Q(q) = A + B(1 - e^{-cq}). \quad (3.13)$$

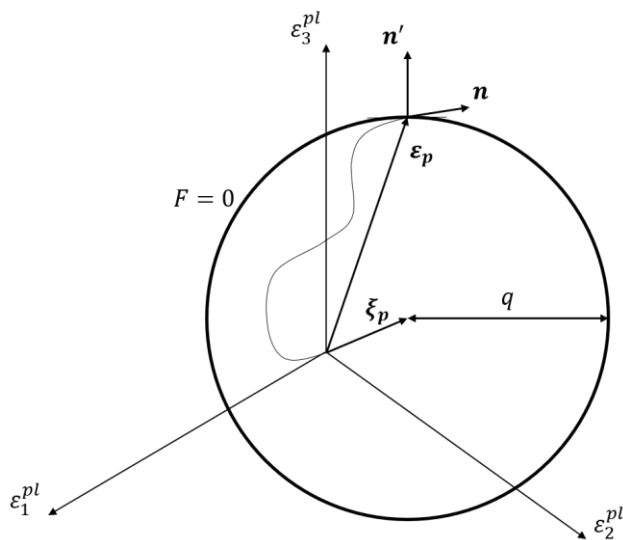
Poslední člen této rovnice charakterizuje lineární část izotropního zpevnění. Parametr  $H$  udává sklon této části. Druhý člen rovnice (3.12) popisuje statické zotavení izotropního zpevnění. Parametr  $Q_r$  udává asymptotickou hodnotu zotavení a  $b_r$  a  $m_r$  jsou parametry časové závislosti. První člen rovnice (3.12) je shodný s původním modelem s tím rozdílem, že parametr  $Q$  je funkcí nově zavedené proměnné  $q$  dle rovnice (3.13). Proměnná  $q$ , v případě symetricky střídavého jednoosého namáhání s konstantní amplitudou deformace, odpovídá maximální amplitudě plastické deformace dosažené během namáhání. Parametry  $A$ ,  $B$  a  $C$  určují závislost na amplitudě zatěžování. Skutečnost, že asymptotická hodnota parametru  $Q$  může záviset na předchozí historii zatěžování, byla pozorována při více sekvenčním zatěžování, tj. při zatěžování s proměnnou amplitudou deformace. Jelikož se jedná o paměťový efekt, je nutné uchovávat informaci o maximální dosažené hodnotě plastické deformace. K tomu slouží zavedení paměťových ploch v prostoru plastických deformací. Tato závislost umožňuje popsat cyklické zpevnění při různé amplitudě deformace, což je nezbytné, jelikož se příliš nevyskytuje Masingovo chování [20; 21].

### 3.2.3 Paměťová plocha

Zavedením paměťové plochy v prostoru plastických deformací, viz. obr. 3.3, lze dosáhnout ukládání informace o amplitudě plastické deformace z předchozí historie zatěžování. Tím lze docílit lepšího popisu chování materiálu při zkouškách s různou amplitudou deformace, nebo při zkouškách s proměnnou amplitudou deformace. Její zavedení navrhl již Chaboche pro rozšíření svého modelu [16]. Paměťová plocha  $F$  je popsána rovnicí

$$F = \sqrt{\frac{2}{3}} (\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\xi}_p) : (\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\xi}_p) - q \leq 0, \quad (3.14)$$

kde parametr  $q$  udává velikost paměťové plochy a  $\boldsymbol{\xi}_p$  její polohu v prostoru plastických deformací. Paměťová plocha se řídí obdobnými pravidly, jako plocha plasticity. K její změně může dojít, pouze pokud se bod charakterizující plastickou deformaci nachází na paměťové ploše



obr. 3.3 - Paměťová plocha

( $F = 0$ ) a platí upravená podmínka aktivního zatížení  $\mathbf{n} : \mathbf{n}' > 0$ . V takovém případě se pak vnitřní proměnné řídí rovnicemi

$$dq = \eta H(F) \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}' \rangle dp, \quad (3.15)$$

$$d\xi_p = \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - \eta) H(F) \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}' \rangle \mathbf{n}' dp, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s} - \mathbf{a}}{J(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{n}' = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\xi}_p}{J(\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\xi}_p)}. \quad (3.18)$$

$\mathbf{n}$  a  $\mathbf{n}'$  jsou jednotkové normálové tenzory k ploše zatěžování, resp. k paměťové ploše.  $H(F)$  představuje Heavisideovu skokovou funkci ( $H(x) = 0$  pro  $x < 0$ ,  $H(x) = 1$  pro  $x \geq 0$ ), která zajišťuje podmínku  $F = 0$ . Výraz  $\langle x \rangle$  představuje MacCauleyho závorky, pro které platí  $\langle x \rangle = 0$  pro  $x < 0$  a  $\langle x \rangle = x$  pro  $x \geq 0$  a výraz  $J(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})$  resp.  $J(\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\xi}_p)$  udává von Misesův invariant, který může být vyjádřen pomocí deviatorů napětí a kinematického zpevnění jako

$$J(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{a}) : (\mathbf{s} - \mathbf{a})}. \quad (3.19)$$

Parametr  $\eta$  udává rychlost memorizace. Pro hodnotu  $\eta = 0,5$  nastává stabilizace  $q$  a  $\xi_p$  již po prvním cyklu, což platí při zatěžování s konstantní amplitudou deformace. Při nižších hodnotách  $\eta$  dochází ke stabilizaci až po několika cyklech. V případě, že se bod charakterizující plastickou deformaci nachází uvnitř paměťové plochy, nedochází k vývoji vnitřních proměnných. Této oblasti se říká oblast bez cyklického zpevnění. V případě jednoosého namáhání představuje  $\xi_p$  střední hodnotu plastické deformace a  $q$  pak amplitudu plastické deformace. U materiálů, které vykazují cyklické změkčení při deformačním zatěžování o konstantní amplitudě deformace, roste v průběhu zatěžování amplituda plastické deformace se snižující se hodnotou maximálního napětí. Vnitřní proměnná  $q$  se tedy stabilizuje během několika prvních cyklů a poté se dále vyvíjí [14; 20].

### 3.2.4 Rozšíření kinematického zpevnění

Pro zlepšení popisu chování materiálu při cyklickém namáhání bylo vytvořeno velké množství modelů kinematického zpevnění. Většina z nich vychází z Chabocheho superpozice několika nelineárních evolučních pravidel podle rovnice (3.2). Jednou z možných úprav kinematického zpevnění je zavedení statického zotavení. Jednotlivé části kinematického tenzoru pak mohou být definovány rovnicí

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = \frac{2}{3} C_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_p - \gamma_i \boldsymbol{\alpha}_i \dot{p} - \gamma_r [J(\boldsymbol{\alpha}_i)]^{m-1} \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (3.20)$$

První dva členy této rovnice jsou stejné, jako v původní verzi modelu a představují lineární člen části kinematického tenzoru a dynamické zotavení, které zavádí nelinearitu. Přidaný třetí člen představuje statické zotavení. S jehož pomocí lze modelovat relaxaci napětí při zkouškách s deformační výdrží, anebo sekundární creep. Výraz  $J(\alpha_i)$  představuje von Misesův invariant části kinematického tenzoru a lze ho vyjádřit jako

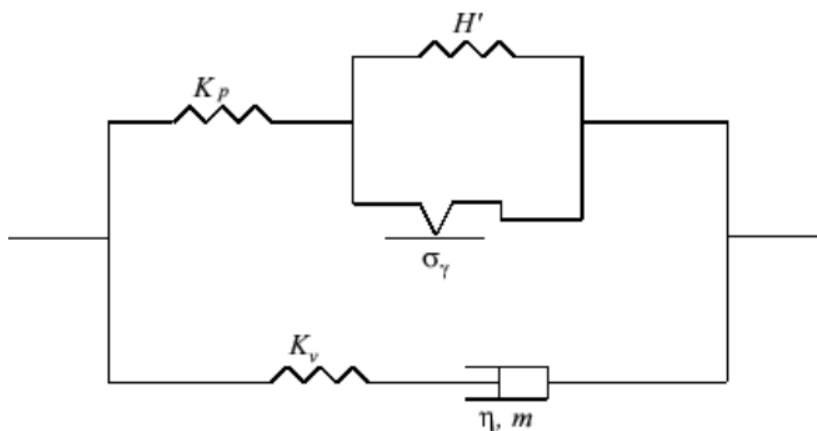
$$J(\alpha_i) = \sqrt{\frac{3}{2} \alpha_i : \alpha_i} . \quad (3.21)$$

Parametry  $\gamma_r$  a  $m$  jsou parametry časové závislosti. Hodnoty těchto parametrů lze volit stejné pro všechny kinematické části. Dalšího zlepšení lze dosáhnout např. rozvojem parametru  $\gamma_r(p)$  exponenciální funkcí v závislosti na akumulované plastické deformaci [14]. Kinematické zpevnění lze také přímo použít pro modelování cyklického zpevnění. Toho lze dosáhnout rozvojem některého z parametrů  $C_i$ ,  $\gamma_i$ , nebo jejich kombinací [22; 23].

### 3.3 Two-layer viscoplasticity model

Tento model umožňuje popsat elastické, plastické i viskózní chování materiálu. Původně byl navržen pro modelování deformačního chování plastů [24]. Jedná se o neunifikovaný model viskoplasticity. Two-layer viscoplasticity model je vhodný pro modelování materiálů, které vykazují výraznou závislost na rychlosti deformace především pro vysoké teploty. Na obr. 3.4 je zobrazeno schéma idealizace tohoto modelu pro jednoosé namáhání. Model je rozdělen na dvě hlavní části, horní větev popisuje elastoplastické chování materiálu a paralelní spodní větev zase viskoelastické chování. Obě tyto chování jsou považovány za navzájem nezávislé, a proto je možné psát celkové napětí jako součet napětí v elastoplastické větvi  $\sigma_p$  a napětí ve viskoelastické větvi  $\sigma_v$

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_v . \quad (3.22)$$



obr. 3.4 - Two-layer viscoplasticity model [7]



Celkové deformace elastoplastické větve a viskoelastické větve musí být stejné. Elastické vlastnosti materiálu jsou popsány pomocí dvou parametrů  $K_v$  a  $K_p$ . Rozhodující je zde poměr  $f_v$  elastického modulu ve viskoelastické větvi  $K_v$  a celkového modulu  $K_v + K_p$

$$f_v = \frac{K_v}{K_p + K_v}. \quad (3.23)$$

Poissonovo číslo je pro obě části stejné. Pro definici plastického chování je možno použít jakýkoliv model plasticity (na obr. 3.4 je pro zjednodušení použit pouze lineární model  $H'$ ). Lze například použít modely kinematického a izotropního zpevnění z předchozích kapitol. Tato část modelu není závislá na rychlosti deformace [7].

Závislost na rychlosti deformace zajišťuje spodní část schématu. Viskózní charakter může být popsán jakýmkoliv zákonem tečení. Nejčastěji je používán vztah

$$\dot{\epsilon}_v = A \sigma_v^n, \quad (3.24)$$

kde  $A$  a  $n$  jsou materiálové parametry. Vliv závislosti na rychlosti deformace určuje parametr  $f_v$ . Pro celkovou deformaci platí vztah

$$\epsilon = \epsilon_e + f_v \epsilon_v + (1 - f_v) \epsilon_p, \quad (3.25)$$

kde  $\epsilon_p = \epsilon_p^P$  je plastická deformace v elastoplastické části a  $\epsilon_v = \epsilon_v^V$  je viskózní deformace ve viskoelastické části (horní indexy označují část modelu a dolní indexy potom typ deformace). Elastickou deformaci je nutno určit z obou částí jako [7; 25],

$$\epsilon_e = f_v \epsilon_e^V + (1 - f_v) \epsilon_e^P. \quad (3.26)$$

### 3.4 Chabocheho unifikovaný model viskoplasticity

V této kapitole budou představeny pouze konstitutivní rovnice tohoto modelu bez bližšího vysvětlení. Detailní popis bude proveden v následující kapitole, která se zabývá nově navrženým unifikovaným modelem viskoplasticity. Chabocheho model [8] se řadí mezi unifikované modely, a tedy nerozlišuje plastickou a creepovou deformaci. Označení  $\epsilon_p$  bude nadále u unifikovaných modelů používáno pro tenzor viskoplastické (neelastické) deformace, u neunifikovaných modelů  $\epsilon_p$  označovalo pouze tenzor plastické deformace. Podle aditivního zákona lze tedy celkový tenzor deformace rozdělit na elastickou a viskoplastickou část

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p, \quad (3.27)$$

a pro elastickou část platí zobecněný Hookeův zákon

$$\sigma = \mathbf{C} : \epsilon_e. \quad (3.28)$$

Podle pravidla normality je tenzor viskoplastické deformace definován jako

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\mathbf{s} - \mathbf{a}}{J(\sigma - \alpha)}, \quad (3.29)$$

kde  $\Omega$  označuje viskoplastický potenciál [26],  $\mathbf{s}$ , resp.  $\mathbf{a}$  představují deviatory tenzoru napětí, resp. kinematického tenzoru a  $f$  značí von Misesovu funkci plasticity, která je zde definována obvyklým způsobem

$$f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}, R) = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{a}) : (\mathbf{s} - \mathbf{a})} - \sigma_y - R . \quad (3.30)$$

Pokud platí  $f < 0$ , pak se materiál chová elasticky a bod, charakterizující napěťový stav, se nachází uvnitř plochy plasticity. Hodnota akumulované viskoplastické deformace se nemění. V opačném případě, pokud  $f \geq 0$ , nastává viskoplastické chování materiálu a  $\dot{p}$  je určeno funkcí tečení. Jak již bylo řečeno, bod, představující napjatost v prostoru hlavních napětí, leží vně plochy plasticity. V tomto modelu je pro definování viskózního chování použita mocninná funkce tečení a rychlost akumulované viskoplastické deformace je určován na základě rovnice

$$\dot{p} = \left( \frac{J(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - R - \sigma_y}{K} \right)^n , \quad (3.31)$$

kde  $K$  a  $n$  jsou materiálové parametry [2].

Konstitutivní rovnice vnitřních proměnných jsou definovány obvyklým způsobem. Kinematické zpevnění se skládá z několika částí a v každé části je definován lineární člen, dynamické a statické zotavení

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=1}^N \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i , \quad (3.32)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = \frac{2}{3} C_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_p - \gamma_i \boldsymbol{\alpha}_i \dot{p} - \gamma_r [J(\boldsymbol{\alpha}_i)]^{m-1} \boldsymbol{\alpha}_i . \quad (3.33)$$

A izotropní zpevnění je definováno nelineární rovnicí

$$\dot{R} = b(Q - R)\dot{p} , \quad (3.34)$$

[2].

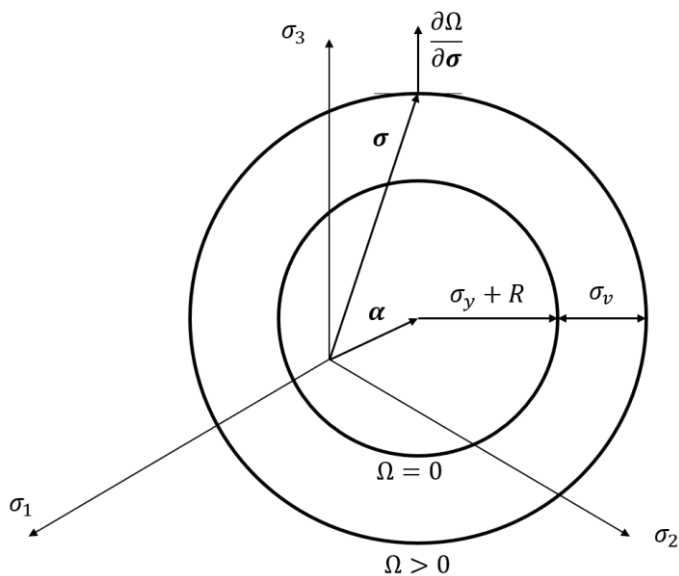
## 4 Navržený model s hyperbolickým zákonem tečení

Tento materiálový model byl navržen podle experimentálních poznatků ze zkoušek nízkocyklové únavy materiálu 42CrMo4 a vychází z Chabocheova unifikovaného modelu viskoplasticity. V kapitole 6.4 bude tento model použit pro simulace experimentálních zkoušek daného materiálu. K popisu viskózního chování je zde použita funkce hyperbolického sinu. Nejpodstatnější modifikace zde byly navrženy pro popis cyklického zpevnění. Celkově je model navržen tak, aby umožňoval komplexní popis chování materiálu při zkoušce nízkocyklové únavy. Umožňuje zejména popis procesu cyklického zpevnění, které je závislé na amplitudě a rychlosti deformace. Oproti konvenčnímu two-layer viskoplasticity modelu, který je běžně dostupný v komerčních softwarech jako např. Abaqus, je nutné tento model programovat a implementovat do MKP softwaru ve formě funkce [15; 17].

Rychlost akumulované viskoplastické deformace  $\dot{p}$  lze definovat také pomocí viskoplastického potenciálu  $\Omega$  [26], který odpovídá viskóznímu napětí  $\sigma_v$ , které bylo již popsáno v kapitole 2.6. Viskoplastické chování je definováno pro  $\Omega \geq 0$ . V případě uvažování pouze plastického chování musí platit  $\Omega = 0$  a viskoplastický potenciál odpovídá funkci plasticity. Z uvedeného také vyplývá, že při uvažování viskózního chování, může bod definující napěťový stav opustit plochu plasticity. Toto je názorně zobrazeno na obr. 4.1. Rychlost akumulované viskoplastické deformace je definována pomocí hyperbolického sinu jako

$$\dot{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} = \alpha \sinh(\beta f) , \quad (4.1)$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou materiálové konstanty funkce tečení a  $f$  je definováno rovnicí (4.3). Výraz  $\langle x \rangle$  představuje MacCauleyho závorky. Tensor viskoplastické deformace je následně definován jako



obr. 4.1 - Elastická a viskoplastická oblast v prostoru hlavních napětí

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{p} \mathbf{n} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\mathbf{s} - \mathbf{a}}{J(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})}, \quad (4.2)$$

kde  $\mathbf{n}$  je normála k ploše plasticity, která odpovídá viskoplastickému potenciálu při nulové rychlosti zatěžování.  $\mathbf{s}$  resp.  $\mathbf{a}$  představují deviátory tenzoru napětí, resp. kinematického tenzoru (tenzor kinematického napětí je sám o sobě deviátorem, proto je možné psát  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}$ ).

Funkce plasticity je vyjádřena obvyklým způsobem jako

$$f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}, R) = J(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - \sigma_y - R = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{a}) : (\mathbf{s} - \mathbf{a})} - \sigma_y - R. \quad (4.3)$$

Kinematické zpevnění je zde uvažováno jako superpozice několika nelineárních částí.

Platí tedy

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=1}^N \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i, \quad (4.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = \frac{2}{3} C_i \boldsymbol{\varepsilon}_p - \gamma_i \boldsymbol{\alpha}_i \dot{p}. \quad (4.5)$$

$C_i$  a  $\gamma_i$  jsou materiálové konstanty. Celkový počet kinematických částí je  $N = 3$ . Poslední část je dána lineárním Pragerovým pravidlem, tedy parametr  $\gamma_3 = 0$ . V takovém případě není simulován ratcheting a model vykazuje plastické přizpůsobení. Izotropní změkčení,  $R$ , je navrženo jako superpozice dvou funkcí změkčení a platí

$$\dot{R} = \dot{R}_1 + \dot{R}_2, \quad (4.6)$$

$$\dot{R}_1 = b_1(Q_1(q) - R_1)\dot{p} + H(1 + b_1 p)\dot{p}, \quad (4.7)$$

$$\dot{R}_2 = b_2(Q_2 - R_2)\dot{p} + b_r(Q_r - R_2). \quad (4.8)$$

První část izotropního změkčení,  $R_1$ , je tvořena dvěma členy. Druhý člen charakterizuje lineární část cyklického změkčení a parametr  $H$  udává sklon této části. První člen popisuje nelineární cyklické změkčení. Parametr  $Q_1(q)$  je popsán v závislosti na  $q$  ve formě exponenciální funkce

$$Q_1(q) = A + B(1 - e^{-Cq}). \quad (4.9)$$

Tato závislost umožňuje modelovat závislost izotropního změkčení na hladině deformace.  $A$ ,  $B$  a  $C$  jsou materiálové parametry. Tento efekt a využití paměťové plochy, včetně významu nově zavedené proměnné  $q$ , byl vysvětlen v kapitole 3.2.3. Ve druhé části izotropního změkčení,  $R_2$ , popsaného rovnicí (4.8), je zavedeno statické zotavení. Jeho použití je zde poněkud netradiční. Jelikož je člen statického zotavení funkcí času, umožňuje tak jeho použití docílit odlišného chování materiálu pro různé rychlosti zatěžování, tedy pro různou dobu trvání zátěžného cyklu. Při nízkých rychlostech zatěžování, tedy v případě, že zátěžný cyklus trvá dlouhou dobu, proběhne efekt změkčení již při prvním cyklu vlivem statického zotavení a druhá část izotropního změkčení nemá v dalších cyklech již žádný vliv. Při vysokých rychlostech zatěžování se druhá část izotropního změkčení stabilizuje až po několika cyklech a modeluje tak prvotní nelineární část cyklického změkčení s velkým sklonem, která se velmi rychle stabilizuje. Tohoto efektu je

docíleno pomocí nastavení stejných hodnot parametrů  $Q_2 = Q_r$ , tato hodnota odpovídá ustálené hodnotě  $R_2$  a použitím vysoké hodnoty parametru  $b_r$  [17].

## 4.1 Implementace modelu

Pro provedení simulace s tímto modelem v programu Abaqus je nutné implementovat konstitutivní rovnice, jelikož nabídka materiálových modelů programu Abaqus tento model neobsahuje. Z tohoto důvodu byla provedena numerická integrace konstitutivních vztahů a následně jejich implementace do programu Abaqus pomocí uživatelské funkce UMAT. Uživatelská funkce UMAT byla převzata z disertační práce [27] a byla následně upravena. Nejpodstatnější změny byly provedeny v konstitutivních rovnicích izotropního zpevnění a také byly zavedeny rovnice pro popis paměťového efektu. Princip a postup výpočtu je znázorněn pomocí vývojového diagramu na obr. 4.2.

### 4.1.1 Numerická integrace konstitutivních rovnic

Schéma numerické integrace konstitutivních rovnic je založeno na implicitní metodě dle Eulera. Tato metoda se také nazývá metoda radiálního návratu. V každém kroku je nejprve vyjádřena hodnota elastického prediktoru  $\sigma^{tr}$ , napětí, které by odpovídalo čistě elastickému chování. Horní index  $\sigma^{tr}$  označuje elastický prediktor, z anglického „trial“. Dále je ověřena podmínka plasticity. V případě, že  $f < 0$  je skutečné napětí rovno elastickému prediktoru, materiál se chová elasticky a postupuje se k dalšímu inkrementu. V opačném případě je nutné, upravit napětí pomocí plastického korektoru. Výsledné napětí musí být menší než elastický prediktor. Plastický korektor je určen tak, aby byla splněna podmínka plasticity. Směr skutečného napětí bude stejný, jako směr elastického prediktoru (radiální návrat na plochu plasticity) [3; 15; 17].

Dále budou uvažovány diskrétní hodnoty veličin na začátku každého kroku v čase  $t$  a na konci kroku v čase  $t + \Delta t$ . Pro přehlednost bude např. napětí v čase  $t + \Delta t$  označováno pouze jako  $\sigma$  a napětí na začátku kroku v čase  $t$  označováno s horním indexem  $\sigma^t$ .  $\Delta\sigma$  pak udává přírůstek napětí mezi začátkem a koncem kroku. Elastický prediktor je možné získat z Hookeova zákona vyjádřeného pomocí Lamého konstant

$$\sigma = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_e + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \mathbf{I}, \quad (4.10)$$

kde  $G$  je smykový modul,  $\lambda$  označuje Lamého elastickou konstantu,  $\mathbf{I}$  je jednotková matice a  $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_e)$  představuje stopu tenzoru. Tenzor elastické deformace na konci kroku lze vyjádřit v tomto tvaru:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e^t + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e^t + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (4.11)$$

Dosazením elastické deformace do předchozí rovnice a úpravě vznikne rovnice

$$\sigma = 2G(\boldsymbol{\varepsilon}_e^t + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_e^t + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p. \quad (4.12)$$

První dva členy představují elastický prediktor a poslední člen plastický korektor. Při úpravě bylo využito toho, že stopa tenzoru viskoplastické deformace, nebo jejího inkrementu, je nulová. Napětí potom může být vyjádřeno jako

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{tr} - 2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p = \boldsymbol{\sigma}^{tr} - 2G\Delta p \mathbf{n} . \quad (4.13)$$

Normálu k ploše plasticity lze vyjádřit pomocí deviátoru elastického prediktoru

$$\mathbf{n} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}}{J(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}}{J(\boldsymbol{\sigma}^{tr} - \boldsymbol{\alpha})} . \quad (4.14)$$

Pro ekvivalentní napětí  $\sigma_e$  podle podmínky von Mises platí

$$\sigma_e = J(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) = \sigma_e^{tr} - 3G\Delta p , \quad (4.15)$$

kde ekvivalentní elastický prediktor  $\sigma_e^{tr}$  je definován jako

$$\sigma_e^{tr} = J(\boldsymbol{\sigma}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s}^{tr} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s}^{tr} - \boldsymbol{\alpha})} . \quad (4.16)$$

K získání přírůstku akumulované viskoplastické deformace je možno použít funkci tečení  $\psi$ , do které byla dosazena funkce plasticity s elastickým prediktorem

$$\dot{p} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \psi(\Delta p, \boldsymbol{\alpha}, R) = \alpha \sinh \beta(\sigma_e^{tr} - 3G\Delta p - R - \sigma_y) , \quad (4.17)$$

$$\varphi = \Delta p - \psi(\Delta p, \boldsymbol{\alpha}, R)\Delta t = 0 . \quad (4.18)$$

Tato rovnice je nelineární a není možné získat řešení pro inkrement akumulované viskoplastické deformace v uzavřeném tvaru. Rovnici je nutné řešit numericky, např. Newtonovou iterační metodou v podobě

$$\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta p} d\Delta p + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : d\boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial R} dR = 0 . \quad (4.19)$$

Úpravou lze dojít ke tvaru

$$\varphi + \left(1 - \frac{\partial \psi}{\partial \Delta p} \Delta t\right) d\Delta p - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Delta t : d\boldsymbol{\alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial R} \Delta t dR = 0 . \quad (4.20)$$

Následně je nutné vyjádřit parciální derivace funkce  $\psi$  a to ve tvarech:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \Delta p} = -3G\alpha\beta \cosh \beta(\sigma_e^{tr} - 3G\Delta p - R - \sigma_y) = -3GZ , \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\alpha\beta \cosh \beta(\sigma_e^{tr} - 3G\Delta p - R - \sigma_y) \mathbf{n} = -Z\mathbf{n} , \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = -\alpha\beta \cosh \beta(\sigma_e^{tr} - 3G\Delta p - R - \sigma_y) = -Z . \quad (4.23)$$

Pro zjednodušení výrazů parciálních derivací byla použita substituce

$$Z = \alpha\beta \cosh \beta(\sigma_e^{tr} - 3G\Delta p - R - \sigma_y) . \quad (4.24)$$

Dosazením parciálních derivací zpět do rovnice (4.20) a užitím vztahu (4.18) lze získat rovnici

$$\Delta p - \psi\Delta t + (1 + 3GZ\Delta t)d\Delta p + Z\mathbf{n}\Delta t : d\boldsymbol{\alpha} + Z\Delta t dR = 0 . \quad (4.25)$$

Dále je nutné dosadit konstitutivní rovnice kinematického a izotropního zpevnění:

$$\dot{R} = \dot{R}_1 + \dot{R}_2 , \quad (4.26)$$

$$\dot{R}_1 = b_1(Q_1(q) - R_1)\dot{p} + H(1 + b_1p)\dot{p} , \quad (4.27)$$

$$\dot{R}_2 = b_2(Q_2 - R_2)\dot{p} + b_r(Q_r - R_2) , \quad (4.28)$$

$$\dot{\alpha} = \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i , \quad (4.29)$$

$$\dot{\alpha}_i = \frac{2}{3}C_i\dot{\epsilon}_p - \gamma_i\alpha_i\dot{p} . \quad (4.30)$$

Jejich diskretizace a integrace je pak uvedena dále v kapitole 4.1.2. Po dosazení (4.26) až (4.30) do (4.25) přejde rovnice do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\Delta t} - \psi + \left(\frac{1}{\Delta t} + 3GZ\right)d\Delta p + Z\mathbf{n} : \left(\frac{2}{3}C_i\mathbf{n}d\Delta p - \gamma_i\alpha_id\Delta p\right) + Z[b_1(Q_1 - R_1)d\Delta p + \\ + b_r(Q_r - R_2)\Delta t + H(1 + b_1p)d\Delta p + b_2(Q_2 - R_2)d\Delta p] = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Převedením všech členů obsahujících  $d\Delta p$  na jednu stranu rovnice a úpravou lze dojít k iterační rovnici

$$d\Delta p = \frac{\psi - \frac{\Delta p}{\Delta t} - Zb_r(Q_r - R_2)\Delta t}{\frac{1}{\Delta t} + Z[3G + C_i - \gamma_i\mathbf{n} : \alpha_i + b_1(Q_1 - R_1) + H(1 + b_1p) + b_2(Q_2 - R_2)]} , \quad (4.32)$$

$$\Delta p = \Delta p + d\Delta p . \quad (4.33)$$

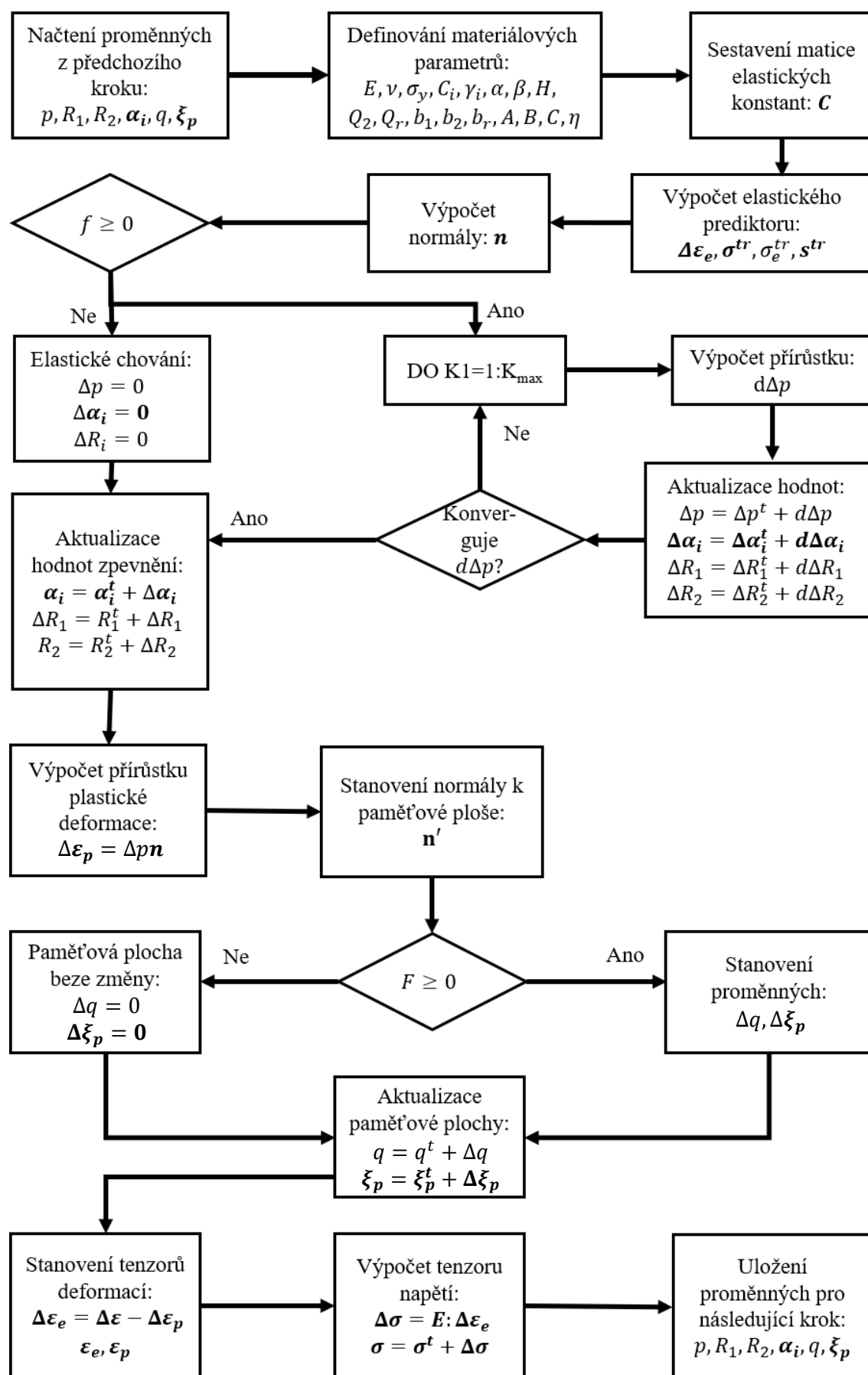
Přírůstek akumulované viskoplastické deformace je upravován podle rovnice (4.33), dokud není dosaženo konvergence. Konvergence je ověřována na základě rozdílu mezi přírůstkem akumulované viskoplastické deformace v aktuálním a předchozím kroku. Výpočet je ukončen, pokud je tento rozdíl menší než zvolená tolerance  $err = 1 \cdot 10^{-10}$ . Při překročení maximálního počtu iterací  $i_{max} = 2000$  je nastavena poloviční délka inkrementu a výpočet se opakuje. Pro zachování implicitního schématu jsou v každé iteraci upravovány hodnoty kinematického tenzoru, izotropní proměnné a normály. Přírůstky  $\Delta\alpha$  a  $\Delta R$  jsou definovány v následující kapitole. Ze znalosti  $\Delta p$  lze získat přírůstek tenzoru viskoplastické deformace

$$\Delta\epsilon_p = \Delta p \mathbf{n} . \quad (4.34)$$

Konečně, přírůstek napětí může být určen na základě Hookeova zákona jako

$$\Delta\sigma = \mathbf{E} : \Delta\epsilon_e = \mathbf{C} : (\Delta\epsilon - \Delta\epsilon_p) \quad (4.35)$$

[3; 17; 28].



obr. 4.2 - Vývojový diagram uživatelské funkce UMAT



Na základě výše uvedených rovnic byla vytvořena uživatelská funkce UMAT (převzata z [27] a upravena). Její podstatu zachycuje vývojový diagram na obr. 4.2. Tento implementovaný materiálový model je možné použít pouze pro simulace čistě deformačně řízených úloh, jelikož v uživatelské funkci není zahrnut výpočet materiálového jakobiánu (je zde ponechána jeho původní neupravená verze). Analytické vyjádření materiálového jakobiánu je poměrně náročné a v rámci této diplomové práce není nutné. V každém výpočtovém kroku je nejprve, pomocí známých hodnot z předchozího kroku, počítán elastický prediktor  $\sigma^{tr}$ . Na jeho základě je ověřena podmínka plasticity. V případě, že  $f < 0$ , je napětí přímo rovno elastickému prediktoru a materiál se chová elasticky. V opačném případě je nutné, upravit napětí pomocí plastického korektoru. Iterační metodou je určována hodnota ekvivalentní viskoplastické deformace, dokud není dosaženo konvergence. Zároveň jsou aktualizovány hodnoty kinematického a izotropního zpevnění. Dále je pak stanoven přírůstek tenzoru plastické deformace a normála k paměťové ploše. Také dochází k aktualizaci paměťové plochy podle příslušných konstitutivních rovnic (3.15) a (3.16). Nakonec je stanoven tenzor elastické deformace a je vyjádřeno napětí. Důležité proměnné jsou uloženy, aby mohly být použity v dalším kroku [28].

#### 4.1.2 Diskretizace konstitutivních rovnic

Kvůli složitosti izotropního zpevnění popsaného rovnicemi (4.7) a (4.8), nelze tyto rovnice jednoduše analyticky integrovat a získat tak vztah pro izotropní zpevnění v uzavřeném tvaru. Z důvodu numerické implementace byly tyto rovnice plně diskretizovány:

$$\Delta R_1 = b_1(Q_1 - R_1^t - \Delta R_1)\Delta p + H(1 + b_1 p^t + b_1 \Delta p)\Delta p, \quad (4.36)$$

$$\Delta R_2 = b_2(Q_2 - R_2^t - \Delta R_2)\Delta p + \gamma_r(Q_r - R_2^t - \Delta R_2)\Delta t. \quad (4.37)$$

$$\Delta R_1 = \frac{b_1(Q_1 - R_1^t)\Delta p + H(1 + b_1 p^t + b_1 \Delta p)\Delta p}{1 + b_1 \Delta p}, \quad (4.38)$$

$$\Delta R_2 = \frac{b_2(Q_2 - R_2^t)\Delta p + \gamma_r(Q_r - R_2^t)\Delta t}{1 + b_2 \Delta p + \gamma_r \Delta t}. \quad (4.39)$$

Horní index  $R_1^t$  značí hodnotu z předchozího inkrementu. Pomocí těchto rovnic je aktualizováno izotropní zpevnění v každém kroku Newtonovy iterační metody na základě nového přírůstku  $\Delta p$ . Hodnota  $Q_1$  je závislá na amplitudě deformace a je taktéž aktualizována v každém inkrementu podle rovnic paměťové plochy. Stejným způsobem je nutné upravit také konstitutivní rovnice kinematického zpevnění. Jednotlivé části kinematického tenzoru definované rovnicí (4.5) mohou být diskretizovány jako

$$\Delta \alpha_i = \frac{2}{3} C_i n \Delta p - \gamma_i (\alpha_i^t + \Delta \alpha_i) \Delta p. \quad (4.40)$$

Přírůstek kinematického zpevnění lze vyjádřit z předchozí rovnice jako

$$\Delta \alpha_i = \frac{\frac{2}{3} C_i n \Delta p - \gamma_i \alpha_i^t \Delta p}{1 + \gamma_i \Delta p}. \quad (4.41)$$

Vnitřní proměnné definující paměťovou plochu v prostoru plastických deformací byly v kapitole 3.2.3 definovány pomocí konstitutivních rovnic

$$dq = \eta H(F) \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}' \rangle dp, \quad (4.42)$$

$$d\boldsymbol{\xi}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - \eta) H(F) \langle \mathbf{n} : \mathbf{n}' \rangle \mathbf{n}' dp. \quad (4.43)$$

Tyto rovnice mohou být diskretizovány jako

$$\Delta q = \eta (\mathbf{n} : \mathbf{n}') \Delta p, \quad (4.44)$$

$$\Delta \boldsymbol{\xi}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - \eta) (\mathbf{n} : \mathbf{n}') \mathbf{n}' \Delta p. \quad (4.45)$$

V takovémto případě je nutné omezit jejich platnost podmínkou  $F \geq 0$ , která nahrazuje Heavisideovu skokovou funkci  $H(F)$  a druhou podmínkou  $\mathbf{n} : \mathbf{n}' \geq 0$ , která umožňuje odebrat MacCauleyho závorky [29; 30].

## 5 Kalibrace vybraných modelů plasticity a viskoplasticity

V této kapitole bude popsán postup stanovení materiálových parametrů vybraných modelů viskoplasticity, které byly představeny v předchozích kapitolách. Identifikace parametrů bude vycházet ze zkoušek nízkocyklové únavy s konstantní rychlostí a amplitudou deformace a při konstantní teplotě. Většina parametrů bude určena z tvaru hysterezních smyček a z průběhu cyklického zpevnění či změkčení. Na základě experimentálně zjištěných dat budou stanoveny parametry popisující elastoplastický model s kinematickým a izotropním pravidlem zpevnění, dle Chabocheho. Z viskoplastických modelů zde bude představen postup kalibrace neunifikovaného modelu two-layer viscoplasticity a navrženého unifikovaného modelu s hyperbolickým zákonem tečení. Tyto poznatky budou následně využity pro identifikaci parametrů vybraných modelů viskoplasticity na základě experimentálních zkoušek nízkocyklové únavy materiálu 42CrMo4.

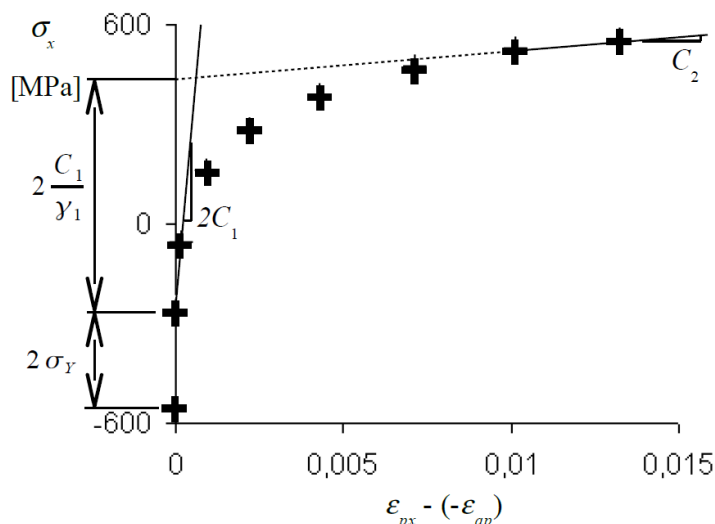
### 5.1 Identifikace parametrů kinematického zpevnění

Pro zjištění parametrů kinematického zpevnění je možné využít tvar hysterezních smyček. Jako výchozí se volí saturovaná hysterezní smyčka. Pro takovou smyčku platí, že proces cyklického zpevnění je ukončen a nedochází ke změně amplitudy napětí. Pokud materiál nevykazuje saturované chování, je možné zvolit jako výchozí smyčku v polovině životnosti. Vhodným nástrojem pro stanovení parametrů modelu je nelineární regrese. Vstupní vztah popisující tahovou část hysterezní křivky lze získat z rovnice (3.9) dosazením počátečních podmínek pro kinematické napětí a plastickou deformaci ( $\alpha_0^i = -\frac{C_i}{\gamma_i}$  a  $\varepsilon_{p0} = -\varepsilon_{ap}$ ), tedy

$$\sigma = \sigma_{y0} + \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{\gamma_i} \left( 1 - 2e^{-\gamma_i(\varepsilon_p - (-\varepsilon_{ap}))} \right). \quad (5.1)$$

Mez kluzu  $\sigma_{y0}$  je platná pouze pro zvolenou smyčku, nejedná se o počáteční mez kluzu a její hodnota je nadále upravována při identifikaci izotropního zpevnění. Jelikož model může obsahovat velké množství parametrů, je nezbytné, najít jejich vhodný počáteční odhad. K tomu poslouží limitní vlastnosti funkce diskutované v kapitole 3.1.2. Dále bude ukázán postup, jak určit počáteční hodnoty z experimentálních dat pro dvě části kinematického zpevnění [1].

Experimentální data popisující tahovou část hysterezní smyčky je nutno převést ze závislosti na celkové deformaci na závislost mezi napětím a plastickou deformací s využitím aditivního a Hookeova zákona. Křivku je také nutno posunout tak, aby začínala v nulové hodnotě plastické deformace, tedy přičíst hodnotu amplitudy plastické deformace. Význam jednotlivých parametrů je patrný z obr. 5.1. Dvojnásobek hodnoty meze kluzu  $2\sigma_{y0}$  udává počátek vzniku plastické deformace. Parametr  $C_2$  udává směrnici tečny na konci křivky. K jeho určení stačí



obr. 5.1 - Kalibrace kinematického zpevnění [1]

proložit několik posledních bodů přímkou. Dvojnásobek parametru  $C_1$  zase udává směrnici tečny v místě vzniku plastické deformace, proto je možné provést přímkovou interpolaci např. dvou bodů za mezí kluzu. Parametr  $\gamma_1$  je možné určit z poměru  $2 \frac{C_1}{\gamma_1}$ , který je zakótován na obr. 5.1. Takto odhadnuté počáteční hodnoty parametrů  $\sigma_{y0}$ ,  $C_i$  a  $\gamma_i$  se následně využijí pro nelineární metodu nejmenších čtverců.

Při použití vyššího počtu kinematických je možno parametry  $C_i$  odhadovat z hodnoty směrnice v různých částech křivky. Hodnoty těchto parametrů by se měly lišit přibližně o jeden řád, v opačném případě je na místě použití vyššího, nebo nižšího počtu kinematických částí. Nelineární regresi lze také provést pro tlakovou část hysterezní křivky, nebo pro obě části zároveň [2].

V rámci této diplomové práce byl také vytvořen jednoduchý skript v programu Matlab, pomocí kterého je možné identifikovat parametry kinematického zpevnění. Optimalizace vychází z minimalizace odchylek mezi napětím z experimentální zkoušky a vypočítaným napětím. Cílová funkce  $CF$  pro minimalizaci je definována jako

$$CF = \sum_{i=1}^n (\sigma_i^{num} - \sigma_i)^2, \tag{5.2}$$

kde  $\sigma_i$  je napětí z experimentální zkoušky a  $\sigma_i^{num}$  představuje napětí vypočítané pomocí rovnice (5.1). Jako vstupní data jsou zde použity hodnoty napětí a plastické deformace ze zkoušky nízkocyklové únavy. Je nutné zvlášť vybrat data z tahové a tlakové části hysterezní smyčky. Optimalizace pak může být založena na datech z jedné části, nebo z celé hysterezní smyčky. Je možné, zvolit libovolný počet kinematických částí a jedna část může být lineární. Optimalizační metoda také vyžaduje zadat počáteční odhad optimalizovaných parametrů. Tento odhad může být proveden podle postupu uvedeného dříve [31].

## 5.2 Identifikace parametrů izotropního zpevnění

Izotropní zpevnění zde slouží pro popis cyklického zpevnění, resp. změkčení. Je charakterizováno parametry  $b$  a  $Q$ . Závislost izotropní proměnné  $R$  na akumulované plastické deformaci lze získat integrací rovnice (3.11) jako

$$R(p) = Q(1 - e^{-bp}). \quad (5.3)$$

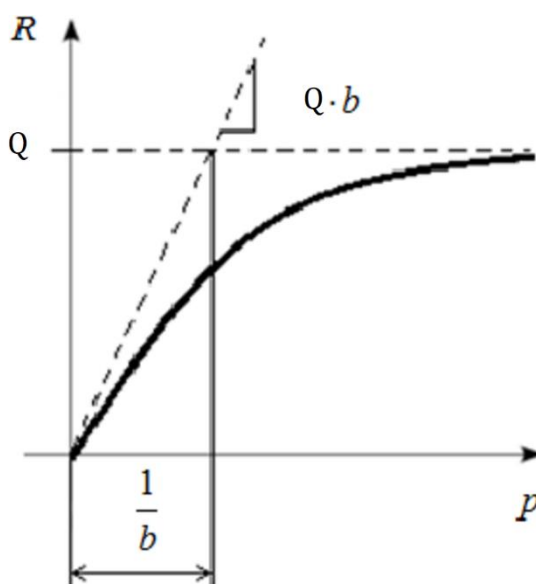
Hodnotu akumulované plastické deformace lze odhadnout na základě rozkmitu plastické deformace  $\Delta\varepsilon_p$  jako

$$p = 2N\Delta\varepsilon_p. \quad (5.4)$$

Jelikož se rozkmit plastické deformace může lišit pro různé cykly, tak je možné určit tento rozkmit pro každý cyklus zvlášť a akumulovanou plastickou deformaci počítat jako jejich součet

$$p = \sum_{i=1}^N 2\Delta\varepsilon_p^i = \sum_{i=1}^N 2 \left( 2\varepsilon_a - \frac{\sigma_{max}^i - \sigma_{min}^i}{E} \right), \quad (5.5)$$

kde  $\sigma_{max}^i$  resp.  $\sigma_{min}^i$  je maximální, resp. minimální hodnota napětí v  $i$ -tém cyklu a jejich rozdíl udává rozkmit napětí. Dvojnásobek v předchozí rovnici značí, že k plastické deformaci dochází v jednom cyklu dvakrát, při tahovém i tlakovém zatížení. Pro odhad materiálových parametrů je nutné, určit z experimentálních dat amplitudy napětí v jednotlivých cyklech a od každé hodnoty odečíst amplitudu napětí v prvním cyklu. Tyto hodnoty poté vynést do grafu v závislosti na akumulované plastické deformaci. Význam parametrů je patrný z obr. 5.2.  $Q$  udává maximální hodnotu, na které se izotropní proměnná ustálí a parametr  $b$  udává rychlost stabilizace. Opět je možno použít nelineární regresi dle rovnice (5.3). Znaménko parametru  $Q$  udává, zda se jedná o cyklické zpevnění, resp. změkčení ( $Q > 0$  cyklické zpevnění,  $Q < 0$  cyklické změkčení).



obr. 5.2 - Parametry izotropního zpevnění [18]

Počáteční hodnota meze kluzu musí být upravena, oproti hodnotě získané u kinematického zpevnění, právě o hodnotu izotropní proměnné  $R$  pro referenční hysterezní smyčku [23].

Optimalizační skript byl vytvořen také pro kalibraci izotropního zpevnění. S jeho pomocí je možné kalibrovat parametry nelineárního zpevnění  $b$  a  $Q$ . Jako vstupní data jsou zde použity hodnoty izotropní proměnné  $R$  v závislosti na akumulované plastické deformaci  $p$ . Stejně jako u kinematického zpevnění je zde potřeba zvolit počáteční hodnoty parametrů. Optimalizační metoda minimalizuje odchylky mezi experimentálními daty a výpočtem pomocí rovnice (5.3) [32].

### 5.3 Identifikace parametrů modelu two-layer viscoplasticity

Tento model umožňuje modelovat závislost materiálové odezvy na rychlosti deformace. Z tohoto důvodu je nutné mít k dispozici např. experimentální data z několika zkoušek při různých konstantních rychlostech zatěžování. Idealizace tohoto modelu pro jednoosé namáhání je schématicky znázorněna na obr. 3.4. Následující parametry je nutné určit na základě experimentálních dat: elastické moduly obou větví  $K_v$  a  $K_p$  (resp. poměr  $f_v$ ), počáteční hodnotu meze kluzu  $\sigma_y$ , parametry kinematického a izotropního zpevnění a koeficienty pravidla tečení  $A$  a  $n$ . Ze statické zkoušky, provedené při velmi nízké rychlosti zatěžování, lze určit statický modul  $K_p$ , počáteční mez kluzu  $\sigma_y$  a parametry zpevnění. Způsob jejich určování byl popsán v předchozích kapitolách. Ze zkoušky provedené při vysoké rychlosti zatěžování lze určit celkový modul pružnosti  $E = K_v + K_p$ . Rozdíl celkového a statického modulu určuje  $K_v$  a poměr  $f_v$ , který je dán rovnicí (3.23) [25].

Pro popis závislosti materiálu na rychlosti deformace slouží visko-elastická větev modelu. Napětí v této větvi je dáno vztahem

$$\sigma_v = \left( \frac{\varepsilon_v^{\dot{v}}}{A} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (5.6)$$

kde  $A$  a  $n$  jsou materiálové konstanty a  $\varepsilon_v^{\dot{v}}$  je rychlost deformace ve viskoelastické větvi. Při zatížení tato rychlost postupně narůstá, až se ustálí na hodnotě rychlosti deformace celého modelu  $\varepsilon_0$ . To vede také k ustálení napětí. Toho lze využít při kalibraci parametrů  $A$  a  $n$ . Logaritmováním přejde rovnice (5.6) do lineárního tvaru

$$\log \sigma_v = -\frac{1}{n} \log A + \frac{1}{n} \log \varepsilon_0. \quad (5.7)$$

Stačí tedy proložit experimentální data přímkou a určit parametry funkce tečení. Celkové napětí při jednoosém tahovém zatěžování lze rozložit jako

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_v, \quad (5.8)$$

kde  $\sigma_p$  představuje napětí v elastoplastické části modelu. Viskózní napětí je při nulové rychlosti deformace nulové a pro nenulové aplikované rychlosti deformace postupně narůstá. Tento přírůstek viskózního napětí při různých rychlostech lze odhadnout z experimentálních dat a vynést do grafu. Jelikož nemusí být k dispozici experimentální data získána pro velmi nízkou rychlost deformace, a není tudíž známá hodnota  $\sigma_p$ , jsou všechny odečtené hodnoty viskózního napětí zkruseny. Nepřesnosti mohou být kompenzovány úpravou hodnoty meze kluzu [25].

Celý proces identifikace materiálových parametrů lze shrnout do následujících bodů:

- (1) Ze zkoušky provedené při nízké rychlosti zatěžování lze určit:  $K_p$ .
- (2) Ze zkoušky provedené při vysoké rychlosti zatěžování lze pak určit:  $K_v + K_p$ , resp.  $f_v$ .
- (3) Parametry kinematického zpevnění  $C_i$ ,  $\gamma_i$  a odhad meze kluzu  $\sigma_{y0}$  je možné odhadnout ze saturované hysterezní smyčky.
- (4) Proces cyklického zpevnění definuje parametry izotropního zpevnění  $b$ ,  $Q$  a upravenou hodnotu meze kluzu  $\sigma_{y0}$ .
- (5) Parametry funkce tečení  $A$  a  $n$  lze určit z několika zkoušek provedených při různé rychlosti deformace, konečné stanovení počáteční meze kluzu  $\sigma_y$ .

## 5.4 Identifikace modelu s hyperbolickým zákonem tečení

Při kalibraci tohoto modelu lze vycházet z poznatků uvedených v předchozích kapitolách. Především pak identifikaci kinematického zpevnění lze provést stejným postupem, jako v kapitole 5.1. Ovšem izotropní zpevnění je u tohoto modelu velmi odlišné, z tohoto důvodu bude i jeho kalibrace probíhat odlišným způsobem.

### 5.4.1 Identifikace upraveného pravidla izotropního zpevnění

Rozšířený model izotropního změkčení, který byl uveden v kapitole 4, umožňuje popsat cyklické změkčení, které nevykazuje saturované chování a je závislé na čase a amplitudě deformace. Takovýto model může být popsán rovnicemi

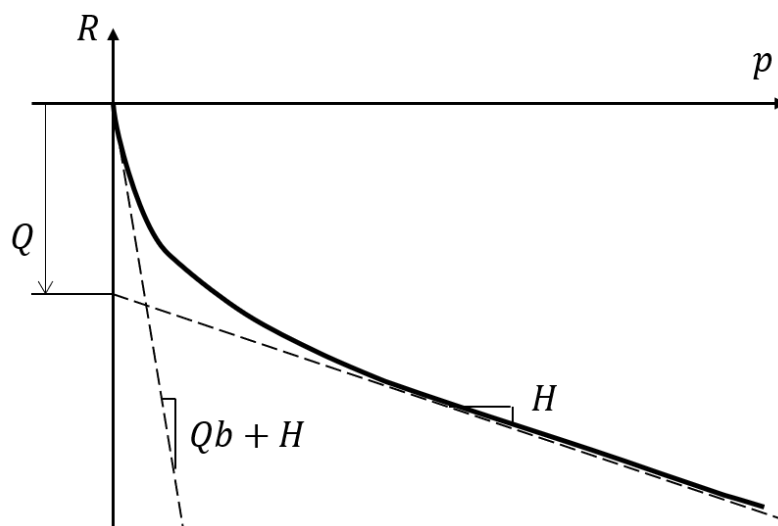
$$\dot{R} = \dot{R}_1 + \dot{R}_2, \quad (5.9)$$

$$\dot{R}_1 = b_1(Q_1(q) - R_1)\dot{p} + H(1 + b_1p)\dot{p}, \quad (5.10)$$

$$\dot{R}_2 = b_2(Q_2 - R_2)\dot{p} + b_r(Q_r - R_2), \quad (5.11)$$

$$Q_1(q) = A + B(1 - e^{-Cq}). \quad (5.12)$$

Určení materiálových parametrů je možné provést na základě znalosti závislosti izotropní proměnné  $R$  na akumulované viskoplastické deformaci, nebo závislosti maximálního napětí na počtu cyklů. Postup pro získání takovéto závislosti z experimentálních dat byl popsán v kapitole 5.2. Nejprve je nutné stanovit základní parametry izotropního změkčení. Jejich význam je patrný z obr. 5.3, čehož lze využít pro jejich identifikaci. Sklon lineární části změkčení



obr. 5.3 - Význam parametrů izotropního zpevnění

odpovídá parametru  $H$  (v případě, že jde o závislost maximálního napětí na počtu cyklů, odpovídá sklonu přibližně hodnotě  $2H\Delta\varepsilon_p$ ). Další parametry byly odvozeny na základě hodnoty v průniku protažené lineární části a svislé osy. Pro nízké rychlosti zatěžování byla tato hodnota uvažována jako parametr  $Q_1$ , jelikož v případě, že zátěžný cyklus trvá dlouhou dobu, proběhne efekt změkčení již při prvním cyklu vlivem statického zotavení a druhá část izotropního změkčení je eliminována. Pro vysoké rychlosti zatěžování se druhá část izotropního změkčení stabilizuje až po několika cyklech a hodnota průniku odpovídá součtu  $Q_1 + Q_2$  (na obr. 5.3 je zaveden obecně parametr  $Q$ ). Aby bylo možné tento postup aplikovat, je nutné, aby byla hodnota parametru statického zotavení  $b_r$  vysoká a parametr  $Q_r = Q_2$ . Parametry  $b_1$  a  $b_2$  mohou být odhadnuty podle směrnice nelineární části v prvním cyklu [14].

Dále je vhodné zdůraznit, že takto provedené odhady nejsou zcela přesné, jelikož parametr  $Q_1$  není konstantní, ale je závislý na proměnné  $q$ . Z tohoto důvodu není možné rovnice (5.9) až (5.12) jednoduše integrovat a získat tak exaktní vyjádření izotropní proměnné  $R$ . Tyto odhady lze použít pro počáteční určení parametrů, které je pak možno upravit na základě simulace se zvolenými parametry a porovnání s experimentálními daty. Jak již bylo uvedeno, parametr  $Q_1$  není konstantní, ale mění se pro různou hodnotu amplitudy plastické deformace. Parametry  $A$ ,  $B$  a  $C$  je tedy nutné navrhnout na základě alespoň tří zkoušek s různou amplitudou deformace podle rovnice (5.12). Dalším důvodem, proč nejsou navrhované odhady přesné, je ten, že proměnná  $q$ , reprezentující maximální hodnotu amplitudy viskoplastické deformace, se v průběhu zatěžování mění a tím se mění i hodnota  $Q_1$ . V případě cyklického změkčení se hodnota maximální amplitudy viskoplastické deformace v průběhu zatěžování zvětšuje. Parametr  $\eta$ , který byl zaveden v rámci paměťové plochy, určuje rychlost memorizace a by bylo možné ho kalibrovat např. ze zkoušky s proměnnou amplitudou deformace. Pro volbu  $\eta = 0,5$  nastává memorizace již po prvním cyklu [14; 20].



### 5.4.2 Identifikace funkce tečení

Nakonec je nutné určit parametry funkce tečení. Lze postupovat obdobným způsobem, jako při identifikaci viskózních vlastností u two-layer viscoplasticity modelu v kapitole 5.3. Parametry funkce tečení mohou být určovány na základě maximálního napětí v cyklu v polovině životnosti pro různé zkoušky nízkocyklové únavy. Při identifikaci parametrů lze postupovat takto: nejprve se zvolí nízká hodnota viskózního napětí pro zkoušku s nejnižší rychlostí zatěžování. Odečtením této zvolené hodnoty od příslušného maximálního napětí lze získat hodnotu napětí, která by odpovídala napětí při zkoušce s nulovou rychlostí deformace. Viskózní napětí je při zkoušce s nulovou rychlostí deformace nulové. Hodnotu viskózního napětí při nenulové rychlosti deformace lze získat jako rozdíl mezi napětím z experimentálních zkoušek s nenulovou rychlostí deformace a odhadnutou hodnotou napětí pro nulovou rychlost deformace. Hodnoty viskózního napětí pro několik zkoušek s různou rychlostí deformace lze vynést do grafu. Experimentální data lze proložit křivkou popsanou rovnicí

$$\sigma_v = \frac{1}{\beta} \sinh^{-1} \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\alpha} \right), \quad (5.13)$$

kde  $\dot{\epsilon}$  představuje rychlost zatěžování a jako  $\sigma_v$  lze uvažovat odhadnuté hodnoty viskózního napětí. Z této nelineární regrese je možné získat odhady parametrů  $\alpha$  a  $\beta$  [15].

Na závěr je zde opět shrnut celý proces kalibrace materiálových parametrů do několika bodů:

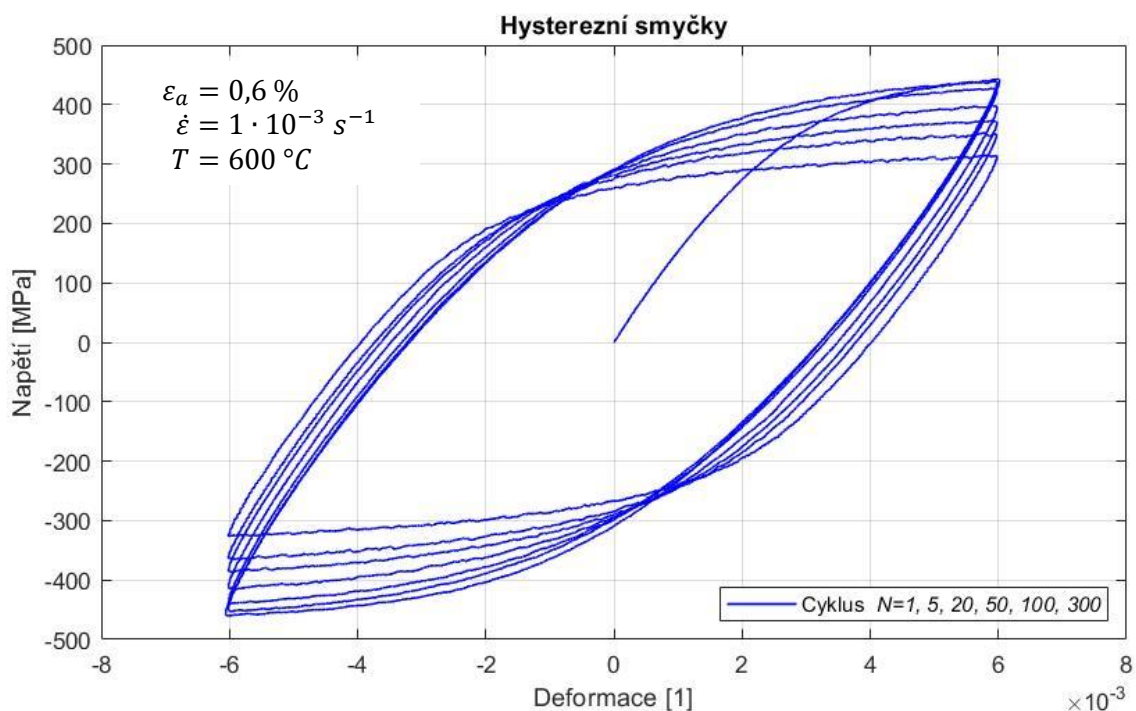
- (1) Definování elastických parametrů  $E$  a  $\nu$ .
- (2) Určení parametrů kinematického zpevnění  $C_i$ ,  $\gamma_i$  a odhad meze kluzu  $\sigma_{y0}$ .
- (3) Z procesu cyklického zpevnění lze dále určit parametry izotropního zpevnění  $H$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  a upravenou hodnotu meze kluzu  $\sigma_{y0}$ .
- (4) Parametry statického zotavení  $Q_r$  a  $b_r$  lze odhadnout ze zkoušek provedených při různé rychlosti deformace.
- (5) Ze zkoušek provedených při různé amplitudě deformace je možné určit parametry  $A$ ,  $B$ , a  $C$ .
- (6) Parametr paměťové plochy  $\eta$  může být navržen na základě zkoušky s proměnnou hladinou deformace.
- (7) Parametry funkce tečení  $\alpha$  a  $\beta$  lze určit z několika zkoušek provedených při různé rychlosti deformace, konečné stanovení počáteční meze kluzu  $\sigma_y$ .

## 6 Simulace cyklické viskoplasticity

V této kapitole bude popsána kalibrace modelů viskoplasticity na základě konkrétních experimentálních dat. Jako první byl vybrán elastoplastický model s pravidlem izotropního a kinematického zpevnění dle Chabocheho, který byl následně rozšířen o parametry funkce tečení pro two-layer viscoplasticity model. Na základě porovnání experimentálních dat a výsledků z provedené simulace byly navrženy úpravy, které vedly k lepšímu popisu chování materiálu. Následně byl kalibrován upravený unifikovaný model s hyperbolickým zákonem tečení. Jako referenční hysterezní smyčka pro kalibraci základních parametrů byla zvolena smyčka v polovině životnosti pro vysokou rychlost deformace  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

### 6.1 Popis experimentálních dat

Jako vstupní data byly použity experimentálně zjištěné hodnoty z deformačně řízené zkoušky nízkocyklové únavy. Experimentální data byla převzata z [33]. Zkouška byla provedena na servo-hydraulickém zkušebním stroji s konstantní rychlostí zatěžování, při teplotě  $600 \text{ }^\circ\text{C}$  a konstantní amplitudou deformace. Ohřev vzorku byl zajištěn indukční cívku a teplota byla měřena pomocí termočlánku typu K. Celková deformace byla řízena extenzometrem s měřicí délkou  $25 \text{ mm}$ . Zkušební vzorek měl v místě měření průměr  $13 \text{ mm}$  a celkově byla zkouška provedena v souladu s [34]. Zkouška byla provedena pro tři různé rychlosti deformace a tři amplitudy deformace. Přehled jednotlivých provedených zkoušek je uveden v Tabulce 1 [33; 35].

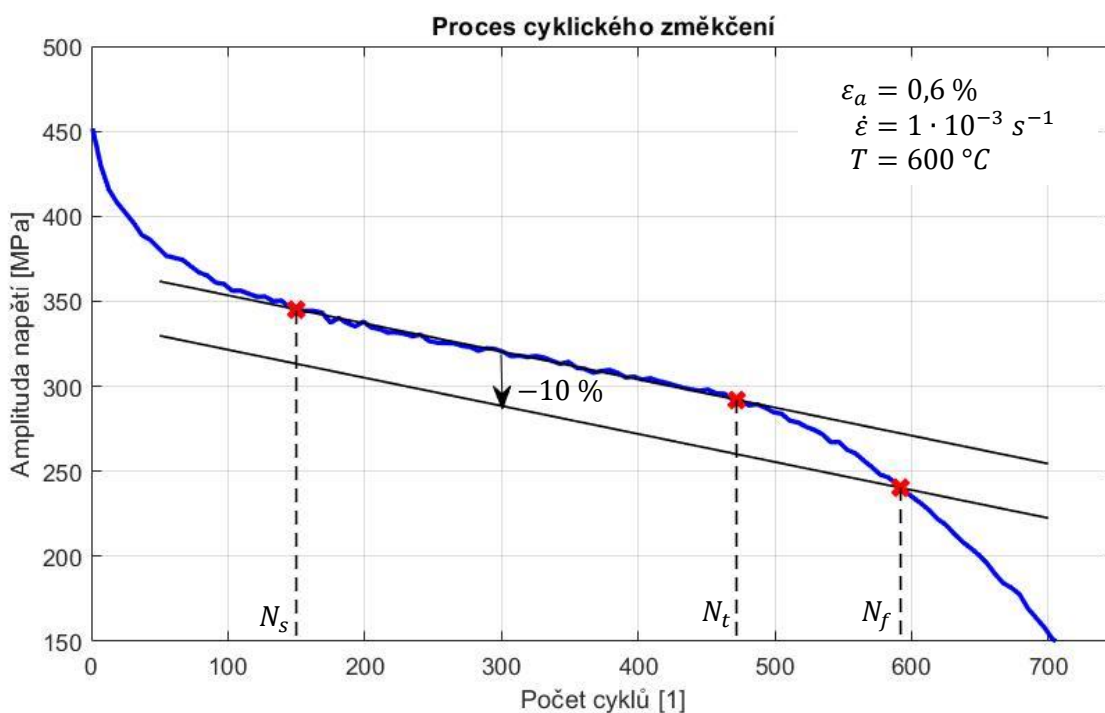


obr. 6.1 - Experimentální data:  $\epsilon_a = 0,6 \%$ ;  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

Tabulka 1 - Přehled experimentálních zkoušek

Označení	Amplituda deformace [%]	Rychlost deformace [ $s^{-1}$ ]	Doba jednoho cyklu [s]	Teplota [ $^{\circ}C$ ]	Životnost [počet cyklů]
Zkouška 1	0,6	$1 \cdot 10^{-3}$	24	600	592
Zkouška 2	0,6	$2 \cdot 10^{-4}$	120	600	361
Zkouška 3	0,6	$1 \cdot 10^{-4}$	240	600	408
Zkouška 4	0,4	$1 \cdot 10^{-3}$	16	600	924
Zkouška 5	0,8	$1 \cdot 10^{-3}$	32	600	356
Zkouška 6	0,4	$1 \cdot 10^{-4}$	160	600	612

Průběh jedné experimentální zkoušky je zobrazen na obr. 6.1 a obr. 6.2. První obrázek zobrazuje napětově-deformační chování materiálu. Jsou zde zobrazeny hysterezní smyčky pro vybrané čísla cyklů. Na druhém obrázku je patrný pokles amplitudy napětí v závislosti na počtu cyklů. Proces cyklického změkčení lze rozdělit na tři význačné části. První nelineární část popisuje stabilizaci cyklického změkčení až do ustálení při  $N_s$  cyklech. Dále je chování materiálu více méně stabilní a amplituda napětí lineárně klesá do  $N_t$  cyklů. Při překročení  $N_t$  začne amplituda napětí opět výrazně klesat v důsledku vytvoření makroskopické trhliny a jejího dalšího šíření. Toto pokračuje až do přetržení zkušebního vzorku. Na obr. 6.2 je také naznačen způsob, jakým lze stanovit životnost [34]. Životnost je zde definována jako počet cyklů, při kterém amplituda napětí poklesne o 10 % vůči stabilní části. Uprostřed hodnot  $N_s$  a  $N_t$  byla tedy snížena hodnota amplitudy napětí o 10 % a tímto bodem byla vedena rovnoběžka s lineární částí. Životnost byla pak určena v místě průniku rovnoběžky a průběhu cyklického změkčení. Určené hodnoty životnosti z jednotlivých zkoušek jsou také uvedeny v Tabulce 1.



obr. 6.2 - Cyklické změkčení: Určení životnosti

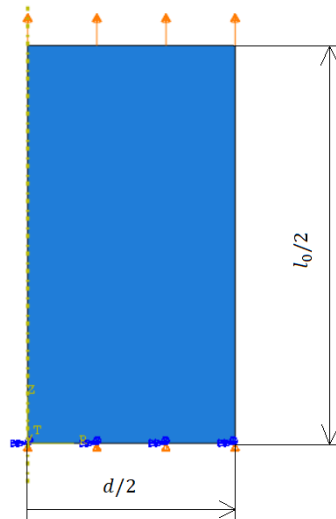
Vyšetřovaný materiál je nízkolegovaná chrom-molybdenová ocel 42CrMo4. Hodnoty nominálního chemického složení jsou uvedeny v Tabulce 2. Hodnoty v tabulce jsou uvedeny v hmotnostních procentech. Základní mikrostruktura materiálu je martenzitická. Materiál byl tepelně upravován kalením a popouštěním. Kalení probíhalo z teploty 890 °C do vody. Následně byl materiál popouštěn při teplotě 640 °C a poté chlazen vzduchem na pokojovou teplotu. Teplota testu je relativně blízko teplotě popouštění, což může vést k dalšímu změkčení při delší expozici na teplotě testu, která je rovna 600 °C. Pro popis tohoto efektu lze použít statické zotavení izotropního zpevnění. Kombinace vysoké pevnosti a tažnosti tohoto materiálu umožňuje jeho použití pro vysoce namáhané součásti v automobilovém, leteckém, nebo těžebním průmyslu. Tato ocel se běžně používá pro součásti, jako jsou hřídele, šrouby, čepy, ojnice, klikové hřídele a ozubená kola [33; 35].

Tabulka 2 - Chemické složení materiálu [33]

Materiál	42CrMo4							
Prvek	C	Mn	Si	P	S	Cr	N	Mo
Hmotnostní procenta [%]	0,42	0,84	0,30	0,013	0,012	1,10	0,0064	0,25

## 6.2 Model v programu Abaqus

Pro simulaci provedených zkoušek byl v programu Abaqus vytvořen model zkušebního vzorku. Vzorek byl modelován jako osově symetrický. Pro zjednodušení byl použit jeden lineární



obr. 6.3 - Abaqus model

osově symetrický element CAX4. Použití tohoto elementu je v případě jednoosého napětí dostačující. Jeho rozměry odpovídají počátečnímu poloměru a polovině počáteční délky měřené extenzometrem. Pro simulaci zatížení byla použita kinematická okrajová podmínka symetrie na jedné straně elementu a vynucený posuv na straně druhé, viz. obr. 6.3. Hodnota posuvu byla volena tak, aby amplituda deformace odpovídala požadované hodnotě a byla zajištěna konstantní rychlost deformace. Zátěžná historie byla předepsána pomocí tabulky hodnot.

## 6.3 Výsledky kalibrace two-layer viscoplasticity modelu

Tento model byl pro kalibraci vybrán kvůli tomu, že je poměrně jednoduchý, obsahuje přiměřený počet materiálových parametrů, ale i tak umožňuje dostatečně popsat viskoplastické chování. Také je tento model implementován v komerčním MKP softwaru Abaqus.

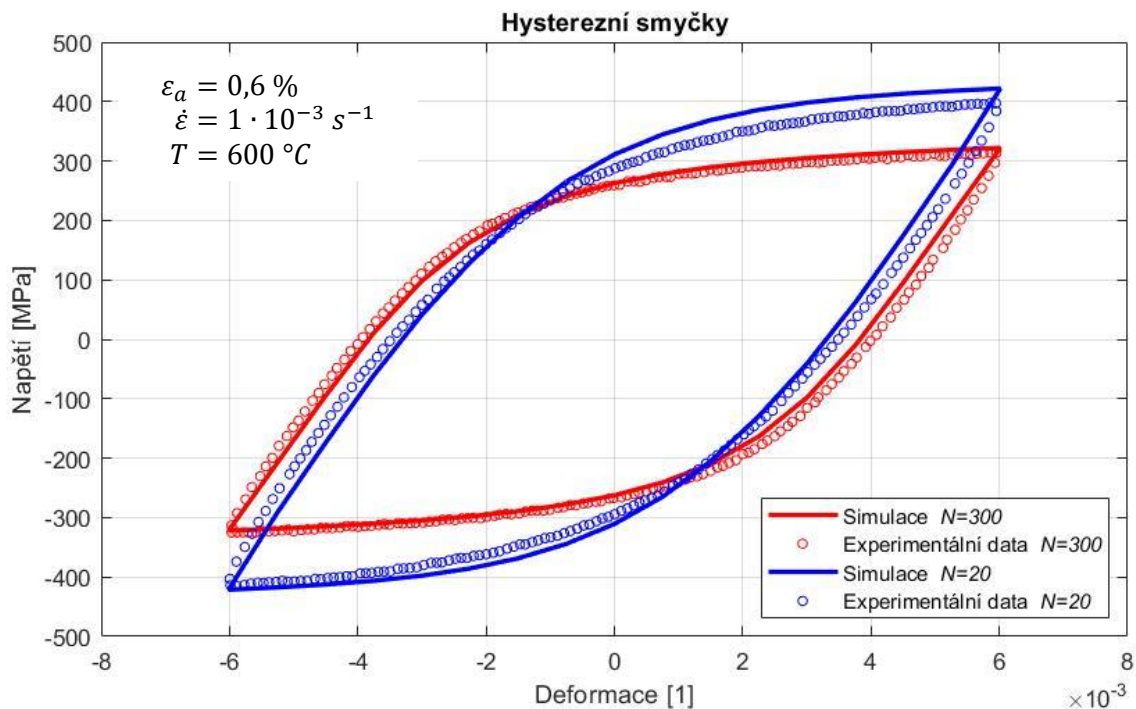
### 6.3.1 Výsledky kalibrace kinematického a izotropního zpevnění

Ke stanovení základních materiálových parametrů byla použita referenční hysterezní smyčka v polovině životnosti ze zkoušky označené jako zkouška 1 v Tabulce 1. Nejprve byl stanoven Youngův modul pružnosti z počáteční lineární odezvy. Na základě Hookeova zákona lze poté převést experimentální data na závislost mezi napětím a plastickou deformací. Takto upravená data byla poté použita pro kalibraci koeficientů kinematického zpevnění. Pro popis byly použity tři kinematické části s jedním lineárním pravidlem. Jako vstupní vztah pro nelineární regresi byla použita rovnice (5.1) popisující tahovou část smyčky a počáteční odhad parametrů byl proveden dle návodu uvedeného v kapitole 5.1. Hodnoty získaných parametrů jsou uvedeny v Tabulce 3. Takto získaná hodnota meze kluzu  $\sigma_{y0}$  je platná pouze pro referenční hysterezní smyčku a její počáteční hodnota bude dále upravována. Jelikož nebyla k dispozici data pro stanovení Poissonova čísla  $\nu$ , byla jeho hodnota zvolena jako 0,28. V Tabulce 3 je uvedena hodnota počáteční meze kluzu po kalibraci izotropního zpevnění.

Tabulka 3 - Materiálové parametry

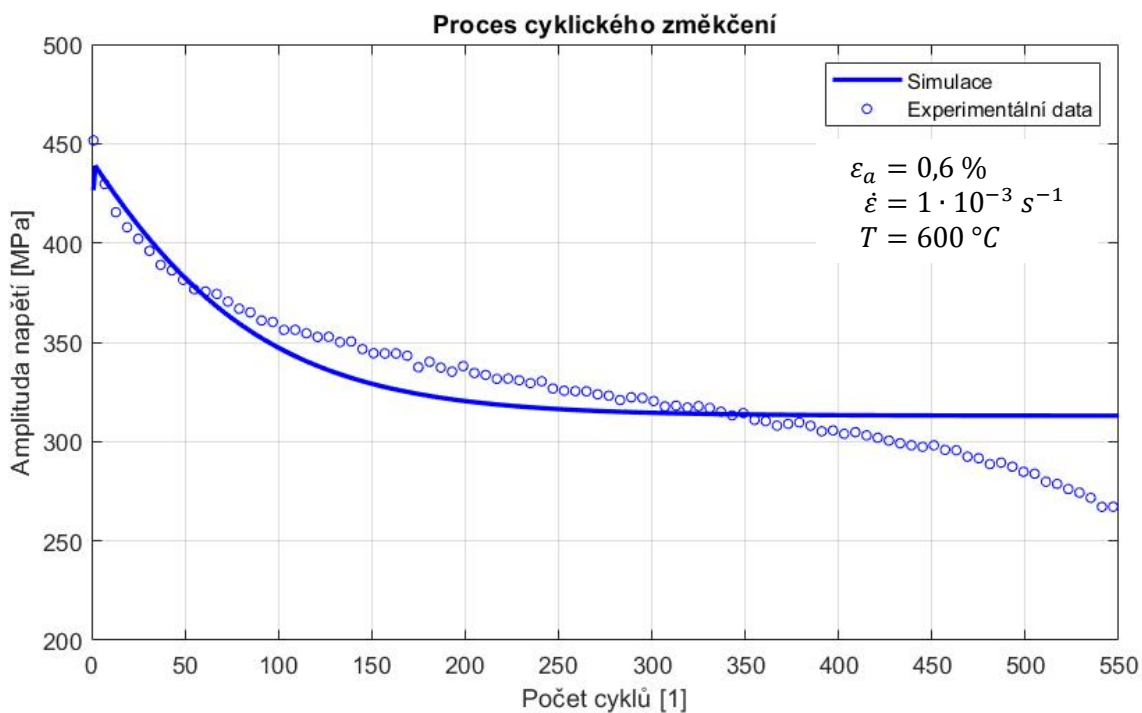
	Parametr	Hodnota	Rozměr
Elastické	$E$	$1,5 \cdot 10^5$	$MPa$
	$\nu$	0,28	
Mez kluzu	$\sigma_{y0}$	350	$MPa$
Kinematické zpevnění	$C_1$	$1,187 \cdot 10^5$	$MPa$
	$C_2$	$3,178 \cdot 10^4$	$MPa$
	$C_3$	$2,971 \cdot 10^3$	$MPa$
	$\gamma_1$	3069	
	$\gamma_2$	582,5	
Izotropní zpevnění	$Q$	-133,9	$MPa$
	$b$	0,89	

Pro popis cyklického zpevnění, resp. změkčení, bylo použito izotropní zpevnění popsané rovnicí (5.3). Z experimentálních dat byla stanovena závislost amplitudy napětí v jednotlivých smyčkách na počtu cyklů. Jelikož se maximální a minimální hodnoty napětí nepatrně liší, byla amplituda napětí určena jako jejich průměr. Tato závislost byla následně převedena na závislost mezi izotropní proměnou a akumulovanou plastickou deformací dle postupu popsaného v kapitole 5.2. Parametry popisující izotropní zpevnění je poté možno získat nelineární metodou nejmenších čtverců. Jejich hodnoty jsou opět uvedeny v Tabulce 3.



obr. 6.4 - Hysterezní smyčky:  $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

Porovnání experimentálních dat a simulace s dosud získanými parametry elastoplastického modelu je zobrazeno na obr. 6.4. Odkud je možné porovnat dvě dvojice hysterezních smyček, jedna dvojice pro počet cyklů v polovině životnosti ( $N = 300$ ) a druhá v počáteční fázi stabilizace cyklického změkčení ( $N = 20$ ). Z tvaru hysterezních smyček je možné usuzovat, že použití tří částí kinematického tenzoru dobře aproximuje experimentální data.

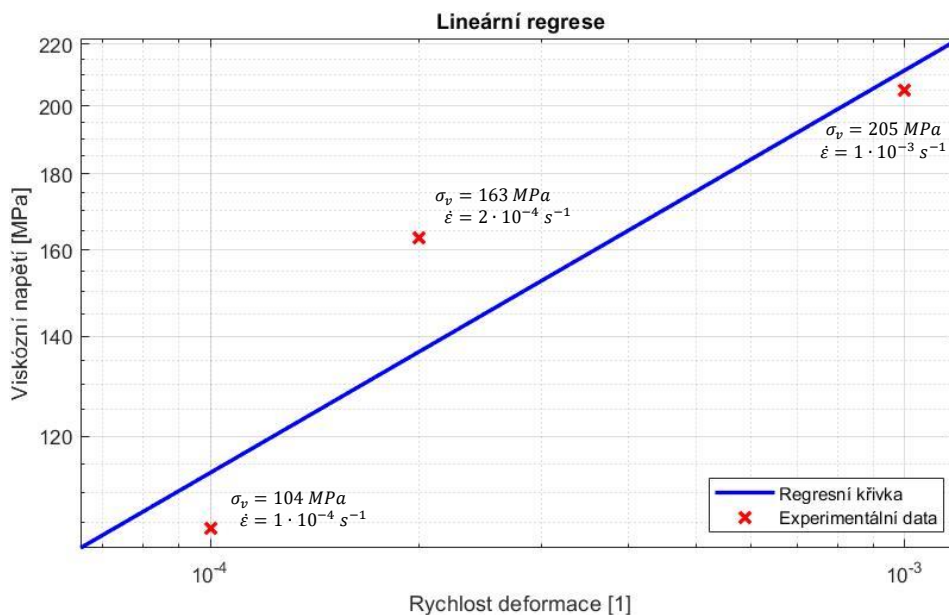


obr. 6.5 - Cyklické změkčení:  $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

Stejně tak volba Youngova modulu a meze kluzu vhodně popisuje tvar hysteretzních smyček. Dále obr. 6.5 dokumentuje pokles amplitudy napětí v závislosti na počtu cyklů. S touto aproximací úzce souvisí navržené izotropní změkčení. Z obrázku je dále patrné, že navržený model izotropního zpevnění správně nevystihuje chování materiálu. Navržený model popisuje exponenciální odezvu, která přechází do ustáleného stavu, což by odpovídalo saturaci. Z experimentálních dat ovšem plyne, že materiál nevykazuje saturované chování. Lepší aproximaci by mohl poskytnout model s využitím lineárního a exponenciálního pravidla. V takovém případě by nelineární pravidlo popisovalo počáteční proces cyklického změkčení a lineární část zase lineární pokles amplitudy napětí.

### 6.3.2 Výsledky kalibrace funkce tečení

Pro tento model byly použity parametry stanovené v předchozí kapitole a doplněny o koeficienty popisující viskózní vlastnosti materiálu. Konkrétně jde o parametry  $A$ ,  $n$  a  $f_v$ , jejichž význam byl vysvětlen v kapitole 5.3. Pro získání poměru  $f_v$  byla použita experimentální data ze zkoušky 3 s nízkou rychlostí zatěžování. Statický modul  $K_p$  byl určen obdobně, jako Youngův modul pružnosti z lineární části hysteretzní smyčky. Na jejich základě byl stanoven poměr  $f_v$  s využitím rovnice (3.23). Dále byly určeny hodnoty amplitudy napětí v cyklu odpovídajícímu polovině životnosti z experimentálních dat pro tři různé rychlosti deformace. Následně byla odhadnuta hodnota, která by odpovídala napětí při zkoušce s nulovou rychlostí deformace, tedy pro případ, kdy je nulová hodnota viskózního napětí. Rozdíly, mezi hodnotou amplitudy napětí z experimentálních zkoušek s nenulovou rychlostí deformace a odhadnutou hodnotou napětí při zkoušce s nulovou rychlostí deformace, byly označeny jako viskózní napětí. Hodnoty viskózního napětí byly vyneseny do grafu v závislosti na příslušné rychlosti deformace a byly



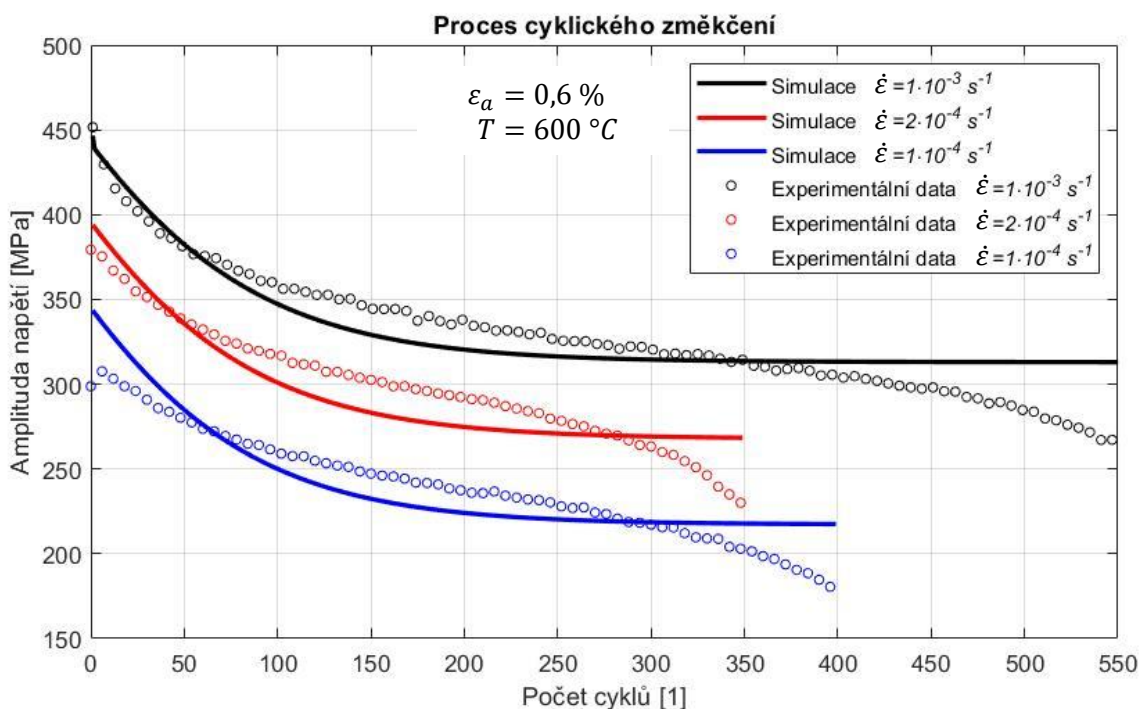
obr. 6.6 - Určení parametrů funkce tečení

proloženy přímkou viz. obr. 6.6. Z parametrů přímky byly poté stanoveny koeficienty funkce tečení  $A$  a  $n$  na základě rovnice (5.7). Hodnoty, získané lineární regresí, musely být následně upraveny. Přidání popisu viskózního napětí vedlo také k nutnosti snížit dříve určenou hodnotu meze kluzu. Hodnoty získaných parametrů jsou uvedeny v tabulce 4.

Tabulka 4 - Parametry funkce tečení

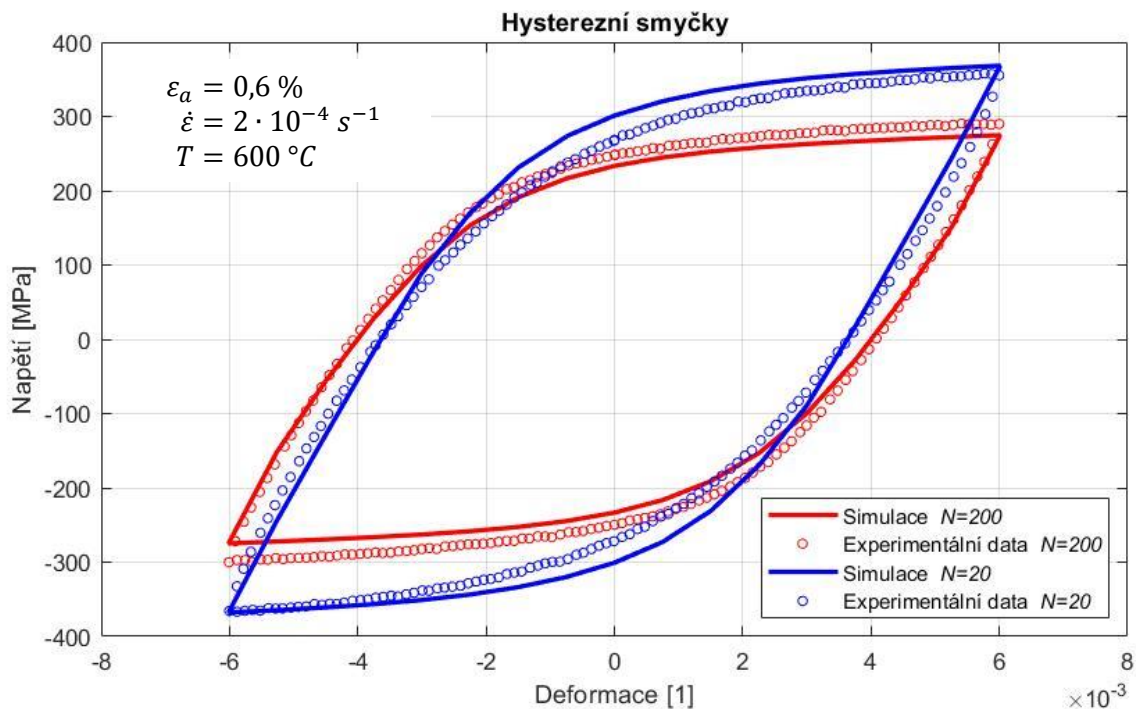
	Parametr	Hodnota	Rozměr
Mez kluzu	$\sigma_y$	160	MPa
Funkce tečení	$A$	$3,5 \cdot 10^{-10}$	$MPa^{-2,7} s^{-1}$
	$n$	2,7	
	$f_v$	2,8	

Z obr. 6.6 je patrné, že experimentální data neodpovídají lineárnímu průběhu v logaritmických souřadnicích, což je také příčinou podhodnocených hodnot napětí ze simulace pro rychlost deformace  $2 \cdot 10^{-4} s^{-1}$  a nadhodnocených výsledků pro rychlost deformace  $1 \cdot 10^{-4} s^{-1}$  viz. obr. 6.7. Tento obrázek také zobrazuje průběh procesu cyklického změkčení, jež se mění v závislosti na rychlosti deformace. Tento materiálový model tuto změnu nedokáže správně popsat a průběh cyklického změkčení zůstává pro všechny rychlosti zatěžování obdobný.



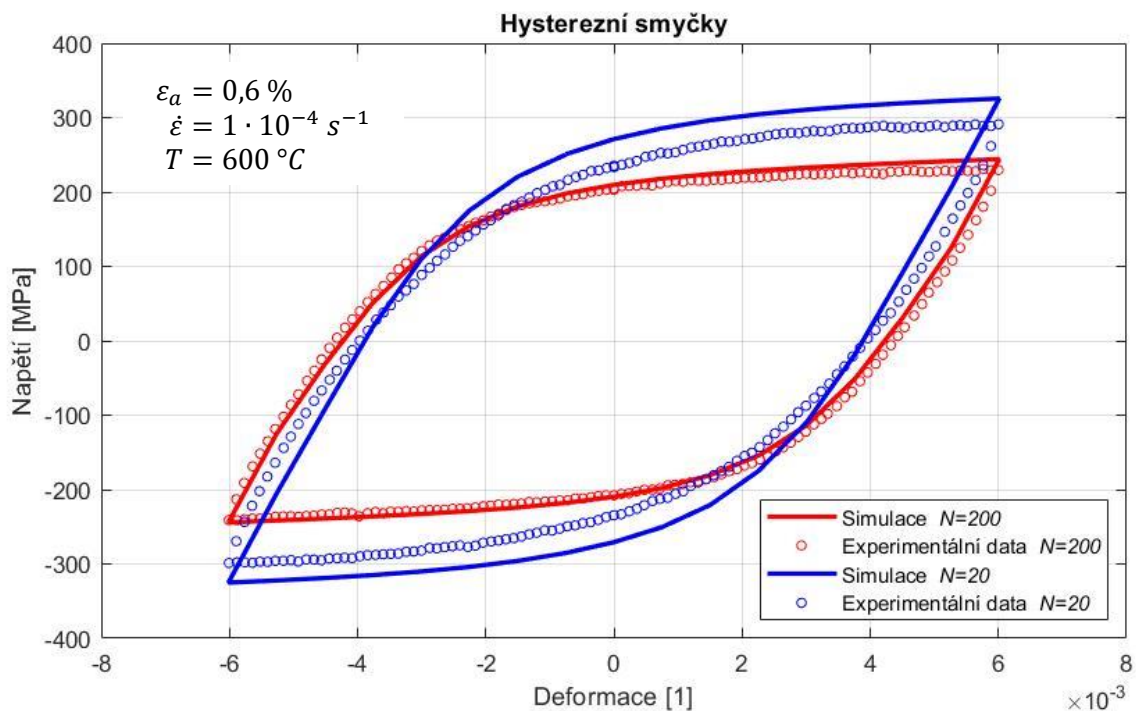
obr. 6.7 - Cyklické změkčení pro různou rychlost deformace:  $\epsilon_a = 0,6 \%$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$



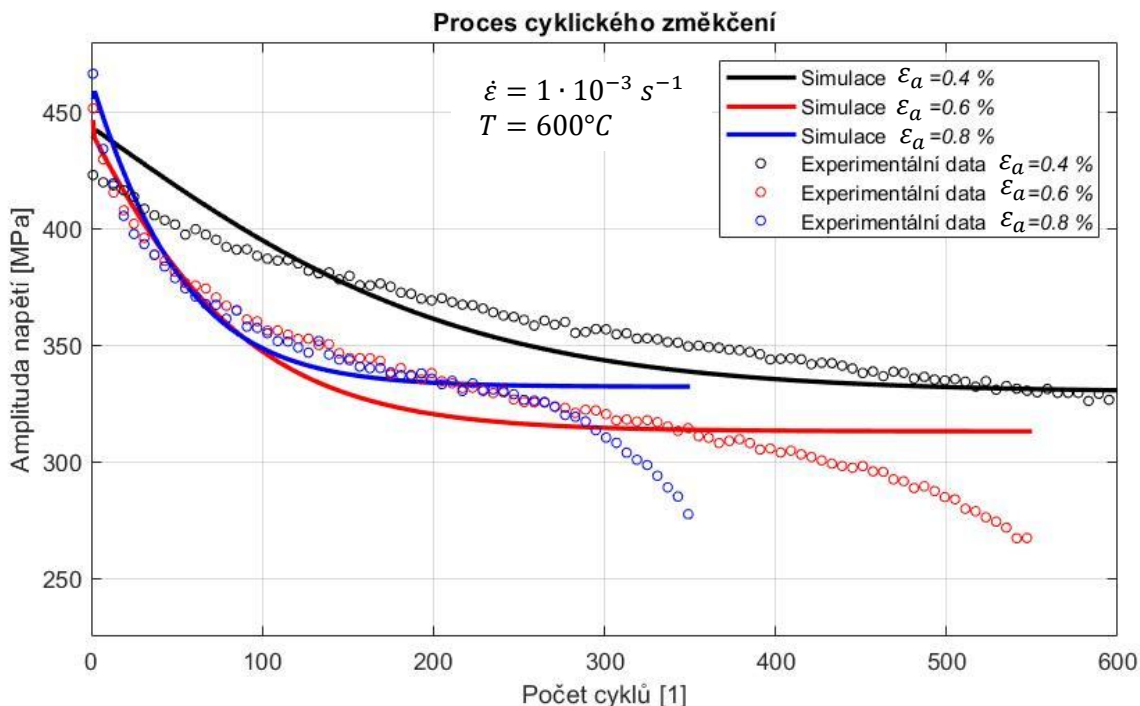


obr. 6.8 - Hysterezní smyčky:  $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

Tvar hysterezních smyček pro jednotlivé rychlosti deformace je zobrazen na obr. 6.8 a obr. 6.9. Kvalita aproximace nedosahuje takové úrovně, jako v případě simulace s rychlostí deformace  $1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Toto platí především pro simulaci s rychlostí deformace  $1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , kde se nejvíce projevuje rozdíl v hodnotách amplitudy napětí.

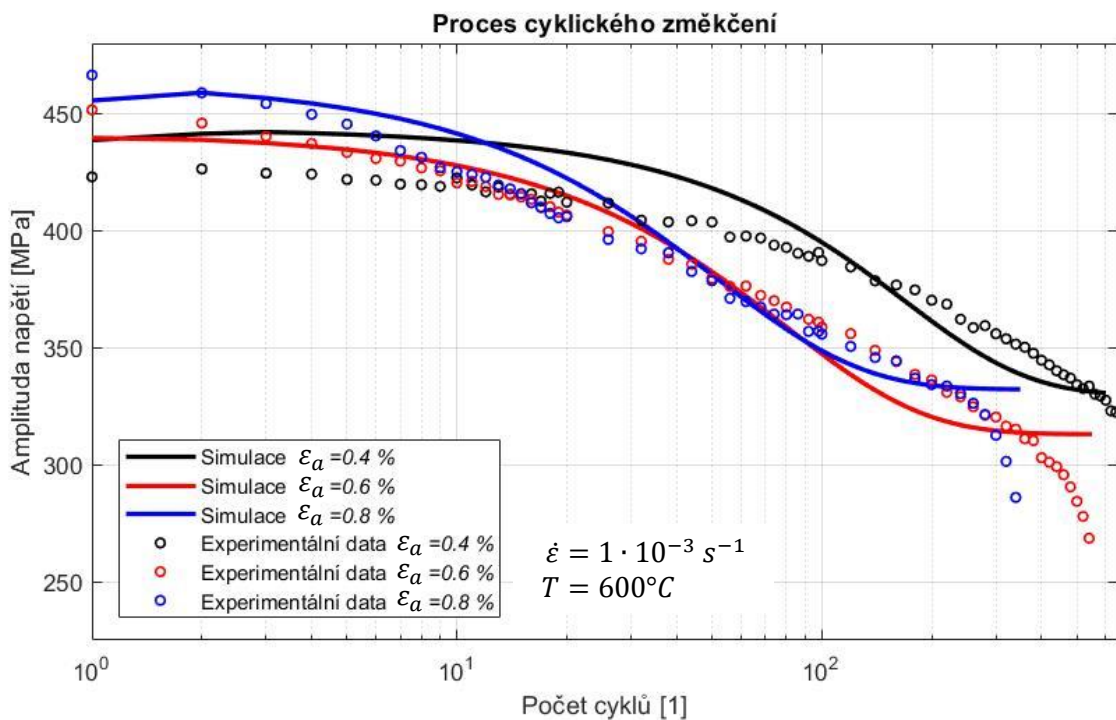


obr. 6.9 - Hysterezní smyčky:  $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

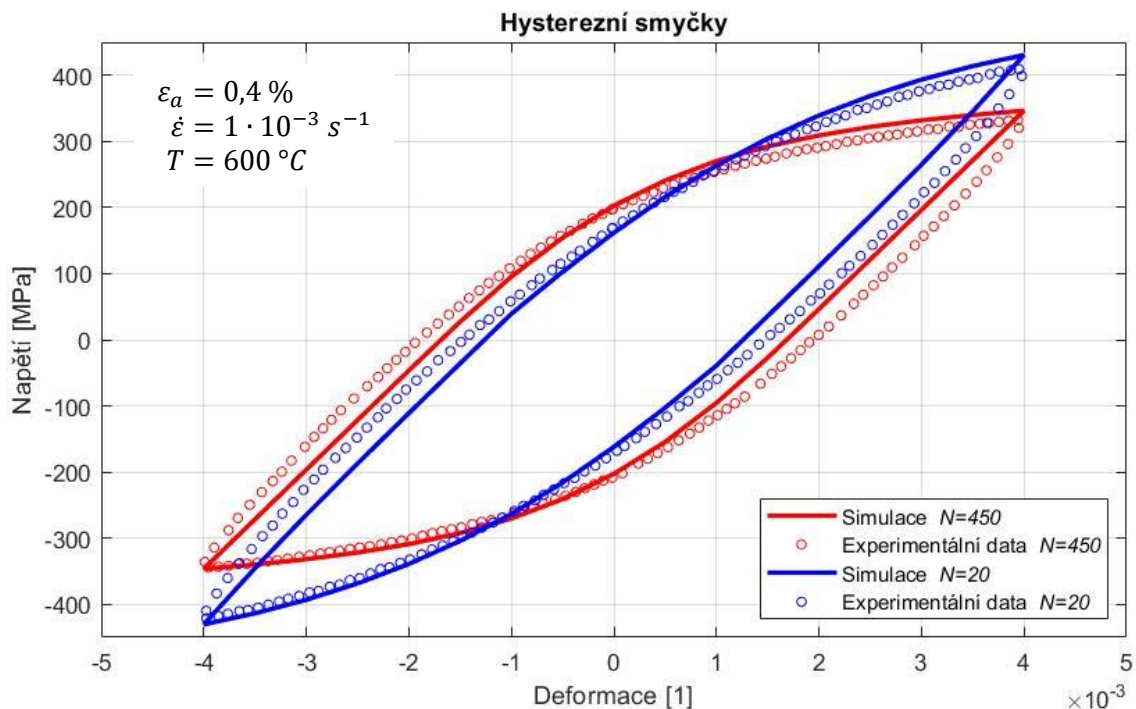


obr. 6.10 - Cyklické změkčení pro různou amplitudu deformace:  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

Dále byly také provedeny simulace zkoušek s rozdílnou amplitudou deformace. Výsledky simulací jsou zobrazeny na obr. 6.10 až obr. 6.14. Graf na obr. 6.10 dokumentuje průběh procesu cyklického změkčení při různých amplitudách deformace. Stejný graf je také zobrazen v semilogaritmických souřadnicích pro osu x na obr. 6.11 z důvodu lepší přehlednosti počáteční

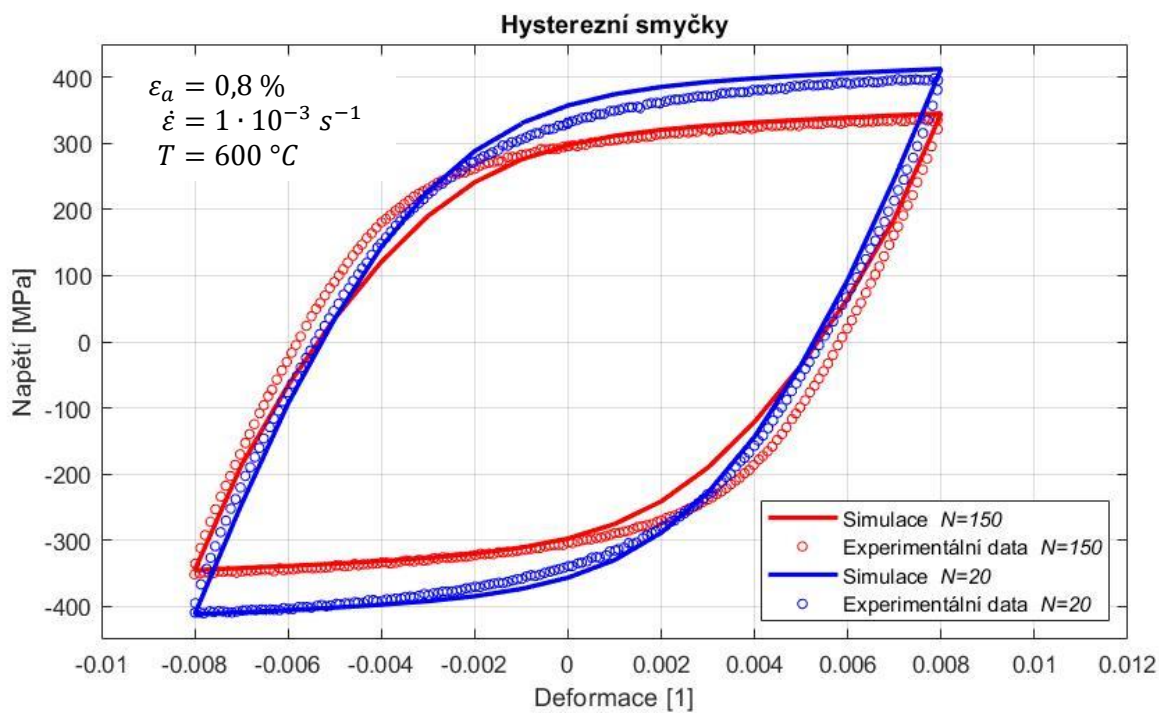


obr. 6.11 - Cyklické změkčení pro různou amplitudu deformace v logaritmických souřadnicích  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

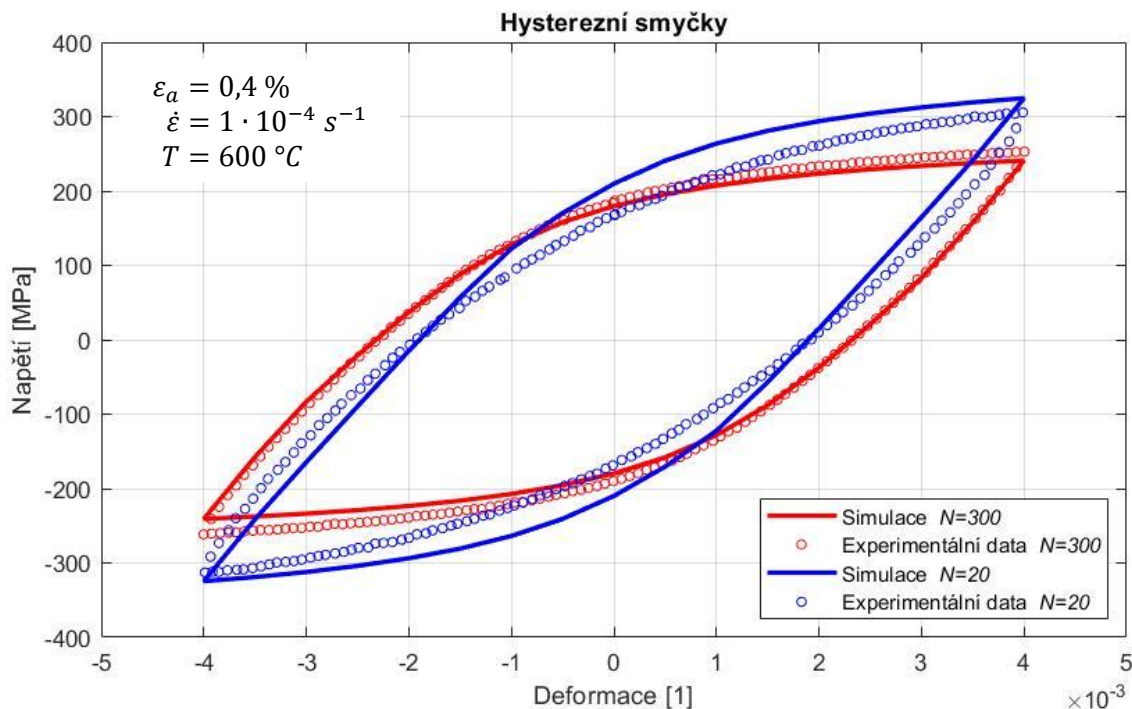


obr. 6.12 - Hysterezní smyčky:  $\varepsilon_a = 0,4\%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

fáze cyklického změkčení. Z grafů je zřejmé, že vývoj cyklického změkčení je pro jednotlivé amplitudy velmi odlišný, a zvolený materiálový model nepopisuje tyto rozdíly správně. Hysterezní smyčky z výsledků jednotlivých simulací jsou zobrazeny na obr. 6.12 až obr. 6.14. Nejméně přesné shody bylo dosaženo mezi výsledky simulací a experimentálními daty pro nejnižší rychlost deformace a nejnižší amplitudu deformace.



obr. 6.13 - Hysterezní smyčky:  $\varepsilon_a = 0,8\%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$



obr. 6.14 - Hysterezní smyčky:  $\varepsilon_a = 0,4 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

### 6.3.3 Dílčí zhodnocení výsledků

Kvalita kalibrace byla posuzována na základě shody numerických výsledků a výsledků z experimentálních zkoušek nízkocyklové únavy při konstantní amplitudě a rychlosti deformace. Na základě tohoto porovnání lze hodnotit možnosti použití two-layer viscoplasticity modelu pro popis napěťově-deformační odezvy materiálu 42CrMo4 při teplotě  $600 \text{ }^\circ\text{C}$ . Jak již bylo uvedeno, použití tří částí kinematického zpevnění s jedním lineárním pravidlem vhodně aproximuje tvar hysterezních smyček. Navíc, viskózní napětí modelu se projevuje i při elastické deformaci a umožňuje popsat závislost Youngova modulu pro jednotlivé hysterezní smyčky získané pro různé rychlosti deformace a tím umožňuje docílit kvality kalibrace pro všechny provedené simulace.

Jedním z hlavních nedostatků tohoto modelu je nedostatečná aproximace cyklického změkčení tzn. vývoje maximálního napětí cyklu v závislosti na čísle zátěžného cyklu. Z experimentálních dat vyplývá, že materiál vykazuje nejprve výrazné nelineární změkčení, které se přibližně po 100 cyklech ustálí a nadále dochází k lineárnímu změkčení viz. obr. 6.2. Z výsledků simulace ovšem plyne, že pokles maximálního napětí cyklu se ustálí na konstantní hodnotě a dále se nemění, což odpovídá saturaci. Tento nedostatek je patrný na obr. 6.5. Proces cyklického změkčení pro různé rychlosti zatěžování je zobrazen na obr. 6.7. Z tohoto grafu je možné usuzovat, že průběh izotropního zpevnění modelu není přímo závislý na rychlosti deformace a liší se pouze nepatrně z důvodu rozdílné hodnoty akumulované plastické deformace. Průběh cyklického zpevnění pro různé amplitudy deformace dokumentuje obr. 6.10, ze kterého

vyplývá, že by bylo vhodné zavést do izotropního zpevnění paměťový efekt. Aproximaci cyklického změkčení by bylo možné zlepšit, například pokud by bylo izotropní zpevnění kalibrováno pomocí hodnot ze všech experimentálních zkoušek. Zde bylo izotropní zpevnění kalibrováno pouze na základě hodnot ze zkoušky s nejvyšší rychlostí zatěžování.

Viskózní chování je v tomto modelu popsáno mocninou funkcí tečení podle rovnice (3.24). Již z lineární regrese pomocí experimentálních dat vyplynulo, že užití této funkce není vhodné pro daný materiál a podmínky zatěžování viz. obr. 6.6. Výsledná aproximace tudíž není dostačující.

Poznatky, získané kalibrací two-layer viscoplasticity modelu, byly následně využity pro návrh vhodnějšího modelu s cílem zlepšit aproximaci experimentálních dat. Především bylo nutné upravit izotropní zpevnění tak, aby umožňovalo popsat cyklické zpevnění, závislé na čase a amplitudě deformace. Toho bylo dosaženo zavedením paměťového efektu a přidáním statického zotavení do izotropního pravidla. Pro další simulace byl navržen unifikovaný model viskoplasticity s hyperbolickým zákonem tečení popsany v kapitole 4. Tento model a jeho kalibrace jsou popsány v následující kapitole.

## 6.4 Výsledky kalibrace navrženého unifikovaného modelu

Tento unifikovaný model viskoplasticity byl navržen na základě kvality kalibrace two-layer viscoplasticity modelu. Z porovnání experimentálních dat a simulace vyplynulo, že podstatného zlepšení aproximace by mohlo být dosaženo úpravou izotropního zpevnění. Z tohoto důvodu byl do izotropního zpevnění přidán lineární člen a také zavedena paměťová plocha v prostoru plastických deformací pro dosažení rozdílného vývoje cyklického změkčení při různých amplitudách deformace. Další výraznou změnou je použití hyperbolického zákona tečení pro popis viskózního chování materiálu. Detailně byl tento model popsán v kapitole 4.

### 6.4.1 Výsledky kalibrace kinematického a izotropního zpevnění

Kalibrace kinematického zpevnění tohoto modelu probíhala obdobně, jako pro předchozí model. Koeficienty byly optimalizovány pomocí přiloženého skriptu viz. příloha A. Jako vstupní data byly použity hodnoty ze závislosti napětí a plastické deformace z referenční hysteretzní smyčky. Data musela být nejprve upravena na základě Hookeova zákona. Počáteční odhad parametrů byl stanoven podle postupu z kapitoly 5.1. Výsledné parametry kinematického zpevnění mají stejné hodnoty jako u předchozího modelu viz. Tabulka 3. Jelikož nebyla k dispozici data pro stanovení Poissonova čísla  $\nu$ , byla jeho hodnota zvolena jako 0,28.

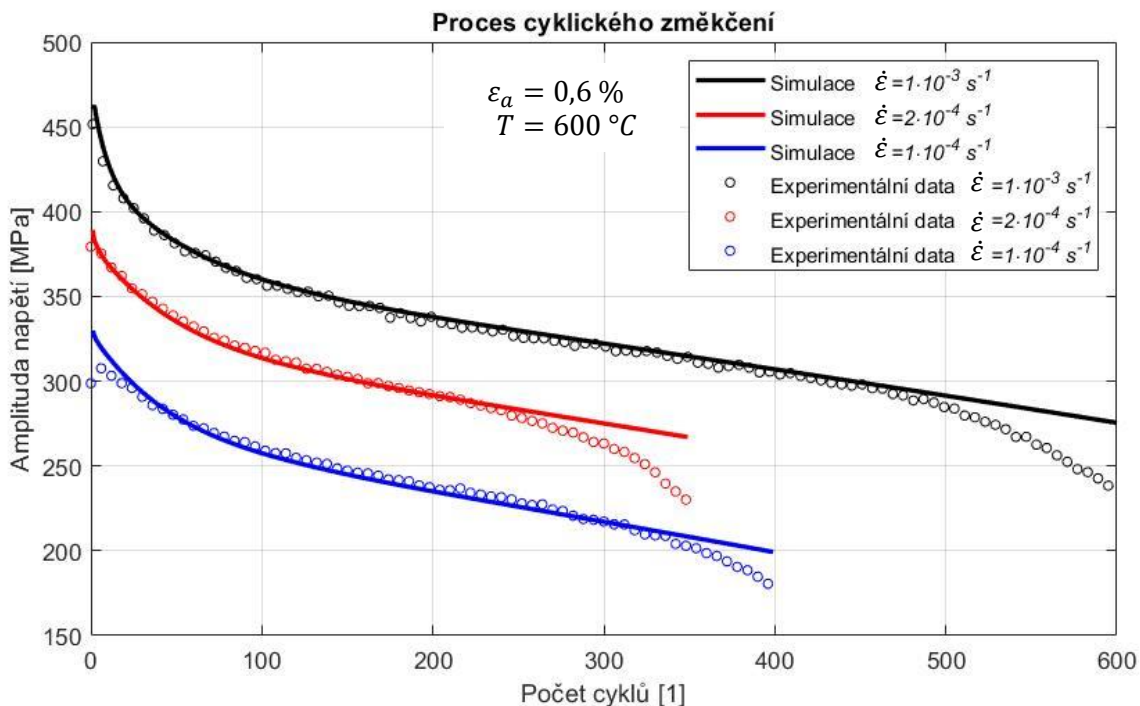
Dále je nutné kalibrovat parametry navržené funkce izotropního zpevnění, která byla představena v kapitole 4 a byla dána rovnicemi

$$\dot{R} = \dot{R}_1 + \dot{R}_2, \quad (6.1)$$

$$\dot{R}_1 = b_1(Q_1(q) - R_1)\dot{p} + H(1 + bp)\dot{p}, \quad (6.2)$$

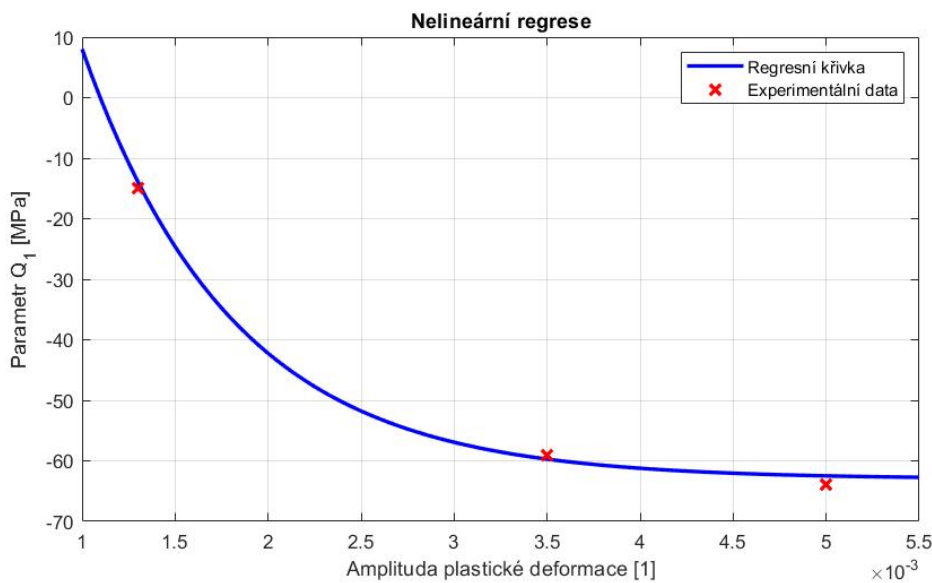
$$\dot{R}_2 = b_2(Q_2 - R_2)\dot{p} + b_r(Q_r - R_2). \quad (6.3)$$

Z experimentálních dat je nejprve nutné získat závislost izotropní proměnné na akumulované viskoplastické deformaci. Parametr  $H$  byl určen z lineární části cyklického změkčení. Další parametry byly odvozeny na základě hodnoty v průsečíku protažené lineární části a svislé osy. Pro nízké rychlosti zatěžování byla tato hodnota uvažována jako parametr  $Q_1$  a pro vysoké rychlosti potom jako součet  $Q_1 + Q_2$ . Aby bylo možné tento postup aplikovat, je nutné, aby byla hodnota parametru statického zotavení  $b_r$  vysoká a parametr  $Q_r = Q_2$ . V takovém případě se druhá část izotropního zpevnění projeví pouze u simulací s vysokou rychlostí zatěžování, kde je také možno uvažovat, že viskoplastická deformace odpovídá plastickému chování. Pro nízké rychlosti deformace proběhne efekt změkčení již při prvním cyklu vlivem statického zotavení, které je závislé na čase. Parametry  $b_1$  a  $b_2$  byly odhadnuty podle směrnice nelineární části v prvním cyklu. Průběh cyklického změkčení pro simulace s různou rychlostí deformace je zobrazen na obr. 6.15. Z tohoto grafu je patrné, že výsledky simulací odpovídají experimentálním datům pro všechny rychlosti zatěžování.

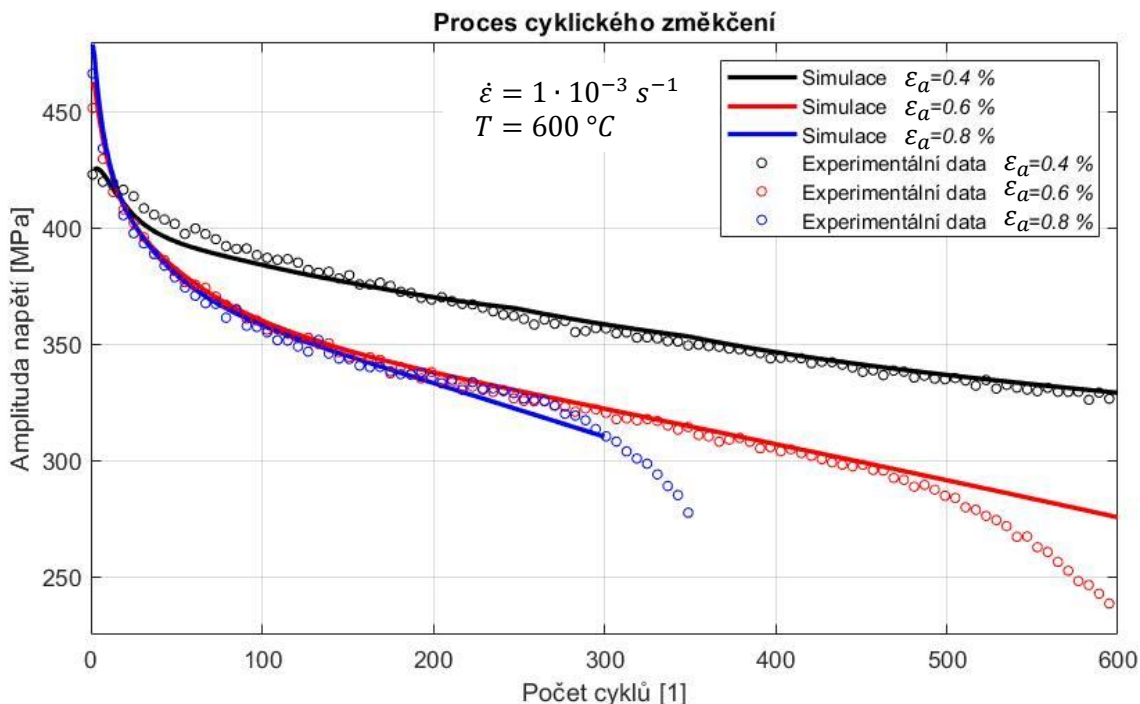


obr. 6.15 - Cyklické změkčení pro různou rychlost deformace:  $\epsilon_a = 0,6 \%$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

V tomto modelu není hodnota parametru  $Q_1$  uvažována konstantní, ale je exponenciálně závislá na proměnné  $q$ . Pro kalibraci parametrů této závislosti byly do grafu vyneseny hodnoty  $Q_1$  pro různé amplitudy zatěžování v závislosti na amplitudě viskoplastické deformace. Parametry  $A$ ,  $B$  a  $C$  byly určeny pomocí nelineární regrese viz. obr. 6.16. Dále byl pro jednoduchost zvolen koeficient paměťové plochy  $\eta = 0,5$  a memorizace amplitudy deformace nastává hned po prvním cyklu. Tento parametr by bylo možné kalibrovat např. ze zkoušky s proměnnou amplitudou deformace, podle rychlosti, s jakou se odezva materiálu přizpůsobí nové hodnotě amplitudy deformace.

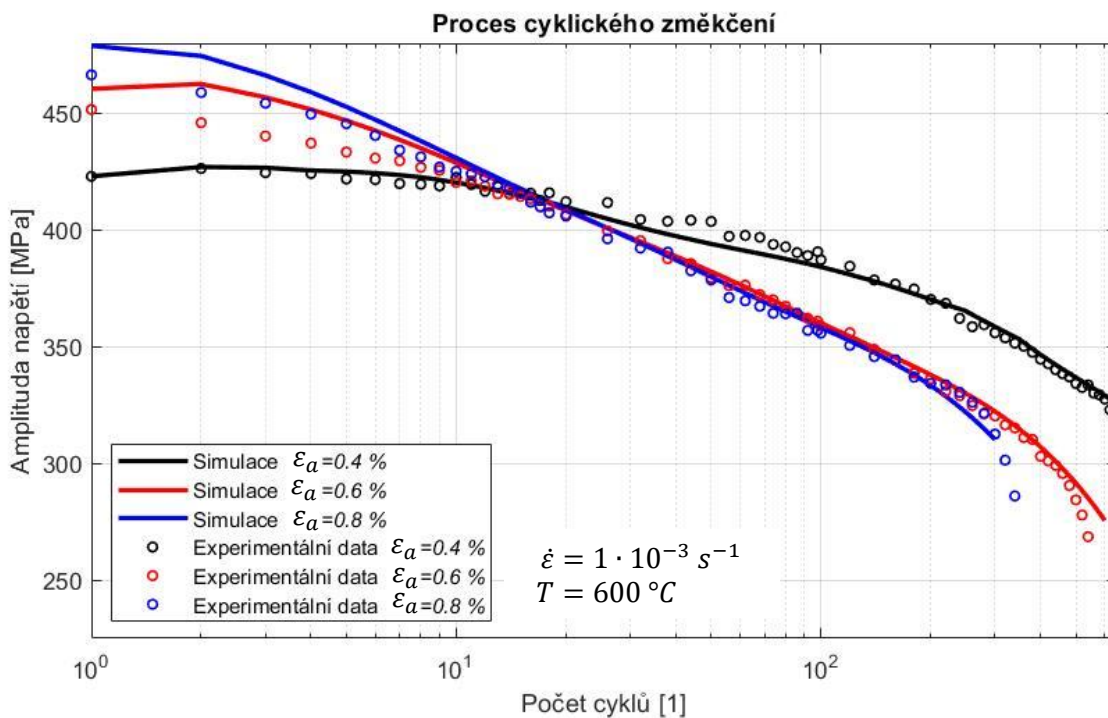


obr. 6.16 - Nelineární regrese – určení parametrů izotropního zpevnění



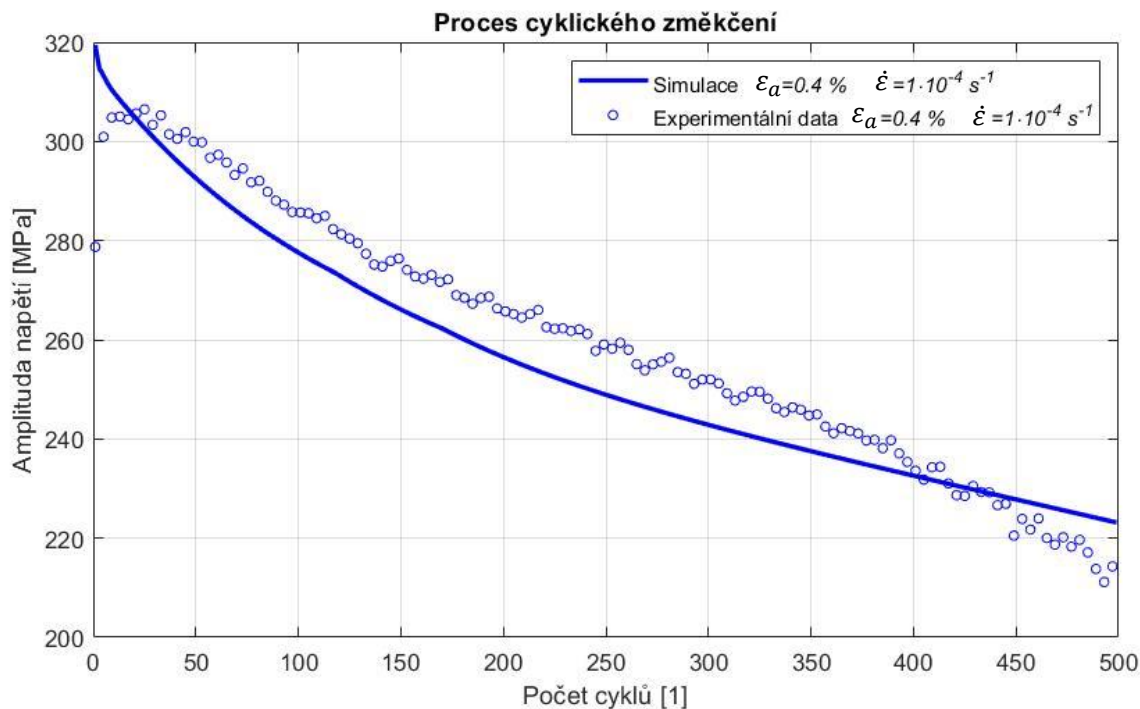
obr. 6.17 - Cyklické změkčení pro různou amplitudu deformace:  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

Výsledky provedených simulací s rozdílnou amplitudou deformace jsou zobrazeny na obr. 6.17. Opět je tento graf zobrazen i v semilogaritmických souřadnicích pro lepší přehlednost viz. obr. 6.18. Zavedení paměťového efektu značně přispělo ke zlepšení popisu těchto zkoušek. V tomto grafu je také patrný výrazný rozdíl v poklesu maximálního napětí cyklu v průběhu zatěžování pro simulace s nízkou a vysokou amplitudou deformace.



obr. 6.18 - Cyklické změkčení pro různou amplitudu deformace v logaritmických souřadnicích:  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

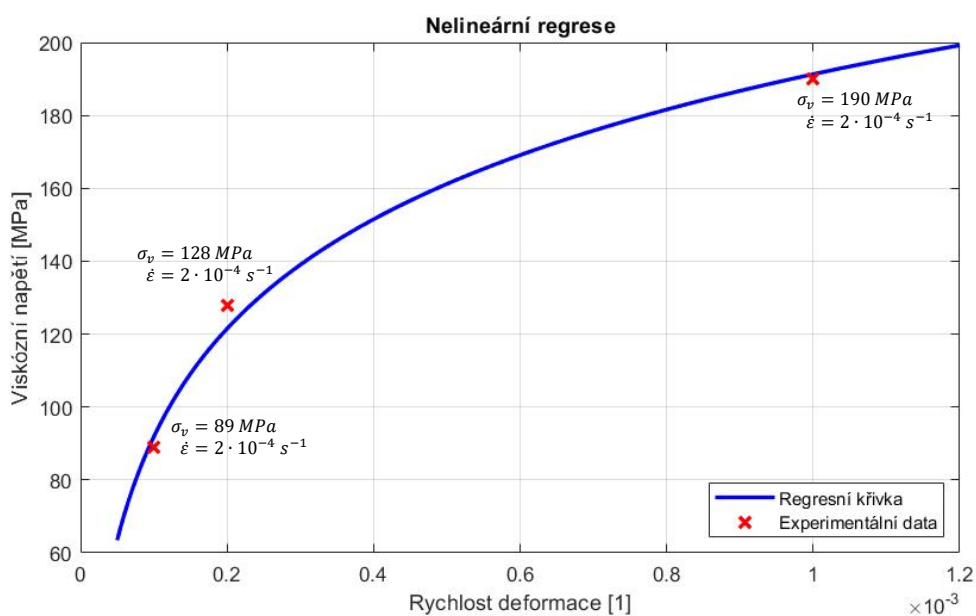




obr. 6.19 - Cyklické změkčení:  $\varepsilon_a = 0,4 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

### 6.4.2 Výsledky kalibrace funkce tečení

Nakonec je nutné určit parametry funkce tečení. Jejich hodnoty by bylo také možné určit z creepových zkoušek, nebo z cyklických zkoušek s deformační výdrží. Jelikož taková data nebyla v tomto případě k dispozici, byly parametry funkce tečení určovány na základě maximálního napětí v cyklu v polovině životnosti pro tři zkoušky nízkocyklové únavy s amplitudou deformace  $\varepsilon_a = 0,6 \%$  a různou rychlostí deformace. Jelikož z těchto dat nelze přímo získat hodnotu viskózního napětí, bylo nutné zvolit relativně malou hodnotu viskózního napětí pro nejnižší



obr. 6.20 - Nelineární regrese – určení parametrů funkce tečení

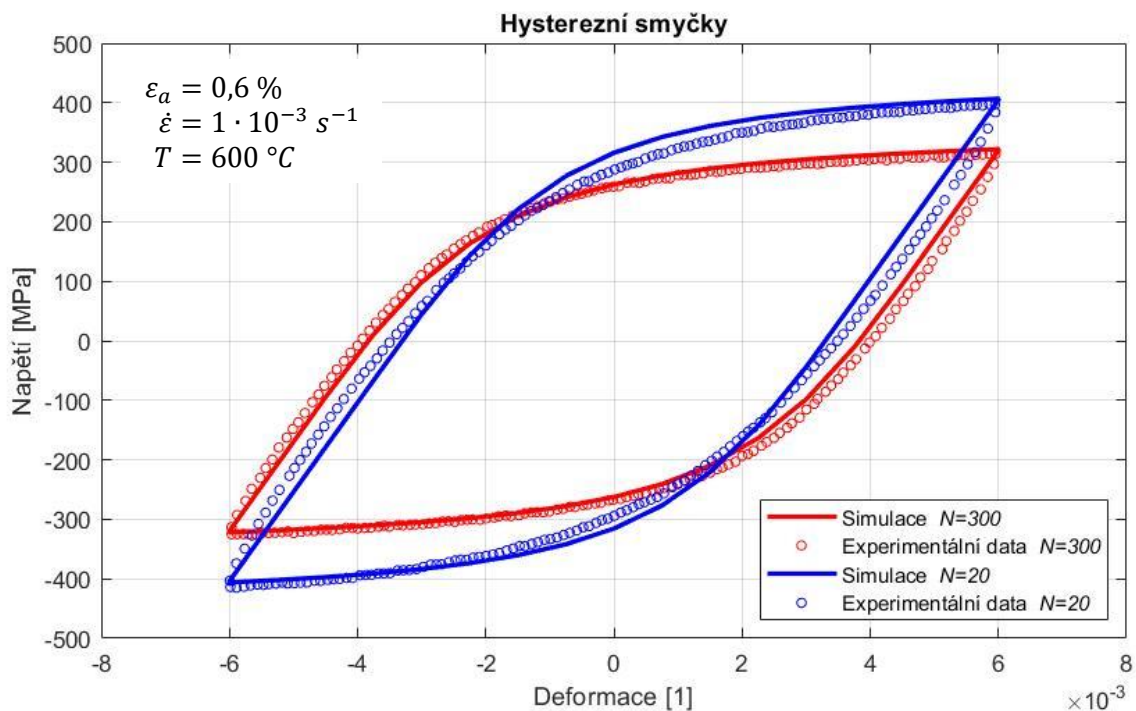
rychlost deformace  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . K této hodnotě byl následně přičten rozdíl mezi maximálním napětím v cyklu z experimentu s vyšší rychlostí deformace a maximálním napětím v cyklu pro nejnižší rychlost deformace. Tento součet představuje viskózní napětí pro zkoušku s vyšší rychlostí deformace. Takto odhadnuté hodnoty viskózního napětí byly vyneseny do grafu v závislosti na příslušné rychlosti deformace viz. obr. 6.20. Experimentální data lze proložit křivkou popsanou rovnicí

$$\sigma_v = \frac{1}{\beta} \sinh^{-1} \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\alpha} \right), \quad (6.4)$$

kde  $\dot{\epsilon}$  představuje rychlost zatěžování a jako  $\sigma_v$  lze uvažovat odhadnuté hodnoty viskózního napětí. Z této nelineární regrese je možno získat odhady parametrů  $\alpha$  a  $\beta$ . Tyto odhady byly následně upraveny pro lepší aproximaci experimentálních dat. Již z obr. 6.20 je zřejmé, že použití hyperbolického sinu pro funkci tečení lépe odpovídá naměřeným hodnotám než mocninná závislost z modelu two-layer viscoplasticity.

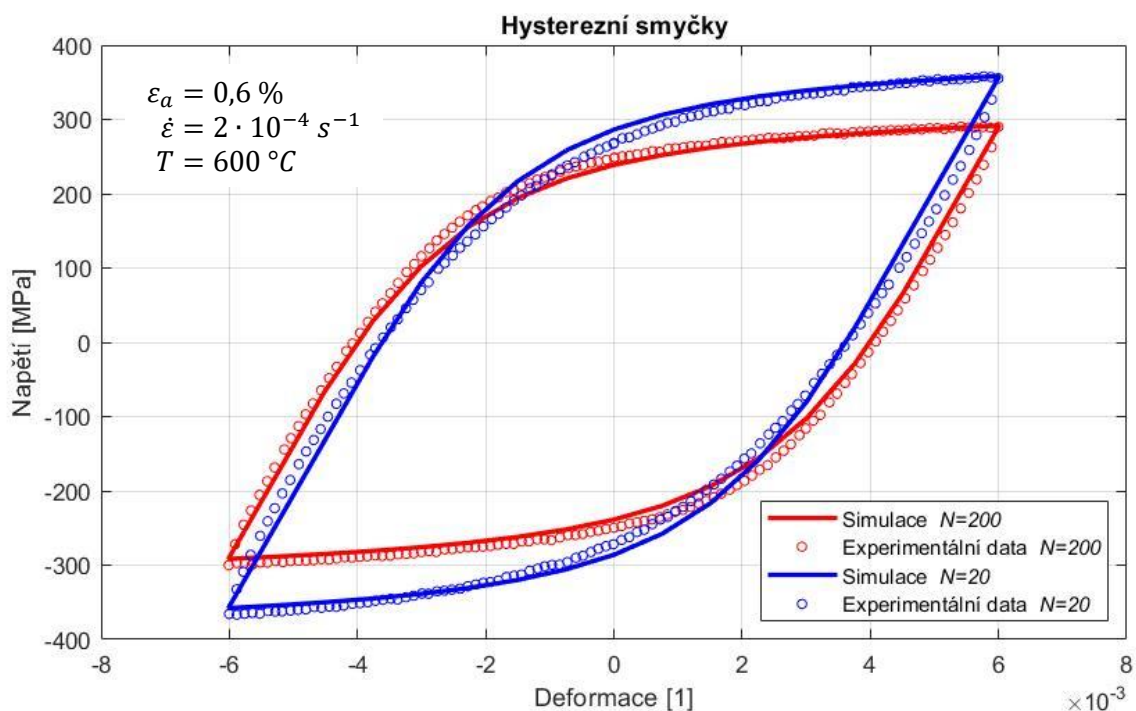
Tabulka 5 - Parametry modelu s hyperbolickým zákonem tečení

	Parametr	Hodnota	Rozměr
Elastické	$E$	$1,5 \cdot 10^5$	$MPa$
	$\nu$	0,28	
Mez kluzu	$\sigma_y$	190	$MPa$
Kinematické zpevnění	$C_1$	118 700	$MPa$
	$C_2$	31 780	$MPa$
	$C_3$	2 971	$MPa$
	$\gamma_1$	3 069	
	$\gamma_2$	582	
Izotropní zpevnění	$b_1$	1,464	
	$b_2$	1,464	
	$H$	-10	$MPa$
	$Q_r = Q_2$	-50	$MPa$
	$b_r$	$6 \cdot 10^{-3}$	
Paměťová plocha	$A$	180	$MPa$
	$B$	-243	$MPa$
	$C$	1230	
	$\eta$	0,5	
Funkce tečení	$\alpha$	$2,456 \cdot 10^{-5}$	$s^{-1}$
	$\beta$	0,023	$MPa^{-1}$

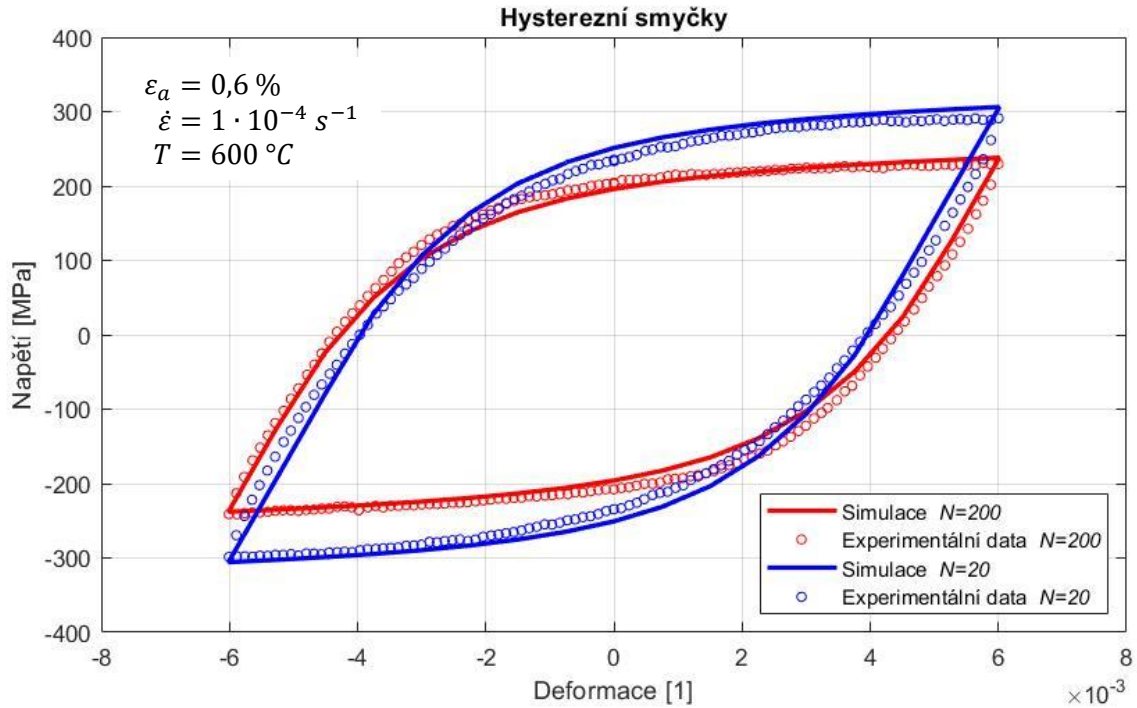


obr. 6.21 - Porovnání hysterezních smyček:  $\epsilon_a = 0,6 \%$ ;  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} s^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

Celkem tento model obsahuje 19 materiálových parametrů. Výsledné kalibrované parametry jsou uvedeny v Tabulce 5. Porovnání hysterezních smyček pro všechny zkoušky je možné vidět na obr. 6.21 až obr. 6.26. První tři z těchto grafů zobrazují hysterezní smyčky ze zkoušek se stejnou amplitudou deformace  $\epsilon_a = 0,6 \%$  a různou rychlostí deformace. Výsledky ze zkoušky pro rychlost deformace  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} s^{-1}$  a pro amplitudu deformace  $\epsilon_a = 0,4 \%$ , resp.  $\epsilon_a = 0,8\%$  jsou zobrazeny na obr. 6.24, resp. obr. 6.25. Obr. 6.26 dokumentuje výsledky

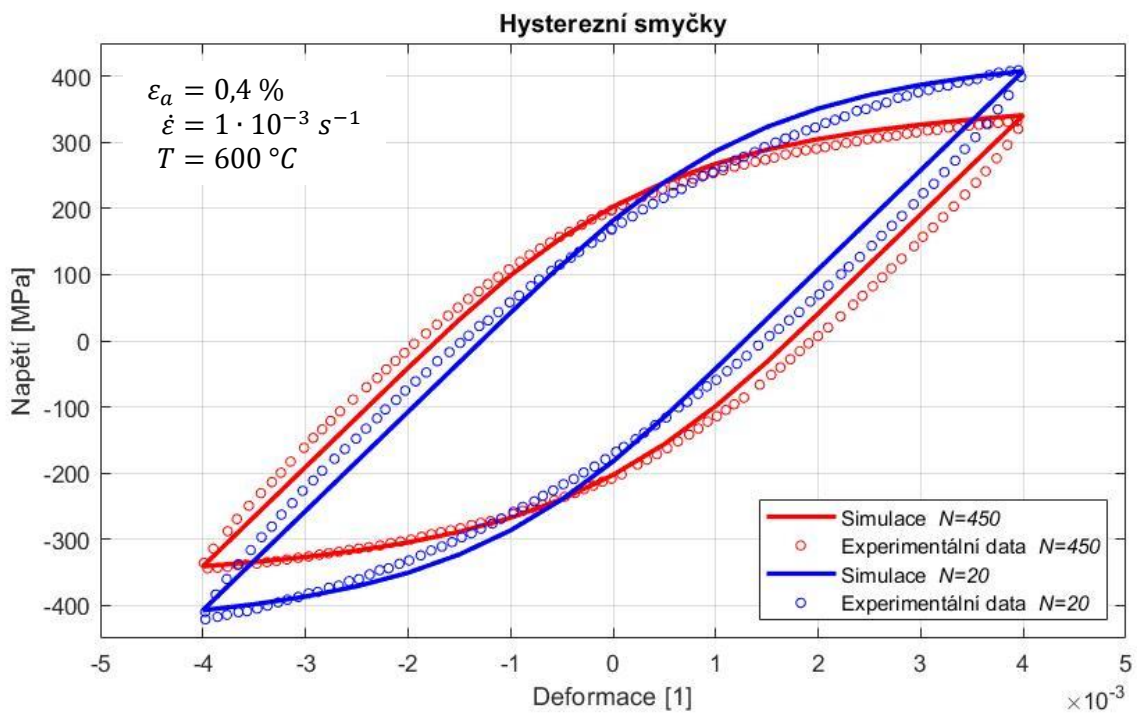


obr. 6.22 - Porovnání hysterezních smyček:  $\epsilon_a = 0,6 \%$ ;  $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

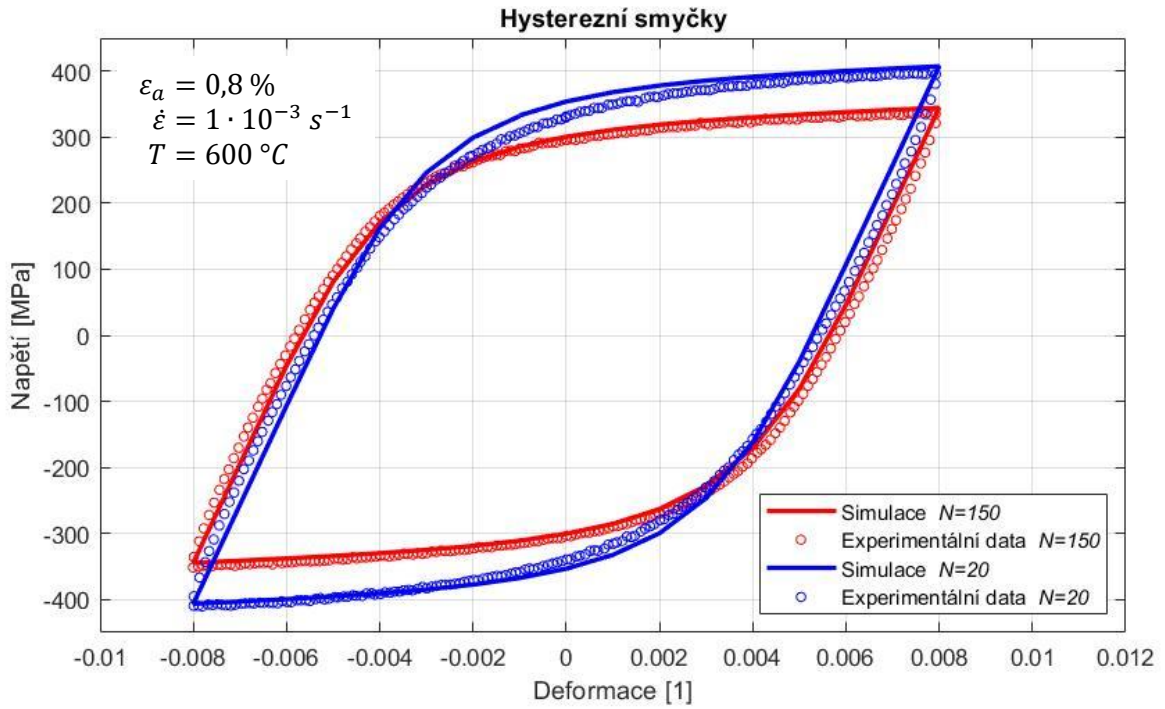


obr. 6.23 - Porovnání hysterezních smyček:  $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

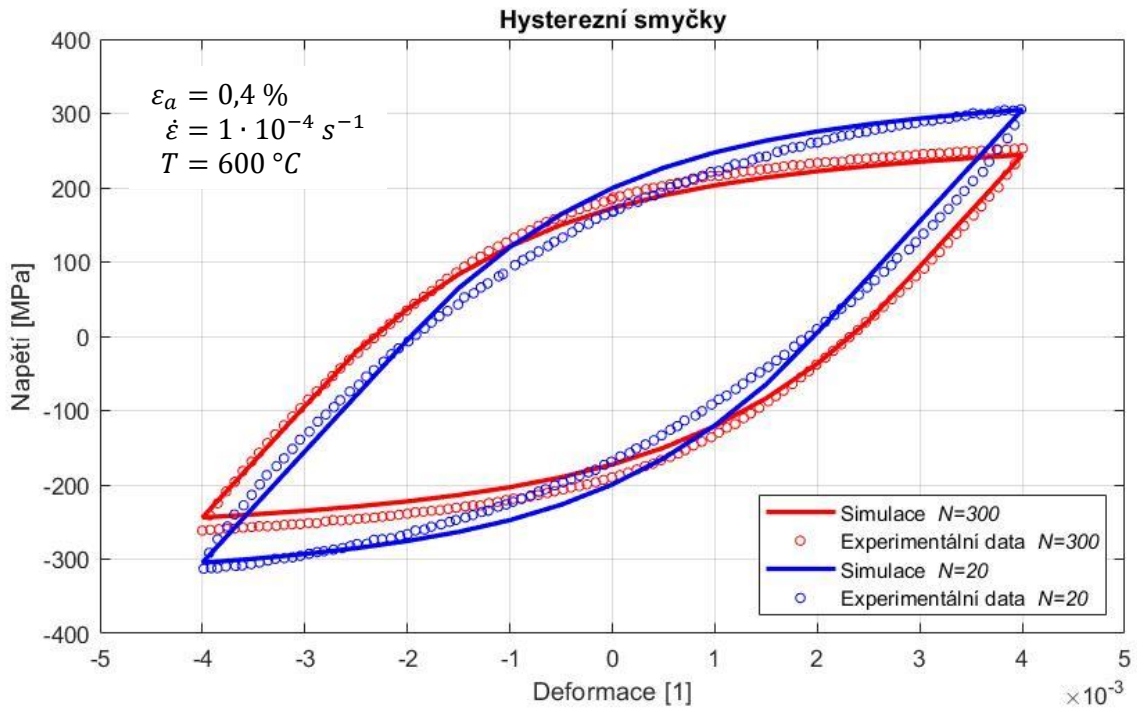
ze zkoušky pro rychlost deformace  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  a pro amplitudu deformace  $\varepsilon_a = 0,4 \%$ . Jednotlivé grafy zobrazují porovnání vždy jedné hysterezní smyčky v polovině životnosti ( $N = N_f/2$ ) a smyčky v počáteční nelineární fázi cyklického změkčení ( $N = 20$ ). Napětově-deformační odezva z výsledků simulace se velmi dobře shoduje s výsledky experimentů, a to pro všechny podmínky zatěžování.



obr. 6.24 - Porovnání hysterezních smyček:  $\varepsilon_a = 0,4 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$



obr. 6.25 - Porovnání hysterezních smyček:  $\varepsilon_a = 0,8 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$



obr. 6.26 - Porovnání hysterezních smyček:  $\varepsilon_a = 0,4 \%$ ;  $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ;  $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$

### 6.4.3 Dílčí zhodnocení výsledků

Stejně jako u two-layer viscoplasticity modelu, byla i zde kvalita kalibrace posuzována na základě shody numerických výsledků a výsledků z experimentálních zkoušek nízkocyklové únavy při konstantní amplitudě deformace a rychlosti deformace. Použitím navrženého unifikovaného modelu viskoplasticity bylo dosaženo výrazného zlepšení kvality aproximace napěťově-deformační odezvy materiálu 42CrMo4 při teplotě 600 °C oproti modelu two-layer viscoplasticity. Průběhy cyklického změkčení tzn. vývoje maximálního napětí cyklu v závislosti na čísle zátěžného cyklu, jsou zobrazeny na obr. 6.15 a obr. 6.17. Z těchto grafů je patrné, že dochází k velmi dobré shodě mezi simulací a experimentálními daty, a to pro počáteční nelineární fázi cyklického změkčení, tak i pro stabilizovanou lineární část. Také je této shody dosaženo pro všechny zkoušky provedené pro různé amplitudy a rychlosti deformace. Jedinou výjimkou je simulace experimentu s nízkou rychlostí deformace  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  a amplitudou deformace  $\epsilon_a = 0,4 \%$ . Při této zkoušce docházelo k cyklickému zpevnění v počáteční fázi, ale toto zpevnění nebylo zahrnuto do materiálového modelu, jelikož se toto zpevnění neprojevovalo při žádném jiném experimentu. Z tohoto důvodu vychází nižší hodnoty napětí při simulaci viz. obr. 6.19.

Použití hyperbolického sinu pro funkci tečení zlepšilo popis viskózního chování materiálu, jelikož tato funkce lépe odpovídá experimentálním hodnotám viz. obr. 6.20. Je nutné poznamenat, že, na rozdíl od two-layer viscoplasticity modelu, se zde viskózní charakter neprojevuje během čistě elastické deformace a sklon elastické části hysterezní smyčky zůstává stejný pro všechny simulace. Použití tří částí kinematického zpevnění s jedním lineárním pravidlem se ukázalo jako vhodné již u two-layer viscoplasticity modelu. Porovnání hysterezních smyček pro všechny zkoušky je znázorněno na obr. 6.21 až obr. 6.26. Pro porovnání je vždy vykreslena hysterezní smyčka v polovině životnosti ( $N = N_f/2$ ) a smyčka v počáteční nelineární fázi cyklického změkčení ( $N = 20$ ). Na základě uvedených poznatků je možné konstatovat, že zvolený model velmi dobře aproximuje experimentální data.

## 7 Závěr

V první části této diplomové práce byly představeny základní poznatky z inkrementální teorie plasticity a viskoplasticity. Dále je uveden přehled modelů, které umožňují popis plastického, nebo viskoplastického chování materiálů. Z nepřeberného množství modelů, které se v této oblasti běžně používají, bylo vybráno několik významných představitelů. Mezi nejjednodušší patří elastoplastický model s kinematickým a izotropním zpevněním dle Chabocheho. Z neunifikovaných viskoplastických modelů zde byl představen two-layer viscoplasticity model, z unifikovaných pak viskoplastický model dle Chabocheho. Následně byly představeny obecné postupy identifikace materiálových parametrů vybraných modelů na základě experimentálních výsledků zkoušek nízkocyklové únavy. Tyto postupy byly aplikovány při kalibraci vybraných modelů v praktické části této práce.

Hlavním cílem této práce bylo vybrat vhodný model viskoplasticity a kalibrovat jeho materiálové parametry tak, aby se výsledky numerické simulace shodovaly s experimentálními výsledky ze zkoušky nízkocyklové únavy, která probíhala při konstantní amplitudě a rychlosti deformace a při konstantní teplotě 600 °C. Zkoušeným materiálem byla nízkolegovaná chrom-molybdenová ocel 42CrMo4.

Pro kalibraci byly vybrány dva modely viskoplasticity. Prvním z nich je neunifikovaný model two-layer viscoplasticity. Tento model obsahuje izotropní a kinematické zpevnění dle Chabocheho, které byly kalibrovány pomocí vytvořených skriptů v programu Matlab. Jako funkce tečení je použita mocninná závislost. Simulace probíhala v MKP programu Abaqus, ve kterém je tento model standardně implementován. Na základě porovnání experimentálních dat a výsledků simulace lze zjistit, že použití tohoto modelu není dostačující pro modelování chování daného materiálu 42CrMo4. Především potom funkce izotropního zpevnění nedostatečně popisuje komplexní cyklické chování materiálu pozorované při různých způsobech zatěžování. Na druhou stranu, zvolené kinematické zpevnění se třemi kinematickými částmi vhodně popisuje tvar hysterezních smyček. Získané poznatky při kalibraci two-layer viscoplasticity modelu byly využity při návrhu a kalibraci vhodnějšího modelu.

Pro zlepšení popisu chování materiálu byl navržen nový unifikovaný viskoplastický model s hyperbolickým zákonem tečení. Podstatného zlepšení popisu bylo dosaženo rozsáhlým rozšířením izotropního zpevnění, které bylo navrženo podle poznatků získaných ze studia experimentálních dat. Izotropní zpevnění bylo upraveno přidáním závislosti funkce zpevnění na hladině deformace s využitím paměťové plochy v prostoru plastických deformací a také přidáním členu popisujícího statické zotavení. Konstitutivní rovnice kinematického zpevnění byly použity stejné jako u two-layer viscoplasticity modelu. Jelikož tento materiálový model není standardně implementován v programu Abaqus, musely být za tímto účelem numericky integrovány konstitutivní rovnice. Z tohoto důvodu byla vytvořena uživatelská funkce UMAT.

Z porovnání numerických výsledků a výsledků experimentálních zkoušek lze zjistit, že model velmi dobře popisuje cyklické chování vybraného vyšetřovaného materiálu, a to jak v počáteční nelineární fázi cyklického změkčení, tak i ve stabilizované lineární části cyklického změkčení. Také je dosaženo velmi dobré shody pro všechny zkoušky s různou amplitudou a rychlostí deformace. Dále se ukázalo, že pro popis viskózního chování vyšetřovaného materiálu je vhodnější použití hyperbolického sinu pro funkci tečení, oproti mocninné funkci, která byla použita u two-layer viscoplasticity modelu.

Námětem další práce by mohla být validace navrženého modelu viskoplasticity pro experimentální zkoušky s deformační výdrží, nebo pro zkoušky s proměnnou amplitudou deformace. Dále by pak bylo možné tento model rozšířit a zahrnout do něj vliv teploty pro popis teplotně-mechanické nízkocyklové únavy. Zlepšení kvality kalibrace by také mohlo být dosaženo identifikací materiálových parametrů navrženého modelu viskoplasticity pomocí optimalizační metody, která by minimalizovala odchylky napětí mezi experimentálně zjištěnými daty a predikovaným napětím ze simulace.



## Seznam použité literatury

- [1] HALAMA, Radim. *Experimentální poznatky a fenomenologické modelování cyklické plasticity kovů*. Ostrava, 2009. Habilitační práce. VŠB – Technická univerzita Ostrava.
- [2] CHABOCHE, J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. In: *International Journal of Plasticity*. 2008, , s. 1642-1693. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.03.009. ISSN 07496419. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0749641908000582>
- [3] DUNNE, Fionn a Nik PETRINIC. *Introduction to computational plasticity*. Oxford: Oxford University Press, 2005. ISBN 978-0-19-856826-1.
- [4] MURAKAMI, S. a N. OHNO. A constitutive equation of creep based on the concept of a creep-hardening surface. *International Journal of Solids and Structures* [online]. 1982, **18**(7), 597-609 [cit. 2020-08-01]. DOI: 10.1016/0020-7683(82)90042-7. ISSN 00207683. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020768382900427>
- [5] CONTESTI, E. a G. CAILLETAUD. Description of creep-plasticity interaction with non-unified constitutive equations: application to an austenitic stainless steel. *Nuclear Engineering and Design* [online]. 1989, **116**(3), 265-280 [cit. 2020-08-01]. DOI: 10.1016/0029-5493(89)90087-3. ISSN 00295493. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0029549389900873>
- [6] CAILLETAUD, G. a K. SAÏ. Study of plastic/viscoplastic models with various inelastic mechanisms. *International Journal of Plasticity* [online]. 1995, **11**(8), 991-1005 [cit. 2020-08-01]. DOI: 10.1016/S0749-6419(95)00040-2. ISSN 07496419. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0749641995000402>
- [7] Two-layer viscoplasticity. In: *ABAQUS Analysis User's Manual* [online]. 2014 [cit. 2020-04-02]. Dostupné z: <http://ivt-abaqusdoc.ivt.ntnu.no:2080/v6.14/books/usb/default.htm>
- [8] CHABOCHE, J.L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity* [online]. 1989, **5**(3), 247-302 [cit. 2020-07-23]. DOI:

- 10.1016/0749-6419(89)90015-6. ISSN 07496419. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0749641989900156>
- [9] ZIENKIEWICZ, O. a I. CORMEAU. Visco-plasticity-plasticity and creep in elastic solids—a unified numerical solution approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* [online]. 1974, **8**(4), 821-845 [cit. 2020-08-02]. DOI: 10.1002/nme.1620080411. ISSN 00295981. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1620080411>
- [10] MILLER, A. An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic, and Creep Deformation: Part I—Equations Development and Analytical Procedures. *Journal of Engineering Materials and Technology* [online]. 1976, **98**(2), 97-105 [cit. 2020-08-02]. DOI: 10.1115/1.3443367. ISSN 0094-4289. Dostupné z: <https://asmedigitalcollection.asme.org/materialstechnology/article/98/2/97/403948/An-Inelastic-Constitutive-Model-for-Monotonic>
- [11] BODNER, S. Review of a Unified Elastic—Viscoplastic Theory. MILLER, Alan K., ed., Alan MILLER. *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity* [online]. Dordrecht: Springer Netherlands, 1987, s. 273-301 [cit. 2020-08-02]. DOI: 10.1007/978-94-009-3439-9\_6. ISBN 978-94-010-8039-2. Dostupné z: [http://link.springer.com/10.1007/978-94-009-3439-9\\_6](http://link.springer.com/10.1007/978-94-009-3439-9_6)
- [12] PRAGER, William. Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity. *Journal of Applied Physics* [online]. 1949, **20**(3), 235-241 [cit. 2020-07-17]. DOI: 10.1063/1.1698348. ISSN 0021-8979. Dostupné z: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1698348>
- [13] FREDERICK, C.O. a P.J. ARMSTRONG. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures* [online]. 2007, **24**(1), 1-26 [cit. 2020-07-17]. DOI: 10.3184/096034007X207589. ISSN 09603409. Dostupné z: <http://openurl.ingenta.com/content/xref?genre=article&iissn=0960-3409&volume=24&issue=1&spage=1>
- [14] ZHANG, Shang-Lin a Fu-Zhen XUAN. Interaction of cyclic softening and stress relaxation of 9–12% Cr steel under strain-controlled fatigue-creep condition: Experimental and modeling. In: *International Journal of Plasticity*. Pergamon, 2017, , s. 45-64. DOI: 10.1016/j.ijplas.2017.06.007. ISSN 07496419. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0749641917302358>

- [15] BARRETT, R.A., P.E. O'DONOGHUE a S.B. LEEN. An improved unified viscoplastic constitutive model for strain-rate sensitivity in high temperature fatigue. *International Journal of Fatigue* [online]. 2013, **48**, 192-204 [cit. 2020-06-22]. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2012.11.001. ISSN 01421123. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142112312003192>
- [16] CHABOCHE, J.L. *Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel*. Berlin, Germany: IASMiRT, 1979.
- [17] BARTOŠÁK, Michal, Miroslav ŠPANIEL a Karel DOUBRAVA. Unified viscoplasticity modelling for a SiMo 4.06 cast iron under isothermal low-cycle fatigue-creep and thermo-mechanical fatigue loading conditions. *International Journal of Fatigue* [online]. 2020, **136** [cit. 2020-06-22]. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2020.105566. ISSN 01421123. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142112320300979>
- [18] HALAMA, Radim, Josef SEDLK a Michal OFER. Phenomenological Modelling of Cyclic Plasticity. In: *Numerical Modelling*. InTech, 2012. DOI: 10.5772/35902. ISBN 978-953-51-0219-9. Dostupné také z: <http://www.intechopen.com/books/numerical-modelling/phenomenological-modelling-of-cyclic-plasticity>
- [19] KANG, Guozheng, Qing GAO a Xianjie YANG. A visco-plastic constitutive model incorporated with cyclic hardening for uniaxial/multiaxial ratcheting of SS304 stainless steel at room temperature. *Mechanics of Materials* [online]. 2002, **34**(9), 521-531 [cit. 2020-06-22]. DOI: 10.1016/S0167-6636(02)00153-9. ISSN 01676636. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167663602001539>
- [20] RAJAKRISHNAN, Rashan. *Extension of Visco-plastic material model of type Chaboche for the detection of Static Strain Ageing*. Duisburg-Essen, 2017. Diplomová práce. University of Duisburg Essen.
- [21] AMBROZIAK, A. a P. KLOSOWSKI. *The elastoviscoplastic Chaboche model*. Gdaňsk, 2007. Task quarterly. Gdansk University of Technology.
- [22] MARQUIS, D. *Modélisation et identification de l'écrouissage anisotrope des métaux*. France, 1979. Thèse de 3ème cycle. Université Paris 6.
- [23] KANG, Guozheng, Nobutada OHNO a Akira NEBU. Constitutive modeling of strain range dependent cyclic hardening. *International Journal of Plasticity* [online]. 2003,

- 19**(10), 1801-1819 [cit. 2020-06-22]. DOI: 10.1016/S0749-6419(03)00016-0. ISSN 07496419. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0749641903000160>
- [24] KICHENIN, J. *Comportement Thermomécanique du Polyéthylène—Application aux Structures Gazières*. l'Ecole Polytechnique, 1992. Thèse de Doctorat.
- [25] KANG, JJ, AA BECKER a W SUN. Determination of elastic and viscoplastic material properties obtained from indentation tests using a combined finite element analysis and optimization approach. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. 2013, , s. 175-188. DOI: 10.1177/1464420713504534. ISSN 1464-4207. Dostupné také z: <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1464420713504534>
- [26] CHABOCHE, J.L. a J. LEMAITRE. *Mechanics of solid materials*. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. ISBN 0-512-47758-1.
- [27] BARTOŠÁK, Michal. *PHENOMENOLOGICAL MODELS FOR LIFETIME PREDICTION UNDER LOW-CYCLE FATIGUE AND THERMO-MECHANICAL FATIGUE LOADING CONDITIONS*. Praha, 2019. Disertační práce. ČVUT v Praze.
- [28] BARRETT, R., T. FARRAGHER, C. HYDE, N. O'DOWD, P. O'DONOGHUE a S. LEEN. A Unified Viscoplastic Model for High Temperature Low Cycle Fatigue of Service-Aged P91 Steel. *Journal of Pressure Vessel Technology* [online]. 2014, **136**(2) [cit. 2020-06-22]. DOI: 10.1115/1.4025618. ISSN 0094-9930. Dostupné z: <https://asmedigitalcollection.asme.org/pressurevesseltech/article/doi/10.1115/1.4025618/477509/A-Unified-Viscoplastic-Model-for-High-Temperature>
- [29] BECKER, Martin a Hans-Peter HACKENBERG. A constitutive model for rate dependent and rate independent inelasticity. Application to IN718. *International Journal of Plasticity* [online]. 2011, **27**(4), 596-619 [cit. 2020-06-22]. DOI: 10.1016/j.ijplas.2010.08.005. ISSN 07496419. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0749641910001105>
- [30] RAFSANJANI, Ahmed. Writing User Subroutines with ABAQUS. In: *IMechanica.org* [online]. c2006-2014 [cit. 2020-06-23]. Dostupné z: [https://imechanica.org/files/Writing%20User%20Subroutines%20with%20ABAQUS\\_0.pdf](https://imechanica.org/files/Writing%20User%20Subroutines%20with%20ABAQUS_0.pdf)

- [31] HOSSEINI, E., A. KAZEMI, K. ABRINIA, H. SHAHSAVARI, S. HOLDSWORTH a M. BAGHANI. Effect of prior deformation on the subsequent creep and anelastic recovery behaviour of an advanced martensitic steel: Unified constitutive modelling. *International Journal of Mechanical Sciences* [online]. 2020, **176** [cit. 2020-06-22]. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105546. ISSN 00207403. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020740319337178>
- [32] ZHAO, Lei, Lianyong XU, Yongdian HAN, Hongyang JING a Zhifang GAO. Modelling creep-fatigue behaviours using a modified combined kinematic and isotropic hardening model considering the damage accumulation. *International Journal of Mechanical Sciences* [online]. 2019, **161-162** [cit. 2020-06-22]. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.105016. ISSN 00207403. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020740319312536>
- [33] BARTOŠÁK, Michal, Jakub HORVÁTH a Miroslav ŠPANIEL. Isothermal low-cycle fatigue and fatigue-creep of a 42CrMo4 steel. *International Journal of Fatigue* [online]. 2020, **135** [cit. 2020-07-14]. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2020.105538. ISSN 01421123. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142112320300694>
- [34] HÄHNER, Peter, Ernst AFFELDT, Tilmann BECK, Hellmuth KLINGELHÖFFER, Malcolm LOVEDAY a Claudia RINALDI. *Validated Code-of-Practice for Strain-Controlled Thermo-Mechanical Fatigue Testing*. 2006.
- [35] BARTOŠÁK, Michal, Jakub HORVÁTH a Miroslav ŠPANIEL. Life assessment of a 42CrMo4 steel under low-cycle fatigue and thermo-mechanical fatigue loading conditions. *International Journal of Fatigue* [online]. 2019, **129** [cit. 2020-07-14]. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2019.105255. ISSN 01421123. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0142112319303597>

## Seznam obrázků

obr. 2.1 - Aditivní zákon [1].....	10
obr. 2.2 - Plocha plasticity [1] .....	11
obr. 2.3 - Izotropní zpevnění [1].....	12
obr. 2.4 - Kinematické zpevnění [1] .....	13
obr. 2.5 - Kombinované zpevnění [1] .....	13
obr. 2.6 - Podmínka konzistence [1] .....	14
obr. 2.7 - Viskózní napětí [3].....	15
obr. 3.1 - Význam parametrů A-F modelu [1].....	19
obr. 3.2 - Chabocheho kombinovaný model izotropního a kinematického zpevnění [18].....	20
obr. 3.3 - Paměťová plocha .....	21
obr. 3.4 - Two-layer viscoplasticity model [7] .....	23
obr. 4.1 - Elastická a viskoplastická oblast v prostoru hlavních napětí.....	26
obr. 4.2 - Vývojový diagram uživatelské funkce UMAT.....	31
obr. 5.1 - Kalibrace kinematického zpevnění [1].....	35
obr. 5.2 - Parametry izotropního zpevnění [18].....	36
obr. 5.3 - Význam parametrů izotropního zpevnění .....	39
obr. 6.1 - Experimentální data: $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ; $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	41
obr. 6.2 - Cyklické změkčení: Určení životnosti .....	42
obr. 6.3 - Abaqus model.....	43
obr. 6.4 - Hysterezní smyčky: $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ; $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	45
obr. 6.5 - Cyklické změkčení: $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ; $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	45
obr. 6.6 - Určení parametrů funkce tečení .....	46
obr. 6.7 - Cyklické změkčení pro různou rychlost deformace: $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	47
obr. 6.8 - Hysterezní smyčky: $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ; $\dot{\varepsilon} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	48
obr. 6.9 - Hysterezní smyčky: $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ; $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	48
obr. 6.10 - Cyklické změkčení pro různou amplitudu deformace: $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	49
obr. 6.11 - Cyklické změkčení pro různou amplitudu deformace v logaritmických souřadnicích $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	49
obr. 6.12 - Hysterezní smyčky: $\varepsilon_a = 0,4 \%$ ; $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	50
obr. 6.13 - Hysterezní smyčky: $\varepsilon_a = 0,8 \%$ ; $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	50
obr. 6.14 - Hysterezní smyčky: $\varepsilon_a = 0,4 \%$ ; $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	51
obr. 6.15 - Cyklické změkčení pro různou rychlost deformace: $\varepsilon_a = 0,6 \%$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	54
obr. 6.16 - Nelineární regrese – určení parametrů izotropního zpevnění.....	54

obr. 6.17 - Cyklické změkčení pro různou amplitudu deformace: $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	55
obr. 6.18 - Cyklické změkčení pro různou amplitudu deformace v logaritmických souřadnicích: $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	55
obr. 6.19 - Cyklické změkčení: $\epsilon_a = 0,4 \%$ ; $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	56
obr. 6.20 - Nelineární regrese – určení parametrů funkce tečení .....	56
obr. 6.21 - Porovnání hysterezních smyček: $\epsilon_a = 0,6 \%$ ; $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	58
obr. 6.22 - Porovnání hysterezních smyček: $\epsilon_a = 0,6 \%$ ; $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	58
obr. 6.23 - Porovnání hysterezních smyček: $\epsilon_a = 0,6 \%$ ; $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	59
obr. 6.24 - Porovnání hysterezních smyček: $\epsilon_a = 0,4 \%$ ; $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	59
obr. 6.25 - Porovnání hysterezních smyček: $\epsilon_a = 0,8 \%$ ; $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	60
obr. 6.26 - Porovnání hysterezních smyček: $\epsilon_a = 0,4 \%$ ; $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ; $T = 600 \text{ }^\circ\text{C}$ .....	60

## Seznam tabulek

Tabulka 1 - Přehled experimentálních zkoušek.....	38
Tabulka 2 - Chemické složení materiálu [26].....	40
Tabulka 3 - Materiálové parametry.....	41
Tabulka 4 - Parametry funkce tečení .....	43
Tabulka 5 - Parametry modelu s hyperbolickým zákonem tečení .....	53

## Seznam příloh

Příloha A - Skript pro kalibraci kinematického zpevnění v programu Matlab: <i>kinematic.m</i>	
Příloha B - Skript pro kalibraci izotropního zpevnění v programu Matlab: <i>isotropic.m</i>	



# Přílohy

## Příloha A

Skript v programu Matlab umožňující kalibraci kinematického zpevnění na základě experimentálních hodnot napětí v závislosti na plastické deformaci. Lze provést kalibraci pro libovolný počet kinematických částí. *kinematic.m*

```
function kinematic (strain, stress)
load('strain') %Plastická deformace
load('stress') %Napětí

%počáteční odhad parametrů kinematického zpevnění
sigma_y=200;
C=[118700 31780 2971]; % C=[C1 C2 ... CN]
gamma=[3069 582 0]; % gamma=[gamma1 gamma2 ... gammaN]
%počet kinematických částí
N=3;
%amplituda plastické deformace
e_ap=0.004;
%Výběr hodnot tahové části
strain1=strain(600:2400)';
stress1=stress(600:2400)';
%Výběr hodnot tlakové části
strain2=strain(3000:4800)';
stress2=stress(3000:4800)';

%definování vektoru pro optimalizaci
if gamma(end)==0
param = [sigma_y C gamma(1:end-1)];
else
param = [sigma_y C gamma];
end

%nastavení řešiče pro optimalizaci
options = optimset;
options = optimset(options, 'MaxFunEvals', 1000, 'TolX', 1e-6, ...
'TolFun', 1e-6, 'MaxIter', 10000, 'DiffMinChange', 1e-8, ...
'DiffMaxChange', 0.1);
[param, FVAL, EXITFLAG] = fminsearch(@critfunc, param, options)

%Optimalizované hodnoty parametrů
fprintf('%10.2f', param)
fprintf('\n')
%Graf závislosti napětí na plastické deformaci
figure(1)
plot(strain1, stress1, 'bo');
hold on
plot(strain1, stress_num1, 'r-', 'LineWidth', 3);
% plot(strain2, stress2, 'bo');
% plot(strain2, stress_num2, 'r-', 'LineWidth', 3);
xlabel('Plastická deformace \epsilon_p [-]');
ylabel('Napětí \sigma [MPa]');
```

```
legend 'Experimentální data' 'Optimalizovaná data'

%Optimalizační funkce
function eps = critfunc(param)
sigma_y=param(1);
for i=1:N
    C(i)=param(i+1);
    if gamma(i)==0
    else
        gamma(i)=param(N+i+1);
    end
end

% Výpočet napětí obou částí hysterezní smyčky
if gamma(end)==0
    %Výpočet s jednou lineární částí
    stress_num1=sigma_y+(C(1:end-1)./gamma(1:end-1))*(1-2*exp...
        (-gamma(1:end-1)'*(strain1+e_ap)))+C(end)*strain1;
    stress_num2=-sigma_y-(C(1:end-1)./gamma(1:end-1))*(1-...
        2*exp(+gamma(1:end-1)'*(strain2-e_ap)))-C(end)*strain2;
else
    stress_num1=sigma_y+(C./gamma)*(1-2*exp(-gamma'...
        *(strain1+e_ap)));
    stress_num2=-sigma_y-(C./gamma)*(1-2*exp(+gamma'...
        *(strain2-e_ap)));
end

%%% Z následujících funkcí se volí vždy pouze jedna
%Optimalizace pomocí celé hysterezní smyčky
eps=sum((stress_num1-stress1).^2)+sum((stress_num2-stress2).^2);
%Optimalizace pomocí tahové části hysterezní smyčky
eps=sum((stress_num1-stress1).^2);
%Optimalizace pomocí tlakové části hysterezní smyčky
eps=sum((stress_num2-stress2).^2);
end
end
```

## Příloha B

Skript v programu Matlab umožňující kalibraci izotropního zpevnění na základě experimentálních hodnot izotropní proměnné v závislosti na akumulované plastické deformaci.

*isotropic.m*

```
function isotropic (R,p)
load('R') %Isotropní proměnná
load('p') %Akumulovaná plastická deformace
%počáteční odhad parametrů izotropního zpevnění
Q=-100;
b=1.5;
param = [Q b];

%nastavení řešiče pro optimalizaci
options = optimset;
options = optimset(options,'MaxFunEvals',1000,'TolX', 1e-6,...
'TolFun',1e-6,'MaxIter',10000,'DiffMinChange',1e-8, ...
'DiffMaxChange',0.1);
[param, FVAL, EXITFLAG] = fminsearch(@critfunc,param,options)

%Optimalizované hodnoty parametrů
fprintf('%10.2f',param)
fprintf('\n')

%Graf cyklického zpevnění
figure(1)
plot(p,R,'bo');
hold on
plot(p,R_num,'r-','LineWidth',3);
xlabel('Akumulovaná lastická deformace p [-]');
ylabel('Izotropní proměnná R [MPa]');
legend 'Experimentální data' 'Optimalizovaná data'

%Optimalizační funkce
function eps = critfunc(param)
Q=param(1);
b=param(2);
R_num=Q*(1-exp(-b*p));
eps=sum((R-R_num).^2);
end
end
```