

**ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE**

**FAKULTA  
STROJNÍ**



**DIPLOMOVÁ  
PRÁCE**

**2020**

**BC. VOJTĚCH  
KLIMENT**

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Kliment** Jméno: **Vojtěch** Osobní číslo: **456361**  
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**  
Zadávací katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**  
Studijní program: **Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Aplikovaná mechanika**

## II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

**Numerická MKP implementace creepového modelu pro popis primární a sekundární fáze tečení kovových materiálů**

Název diplomové práce anglicky:

**Finite element implementation of creep model for the description of primary and secondary creep stages in metals**

Pokyny pro vypracování:

1. Proveďte rešerši používaných modelů pro popis mechanismu creepu kovových materiálů v MKP aplikacích.
2. Zaměřte se na originální creepový model pro popis primární a sekundární fáze tečení kovových materiálů s uvažováním přechodových efektů [3].
3. Proveďte implementaci creepového modelu [3] do MKP software PMD (Package for Machine design).
4. Proveďte verifikaci MKP implementace modelu na základě porovnání s predikcí analytického modelu [3] pro případ jednoosé napjatosti. Simulujte creepové chování materiálu při rychlých změnách vnějšího napětí.
5. Proveďte validaci MKP implementace modelu na dostupných experimentálních výsledcích pro krut tyčí čtvercového průřezu případně helikoidních vzorků z austenitické oceli Sanicro 25. Diskutujte získané výsledky.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Penny, R. K. and Marriott, D. L. (1971), Design for Creep. McGraw.Hill, London.  
[2] Plešek, J. (1999), Numerická integrace konstitutivních vztahů. Inženýrská mechanika, 6(1), pp 3–24.  
[3] Kloc, L., Sklenička, V., Dymáček, P., Plešek, J. (2018), New creep constitutive equation for finite element modelling including transient effects. Mechanics of Materials, 119, pp 49–55.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

**Ing. Dušan Gabriel, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

**Ing. Jan Masák, UT AVČR**

Datum zadání diplomové práce: **27.04.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **07.08.2020**

Platnost zadání diplomové práce: \_\_\_\_\_



Ing. Dušan Gabriel, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) práce



doc. Ing. Miroslav Španiel, CSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

30.4.2020

Datum převzetí zadání



Podpis studenta

## Anotační list

<b>Název DP:</b>	Numerická MKP implementace creepového modelu pro popis primární a sekundární fáze tečení kovových materiálů
<b>Autor:</b>	Bc. Vojtěch Kliment
<b>Akademický rok:</b>	2019/2020
<b>Studijní program:</b>	Aplikovaná mechanika
<b>Ústav:</b>	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky
<b>Vedoucí práce:</b>	Ing. Dušan Gabriel, Ph.D.
<b>Konzultant:</b>	Ing. Jan Masák
<b>Počet stran:</b>	57
<b>Počet obrázků:</b>	19
<b>Počet tabulek:</b>	10
<b>Klíčová slova:</b>	creep, přechodové efekty, MKP implementace P91, Sanicro®25

### Anotace:

Diplomová práce se zabývá problematikou tečení materiálu (creepu). Originální Klocův creepový model byl implementován do stávajícího software *PMD*. Verifikace MKP implementace modelu byla provedena na základě srovnání s predikcí analytického modelu pro případ jednoosého tahu. Validace MKP implementace modelu byla provedena na dostupných experimentálních výsledcích pro krut tyčí čtvercového průřezu. Pro oba druhy namáhání bylo zkoumáno creepové chování při rychlých změnách vnějšího napětí.

<b>Title:</b>	Finite element implementation of creep model for the description of primary and secondary creep stages in metals
<b>Keywords:</b>	creep, transient effects, FEM implementation, P91, Sanicro®25

### Abstract:

This diploma thesis deals with the phenomenon of creep. The original Kloc creep model was implemented in the existing *PMD* software. The verification of the FEM model implementation was based on a comparison with the prediction of the analytical model for uniaxial tension. The validation of the FEM model implementation was carried out using experimental results for the torsion of square bars. For both types of stress, the creep behavior was investigated at rapid changes of applied stress.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem: „Numerická MKP implementace creepového modelu pro popis primární a sekundární fáze tečení kovových materiálů“ vypracoval samostatně, a to pod vedením Ing. Dušana Gabriela, Ph.D., s využitím odborné literatury a dalších dostupných zdrojů informací, které jsou všechny citovány a uvedeny v seznamu literatury.

V Praze dne:

Podpis: .....

## Poděkování

Rád bych tímto poděkoval vedoucímu této diplomové práce, Ing. Dušanu Gabrielovi, Ph.D., a konzultantovi Ing. Janu Masákovi, za jimi věnovaný čas, cenné připomínky a odbornou pomoc při vypracovávání této práce. Rád bych také poděkoval RNDr. Luboši Klocovi, CSc. za konzultace creepových experimentů. Dále bych chtěl rovněž poděkovat své rodině za trpělivost, pozornost a podporu, které se mi dostávalo nejen při psaní této závěrečné práce, ale i během celého předchozího studia.

Tato práce vznikla za podpory grantu Technologické agentury České republiky č. TN01000024 (Národní centrum kompetence - Kybernetika a umělá inteligence) v rámci dílčího projektu T1.g (8) „Automation and production system optimization“.

## Obsah

<b>Seznam použité symboliky</b>	<b>7</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>9</b>
<b>2 Úvod do problematiky creepu kovových materiálů</b>	<b>10</b>
2.1 Charakteristika creepu . . . . .	10
2.2 Stádia creepu . . . . .	10
<b>3 Modely mechanismu creepu kovových materiálů</b>	<b>12</b>
3.1 Creep při jednoosém konstantním zatížení . . . . .	12
3.2 Creep při jednoosém proměnném zatížení . . . . .	14
3.2.1 Time Hardening Theory . . . . .	15
3.2.2 Strain Hardening Theory . . . . .	15
3.2.3 Total Strain Theory . . . . .	16
3.2.4 Srovnání uvedených teorií . . . . .	16
3.3 Creep při víceosém zatížení . . . . .	18
3.3.1 Ekvivalentní hodnota zatížení . . . . .	18
3.3.2 Pravidla toku . . . . .	19
3.4 Shrnutí uvedených modelů creepu . . . . .	20
<b>4 Klocův model creepu</b>	<b>21</b>
4.1 Nedostatky modelů z kapitoly 3.2 . . . . .	22
4.2 Mechanismus deformace za nízkého napětí . . . . .	23
4.2.1 Fyzikální podstata modelu . . . . .	23
4.2.2 Matematický popis modelu . . . . .	25
4.3 Mechanismus deformace za vysokého napětí . . . . .	25
4.3.1 Fyzikální podstata modelu . . . . .	25
4.3.2 Matematický popis modelu . . . . .	26
4.4 Výsledný matematický vztah . . . . .	27
4.5 Zobecnění modelu do 3D . . . . .	27
<b>5 Implementace do MKP software <i>PMD</i></b>	<b>30</b>
5.1 MKP software <i>PMD</i> a grafický procesor <i>GFEM</i> . . . . .	30
5.2 Algoritmus výpočtu . . . . .	31
5.3 Úloha prostého jednoosého tahu . . . . .	31

5.4	Simulace přechodových jevů . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Krut prutu obdélníkového průřezu</b>	<b>37</b>
6.1	Zadání úlohy . . . . .	37
6.2	Elastické řešení . . . . .	39
6.3	Numerické řešení . . . . .	40
6.3.1	MKP model . . . . .	40
6.3.2	Numerické řešení elastické úlohy . . . . .	41
6.3.3	Testovací výpočet na úloze prostého tahu . . . . .	44
6.3.4	Numerické řešení úlohy creepu . . . . .	46
6.4	Kompletní úloha pro všechny segmenty creepové křivky . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>51</b>
<b>8</b>	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>54</b>
<b>9</b>	<b>Seznam obrázků</b>	<b>56</b>
<b>10</b>	<b>Seznam tabulek</b>	<b>57</b>

## Seznam použité symboliky

### Fyzikální veličiny a konstanty

$\varepsilon_c$	creepová deformace [-]
$\dot{\varepsilon}_c$	rychlost creepové deformace [ $s^{-1}$ ]
$\phi$	úhel natočení [rad]
$\gamma$	úhlová creepová deformace [rad]
$\sigma$	vnější (aplikované) napětí [MPa]
$\sigma_e$	ekvivalentní napětí [MPa]
$\sigma_i$	vnitřní napětí [MPa]
$\sigma_t$	mezní (prahové) napětí [MPa]
$\sigma_r$	zbytkové efektivní napětí [MPa]
$\sigma_{red}$	reduované Von Misesovo napětí [MPa]
$\tau_{xy}$	vnější (aplikované) smykové napětí [MPa]
$\tau$	doba relaxace [s]
$J_p$	kvadratický model průřezu [ $mm^4$ ]
$E$	modul pružnosti v tahu [MPa]
$G$	modul pružnosti ve smyku [MPa]
$M_k$	kroucí moment [N mm]
$Q$	zdánlivá aktivační energie [ $kJ mol^{-1}$ ]
$R$	univerzální plynová konstanta [ $kJ mol^{-1} K^{-1}$ ]
$t$	absolutní čas [s]
$T$	termodynamická teplota [K]
$u$	posunutí ve směru osy $x$ [mm]
$v$	posunutí ve směru osy $y$ [mm]
$w$	posunutí ve směru osy $z$ [mm]



## Tenzory

$\varepsilon$	tenzor deformace
$\dot{\varepsilon}^e$	tenzor rychlosti deformace
$\sigma$	tenzor napětí
$\hat{C}$	tenzor elastických konstant
$S$	deviátorová část tenzoru napětí

## Zkratky

AV ČR	Akademie věd České republiky
GFEM	Graphic Processor for Finite Element Method (MKP software)
FEM	Finite Element Method
MKP	Metoda konečných prvků
PMD	Package for Machine Design (MKP software)
SPL	Standardní pevná látka
SVÚSS	Státní výzkumný ústav pro stavbu strojů

## 1 Úvod

Creep neboli tečení materiálu je charakteristika, která se užívá v oblasti materiálových věd. Tato vlastnost popisuje specifické chování materiálu, při kterém dochází k časově závislé plastické deformaci. Fenomén creepu lze pozorovat na tělesech dlouhodobě vystavených vysokým hodnotám napětí, a to ještě před dosažením meze kluzu. Významnou roli v tomto procesu hraje i okolní teplota. Vysoká teplota, zejména teplota, která se blíží teplotě tání příslušného materiálu, může podstatně urychlit mechanismus creepu.

S problematikou creepu se lze setkat v mnoha odvětvích průmyslu. Typickým příkladem může být lopatka rotoru letadla. Vystavení vysokým napětím od rotačního pohybu rotoru v prostředí o teplotě i okolo 1300°C způsobuje zatížení na lopatku rotoru, které vede v nárůst plastické deformace s rostoucím časem. Při zanedbání creepového chování materiálu by v tomto případě po určitém čase došlo ke kontaktu lopatky s jejím pláštěm, který by mohl způsobit nečekaný kolaps celého letadla. Dalším, avšak dnes už historickým příkladem creepu by mohlo být praskání starých olověných rozvodů horké vody, které především díky nízké teplotě tání olova probíhalo již za pokojové teploty.

Historický mezník v oblasti zkoumání fenoménu creepu představuje počátek 20.století, kdy dochází ke vzniku prvních modelů popisujících creepové chování materiálu. Tyto modely jsou odvozeny ze vztahů pro plasticitu materiálu. V současné době existuje stovky různých creepových modelů. Zatímco na jedné straně zde existují modely užívané v konvenčních MKP výpočetních softwarech, na druhé straně zde existují i nové originální přístupy, které si kladou za cíl co možná nejpřesněji popsat creepové chování, a to i například za cenu delších výpočetních časů, které je zapříčiněno zejména složitostí integrovaných rovnic.

Mezi takové modely patří i model creepu, který byl navržen RNDr. Lubošem Klocem, CSc. a kol. v brněnském *Ústavu fyziky materiálů Akademie věd České republiky*. Mezi přednosti tohoto modelu patří především jeho jasná fyzikální podstata, která umožňuje přesně popsat úlohy creepového chování během rychlých skokových změn v napětí.

Cílem této diplomové práce je implementace tohoto modelu creepu do stávajícího MKP software *Package for Machine Design (PMD)*. Verifikace MKP implementace modelu byla provedena na základě porovnání s predikcí analytického modelu odvozeného pro ocel P91 a případ jednoosé napjatosti. Validace MKP implementace modelu byla provedena na dostupných experimentálních výsledcích pro krut tyčí čtvercového průřezu z austenitické oceli Sanicro®25.

## 2 Úvod do problematiky creepu kovových materiálů

Jak je již výše uvedeno, fenomén creepu představuje poměrně komplexní problém, se kterým se lze setkat v každodenním životě okolo nás. Před detailnějším zkoumáním jednotlivých creepových teorií a modelů je však dobré shrnout všeobecně známé poznatky ohledně této problematiky. Následující odstavce se zaměřují na obecnou charakteristiku creepového chování, které je možné popsat jednotlivými stádii (fázemi) creepu.

### 2.1 Charakteristika creepu

Navzdory tomu, že creepové chování materiálů je specifické pro různá zadání úloh (především druh zatížení a zvolený materiál), lze i zde pozorovat jednotné zákony [1], jimiž se problematika creepu řídí. V následujících odstavcích jsou popsány společné rysy tečení materiálu.

Prvním společným rysem je charakter deformace. Podobně jako u plasticity materiálů se totiž jedná o nevratnou (plastickou) deformaci. Tato deformace je časově závislá a dochází k ní ještě před dosažením meze kluzu materiálu. Předpokládá se, že ke creepové deformaci dochází za každého (nenulového) napětí [1]. Významnou roli pro velikost deformace sehrává teplota. Při teplotách, které se rovnají zpravidla teplotám okolo 0,35 homologické teploty tání, lze u kovů pozorovat výrazný nárůst plastické deformace právě od creepu [1]. U některých kovů, jako je např. olovo, zejména pak u plastů, může být tohoto bodu dosaženo již za pokojové teploty.

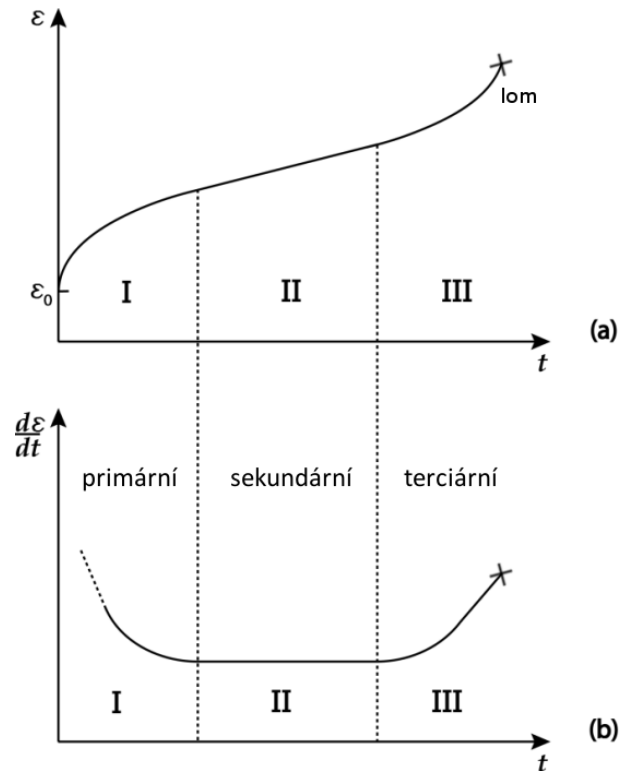
U krystalických materiálů probíhá creep na úrovni mikrostrukturálního chování. Na rozdíl od plasticity zde však nelze stanovit přesné místo výskytu creepu [1]. Typickými creepovými mechanismy jsou difuze vakancí a dislokace. Materiály s vyššími hodnotami difuzivity snáze podléhají creepovému chování. Naopak většími zrny nebo legováním ocelí lze creepovému chování materiálu předejít.

### 2.2 Stádia creepu

Pro popis průběhu a intenzity creepu jsou důležité zejména dvě veličiny. První veličinou je creepová deformace  $\varepsilon_c$ , která udává velikost deformace (poměrného prodloužení) způsobené od creepu. Druhou veličinou je rychlost creepové deformace  $\dot{\varepsilon}_c$ . Rychlost creepové deformace (tzv. *creep rate*) udává změnu creepové deformace v čase a je definována jako derivace creepové deformace podle času

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{d\varepsilon_c}{dt} \quad (2.1)$$

Získané hodnoty obou výše zmíněných veličin v závislosti na čase lze vynést do grafů, čímž lze získat tzv. creepové deformační křivky. Tvary deformačních křivek jsou zobrazeny na obr. 1. Z vyobrazených závislostí pak lze charakter creepu rozdělit do tří stadií – primární, sekundární a terciární creep.



Obr. 1: Stadia creepu: I – primární, II – sekundární, III – terciární [2].

Pro primární creep je typická poměrně vysoká počáteční rychlost creepové deformace. S rostoucím časem dochází k poklesu rychlosti deformace kvůli procesům zpevňování materiálu.

Oblast sekundárního creepu je z hlediska vyhodnocování deformací nejdůležitější oblastí, a to především díky dlouhé době trvání v porovnání s ostatními stadii creepu. Dochází zde k rovnováze mezi procesy zpevňování a rekystalizace, což má za následek konstantní hodnotu rychlosti deformace po celou dobu sekundárního creepu. Velikostně se jedná o minimální rychlost creepu  $\dot{\varepsilon}_{cmin}$ . Mikrostruktura materiálu se v rámci této oblasti nemění.

Terciární oblast se vyznačuje prudkým nárůstem deformace v čase. Na materiálu se začínají objevovat poruchy ve formě trhlin a na konci této fáze dochází k lomu tělesa.

### 3 Modely mechanismu creepu kovových materiálů

Historie popisu creepu úzce souvisí s historií plasticity. První modely popisující creepové chování byly formulovány na počátku 20. století – Andrade (1910, popis primárního creepu pro jednoosé zatížení), Norton (1929, popis sekundárního creepu pro jednoosé zatížení) a Odqvist (1934, zobecnění Nortonova modelu pro víceosé zatížení) [3].

V dnešní době existuje stovky různých creepových modelů, zahrnující jak starší konstitutivní modely, tak nové originální vztahy. Modely pro popis creepového chování lze rozdělit na základě charakteru popisovaného zatěžování na modely jednoosé a víceosé napjatosti, podle průběhu uvažovaného zatěžování pak na modely konstantního nebo proměnného zatížení. Dalším kritériem je počet stádií creepu, která jednotlivé modely zahrnují. Některé modely uvažují pouze popis primární fáze, některé pak pouze sekundární fáze. Kapitola 3 byla zpracována především za použití literatury [4] a [5].

#### 3.1 Creep při jednoosém konstantním zatížení

Creepová deformace, která je vyvozena konstantním tahovým jednoosým zatížením, zaujímá důležitou roli z hlediska vyhodnocování creepových experimentálních zkoušek. Prvním důvodem je relativní cenová dostupnost experimentů, kdy lze při namáhání na konstantní jednoosý tah otestovat široké spektrum materiálů. Druhou a neméně důležitou výhodou je jednoduchost vzniklých konstitutivních vztahů, ve kterých lze poměrně snadno od sebe separovat jednotlivé rysy tečení materiálu a které lze v mnoha případech později rozšířit i pro víceosé namáhání [4].

Creepová deformace závisí pro případ konstantního jednoosého tahového zatížení na třech parametrech – napětí, času a teplotě

$$\varepsilon_c = f(\sigma, t, T) \quad (3.1)$$

Tuto závislost lze z hlediska pozdější tvorby creepových modelů v řadě případů aproximovat do výhodnější podoby

$$\varepsilon_c = f_1(\sigma)f_2(t)f_3(T) \quad (3.2)$$

V některých případech ovšem nelze od sebe jednoduše oddělit veličiny  $\sigma$ ,  $t$  a  $T$ . Velkým problémem zejména bývá separace funkce teploty od funkce času, a proto ne všechny modely tuto separaci uvažují.

Funkce napětí  $f_1(\sigma)$  se v MKP aplikacích nejčastěji předepisuje pomocí dvou funkcí. Nejvíce používaným předpisem  $f_1(\sigma)$  je mocninný tvar funkce (Norton). Jedním z důvodů jeho častého používání je jeho jednoduchost. Druhým důvodem je pak podobný tvar průběhu

křivek této funkce pro různé velikosti napětí. Dalším používaným vztahem pro  $f_1(\sigma)$  je užití funkce hyperbolického sinu (Garofalo, McVetty). Tato funkce má lineární průběh pro malé hodnoty napětí a je vysoce nelineární pro vysoké hodnoty napětí. Zmíněné a další vybrané funkce  $f_1(\sigma)$  z [4] jsou zobrazeny v tab. 1.

Autor	předpis $f_1(\sigma)$
Norton	$f_1(\sigma) = K\sigma^m$
McVetty	$f_1(\sigma) = A \sinh(\sigma/\sigma_0)$
Soderberg	$f_1(\sigma) = B \{\exp(\sigma/\sigma_0) - 1\}$
Johnson	$f_1(\sigma) = D_1\sigma^{m_1} + D_2\sigma^{m_2}$
Garofalo	$f_1(\sigma) = A [\sinh(\sigma/\sigma_0)]^m$

Tab. 1: Přehled předpisů funkce  $f_1(\sigma)$  [4].

Podle [4] nelze jednoznačně správně zvolit správnou funkci času  $f_2(t)$ . Funkce času  $f_2(t)$  by se však pro co nejpřesnější popis vždy měla skládat z několika složek. Každá z jednotlivých složek funkce  $f_2(t)$  by pak měla popisovat specifické creepové chování materiálu během jednoho fyzikálním procesu, který v závislosti na velikosti teploty, napětí a již nahromaděné deformaci v danou chvíli v materiálu probíhá. V tab. 2 jsou zobrazeny vybrané modely z [4] pro popis funkce času  $f_2(t)$ .

Autor	předpis $f_2(\sigma)$
Andrade	$f_2(t) = (1 + bt^{1/3}) \exp(kt) - 1$ $\simeq bt^{1/3} (t \rightarrow 0, k \rightarrow 0)$
Bailey	$f_2(t) = Ft^n (1/3 \leq n \leq 1/2)$
McVetty	$f_2(t) = G(1 - e^{-qt}) + Ht$
Graham-Walles	$f_2(t) = \sum a_i t^{n_i}$

Tab. 2: Přehled předpisů funkce  $f_2(t)$  [4].

Velikost teploty výrazně ovlivňuje creepové chování materiálu. V první řadě se jedná o závislost určitých materiálových parametrů na teplotě, kdy změna v okamžité velikosti teploty vede ke změně velikosti materiálových konstant. Konkrétním příkladem může být změna hodnoty parametrů  $K$  a  $m$  v Nortonově mocninném vztahu. Dále je zřejmé, že struktura materiálu úzce souvisí s teplotou. S rostoucí teplotou dochází k nárůstu intenzity fyzikálních procesů (zejména se jedná o proces zotavení a nárůst difuzivity za vysokých teplot) a s tím souvisejícím změnám ve struktuře materiálu. Tyto změny více

či méně usnadňují mechanismus creepu, ale nelze je exaktně popsat [4]. Stěžejním popisem je teplotní závislost ve tvaru (Dorn)

$$f_3(T) = \exp(-Q/RT) \quad (3.3)$$

Parametr  $Q$  v tomto vztahu představuje zdánlivou aktivační energii,  $R$  je univerzální plynová konstanta a  $T$  je termodynamická teplota v kelvinech.

Výsledný vztah pro popis mechanismu creepu, který je vyvozen konstantním tahovým jednoosým zatížením, lze po uvážení výše uvedených vztahů psát ve tvaru

$$\varepsilon_c = f\{t \exp(-Q/RT)\}^n f_1(\sigma) \quad (3.4)$$

### 3.2 Creep při jednoosém proměnném zatížení

Interpretace problematiky creepu, který je vyvozen proměnným (nekonstantním) jednoosým tahovým zatížením, je založena na základě zkoumání vztahů mezi veličinami  $\sigma$ ,  $t$  a  $T$  pro případ konstantního jednoosého tahového zatížení. Důvodem je nedostupnost experimentálních dat pro případ proměnného zatížení. Lze tedy říci, že podstatná část současně užívaných modelů v MKP aplikacích vznikla zobecněním modelů, které popisují creep pro případ konstantního zatížení [4].

Historicky byla vytvořena celá řada teorií a modelů pro případ tečení kovových materiálu při nekonstantním zatížení. Některé z těchto teorií vycházejí z integrace rovnic lineární viskoelastivity. Další teorie jsou založeny na snaze co nejlépe interpretovat fyzikální děje, které probíhají ve struktuře materiálu. Jiné teorie jsou důsledkem interpolace creepových experimentálních křivek, a to bez hlubšího fyzikálního významu.

Úlohy jednoosého proměnného zatížení se už výrazněji blíží simulaci reálných problémů z praxe. Některé z těchto teorií mohou však pro stejnou historii zatěžování vykazovat i výrazněji odlišné výsledky [4]. I přes tento fakt tyto modely nelze označit na dobré nebo špatné. Důvodem je především nepřímá úměrnost mezi složitostí modelu a výpočetním časem úlohy. Tedy, čím složitější jsou modely, tím spíše na jednu stranu přesněji interpretují creepové chování. Na druhou stranu, složitost modelů představuje složitější integraci rovnic creepových modelů, která vede k delším výpočetním časům při řešení reálných numerických úloh. Nicméně se současnou dostupností výkonné výpočetní techniky je možné navrhnout i složité výpočetní modely.

Důležitým aspektem volby toho správného modelu creepového chování je také počet parametrů modelu. Při numerickém výpočtu creepových úloh jsou upřednostňovány modely s nižším počtem parametrů modelu. Velký problém totiž představuje správné

naladění těchto parametrů modelu, kdy malá změna v hodnotě laděných parametrů může znamenat značnou změnu v hodnotě creepové deformace. Rozhodně nelze říci, že větší počet parametrů modelu vede k přesnějším výsledkům výsledného řešení.

Nejdůležitější teorie z hlediska současného MKP modelování jsou zejména tyto tři teorie – *Time Hardening Theory*, *Strain Hardening Theory* a *Total Strain Theory*. Tyto teorie jsou dále detailněji popsány.

### 3.2.1 Time Hardening Theory

*Time Hardening Theory*, v české odborné literatuře často označována jako teorie časového zpevňování, představuje hypotézu, která předpokládá hodnotu rychlosti creepové deformace jako funkci napětí, času a teploty.

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \bar{f}(\sigma, t, T) \quad (3.5)$$

Často se lze setkat s aproximací tohoto vztahu, kterou lze pro případ konstantní hodnoty teploty po celou dobu děje zapsat ve zjednodušené formě ve tvaru

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \bar{f}_1(\sigma) \frac{d\bar{f}_2(t)}{dt} \bar{f}_3(T) \quad (3.6)$$

*Time Hardening Theory* se snaží zohlednit fyzikální procesy, ke kterým dochází během creepu uvnitř materiálu. Hlavními faktory jsou podle této teorie vnější napětí a časově závislá přeměna materiálu. Hlavním nedostatkem je absence dostatečného aparátu pro popis primární fáze creepu. Tato teorie totiž ignoruje procesy precipitačního zpevňování a další změny materiálové struktury, ke kterým dochází během primárního stadia creepu [4], a proto se používá pro popis creepu u kovových materiálů, které nevykazují primární fázi creepu. Většina těchto materiálů spadá pod tzv. nelineární Maxwellovy materiály. Jejich chování lze vyjádřit rovnicí

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \bar{f}_1(\sigma) \quad (3.7)$$

Rovnici (3.7) lze spolehlivě aproximovat rychlost creepové deformace pouze pro přímkový průběh funkce  $f_2(t)$ . Tedy lze říci, že čím více bude mít funkce  $f_2(t)$  přímkový průběh, tím vhodnější bude aplikace této teorie [4].

### 3.2.2 Strain Hardening Theory

*Strain Hardening Theory*, v české odborné literatuře často označována jako hypotéza deformačního zpevňování, předpokládá hodnotu rychlosti creepové deformace jako funkci napětí, akumulované deformace a teploty

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \tilde{f}(\sigma, \varepsilon_c, T) \quad (3.8)$$



Vztah pro rychlost creepové deformace lze aproximovat do tvaru

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \tilde{f}_1(\sigma)\tilde{f}_2(\varepsilon_c)\tilde{f}_3(T) \quad (3.9)$$

Hlavní myšlenkou deformačního zpevnování je závislost rychlosti deformace na aktuální struktuře materiálu. Změny ve struktuře materiálu jsou zde oproti například časovému zpevnování předpokládány pouze v podobě deformačního zpevnování materiálu. Poznamenejme však, že tato myšlenka je chybně aplikována na všechny tři stádia creepu, protože k deformačnímu zpevnování materiálu dochází pouze v primární fázi creepu, ve které rychlost tečení materiálu s rostoucím časem klesá.

Navzdory tomuto nedostatku dává i při uvažování všech tří stádií creepu poměrně přesné výsledky. Její hlavní využití by mělo být pro zkoumání úloh creepu s relativně krátkou dobou zatěžování [4]. Lze říci, že pokud doba simulace tečení materiálu nepřekročí dobu primární fáze creepu, je použití této teorie velice vhodné.

### 3.2.3 Total Strain Theory

*Total Strain Theory*, v české odborné literatuře často označována jako hypotéza celkové deformace, předpokládá nezávislé vztahy pro každou z uvedených veličin  $\sigma$ ,  $t$  a  $T$ . Předpis pro hodnotu creepové deformace lze psát ve tvaru rovnice (3.1)

$$\varepsilon_c = f^*(\sigma, t, T) \quad (3.10)$$

Tento vztah lze podobně jako výše aproximovat do tvaru rovnice (3.2)

$$\varepsilon_c = f_1^*(\sigma)f_2^*(t)f_3^*(T) \quad (3.11)$$

*Total Strain Theory* byla vytvořena uměle na rozdíl od obou výše uvedených teorií. Tato teorie si primárně neklade za cíl respektovat fyzikální procesy a strukturální změny, které se odehrávají uvnitř materiálu, ale snaží se co nejpřesněji aproximovat původní experimentální data. Výhodou teorie je tak její relativní jednoduchost, pro kterou je čteně využívána v MKP aplikacích při numerické analýze napětí na reálných součástech.

### 3.2.4 Srovnání uvedených teorií

Penny a Marriot v [4] srovnávají všechny výše zmíněné teorie pro popis creepového chování pro případ jednoosého proměnného zatížení s ideálním předpisem creepové deformace ve tvaru

$$\varepsilon_c = K\sigma^3t^{1/3} \quad (3.12)$$

Odpovídající odvozené vztahy pro popis creepové deformace při jednoosém proměnném zatížení pro výše zmíněné teorie jsou uvedeny v tab. 3. Teorie Rabotnov a Graham-Walles patří mezi další klasické modely creepového chování. Obě teorie jsou zde uvedeny však jen informativně a samotná diplomová práce se jimi dále nezabývá.

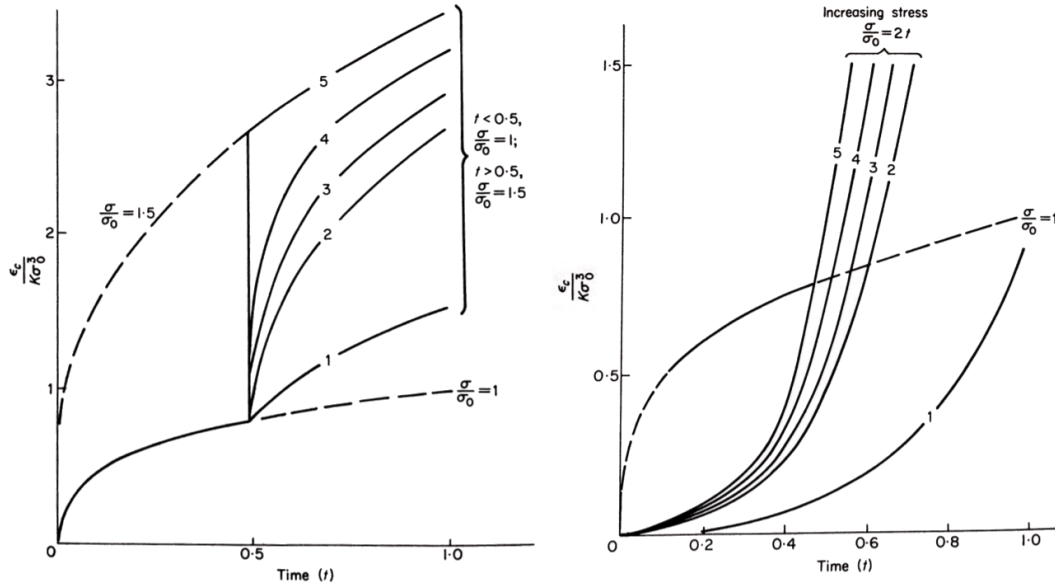
Creepový model	předpis $\varepsilon_c$
Time Hardening Theory	$\varepsilon_c = \frac{K}{3} \int_0^t \tau^{-2/3} [\sigma(\tau)]^3 d\tau$
Strain Hardening Theory	$\varepsilon_c = K \left\{ \int_0^t \sigma^9(\tau) d\tau \right\}^{1/3}$
Rabotnov	$\varepsilon_c = K \left\{ \frac{1}{9} \int_0^t (t - \tau)^{-8/9} \sigma(\tau) d\tau \right\}^3$
Graham-Walles	$\varepsilon_c = \frac{K}{3} \int_0^t (t - \tau)^{-2/3} [\sigma(\tau)]^3 d\tau$
Total Strain Theory	$\varepsilon_c = K \sigma^3 t^{1/3}$

Tab. 3: Přehled předpisů creepové deformace  $\varepsilon_c$  pro vybrané teorie [4].

Srovnání průběhů creepové deformace je pro předpisy z tab. 3 graficky znázorněno na obr. 2, kde jsou tyto průběhy zachyceny pro dva rozdílné charaktery historie zatěžování. V prvním případě (obr. 2, vlevo) se jedná o náhlou skokovou změnu ve vnějším zatížení. Všechny modely v tomto případě ze začátku divergují, nicméně po čase začínají konvergovat. Hodnotou, ke které všechny modely (kromě modelu *Time Hardening Theory*) konvergují, je hodnota creepové deformace pro *Total Strain Theory*. Z výše uvedeného lze usuzovat, že volba příslušného modelu při tomto charakteru historie zatěžování nehraje z hlediska MKP výpočtů (až na volbu modelu *Strain Hardening Theory*) zásadnější roli [4].

V druhém případě (obr. 2, vpravo) se jedná o zcela rozdílný charakter historie zatěžování, kdy dochází ke kontinuálnímu lineárnímu nárůstu vnějšího napětí, a to po celou dobu zatěžování. Tento charakter zatěžování reálněji odpovídá podmínkám zatěžování reálných součástí z praxe [4]. Všechny teorie pro tento charakter zatěžování divergují, nicméně jejich průběhy i konečné hodnoty se od sebe výrazněji neliší. *Time Hardening Theory* má však odlišný průběh i při tomto charakteru zatěžování.

Důležitým aspektem, který lze vyvodit na základě pozorování obou charakterů zatěžování z obr. 2, jsou extrémní průběhy creepové deformace. V obou grafech představují *Time Hardening Theory* a *Total Strain Theory* krajní průběh hodnot creepové deformace a ohraničují tak výsledky ostatních teorií. Z tohoto pohledu se jeví jako velice zajímavé pro MKP modelování [4].



Obr. 2: Srovnání modelů predikce creepového chování na změnu zatížení a) skokovou (vlevo), b) pozvolnou (vpravo): 1 – Time Hardening Theory, 2 – Strain Hardening Theory, 3 – Graham-Walles, 4 – Rabotnov, 5 – Total Strain Theory [4].

### 3.3 Creep při víceosém zatížení

Pro řešení reálných úloh z praxe je nutné problematiku creepu rozšířit i pro víceosé zatížení. Vztahy pro víceosé zatížení vznikly zobecněním vztahů pro jednoosé zatížení a aplikací vztahů pro plasticitu materiálu [4]. Při odvozování vztahů musely být vyřešeny zejména následující dva problémy.

#### 3.3.1 Ekvivalentní hodnota zatížení

Prvním problémem je stanovení redukované (též ekvivalentní) hodnoty zatížení pro případ víceosého zatížení, které je nutné zohlednit ve vztazích pro popis creepu při jednoosém namáhání. Této korekce je dosaženo pomocí parametrů  $\sigma_{red}$  a  $\Delta\varepsilon_{red}$ , které popořadě reprezentují redukovanou hodnotu napětí a redukovanou hodnotu přírůstku creepové deformace [4]. Hodnoty těchto parametrů závisí na všech šesti složkách příslušných veličin

$$\sigma_{red} = \sigma_{red}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) \quad (3.13)$$

$$\Delta\varepsilon_{red} = \Delta\varepsilon_{red}(\Delta\varepsilon_x, \Delta\varepsilon_y, \Delta\varepsilon_z, \Delta\gamma_{xy}, \Delta\gamma_{yz}, \Delta\gamma_{xz}) \quad (3.14)$$

Redukované hodnoty parametrů  $\sigma_{red}$  a  $\Delta\varepsilon_{red}$  se obvykle poté na přímo dosazují do vztahů pro jednoosé zatížení. Příkladem může být výpočet hodnoty přírůstku creepové

deformace pomocí Nortonova mocninného vztahu

$$\Delta\varepsilon_{red} = K\sigma_{red}^m \Delta t \quad (3.15)$$

Hodnota redukovaného napětí  $\sigma_{red}$  se ve vztahu (3.15) vypočte jedním ze vztahů pro plasticitu materiálu. Nejčastěji je toho docíleno aplikací Von Misesova kritéria, které lze pro isotropní materiály formulovat ve tvaru

$$\sigma_{red} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \}^{1/2} \quad (3.16)$$

### 3.3.2 Pravidla toku

Druhý problém spočívá v přerozdělování hodnot přírůstků creepové deformace do jednotlivých směrů. I v tomto případě však lze za pomoci vztahů pro plasticitu materiálu a za jistých předpokladů definovat pravidla toku materiálu, podle kterých tečení materiálu probíhá. Prvním předpokladem je isotropnost materiálu po celou dobu creepového tečení. Druhým předpokladem je předpoklad isochorické deformace při creepovém tečení [4]. Po uvážení těchto předpokladů dostáváme rovnici

$$\Delta\varepsilon_x = d\lambda \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \right) \quad (3.17)$$

Tuto rovnici lze s využitím cyklické záměny přepsat i pro  $\Delta\varepsilon_y$ , resp.  $\Delta\varepsilon_z$ . Parametr  $d\lambda$  v tomto vztahu reprezentuje parametr zvětšení creepové deformace a je funkcí  $\sigma_{red}$ .

Pravidla toku lze formulovat i jiným způsobem, a to za použití potenciální funkce plasticity  $\psi$  [4]. Potenciální funkce plasticity je skalární funkcí napětí  $\psi = \psi(\sigma_{ij})$ . Přírůstek creepové deformace lze pak psát ve tvaru

$$d\varepsilon_{ij,c} = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}} d\lambda \quad (3.18)$$

Parametr  $d\lambda$  závisí na hodnotě přírůstků creepové deformace podle rovnice

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon_{red}}{\sqrt{\left( \frac{2}{3} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{mn}} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{mn}} \right)}} \quad (3.19)$$

Pokud dosadíme rovnici (3.19) do rovnice (3.18), dostáváme rovnici [4]

$$d\varepsilon_{ij,c} = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}} \frac{d\varepsilon_{red}}{\sqrt{\left( \frac{2}{3} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{mn}} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{mn}} \right)}} \quad (3.20)$$

Pokud i zde opět využijeme Von Misesova kritéria a dosadíme za hodnotu potenciální funkce plasticity  $\psi(\sigma_{ij})$

$$\psi(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{red}^2}{3}, \quad (3.21)$$

obdržíme rovnici pro přírůstek creepové deformace ve tvaru

$$d\varepsilon_{ij,c} = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{red}}{\sigma_{red}} S_{ij} \quad (3.22)$$

Parametr  $\sigma_{red}$  v tomto vztahu opět reprezentuje hodnotu redukovaného napětí a člen  $S_{ij} = \partial\psi/\partial\sigma_{ij}$  představuje deviátor napětí.

Takto získaný vztah (3.22) je univerzální a lze se s ním často setkat v literatuře. Příkladem může být zobecnění Klocova modelu do 3D, které je popsáno v pozdější části práce, konkrétně v sekci 4.5.

### 3.4 Shrnutí uvedených modelů creepu

Při volbě toho správného creepového modelu pro konkrétní námi vyšetřovanou úlohu je vždy potřeba nejdříve se zamyslet nad charakterem problému. Žádná z výše uvedených teorií však plně nereflktuje všechny zákonitosti creepu, proto je na místě vždy uvažovat určité kompromisy.

Z hlediska jednoosého konstantního zatížení, kdy předpis creepové deformace uvažujeme ve tvaru  $\varepsilon_c = f_1(\sigma)f_2(t)f_3(T)$ , není výsledná volba funkce  $f_1(\sigma)$  až tak zásadní. Autoři v [4] však doporučují převážně volit Nortonovův mocninný vztah, pro dlouhodobý creep a pro vysoké hodnoty aplikovaného napětí pak vztah podle Garofalo. Funkce  $f_2(t)$  by měla být volena prvotně podle experimentu. Pokud však není blíže specifikováno, preferuje se opět mocninný tvar [4]. Funkce  $f_3(T)$  se ve většině případů uvažuje ve tvaru Dornovy exponenciální závislosti, která spolehlivě popisuje teplotně aktivovaný proces – proces tečení materiálu [4].

Žádná z teorií ze sekce 3.2 není ani pro popis jednoosého proměnného zatížení plně uspokojivá. Důvodem je především nedostatečný aparát pro popis fyzikálních procesů, které při procesu creepu probíhají uvnitř materiálu. Při výběru toho správného modelu je však potřeba racionálně zhodnotit charakter problému. Z vědeckého hlediska jsou pro co nejpřesnější popis creepu důležité zejména složité odvozené vztahy. Důležitými teoriemi z hlediska MKP modelování jsou především teorie *Time Hardening Theory* a *Total Strain Theory*. Průběhy creepových deformací podle těchto teorií představují krajní průběhy hodnot creepové deformace. Jinými slovy, výsledky těchto teorií ohraničují výsledky ostatních teorií. Hlavním důvodem, proč se tyto modely v konečně-prvkových aplikacích používají, je však jejich jednoduchost spojená s dobrou aplikovatelností na skutečnou geometrii součástí. Důležitým aspektem je také to, že tyto teorie jdou poměrně snadno zobecnit do 3D, a tak lze bez větších problémů řešit úlohy víceosého namáhání.

## 4 Klocův model creepu

Technologický rozvoj přináší mimo jiné i vývoj nových materiálů v oblasti vysokoteplotních aplikací. Před uvedením do praxe je však potřeba tyto materiály řádně otestovat. Nabízí se zde možnost, jak toho dosáhnout – pomocí kombinace creepových zkoušek a MKP modelování.

Creepové zkoušky jsou nepostradatelné, ale je třeba zdůraznit, že z finančního i časového hlediska jsou velice náročné. Nevýhodou také je, že většina creepových experimentů nedokáže pracovat s proměnným zatížením, a tím se tak jen těžko blíží reálné simulaci zatěžování.

Predikování creepového chování a stanovení životnosti součásti je naopak vhodné pro MKP modelování. S rozvojem MKP modelování dochází rovněž k vytváření nových originálních vztahů, které lze poté např. do MKP softwarů implementovat. Toto vše vedlo i k vytvoření modelu [6] navrženým kolektivem autorů na brněnském *Ústavu fyziky materiálů Akademie věd České republiky* pod vedením RNDr. Luboše Kloce, CSc. V dalším textu budeme tento model ve stručnosti označovat jako Klocův model creepu.

Tento originální model spolehlivě popisuje primární a sekundární fázi tečení kovových materiálů. Klocův model creepu je unikátní, protože dokáže spolehlivě popsat tzv. přechodové efekty, ke kterým dochází během náhlých skokových změn napětí. Klocův model dále uvažuje výslednou hodnotu creepové deformace ( $\varepsilon_c$ ) jako součet příspěvků od dvou odlišných a na sobě nezávislých mechanismech deformace – od mechanismu deformace za nízkého napětí ( $\varepsilon_l$ ) a mechanismu deformace za vysokého napětí ( $\varepsilon$ ). Předpokládá však, že oba mechanismy probíhají současně.

$$\varepsilon_c = \varepsilon_l + \varepsilon_h \tag{4.1}$$

První z těchto mechanismů, mechanismus deformace za nízkého napětí, je neelastický a je vystavěn na principu vzniku vnitřního pole napětí a interakcí mezi tvrdou elastickou zónou a měkkou elastoplastickou zónou. Mechanismus deformace za vysokého napětí uvažuje výraznou plastickou deformaci [7]. Správnost myšlenky tohoto rozdělení také dokládají různé hodnoty zdánlivých aktivačních energií  $Q_i$  pro oba mechanismy.

Před detailnějším popisem Klocova modelu creepu jsou však nejdříve vyčteny nedostatky modelů z kapitoly 3.2, které přispěly k současné podobě modelu.

#### 4.1 Nedostatky modelů z kapitoly 3.2

Hlavní nevýhodou modelů, které jsou popsány v kapitole 3.2, je skutečnost, že tyto modely nevycházejí z experimentů pro případ proměnného zatížení. Tyto modely vznikaly prokládáním experimentálních křivek, které byly získávány z experimentů pro případ konstantního zatížení. Zmíněné modely, které byly souhrnně publikovány v [4] už v roce 1971, se nicméně doposud v MKP modelování stále používají, a to především kvůli jejich jednoduchosti.

Kvůli časové náročnosti experimentů byly navíc interpolovány pouze experimentální křivky pro zkoušení za vyšších hodnot napětí zatěžování. Creepové křivky pro nižší působící napětí vznikly následnou extrapolací těchto vztahů, čímž jistě došlo k vnesení určité nepřesnosti.

Modely z kapitoly 3.2 dále neuvažují postupný vývoj mikrostruktury materiálu s rostoucím časem zatěžování. Správný přístup pro rychlost creepové deformace by podle [8] měl být ve tvaru

$$\dot{\epsilon}_c = f(\sigma, T, s_i) \quad (4.2)$$

Parametry  $s_i$  v tomto vztahu nejsou konstantami, ale reprezentují vývoj mikrostruktury materiálu v čase a jsou závislé především na předchozí historii zatěžování.

Další problém spočívá v neuvažování vnitřního napětí. V oblasti vnitřního napětí může dojít například k opačnému směru toku materiálu oproti směru působícího napětí [8]. Zanedbání tohoto faktu může vést zejména v oblasti aplikace nízkého napětí ke značným nepřesnostem. Vnitřní napětí se podobně projevuje i při experimentech pro skokové změny napětí a při simulaci přechodových jevů. Výsledky podle [6] ukazují, že hodnota vnitřního napětí byla pro oblast nízkého napětí prakticky identická s hodnotou vneseného napětí, zatímco pro oblast vysokého napětí byla výrazněji menší. Z tohoto důvodu dochází pro zpřesnění vztahů k definování nové veličiny, se kterou Klocův model později pracuje. V práci [6] je označována jako ekvivalentní napětí  $\sigma_e$ , které je definováno jako rozdíl vneseného napětí  $\sigma$  a vnitřního napětí  $\sigma_i$

$$\sigma_e = \sigma - \sigma_i \quad (4.3)$$

Mezi další nedostatky původních modelů patří uvažování stejné hodnoty zdánlivé aktivační energie  $Q$  pro různé velikosti působícího napětí. Rozdílné hodnoty  $Q$  pro vysoké hodnoty napětí zatěžování oproti nízkým hodnotám napětí zatěžování, které byly zkoumány v [9], vypovídají o odlišných deformačních mechanismech pro odlišné úrovně zatěžování. Tato hodnota zdánlivé aktivační energie  $Q$  je důležitá pro popis funkce teploty v Arrheniově

rovnici (3.3).

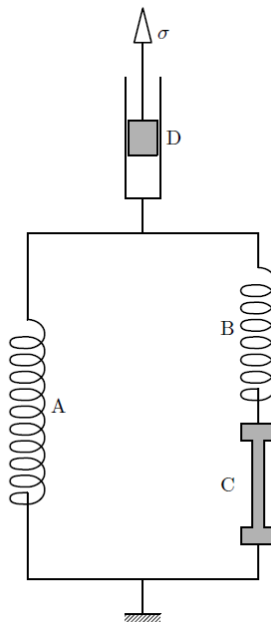
Model, který spolehlivě popisuje creep, by dále měl uvažovat obě nejdůležitější stádia creepu, tedy primární i sekundární oblast. Dále by neměl být popsán příliš mnoha parametry, aby podíl chyb ze statistického zpracování pro každý z jednotlivých parametrů modelu, který přináší fáze interpolace experimentálních dat, byl co nejmenší.

## 4.2 Mechanismus deformace za nízkého napětí

### 4.2.1 Fyzikální podstata modelu

V této podkapitole je níže rozebrána fyzikální podstata nízkonapěťového modelu mechanismu deformace. Výraznou úlohu v tomto mechanismu sehrává pole vnitřního napětí. Vnitřní napětí je charakteristické tím, že způsobuje deformaci, která po odlehčení zatěžované součásti vymizí. Toto napětí je důležité zejména při zkoumání průběhů deformací pro přechodové jevy, na které rozhodně nelze pohlížet jako na křivky primárního creepu [10].

Viskoelastický model pro mechanismus deformace nízkého napětí se skládá ze dvou elastických členů (členy  $A$  a  $B$ ), jednoho creepujícího členu ( $C$ ) a jednoho viskózního členu ( $D$ ). Jedná se o modifikovaný viskoelastický model Standardní pevné látky (modif. SPL, modif. Zenerův model), kdy viskózní člen je nahrazen creepujícím elementem. Viskoelastický model je zobrazen na obr. 3. Člen  $D$  byl uměle přidán a reprezentuje ustálený creep.



Obr. 3: Modifikovaný viskoelastický model SPL [10].

Předpisy pro jednotlivé členy viskoelastického modelu jsou zobrazeny v tab. 4,



kde členy  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $g$  a  $n \neq 1$  jsou parametry modelu. V článku [10] byly pro parametr  $n$  uvažovány hodnoty  $n = 3$  a  $n = 12$ .

Ozn. členu	typ členu	předpis	pozn.
$A$	elastický	$\varepsilon_A = a \cdot \sigma_A$	
$B$	elastický	$\varepsilon_B = b \cdot \sigma_B$	
$C$	creepující	$\dot{\varepsilon}_C = c \cdot (\sigma_B)^n$	mocninný tvar
		$\dot{\varepsilon}_C = c \cdot \sinh(g \cdot \sigma_B)$	tvar hyperb. sinu
$D$	viskózní	$\dot{\varepsilon}_D = d \cdot \sigma_D$	

Tab. 4: Předpis jednotlivých členů viskoelastického modelu [10].

Se znalostí závislostí z tab. 4 lze sestavit předpisy pro rychlost creepové deformace. Rovnice (4.4) platí pro uvažování mocninného modelu creepujícího elementu, (4.5) poté pro model hyperbolického sinu.

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{ac}{a+b} \left( \sigma - \frac{\varepsilon - d\sigma t}{a} \right)^n + d\sigma \quad (4.4)$$

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{ac}{a+b} \sinh \left( g \left( \sigma - \frac{\varepsilon - d\sigma t}{a} \right) \right) + d\sigma \quad (4.5)$$

Všechny tři popisy viskoelastického modelu (mocninný pro  $n = 3$  a  $n = 12$ ; hyperbolický sinh) byly testovány na sadě vzorků tří materiálů. Jednalo se o tuhý roztok Ni-15%Cr, jemnozrnnou moderní keramiku na bázi  $\text{Al}_2\text{O}_3$  a creepuvzdornou ocel P91. Tyto vybrané materiály byly testovány pomocí helikoidních pružin. Jedná se o metodu, pro kterou lze určit hodnotu creepové deformace s vysokou přesností [11]. U většiny těchto experimentů jsou vzorky zatíženy pouze vlastní tíhou. Samotný experiment pak tedy začíná ve chvíli, kdy teplota okolí je rovna předepsané teplotě. Jelikož k tomuto procesu dojde za poměrně krátkou dobu, lze na jevy, které do této fáze proběhly, pohlížet jako na elastické. Předmětem zájmu je však následná creepová deformace.

Výsledky provedených experimentů v [10] ukazují, že viskoelastický model v podobě modifikovaného Zenerova viskoelastického modelu dokáže poměrně spolehlivě popsat oblast nízkonapěťového mechanismu deformace. V průměru nejmenších chyb je pro všechny materiálové sady a pro různé hodnoty napětí dosaženo při interpolaci experimentálních dat pomocí funkce hyperbolického sinu. Mocninný předpis pro  $n = 3$  dává podobně přesné výsledky. Naopak u mocninného modelu s  $n = 12$  lze pozorovat silnou závislost koeficientů na vneseném napětí, a tedy získané proložené křivky vůbec neodpovídají naměřeným hodnotám. Největších odchylek je pak pro různé křivky získané interpolací dosaženo pro materiál P91.

### 4.2.2 Matematický popis modelu

V dalším postupu je uvažován mocninný model z (4.4) oproti modelu hyperbolického sinu. Důvodem jsou přesnější výsledky pro přechodovou oblast. Jedná se o oblast, která se nachází „mezi“ nízkým a vysokým vneseným napětím. Dále je Zenerův modifikovaný viskoelastický model nahrazen ekvivalentním Maxwellovým modelem, kdy efekt paralelních pružin je nahrazen závislostí rychlosti deformace plastického elementu na jeho deformaci.

Vztah pro rychlost deformace pro mechanismus za nízkého napětí se sestává ze dvou členů

$$\dot{\varepsilon}_l = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_c \quad (4.6)$$

Tyto členy popořadě reprezentují akumulovanou deformaci za působení nízkého napětí (která po zintegrování dává hodnotu elastické deformace) a creepovou deformaci elementu  $\dot{\varepsilon}_c$ . Rychlost creepové deformace elementu  $\dot{\varepsilon}_c$  lze vyjádřit vztahem

$$\dot{\varepsilon}_c = g \exp\left(\frac{-Q_l}{RT}\right) \omega^3 \quad (4.7)$$

Hodnota  $Q_l$  v rovnici 4.7 představuje zdánlivou aktivační energii pro mechanismus deformace nízkého napětí. Parametr  $\omega$  je úměrný vnesenému napětí, které je normováno materiálovým parametrem  $\sigma_t$  podle vztahu

$$\omega = \frac{1}{\sigma_t} \left( \sigma - \frac{1-k}{k} E \varepsilon_c \right) \quad (4.8)$$

Parametr  $k$  udává poměr tuhostí pružin v modifikovaném Zenerově modelu a jeho hodnota se pohybuje mezi hodnotami 0 a 1. Parametr  $g$  je rovněž materiálovou konstantou a reguluje celkovou rychlost creepové deformace pro nízkonapěťový mechanismus deformace. Hodnota creepové deformace  $\varepsilon_c$  se získá numerickou integrací rovnice (4.7).

## 4.3 Mechanismus deformace za vysokého napětí

Tento mechanismus, který se projevuje především za vyšších hodnot aplikovaného napětí, předpokládá zjevné plastické chování. Model vychází z modifikované Garofallové rovnice, která je doplněna o podmínku mezního napětí. Matematické vztahy modelu jsou převzaty z [6], kde jsou detailněji popsány.

### 4.3.1 Fyzikální podstata modelu

Model pro mechanismus deformace za vysokého napětí vznikl složením dvou vztahů. Primární stádium creepu je popsáno Li-ovou rovnicí. Sekundární fáze creepu je pak předpokládána ve tvaru modifikované Garofallové rovnice.

Výraznou roli dále v tomto modelu sehrává mezní napětí značené jako  $\sigma_t$ . Mezní napětí  $\sigma_t$  je předpokládáno v definici pro ekvivalentní napětí  $\sigma_e$  a vyjadřuje míru závislosti rychlosti creepové deformace na vneseném napětí. Toto napětí je původně předpokládáno ve tvaru (4.9), nicméně pro spojitý model bylo nahrazeno tvarem se spojitými derivacemi (4.10) [6].

$$\sigma_e = \begin{cases} 0 & \text{pro } \sigma \leq \sigma_t \\ a(\sigma - \sigma_t) & \text{pro } \sigma > \sigma_t \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\sigma_e = \frac{a}{2} \left( |\sigma| + \sqrt{(|\sigma| - \sigma_t)^2 + \sigma_r^2} - \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_r^2} \right) \quad (4.10)$$

V (4.10) člen  $\sigma$  představuje hlavní signované napětí pro tah (resp. tlak), hodnota  $\sigma_e$  reprezentuje intenzitu napětí a  $\sigma_r$  představuje zbytkové efektivní napětí, které se velikostně nachází pod mezní hodnotou napětí  $\sigma_t$ . Parametr  $a$  je materiálovou konstantou, jehož hodnota se pohybuje v intervalu od 0 do 1.

### 4.3.2 Matematický popis modelu

Primární fáze creepu je popsána Li-ovou rovnicí v diferenciálním tvaru

$$\dot{\varepsilon}_h = \frac{\dot{\varepsilon}_s(1 + r_i)}{1 + r_i - r_i \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad (4.11)$$

V této rovnici člen  $\dot{\varepsilon}_s$  reprezentuje rychlost deformace sekundární fáze creepu. Její předpis je ve tvaru

$$\dot{\varepsilon}_s = b \exp\left(\frac{-Q_h}{RT}\right) \sinh(d \sigma_e) \quad (4.12)$$

Koeficient  $r_i$  charakterizuje poměr mezi počáteční rychlostí creepové deformace a rychlostí creepové deformace pro sekundární stádium creepu, což dokládá rovnice

$$r_i = \frac{\dot{\varepsilon}_i}{\dot{\varepsilon}_s} - 1 \quad (4.13)$$

Proměnná  $t$  je čas a hodnota  $\tau$  představuje dobu relaxace primární fáze creepu.

Při úvaze, že rychlost creepové deformace sekundární fáze  $\dot{\varepsilon}_s$  a doba relaxace primární fáze creepu  $\tau$  jsou přímo úměrné na výrazu  $\sigma^m$ , lze pro stejnou hodnotu parametru  $m$  pro oba případy psát  $\dot{\varepsilon}_s \cdot \tau = \text{konst.}$  Dále lze podle (4.14) definovat novou veličinu  $\theta$ , která nese informaci o historii zatěžování

$$\theta = \frac{1}{c} \int_0^t |\dot{\varepsilon}_s| dt \quad (4.14)$$

S využitím výše zmíněného lze (4.11) přepsat do tvaru

$$\dot{\varepsilon}_h = \frac{\dot{\varepsilon}_s(1 + r_i)}{1 + r_i - r_i \exp(-\theta)} \quad (4.15)$$

Rychlost creepové deformace pro sekundární fázi creepu lze psát po dosazení vztahu (4.10) pro  $\sigma_e$  ve tvaru

$$\dot{\varepsilon}_s = \text{sgn}(\sigma) b \exp\left(\frac{-Q_h}{RT}\right) \sinh\left(p\left(|\sigma| + \sqrt{(|\sigma| - \sigma_t)^2 + \sigma_r^2} - \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_r^2}\right)\right) \quad (4.16)$$

Parametr  $p$  je v tomto vztahu dodefinován jako  $p = ad/2$ . Předpoklad odpovídajících znamének pro aplikované napětí a rychlost creepové deformace je zohledněn pomocí funkce signum. Člen  $Q_h$  je hodnota zdánlivé aktivační energie pro vysokonapěťový mechanismus,  $R$  je hodnota univerzální plynové konstanty a  $T$  představuje teplotu v kelvinech. Koeficienty  $b$  a  $d$  jsou parametry modelu.

Numerickou integrací (4.16) lze podobně jako pro mechanismus deformace pro nízké hodnoty napětí získat hodnoty creepové deformace  $\varepsilon_h$ .

#### 4.4 Výsledný matematický vztah

Výslednou hodnotu rychlosti creepové deformace pro případ 1D úlohy lze obdobně jako v (4.1) vyjádřit superpozicí složek od jednotlivých mechanismů deformací.

$$\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_l + \dot{\varepsilon}_h \quad (4.17)$$

Po dosazení jednotlivých částí dostáváme výsledný vztah.

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{\dot{\sigma}}{E} + g \exp\left(\frac{-Q_l}{RT}\right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_t} - \frac{1-k}{k\sigma_t} E\varepsilon_c\right)^3 + \frac{\dot{\varepsilon}_s(1+r_i)}{1+r_i-r_i \exp(-\theta)} \quad (4.18)$$

#### 4.5 Zobecnění modelu do 3D

Pro implementaci Klocova modelu do FEM výpočetních softwarů je nejdříve provést zobecnění jeho modelu pro všechny tři souřadnice. K tomu byly stanoveny tři níže uvedené předpoklady, z nichž první dva jsou předpokládány i při zobecnění do 3D u většiny modelů z kapitoly 3.2 (viz. kapitola 3.3). Třetí předpoklad je vystavěn na unikátnosti Klocova modelu, kdy tento model rozlišuje dva zcela rozdílné a nezávislé mechanismy deformace, které při creepovém chování materiálu probíhají současně.

- (i) Materiál je isotropní a zůstává isotropní po celou dobu děje
- (ii) Creepová deformace je isochorická
- (iii) Nízkonap. a vysokonapěťový mechanismus deformace jsou nezávislé i pro 3D úlohu

První dva předpoklady nejsou zcela obecně naplněny. Plastická creepová deformace jistě způsobuje anisotropii v mikrostruktuře materiálu a jev kavitace, který je přítomen

ve třetím stádiu creepu, jistě způsobuje objemové změny. Oba tyto předpoklady lze však spolehlivě uvažovat pro první dvě stadia creepu. Třetí předpoklad nelze z důvodu nedostatku experimentálních dat ověřit.

Podle třetího předpokladu lze tenzor rychlosti deformace  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$  vyjádřit obdobně jako pro 1D úlohu podle (4.17), tedy jako součet tenzoru rychlosti deformace pro mechanismus deformace za nízkého napětí  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^l$  a tenzoru rychlosti deformace pro mechanismus deformace za vysokého napětí  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^l + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h \quad (4.19)$$

Rovnice (4.14), (4.15) a (4.16) pro výpočet rychlosti creepové deformace vysoko-napětěvé části mají tvar běžně užívaných creepových rovnic, tedy jejich zobecnění do 3D vychází z Prandtl-Reussových rovnic

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_c^h}{\sigma_{red}} \mathbf{S} \quad (4.20)$$

V tomto vztahu je  $\mathbf{S}$  deviatorická část tenzoru napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ . Člen  $\sigma_{red}$  představuje ekvivalentní hodnotu napětí, které se vypočte podle Von Misesova kritéria.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} \quad (4.21)$$

Získaná hodnota ekvivalentního napětí  $\sigma_{red}$  se následně postupně dosadí do (4.14), (4.16) a (4.15). Tím se vypočte první část tenzoru rychlosti creepové deformace  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h$ , kterou už lze přímo dosadit do vztahu pro výpočet tenzoru celkové rychlosti creepové deformace (4.19).

Pro 3D zobecnění vztahů pro mechanismus deformace za nízkého napětí nelze výše uvedené vztahy z mechaniky kontinua na přímo využít. Zobecnění do 3D vychází ze vztahu pro tenzor napětí  $\boldsymbol{\sigma}$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{C}} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^l - \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} \right) \quad (4.22)$$

Člen  $\hat{\mathbf{C}}$  je tenzor čtvrtého řádu elastických konstant, který lze pro isotropický materiál popsat dvěma na sobě nezávislými konstantami (např. pomocí Poissonova čísla  $\nu$  a modulem pružnosti  $E$ ). Výrazem  $\boldsymbol{\varepsilon}^{cr}$  rozumíme tenzor deformace creepujícího elementu, na který už lze aplikovat postup uvedený v (4.20) a (4.21). Vyjdeme ze vztahu pro normalizované napětí creepujícího elementu v (4.8)

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_q^{cr}}{\omega_q} \mathbf{S}_\omega \quad (4.23)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_t} - \frac{2(1-k)}{3k\sigma_t} \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} \quad (4.24)$$

$$\omega_q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_\omega \cdot \mathbf{S}_\omega} \quad (4.25)$$

Člen  $\omega_q$  reprezentuje ekvivalentní normované napětí creepujícího elementu, které se spočítá z deviatorové části tenzoru napětí  $\boldsymbol{\omega}$ . Hodnota napětí se následně dosadí do (4.7), čímž dostaneme

$$\dot{\varepsilon}_q^{cr} = g \exp\left(\frac{-Q_l}{RT}\right) \omega_q^3 \quad (4.26)$$

Vztah pro tenzor rychlosti creepové deformace pro mechanismus deformace za nízkého napětí dostaneme vyjádřením členu  $\dot{\varepsilon}^l$  z (4.22), s následným dosazením výše uvedených vztahů

$$\dot{\varepsilon}^l = \hat{\mathbf{C}}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\varepsilon}^c \quad (4.27)$$

Tuto hodnotu už můžeme přímo dosadit do vztahu pro výpočet tenzoru celkové rychlosti creepové deformace (4.19).

## 5 Implementace do MKP software *PMD*

Vlastní přínos autora diplomové práce bude popsán v následujících kapitolách. V těchto kapitolách je detailně popsána implementace Klocova modelu creepu do MKP programu *PMD*. Kapitoly se dále věnují verifikaci MKP implementace modelu, která je provedena na základě porovnání s predikcí analytického modelu, a validaci MKP implementace modelu, která je provedena na dostupných experimentálních výsledcích pro krut tyčí čtvercového průřezu.

### 5.1 MKP software *PMD* a grafický procesor *GFEM*

*Package for Machine Design* (zkráceně *PMD*) je soubor programů, který je vystavěn na bázi metody konečných prvků (MKP) a který umožňuje řešit široké spektrum úloh mechaniky kontinua. Program *PMD* vznikl ve *Státním výzkumném ústavu pro stavbu strojů (SVÚSS)* v Běchovicích již roku 1977. Soubory programů a podprogramů jsou napsány v původním jazyce fortran. Provozovatelem tohoto výpočetního systému je společnost *VAMET, s.r.o.*, od roku 1997 společně s *Ústavem termomechaniky Akademie Věd České republiky, v.v.i.*

MKP výpočetní software *PMD* využívá k výpočtu samostatné tématické programové bloky, které spolu v rámci systému komunikují pomocí neformátovaných diskových souborů. Řízení výpočtu je dosaženo pomocí vstupní ASCII souborů, kde každý z programů zpracovává vhodně vymezený úsek algoritmu [12].

Programové soubory *PMD* umožňují řešit úlohy, které se obecně zabývají problematikou mechaniky kontinua. Jmenovitě se jedná o úlohy stacionárních a nestacionárních teplotních polí; lineární termo-elastostatiky; nelineární statiky termo-elastoplasticity a creepu; nelineární statiky velkých deformací, posunutí a rotací; lineární stability, lineární elastodynamiky; nelineární transientní dynamiky - implicitní a explicitní integrace; seizmické odezvy a úlohami kontaktu.

*GFEM* je grafický procesor systému *PMD* pro výpočty metodou konečných prvků. Tento program umožňuje generování sítě, zadání okrajových podmínek, spuštění výpočtu a vykreslení výsledků na síti. Výsledné produkty prostředí *GFEM* jsou dva. Na jedné straně se jedná o soubor s příponou *.TSK*, který nese informaci o celé úloze (geometrii, materiálech, zatížení a zatěžovacích stavech) a slouží k další práci s úlohou. Druhým výstupem jsou soubory určené k výpočtu a řízení úlohy pro *PMD* – jedná se o vstupní soubory s příponami *.I1 – .I5* [12].

Více detailů o výpočetním MKP softwaru *PMD* a grafickém procesoru *GFEM* je

uvedeno na webových stránkách [12] společnosti *VAMET, s.r.o.*

## 5.2 Algoritmus výpočtu

Algoritmus výpočtu byl převzat z článku [13] a učebnice [14], kde je detailně popsán v kapitole 3.8 integrační algoritmus konstitutivních rovnic creepu v systému *PMD*. Algoritmus kombinuje použití dopředné Eulerovy metody aplikované na diskretizované rovnice rovnováhy při konstantním napětí spolu s řešením lokálních konstitutivních rovnic v Gaussových bodech. Časový integrační krok byl volen pevně podle doporučení [6]. Současně je možné použít i robustní explicitní integrátor systému *PMD*, ve kterém je velikost časového kroku plně automaticky řízena a posteriori odhadem chyby [15]. Implementace modelu byla provedena na úloze 1D napjatosti jednoho MKP elementu zatíženého různými velikostmi napětí a teplot. Řešení bylo porovnáváno s analytickými řešeními z práce [6].

## 5.3 Úloha prostého jednoosého tahu

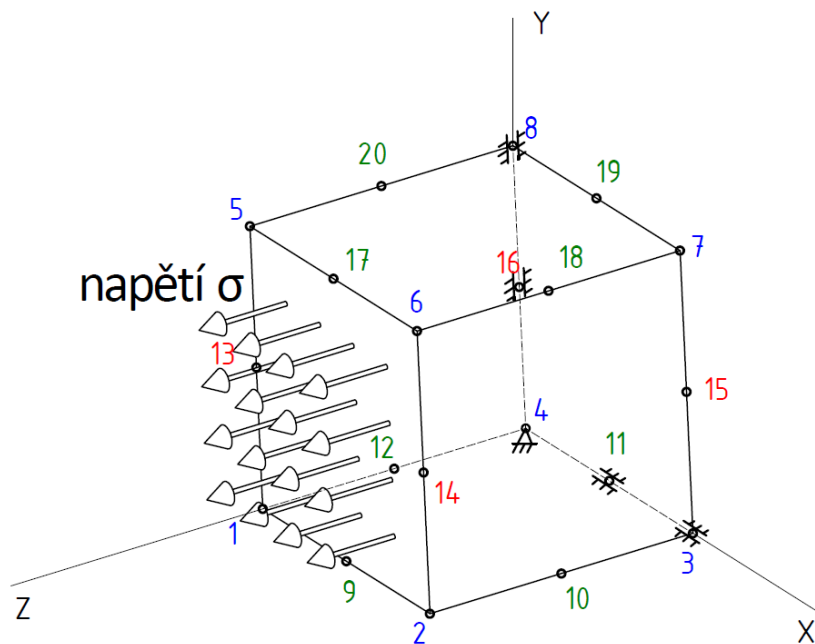
Klocův model creepu, který je detailně popsán v kapitole 3, je testován na úloze prostého jednoosého tahu. Výsledky testovací úlohy jsou pro ověření správnosti simulace porovnány s tzv. analytickým modelem. Analytickým modelem rozumíme výsledné creepové křivky, které získáme numerickou integrací rovnic z článku [6] v programu MATLAB pro úlohu 1D creepu. Úloha 1D creepu je definována stejnými materiálovými parametry a stejnými okrajovými podmínkami jako testovací úloha.

Testovací úloha probíhá na jednom 3D elementu typu ITE 56. Jedná se o 3D isoparametrický šestistěn, který má 6 stěn, 12 hran a 20 uzlů. Bližší informace o elementu typu ITE 56 jsou uvedeny v příručce *PMD* [16].

V testovací úloze byla stěna elementu  $S_4$  (stěna definovaná uzly 3, 4, 7, 8) vetknuta. Stěna elementu  $S_2$  (stěna definovaná uzly 1, 2, 5, 6) byla poté zatížena ve směru osy  $z$  tahovým napětím  $\sigma_z$ . Element se dále nachází v prostředí o teplotě  $T$ . Na obr. 4 je vyobrazeno schéma zadání testovací úlohy. Barevná čísla reprezentují čísla jednotlivých uzlů.

Zkoumaným materiálem v úloze prostého jednoosého tahu je creepuvzdorná ocel P91 (značení dle EN: X10rMoVNbN 9-1). Jedná se o chromovou modifikovanou ocel nové generace, která oproti svému předchůdci, oceli ČSN 17 134 vyvinuté po 2. světové válce, vykazuje až dvakrát vyšší hodnotu pevnosti při tečení. Ocel P91 i jiné podobné žárovečné oceli na bázi 9% chromových ocelí mají v současné době velice významné uplatnění. Používají se při opravách stávajících a instalaci nových bloků jaderných reaktorů [17].





Obr. 4: Schéma zadání testovací úlohy.

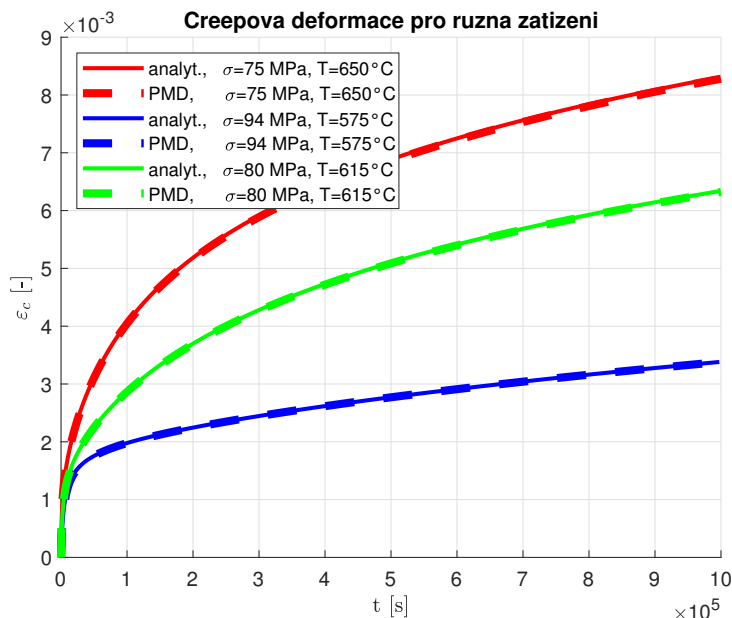
Materiálové parametry jsou pak uvedeny v tab. 5.

Mat. par.	hodnota	jednotky
$\sigma_t$	75	MPa
$\sigma_r$	1.5	MPa
$r_i$	100	
$b$	$7.3 \times 10^{24}$	$s^{-1}$
$p$	0.03	$MPa^{-1}$
$Q_h$	580	$kJ/mol$
$Q_l$	150	$kJ/mol$
$g$	376	$s^{-1}$
$E$	$44.4 \times 10^3$	MPa
$k$	0.5	
$c$	$1.95 \times 10^{-3}$	

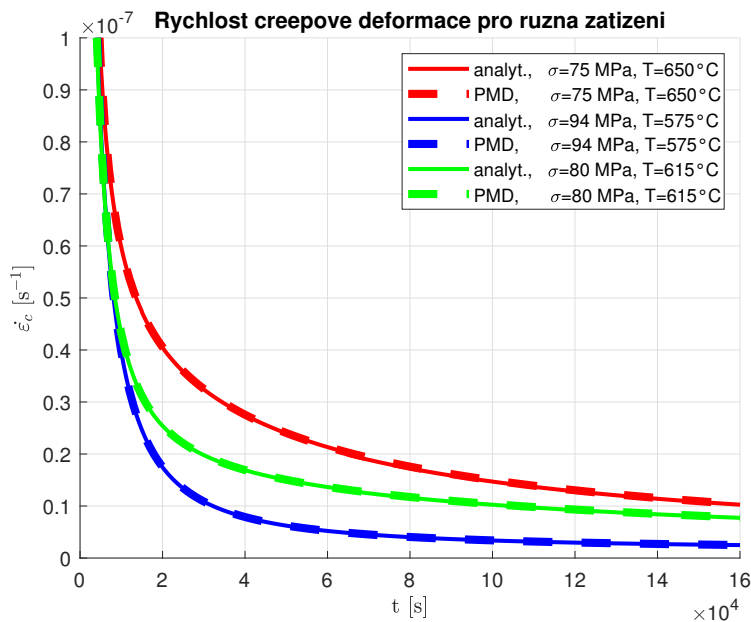
Tab. 5: Přehled materiálových parametrů pro ocel P91 [6].

Na obr. 5 jsou zobrazeny výsledné průběhy creepové deformace  $\varepsilon_c$  v závislosti na čase  $t$ . V grafu je uvedeno srovnání řešení numerických simulací z programu *PMD* (čárkovaně) s predikcí analytického modelu (plně). V grafu jsou vybrány průběhy pro trojici různých zatížení, které se liší velikostí aplikovaného napětí  $\sigma$  a také teplotou okolního

prostředí  $T$ . Na obr. 6 lze pozorovat průběhy rychlosti creepové deformace  $\dot{\varepsilon}_c$  v závislosti na čase  $t$ . Křivky opět srovnávají simulaci z programu *PMD* s analytickým předpisem creepového modelu, a to pro stejnou trojici zatížení jako na obr. 5.



Obr. 5: Srovnání analytického řešení creepové deformace  $\varepsilon_c$  s *PMD* pro vybraná zatížení.



Obr. 6: Srovnání analyt. řešení rychlosti creepové def.  $\dot{\varepsilon}_c$  s *PMD* pro vybraná zatížení.

V grafech na obr. 5 a obr. 6 lze pozorovat mírné odchylky v průbězích křivek analytického řešení vůči řešení z programu *PMD*. Pro zatížení  $\sigma = 75\text{MPa}$ ,  $T = 650^\circ\text{C}$  je tento nesoulad v obou grafech největší, ale nepřesahuje hodnoty 0,5 %. Z průběhu

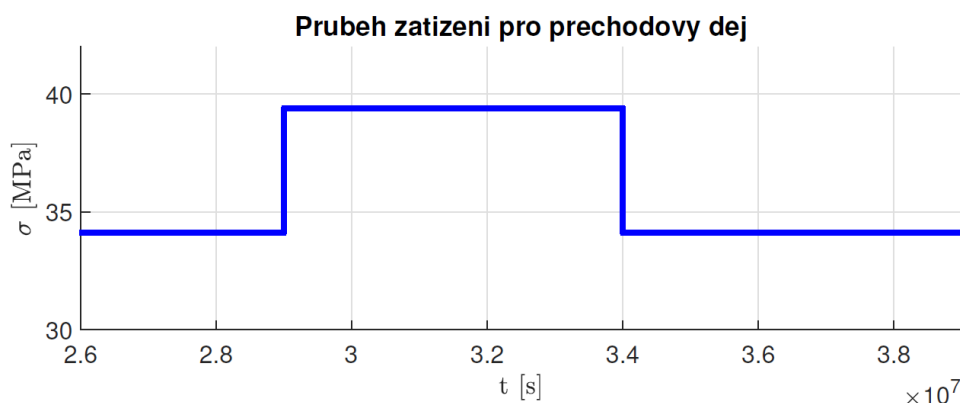
creepových křivek je patrné, že řešení programu *PMD* se s analytickým řešením shoduje.

#### 5.4 Simulace přechodových jevů

Stejná úloha prostého jednoosého tahu, která je schematicky zobrazena na obr. 4, je podrobena simulaci přechodových jevů. Jedná se pro praxi velice důležitý případ, kdy je v průběhu zatěžování náhle měněna velikost zatížení. Při změně zatížení dochází ke vzniku vnitřního pole napětí, které je pro správný popis creepu důležité zejména v oblasti nízkého napětí. Většina stávajících creepových modelů však zmíněnou problematiku neuvažuje a pouze skokově přeskakuje z průběhu jedné křivky na druhou, čímž se dopouští značného zjednodušení. Klocův model creepu problematiku přechodových jevů uvažuje. Podrobnější informace o úloze proměnného zatížení byly uvedeny v kapitole 4.

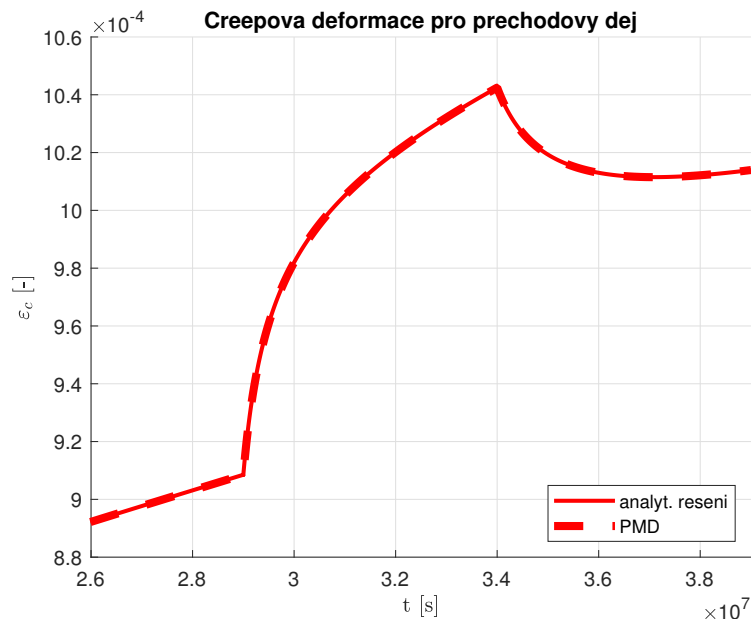
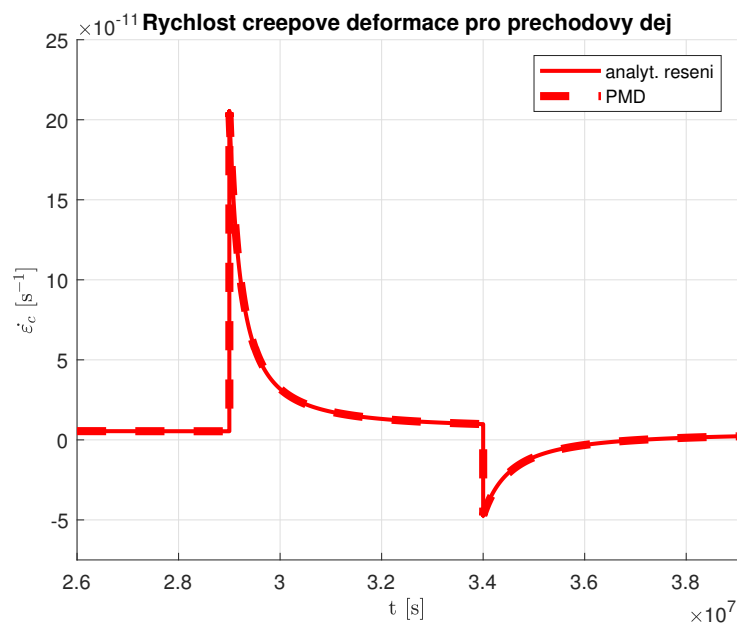
Simulace přechodových jevů je provedena na stejném 3D elementu ITE 56 pro stejné okrajové podmínky jako úloha v sekci 5.3, tedy stěna prvku *S4* (stěna definovaná uzly 3, 4, 7, 8) je vetknuta a stěna prvku *S2* (stěna definovaná uzly 1, 2, 5, 6) je zatížena napětím  $\sigma_z$ .

Stěna *S2* je nejprve po dobu 29 milionů sekund zatížena konstantním napětím ve směru osy  $z$ :  $\sigma_z = 34.1$  MPa. Poté je napětí  $\sigma_z$  skokově změněno na hodnotu 39.4 MPa. Novému zatížení 39.4 MPa je element vystaven po dobu dalších 5 milionů sekund, kdy v čase  $t = 34$  milionů sekund dochází opět ke změně  $\sigma_z$  na původních  $\sigma_z = 34.1$  MPa. Průběh zatížení  $\sigma_z$  v závislosti na čase  $t$  je zobrazen na obr. 7. Celý proces probíhá za konstantní teploty  $T = 600^\circ\text{C}$ . Hodnoty zatížení výše popsané simulace přechodových jevů jsou voleny podle [6].



Obr. 7: Průběh zatížení  $\sigma = \sigma(t)$  pro simulaci přechodového jevu ( $T = 600^\circ\text{C}$ ).

V grafech na obr. 8 a obr. 9 jsou popořadě zobrazeny průběhy creepové deformace  $\varepsilon_c$  a rychlosti creepové deformace  $\dot{\varepsilon}_c$  pro výše uvedený průběh zatížení.

Obr. 8: Průběh creepové deformace  $\varepsilon_c$  pro simulaci přechodového jevu.Obr. 9: Průběh rychlosti creepové deformace  $\dot{\varepsilon}_c$  pro simulaci přechodového jevu.

Grafy vykazují předpokládaný průběh závislosti creepové deformace  $\varepsilon_c$  a rychlosti creepové deformace  $\dot{\varepsilon}_c$  na čase  $t$ . Více vypovídající je v tomto směru obr. 9, kde lze pozorovat skokovou změnu rychlosti creepové deformace v závislosti na náhlé skokové změně vnějšího napětí. Dále lze pozorovat i předem předpokládaný fakt, že rychlost creepové deformace začne po určité době konvergovat k hodnotě, která odpovídá ustálené hodnotě rychlosti creepové deformace pro případ neměnného zatížení.

Dalším důležitým závěrem experimentu je, že implementovaný model creepu zohledňuje dosažení záporné hodnoty rychlosti creepové deformace  $\dot{\epsilon}_c$  po předchozí redukci vnějšího zatížení. K tomuto jevu však dochází i navzdory stále přítomnému kladnému tahovému zatížení. Tento efekt je podle [6] zapříčiněn přítomností vnitřního pole napětí během primární fáze creepu. Klocův model je v tomto směru unikátní, protože většina modelů creepového chování tento efekt neuvažuje.

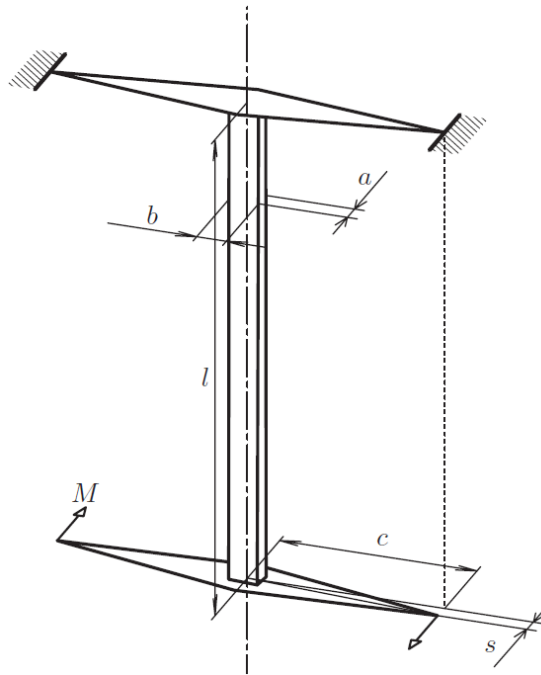
Průběhy veličin podle analytického řešení a řešení z konečně-prvkového softwaru *PMD* v obou grafech vykazují velmi dobrou shodu.

## 6 Krut prutu obdélníkového průřezu

Klocův model creepu byl dále aplikován na úlohu, ve které je zkoumané těleso zatíženo krutem. Konkrétně byla provedena úloha krutu prutu obdélníkového průřezu. Nejprve bylo odvozeno elastické řešení krutu obecně pro obdélníkový průřez. Poté byly do finálních vztahů dosazeny hodnoty průřezu o rozměrech „ $a \times a$ “, a to z důvodu následného porovnání analytického a numerického řešení. Čtvercový průřez o rozměrech „ $a \times a$ “ byl zvolen na základě obdržení experimentálních dat od RNDr. Luboše Kloce, CSc. z *Ústavu fyziky materiálů Akademie věd České republiky v Brně*.

### 6.1 Zadání úlohy

V této úloze byl zatěžován prut obdélníkového průřezu „ $a \times b$ “ o délce  $l$  kroutícím momentem  $M_k$ . Horní konec prutu byl vetknut a na dolním konci prutu bylo předepsáno natočení o úhel  $\phi$ . Na obr. 10 je zobrazeno schéma zadání úlohy.



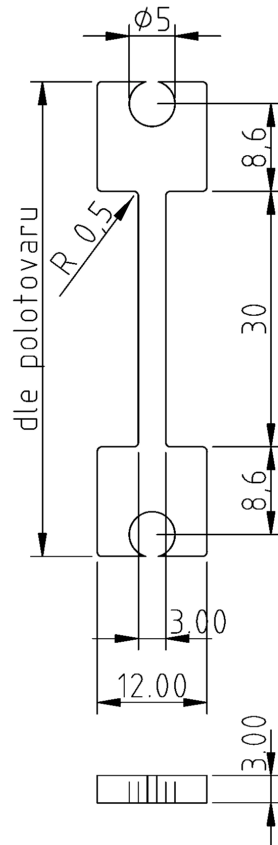
Obr. 10: Schéma úlohy pro krut prutu obdélníkového průřezu [18].

Průřez tyče čtvercového průřezu je „ $a \times a$ “ = 3 mm  $\times$  3 mm a celková délka  $l = 30$  mm. Rozměry tyče odpovídají rozměrům zkušební vzorku z obr. 11. Dolní konec tyče byl zatížen kroutícím momentem  $M_k$ . Velikost kroutícího momentu  $M_k$  je stanovena tak, aby na povrchu zkušební tělesa bylo právě dosaženo předepsané ekvivalentní hodnoty tahového napětí  $\sigma_{max} = 47$  MPa předepsané experimentem. Hodnota smykového napětí je

následně přepočtena podle vztahu

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\sqrt{3}} \quad (6.1)$$

Mezi kroutícím momentem  $M_k$  a vyvozeným smykovým napětím  $\tau$  existuje lineární závislost. Problematika přepočtu je podrobněji vysvětlena dále v textu (rovnice 6.2). Torzní zkouška byla realizována při teplotě  $T = 700^\circ\text{C}$ .



Obr. 11: Zkušební vzorek pro úlohu krutu prutu nekruhového průřezu (rozměry jsou v milimetrech).

Poznamenejme, že vzorek byl vyroben z materiálu Sanicro®25 (značení podle EN: 22Cr25NiWCoCu). Jedná se o austenitickou korozivzdornou ocel, která se vyznačuje zvýšenou odolností vůči vysokým teplotám a creepu. Mezi jeho další přednosti patří odolnost proti oxidaci a vysoká strukturní stabilita. Sanicro®25 se v současnosti hojně využívá jako materiál pro výrobu parních kotlů na tzv. aktivní uhlí v práškové podobě. Dobrá zpracovatelnost materiálu v kombinaci s předchozími fyzikálními vlastnostmi však rozhodně představují širší potenciál tohoto materiálu pro jeho další budoucí uplatnění. Podrobnější detaily o materiálu Sanicro®25 jsou uvedeny v [19]. Materiálové vlastnosti důležité pro samotnou simulaci experimentu [18] jsou pak uvedeny v tab. 6.

Mat. par.	hodnota	jednotky
$\sigma_t$	130	MPa
$\sigma_r$	3.0	MPa
$r_i$	8.0	
$b$	$3.0 \times 10^{19}$	$s^{-1}$
$p$	0.03	$\text{MPa}^{-1}$
$Q_h$	525	kJ/mol
$Q_l$	171	kJ/mol
$g$	700	$s^{-1}$
$E$	$139 \times 10^3$	MPa
$k$	0.65	
$c$	$3.5 \times 10^{-3}$	

Tab. 6: Přehled materiálových parametrů pro Sanicro®25 [20].

## 6.2 Elastické řešení

Analyticky lze výsledné vztahy poměrně snadno odvodit pouze pro elastickou oblast zatěžování. Pro způsob namáhání krutem obecně platí, že minimální hodnota smykového napětí se nachází v ose prutu. Hodnota smykového napětí od osy prutu směrem k povrchu prutu roste lineárně podle (6.2), kdy  $\rho$  je vzdálenost od osy prutu a  $J_p$  je kvadratický modul průřezu

$$\tau(\rho) = \frac{M_k}{J_p} \rho. \quad (6.2)$$

Pro konkrétní úlohu krutu nekruhového průřezu lze maximální hodnotu smykového napětí vypočítat podle rovnice

$$\tau_{max} = K_1 \frac{M_k}{a^2 b} \quad (6.3)$$

Hodnotu maximální smykové deformace pak lze vypočítat podle

$$\gamma_{max} = K_2 \frac{\phi a}{l} \quad (6.4)$$

Kvadratický modul průřezu  $J_p$  se pro obdélníkový profil vypočte superpozicí dílčích kvadratických modulů průřezu pro jednotlivé roviny zatěžování, tedy podle vztahu

$$J_p = J_x + J_z \quad (6.5)$$

Koeficienty  $K_1$  a  $K_2$  v předchozích rovnicích jsou vzaty z [18], resp. z [21]. Jedná se o koeficienty, které se objevují ve vztazích pro průřezové charakteristiky, a jejichž hodnoty



jsou různé v závislosti na různém poměru stran průřezu  $a : b$ . Hodnoty pro vybrané poměry stran průřezů  $a : b$  jsou uvedeny v tab. 7.

Typ průřezu	Kruhový	Čtvercový	Obd.	Obd.	Obd.	Tenký, dlouhý
poměr $b : a$	(1)	1.0	2.0	4.0	10	$\rightarrow \infty$
$K_1$	5.1	4.81	4.07	3.55	3.19	3.0
$K_2$	0.5	0.68	0.93	0.99	1.0	1.0

Tab. 7: Hodnoty koeficientů  $K_1$  a  $K_2$  [18].

Porovnáním definičního vztahu pro výpočet smykové deformace pro maximální hodnotu deformace, resp. smykového napětí

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} \quad (6.6)$$

a (6.4) lze dále vypočítat úhel natočení nevetknutého konce prutu  $\phi$

$$\phi = \frac{M_k l}{\frac{K_2}{K_1} a^3 b G} \quad (6.7)$$

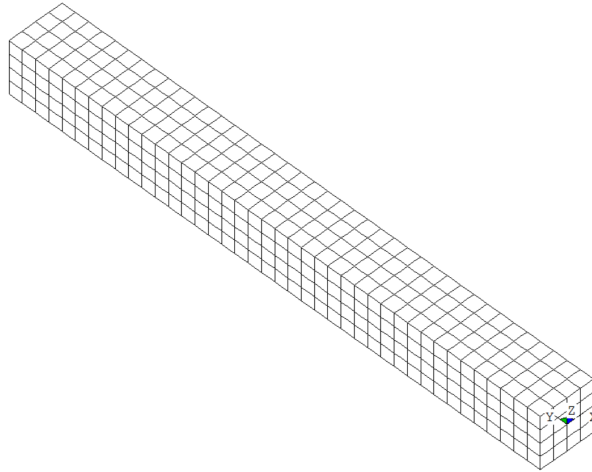
Poznamenejme, že výsledná hodnota deformace se rovná součtu elastické deformace a creepové deformace. V tomto odstavci bylo analyticky odvozeno pouze elastické řešení. Oblast creepového chování materiálu bude uvažována až numerickým výpočtem.

### 6.3 Numerické řešení

Numerický výpočet je zpracován v programu *PMD*. Parametry materiálu Sanicro®25 jsou uvedeny v tab. 6.

#### 6.3.1 MKP model

Prut byl diskretizován 640 elementy typu ITE 56 (detaily o tomto elementu jsou uvedeny v [16]). Podstava je modelována 4x4 elementy, po délce je pak použito 40 elementů. Výsledná síť je zobrazena na obr. 12. MKP model byl vytvořen v grafickém procesoru *GFEM*. Program *GFEM* je blíže popsán v kapitole 5.1.



Obr. 12: Síť pro úlohu krutu prutu nekruhového průřezu.

### 6.3.2 Numerické řešení elastické úlohy

Před samotným elastickým výpočtem je potřeba správně zadat zatížení. V této úloze se jedná o zatížení krutem, které, jak již bylo dříve uvedeno, lze předepsat buď smykovým napětím nebo kroutícím momentem. Mezi oběma veličinami pak existuje jednoduchý přepočít.

Program *PMD* umožňuje definovat zatížení dvěma způsoby [16]. První možností je zadání osamělé síly (dvojice sil), resp. momentu v globálním souřadném systému. Druhou možností je definovat zatížení krutem plošným zatížením (napětím) v globální souřadném systému. Oba způsoby zadání zatížení je poté nutné přiřadit k jednotlivým stěnám elementů, na které síla nebo napětí působí. Pro výpočet byl upřednostněn druhý způsob zadání, proto je v následujícím odstavci rozebrán podrobněji.

Napětí je aplikováno na dolní podstavu tyče. Na obr. 12 se jedná o podstavu, kde se nachází počátek globálního souřadného systému. Napětí je nejdříve předepsáno pro rovinu  $(yz)$ . V této rovině působí napětí  $\tau_x$ , které může být předepsáno polynomiální závislostí na souřadnici  $z$  v obecném tvaru

$$\tau_x(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 \quad (6.8)$$

Z (6.2) je vidět, že výsledná hodnota smykového napětí závisí pouze na lineárním členu, tedy koeficienty  $a_0$ ,  $a_2$  a  $a_3$  musí být rovny 0. Hodnota koeficientu  $a_1$  se pak rovná podílu  $M_k/J_p$ . Výsledný vztah pro napětí  $\tau_x$  lze psát ve tvaru

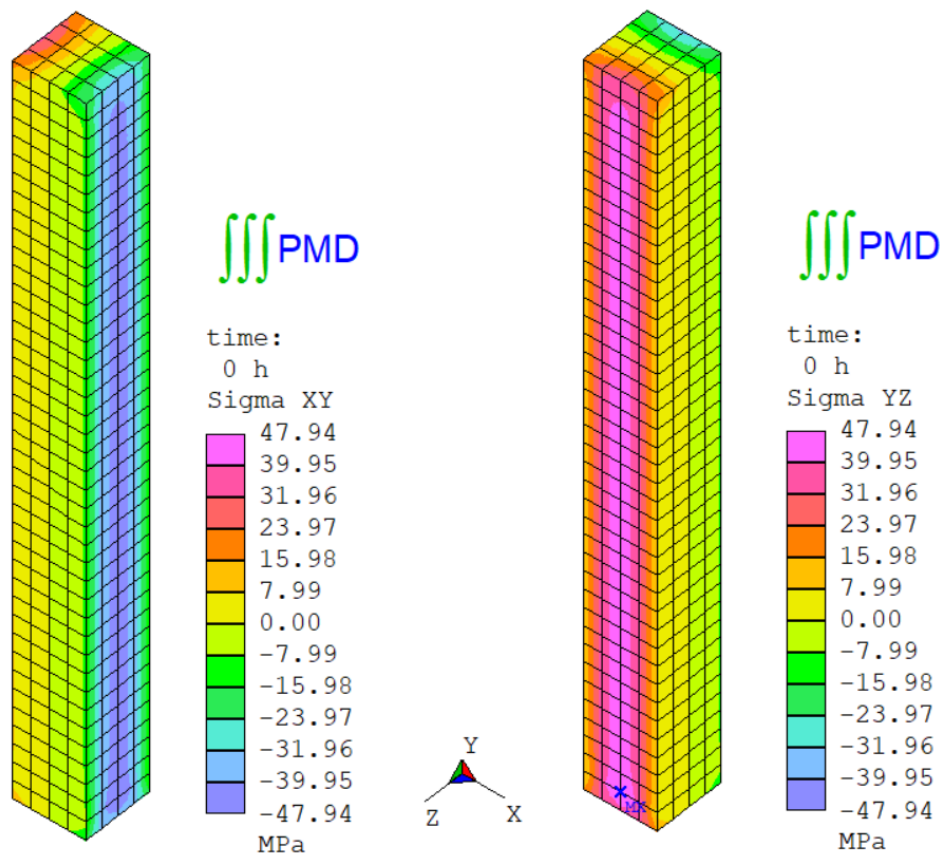
$$\tau_x(z) = \frac{M_k}{J_p} z \quad (6.9)$$

Stejný postup aplikujeme současně pro napětí  $\tau_z$  v rovině  $(yx)$ , čímž dostaneme rovnici

$$\tau_z(x) = \frac{M_k}{J_p} x \quad (6.10)$$

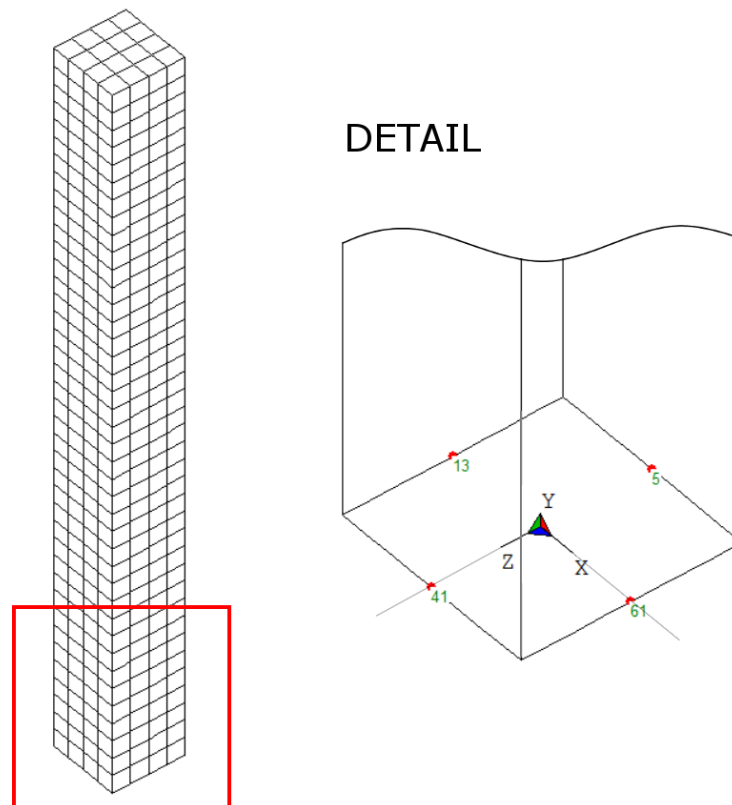
Velikost kroutícího momentu  $M_k$  v předchozích vztazích je dána zadáním úlohy a lze ji spočítat z předepsané maximální hodnoty ekvivalentního tahového napětí  $\sigma_{max}$ , které je dosaženo na povrchu zkušební vzorku. Hodnota podílu  $M_k/J_p$  je nastavena do vstupního souboru s příponou .I2.

Na obr. 13 je graficky zobrazeno numerické řešení elastické úlohy. V levé části obrázku je zobrazen průběh napětí  $\tau_x (= \sigma_{yz})$ , ve kterém lze pozorovat výše popsanou závislost napětí  $\tau_x$  na souřadnici  $z$ : ( $\tau_x = f(z)$ ). Toto napětí má nulovou hodnotu v ose prutu, extrémní napětí  $\tau_{xmax}$ , resp.  $\tau_{xmin}$ , se pak nachází na povrchu prutu ve směru osy  $z$ . V pravé části obrázku je obdobně vykreslen průběh napětí  $\tau_z$  ( $\tau_z = f(x)$ ). Tyto ilustrační obrázky sloužily jako kontroly správného zadání výpočtu.



Obr. 13: Numerické řešení elastické úlohy: napětí  $\tau_x$  (vlevo), napětí  $\tau_z$  (vpravo).

Relevantním výstupem numerického řešení elastické úlohy je obdržení číselných hodnot posuvů  $u$ ,  $v$  a  $w$  ve směru příslušných os  $x$ ,  $y$  a  $z$  pro všechny uzly sítě. Vzhledem ke zkoumání maximálních hodnot pozorovaných veličin však postačí, pokud jednotlivé veličiny budeme zkoumat v pro nás zajímavých bodech – uzlech sítě. Jedná se o uzly, ve kterých je vzhledem k charakteru deformace dosaženo největších hodnot posuvů vždy v jednom směru, přičemž posuv ve druhém směru je téměř nulový. Tyto důležité body se nacházejí na povrchu, ve středu hran dolní podstavy zkoumaného tělesa. Na obr. 14 jsou tyto uzly sítě zvýrazněny.



Obr. 14: Důležité body – uzly sítě pro numerický výpočet; detail vyznačené oblasti.

Obdržené hodnoty posuvů nyní musíme přepočítat na hodnoty deformace. K tomu využijeme vztahu (6.4), který je uveden v kapitole 5.4. Pro vypočtení maximální hodnoty deformace  $\gamma_{max_{num.}}$  podle tohoto vztahu však nejdříve potřebujeme vypočítat hodnotu natočení  $\phi_{num.}$ , kterou můžeme podle obr. 10 spočítat se znalostí parametrů  $c$  a  $s$ . V našem konkrétním případě představuje parametr  $c$  hodnotu poloviny délky strany průřezu zkušební vzorku ( $c = a/2$ ) a hodnota  $s$  je hodnota posuvu  $u$  získána z *PMD* ve směru osy  $x$  pro uzly 5 a 41, resp. hodnota posuvu  $w$  ve směru osy  $z$  pro uzly 13 a 61. Vzhledem k charakteru deformace však musí pro tyto uzly platit  $|u| = |z|$ . Výsledný vztah

pro hodnotu natočení lze např. pro uzel 61 psát ve tvaru

$$\phi_{num.} = \text{artctg} \left( \frac{|w|}{\frac{a}{2}} \right) \quad (6.11)$$

Vypočtenou hodnotu natočení poté můžeme dosadit do (6.4), čímž dostaneme hodnotu úhlové deformace v radiánech

$$\gamma_{max_{num.}} = K_2 \frac{\phi_{num.} \cdot a}{l} \quad (6.12)$$

Tato hodnota úhlové deformace  $\gamma_{max_{num.}}$ , kterou získáme z numerického řešení úlohy, se musí shodovat s vypočtenou hodnotou  $\gamma_{max}$  analytického řešení.

### 6.3.3 Testovací výpočet na úloze prostého tahu

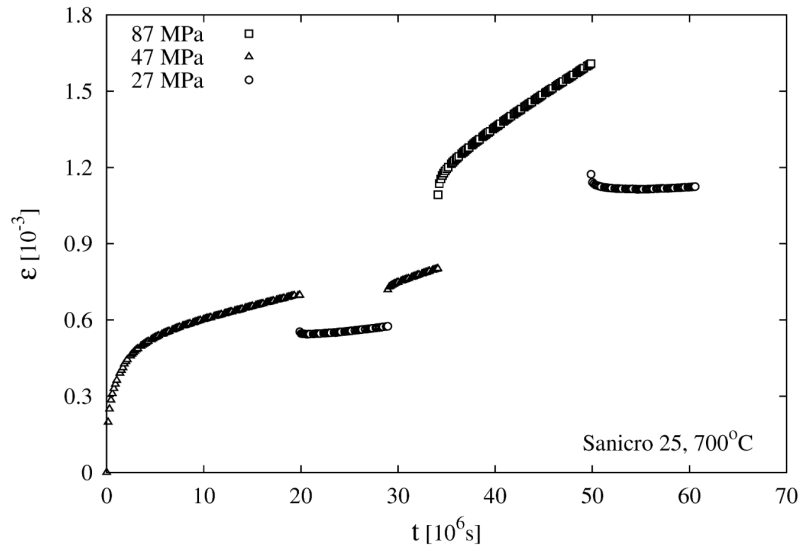
Před samotným numerickým výpočtem creepu úlohy krutu tyče nekruhového průřezu z kapitoly 6.1 byl proveden testovací výpočet na případu prostého jednoosého tahu. Jeden element typu ITE 56 byl zatížen v ose  $z$  tahovým napětím o hodnotě  $\sigma_z$  a byla sledována hodnota creepové deformace  $\varepsilon_c$  v závislosti na čase  $t$ . Zadání této úlohy je totožné jako v případě testovací úlohy, která byla popsána v kapitole 5.3.

Výpočet byl proveden pro všech pět segmentů creepové křivky podle článku [20], kde po dobu každého z pěti uvedených segmentů byla aplikována jiná hodnota vnějšího napětí  $\sigma_z$ . Hodnoty  $\sigma_z$  jsou pro příslušné časové intervaly uvedeny v tab. 8. Celý výpočet probíhal za stálé teploty  $T = 700^\circ\text{C}$ . Přesné hodnoty experimentálních dat z článku [20] nám byly poskytnuty RNDr. Lubošem Klocem, CSc. z *Ústavu fyziky materiálů AV ČR* v Brně a jsou pro ilustraci vyobrazeny na obr. 15.

Číslo segmentu $i$	$\sigma$ [MPa]	$t_{poč.}$ [s]	$t_{kon.}$ [s]
1	47	0	19 881 908
2	27	19 881 908	28 950 624
3	47	28 950 624	34 106 874
4	87	34 106 874	49 863 335
5	27	49 863 335	60 576 686

Tab. 8: Číselné definování jednotlivých segmentů creepové křivky.

Hodnoty aplikovaného vnějšího napětí  $\sigma_z$  jsou v tomto případě zadány tahovými hodnotami v MPa. Vzniklá creepová křivka je poté vynesena graficky, kde na svislé ose je uvedena tahová hodnota poměrné deformace  $\varepsilon_c$ . Mezi tahovými hodnotami a smykovými



Obr. 15: Výchozí creepová křivka pro úlohu prostého jednoosého tahu [20].

hodnotami napětí a deformace však existuje jednoduchý přepočet

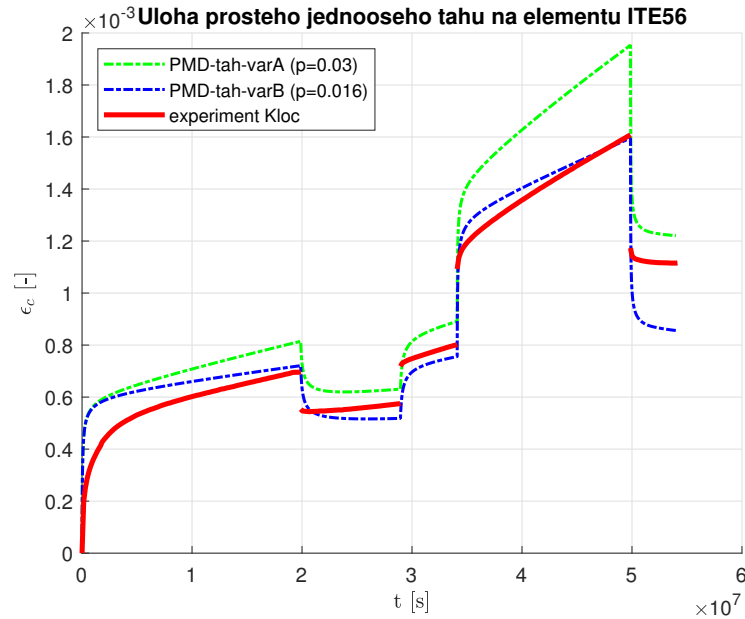
$$\sigma = \sqrt{3}\tau \quad (6.13)$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \quad (6.14)$$

Principem tohoto testovacího výpočtu je tedy zkoumání hodnot creepové deformace  $\varepsilon_c$  pro úlohu prostého jednoosého tahu na elementu ITE56. Creepové křivky získané pro testovací úlohu prostého tahu jsou srovnány s experimentálními hodnotami z [20] a vyneseny do grafu – viz obr. 16.

Poznamenejme, že v grafu jsou uvedeny creepové křivky pro dvě různé sady materiálových parametrů z tab. 6. Sada materiálových parametrů z tab. 6 byla optimalizována tak, aby si co nejlépe odpovídaly rychlosti deformace v koncových (ustálených) fázích jednotlivých creepových segmentů, neboť tam lze předpokládat návrat rozložení napětí směrem k původnímu stavu. Rozdíl ve výše popsáných sadách materiálových parametrů představuje hodnota parametru  $p$ , kde hodnota  $p = 0.03$  je původní hodnota parametru a  $p = 0.016$  představuje novou optimalizovanou hodnotu parametru.

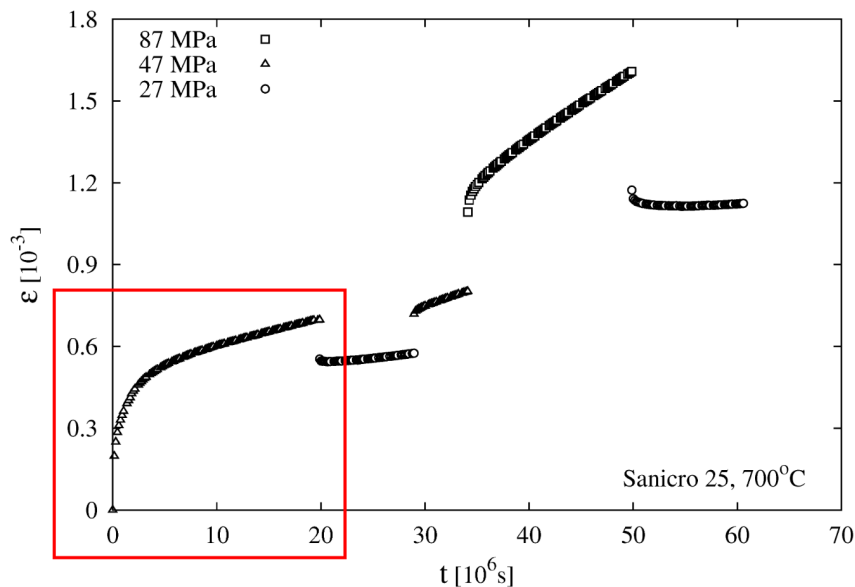
Trendy creepových křivek se pro obě hodnoty parametru  $p$  s experimentálními daty shodují. Jak bylo předpokládáno, creepová křivka pro hodnotu parametru  $p = 0.016$  vykazuje větší shodu s rychlostmi deformace v koncových (ustálených) fázích jednotlivých creepových segmentů.



Obr. 16: Srovnání creepové deformace pro úlohu prostého tahu na elementu ITE 56.

### 6.3.4 Numerické řešení úlohy creepu

Numerický výpočet creepové úlohy krutu prutu čtvercového průřezu byl zkušebně testován nejprve na prvním z pěti segmentů creepové křivky z [20], tedy pro hodnotu ekvivalentního tahového napětí  $\sigma = 47$  MPa. Zmíněná creepová křivka je uvedena na obr. 17, kde je červeně vyznačena zkoumaná oblast pro první segment.



Obr. 17: Výchozí creepová křivka pro úlohu krutu nekruhového průřezu [20].

Postup určení úhlové deformace  $\gamma$  je v případě numerického řešení creepové úlohy analogický s postupem při řešení elastické úlohy. Z programu *PMD* dostáváme pro každý

uzel sítě hodnoty posuvů ve směru příslušných os, a to v každém námi zvoleném časovém bodě. Podobně jako u elastického výpočtu nás zajímají pouze posuvy v osách  $x$  a  $z$ , tedy popořadě posuvy  $u$  a  $w$ , a to pouze v pro nás zajímavých uzlech sítě – v uzlech 5, 13, 41, 61. Ze získaných posuvů následně počítáme natočení, které posléze dosazujeme do vztahu pro výpočet úhlové deformace. Pro porovnání výsledků s experimentálními daty je nezbytné výslednou hodnotu smykové (úhlové) deformace přepočítat zpět podle vztahu (6.14) na ekvivalentní hodnotu tahové deformace. Následným spojením všech bodů dostáváme křivku creepové deformace se závislostí  $\varepsilon = f(t)$ .

V tab. 9 jsou uvedeny hodnoty časových přírůstků  $dt$ , které jsou uvažovány při numerické integraci creepových vztahů implementovaného modelu pro úlohu krutu a které se zadávají do vstupního souboru .IP. Krok  $dt$  není podobně jako v úloze prostého jednoosého tahu (kapitola 5.3) za účelem zpřesnění výpočtu nastaven fixně, ale pro menší čas je malý a s rostoucím časem jeho hodnota roste. Zápis v tabulce odpovídá zápisu ve vstupním souboru .IP, kde např. v intervalu 0 až 20 000 sekund program počítá s konstantní hodnotou integračního kroku  $dt=100$  sekund.

Absolutní čas [s]	$dt$ [s]
0	-
20 000	100
180 000	200
500 000	1 000
1 000 000	5 000
2 000 000	10 000
4 000 000	20 000
8 000 000	40 000
20 000 000	100 000

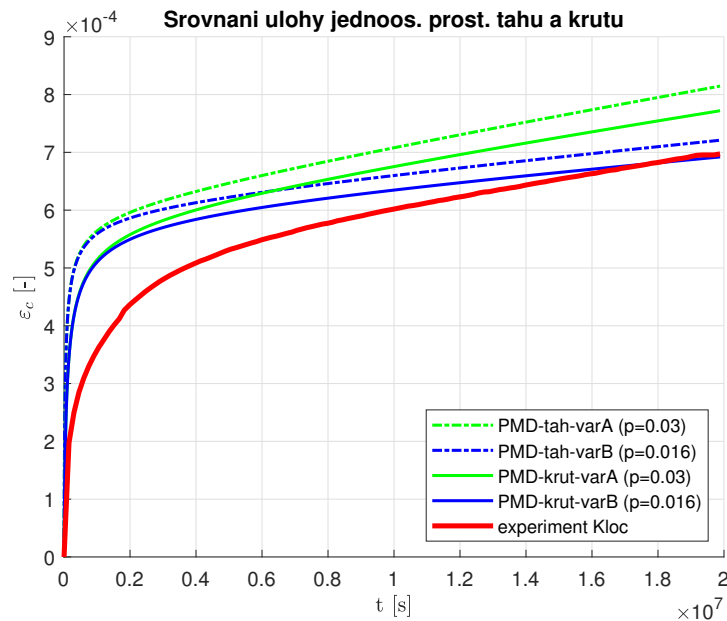
Tab. 9: Hodnoty integračního kroku  $dt$  ve vstupním souboru .IP.

Na obr. 18 je zobrazeno srovnání experimentálních dat creepové deformace  $\varepsilon$  s hodnotami, které byly získány numerickou simulací v prostředí *PMD*. Porovnán je jednak průběh creepové deformace z testovací úlohy prostého jednoosého tahu z kapitoly 6.3.3, dále pak průběh numerického řešení úlohy creepu krutu nekruhového průřezu. Srovnání je vždy vedeno pro obě hodnoty parametrů  $p = 0.03$  a  $p = 0.016$ .

V průbězích těchto křivek na obr. 18 lze pozorovat rozdíl, který je zapříčiněn odlišným způsobem přerozdělování napětí v průběhu creepové deformace pro jednodimenzionální



úlohu tahu oproti trojrozměrné úloze krutu.



Obr. 18: Srovnání experiment. dat creepové deformace  $\varepsilon_c$  s numerickým řešením z *PMD* pro první segment creepové křivky.

Jak již bylo v kapitole 6.3.3 popsáno, materiálová sada parametrů byla laděna tak, aby si co nejlépe odpovídaly rychlosti deformace v koncových (ustálených) fázích jednotlivých creepových segmentů. Z tohoto pohledu je výsledný průběh creepových křivek, zejména pak průběhy křivek creepové deformace pro úlohy 1D tahu a 3D krutu pro parametr  $p = 0.016$ , plně uspokojivý.

Simulace pro ověření správnosti výsledků byla provedena i s polovičními hodnotami integračního kroku  $dt$ , tedy nové hodnoty  $dt$  jsou poloviční oproti hodnotám, které jsou uvedeny v tab. 9. Výsledky creepové deformace pro novou úlohu s polovičním časovým krokem jsou identické, tedy je patrné, že krok je v původní úloze nastaven správně a jeho zjemnění nevede k výraznějšímu zpřesnění výsledků.

#### 6.4 Kompletní úloha pro všechny segmenty creepové křivky

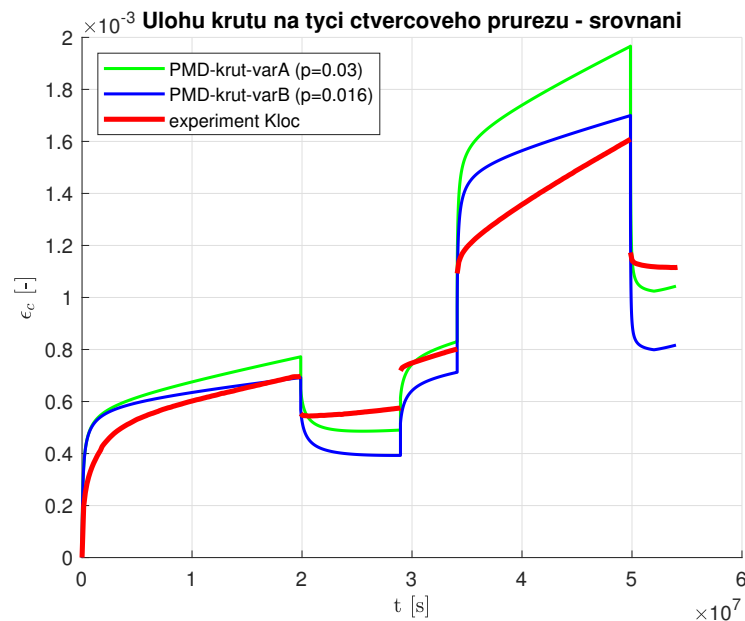
Úloha je v této podkapitole rozšířena o zkoumání všech pěti segmentů creepové deformační křivky z článku [20]. Jedná se tedy pouze o doplnění předchozí simulace o další čtyři segmenty creepové deformační křivky, kde zkoumané těleso je v každém ze zmíněných segmentů zatěžováno rozdílnou hodnotou napětí. Teplota je po celou dobu experimentu konstantní:  $T = 700^\circ\text{C}$ . Hodnoty jednotlivých napětí a počáteční ( $t_{poč.}$ ) a koncové časy ( $t_{kon.}$ ) zatěžování na těchto hladinách napětí jsou uvedeny v tab. 10.

Číslo segmentu $i$	$\sigma$ [MPa]	$t_{poč.}$ [s]	$t_{kon.}$ [s]
1	47	0	19 881 908
2	27	19 881 908	28 950 624
3	47	28 950 624	34 106 874
4	87	34 106 874	49 863 335
5	27	49 863 335	60 576 686

Tab. 10: Číselné definování jednotlivých segmentů creepové křivky.

Vyhodnocování výsledků a získání finální hodnoty úhlové deformace  $\gamma$  probíhá naprosto identicky podle postupu popsaného dříve v textu. Hodnoty časového kroku  $dt$  jsou voleny podle stejné logiky jako u prvního segmentu creepové křivky.

Na obr. 19 jsou graficky uvedeny průběhy creepové deformace  $\varepsilon_c$  pro úlohu krutu nekruhového průřezu pro obě hodnoty materiálového parametru z tab. 6. Je třeba poznamenat, že získané creepové křivky na obr. 19 zahrnují i 3D efekt vzniklý při krutu mající za následek přerozdělení napětí. To vysvětluje odlišné výsledky ve srovnání s obr. 16, který byl proveden jako 1D výpočet.

Obr. 19: Srovnání experiment. dat creepové deformace  $\varepsilon_c$  s numerickým řešením z *PMD* pro všechny segmenty creepové křivky.

Trendy creepových křivek se pro obě hodnoty materiálového parametru  $p$  implementovaného modelu creepu shodují s experimentálními daty. Konkrétní hodnoty creepové deformace implementovaného modelu rovněž velmi dobře odpovídají experimentálním

datům. Výborná shoda je zaznamenána pro materiálovou sadu parametrů Klocova modelu s parametrem  $p = 0.016$ , který je laděn na hodnotu creepové deformace v koncové (ustálené) fázi. Největší chyby je pro obě sady parametrů Klocova modelu creepového chování dosaženo pro popis čtvrtého segmentu creepové křivky, kdy se v průběhu tohoto segmentu výsledky implementovaného modelu odlišují oproti experimentálním datům i o 25%.

Poznamenejme však, že creepová křivka pro hodnotu materiálového parametru  $p = 0.016$  vykazuje při srovnání s poskytnutými experimentálními daty lepší shodu pouze na konci prvního a čtvrtého segmentu creepové křivky. Creepová deformace na konci druhého a třetího segmentu je naopak lépe popsána materiálovou sadou s  $p = 0.03$ , a proto nelze říci, která z těchto dvou dostupných materiálových sad parametrů je pro popis creepového chování při uvažování přechodových efektů přesnější.

Dodejme, že pro dosažení co největší shody s experimentálními daty by bylo nutné provést další optimalizaci sady materiálových parametrů Klocova modelu creepu, což bude předmětem dalšího výzkumu.

## 7 Závěr

Na základě provedené rešerše bylo zjištěno, že creepové modely kovových materiálů dostupné v konvenčních MKP softwarech jsou běžně používány v průmyslových aplikacích. Nicméně z hlediska exaktního popisu tyto konvenční modely creepu nepopisují creepové chování kovových materiálů dostatečně přesně. Mezi hlavní nedostatky se řadí především okolnosti jejich vzniku. Naprostá většina těchto modelů není postavena na určité fyzikální podstatě, ale vznikla pouze prostou interpolací experimentálních křivek, a to navíc pouze pro speciální případ konstantního zatížení. Dalším nedostatkem je, že experimenty byly z důvodu jejich ceny a délky prováděny pouze za vysokých hodnot aplikovaného napětí, kdy modely pro nízké hodnoty napětí byly následně ze získaných experimentálních křivek extrapolovány. Modely, které se dnes běžně v komerčních konečně-prvkových aplikacích používají, dále nezohledňují vývoj mikrostruktury materiálu a neodlišují dva zcela odlišné a na sobě nezávislé deformační mechanismy creepu pro odlišné úrovně zatěžování – mechanismus deformace za vysokého napětí a mechanismus deformace za nízkého napětí.

Na druhé straně zde existují i nové originální modely, které uvažují výše zmíněné nedostatky běžně užívaných creepových modelů a které si kladou za cíl co nejpřesněji interpretovat creepové chování materiálů. Mezi ně patří i model creepu, který byl navržen RNDr. Lubošem Klocem, CSc. a kolektivem na brněnském *Ústavu fyziky materiálů Akademie věd České republiky*. Fyzikální podstata modelu představuje robustní základnu pro simulaci doprovodných jevů, které v materiálu během creepu mohou probíhat. Jedná se především o tzv. přechodové jevy, ke kterým dochází při rychlých skokových změnách napětí.

Cílem této práce bylo implementovat Klocův model creepu do stávajícího software *Package for Machine Design (PMD)* a provést verifikaci MKP implementace modelu na základě porovnání s predikcí analytického modelu pro případ prostého jednoosého tahu. Verifikace MKP implementace modelu byla provedena na jednom 3D elementu typu ITE 56 pro tři různé kombinace zatížení (různá velikost aplikovaného napětí a různá velikost teploty) na creepuvzdorné oceli P91. Vypočtené creepové křivky byly porovnány s analytickým modelem a vykazují shodu.

Úloha prostého jednoosého tahu byla použita i pro simulaci přechodových jevů, kdy 3D element typu ITE 56 byl nejdříve zatížen tahovým napětím o velikosti 34.1 MPa. Po ustálení hodnoty rychlosti creepové deformace byla aplikována změna ve vnějším napětí na hodnotu 39.4 MPa a poté zpět na hodnotu 34.1 MPa. Tato simulace byla provedena za konstantní teploty  $T = 600^\circ\text{C}$ . Unikátnost implementovaného modelu creepu představuje

zohlednění záporné hodnoty rychlosti creepové deformace  $\varepsilon_c$  po předchozí redukci vnějšího zatížení, navzdory stále přítomnému kladnému tahovému napětí. Vypočtené creepové křivky opět při porovnání s analytickým modelem a vykazují velmi dobrou shodu.

V další části práce byla provedena validace MKP implementace Klocova modelu creepu. Validace byla provedena na experimentálních výsledcích pro krut tyčí čtvercového průřezu z austenitické oceli Sanicro®25. Přesná experimentální data pro tyto torzní testy byla poskytnuta *Ústavem fyziky materiálů Akademie věd České republiky*. Úloha validace byla odladěna na prvním z pěti segmentů creepové křivky, při kterém byl povrch dolního konce prutu zkušebního tělesa zatížen kroučícím momentem o velikosti odpovídající ekvivalentnímu tahovému zatížení  $\sigma = 47$  MPa. Nejdříve byla zkoumána elastická oblast zatěžování, kdy byla nezávisle odvozena hodnota předepsané smykové deformace  $\gamma$  dolního konce prutu pro toto zatížení. Tato hodnota smykové deformace byla následně porovnána s hodnotou, která byla získána výpočtem elastického řešení v programu *PMD*. Hodnota smykové deformace  $\gamma$  se pro oba způsoby výpočtu shoduje.

Před spuštěním numerického výpočtu úlohy krutu prutu nekruhového průřezu byl proveden testovací výpočet na 1D úloze prostého tahu pro zatížení  $\sigma = 47$  MPa. Pro toto namáhání byl zkoumán průběh creepové deformace, který byl rovněž porovnán s dostupnými experimentálními daty. Simulace byla provedena pro dvě rozdílné sady materiálových parametrů, které se liší velikostí materiálového parametru  $p$ . Bylo zjištěno, že průběh creepové deformace se shoduje s experimentálními daty pro obě sady materiálových parametrů. Materiálová sada s parametrem  $p = 0.016$  podle předpokladu lépe aproximuje hodnotu creepové deformace v koncové (ustálené) fázi, a proto by pro další creepové výpočty byla preferována.

Nakonec byl proveden numerický výpočet úlohy krutu prutu čtvercového průřezu. Tento výpočet byl rozšířen pro všech pět segmentů creepové křivky, kdy zkoumaný prut byl v každém z jednotlivých segmentů creepové křivky zatížen jinou velikostí napětí. Získané creepové křivky pro úlohu krutu zahrnují 3D efekt vzniklý při krutu, který má za následek přerozdělení napětí. To vysvětluje odlišné výsledky ve srovnání s testovací úlohou prostého tahu, který byl proveden jako 1D výpočet. Simulace úlohy krutu prutu čtvercového průřezu byla opět provedena pro obě sady materiálových parametrů. Průběhy creepových křivek se i v tomto případě velmi dobře shodují s experimentálními daty. Výborná shoda je zaznamenána pro materiálovou sadu parametrů Klocova modelu s parametrem  $p = 0.016$ , který je laděn na hodnotu creepové deformace v koncové (ustálené) fázi, a který by byl preferován pro další creepové výpočty. Hodnota creepové deformace se nejvíce liší pro čtvrtý

segment creepové křivky, kdy se výsledky místy neshodují i o 25%.

Závěrem však poznamenejme, že nelze říci, která z těchto dvou dostupných materiálových sad parametrů implementovaného modelu je pro popis creepového chování při uvažování přechodových efektů přesnější. Pro dosažení ještě větší shody s experimentálními daty by bylo nutné provést další optimalizace sady materiálových parametrů Klocova modelu creepu, což bude předmětem dalšího výzkumu.

## 8 Seznam použité literatury

1. ASSOCIATES, CAE. *Tips and Tricks for FEA Modeling of Creep* [online]. 2016 [cit. 2019-11-29]. Dostupné z: <https://caeai.com/blog/tips-and-tricks-fea-modeling-creep>.
2. PICARD, D.; FAFARD, M. Three-Dimensional Constitutive Viscoelastic Model for Isotropic Materials. *Physical Chemistry of Aqueous Systems* [online]. 2011 [cit. 2019-12-05]. Dostupné z DOI: 10.5772/22485.
3. WIKIPEDIA.ORG. *Viscoplasticity* [online]. 2016 [cit. 2019-11-29]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Viscoplasticity>.
4. PENNY, R. K.; MARRIOTT, D. L. *Design for Creep*. 1. vyd. London: McGraw-Hill, 1971. ISBN 0-412-59040-9.
5. NOVOTNÝ, C. *Plasticita a creep: Creep I* [online]. 2009 [cit. 2019-12-01]. Dostupné z: <http://mechanika2.fs.cvut.cz/documents/creep-uvod.pdf>.
6. KLOC, L.; SKLENIČKA, V.; DYMÁČEK, P.; PLEŠEK, J. New Creep Constitutive Equation for Finite Element Modelling Including Transient Effects. *Mechanics of Materials* [online]. 2018, roč. 119, s. 49–55 [cit. 2019-12-01]. Dostupné z DOI: 10.1016/j.mechmat.2018.01.008.
7. GABRIEL, D.; MASÁK, J.; PLEŠEK, J.; KLOC, L.; DYMÁČEK, P. Finite Element Implementation of Creep Constitutive Model Including Transient Effects. *Engineering Mechanics 2019 – 25th International Conference* [online]. 2019, s. 121–124 [cit. 2020-03-01]. Dostupné z DOI: doi:10.21495/71-0-121.
8. KLOC, L. Critical View on the Creep Modelling Procedures. *Acta Physica Polonica A* [online]. 2015, roč. 128, č. 4, s. 540–542 [cit. 2019-12-12]. Dostupné z DOI: 10.12693/APhysPolA.128.540.
9. KLOC, L.; SKLENIČKA, V.; VENTRUBA, J. Comparison of low stress creep properties of ferritic and austenitic creep resistant steels. *Materials Science and Engineering: A* [online]. 2001, roč. 319-321, s. 774–778 [cit. 2019-12-12]. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(01\)00943-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(01)00943-1).
10. KLOC, L. Internal stress model for pre-primary stage of low-stress creep. *Journal of Physics: Conference Series 240* [online]. 2010, roč. 240, č. 1 [cit. 2019-02-28]. Dostupné z DOI: doi:10.1088/1742-6596/240/1/012086.

11. KLOC, L.; MAREČEK, P. Measurement of Very Low Creep Strains: A Review. *Journal of Testing and Evaluation* [online]. 2009, roč. 37, č. 1, s. 53–58 [cit. 2020-03-12]. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1520/JTE101475>.
12. VAMET, s.r.o. *Programy PMD a GFEM* [online]. 2016 [cit. 2020-04-01]. Dostupné z: <http://www.vamet.cz/pmd-a-gfem.html>.
13. PLEŠEK, J. Numerická integrace konstitutivních vztahů. *Inž. mech.* [online]. 1999, roč. 6, č. 1, s. 3–24 [cit. 2020-08-03].
14. OKROUHLÍK, M.; HÖSCHL, C.; PLEŠEK, J.; PTÁK, S.; NADRCHAL, J. *Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače*. 1. vyd. Praha: Ústav termomechaniky Akademie věd České republiky, 1997. ISBN 8085918331.
15. PLEŠEK, J.; KOROUS, J. Explicit integration method with time step control for viscoplasticity and creep. *Adv. Engrg. Software* [online]. 2002, roč. 33, č. 7-10, s. 621–630 [cit. 2020-08-03].
16. ÚSTAV TERMOMECHANIKY AV ČR v.v.i., Kolektiv autorů. *Příručka uživatele* [online]. 2013 [cit. 2019-12-03]. Dostupné z: <http://www.pmd-fem.com/index.html>.
17. AF POWER AGENCY, a.s. *Oceli pro nadkritické bloky tepelných elektráren a jejich svařitelnost* [online]. 2014 [cit. 2020-03-30]. Dostupné z: <http://www.allforpower.cz/UserFiles/file/flash.pdf>.
18. KLOC, L.; MAREČEK, P. Measurement of Very Low Creep Strains: A Review. *Journal of Testing and Evaluation* [online]. 2009, roč. 37, č. 1, s. 53–58 [cit. 2019-12-12]. Dostupné z DOI: 10.1520/JTE101475.
19. SANDVIK MATERIALS TECHNOLOGY, SWE. *Sanicro® 25 - Material Data* [online]. 2019 [cit. 2020-03-30]. Dostupné z: <https://www.materials.sandvik/en/materials-center/material-datasheets/tube-and-pipe-seamless/sanicro-25/>.
20. KLOC, L.; SKLENIČKA, V.; DYMÁČEK, P. Transient Effects in Creep of Sanicro 25 Austenitic Steel and Their Modelling. *Engineering Mechanics 2019 – 25th International Conference* [online]. 2019 [cit. 2020-03-24]. Dostupné z DOI: [doi:10.3390/met9020245](https://doi.org/10.3390/met9020245).
21. TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D. H. *Elements of Strength of Materials*. 4. vyd. New York: Van Nostrand, 1962.



## 9 Seznam obrázků

1	Stadia creepu: I – primární, II – sekundární, III – terciární [2]. . . . .	11
2	Srovnání modelů predikce creepového chování na změnu zatížení a) skokovou (vlevo), b) pozvolnou (vpravo): 1 – Time Hardening Theory, 2 – Strain Hardening Theory, 3 – Graham-Walles, 4 – Rabotnov, 5 – Total Strain Theory [4]. . . . .	18
3	Modifikovaný viskoelastický model SPL [10]. . . . .	23
4	Schéma zadání testovací úlohy. . . . .	32
5	Srovnání analytického řešení creepové deformace $\varepsilon_c$ s <i>PMD</i> pro vybraná zatížení. . . . .	33
6	Srovnání analyt. řešení rychlosti creepové def. $\dot{\varepsilon}_c$ s <i>PMD</i> pro vybraná zatížení. . . . .	33
7	Průběh zatížení $\sigma = \sigma(t)$ pro simulaci přechodového jevu ( $T = 600^\circ C$ ). . . . .	34
8	Průběh creepové deformace $\varepsilon_c$ pro simulaci přechodového jevu. . . . .	35
9	Průběh rychlosti creepové deformace $\dot{\varepsilon}_c$ pro simulaci přechodového jevu. . . . .	35
10	Schéma úlohy pro krut prutu obdélníkového průřezu [18]. . . . .	37
11	Zkušební vzorek pro úlohu krutu prutu nekruhového průřezu (rozměry jsou v milimetrech). . . . .	38
12	Síť pro úlohu krutu prutu nekruhového průřezu. . . . .	41
13	Numerické řešení elastické úlohy: napětí $\tau_x$ (vlevo), napětí $\tau_z$ (vpravo). . . . .	42
14	Důležité body – uzly sítě pro numerický výpočet; detail vyznačené oblasti. . . . .	43
15	Výchozí creepová křivka pro úlohu prostého jednoosého tahu [20]. . . . .	45
16	Srovnání creepové deformace pro úlohu prostého tahu na elementu ITE 56. . . . .	46
17	Výchozí creepová křivka pro úlohu krutu nekruhového průřezu [20]. . . . .	46
18	Srovnání experiment. dat creepové deformace $\varepsilon_c$ s numerickým řešením z <i>PMD</i> pro první segment creepové křivky. . . . .	48
19	Srovnání experiment. dat creepové deformace $\varepsilon_c$ s numerickým řešením z <i>PMD</i> pro všechny segmenty creepové křivky. . . . .	49

## 10 Seznam tabulek

1	Přehled předpisů funkce $f_1(\sigma)$ [4]. . . . .	13
2	Přehled předpisů funkce $f_2(t)$ [4]. . . . .	13
3	Přehled předpisů creepové deformace $\varepsilon_c$ pro vybrané teorie [4]. . . . .	17
4	Předpis jednotlivých členů viskoelastického modelu [10]. . . . .	24
5	Přehled materiálových parametrů pro ocel P91 [6]. . . . .	32
6	Přehled materiálových parametrů pro Sanicro®25 [20]. . . . .	39
7	Hodnoty koeficientů $K_1$ a $K_2$ [18]. . . . .	40
8	Číselné definování jednotlivých segmentů creepové křivky. . . . .	44
9	Hodnoty integračního kroku $dt$ ve vstupním souboru .IP. . . . .	47
10	Číselné definování jednotlivých segmentů creepové křivky. . . . .	49