



**FAKULTA
ŠROJNÍ
ČVUT V PRAZE**

Ústav konstruování a částí strojů

Dynamická analýza ozubených převodů

Dynamic Analysis of Spur Gears

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2020

Bc. Jan FLEK

Studijní program: N 2301 Strojní inženýrství

Studijní obor: 2301T047 Dopravní, letadlová a transportní technika

Vedoucí práce: Ing. Martin Dub, Ph.D.

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Flek** Jméno: **Jan** Osobní číslo: **457689**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav konstruování a částí strojů**
Studijní program: **Strojní inženýrství**
Studijní obor: **Dopravní, letadlová a transportní technika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Dynamická analýza ozubených převodů

Název diplomové práce anglicky:

Dynamic Analysis of Spur Gears

Pokyny pro vypracování:

V rámci diplomové práce zpracujte dynamickou analýzu vybraného ozubeného převodu se zahrnutím tuhosti ozubení.
Osnova:
- Rešerše problematiky modelování tuhosti ozubení, kinematické odchylky převodového poměru a torzních kmitů.
- Model torzního kmitání - tuhé ozubení, poddajné ozubení.
- MKP model záběru ozubených kol, identifikace tuhosti ozubení.
- Vyhodnocení, závěry.

Seznam doporučené literatury:

SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. Základy dynamiky strojů. Praha: České vysoké učení technické, 1997. ISBN 80-01-01622-6.
ŠALAMOUN, Čestmír a Miloš SUCHÝ. Čelní a šroubová soukolí s evolventním ozubením. Praha: Nakladatelství techn. lit., 1990. ISBN 80-03-00532-9.
MORAVEC, Vladimír. Konstrukce strojů a zařízení II.: čelní ozubená kola: teorie, výpočet, konstrukce, výroba, kontrola. Ostrava: Montanex, 2001. ISBN 80-722-5051-5.
Abaqus Documentation

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

Ing. Martin Dub, Ph.D., ústav konstruování a částí strojů FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **23.03.2020**

Termín odevzdání diplomové práce: **29.05.2020**

Platnost zadání diplomové práce: _____

Ing. Martin Dub, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

Ing. František Lopot, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem ***Dynamická analýza ozubených převodů*** vypracoval samostatně, pod vedením Ing. Martina Duba, Ph.D., s využitím konzultací a literatury, uvedené na konci této práce v seznamu použité literatury.

V Praze 20.5.2020

Bc. Jan Flek

PODĚKOVÁNÍ

V první řadě bych rád poděkoval svému vedoucímu diplomové práce Ing. Martinu Dubovi, Ph.D. za jeho rady a ochotu při jejím vzniku.

Dále děkuji své rodině a blízkým, kteří mě vždy ve všem podporovali.

ANOTAČNÍ LIST

- Jméno autora: Bc. Jan FLEK
- Název BP: Dynamická analýza ozubených převodů
- Anglický název: Dynamic Analysis of Spur Gear
- Rok: 2020
- Studijní program: N 2301 Strojní inženýrství
- Obor studia: 2301T047 Dopravní, letadlová a transportní technika
- Ústav: Ústav konstruování a částí strojů
- Vedoucí BP: Ing. Martin Dub, Ph.D.
- Konzultant:
- Bibliografické údaje: počet stran 89
počet obrázků 57
počet tabulek 26
počet příloh 0
- Klíčová slova: Dynamická analýza převodu, frekvenční analýza, tuhost ozubení, kinematická úchylnka převodu, MKP analýza
- Keywords: Dynamic analysis of gear, frequency analysis, stiffness of gear, transmission error, FEM analysis
- Anotace: Tato práce se zabývá problematikou torzní dynamiky ozubení, vlivem časově proměnlivé tuhosti zubů v záběru a výrobních nepřesností (úchylnkou převodového poměru), jakožto vnitřních budících účinků, které mají vliv na celkové výsledky frekvenční analýzy. Součástí práce je také MKP analýza a identifikace tuhosti záběru modelu ozubených kol pro možnost porovnání s teoretickým výpočtem.
- Abstract: This thesis deals with the torsion dynamics of gearing, the influence of time-varying meshing stiffness and manufacturing inaccuracies (deviation of the transmission ratio – transmission error) as internal excitation effects on the overall results of frequency analysis. The thesis also includes FEM analysis and stiffness identification of the gear model, for comparison with the theoretical calculation.

OBSAH

Prohlášení	2
Poděkování	4
Anotační list	5
Obsah	6
Seznam obrázků.....	8
Seznam tabulek	10
Seznam veličin a jejich jednotek.....	11
1. Úvod	1
2. Torzní kmitání dynamické soustavy	2
2.1. Řešení pohybových rovnic	2
2.2. Analýza vlastních frekvencí.....	3
3. Dynamika ozubených převodů	5
3.1. Tuhost ozubení	6
3.1.1. Tuhost jednoho páru zubů.....	7
3.1.2. Tuhost dvou párů zubů	8
3.1.3. Tuhost ozubení a její závislost na čase	9
3.2. Kinematická úchylna převodového poměru	11
4. Přehled problematiky	16
4.1. Vibration mechanisms of spur gear pair in healthy and fault states.....	16
4.2. Nonlinear dynamic modelling and analysis for a spur gear systém with time-varying pressure angle and gear backlash	18
4.3. Model-Based Analysis of Spur Gears' Dynamic Behavior in the Presence of MultipleCracks	18
4.4. Transmission Error Analysis and Disturbance Optimization of Two-Stage Spur Gear Space Driven Mechanism with Large Inertia Load	19
4.5. Quasi-Static and Dynamic Behaviors of Helical Gear System with Manufacturing Errors	20
4.6. Precise Calculation of Mesh Stiffness Fluctuation for Predicting Gear Noise	20
4.7. Non.Linear Contact Analysis of Meshing Gears.....	21
4.8. Calculation of the Combined Torsional Mesh Stiffness of Spur Gears with Two- and Three- Dimensional Parametrical FE Models	23
4.9. A Model for the Study of Meshing Stiffness in spur gear transmission	23
4.10. Dynamic Model of a Helical Gear Pair with Backlash and angle – Varying Mesh Stiffness	24
5. Návrh čelní jednostupňové převodovky.....	25
5.1. Parametry převodového mechanismu	25
5.2. Vstupní hodnoty důležité pro výpočet dynamického chování	27
6. Výpočet torzního kmitání	28
6.1. Výpočet torzního kmitání bez uvažování tuhosti zubů.....	28
6.1.1. Sestavení pohybových rovnic a jejich řešení	28
6.1.2. Vlastní frekvence systému	32
6.2. Výpočet pro ověření pomocí redukováného modelu.....	34
6.2.1. Sestavení pohybových rovnic	34

6.2.2.	Vlastní frekvence redukované soustavy	35
6.3.	Výpočet torzního kmitání s uvažováním tuhosti zubů.....	36
6.3.1.	Výpočet konstantní tuhosti ozubených kol	36
6.3.2.	Tuhost proměnlivá v čase zadána Fourierovou řadou.....	37
6.3.3.	Sestavení pohybových rovnic	37
6.4.	Výpočet torzního kmitání s uvažováním tuhosti a kinematickou úchytkou ozubení.....	40
6.4.1.	Zjištění amplitudy kinematické úchytky převodu	40
6.4.2.	Sestavení pohybových rovnic	42
7.	Výsledky frekvenční analýzy	44
7.1.	Výsledky výpočtu bez uvažování tuhosti zubů	44
7.2.	Výsledky výpočtu s uvažováním konstantní tuhosti zubů	45
7.3.	Výsledky výpočtu s uvažováním časově závislé tuhosti ozubení.....	46
7.4.	Výsledky výpočtu se zahrnutím úchytky převodového poměru	48
7.5.	Shrnutí frekvenční analýzy.....	49
8.	Ověření tuhosti zubů pomocí výpočtu metodou konečných prvků	50
8.1.	Příprava výpočtového modelu ozubení.....	50
8.2.	Výpočet metodou konečných prvků.....	50
8.2.1.	Sestava výpočtového modelu převodovky	51
8.2.2.	Nastavení materiálových vlastností modelu.....	52
8.2.3.	Vytvoření výpočtových kroků	52
8.2.4.	Nastavení interakcí mezi tělesy	53
8.2.5.	Nastavení uložení a zatížení soukolí	55
8.2.6.	Vytvoření sítě	56
8.3.	Zpracování výsledků.....	58
9.	Výpočty s ověřovacím soukolím	64
9.1.	Dynamický výpočet s uvažováním teoretické proměnlivé tuhosti	65
9.2.	Ověření tuhosti ověřovacího kola pomocí MKP	66
9.3.	Výsledky frekvenční analýzy ověřovacího soukolí	67
Závěr	73
Použitá literatura	75

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1.: Zobrazení signálu v časové oblasti a jeho převod do oblasti frekvenční [7]	4
Obr. 2.: Schéma zubového záběru [2].....	6
Obr. 3.: Průběh jednopárové tuhosti přímého ozubení [4]	8
Obr. 4.: Model kontaktu zubů pomocí pružin [4]	8
Obr. 5.: Průběh celkové tuhosti přímého ozubení [4]	9
Obr. 6.: Model kontaktu zubů pomocí pružin [4]	9
Obr. 7.: Schéma pro součinitele záběru [2]	10
Obr. 8.: Vyjádření celkové tuhosti pomocí Fourierovy řady [2].....	10
Obr. 9.: Lineární časově proměnná tuhost v závislosti na čase [9].....	17
Obr. 10.: Porovnání průběhu zrychlení a) nepoškozeného převodu a b) převodu s vylomeným zubem [9]	17
Obr. 11.: Průběh tuhosti ozubení s vytvořenými vruby [11]	19
Obr. 12.: Porovnání neoptimalizovaných zubů s optimalizovanými [14]	21
Obr. 13.: Porovnání výpočtu tuhosti s použitím lineárních a kvadratických elementů [15]	22
Obr. 14.: Porovnání teoretického modelu tuhosti s vypočteným v Abaqus CAE [15]..	22
Obr. 15.: Deformace globálního a lokálního členu [18].....	23
Obr. 16.: Model navržené převodovky pro výpočet	27
Obr. 17.: Dynamický model jednostupňové převodovky	28
Obr. 18.: Schéma pro sestavení pohybových rovnic.....	29
Obr. 19.: Vlastní frekvence systému	32
Obr. 20.: Vlastní frekvence systému	33
Obr. 21.: Redukovaný model převodovky – tří hmotová soustava	34
Obr. 22.: Tuhost ozubení reprezentovaná Fourierovou řadou.....	37
Obr. 23.: Dynamické schéma mezi pastorkem a kolem.....	38
Obr. 24.: Dynamický model převodovky s uvažováním tuhosti ozubení.....	39
Obr. 25.: Dynamické schéma mezi pastorkem a kolem.....	42
Obr. 26.: Dynamický model převodovky s uvažováním tuhosti ozubení a kinematickou úchylkou převodu	43
Obr. 27.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – model bez uvažování tuhosti ozubení	44
Obr. 28.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – model bez uvažování tuhosti ozubení	45
Obr. 29.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – model s uvažováním konstantní tuhosti ozubení.....	45
Obr. 30.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – model s uvažováním konstantní tuhosti ozubení.....	46
Obr. 31.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou.....	46
Obr. 32.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou.....	47

Obr. 33.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou a kinematické úchyly převodového poměru	48
Obr. 34.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou a kinematické úchyly převodového poměru	48
Obr. 35.: Původní výpočtový model.....	51
Obr. 36.: Výsledný výpočtový model	51
Obr. 37.: Nastavení kontaktu mezi prvním párem zubů.....	54
Obr. 38.: Výsledný model s nastavenými vazbami a kontakty	54
Obr. 39.: definované amplitudy - "vypínač"	56
Obr. 40.: Zhuštěné prvky v místě kontaktu	57
Obr. 41.: Prvky rozmístěné po hraně modelu.....	57
Obr. 42.: Síť původního modelu bez pravidelné struktury	58
Obr. 43.: Detail pravidelné struktury použitého modelu	58
Obr. 44.: Průběh natočení pastorku a kola během záběru.....	59
Obr. 45.: Průběh rotace pastorku	59
Obr. 46.: Průběh deformace kola.....	59
Obr. 47.: Průběh torzní tuhosti kola	61
Obr. 48.: Průběh torzní tuhosti	61
Obr. 49.: Teoretická torzní tuhost.....	62
Obr. 50.: Detailnější porovnání obou průběhů	63
Obr. 51.: Výsledný model s nastavenými vazbami a kontakty	66
Obr. 52.: Porovnání teoretické tuhosti s průběhem získaným z MKP analýzy	67
Obr. 53.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – porovnávací model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou	68
Obr. 54.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – porovnávací model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou	68
Obr. 55.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – porovnávací model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou vektorem hodnot z MKP analýzy.....	69
Obr. 56.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – porovnávací model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou vektorem hodnot z MKP analýzy.....	70
Obr. 57.: Porovnání frekvenčních spekter nových dynamických výpočtů.....	71

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1.: Konstanty pro dosazení do empirického vztahu pro výpočet jednopárové tuhosti [5].....	7
Tabulka 2.: Předpis kinematické přesnosti [5].....	13
Tabulka 3.: Předpis plynulosti chodu [5].....	14
Tabulka 4.: Koeficienty pro výpočet úchylek v libovolném stupni přesnosti [5]	15
Tabulka 5.: Parametry pohonu	25
Tabulka 6.: Počet zubů pastorku, kola a hodnota skutečného převodového čísla	25
Tabulka 7.: Vypočtené momenty na pastorku a kole	25
Tabulka 8.: Parametry soukolí	26
Tabulka 9.: Vstupní hodnoty pro dynamický výpočet	27
Tabulka 10.: Substitute pro torzní soustavu.....	32
Tabulka 11.: Výsledky měrné jednopárové a záběrové tuhosti.....	36
Tabulka 12.: Tuhost jednoho a dvou párů v záběru	36
Tabulka 13.: Výsledné místní kinematické úchyly	40
Tabulka 14.: Výsledné součtové úchyly roztečí	41
Tabulka 15.: Výsledné kinematické úchyly pro 5. a 8. stupeň přesnosti ozubení	41
Tabulka 16.: Amplituda kinematické úchyly	41
Tabulka 17.: Materiálové vlastnosti.....	52
Tabulka 18.: Nastavení výpočtových kroků	52
Tabulka 19.: Vlastnosti kontaktů	53
Tabulka 20.: Hodnoty natočení pastorku a kola	55
Tabulka 21.: Zatěžující moment na kole	55
Tabulka 22.: Pastorek – údaje o síti	57
Tabulka 23.: Kolo – údaje o síti	57
Tabulka 24.: Parametry ověřovacího soukolí.....	64
Tabulka 25.: Parametry dynamického výpočtu s ověřovacím soukolím	65
Tabulka 26.: Hodnoty tuhosti jednoho a dvou párů zubů ověřovacího kola v záběru .	65

SEZNAM VELIČIN A JEJICH JEDNOTEK

Veličina	Název	Jednotka
a_w	Osová vzdálenost ozubení	[m]
α, α_n	Úhel záběru	[°]
α_w	Úhel valivý	[°]
b_{kolo}	Šířka ozubeného kola	[m]
$b_{pastorek}$	Šířka pastorku	[m]
β	Úhel sklonu zubů	[°]
c	Měrná tuhost ozubení	[N/m ²]
c'	Měrná jednopárová tuhost ozubení	[N/m ²]
c''	Měrná dvoupárová tuhost ozubení	[N/m ²]
c_γ	Měrná záběrová tuhost ozubení	[N/m ²]
γ_0	Fázový úhel harmonické složky úplného cyklu odvalu	[rad]
γ_k	Fázový úhel harmonické složky kinematické úchyly ozubení	[rad]
$d_{1,2}$	Roztečná kružnice pastorku (1)/kola (2)	[m]
$d_{a1,2}$	Hlavová kružnice pastorku (1)/kola (2)	[m]
$d_{b1,2}$	Základní kružnice pastorku (1)/kola (2)	[m]
$d_{f1,2}$	Patní kružnice pastorku (1)/kola (2)	[m]
$d_{w1,2}$	Valivá kružnice pastorku (1)/kola (2)	[m]
D_{kolo}	Průměr hřídele kola	[m]
$D_{pastorek}$	Průměr hřídele pastorku	[m]
δ	Deformace ozubení	[m]
Δ	Amplituda harmonické složky úplného cyklu odvalu	[m]
Δ	Amplituda chyby	[m]
Δ_k	Amplituda harmonické složky kinematické úchyly ozubení	[m]
$\Delta(t)$	Kinematická úchyly ozubení	[m]
ε	Součinitel trvání záběru	[1]
ε_α	Součinitel záběru evolventou	[1]
ε_β	Součinitel záběru krokem	[1]
f	Frekvence	[Hz]
f_{pt}	Úchyly čelních roztečí	[m]
f_i'	Místní kinematická úchyly	[m]
f_z	Zubová frekvence	[Hz]
F_p	Součtová úchyly roztečí	[m]
F_α	Úchyly profilu	[m]
F_i'	Kinematická úchyly	[m]
φ_B	Úhel natočení brzdy	[rad]
φ_M	Úhel natočení motoru	[rad]
φ_1	Úhel natočení pastorku	[rad]

Veličina	Název	Jednotka
φ_2	Úhel natočení kola	[rad]
$\varphi_{\delta 1}$	Úhlová deformace pastorku	[rad]
$\varphi_{\delta 2}$	Úhlová deformace kola	[rad]
$\dot{\varphi}_B = \omega_B$	Úhlová rychlost brzdy	[rad/s]
$\dot{\varphi}_M = \omega_M$	Úhlová rychlost motoru	[rad/s]
$\dot{\varphi}_1 = \omega_1$	Úhlová rychlost pastorku	[rad/s]
$\dot{\varphi}_2 = \omega_2$	Úhlová rychlost kola	[rad/s]
$\ddot{\varphi}_B = \varepsilon_B$	Úhlové zrychlení brzdy	[rad/s ²]
$\ddot{\varphi}_M = \varepsilon_M$	Úhlové zrychlení motoru	[rad/s ²]
$\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1$	Úhlové zrychlení pastorku	[rad/s ²]
$\ddot{\varphi}_2 = \varepsilon_2$	Úhlové zrychlení kola	[rad/s ²]
h_{a0}^*	Jednotková výška hlavy zubu nástroje	[1]
h_{f0}^*	Jednotková výška paty zubu nástroje	[1]
i_{12}	Převodový poměr	[1]
I	Jednotková matice	
J_B	Moment setrvačnosti brzdy	[kgm ²]
J_M	Moment setrvačnosti motoru	[kgm ²]
J_1	Moment setrvačnosti pastorku	[kgm ²]
J_2	Moment setrvačnosti kola	[kgm ²]
J_{2red}	Redukovaný moment setrvačnosti pastorku/kolo	[kgm ²]
J_{Bred}	Redukovaný moment setrvačnosti brzdy	[kgm ²]
k	koeficient	
$k(t)$	Časově závislá tuhost ozubení	[N/m]
k_1	Torzni tuhost hřídelové spojky	[Nm/rad]
k_2	Torzni tuhost hřídele kola	[Nm/rad]
k_{2red}	Redukovaná torzni tuhost hřídele kola	[Nm/rad]
$k_{(1)}, k'$	Jednopárová tuhost ozubení	[N/m]
$k_{(2)}$	Dvoupárová tuhost ozubení	[N/m]
k_γ	Záběrová tuhost ozubení	[N/m]
k_C	Celková lineární tuhost získaná MKP výpočtem	[N/m]
k_{t1}	Torzni tuhost zubů pastorku	[Nm/rad]
k_{t2}	Torzni tuhost zubů kola	[Nm/rad]
k_{t2_teor}	$k(t)$ přepočítaná na torzni tuhost kola	[Nm/rad]
k_{tC}	Celková torzni tuhost získaná MKP výpočtem	[Nm/rad]
K	Matice tuhosti	
A	Spektrální matice	
M	Matice hmotnosti	
M_1	Kroutící moment na pastorku	[Nm]

Veličina	Název	Jednotka
M_2	Kroutící moment na kole	[Nm]
M_B	Kroutící moment brzdy	[Nm]
M_M	Kroutící moment motoru	[Nm]
n_1	Otáčky pastorku	[1/s]
n_2	Otáčky kola	[1/s]
p_{tb}	Základní rozteč v čelní rovině	[m]
r_1	Roztečný poloměr pastorku	[m]
r_2	Roztečný poloměr kola	[m]
r_{b1}	Základní poloměr pastorku	[m]
r_{b2}	Základní poloměr kola	[m]
ρ_0^*	Jednotkový poloměr křivosti nástroje	[1]
T_{12}	Tečná síla pastorku/kola	[N]
V	Modální matice	
x_1	Jednotková korekce pastorku	[1]
x_2	Jednotková korekce kola	[1]
x_Σ	Součtová korekce	[1]
ξ_α	Délka záběru zubů profile v čelní rovině	[m]
ξ_β	Délka záběru krokem	[m]
z_1	Počet zubů pastorku	[1]
z_2	Počet zubů kola	[1]

1. Úvod

Ozubené kolo jako takové je vnímáno jako symbol techniky, a to zejména té, která je spjata se strojírenstvím. Představuje základní strojní prvek, který slouží pro převod a přeměnu mechanické energie a pohybu, zároveň je charakteristický dokonalou syntézou potřebných teoretických i praktických znalostí z oblasti konstrukční, výpočtařské, výrobní a v neposlední řadě též materiálového zpracování.

V dnešní době je v oblasti problematiky ozubených kol důležité kromě respektování vysoké výrobní kázně především sledování a vyhodnocování dynamického chování, potažmo frekvenčního spektra při návrhu, a to za účelem co nejnižších hlukových emisí či identifikaci poškození převodového uzlu, tedy za provozu.

Dalším důležitým aspektem navrhování ozubených kol je v dnešní době rychlost návrhu a optimalizace geometrie zubů, což zajišťuje výpočetní technika spolu se softwary a programy usnadňujícími návrh a předběžnou kontrolu únosnosti.

Téma dynamické analýzy ozubených převodů dává možnost zabývat se ozubenými koly z hlediska jejich provozu, kde na pastorky a kola, která jsou ve společném záběru, nahlížíme i z pohledu vlastních frekvencí, a tím i časových průběhů jejich pohybu. Dokážeme vizualizovat vliv geometrie kol a jejich zubů i „chybových“ veličin, pod kterými si můžeme představit různé výrobní nepřesnosti či únavové poškození zubů, např. trhliny v patě zubů a následně můžeme tato data vyhodnocovat.

Tato práce se zaměřuje na to, aby shrnula teoretická východiska týkající se dynamického **modelování torzních kmitů, modelování tuhosti ozubení a kinematické úchylky převodového poměru.**

Všechna tato témata jsou důležitá pro návrh ozubeného převodu spolu s návrhem geometrie zubů. Předběžný dynamický výpočet nám umožní udělat si představu o budoucím provozu ozubeného převodu a je právě tak přesný a objektivní, jak to poznatky a vstupy do výpočtů dovolí a jak je využívaný modelový aparát pro konkrétní úlohu precizní.

Dynamický model lze vytvořit různými způsoby, respektive lze zdokonalovat zahrnováním realističtějších modelů vstupních budících prvků.

Pro porovnání jsou zde zahrnuty výpočty bez respektování poddajnosti ozubení i výpočty s uvažováním ozubení poddajného.

Součástí této práce a naplnění cílů je také analýza ozubených kol v záběru, která byla provedena metodou konečných prvků a slouží pro identifikaci tuhosti ozubení a možné porovnání s teoretickým modelem, který simuluje časově proměnlivé střídání tuhosti zubů v průběhu záběru.

2. Torzní kmitání dynamické soustavy

Pro naplnění cílů této diplomové práce a rozšíření poznatků o dynamice mechanických soustav, v tomto případě dynamice – kmitání převodového soukolí, je zapotřebí si stanovit adekvátní výpočtový model a následně korektně získat dynamickou analýzu ozubení.

Za tímto účelem musíme sestavit dynamické rovnice rovnováhy, a to metodou uvolňování nebo pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu, popřípadě smíšeného typu. Řešením takových rovnic získáme průběhy výchylek, rychlostí či zrychlení v závislosti na čase. Dále díky těmto průběhům můžeme provést potřebnou frekvenční analýzu a získat tím vlastní frekvence mechanické soustavy (ozubeného převodu). Celé řešení nám zajistí přehled o jednotlivých tělesech tvořících dynamický systém.

2.1. Řešení pohybových rovnic

Jelikož vzniklá soustava pohybových rovnic, která popisuje jednotlivá tělesa, je složena z diferenciálních rovnic druhého řádu, je nutné využít výpočtových softwarů, které fungují na bázi metod numerické matematiky (konkrétně Matlab, Maple).

V tomto případě, jedná-li se o mechanický převod, jde o torzní systém vystavený kroutivému – torznímu kmitání, vlivem kroutícího momentu generovaném v elektromotoru. Vzniklou soustavu rovnic bez tlumení lze zapsat obecnou symbolickou rovnicí (2.1).

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

Kde \mathbf{M} symbolizuje matici hmotnosti, \mathbf{K} matici tuhosti, $\boldsymbol{\varphi}$ je vektor úhlových výchylek a vektor $\mathbf{f}(t)$ značí působení vnějšího zatížení.

Pro numerické řešení pohybových rovnic musíme převést soustavu n diferenciálních rovnic druhého řádu na $2n$ diferenciálních rovnic řádu prvního, pomocí substituce.

$$\mathbf{y} - \dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}(t) \quad (2.3)$$

Tato nová soustava už lze numericky řešit např. v softwaru Matlab díky funkci pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic *ode*. Lze například zvolit řešič *ode45* nebo *ode23t* využívající metodu Runge – Kutta.

2.2. Analýza vlastních frekvencí

Vlastní frekvence pro lineární systém lze získat pomocí modálního rozkladu. Uvažujme netlumenou soustavu a její volné kmitání, popsané rovnicí (2.4)

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

s počátečními podmínkami $\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\varphi}_0$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(0) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}_0$.

Řešení této soustavy předpokládejme ve tvaru

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{a}e^{i\Omega t} \quad (2.5)$$

a po dosazení předpokládaného řešení (2.5) do rovnice (2.4) získáme rovnici (2.6),

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

kteřá popisuje problém vlastních čísel soustavy λ . V problematice kmitání mluvíme spíše o vlastních úhlových frekvencích $\Omega = \sqrt{\lambda}$. Následuje požadavek normování vlastních tvarů kmitů pro jejich jednoznačné určení. Nejčastěji používaným typem normování je normování ortonormální, kde se využívá tzv. modální matice \mathbf{V} , obsahující po sloupcích jednotlivé vlastní tvary kmitání a diagonální spektrální matici $\mathbf{\Lambda}$, která obsahuje na hlavní diagonále vzestupně srovnaná vlastní čísla λ .

Z toho plyne podmínka ortonormality:

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{I} \wedge \mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \quad (2.7)$$

Kde \mathbf{I} je jednotková matice odpovídajícího rozměru.[1]

Pokud je soustava pohybových rovnic nelineárního charakteru, znamená to, že výše nastíněnou modální analýzu nelze pro zjištění vlastních frekvencí použít. V případě, že je soustava nelineární, je zapotřebí využít jiné metody učení frekvenčních vlastností soustavy. Řešením je v této situaci využití časových průběhů výchylek získaných numerickým řešením soustavy dynamických rovnic. Kmitavý pohyb (jeho časový průběh) může obsahovat jednu nebo více složek s různými kmitočty, a rozklad takového kmitání na kmitočtové složky se nazývá frekvenční analýza (Obr.1). Výsledkem frekvenční (kmitočtové) analýzy jsou tzv. frekvenční spektra, jejichž jednotlivé složky jsou charakterizovány kmitočtem a amplitudou.

Frekvenční analýza je založena na teorii Fourierovy transformace. Ta vychází z předpokladu, že každá periodické funkce (2.8) lze nahradit Fourierovou řadou (2.9). [7]

$$p(t) = p(t + i \cdot T) \quad (2.8)$$

Kde $i \cdot T$ je celočíselný násobek periody.

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot e^{j\omega n t} \quad (2.9)$$

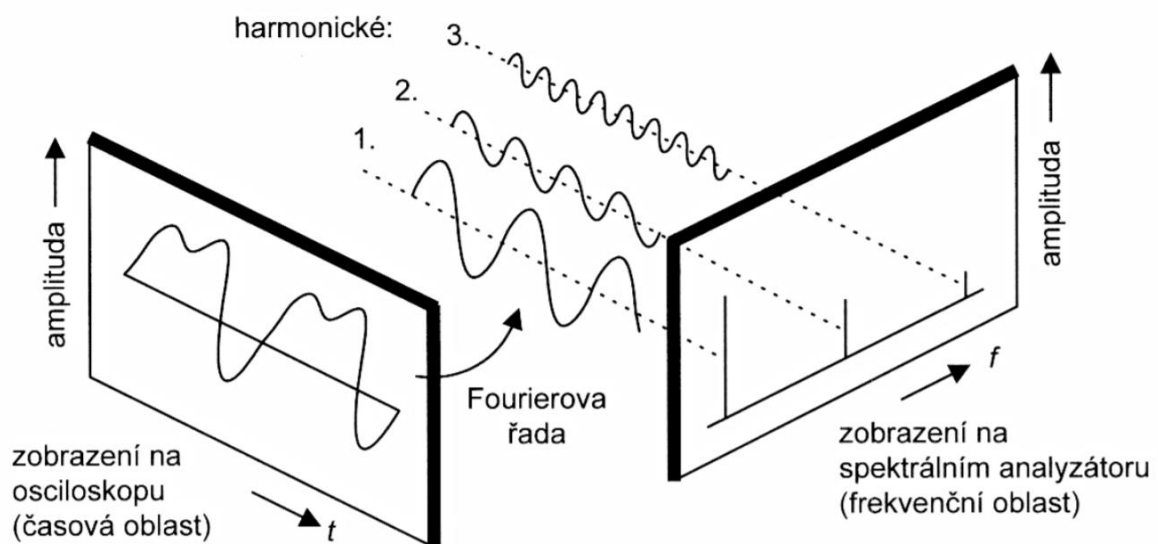
Kde P_n jsou koeficienty Fourierovy řady.

Transformace časového průběhu do frekvenční oblasti je následně dána vztahem (2.10). Tato transformace je také označována jako dopředná (forward transformation).

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (2.10)$$

V případě, že známe frekvenční charakteristiku soustavy, lze provést i takzvaná zpětná transformace do časové oblasti (inverse transformation) (2.11). [7]

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cdot e^{j\omega t} dt \quad (2.11)$$



Obr. 1.: Zobrazení signálu v časové oblasti a jeho převod do oblasti frekvenční [7]

3. Dynamika ozubených převodů

Spalovací motor nebo elektromotor je zdrojem vnějšího buzení ozubených převodů. Ozubené převody jsou ale vedle vnějšího buzení buzeny také vnitřně. Vnitřní dynamika ozubení je jedním z nejsložitějších problémů ozubení. Samotné převody, tzn. dvojice pastorek – kolo, se při přenosu výkonů projevují jako zdroje vnitřního buzení v zubových záběrech. Při uvažování poddajných hřídelů uložených v poddajných ložiskách dochází k rozkmitání hřídelové soustavy a s tím přímo související rozkmitání převodových skříní. To má za následek vyzařování hluku do okolí, který negativně ovlivňuje životní prostředí. [2]

V počátcích (20. léta 20. století) zkoumání jevů projevujících se při záběru kol byl hlavním tématem bádání výzkum rázových, přechodových jevů, vznikajících při záběru jednotlivých párů zubů. V moderním pojetí se na problematiku dynamických zatížení ozubených kol nahlíží jako na ustálené kmitání dynamické soustavy, buzení periodickou změnou tuhosti ozubení a kinematickými úchyly ozubení. [4]

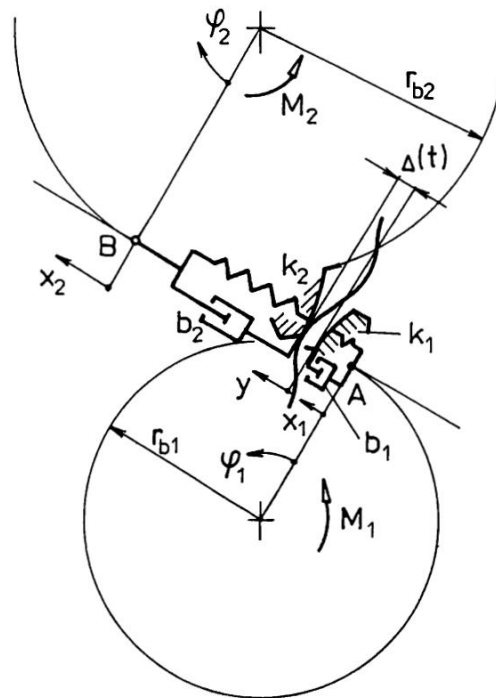
V rychlostáčkových pohonových soustavách jsou nejčastěji využívána kola se šikmým ozubením, už méně často kola s ozubením přímým. Jednotlivé zuby na ozubeném kole můžeme považovat za vetknuté nosníky, které mají vlastní ohybové vlastnosti. Proto do dynamiky ozubení a vnitřních budících účinků zahrnujeme změnu tuhosti ozubení střídáním m a $m + 1$ párů zubů¹. Dále jsou dynamické vlastnosti ozubených kol značně ovlivněny výrobní technologií, tedy rozměrovými úchyly a výškovou modifikací ozubení. Ve výpočtových modelech se tyto úchyly simulují vsouváním fiktivního klínu o šířce $\Delta(t)$ mezi ideální evolventní boky zubů (Obr.2). [3]

Podrobnější rozbor ukazuje, že nejdůležitějšími zdroji vnitřních dynamických jevů jsou:

- Periodická změna tuhosti ozubení
- Výrobní úchyly ozubení
- Prudké změny (rázy) zatížení jednotlivých párů zubů při jejich vstupu do záběru, podmíněné deformací předcházejícího či následujícího páru zubů
- Změna měrného délkového zatížení zubů způsobená změnou celkové délky dotyku zubů
- Skoková změna smyslu třecí síly ve valivém bodě následkem změny smyslu skluzové rychlosti

Při vyšetřování vnitřních dynamických zatížení se zpravidla klade důraz na první tři výše zmíněné. [4]

¹ Pro ozubená kola se šikmými zuby platí střídání dvou a tří párů zubů. Při uvažování přímých ozubení se střídá jeden a dva páry zubů.



Obr. 2.: Schéma zubového záběru [2]

3.1. Tuhost ozubení

Při otáčení soukolí s přímými zuby se v záběru střídají jeden a dva páry zubů. Je zcela pochopitelné, že při tomto opakujícím se ději dochází v oblasti záběru též k periodické změně tuhosti, která se mění v závislosti na součiniteli záběru ε . Jak se ukázalo, tato proměnná tuhost je nejzásadnějším zdrojem vnitřního buzení periodických kmitů, jak vyplývá z úvodu kapitoly 3.

Zuby ozubených kol se vlivem vnějšího zatížení deformují. Znalost deformačních vlastností je velmi důležitá pro řešení problematiky dynamického namáhání. Deformace zubů se kvantitativně vyjadřují tuhostí ozubení c , která je definována jako poměr délkového neboli šířkového zatížení w vzhledem k deformaci δ , zapsáno vztahem (3.1).

$$c = \frac{w}{\delta} \quad (3.1)$$

Vzhledem k tomu, že jednotlivé zuby jsou tvarově složité, je určení deformací a tuhostí z hlediska exaktního teoretického výpočtu značně náročné.

S tímto teoretickým problémem se lze vypořádat snáze, a to provedením experimentu. Ten spočívá v měření deformací ozubení zatíženého konstantní silou nebo seismickým měření úchylek při pomalém otáčení. [4]

3.1.1. Tuhost jednoho páru zubů

Jednopárová tuhost přímého ozubení je definována teoretickým vztahem (3.1) a z této definice plyne, že jde o tuhost šířkovou, která je vztažena na jednotku šířky ozubení. Její rozměr je tedy N/m^2 . V praxi se šířkové zatížení w nevyjadřuje v základních jednotkách, ale v N/mm . Deformace se nejčastěji uvádí v μm . Tuhost je pak udávána v netradiční jednotce $N/mm \mu m$. ($1 N/mm \mu m = 10^{-9} N/m^2$).

Tuhost a deformace se u jednotlivých párů zubů mění po dráze záběru. Největší deformaci zub vykazuje následkem ohybového namáhání, působí-li síla na vrcholu zubu.

Největší tuhost jednoho páru zubů je přibližně v polovině délky záběru a je označována jako c' , viz Obr.3. Lze tedy říci, že průběh tuhosti jednoho páru ozubení v závislosti na součiniteli trvání záběru má parabolický tvar. Deformace zubů jednoho páru ozubení může být modelově nahrazena sériovým modelem dvou pružin (Obr.4.).

Jak bylo uvedeno, s teoretickým vztahem (3.1) se vypořádává složitě, avšak pro výpočty související s dynamikou ozubení je třeba stanovit teoretický vztah pro výpočet tuhosti jednoho páru zubů i bez možnosti experimentálního měření deformací.

Tuhost jednoho páru zubů závisí především na počtu zubů pastorku a kola $z_{1,2}$, úhlu záběru α_n a korekcích $x_{1,2}$. Naopak možná překvapivě nezávisí na velikosti zubu, tedy na modulu ozubení. Se zvětšováním těchto tří charakteristických hodnot pro ozubení roste též i jeho tuhost.

Jednopárová maximální tuhost c' byla stanovena experimentálně na mnoha vzorcích a je dána empirickým vztahem² (3.2):

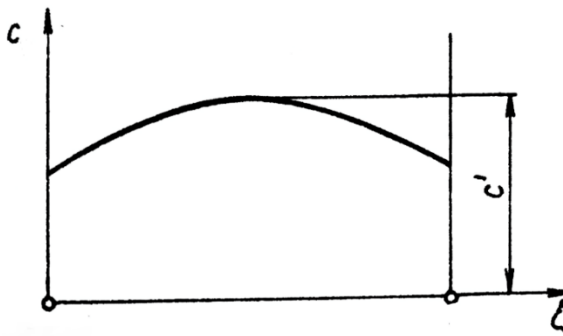
$$\frac{1}{c'} = C_1 + \frac{C_2}{z_1} + \frac{C_3}{z_2} - C_4 \cdot x_1 - C_5 \cdot \frac{x_1}{z_1} - C_6 \cdot x_2 - C_7 \cdot \frac{x_2}{z_2} + C_8 \cdot x_1^2 + C_9 \cdot x_2^2 \quad (3.2)$$

Kde z_1, z_2 značí počet zubů pastorku a kola, x_1, x_2 jednotkové korekce pastorku a kola. Jednotlivé konstanty jsou uvedeny v Tabulce 1. [2], [4], [5]

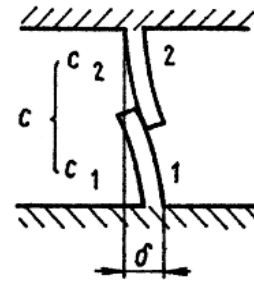
Tabulka 1.: Konstanty pro dosazení do empirického vztahu pro výpočet jednopárové tuhosti [5]

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
0,04723	0,15551	0,25791	0,00635	0,11654	0,00193	0,24188	0,00529	0,00182

² Tento vztah je určen pro ozubená kola s přímými zuby, nicméně platí i pro šikmé ozubení, za předpokladu, že je nutné na takové kolo pohlížet jako na ozubení přímé, a to pomocí použití teorie virtuálního kola.



Obr. 3.: Průběh jednopárové tuhosti přímého ozubení [4]



Obr. 4.: Model kontaktu zubů pomocí pružin [4]

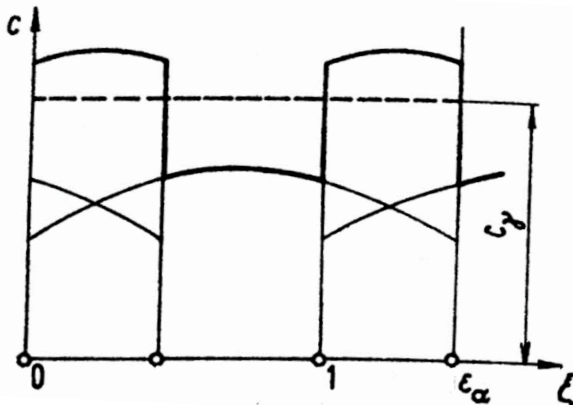
3.1.2. Tuhost dvou párů zubů

Podobně jako tuhost jednopárová, tak i tuhost dvoupárová v podstatě vychází z teoretického vztahu (3.1). Jednotlivé členy tohoto vztahu ovšem musíme uvažovat jako sumy šířkových zatížení a deformací. Výsledná tuhost ve dvoupárovém záběru je dána součtem šířkových zatížení zubů $w = w_I + w_{II}$ a výslednou deformací zubů δ . Úseku záběru dvou párů zubů odpovídá paralelní model dvou pružin (Obr. 6). Celková tuhost v průběhu odvalu není konstantní hodnota, ale ve skutečnosti je to závislost tuhosti na dráze záběru, tedy pravidelné střídání jednopárové a dvoupárové tuhosti. Viz Obr.5.

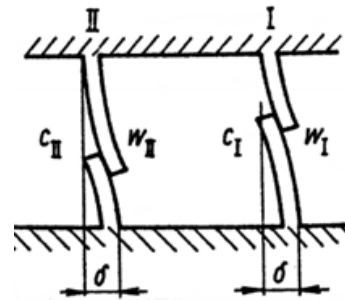
Jednoduchý dopočet dvoupárové tuhosti je složitý, podobně jako tomu bylo u výpočtu tuhosti jednopárové. Z hlediska jednoduchosti výpočtu se používá termín „záběrová tuhost“ c_γ , která se pro orientační účely přibližuje hodnotě dvoupárové tuhosti.

Záběrová tuhost je dána empirickým vztahem (3.3), který vychází z jednopárové tuhosti c' a její přímé úměrnosti na součiniteli záběru ε_α . [4]

$$c_\gamma = c' \cdot (0,75 \cdot \varepsilon_\alpha + 0,25) \quad (3.3)$$



Obr. 5.: Průběh celkové tuhosti přímého ozubení [4]



Obr. 6.: Model kontaktu zubů pomocí pružin [4]

3.1.3. Tuhost ozubení a její závislost na čase

Ve dvou předchozích podkapitolách bylo nastíněno, jak se dopracovat k jednopárové a dvoupárové tuhosti. To všechno právě proto, abychom byli schopni tyto hodnoty dosadit do následujících matematických řad a získat pro dynamickou analýzu potřebnou tuhost, tentokrát závislou na čase, nikoliv dráze odvalu.

Pokud budeme uvažovat ozubení a jeho rovnoměrné otáčení, jeho tuhost je reprezentována sudou funkcí. Pro tuto její vlastnost ji lze vyjádřit pomocí Fourierovy řady, která je zadána následujícím zápisem (3.4). [2]

$$k(t) = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot \cos n\omega t \quad (3.4)$$

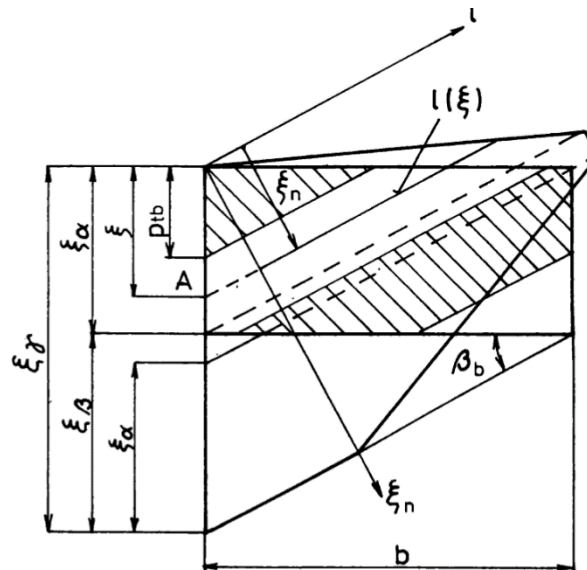
Kde:

- k_0 je střední tuhost
- k_n je amplituda tuhosti závislá na n násobku zubové frekvence ω .
- $\omega = z_1\omega_1 = z_2\omega_2$ ($z_{1,2}$ je počet zubů pastorku a kola, $\omega_{1,2}$ je úhlová rychlost pastorku a kola)

Pokud kmitání ozubení vyšetřujeme analyticky, využíváme toho, že průběh $k(t)$ můžeme nahradit po částech konstantními tuhostmi v závislosti na bezrozměrném čase $\tau = \omega \cdot t$. (Obr.8.) Při střídání m a $m + 1$ párů zubů v záběru a při hodnotě součinitele trvání záběru ε z intervalu $\langle m; m + 1 \rangle$ má Fourierova řada tvar (3.5):

$$k(\tau) = k_{(m)} + \Delta k \cdot (\varepsilon - m) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Delta k}{\pi n} \cdot \sin[\pi n \cdot (\varepsilon - m)] \cdot \cos n\tau \quad (3.5)$$

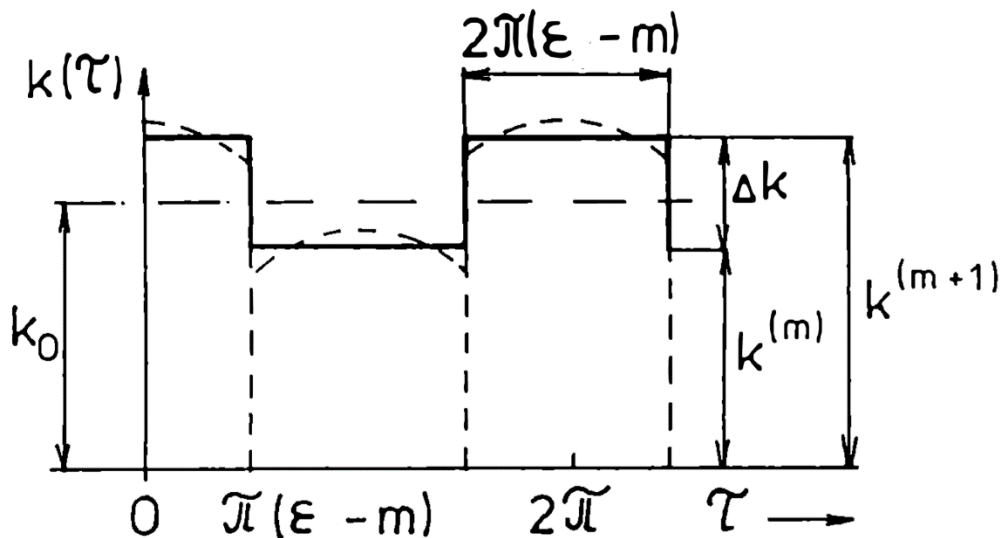
$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \frac{\xi_\alpha}{p_{tb}} + \frac{\xi_\beta}{p_{tb}} \quad (3.6)$$



Obr. 7.: Schéma pro součinitele záběru [2]

- ε_α je součinitel záběru evolventou
- ε_β je součinitel záběru krokem
- ξ_α je délka záběru zubů profilu v čelní rovině
- ξ_β je délka záběru krokem daná šířkou ozubení a úhlem sklonu zubů
- p_{tb} je základní rozteč v čelní rovině

Ve Fourierově řadě (3.5) je $k_{(m)}$ tuhost ozubení při záběru m párů zubů a $\Delta k = k_{(m+1)} - k_{(m)}$ je rozdílem tuhostí při záběru $m + 1$ a m párů zubů. [2]



Obr. 8.: Vyjádření celkové tuhosti pomocí Fourierovy řady [2]

Pokud chceme provádět zjednodušený výpočet a zanedbat časovou proměnlivost tuhosti ozubení, můžeme přijmout zjednodušující předpoklady a těmi zajistit konstantní hodnotu této tuhosti.

Vyjdeme z Fourierovy řady (3.5), pro které zavedeme tyto vstupní podmínky:

1. Pro výpočty s ozubením přímým (tedy $\beta = 0$)
 - $m = 1$ (jednopárový kontakt)
 - $\varepsilon = 1$ (idealizovaná hodnota)

2. Pro výpočty se zuby šikmými ($\beta > 0$)
 - $m = 2$ (dvoupárový kontakt)
 - $\varepsilon = 2$ (idealizovaná hodnota)

Tím se z původní řady stane pouze konstantní hodnota (3.7), vhodná pro výpočty zahrnující v čase neměnnou tuhost ozubení. [6]

$$k = k_{(m)} \quad (3.7)$$

3.2. Kinematická úchylka převodového poměru

Dalším významným zdrojem vnitřního buzení jsou výrobní úchylky ozubení, které se souhrnně označují jako kinematické úchylky převodového poměru – ve světové literatuře též označovány jako chyba převodu (transmission error).

Z hlediska výpočtu je zapotřebí ji převést do matematické formy, aby bylo možné tuto úchylku zahrnout do výpočtu. Taková úchylka lze simulovat pomocí myšleného „klínu“, který má proměnnou šířku $\Delta(t)$. Ten je vkládán mezi spoluzabírající zuby pastorku a kola.

Kinematická úchylka vyjadřuje vliv geometrické nepřesnosti ozubeného převodu na přenos pohybu. Klín, který ji představuje, zapříčiňuje přibližování a oddalování zubů pastorku a kola od sebe, a tím způsobuje urychlování kola proti pastorku.

Podobně, jako lze časově závislá tuhost ozubení vyjádřit řadou – periodickou funkcí času, lze vyjádřit i kinematická úchylka převodu (3.8).

$$\Delta(t) = \Delta \cos\left(\frac{d}{z_1 z_2} \omega t + \gamma_0\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \quad (3.8)$$

Kde členy této řady mají tento význam:

- Δ_k – amplituda harmonické složky s frekvencí $k\omega$
- γ_k – fázový úhel harmonické složky s frekvencí $k\omega$

Zde je $\omega = z_1\omega_1 = z_2\omega_2$ zubová frekvence, tedy součin počtu zubů a úhlové rychlosti jednotlivých ozubených kol v záběru.

- Δ – amplituda harmonické složky odpovídající tzv. úplnému cyklu odvalu
- γ_0 – fázový úhel harmonické složky odpovídající tzv. úplnému cyklu odvalu.

Úplný cyklus odvalu znamená, že do záběru přijdou opět stejné zuby obou kol.

Další člen řady d je největší společný dělitel zubů z_1 a z_2 . [2]

Využití Fourierovy řady (3.8) pro úchylku převodu není jedinou možností, jak přistupovat k modelování této výrobní chyby převodu. Ve světové literatuře popisující problematiku záběru ozubených kol a jejich dynamiku mnohem častěji figuruje značně jednodušší vyjádření pro tzv. transmission error. Kinematická úchylka převodu se též aproximuje harmonickou funkcí (3.9):

$$\Delta(t) = \Delta \sin(\omega t) \quad (3.9)$$

Kde Δ je označována jako error fluctuation – amplituda chyby a $\omega = z_1\omega_1 = z_2\omega_2$ je zubovou frekvencí. [8]

Chybovou amplitudu získáme pomocí předpisu kinematické přesnosti pro ozubená kola z výpočtových vztahů z Tabulek 2 a 3.

V následujících výpočtech je toto buzení modelováno a dáno harmonickou funkcí (3.9).

Tabulka 2.: Předpis kinematické přesnosti [5]

Předpis kinematické přesnosti (5. stupeň přesnosti)			
Ukazatel přesnosti	Výpočtové vztahy [μm]		
	ČSN 01 4682/1982	ČSN ISO 1328-1/1997	DIN 3961/1978
obvodové házení ozubení F_r (obr. 3.2)	menší z hodnot $1,4m + 0,35\sqrt{d} + 18$ $0,63m + 0,88\sqrt{d} + 7,5$	neuvádí se	$1,68 + 2,18\sqrt{m} + (2,3 + 1,2 \log m) \cdot \sqrt[3]{d}$
součtová úchylka roztečí F_p (obr. 3.3)	$2\sqrt{d} + 4$	$0,3m + 1,25\sqrt{d} + 7$	$7,25 \cdot \sqrt[3]{d} / \sqrt[3]{z}$
kolísání tloušťky zubu F_{vw} (R_s)	$F_{vw} = 2 \cdot \sqrt[3]{d} + 0,02d$ (kolísání rozměru přes zuby)	neuvádí se	$R_s = 0,59F_r \doteq 0,52F_i''$
úchylka dvoubokého odvalu za otáčku F_i'' (obr. 3.1)	$1,4 \cdot F_r$	neuvádí se	$2 + 2,57\sqrt{m} + (3,12 + 0,432 \log m) \cdot \sqrt[3]{d}$
kinematická úchylka kola F_i'	$F_p + f_f$	$F_p + f_i'$	$0,8(F_p + F_f)$
	hodnoty f_f , f_i' a F_f dle tab. 3.2		

Tabulka 3.: Předpis plynulosti chodu [5]

Předpis plynulosti chodu (5.stupeň přesnosti)			
Ukazatel přesnosti	Výpočtové vztahy [μm]		
	ČSN 01 4682/1982	ČSN ISO 1328-1/1997	DIN 3961/1978
úchylka čelní rozteče $\pm f_{pt}(f_p)$ (obr. 3.4a)	$0,4m + 0,1\sqrt{d} + 5$	$0,3m + 0,12\sqrt{d} + 4$	$0,315m + 0,079\sqrt{d} + 4$ (označení f_p)
úchylka základní rozteče $\pm f_{pb}(f_{pe})$ (obr. 3.4b)	$f_{pt} \cdot \cos \alpha$	$f_{pt} \cdot \cos \alpha$	$f_{pe} = f_p$
úchylka sousedních roztečí f_u (obr. 3.3)	$1,25 \cdot f_{pt} $	neuvádí se	$0,4m + 0,1\sqrt{d} + 5$
úchylka profilu $F_\alpha(f_f, F_f)$ (obr. 3.5)	$0,4m + 0,005d + 5$ (označení f_f)	$3,2\sqrt{m} + 0,22\sqrt{d} + 0,7$	$F_f = \sqrt{f_{H\alpha}^2 + f_f^2}$
úchylka tvaru profilu $f_{fa}(f_f)$ (obr. 3.5)	neuvádí se	$2,5\sqrt{m} + 0,17\sqrt{d} + 0,5$	$0,25m + 2,15\sqrt{m} + 1,5$ (označení f_f)
úchylka úhlu profilu $f_{H\alpha}$ (obr. 3.5)	neuvádí se	$2\sqrt{m} + 0,14\sqrt{d} + 0,5$	$0,25m + 0,75\sqrt{m} + 2,5$
úchylka dvoubokého odvalu za rozteč f_i'' (obr. 3.1)	$0,63m + 0,16\sqrt{d} + 8$	neuvádí se	$1,8\sqrt{m} + 1,6\sqrt{d} - 1$
místní kinematická úchylka kola f_i'	$ f_{pt} + f_f$	$(4,3 + f_{pt} + F_\alpha) \cdot k$ $k = 0,2 \frac{\varepsilon_\gamma + 4}{\varepsilon_\gamma} \geq 0,4$	$0,7(f_p + F_f)$

Tabulka 4.: Koeficienty pro výpočet úchylek v libovolném stupni přesnosti [5]

norma	Ukazatel přesnosti	Stupeň přesnosti Q											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ISO- ČSN 1328-1	Všechny	$\sqrt{2} = 1,414$											
	K_Q	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4	5,66	8	11,3
ČSN 014682	f_f, f_i''	1,4											
	K_Q	0,5	0,7	1	1,4	2	2,7	3,8	5,4	7,5	10,5		
	F_β	1,3											
	K_Q	0,6	0,77	1	1,3	1,7	2,7	4,3	6,9	11	17,7		
	F_r, F_i'' f_{pt}, F_{vw}	1,6											
	K_Q	0,4	0,63	1	1,6	2,2	3,2	4,4	6,1	8,6	12		
DIN 3961	F_r, F_i'' f_i''	1,4											
	K_Q	0,26	0,36	0,5	0,7	1	1,4	2	2,7	3,8	5,4	7,5	10,5
	F_β	1,25											
	K_Q	0,41	0,51	0,64	0,8	1	1,4	2	2,7	4,4	7,0	11,2	18
	$f_{H\beta}$	1,32											
	K_Q	0,33	0,43	0,57	0,76	1	1,4	2	2,7	4,3	6,6	10,2	16
	f_f, f_{Ha}, F_f f_p, f_u, F_p F'_i, f'_i	1,4											
	K_Q	0,26	0,36	0,5	0,7	1	1,4	2	2,7	3,8	6,1	9,8	15,7
		1,6											

V Tabulce 4. jsou uvedeny koeficienty q a násobky velikosti úchylek K_Q v porovnání s 5. stupněm přesnosti, kde Q_i je příslušná úchylka v i -tém stupni přesnosti. [5]

$$q = \frac{Q_i}{Q_{i-1}};$$

$$K_Q = \frac{Q_i}{Q_5}$$

4. Přehled problematiky

V této části diplomové práce je shrnuta problematika dynamiky ozubení s ohledem na modelování časově proměnné tuhosti během záběru zubů a kinematických úchylek formou rešerše odborných článků a závěrečných prací dostupných na webu. Úkolem této kapitoly je poukázat na různorodé možnosti přístupů k danému tématu a rozšířit povědomí o modelování ozubení s reálnými vlastnostmi, kromě již zmíněné tuhosti a kinematické úchlky, též vylomených zubů čili poruchovými vstupy do výpočtu.

4.1. Vibration mechanisms of spur gear pair in healthy and fault states

Autoři: Yongzhuo Li, Kang Ding, Guolin He, Huibin Lin

Pracoviště: School of Mechanical and Automotive Engineering (South China University of Technology)

V článku, který vychází z publikace *Mechanical Systems and Signal Processing*, se autoři zabývají problematikou frekvenčních složek převodového mechanismu s využitím teorie dynamiky ozubení a zjednodušujících teoretických východisek.

Předmětem výzkumu je výpočet a porovnání dynamiky jednostupňového převodu s neporušenými zuby a zuby s vruby, či jinými poruchovými výpočtovými vstupy, jako jsou například vylomené zuby z věnce ozubeného kola.

Autoři popsali harmonické frekvenční složky při odvalu, které se obvykle vyskytují ve frekvenčním spektru převodových systémů.

Jejich teoretické výpočty byly následně experimentálně ověřeny.

Výpočet tuhosti ozubení vychází z klasického dynamického modelu (podobného jako v publikaci *Základy dynamiky strojů – Slavík, Stejskal, Zeman [2]*), který je využit i v mojí práci.

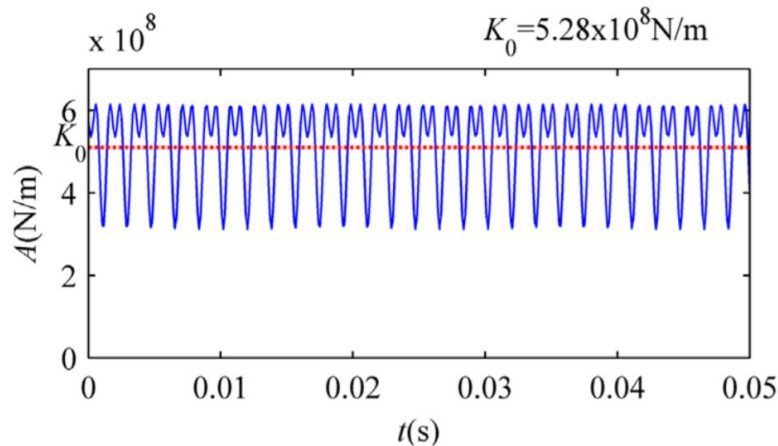
Tuhost ozubení je modelována pomocí Fourierovy řady, kterou autoři zapisují ve tvaru (4.1):

$$k(t) = K_0 + k_1(t) = K_0 + \sum_{m=1}^M K_m \cos(2\pi m f_z t + \varphi_m) \quad (4.1)$$

Kde:

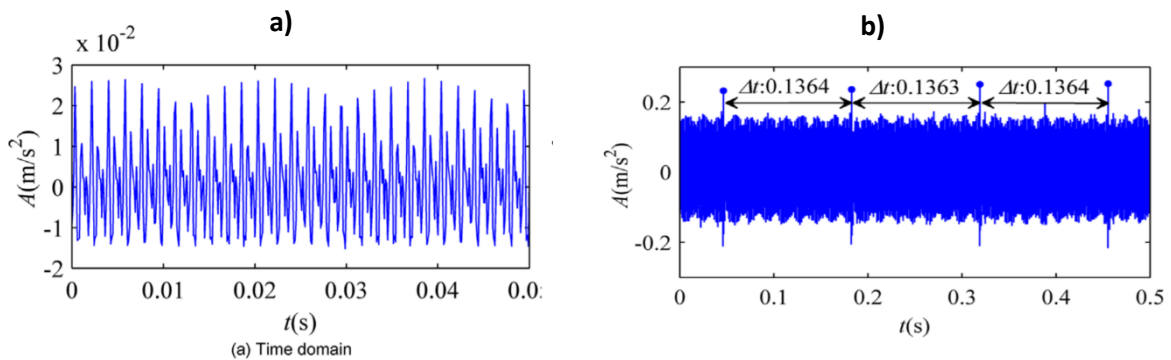
- K_0 je střední hodnota časově závislé tuhosti
- K_m je amplituda časově závislé tuhosti
- $2\pi f_z$ je zubová frekvence
- t je čas
- φ_m fázový úhel natočení

Pro parametry testované převodovky je průběh této tuhosti zobrazen na Obr.9.



Obr. 9.: Lineární časově proměnná tuhost v závislosti na čase [9]

Ozubený převod modelovaný s vylomeným zubem vychází z původního dynamického popisu, avšak je doplněn o periodické impulsy, které jsou popsány řadou závislejších na amplitudě impulsu a periodě poruchové veličiny. (Obr.10)



Obr. 10.: Porovnání průběhu zrychlení a) nepoškozeného převodu a b) převodu s vylomeným zubem [9]

Úchylka převodového poměru byla v tomto případě definována periodickou funkcí cosinového průběhu, s periodou kinematické úchylky a zubovou frekvencí. Úchylka převodu je zde považována za tzv. stabilní poruchu.

Ověřovací experiment byl proveden: na jednostupňové testovací převodovce bez závady ozubení, na jednostupňové převodovce s vylomeným zubem a na pětistupňové automobilové převodovce. [9]

4.2. Nonlinear dynamic modelling and analysis for a spur gear system with time-varying pressure angle and gear backlash

Autoři: Yong Yi, Kang Huang, Yangshou Xiong, Meng Sang

Pracoviště: School of Mechanical Engineering (Hefei University of Technology – Čína)

Autoři tohoto článku v publikaci *Mechanical Systems and Signal Processing* zahrnují do výpočtu poddajnost hřídelů a deformaci ložisek. V závěru práce porovnávají vypočtené hodnoty nového modelu s modelem, který jejich předpoklady nezahrnuje. Poddajnost uložení jednotlivých ozubených kol způsobuje nedokonalý převodový záběr, a tím vede na odlišné výsledky než při uvažování absolutně tuhých hřídelů. Jejich dynamický model zohledňuje: časově proměnný úhel, pod kterým je zubový pár zatěžován, úchytku převodového poměru, časově závislou tuhost ozubení a další účinky, jako např. gravitační účinky, nevývažky rotujících hmot atd.

Pro sestavení matematického modelu bylo využito Lagrangeových rovnic, které byly řešeny numerickou integrací. Model vychází z nové analytické metodologie od autorů Theodossiades a Natsiavase, která slouží k popisu periodických pohybů ozubených převodů v ustáleném stavu a jejich stabilních vlastností. Další teorie uplatněná v této práci pochází od Al-shyyaba a Kaharmana, kteří navrhli dynamický nelineární a časově proměnlivý model typizovaného soukolí, který slouží k identifikaci chaotických pohybů pomocí metody harmonické rovnováhy ve spojení s diskretními Fourierovými transformacemi.

Práce poukazuje na to, že zvláště proměnlivost úhlu zatěžující síly a zubové vůle může způsobit chaotický pohyb a společné nárazy zubů.

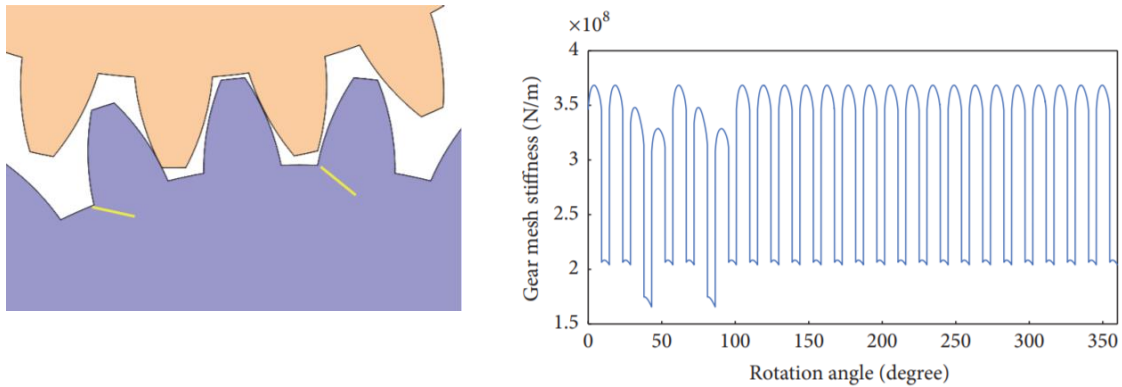
Pro výpočet proměnlivé tuhosti ozubení je využito metody potenciální energie. Zároveň se zub uvažuje jako idealizovaný nosník vetknutý v patě zubu a dále se ve výpočtu uvažuje i nesouosost mezi kružnicí patní a základní kružnicí. [10]

4.3. Model-Based Analysis of Spur Gears' Dynamic Behavior in the Presence of Multiple Cracks

Autoři: Ahmed Saeed Mohamed, Sadok Sassi, Mohammad Roshun Paurobally

Pracoviště: Department of Mechanical and Industrial Engineering (Qatar University)

Tento vědecký článek se zabývá problematikou trhlin zubů a důležitostí detekce iniciace malých trhlin konkrétně v převodových mechanismech. Výsledkem práce je vibrační chování čelních ozubených kol v přítomnosti jednoduchých i více násobných trhlin, které jsou iniciovány v patách zubů v přechodové křivce. V této práci byly navrženy čtyři různé možnosti vícenásobných trhlin a následně byly tyto možnosti otestovány. Zkoumán byl také vliv trhliny na proměnlivou tuhost ozubení. Dále byly sledovány frekvenční odezvy převodovky s více vruby při posuzování závažnosti poruch.



Obr. 11.: Průběh tuhosti ozubení s vytvořenými vruby [11]

Na Obr.11 lze pozorovat pokles tuhosti záběru v důsledku trhliny, která je v 30% dráhy svého šíření. [11]

4.4. Transmission Error Analysis and Disturbance Optimization of Two-Stage Spur Gear Space Driven Mechanism with Large Inertia Load

Autoři: Jianfeng Ma, Chao Li, Lingli Cui

Pracoviště: Key Laboratory of Advanced Manufacturing Technology (Beijing University of Technology)

Tato výzkumná zpráva popisuje model dvoustupňové převodovky využívané pro hnací ústrojí kosmických strojů, se zahrnutím proměnlivé tuhosti a tlumení, ale především se zabývá zohledněním úchylky profilu zubu, úchylky čelní rozteče a úchylkou úhlu profilu zubů pro popis chyby přenosu zátěže. Co nejpřesnější přenos je v této aplikaci důležitý kvůli velkým setrvačným hmotám celého hnacího ústrojí a je nutné zajistit spolehlivost, dobrou životnost a bezpečnost převodového systému. Dle tohoto výpočtu byla navržena úprava pro skutečnou převodovku a zmíněná chyba přenosu byla snížena o 60,7 %. Autoři tudíž dosáhli lepšího přenosu sil a eliminaci poruchového přenosu.

Chyby přenosu jsou zde modelovány pomocí vztahů (4.2) a (4.3):

$$e_{PE}(s) = f_{h\alpha} \frac{s - s_0}{s_f - s_0} + \frac{f_{f\alpha}}{2} \sin \left(2\pi f_r \frac{s - s_0}{s_f - s_0} \right) \quad (4.2)$$

Kde:

- s – délka dráhy odvalu
- s_0 – minimální poloměr zakřivení profilu zubu
- s_f – maximální poloměr zakřivení profilu zubu
- f_r – je poměr celkové délky každého profilu a cyklu zubu
- $f_{h\alpha}$ – úchylka úhlu profilu
- $f_{f\alpha}$ – úchylka tvaru profilu

$$e_{pt}(\theta) = \sum_{n=1}^N A_n \sin \left(n \cdot \text{floor} \left(\frac{\theta}{\theta_p} \right) \cdot \theta_p \right), \theta_p = \frac{2\pi}{Z} \quad (4.3)$$

Kde:

- n – počet harmonických
- θ – natočení kola
- Z – počet zubů kola
- A_n – amplituda Index erroru
- floor – dikrétní funkce která zaokrouhluje podíl na nejbližší vyšší celé číslo

[12]

4.5. Quasi-Static and Dynamic Behaviors of Helical Gear System with Manufacturing Errors

Autoři: Bing Yuan, Shan Chang, Geng Liu, Li-Yan Wu

Pracoviště: Chinese Journal of Mechanical Engineering

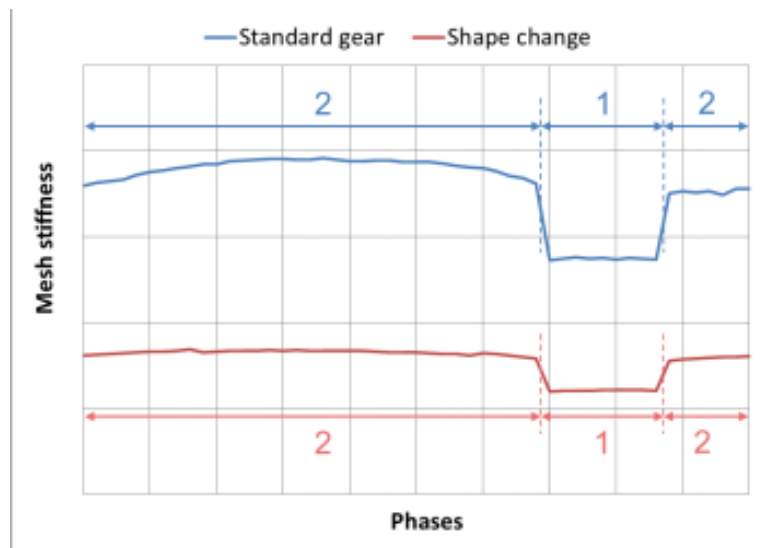
Tento článek pojednává opět o rozdílnosti klasické kvazistatické a dynamické analýzy převodového mechanismu oproti analýze, která zahrnuje časově proměnnou tuhost zubů v záběru a chyby přenosových vlastností. Model zmíněný v této publikaci je doplněn o vlastnosti hřídelů, polohu ložisek – uložení atd. [13]

4.6. Precise Calculation of Mesh Stiffness Fluctuation for Predicting Gear Noise

Autoři: Katsuya Koide, Kenji Abe P.E.

Pracoviště: CAE Engineering Department, Nabtesco Corporation, Japan

Tento publikace je spíše komerčního charakteru a slouží k propagaci možností firmy Nabtesco sídlící v Japonsku. Tato firma vyrábí redukční převodovky pro různorodé průmyslové aplikace. Hlavní otázkou, kterou se tato firma zabývá, je hlučnost převodových mechanismů. Hlučnost, která souvisí s tvarem ozubení a tuhostí zubů v záběru je eliminována na základě modelování „přesného“ výpočtu tuhosti zubů. Díky tomuto výpočtu je firma schopna upravovat a optimalizovat tvary zubů.



Obr. 12.: Porovnání neoptimalizovaných zubů s optimalizovanými [14]

Optimalizovaný tvar zubů (Obr.12 – červená křivka) sice způsobí menší tuhosti v průběhu záběru (oproti standardnímu neupravenému kolu – modrá křivka), ale také zmenší rozdíl mezi jednopárovou a dvoupárovou tuhostí, čímž se snižuje hlučnost navrhované převodovky. [14]

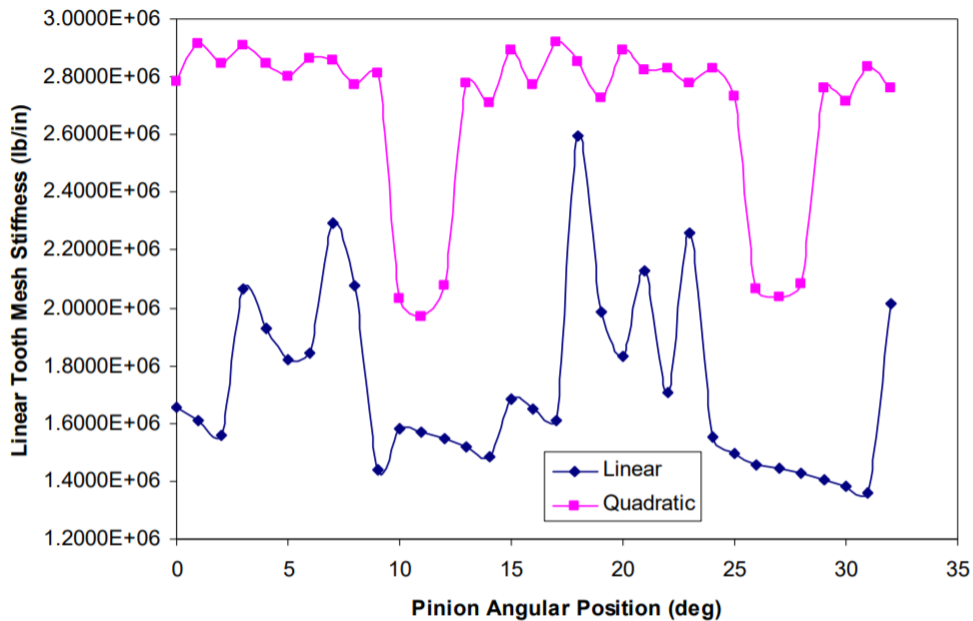
4.7. Non.Linear Contact Analysis of Meshing Gears

Autor: Chun Hung Lee

Pracoviště: The Faculty of California Polytechnic State University, San Luis Obispo

Diplomová práce od autora Chun Hung Lee se zabývá obecnou teorií ozubení, s tím souvisejícími výpočty a v neposlední řadě právě zohledněním záběrové tuhosti, modelováním zubových trhlin a vad. Co se týká teoretických východisek a výpočtů, ve velké míře tato práce vychází z článku *A Comparison of Gear Mesh Stiffness Modeling Strategies* [16], jehož autoři jsou: Jim Meagher, Xi Wu, Dewen Kong. Podstatná část diplomové práce se věnuje modelování soukolí ve výpočtovém softwaru Abaqus CAE a teorií metody konečných prvků s tím související.

Dílním výsledkem je porovnání využití lineárních a kvadratických elementů pro výpočet (Obr.13). Je vidět, že volba elementů je pro výpočet zásadní, co se týká přesnosti výpočtu.

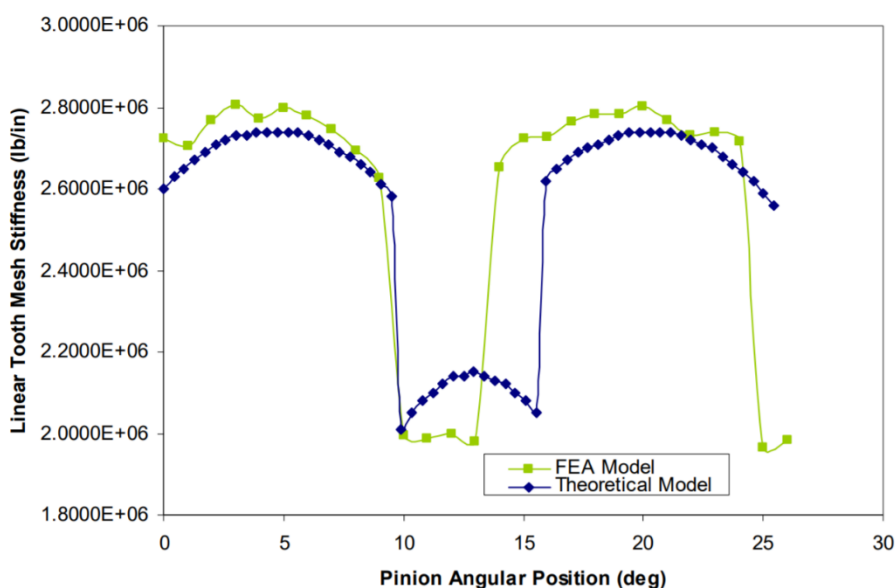


Obr. 13.: Porovnání výpočtu tuhosti s použitím lineárních a kvadratických elementů [15]

Dále autor porovnává vliv hustoty sítě a její kvality na výslednou tuhost zubů a následně je srovnávána tuhost ozubení bez vad s ozubeným kolem s vymodelovanou trhlinou v zubu.

Práce je doprovázena i praktickým experimentem, ve kterém autor porovnává vypočtené frekvence zkušebního převodového mechanismu s naměřenými hodnotami.

Následně je také porovnána tuhost ozubení vypočtena pomocí softwaru Abaqus CAE s teoretickým modelem, který vychází z práce [15]. (Obr.14)



Obr. 14.: Porovnání teoretického modelu tuhosti s vypočteným v Abaqus CAE [15]

Teoretický model je určen z obecného vztahu pro výslednou poddajnost zubů (4.4):

$$C = \frac{1}{L} \left[\int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} + \frac{P}{EA} \frac{\partial P}{\partial F} + \frac{6V}{5GA} \frac{\partial V}{\partial F} \right] dx + \frac{6W}{\pi^2 r^2 G} + \frac{4(1-\nu^2)^2}{\pi EW} \quad (4.4)$$

Tento teoretický vztah bere v úvahu složku krutu, tlaku a ohybu. [16]

4.8. Calculation of the Combined Torsional Mesh Stiffness of Spur Gears with Two- and Three- Dimensional Parametrical FE Models

Autoři: Timo Kiekbusch, Daniel Sappok, Bernd Sauer, Ian Howard

Pracoviště: University of Kaiserslautern, Institute for Machine Elements, Gears and Transmissions, Německo
Curtin University Perth, Department of Mechanical Engineering, Austrálie

Tento text se zabývá modelováním dvourozměrných a trojrozměrných modelů převodových systémů v softwaru pro výpočty metodou konečných prvků ANSYS, které slouží pro výpočty tuhostí věnců ozubených kol. 2D výpočet umožňuje rychlejší zpracování modelu. 3D model umožňuje následné upravování a modifikace zubů. [17]

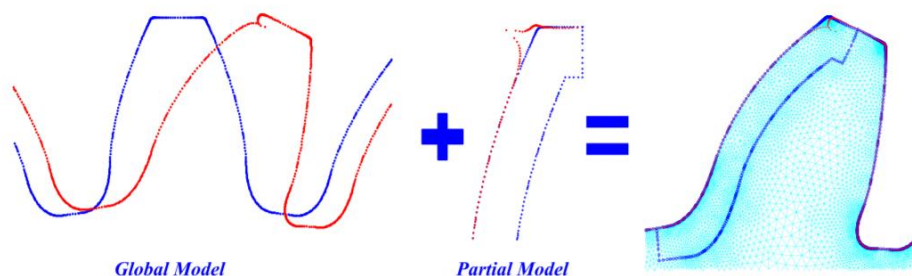
4.9. A Model for the Study of Meshing Stiffness in spur gear transmission

Autoři: A. Fernandez del Rincon, F. Viadero, M. Iglesias, P. García, A. de-Juan, R. Sancibrian

Pracoviště: Department of Structural and Mechanical Engineering, University of Cantabria – Španělsko

Článek od těchto autorů popisuje pokročilý model vhodný pro analýzu kontaktních sil a deformací v čelních převodových mechanismech. Deformace je zde formulována jako kombinace globálního a lokálního členu v každém kontaktním bodě. Globální člen je získán pomocí modelu konečných prvků a druhý člen je odvozen na základě Hertzových kontaktních tlaků (Obr. 15).

I v tomto případě jsou zohledňovány výrobní chyby profilu zubů, chyby přenosů silového zatížení, statická chyba přenosu a dynamická chyba přenosu. [18]



Obr. 15.: Deformace globálního a lokálního členu [18]

4.10. Dynamic Model of a Helical Gear Pair with Backlash and angle – Varying Mesh Stiffness

Autoři: Miguel Amezketa, Xabier Iriarte, Javier Ros, Jesús M. Pintor

Pracoviště: Applied and Computational Mechanical Engineering Public University of Navarra – Španělsko

Stejně jako předchozí práce se i tato zabývá dynamickým modelem ozubených kol v záběru. Na úvod je zde naznačeno sestavení rovnic pro čistě torzní model pastorku a kola v záběru se dvěma stupni volnosti. Dále je rozšiřován na model doplněný i o uložení v ložiskách s dvanácti stupni volnosti. Kontakt ozubených kol je reprezentován časově proměnnou tuhostí v průběhu záběru, chybami přenosu a zubovou vůlí. Naopak se v dynamickém popisu neuplatňuje tlumení ani skluzové tření zubů.

Časově proměnná tuhost v teoretickém výpočtu není získána pomocí Fourierovy řady pro tuhost zubů, ale vychází ze vztahu pro deformaci zubu určenou takto (4.5):

$$\begin{aligned} \delta = & (x_1 \cdot \sin \psi_1 - x_2 \cdot \sin \psi_2 - y_1 \cdot \cos \psi_1 + y_2 \cdot \cos \psi_2 - u_1 - u_2) \\ & \cdot \text{sign}(\alpha_t) \cdot \cos \beta_b \\ & - (z_1 - z_2 + w_{X1} \cdot \sin \psi_1 + w_{X2} \cdot \sin \psi_2 - w_{Y1} \cdot \cos \psi_1 + w_{Y2} \\ & \cdot \cos \psi_2) \cdot \text{sign}(\alpha_t) \cdot \sin \beta_b \end{aligned} \quad (4.5)$$

Jednotlivé veličiny ze vztahu (4.5) nejsou v této práci popsány. [19]

5. Návrh čelní jednostupňové převodovky

Pro tuto diplomovou práci byla nejprve navržena vhodná převodovka pro názorný výpočet jejího dynamického chování. Konkrétně byla zvolena jednostupňová čelní převodovka s přímým ozubením. Ozubení této převodovky bylo následně využito pro výpočet torzního kmitání a dalších požadovaných výpočtů.

5.1. Parametry převodového mechanismu

Pohon:

Pro pohon převodovky byl využit výkon elektromotoru, který byl zvolen na základě orientačního intervalu 2 – 10 kW.

Tabulka 5.: Parametry pohonu

Výkon [kW]	5,5
Otáčky [min⁻¹]	950

Převod:

Hodnota převodu byla zvolena tak, aby se pohybovala okolo hodnoty 5, tudíž i , ideální hodnota převodu, činí 4,7. Vypočtené skutečné převodové číslo vychází z volby a výpočtu počtu zubů pastorku a kola. Vypočtené hodnoty jsou uvedeny v Tabulce 6.

Tabulka 6.: Počet zubů pastorku, kola a hodnota skutečného převodového čísla

z_1 [-]	25
z_2 [-]	118
i_{12} [-]	4,72

Skutečný převod vyhovuje návrhu. Odchylka skutečného převodu od ideálního se může lišit nejvýše o 4 %, což je splněno.

Kroutící momenty:

Kroutící momenty vycházejí z hodnot uvedených v Tabulce 5. a Tabulce 6., konkrétně z výkonu P a otáček n elektromotoru. Dále bylo využito hodnoty skutečného převodového poměru i_{12} a hodnoty účinnosti čelního soukolí η , která v tomto případě činí 0,98.

Tabulka 7.: Vypočtené momenty na pastorku a kole

$M_{k\text{ elm}} = M_1$ [Nm]	55,29
$M_2 = M_B$ [Nm]	255,73

Parametry soukolí:

Charakteristické hodnoty navržených ozubených kol soukolí převodovky jsou pro přehlednost uvedeny v následující Tabulce 8.

Tabulka 8.: Parametry soukolí

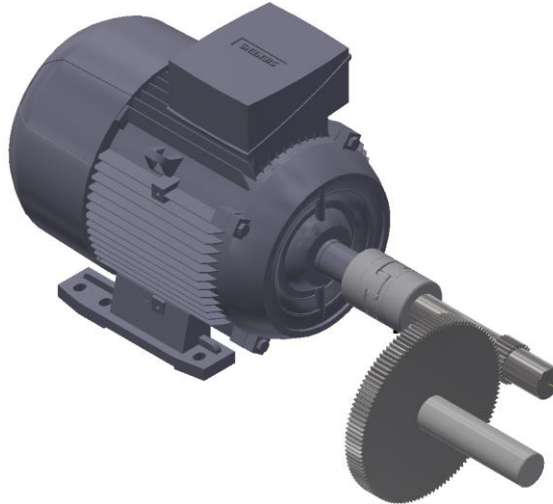
Název	Značka	Hodnota		Jednotka
		Pastorek ³	Kolo ⁴	
Modul	m_n	1,75		[mm]
Počet zubů	z	25	118	-
Jednotková korekce	x	-0,071158	0	-
Boční vůle	c_n	0,07		-
Úhel záběru	α_n	20		[°]
Úhel sklonu	β	0		[°]
Úhel valivý	α_w	19,84		[°]
Osová vzdálenost	a_w	125		[mm]
Šířka kola	b	27	23	[mm]
Šířka záběru	$b_{1,2}$	23		[mm]
Průměr roztečné kružnice	d	43,75	206,5	[mm]
Průměr hlavové kružnice	d_a	47,00	210,00	[mm]
Průměr patní kružnice	d_f	39,13	202,13	[mm]
Průměr základní kružnice	d_b	41,11	194,05	[mm]
Průměr valivé kružnice	d_w	43,71	206,29	[mm]
Výška hlavy	h_a	1,63	1,75	[mm]
Výška paty	h_f	2,31	2,19	[mm]
Výška zubu	h	3,94	3,94	[mm]
Tloušťka zubu	s_n	2,58	2,75	[mm]
Tloušťka mezery	v_n	2,91	2,75	[mm]

³ Parametry související s pastorkem jsou vždy v následujícím textu označovány spodním indexem 1.

⁴ Parametry související s kolem jsou vždy v následujícím textu označovány spodním indexem 2.

Ilustrativní model:

Schematický 3D model vypočítané převodovky byl vytvořen v softwaru Autodesk Inventor.



Obr. 16.: Model navržené převodovky pro výpočet

5.2. Vstupní hodnoty důležité pro výpočet dynamického chování

V následující tabulce jsou shrnuty všechny podstatné vstupní hodnoty pro výpočet dynamického chování torzní soustavy převodového mechanismu. Viz Tabulka 9.

Tabulka 9.: Vstupní hodnoty pro dynamický výpočet

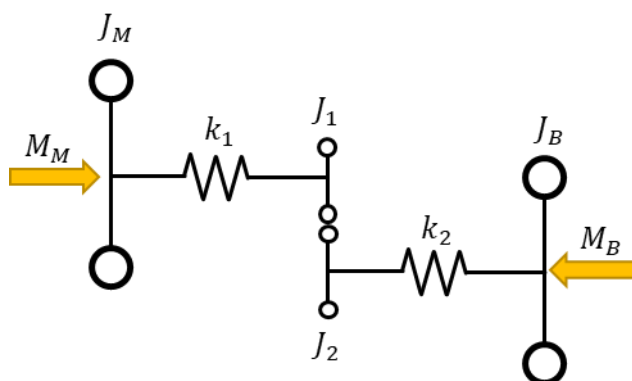
Název	Značka	Hodnota	Jednotka
Moment setrvačnosti motoru	J_M	0,027	[kgm ²]
Moment setrvačnosti pastorku	J_1	0,000384	[kgm ²]
Moment setrvačnosti kola	J_2	0,032014	[kgm ²]
Moment setrvačnosti brzd	J_B	0,027	[kgm ²]
Torzní tuhost spojky	k_1	10900	[Nm/rad]
Torzní tuhost výstupního hřídele	k_2	1434891	[Nm/rad]
Součinitel trvání záběru	ε	1,762	[-]
Průměr roztečné kružnice pastorku	d_1	43,75	[mm]
Průměr roztečné kružnice kola	d_2	206,5	[mm]
Převodový poměr	i_{12}	4,72	[-]

6. Výpočet torzního kmitání

V kapitole 5 byla navržena jednostupňová převodovka s čelním ozubením s přímými zuby. Ač se může zdát, že na výběr byla celá řada typů a sklonů zubů, byly zvoleny přímé zuby proto, že pro výpočet torzního kmitání s uvažováním tuhosti zubů se rovnice značně zkomplikují a pro modelovou situaci tedy jsou dostačující zuby přímé.

6.1. Výpočet torzního kmitání bez uvažování tuhosti zubů

Pro výpočet torzního kmitání bez uvažování tuhosti zubů byly navrženy dva přístupy. První přístup slouží k získání časových průběhů neznámých výchylek, rychlostí a zrychlení a dále pro zjištění vlastních frekvencí modelového systému. Jedná se o model, který využívá vstupních podmínek pro vzájemné natočení pastorku a ozubeného kola a následně využívá rovnosti sil působících mezi pastorkem a kolem. Díky těmto vstupním podmínkám bylo možné ze čtyř neřešitelných rovnic řešit rovnice tři pro tři neznámá natočení, a to motoru, pastorku/kola a brzdy. Druhý způsob spočívá v převedení původní soustavy na redukovaný model a slouží k prostému ověření výpočtu.



Obr. 17.: Dynamický model jednostupňové převodovky

6.1.1. Sestavení pohybových rovnic a jejich řešení

Dynamické rovnovážné rovnice byly sestaveny na základě teorie dynamiky a kmitání mechanických soustav, která byla ve stručnosti popsána v kapitole 2 této práce.

Torzní soustava převodovky na Obr.17 je popsána následujícími čtyřmi pohybovými rovnicemi.

Motor:

$$J_M \ddot{\varphi}_M + k_1 \cdot (\varphi_M - \varphi_1) = M_M \quad (6.1)$$

Pastorek:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_M) + M_1 = 0 \quad (6.2)$$

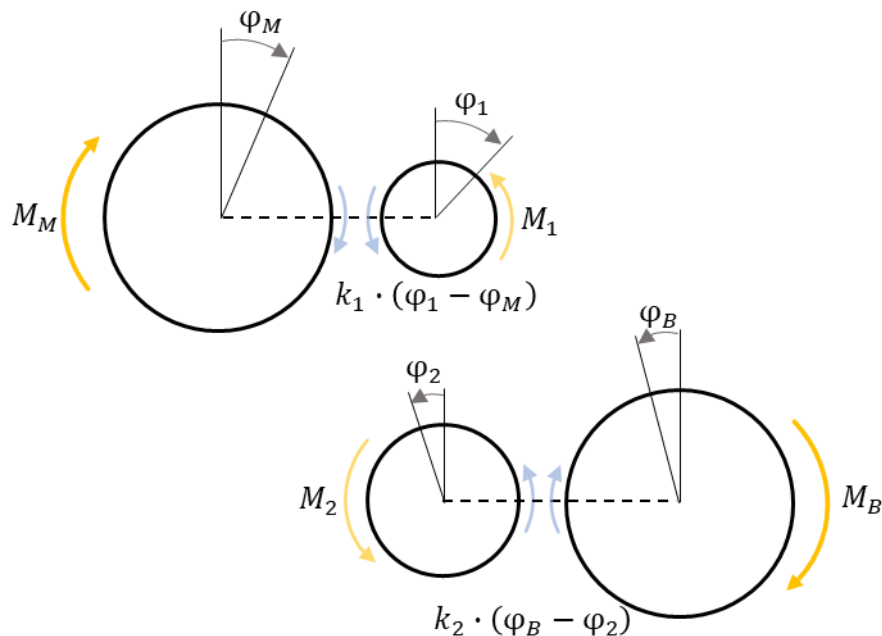
Kolo:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + k_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_B) - M_2 = 0 \quad (6.3)$$

Brzda:

$$J_B \ddot{\varphi}_B + k_2 \cdot (\varphi_B - \varphi_2) = -M_B \quad (6.4)$$

Tyto původní rovnice vycházejí z následujícího schématu (Obr.18).



Obr. 18.: Schéma pro sestavení pohybových rovnic

Pastorek a spoluzabírající kolo tvoří převod. Proto bylo třeba stanovit, v jakém vzájemném vztahu jsou vůči sobě úhly natočení pastorku φ_1 a kola φ_2 , a také vyjádřit momenty M_1 a M_2 , které představují silové působení v soukolí. Bylo tedy nutné zavést vstupní podmínky, aby byla soustava rovnic řešitelná jako tříhmotový systém.

Neznámé momenty M_1 a M_2 bylo třeba vyjádřit dle definice kroutícího momentu, a to jako sílu působící v ozubení na určitém poloměru pastorku a kola.

Rovnice pro moment M_1 je následující (6.5), kde T_{12} je síla působící z pastorku na kolo a r_1 je poloměr pastorku.

$$M_1 = T_{12}r_1 \quad (6.5)$$

Rovnice pro vyjádření momentu M_2 je reprezentována vztahem (6.6), kde T_{21} je síla působící z kola na pastorek a r_2 je poloměr ozubeného kola.

$$M_2 = T_{21}r_2 \quad (6.6)$$

V této fázi bylo nutné doplnit vztah mezi oběma silami T_{12} a T_{21} , který vychází z Newtonova zákona akce a reakce, tedy síla T_{12} je akční silou a T_{21} zastupuje sílu reakční. Jedná se tedy o rovnost velikostí těchto sil (6.7).

$$T_{12} = T_{21} \quad (6.7)$$

Tento vztah je velmi důležitý pro následující úpravu soustavy rovnic.

Vztah mezi úhly natočení pastorku a kola φ_1 a φ_2 je vyjádřen s pomocí poloměrů pastorku a kola, respektive pomocí převodového poměru (6.8):

$$\varphi_1 = \frac{r_2}{r_1}\varphi_2 \quad (6.8)$$

Původní pohybové rovnice je možné díky navrženým vstupním podmínkám přepsat do této podoby:

Rovnice pro motor:

$$J_M \ddot{\varphi}_M + k_1 \cdot \left(\varphi_M - \frac{r_2}{r_1} \varphi_2 \right) = M_M \quad (6.9)$$

Pro pastorek:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \varphi_2 - \varphi_M \right) + T_{12} r_1 = 0 \quad (6.10)$$

Pro kolo:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + k_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_B) - T_{12} r_2 = 0 \quad (6.11)$$

Pro brzdu:

$$J_B \ddot{\varphi}_B + k_2 \cdot (\varphi_B - \varphi_2) = -M_B \quad (6.12)$$

Díky rovnosti sil (6.7) lze spojit rovnice (6.10) a (6.11) v jedinou rovnici, a tím vznikne rovnice (6.13). Touto úpravou vznikla soustava tří rovnic pro tři neznámá natočení φ_M , φ_2 , φ_B .

Nová rovnice pro pastorek, respektive kolo je následující:

$$\left(J_1 \frac{r_2}{r_1^2} + J_2 \frac{1}{r_2} \right) \cdot \ddot{\varphi}_2 + \left(k_1 \frac{r_2}{r_1^2} + k_2 \frac{1}{r_2} \right) \cdot \varphi_2 - \left(k_1 \frac{1}{r_1} \right) \cdot \varphi_M - \left(k_2 \frac{1}{r_2} \right) \cdot \varphi_B = 0 \quad (6.13)$$

Rovnice pro motor a pro brzdu nezaznamenaly změny a zůstávají totožné s rovnicemi (6.9) a (6.12).

Takto sestavená soustava tří obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, která využívá všech předchozích podmínek, byla pro snazší úpravy a numerický výpočet sestavena v softwaru Maple. Její řešení bylo provedeno pomocí softwaru Matlab za použití řešiče obyčejných diferenciálních rovnic („ODR“) ODE45 (popřípadě ODE23t), který využívá numerickou metodu Runge – Kutta.

Pro vyřešení této soustavy a možnost využití řešiče „ODR“ bylo třeba zavést substituci, z důvodu snížení řádu diferenciálních rovnic. Konkrétní substituce je naznačena v následující Tabulce 10.

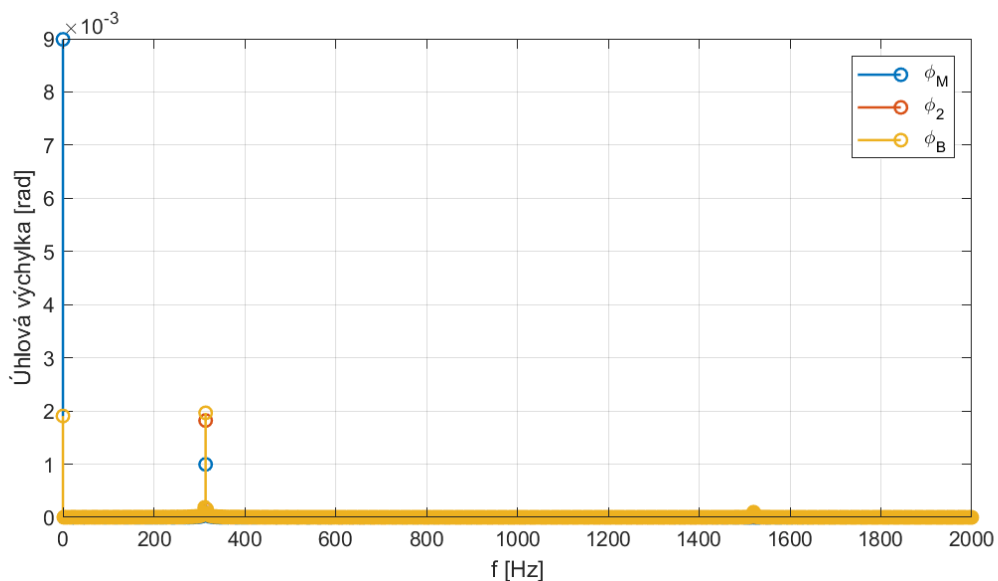
Tabulka 10.: Substitute pro torzní soustavu

	Výchylka	Rychlost	Zrychlení
Motor	$\varphi_M = y_1$	$\dot{\varphi}_M = y_2$	$\ddot{\varphi}_M = y_3$
Ozubené kolo	$\varphi_2 = y_3$	$\dot{\varphi}_2 = y_4$	$\ddot{\varphi}_2 = y_5$
Brzda	$\varphi_B = y_5$	$\dot{\varphi}_B = y_6$	$\ddot{\varphi}_B = y_7$

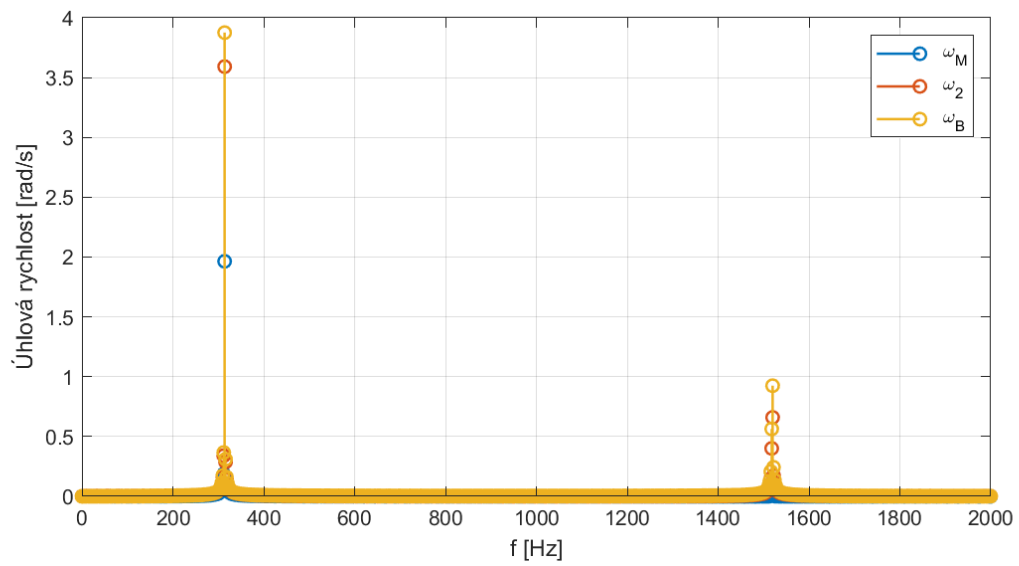
Díky takto definovaným rovnicím se substitucí z Tabulky 10 je možné získat časové průběhy výchylek, rychlostí a zrychlení.

6.1.2. Vlastní frekvence systému

Tato kapitola slouží pouze pro identifikaci správnosti řešení celé soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Výsledné frekvence tohoto systému vyplývající z frekvenční analýzy jsou porovnány s frekvencemi redukovaného modelu v podkapitole 6.2.2. Pro zjištění vlastních frekvencí systému byla použita Fourierova transformace a z následujících grafů lze vyčíst dané frekvence.



Obr. 19.: Vlastní frekvence systému

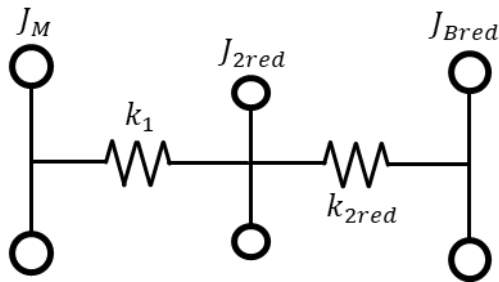


Obr. 20.: Vlastní frekvence systému

Z předchozích dvou grafů (Obr.19 a Obr.20) lze vyčíst, že vlastní frekvence systému jsou **0, 313,8 a 1518,4 Hz**. Pro ověření správnosti tohoto výpočtu a určení vlastních frekvencí poslouží redukovaný model převodovky, který též představuje tříhmotovou soustavu.

6.2. Výpočet pro ověření pomocí redukovaného modelu

Pro ověření správnosti předchozího výpočtu, respektive ověření výsledných vlastních frekvencí, byla zvolena metoda redukce na jeden hřídel. Ověřovány byly hodnoty vlastních frekvencí systému. Nejprve bylo zapotřebí sestavit redukovaný model, který vychází z původního schématu na Obr.17. Tento nový model (Obr.21) slouží pouze pro ověření vlastních frekvencí a byl též vypočítán v softwaru MATLAB.



Obr. 21.: Redukovaný model převodovky – tří hmotová soustava

6.2.1. Sestavení pohybových rovnic

Pro sestavení pohybových rovnic bylo třeba zavést redukované veličiny.

Převod je dán poměrem (6.14)

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} \quad (6.14)$$

Redukce hmotových veličin:

J_M zůstává neredukováno, protože se nachází na hřídeli, ke kterému se provádí redukce.

$$J_{2red} = J_1 + J_2 \cdot \frac{1}{i_{12}^2} \quad (6.15)$$

$$J_{Bred} = J_B \cdot \frac{1}{i_{12}^2} \quad (6.16)$$

Redukce tuhostí:

k_1 zůstává neredukováno ze stejného důvodu, jako není redukován moment setrvačnosti motoru J_M .

$$k_{2red} = k_2 \cdot \frac{1}{i_{12}^2} \quad (6.17)$$

S redukovanými veličinami lze nyní pracovat a použít je pro sestavení dynamických rovnic.

Dynamické rovnice pro redukovaný model jsou tedy následující.

Rovnice pro neredukovanou hmotu motoru:

$$J_M \ddot{\varphi}_M + k_1 \cdot (\varphi_M - \varphi_1) = 0 \quad (6.18)$$

Rovnice pro redukované hmoty pastorku/kola:

$$J_{2red} \ddot{\varphi}_2 - k_1 \cdot (\varphi_M - \varphi_1) - k_{2red} \cdot (\varphi_B - \varphi_2) = 0 \quad (6.19)$$

Rovnice pro redukovanou hmotu brzdy:

$$J_{Bred} \ddot{\varphi}_B + k_{2red} \cdot (\varphi_B - \varphi_2) = 0 \quad (6.20)$$

6.2.2. Vlastní frekvence redukované soustavy

Pomocí teorie modální analýzy a za použití softwaru Matlab byly vypočítány vlastní frekvence soustavy převodovky redukované na jeden hřídel. Při znalosti matice hmotnosti a matice tuhosti byly jednoduchým příkazem získány požadované vlastní frekvence soustavy.

```
M = [J_M 0 0; 0 J_2red 0; 0 0 J_B];
K = [k1 -k1 0; -k1 k1 + k2red -k2red; 0 -k2red k2red];
[v, lambda] = eig(K,M);
```

```
f = diag(sqrt(lambda) / (2*pi));
```

Výsledné hodnoty vlastních frekvencí jsou rovny: **0; 313,8 a 1518,4 Hz**. Tudíž je patrné, že hodnoty vlastních frekvencí z původního výpočtu v kapitole 6.1.2 a nyní z redukovaného modelu jsou si rovny a výpočet proběhl správně.

6.3. Výpočet torzního kmitání s uvažováním tuhosti zubů

Výpočet torzního kmitání s uvažováním tuhosti zubů je založen jednak na znalosti sestavování dynamických rovnic pro kmitání, nicméně nyní je třeba vycházet i z teorie o tuhosti zubů ozubených kol, její rozdělení na jednopárovou a dvoupárovou tuhost ozubení a následnou znalost Fourierovy řady reprezentující proměnnou tuhost v čase.

Při výpočtu, který zahrnuje tuhost ozubení byla opuštěna představa redukovaného modelu převodu. Nyní jako výsledek získáme i plnohodnotné informace, tedy průběhy výchylek, rychlostí a zrychlení všech čtyř členů torzní soustavy.

Pokud zahrnujeme do výpočtu tuhost ozubení pastorku a spoluzabírajícího ozubeného kola, můžeme k této problematice přistupovat dvěma různými způsoby. Prvním způsobem je využití idealizovaného modelu, popsaného rovnicí (3.7), čili se jedná o konstantní hodnotu tuhosti ozubení. Druhou možností, jak naložit s tuhostí ozubení, je dosadit do plnohodnotné Fourierovy řady (3.5), a tím získat časový průběh proměnlivé tuhosti ozubení.

Ze vztahů pro výpočet jednopárové (3.2), záběrové (3.3) tuhosti a vypočtených hodnot ozubení byly získány potřebné vstupní hodnoty pro následující výpočet Fourierovy řady pro proměnlivou tuhost.

Tabulka 11.: Výsledky měrné jednopárové a záběrové tuhosti

c' [N/mm ²]	c_γ [N/mm ²]
17715,91315	27347,34649

Po vynásobení šířkou ozubení a převedením na základní jednotky byly pro výpočet získány využitelné hodnoty tuhostí jednoho a dvou párů v záběru.

Tabulka 12.: Tuhost jednoho a dvou párů v záběru

$k' = k_{(1)}$ [N/m]	$k_\gamma = k_{(2)}$ [N/m]
407466002,45	628988969,2

6.3.1. Výpočet konstantní tuhosti ozubených kol

Při idealizaci Fourierovy řady (3.7) bylo zohledněno použití ozubených kol s přímými zuby, tedy byla splněna podmínka $m = 1$ a $\varepsilon = 1$.

Z těchto výchozích bodů plyne, že výsledná tuhost je konstantní a má hodnotu jednopárové tuhosti.

„Fourierova řada“ má následující triviální tvar (6.21):

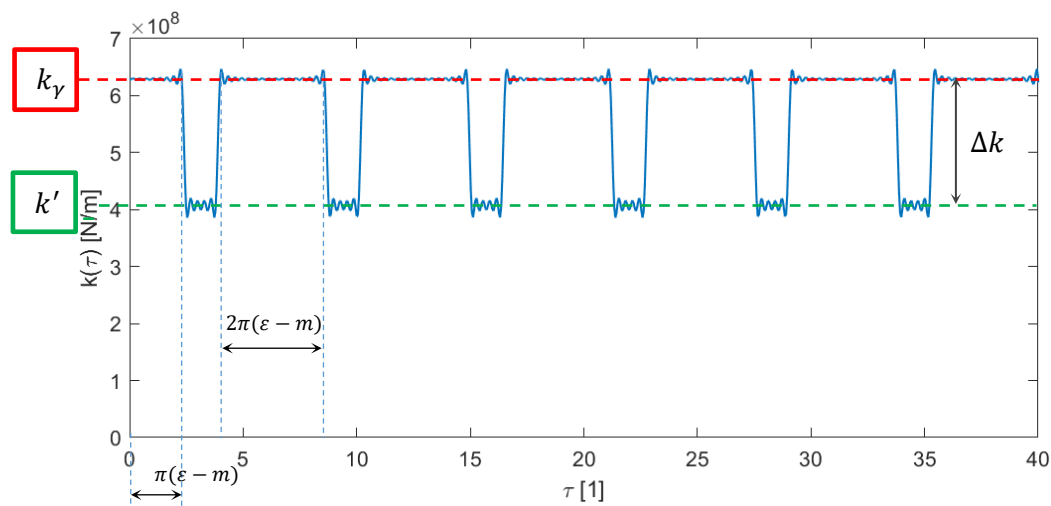
$$k = k_1 \tag{6.21}$$

k_1 v této rovnici vyjadřuje tuhost jednoho páru zubů v záběru.

6.3.2. Tuhost proměnlivá v čase zadána Fourierovou řadou

Pokud nebude vztah (3.5) zadán Fourierovou řadou idealizován a součinitel záběru ε bude roven skutečné hodnotě – v tomto případě 1,762 – zároveň budou využity vypočtené hodnoty tuhostí k' a k_γ , vztah zůstane ve formě Fourierovy řady, ve které se střídají po částech konstantní funkce tuhosti jednopárové a dvoupárové, jako tomu je na ilustrativním obrázku v kapitole 3.1.3. (Obr.8.).

Hodnoty této řady nabývají maxima (dvoupárové – záběrové tuhosti k_γ) a minima (jednopárové tuhosti k') a periodicky se tyto hodnoty střídají, jak je znázorněno na Obr.22, který je výsledkem výpočtu v softwaru Matlab. Tento graf na Obr.22 odpovídá teoretickému grafu na Obr.8.

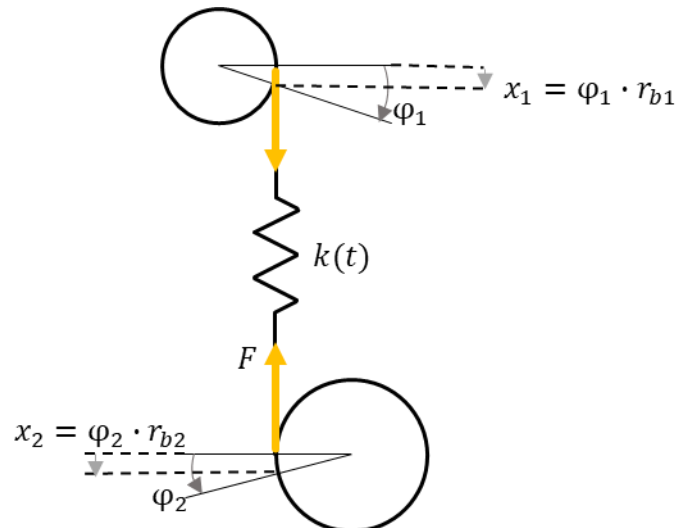


Obr. 22.: Tuhost ozubení reprezentovaná Fourierovou řadou

6.3.3. Sestavení pohybových rovnic

Schéma dynamických rovnic zůstalo zachováno, v tomto případě bylo ovšem nutné nově do výpočtu zakomponovat získanou tuhost ozubení.

Nejprve byly sestaveny rovnice pro samotný pastorek s kolem. K původním rovnicím přibyla síla v pružině, která reprezentuje tuhost zubů v záběru. Situaci mezi pastorkem a ozubeným kolem je zobrazena na Obr.23. Následující výpočet byl proveden jak pro konstantní tuhost, tak pro tuhost periodicky se opakující, tedy proměnnou. Změna tkví pouze v tom, zda za $k(t)$ dosadíme konstantu nebo hodnoty Fourierovy řady.



Obr. 23.: Dynamické schéma mezi pastorkem a kolem

Dynamické rovnice pro pastorek (6.22) a ozubené hnané kolo (6.23) tedy mají následující tvar:

Pastorek:

$$\frac{J_1}{r_{b1}^2} \ddot{x}_1 + k(t) \cdot (x_1 - x_2) = 0 \quad (6.22)$$

Kolo:

$$\frac{J_2}{r_{b2}^2} \ddot{x}_2 - k(t) \cdot (x_1 - x_2) = 0 \quad (6.23)$$

Tyto rovnice mají pro výpočet torzního kmitání nedostatky, a to ten, že jejich neznámé výchylky jsou délkového rozměru.

Pro zařazení do torzní soustavy bylo třeba tyto neznámé vyjádřit pomocí úhlové míry, tedy převést x a \ddot{x} na proměnné φ a $\ddot{\varphi}$.

Následují matematické úpravy pro získání požadovaných torzně dynamických rovnic.

Pastorek:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + k(t) \cdot r_{b1} \cdot (\varphi_1 r_{b1} - \varphi_2 r_{b2}) = 0 \quad (6.24)$$

Kolo:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - k(t) \cdot r_{b2} \cdot (\varphi_1 r_{b1} - \varphi_2 r_{b2}) = 0 \quad (6.25)$$

Pro poloměry základních kružnic ozubení r_{b1} a r_{b2} platí vztahy (6.26) a (6.27):

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha \quad (6.26)$$

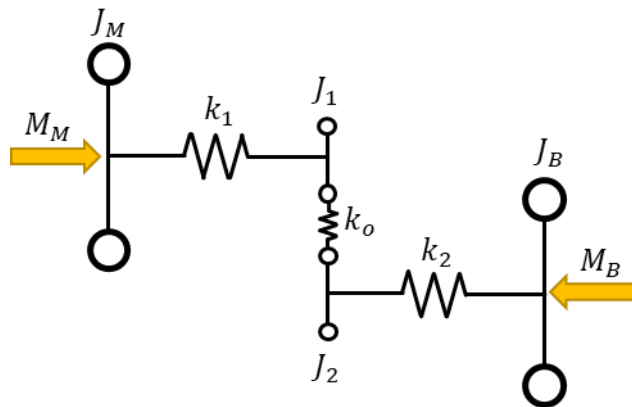
$$r_{b2} = r_2 \cos \alpha \quad (6.27)$$

Předchozí vztahy byly dosazeny do rovnic (6.24) a (6.25) a nyní mají tento tvar:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + k(t) \cdot r_1^2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{r_2}{r_1} \right) = 0 \quad (6.28)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - k(t) \cdot r_1 r_2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{r_2}{r_1} \right) = 0 \quad (6.29)$$

Takto upravené rovnice už lze začlenit mezi již známé zbylé rovnice pro kmitání motoru a brzdy a vytvořit tím finální soustavu pohybových rovnic pro výpočet torzního kmitání, která je schematicky znázorněna na Obr.24.



Obr. 24.: Dynamický model převodovky s uvažováním tuhosti ozubení

Celá soustava pohybových rovnic pro převodovku respektující tuhost ozubení ať už konstantní nebo proměnnou je následující:

Motor:

$$J_M \ddot{\varphi}_M + k_1 \cdot (\varphi_M - \varphi_1) = M_M \quad (6.30)$$

Pastorek:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - k_1 \cdot (\varphi_M - \varphi_1) + k(t) \cdot r_1^2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{r_2}{r_1} \right) = 0 \quad (6.31)$$

Kolo:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + k_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_B) - k(t) \cdot r_1 r_2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{r_2}{r_1} \right) = 0 \quad (6.32)$$

Brzda:

$$J_B \ddot{\varphi}_B - k_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_B) = -M_B \quad (6.33)$$

Soustava byla opět řešena v matematickém programu Matlab, díky užití řešiče obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, využívající obdobnou substituci proměnných, jak již bylo naznačeno v kapitole 6.1.1.

6.4. Výpočet torzního kmitání s uvažováním tuhosti a kinematickou úchytkou ozubení

Výpočet torzního kmitání v této kapitole vychází ze sestavených dynamických rovnic v kapitole předešlé a nadále byla uvažována časová proměnlivost tuhosti ozubení. Změnou v tomto výpočtu je zahrnutí dalšího významného zdroje vnitřního buzení torzní soustavy, a tím je buzení kinematickou úchytkou, jejíž teorie je popsána v kapitole 3.2. Pro výpočet byla využita úchytky převodu ve formě harmonické funkce daná zápisem funkce sinus (3.9).

6.4.1. Zjištění amplitudy kinematické úchytky převodu

Tato podkapitola je zaměřena na určení amplitudy kinematické úchytky převodu Δ , která vychází z Tabulek 2 a 3 daných normou ČSN ISO 1328 – 1/1997.

Pro určení amplitudy kinematické úchytky je třeba vypočítat parametr F'_i neboli kinematickou úchytku kola, který je dán součtem dvou dalších parametrů, a to F'_p – součtovou úchytkou roztečí a parametrem f'_i – místní kinematickou úchytkou.

Místní kinematická úchytky byla určena ze vztahu (6.34):

$$f'_i = (4,3 + f_{pt} + F_\alpha) \cdot k \quad (6.34)$$

Kde jednotlivé složky vztahu jsou:

- f_{pt} úchytky čelních rozteče
- F_α úchytky profilu
- k koeficient

Všechny tyto složky byly dány a vypočteny na základě zmíněné normy.

Výsledné hodnoty f'_i pro pastorek a kolo v pátém stupni přesnosti jsou následující:

Tabulka 13.: Výsledné místní kinematické úchytky

$f'_{i \text{ pastorek}} [\mu\text{m}]$	$f'_{i \text{ kolo}} [\mu\text{m}]$
10,41	12,12

Součtová úchylka roztečí je určena vztahem (6.35):

$$F_p = 0,3m + 1,25\sqrt{d} + 7 \quad (6.35)$$

Kde m [mm] je modul ozubení, d [mm] roztečná kružnice kola.

Výsledné hodnoty F_p pro pastorek a kolo v pátém stupni přesnosti jsou tyto:

Tabulka 14.: Výsledné součtové úchyly roztečí

F_p pastorek [μm]	F_p kolo [μm]
15,79	25,49

Kinematická úchylka převodu je dána vztahem (6.36):

$$F'_i = f'_i + F_p \quad (6.36)$$

Výsledné hodnoty kinematické úchyly jsou vypočteny pro pátý stupeň přesnosti a následně pomocí koeficientu $K_Q = 2,83$ přepočteny na přesnost osmého stupně, který byl pro výpočet zvolen. Viz Tabulka 4.

Tabulka 15.: Výsledné kinematické úchyly pro 5. a 8. stupeň přesnosti ozubení

F'_i pastorek (5) [μm]	F'_i kolo (5) [μm]
26,2	37,6
F'_i pastorek (8) [μm]	F'_i kolo (8) [μm]
74,1	106,4

Amplituda kinematické úchyly převodu Δ je určena následujícím vzorcem (3.37):

$$\Delta = \frac{F'_i \text{ pastorek (8)} + F'_i \text{ kolo (8)}}{2} \quad (6.37)$$

Hodnota amplitudy kinematické úchyly převodu uvedena v Tabulce 16 je dále použita při výpočtu dynamického chování soustavy převodovky.

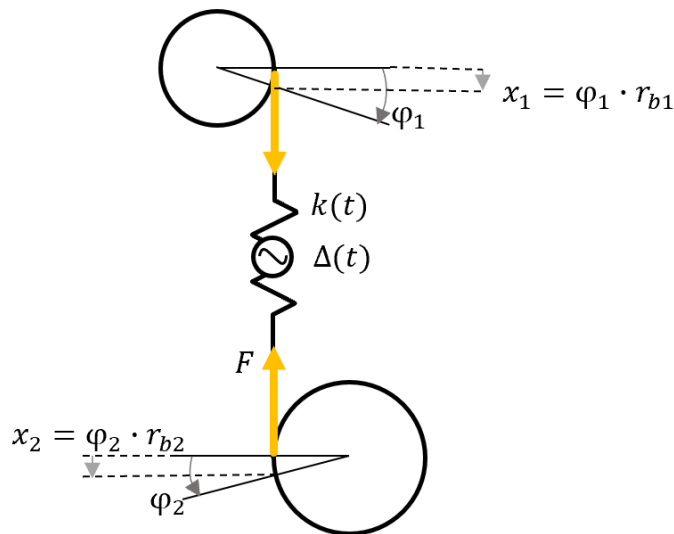
Tabulka 16.: Amplituda kinematické úchyly

Δ [μm]
90,3

6.4.2. Sestavení pohybových rovnic

Následující dynamické rovnice byly sestaveny na stejném principu, jako tomu bylo u sestavování rovnic s uvažováním tuhosti ozubení. Tuhost ozubení i v tomto případě zůstává jako zdroj vnitřního buzení soustavy, nicméně bylo nutné zohlednit i další budící účinek, kterým je kinematická úchylnka převodu, jak je vidět na schématu (Obr.25).

Na začátku sestavení pohybových rovnic bylo nutné podobně jako u zohlednění časově závislé tuhosti popsat situaci mezi pastorkem a spoluzabírajícím kolem. Vznikly tak opět dvě nové rovnice popisující kmitání pastorku a kola.



Obr. 25.: Dynamické schéma mezi pastorkem a kolem

Dynamické rovnice pro pastorek a ozubené hnané kolo jsou následující:

Pastorek:

$$\frac{J_1}{r_{b1}^2} \ddot{x}_1 + k(t) \cdot (x_1 - x_2 + \Delta(t)) = 0 \quad (6.38)$$

Kolo:

$$\frac{J_2}{r_{b2}^2} \ddot{x}_2 - k(t) \cdot (x_1 - x_2 + \Delta(t)) = 0 \quad (6.39)$$

Další úpravy rovnic pro pastorek a kolo vycházejí ze stejného schématu jako u rovnic (6.22) a (6.23). Znovu byl proveden převod z délkové míry neznámých výchylek x_1 a x_2 na úhlovou míru neznámých φ_1 a φ_2 . Znovu platí vztahy pro základní kružnice pastorku a kola, (6.26) a (6.27).

Za $\Delta(t)$ byl dosazen výraz (3.9), jehož amplituda byla vypočtena v podkapitole 6.4 a jejíž hodnotu lze vyčíst z Tabulky 16.

Za pomoci těchto úprav byly rovnice (6.38), (6.39) převedeny do tvaru (6.40) a (6.41):

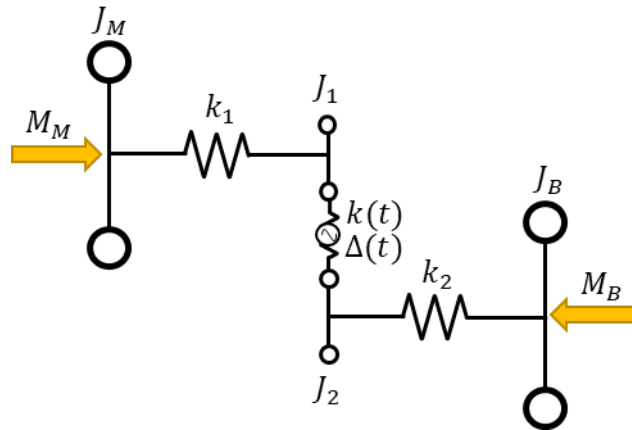
Pastorek:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + k(t) \cdot r_1^2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{\Delta(t)}{r_1 \cos \alpha} \right) = 0 \quad (6.40)$$

Kolo:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - k(t) \cdot r_1 r_2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{\Delta(t)}{r_1 \cos \alpha} \right) = 0 \quad (6.41)$$

Tyto upravené rovnice (6.40) a (6.41) byly opět začleněny mezi již známé, zbylé rovnice pro kmitání motoru a brzdy. Vznikne tak finální soustava pohybových rovnic pro výpočet torzního kmitání, která je schematicky znázorněna na Obr.26.



Obr. 26.: Dynamický model převodovky s uvažováním tuhosti ozubení a kinematickou úchylkou převodu

Celá soustava pohybových rovnic pro převodovku respektující tuhost ozubení a kinematickou úchylku převodu je následující:

Motor:

$$J_M \ddot{\varphi}_M + k_1 \cdot (\varphi_M - \varphi_1) = M_M \quad (6.42)$$

Pastorek:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - k_1 \cdot (\varphi_M - \varphi_1) + k(t) \cdot r_1^2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{\Delta(t)}{r_1 \cos \alpha} \right) = 0 \quad (6.43)$$

Kolo:

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + k_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_B) - k(t) \cdot r_1 r_2 \cos^2 \alpha \cdot \left(\varphi_1 - \varphi_2 \frac{r_2}{r_1} + \frac{\Delta(t)}{r_1 \cos \alpha} \right) = 0 \quad (6.44)$$

Brzda:

$$J_B \ddot{\varphi}_B - k_2 \cdot (\varphi_2 - \varphi_B) = -M_B \quad (6.45)$$

Soustava byla též řešena užitím řešiče ODE 45 (ODE23t) v softwaru Matlab, využívající obdobnou substituci proměnných, jak již bylo naznačeno v kapitole 6.1.1.

7. Výsledky frekvenční analýzy

Pomocí Fourierovy transformace byla provedena tzv. frekvenční analýza, která vychází z teoretických východisek popsaných v kapitole 2 v části zabývající se analýzou vlastních frekvencí. Podstata tedy spočívá v tom, že vypočtené výchylky, případně úhlové rychlosti převádí z časové oblasti do oblasti frekvenční. Z takových diagramů lze vyčíst, jaké jsou vlastní frekvence systému a zároveň jaká amplituda úhlového natočení (výchylky) a rychlosti této frekvenci odpovídá.

Časové průběhy, které vstupují do frekvenční analýzy vznikly v tomto případě díky výpočtům, které jsou popsány v kapitole 6. Dynamická soustava nebyla zatížena kroutícími momenty, ale pro výpočet bylo zvoleno buzení počáteční výchylkou rotoru navrženého elektromotoru. Výchylka byla zvolena 0,01 rad.

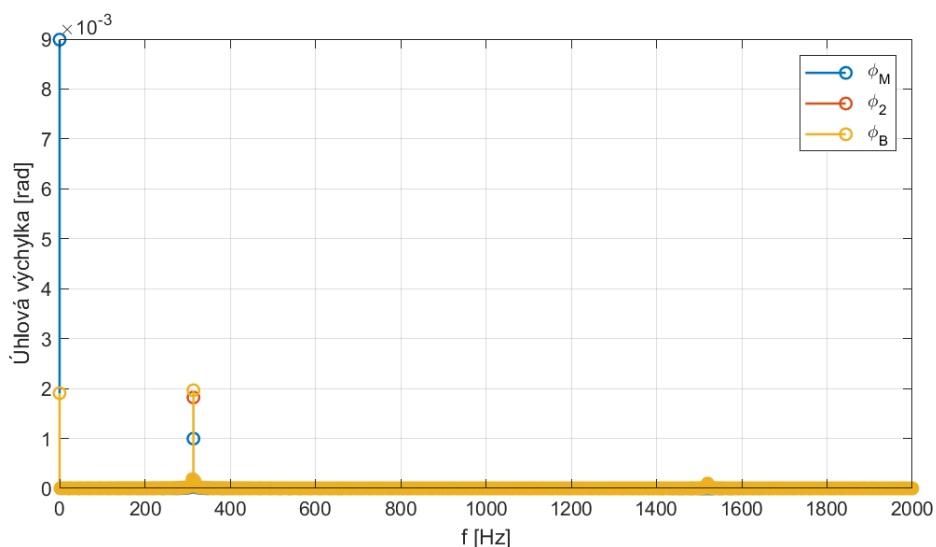
7.1. Výsledky výpočtu bez uvažování tuhosti zubů

V případě výpočtu, ve kterém není zahrnuta tuhost ozubení a jedná se tedy o kontakt dvou absolutně tuhých ozubených kol, už je známo, že vznikne soustava tří rovnic (rovnice pro pastorek a pro kolo se zredukuje v jednu rovnici). To je vidět i z následujících grafů (Obr. 27 a Obr. 28). Tento model představuje ryze idealizovaný výpočet.

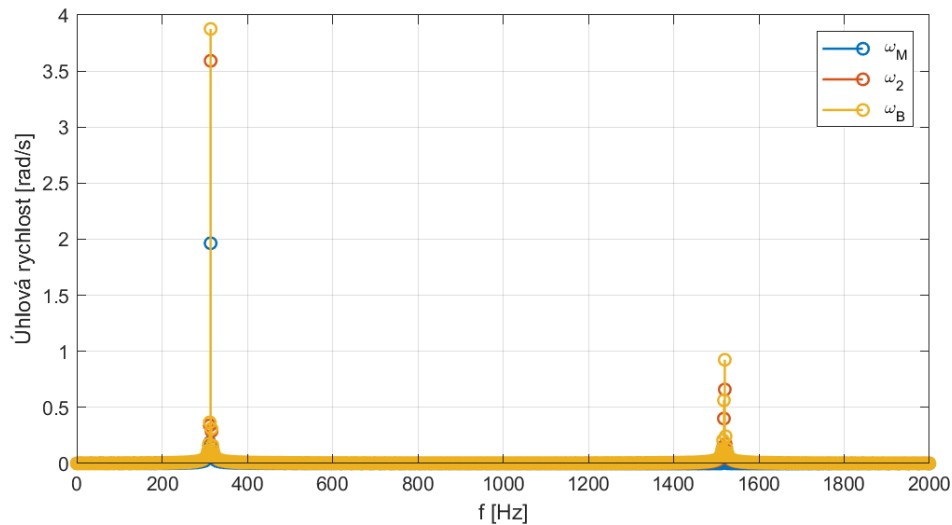
Z těchto grafů je zřejmé, že soustava má tři vlastní frekvence. Z grafu na Obr. 27 je patrné, že první vlastní frekvence je **nulová**. To je způsobeno tím, že se soustava chová jako řetězec.

Soustava, která se nazývá řetězcem, se vyznačuje tím, že ji tvoří n hmot, které jsou spojeny $(n - 1)$ pružinami. Prakticky to znamená, že soustava není plně vázána k základnímu rámu a první vlastní tvar představuje stav nekmitavý – řetězec se chová jako tuhé těleso, které může konat pohyb pouze v ose rotace. [1]

Další vlastní frekvence nabývají hodnot **314 a 1520 Hz**, které již byly ověřeny i kontrolním redukovaným modelem v podkapitole 6.2.2.



Obr. 27.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – model bez uvažování tuhosti ozubení



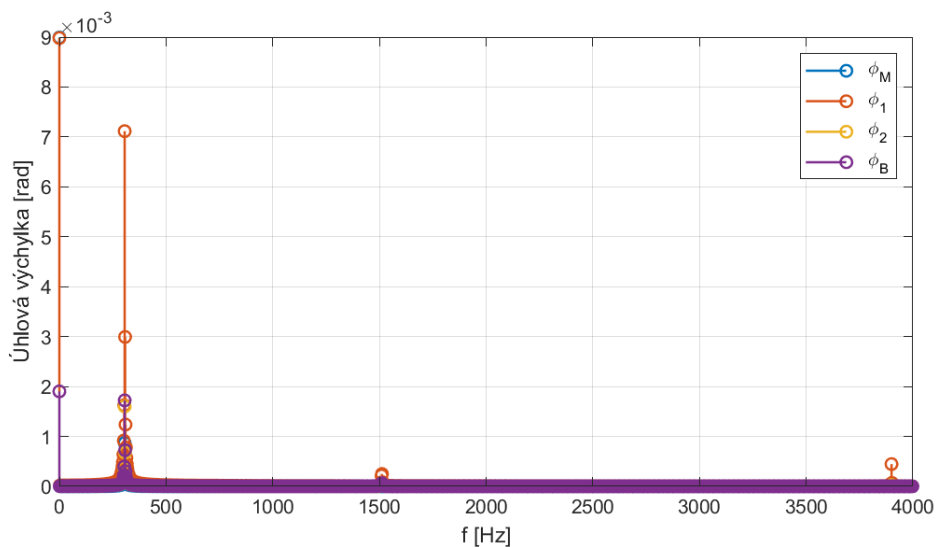
Obr. 28.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – model bez uvažování tuhosti ozubení

7.2. Výsledky výpočtu s uvažováním konstantní tuhosti zubů

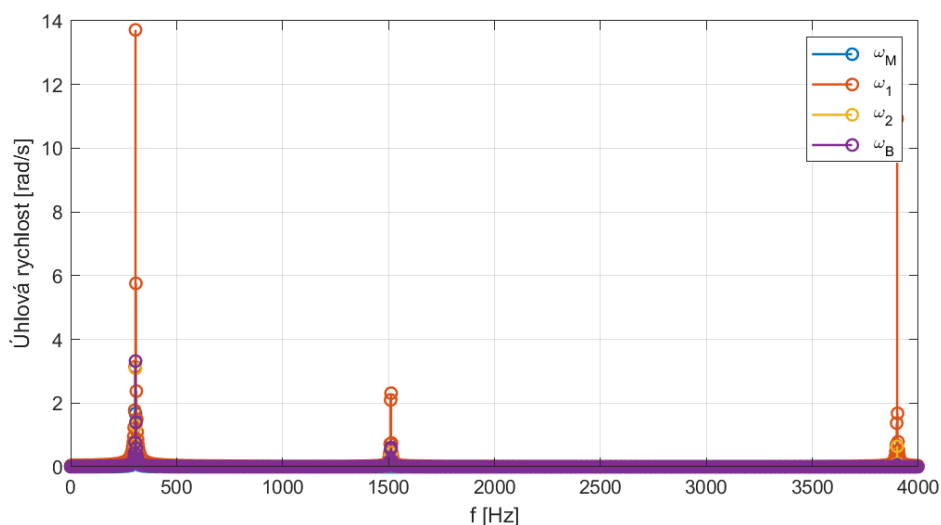
Pokud jde o dynamický výpočet s uvažováním konstantní tuhosti, lze říci, že je „realitě“ blíže než předchozí model. Zahrnutí konstantní hodnoty tuhosti, která je dána vztahem 6.21, znamená, že soustava již není redukována a jsou řešeny čtyři rovnice o čtyřech neznámých.

To potvrzují i vlastní frekvence systému, které je možné odečítat z Obr.29 a Obr.30.

Hodnoty vlastních frekvencí jsou již známé frekvence **0, 314 a 1520 Hz**, ale tentokrát přibyla čtvrtá frekvence s hodnotou **3900 Hz**, která souvisí s nově zohledněnou konstantní tuhostí ozubení a odpovídá frekvenci neredukovaného soukolí.



Obr. 29.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – model s uvažováním konstantní tuhosti ozubení



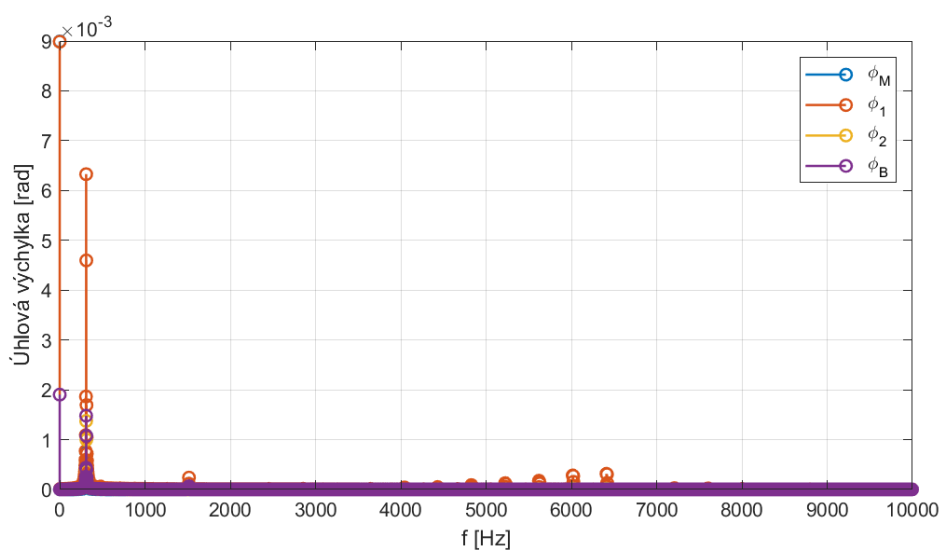
Obr. 30.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – model s uvažováním konstantní tuhosti ozubení

7.3. Výsledky výpočtu s uvažováním časově závislé tuhosti ozubení

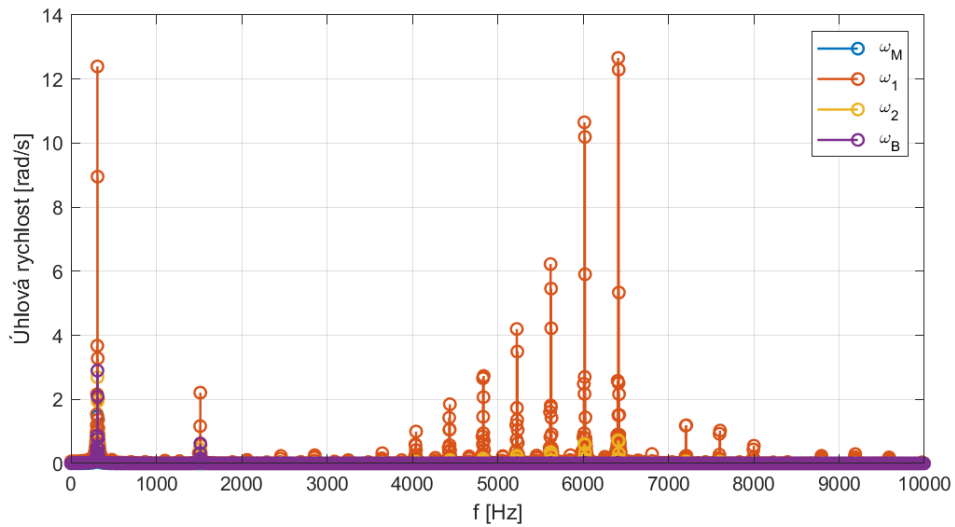
Pokud bude model zahrnující tuhost ozubení rozšířen o skutečnost, že v průběhu odvalu zubů se tato tuhost mění a střídá se jednopárový a dvoupárový záběr, zahrnujeme do výpočtu nový prvek, a to buzení soustavy, které vyvolává právě periodicky se měnící tuhost.

Tato tuhost je v tomto modelu popsána Fourierovou řadou danou rovnicí (3.5), která obsahuje zubovou frekvenci.

Časově závislá tuhost se zřetelně projevuje v následujících frekvenčních charakteristikách. Do tohoto spektra přibýly frekvence spojené se střídáním tuhosti a tyto frekvence mají rozestupy právě v hodnotě zubové frekvence.



Obr. 31.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou

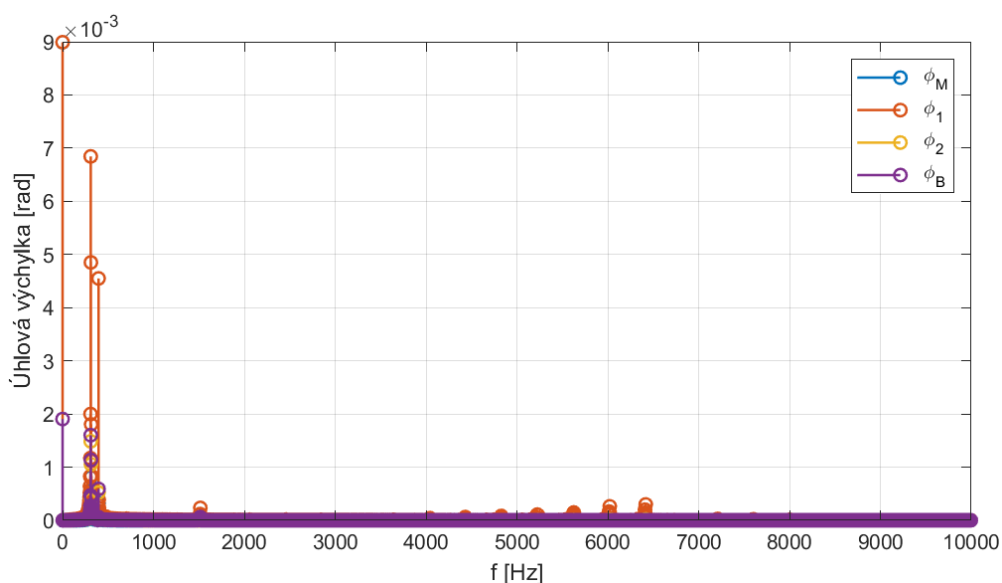


Obr. 32.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou

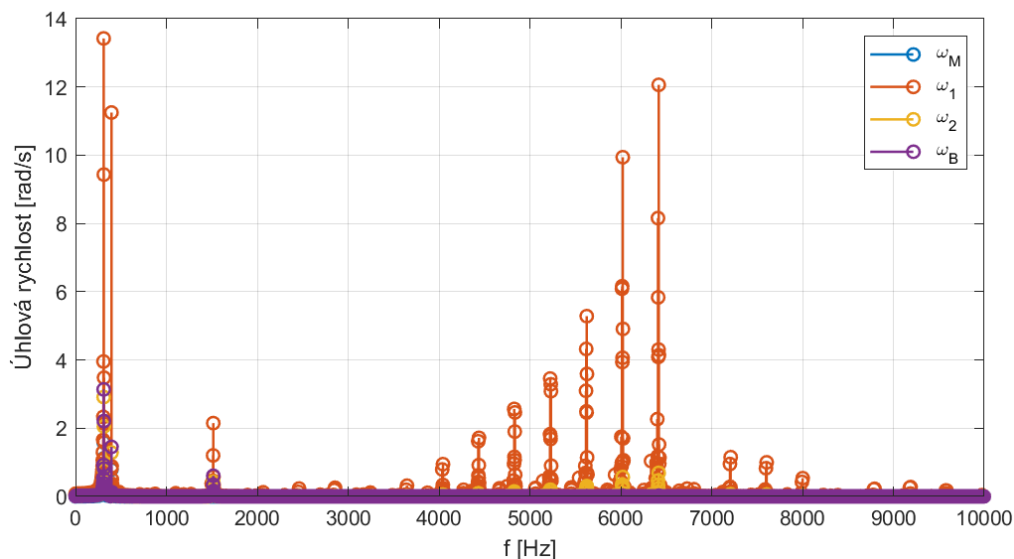
Frekvence, které můžeme odečítat z Obr.31 a 32, jsou opět již známe frekvence: **0, 314, 1520 Hz**. Nyní ovšem lze vyčítat i frekvence, které přibýly zařazením Fourierovy řady. Těmto frekvencím přísluší postupně se zvyšující výchylky úhlů natočení i rychlostí a ve frekvenčním spektru je možné je pozorovat od hodnoty **3648 Hz**, které dále přibývají s krokem již zmíněné **zubové frekvence**, která pro tuto úlohu činí **396 Hz**. Následují tedy frekvence **4044, 4440, 4836 Hz** atd. Vlastní frekvence pro nejvyšší hodnotu úhlové rychlosti činí **6412 Hz**.

7.4. Výsledky výpočtu se zahrnutím úchytky převodového poměru

V pořadí dalším typem buzení bylo zohlednění kinematické úchytky převodového poměru, která představuje nepřesnosti vzniklé výrobou ozubení. Zahrnutím časově proměnné tuhosti pomocí Fourierovy řady a následné zohlednění i výrobních nepřesností v podobě kinematické úchytky převodu bylo docíleno dalšího přiblížení ke skutečnosti v rámci těchto teoretických výpočtů.



Obr. 33.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou a kinematické úchytky převodového poměru



Obr. 34.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou a kinematické úchytky převodového poměru

Z výpočtu modelu, kterým byla zohledněna proměnná tuhost a úchylka převodu je patrné, že právě již zmíněná úchylka se projevuje především zvýšením hodnot úhlových výchylek a úhlových rychlostí pro příslušné vlastní frekvence frekvenčního spektra. Kinematická úchylka převodového poměru je modelována jako průběh funkce sinus s amplitudou $90,3 \mu\text{m}$ a argumentem funkce sinus, který je zubovou frekvencí násobenou časem (3.9) stejně, jako tomu bylo u Fourierovy řady, popisující tuhost ozubení. Z toho plyne, že kinematická úchylka nevytváří nové vlastní frekvence, ale pouze zvyšuje hodnoty úhlových výchylek a rychlostí pro již vypočtené vlastní frekvence systému z podkapitoly 7.3.

Z grafů na Obr.33 a Obr.34 lze vyzorovat, že vlastní frekvence systému jsou stejné jako u předchozích výsledků, které přísluší výpočtu se zahrnutím časově závislého střídání jednopárového a dvou párového záběru. Pouze úhlové výchylky a úhlové rychlosti odpovídající těmto frekvencím jsou zesílené kvůli respektování kinematické úchylky převodového poměru. Tím, že jsou zohledněny výrobní nepřesnosti, jsou též viditelně zesíleny i hodnoty výchylek v okolí vlastních frekvencí.

7.5. Shrnutí frekvenční analýzy

Jak je z předešlých frekvenčních spekter patrné, pokud nebudeme uvažovat poddajnost ozubení, a vazbu mezi pastorkem a kolem budeme uvažovat jako absolutně tuhou, vidíme, že se projeví dvě vlastní frekvence, kvůli redukci pastorku a kola na jednu hmotu.

Pokud do výpočtu zahrneme konstantní tuhost ozubení, přibude jedna vlastní frekvence, protože nyní jsou pastorek a kolo uvažovány jako samostatné hmoty, které vykazují kmitavý pohyb.

Další změna nastane, pokud tuhost ozubení zadáme pomocí Fourierovy řady a zohledníme kinematickou úchylku převodového poměru dle vztahu (3.9). Fourierova řada bere v úvahu jednopárový a dvou párový záběr, typický pro čelní ozubení s přímými zuby, a jeho periodické střídání. Matematický model kinematické úchylky zase dovoluje respektovat výrobní nepřesnosti. Z toho důvodu se nově objeví i další vlastní frekvence převodovky jako důsledek onoho střídání záběrů.

8. Ověření tuhosti zubů pomocí výpočtu metodou konečných prvků

Problematika jednopárového a dvoupárového záběru pastorku a kola byla již popsána v kapitole 3. Dle této teorie je třeba zahrnout časově závislou tuhost ozubení do dynamických výpočtů, protože má vliv na časové průběhy vypočítaných veličin, a tím i na vlastní frekvence soustavy – převodovky. Teorie zabývající se tuhostí zubů v záběru přichází s termíny jednopárová a dvoupárová, případně záběrová tuhost, které následně popisuje matematickými vztahy a Fourierovými řadami. Vztahy pro výpočty těchto tuhostí vycházejí z opakovaných měření reálných kol s různými parametry a na základě těchto měření byla stanovena empirická vyjádření tuhostí ozubení. Následně se díky empirickým vztahům dají učinit návrhové dynamické výpočty.

Pro ověření platnosti teoretických vztahů je nejpřesnější hodnoty tuhostí určit praktickým měřením deformací zubů. Tato možnost ověření nemůže být realizována z důvodu absence měřícího stavu určeného pro tuto aplikaci. V této kapitole bylo pro ověření či konfrontaci teoretických výsledků s „reálnými“ využito časového průběhu tuhosti během záběru, který byl získán metodou konečných prvků za pomoci softwaru Abaqus CAE. Výpočtový software poskytl hodnoty úhlových deformací. Ty byly následně přepočteny na hodnoty tuhostí.

Výpočtový model byl inspirován modelem ozubení z disertační práce Ing. Karla Petra, Ph.D. [20]

8.1. Příprava výpočtového modelu ozubení

Pro výpočet a simulaci záběru ozubeného kola a pastorku byl nejprve v softwaru Autodesk Inventor vytvořen model ozubení s reálným tvarem zubů, dle návrhového výpočtu ozubených kol.

Dále byl model pro následný výpočet zjednodušen tím, že nebyla modelována celá kola, ale pouze jejich výseče, které obsahují pro pastorek i kolo tři zuby, které přicházejí do společného záběru. Na těchto třech párech zubů byl zrealizován jednopárový a dvoupárový kontakt zubů. Jednotlivé členy soukolí převodovky (pastorek a kolo) byly převedeny z objemových těles na plochy, a tyto plochy byly dále rozčleněny na menší úseky, a to převážně z důvodu lepšího vysítování ploch převedených do softwaru Abaqus CAE, ve kterém byl výpočet proveden.

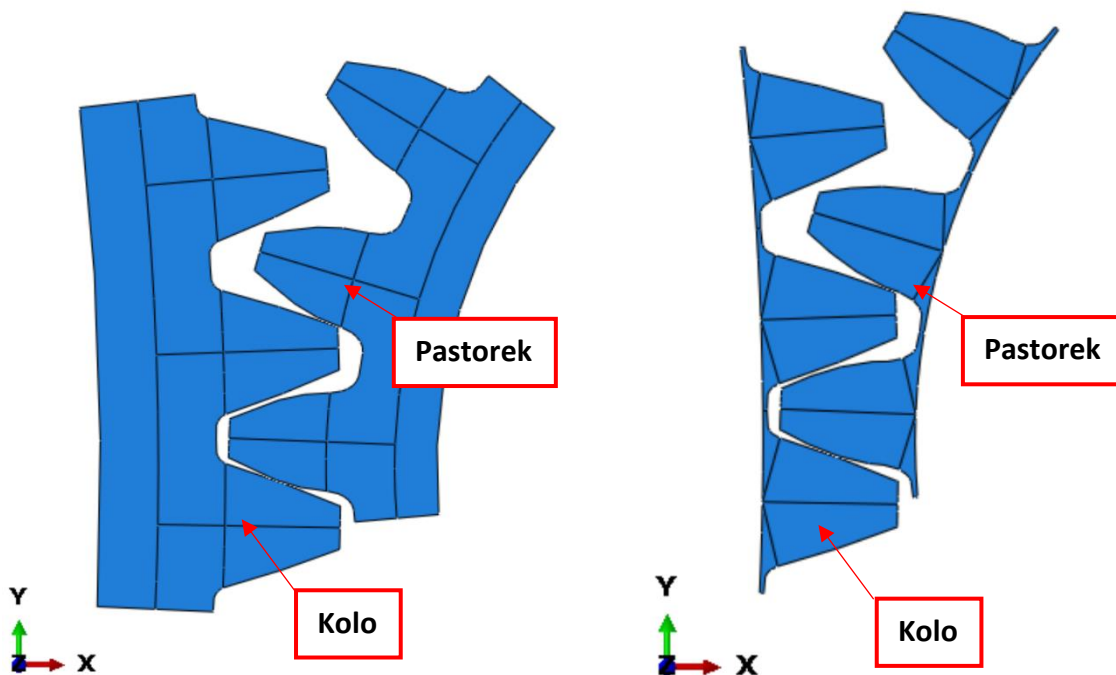
8.2. Výpočet metodou konečných prvků

Výpočet byl původně proveden na výsečích jednotlivých ozubených kol, zobrazených na Obr.35. Tento model by avšak mohl zkreslovat výsledky deformací tím, že se za patní kružnicí kola i pastorku nachází stále značně velká část výseče mezikruží (materiálu), a tím ovlivňovat výslednou tuhost, resp. ji zvyšovat.

Teoreticky vypočtená tuhost zahrnuje pouze jednotlivé zuby, které jsou v patní části vetknuty do absolutně tuhého tělesa.

Původní návrh byl takový, že část „přebytečného“ materiálu bude nastavena jako absolutně tuhé těleso („analytical rigid“) nebo se jeho materiálová charakteristika nastaví s výrazně vyšším modulem pružnosti materiálu. Ani jeden z návrhů nevedl ke konvergenci řešení.

Z tohoto důvodu byl vytvořen druhý výpočtový model (Obr.36), který má část materiálu za patní kružnici zubu výrazně menší, a tudíž tuhosti zubů byly ovlivněny méně než u původního modelu na Obr. 35.



Obr. 35.: Původní výpočtový model

Obr. 36.: Výsledný výpočtový model

8.2.1. Sestava výpočtového modelu převodovky

Model ozubení (Obr.36) určený pro výpočet, byl po jeho jednotlivých částech importován do výpočetního softwaru Abaqus CAE ve formátu „STEP“. Výpočtové prostředí bylo nastaveno jako „2D planar, deformable“.

Nejprve byly jednotlivé části pastorku a kola sloučeny, aby tvořily samostatnou, celistvou součást pastorku a kola. Tento krok byl proveden v záložce „Assembly“ – sestava, kde byly vytvořeny instance soukolí a pomocí funkce „Merge /Cut instances“ byly vytvořeny samostatné díly – „Parts“ pojmenovány jako „PASTOREK“ a „KOLO“.

Již zmiňované členění importovaných součástí bylo provedeno pro vytvoření adekvátní výpočtové sítě. Jak je vidět z obrázků Obr.35 a Obr.36, členění kola a pastorku prošlo od počátku změnou, která se projevila v lepším pokrytí výpočetních uzlů a následném vysítování.

8.2.2. Nastavení materiálových vlastností modelu

Na kartě „Property“ – vlastnosti byl nadefinován materiál, který odpovídá obecným hodnotám oceli. Jako materiálové charakteristiky byly vybrány hustota a elasticita – Youngův modul pružnosti (Tabulka 17).

Tabulka 17.: Materiálové vlastnosti

Hustota [t/mm ³]	Youngův modul pružnosti [N/mm ²]	Poissonova konstanta [1]
7,77*10 ⁻⁹	2,1*10 ⁵	0,3

V záložce „Section“ byly vytvořeny dvě totožné sekce pro pastorek a kolo. Typ těchto sekcí byl zvolen jako „Solid, Homogenous“ – homogenní těleso. Sekce vycházejí z předem nadefinovaných materiálových charakteristik v Tabulce 17, které jsou přiřazeny každé sekci zvlášť.

Následně byly sekce s materiálovým popisem přiřazeny vymodelovanému pastorku a kolu pomocí záložky „Assign Section“.

8.2.3. Vytvoření výpočtových kroků

Pro výpočet bylo zapotřebí vytvořit jednotlivé výpočtové kroky („Step“), ve kterých byly realizovány náležité dílčí postupy výpočtu.

Konkrétně v tomto výpočtu byly navrženy tři kroky a jeden automatický počáteční krok „Initial“. Tyto kroky jsou popsány v následující Tabulce 18.

Tabulka 18.: Nastavení výpočtových kroků

Step	Step_1 KONTAKTY	Step_2 ZATÍŽENÍ	Step_3 ZÁBĚR
Typ postupu	Static, General	Static, General	Static, General
Časová perioda	1	1	1
NI geom.	ON	ON	ON
Automatická stabilizace	-	-	ON (0,0002; 0,05) ⁵
Typ časového Přírůstku	Automatický	Automatický	Automatický
Maximální počet Přírůstků	200	200	600
Velikost přírůstku: (počáteční/min/max)	0,001/1*10 ⁻⁵ /0,2	0,001/1*10 ⁻⁵ /0,02	0,001/1*10 ⁻⁵ /0,005
Metoda řešení	Full Newton	Full Newton	Quasi – Newton

⁵ Automatická stabilizace nastavené hodnoty: „Specify dissipated energy fraction: 0.0002“; „Use adaptive stabilization with max. ratio of stabilization to strain energy: 0.05“

Jednotlivé kroky byly využity tímto způsobem:

- **Initial** => zavedení okrajových podmínek
- **Step_1_(KONTAKTY)** => vymezení zubové vůle a dosednutí evolventních ploch ozubení
- **Step_2_(ZATIZENI)** => po vytvoření kontaktu, je zaveden vnější silový účinek
- **Step_3_(ZABER)** => odval boků zubů za působení kroutícího momentu

8.2.4. Nastavení interakcí mezi tělesy

Protože se jedná o kontaktní úlohu, byly na kartě „Interaction“ vytvořeny interakce mezi jednotlivými spoluzabírajícími boky zubů a též bylo nutné vytvořit vazbu mezi počátečním souřadnicovým systémem pastorku i kola a samotnou součástí pastorku a kola.

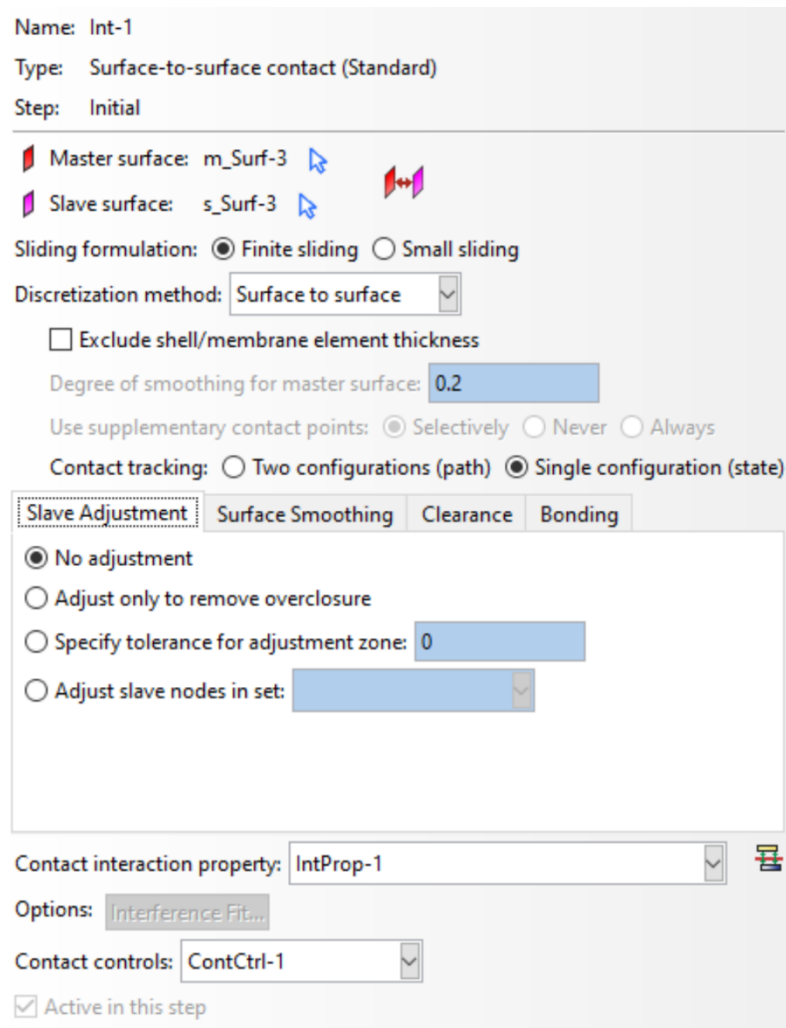
Pro vytvoření vazby mezi počátečním souřadnicovým systémem a tělesem kola a pastorku, bylo třeba do jejich středů vložit tzv. „Reference Point – RP“ referenční body, které byly následně pomocí záložky „Create Constraint“ provázány s příslušným ozubeným kolem. „RP – 1“ přísluší středu pastorku a „RP – 2“ náleží středu kola. V záložce „Create Constraint“ byl zvolen typ „Kinematic Coupling“ neboli kinematická vazba, která oběma kolům zakazuje veškeré pohyby kromě rotace kolem vlastních os.

Pro interakce – kontakt boků zubů procházejících záběrem – bylo nutností zadefinovat vlastnosti interakce v záložce „Create Interaction Property“. Jako typ interakce byl zvolen kontakt. Nastavení mechanických vlastností kontaktu je popsáno v Tabulce 19.

Tabulka 19.: Vlastnosti kontaktů

Vlastnosti v tečném směru	Vlastnosti v normálovém směru
Frictionless – bez tření	„Hard“ contact

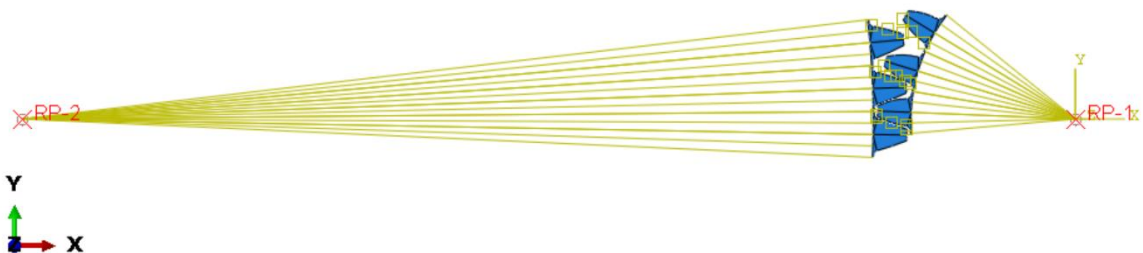
Mezi třemi páry zubů byly vytvořeny kontaktní interakce vycházející z definovaných mechanických vlastností kontaktu. Všechny tři kontakty byly nadefinovány stejným způsobem v počátečním kroku (Initial Step), se stejnými hodnotami. Pro ilustraci nastavených podmínek kontaktu je uveden Obr.37.



Obr. 37.: Nastavení kontaktu mezi prvním párem zubů

Z Obr.37 je též zřejmé, že bylo nadefinováno řízení kontaktu „Contact Controls“. Tento prvek řízení kontaktů byl nakonec zrušen z důvodu nekonvergence řešení.

Na Obr. 38 je zobrazeno schéma modelu soukolí, které již zahrnuje vazby mezi ozubenými koly a referenčními body „RP – 1“ a „RP – 2“ a dílčí kontakty mezi dosedajícími boky zubů v průběhu odvalu.



Obr. 38.: Výsledný model s nastavenými vazbami a kontakty

8.2.5. Nastavení uložení a zatížení soukolí

Karta „Load“ slouží pro určení počátečních/okrajových podmínek a pro zavedení vnějších silových účinků na soustavu.

Okrajové podmínky:

Pro výpočet je nejdůležitější stanovení počátečních/okrajových podmínek, které vymodelovaná kola definují v prostoru a jsou též podmínkou konvergence výpočtu.

Počáteční/okrajové podmínky byly nastaveny v záložce „Create Boundary Conditions“ a zahrnují uložení pastorku společně s kolem a dále obsahují předem definované natočení či rotace pastorku a kola, které byly využity pro vymezení zubové vůle a dále pro společný odval pastorku a kola.

Uložení pastorku a kola byla definovaná totožným způsobem. Byla vytvořena v kroku „Initial“ a jediný pohyb, který byl kolům povolen, je natáčení kolem své osy rotace (v tomto případě osy z). Ostatní pohyby ve 2D prostoru, tedy posuv v ose x a posuv v ose y, byly zakázány.

Další povolené podmínky jsou předepsaná natočení okolo os rotace pastorku a kola, která jsou uvedeny v Tabulce 20.

Tabulka 20.: Hodnoty natočení pastorku a kola

Natočení pastorku [rad]	Natočení kola [rad]
0,54	0,0008

Natočení kola slouží pro vymezení vůle a vytvoření kontaktu, zatímco natočení pastorku slouží pro zahájení odvalu boků zubů.

Vnější silové účinky:

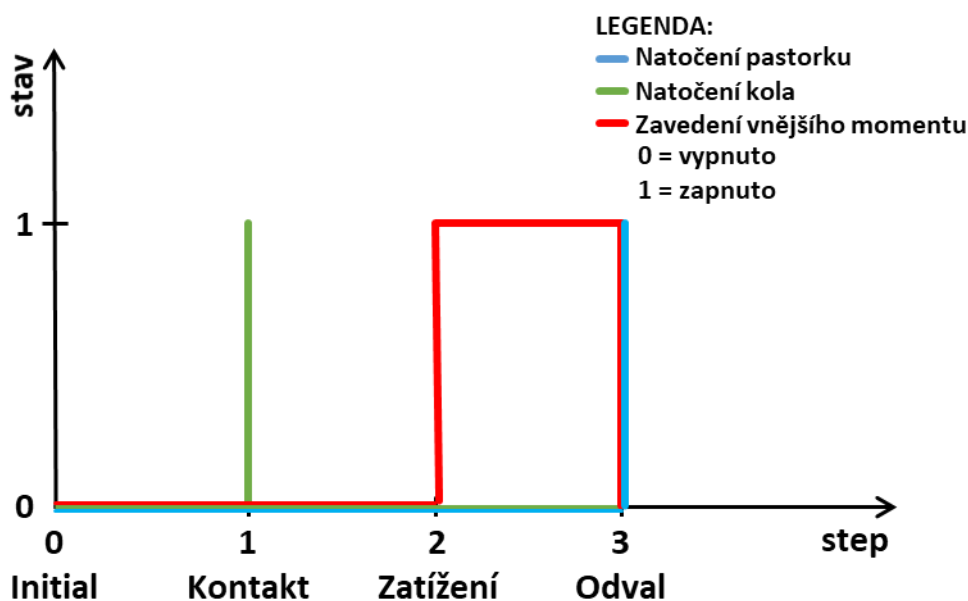
Sestava byla určena okrajovými podmínkami v počátečním kroku. Následně bylo možné zavést vnější silové působení, v tomto případě kroutící moment na kole. Ten je vytvořen v kroku „Step_1(KONTAKTY) a jeho hodnota je uvedena tabulkou (Tabulka 21).

Tabulka 21.: Zatěžující moment na kole

M_2 [Nmm]
100000

Amplitudy zatížení:

Podmínky uložení byly vytvořeny v počátečním kroku „Initial Step“. Všechny ostatní podmínky natočení či zavedení vnějšího momentu byly vytvořeny v prvním výpočetním kroku „STEP_1_(KONTAKTY)“. Nicméně všechny tyto podmínky nevstupují do výpočtu společně v prvním kroku. Ten je určen pouze pro vytvoření kontaktu. V tomto případě byl vytvořen „vypínač“ jednotlivých podmínek a zatížení pomocí amplitud zatížení, který definuje, v kterém kroku má daná podmínka promlouvat do výpočtu a ve kterém nikoliv. Názorně demonstrováno na Obr. 39.



Obr. 39.: definované amplitudy - "vypínač"

8.2.6. Vytvoření sítě

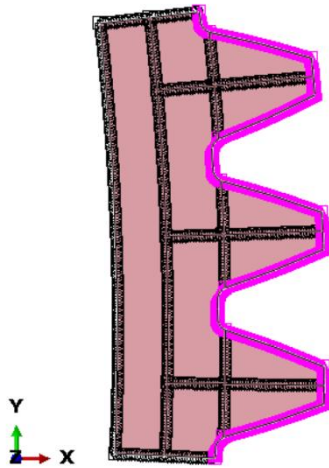
Model importovaný ze softwaru Autodesk Inventor již byl připraven pro vytvoření sítě díky rozdělení pastorku a kola na části. Díky tomuto rozdělení součásti bylo možné v záložce „Mesh“ na kartě „Assign Mesh Control“ definovat tvar budoucích prvků sítě v softwaru Abaqus CAE, označovaný jako „Quadrilateral“.

Původní nepoužitý model na Obr.35. vykazoval dělení, které neumožňovalo zvolit strukturovanou metodu síťování, proto bylo v realizovaném modelu na Obr.36 zvoleno odlišné dělení součástí, které následně umožnilo zvolit „Quadrilateral“ prvky se strukturovanou metodou vytvoření sítě.

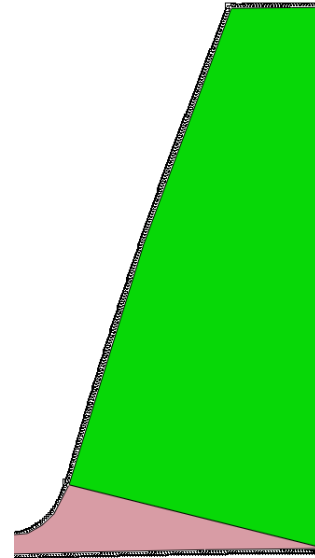
Na kartě „Assign Element Type“ bylo určeno tzv. „Geometric Order“ jako kvadratické.

Následně byla definována velikost prvků sítě pomocí karty „Seed Part“ a konečné vysíťování součásti bylo provedeno pomocí záložky „Mesh Part“.

Sít původního modelu (pastorku i kola) byla tvořena prvky o velikosti 0,1 (na Obr.40 značeno černou barvou) a na hraně, kde dochází ke kontaktu a odvalu byla síť zhuštěna prvky o velikosti 0,02 (na Obr.40 značeno růžově).



Obr. 40.: Zhuštěné prvky v místě kontaktu



Obr. 41.: Prvky rozmístěné po hraně modelu

Sít realizovaného výpočtového modelu byla vytvořena jednotnými prvky o velikosti 0,02. V tomto případě nebylo záhodno na některých místech zvětšovat velikost elementů jako v předešlém případě. Na Obr.41 je černou barvou naznačeno rozmístění prvků po hranách modelu. Zelená barva značí součást vhodnou ke strukturovanému vysítování.

Shrnující údaje o vytvořené síti modelu (Obr. 36) jsou uvedeny v následujících Tabulkách 22 a 23:

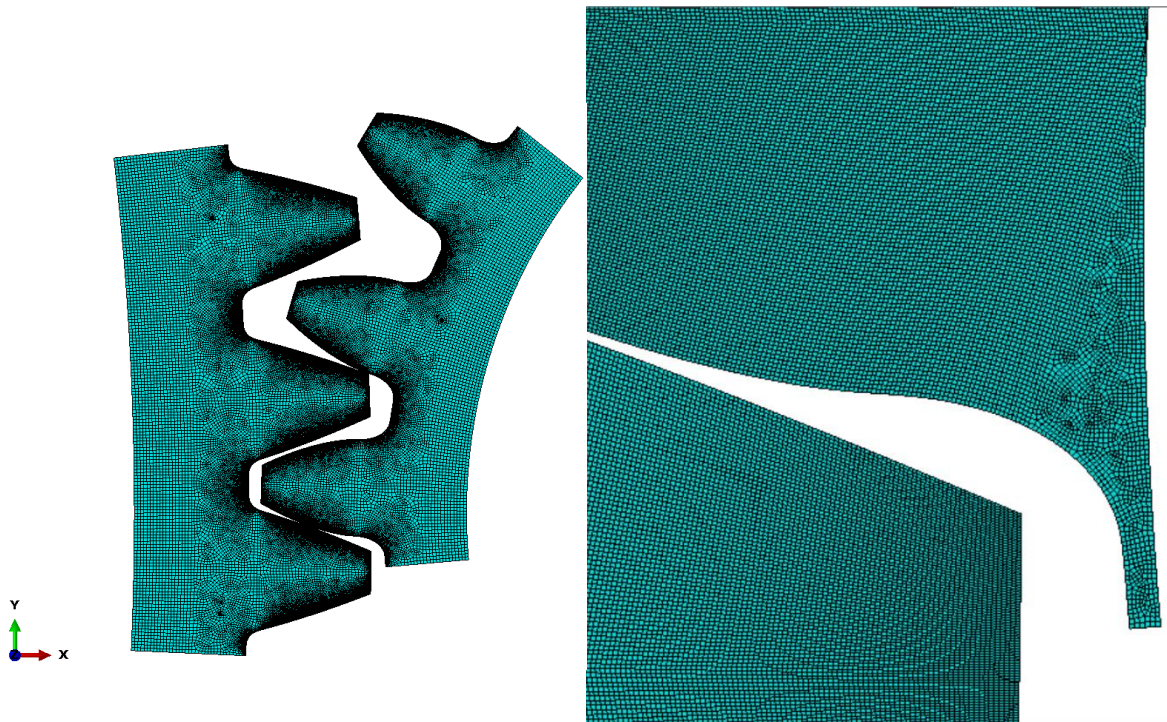
Tabulka 22.: Pastorek – údaje o síti

Celkový počet uzlů	Celkový počet elementů	Typ elementu
338 673	111 968	CPS8R

Tabulka 23.: Kolo – údaje o síti

Celkový počet uzlů	Celkový počet elementů	Typ elementu
254 505	83 952	CPS8R

Vizualizace sítě pro porovnání původního a realizovaného řešení je znázorněna na následujících obrázcích (Obr.42, 43).



Obr. 42.: Sít' původního modelu bez pravidelné struktury

Obr. 43.: Detail pravidelné struktury použitého modelu

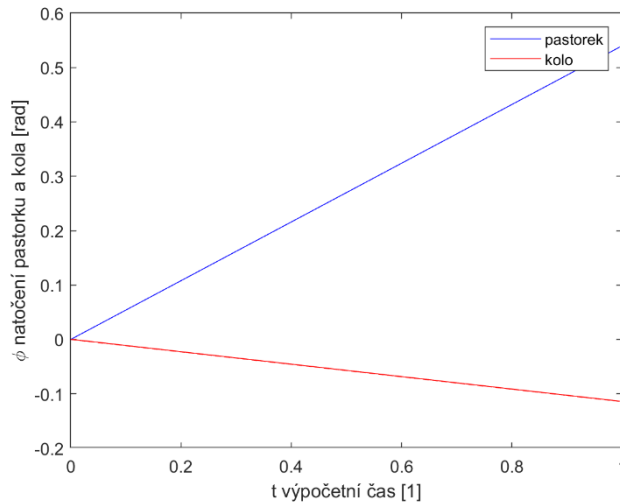
Celkový pohled na síť použitého modelu je nahrazen detailem sítě, z důvodu velké hustoty elementů a lepší čitelnosti (Obr.43).

8.3. Zpracování výsledků

Vypočtený model je schopen poskytnout celou řadu výsledků v podobě redukováného napětí, kontaktních napětí, posuvů atd.

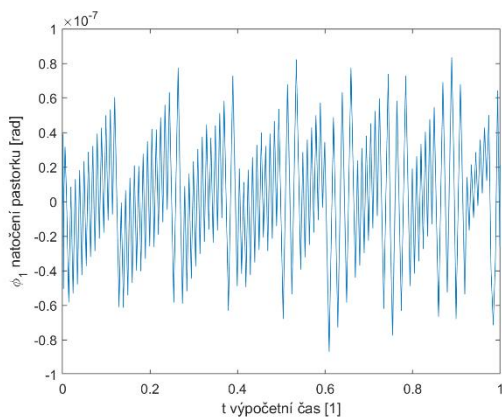
Tuhost ozubení je definována zatížením a deformací čili pro získání průběhu proměnné torzní tuhosti je zapotřebí vyčíst úhlové natočení – úhlovou deformaci. Ta byla v mém případě vyčtena z referenčních bodů „RP – 1“ a „RP – 2“. Zobrazený průběh natočení (Obr. 44) je v tomto výpočtu až z kroku „Step_3_(ZABER)“, protože během něj dochází k odvalu zubů.

Výsledné hodnoty deformačního natočení byly ze softwaru Abaqus CAE importovány do MS Office Excel a s těmito hodnotami bylo dále pracováno v prostředí softwaru Matlab.

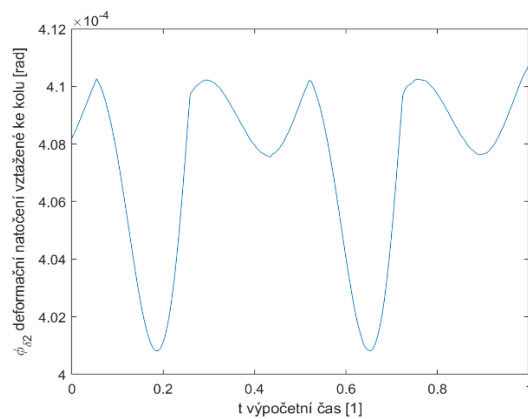


Obr. 44.: Průběh natočení pastorku a kola během záběru

Z grafu na Obr.44 lze vidět průběhy natočení pastorku a kola během třetího výpočetního kroku (tedy odvalu). Průběhy jsou zdánlivě přímkové se vzájemným poměrem převodového čísla. Pokud od těchto křivek připomínající přímky odečteme přímky skutečné, které by odpovídaly odvalu absolutně tuhého pastorku a kola, získáme průběhy deformace v radiánech.



Obr. 45.: Průběh rotace pastorku



Obr. 46.: Průběh deformace kola

Po odečtení skutečné přímky odpovídající odvalu absolutně tuhého pastorku od průběhu odvalu pastorku na Obr.44, získáme průběh znázorněný na Obr.45. Na něm je možné pozorovat „pilový“ průběh hodnot natočení (řádově 10^{-7} rad) oscilujících okolo hodnoty 0 rad. Z toho lze vyčíst chování pastorku, který je „nucený“ předepsanou hodnotou rotace (0,54 rad) se v každém inkrementu přiblížit určitému pootočení.

Odečtením přímky, která představuje odval absolutně tuhého kola od křivky, popisující odval kola na Obr.44, získáme průběh, na kterém je vidět deformace zubů kola v průběhu odvalu přes tři páry zubů (Obr.46).

S touto deformací je dále pracováno, aby byla přepočtena na torzní tuhost zubů.

Torzní tuhost:

Při respektování teorie zpracované v kapitole 3.1.1, která uvádí, že jednopárový záběr je nahraditelný modelem dvou sériově zapojených pružin, pak celková torzní tuhost je dána vztahem (8.1):

$$k_{tC} = \frac{k_{t2} \cdot k_{t1}}{k_{t2} + k_{t1}} \quad (8.1)$$

Kde k_{t2} je torzní tuhost kola a k_{t1} je torzní tuhost pastorku. Z rovnice (8.1) byly vyjádřeny jednotlivé tuhosti pomocí momentů a příslušných úhlových deformací. Do úpravy vztahu (8.1) byla také zahrnuta skutečnost, že moment na kole je moment na pastorku vynásobený převodovým poměrem.

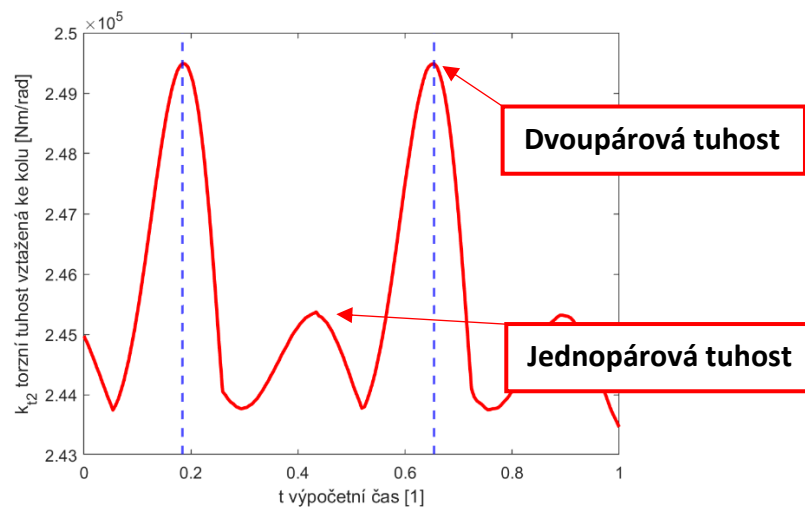
$$k_{tC} = \frac{M_2}{(i_{12} \cdot \varphi_{\delta 1} + \varphi_{\delta 2})} \quad (8.2)$$

Výše zmíněnými úpravami byl získán vztah (8.2), který zahrnuje: M_2 – moment na kole, i_{12} – převodový poměr, $\varphi_{\delta 1}$ – úhlovou deformaci zubů pastorku a $\varphi_{\delta 2}$ – úhlovou deformaci zubů kola.

Torzní tuhost samotného kola je rovna výrazu (8.3):

$$k_{t2} = \frac{M_2}{\varphi_{\delta 2}} \quad (8.3)$$

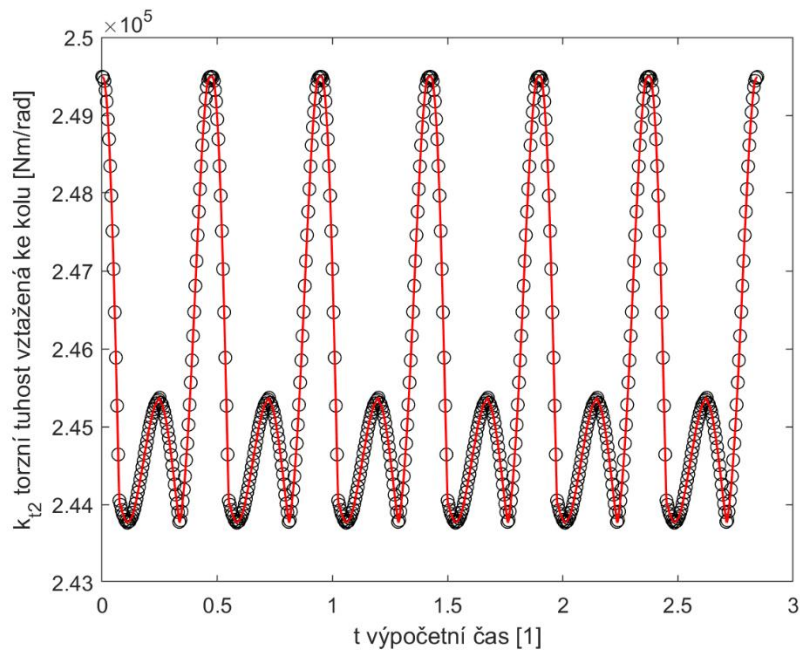
Z výstupních dat úhlových deformací ze softwaru Abaqus CAE máme k dispozici deformaci, která je totožná s deformací kola. Viz Obr.47.



Obr. 47.: Průběh torzní tuhosti kola

Průběh torzní tuhosti:

Obr.47 zobrazuje průběh tuhosti pouze při odvalu přes 3 zuby. Pro názorné porovnání průběhu tuhostí vypočtených za pomoci MKP analýzy s teoretickým průběhem Fourierovy řady byl vytvořen průběh zobrazený na Obr.48.



Obr. 48.: Průběh torzní tuhosti

Ten vznikl následujícím způsobem.

Pro porovnání s teoretickým průběhem bylo zapotřebí, aby průběh začínal v polovině doby trvání dvoupárového záběru a následně, aby byl nasimulován odval přes více párů zubů.

K těmto úpravám posloužila vybraná data z původního průběhu (zobrazeném na Obr.47), která se nacházejí v intervalu označeném modrými přerušovanými čarami.

Tato data byla následně zkopírována a skládána za sebe tak, aby vznikl model odvalu přes více párů zubů než v původním modelu se třemi páry zubů.

Další důležitou úpravou bylo proložení MKP dat křivkou, aby bylo možné přiřadit hodnotám tuhostí stejný časový krok jako v teoretickém výpočtu. To bylo provedeno interpolací bodů získaných MKP výpočtem.

Tyto popsané kroky práce se získanými daty jsou zobrazeny na Obr.48, kde jsou černou barvou označeny body získané výpočtem v Abaqus CAE a červeně je zde znázorněna interpolace těchto bodů.

Teoretická torzní tuhost:

V kapitole 6.3.2 byl vypočten průběh teoretické tuhosti pomocí Fourierovy řady. Tato tuhost je tuhostí celkovou a představuje tuhost tlačných pružin, nikoliv tuhost pružin torzních. Proto bylo zapotřebí tuto tuhost přepočítat na teoretickou torzní tuhost vtaženou ke kolu.

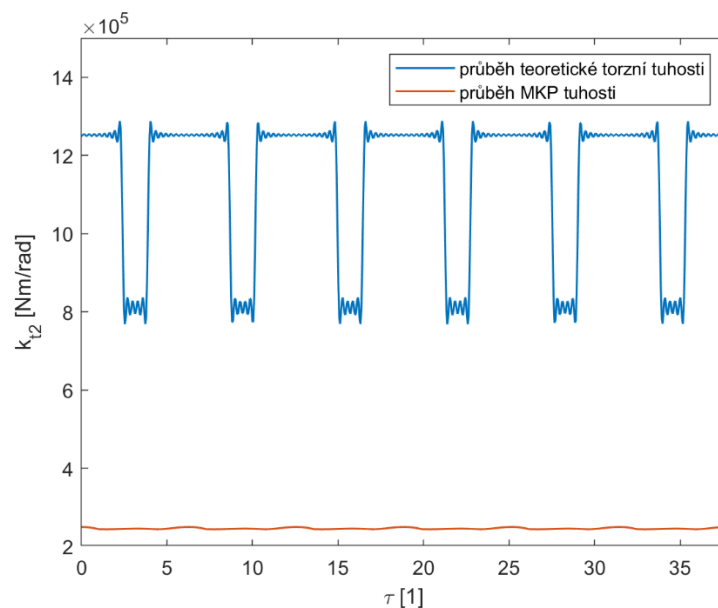
Tento přepočet prakticky vychází z rovnice (6.44) v kapitole 6.3.3, kde se teoretická tuhost přepočítává též na torzní tuhost kola v dynamických rovnicích, a to tímto způsobem:

$$k_{t2_teor} = k(t) \cdot r_2^2 \cos^2 \alpha \quad (8.4)$$

Teoretická „lineární“ tuhost $k(t)$ je násobena kvadrátem poloměru kola r_2 . Násobení kvadrátem $\cos \alpha$ zde zajišťuje přepočítání kvadrátu roztečného poloměru r_2^2 na kvadrát poloměru základní kružnice r_{b2}^2 .

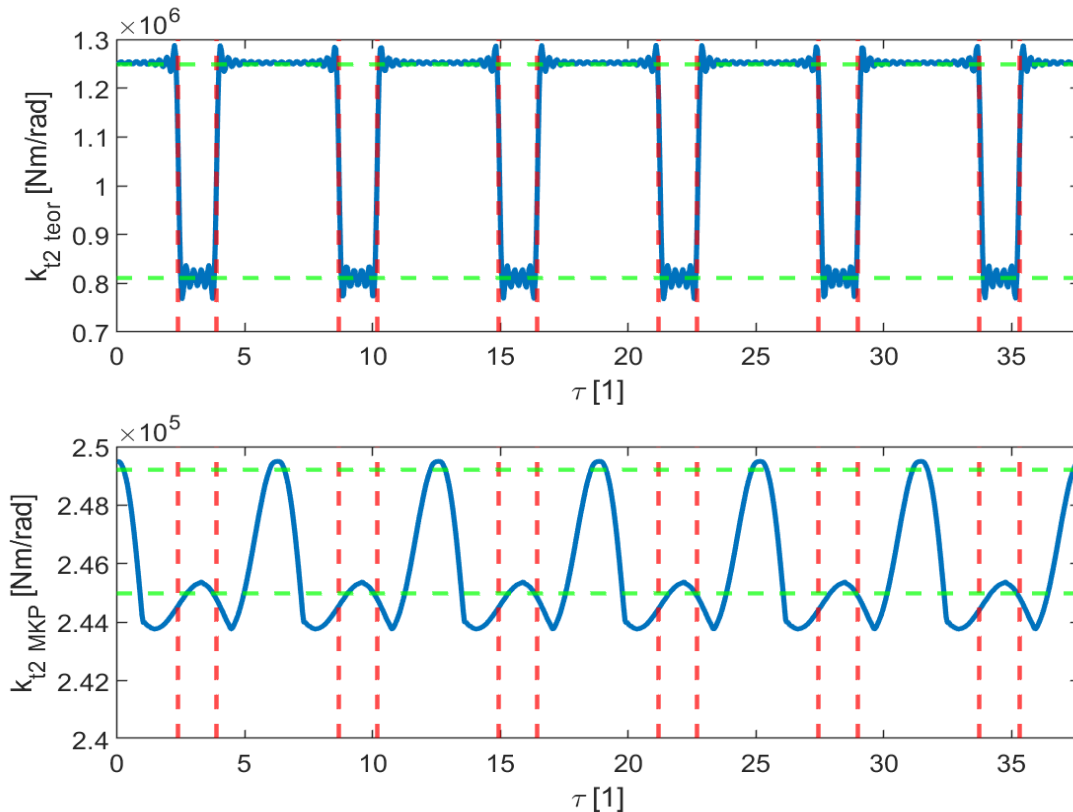
Porovnání:

Spojením teoretického průběhu torzní tuhosti vztažené ke kolu a průběhu na Obr.48 získáme možnost porovnat jednotlivé hodnoty tuhostí mezi sebou (Obr.49).



Obr. 49.: Teoretická torzní tuhost

Při porovnávání těchto dvou průběhů je nutno podotknout, že při použití teoretických výpočtových vztahů pro jednopárovou a dvoupárovou tuhost ozubení byl opomenut zcela zásadní faktor, který má na výsledek zásadní vliv. Výsledek je lépe znázorněný na Obr.50.



Obr. 50.: Detailnější porovnání obou průběhů

Zmiňovaným faktorem je oblast použitelnosti teoretických vztahů, určených pro předběžné výpočty tuhosti ozubení.

Tyto podmínky použitelnosti oněch vztahů, dle zdroje [4], určují, že je lze pro vypovídající výsledek využít, pokud soukolí splňuje tyto podmínky:

- Ozubení je **vnější**
- Ozubení je **přímé nebo šikmé** (šikmé je nutno přepočítat na kolo přímé díky využití teorie o virtuálním kole)
- Ozubení má **standardní základní profil**:
 - $\alpha_n = 20^\circ$
 - $h_{a0}^* = 1, 2$
 - $h_{f0}^* = 1, 0$
 - $\rho_0^* = 0, 2$
- Pro **korekce ozubení** platí:
 - $x_1 \geq x_2$
 - $-0, 5 \leq x_\Sigma \leq 2, 0$

Při návrhu modelového ozubení tedy došlo k nedodržení podmínek, a to zejména těch, které se týkají korekcí.

V důsledku tohoto zjištění bylo navrženo nové soukolí, jímž bude ověřena platnost vztahů pro výpočet teoretické tuhosti ozubení. Zároveň byl proveden nový dynamický výpočet, ve kterém byly frekvenční charakteristiky modelu převodovky s novým soukolím a teoretickým popisem proměnlivé tuhosti porovnány s modelem, který zahrnuje průběh tuhosti určený na základě výsledků nově proběhlého výpočtu metodou konečných prvků, tzv. MKP tuhost.

9. Výpočty s ověřovacím soukolím

Soukolí, které bylo navrženo pro potvrzení platnosti teoretických empirických vztahů, popisujících jednopárovou a dvoupárovou tuhost ozubení, má následující parametry:

Tabulka 24.: Parametry ověřovacího soukolí

Název	Značka	Hodnota		Jednotka
		Pastorek ⁶	Kolo ⁷	
Modul	m_n	1,5		[mm]
Počet zubů	z	29	30	-
Jednotková korekce	x	0,269618	0,260631	-
Boční vůle	c_n	0		-
Úhel záběru	α_n	20		[°]
Úhel sklonu	β	0		[°]
Úhel valivý	α_w	22,48		[°]
Osová vzdálenost	a_w	45		[mm]
Šířka kola	b	27	23	[mm]
Šířka záběru	$b_{1,2}$	23		[mm]
Průměr roztečné kružnice	d	43,5	45	[mm]
Průměr hlavové kružnice	d_a	47,21	48,69	[mm]
Průměr patní kružnice	d_f	40,55	42,03	[mm]
Průměr základní kružnice	d_b	40,88	42,29	[mm]
Průměr valivé kružnice	d_w	44,24	45,76	[mm]
Výška hlavy	h_a	1,86	1,85	[mm]
Výška paty	h_f	1,47	1,48	[mm]
Výška zubu	h	3,33	3,33	[mm]
Tloušťka zubu	s_n	2,65	2,64	[mm]
Tloušťka mezery	v_n	2,06	2,07	[mm]

⁶ Parametry související s pastorkem jsou vždy v následujícím textu označovány spodním indexem 1.

⁷ Parametry související s kolem jsou vždy v následujícím textu označovány spodním indexem 2.

9.1. Dynamický výpočet s uvažováním teoretické proměnlivé tuhosti

Výpočet, který byl znovu proveden, respektuje stejné schéma řešení, jak je naznačeno v kapitole 6.3., která pojednává o sestavení dynamických rovnic pro modelovou převodovku s respektováním časově závislé tuhosti ozubení.

Parametry, které vstupují do výpočtu, jsou následující:

Tabulka 25.: Parametry dynamického výpočtu s ověřovacím soukolím

Název	Značka	Hodnota	Jednotka
Moment setrvačnosti motoru	J_M	0,027	[kgm ²]
Moment setrvačnosti pastorku	J_1	0,000389	[kgm ²]
Moment setrvačnosti kola	J_2	0,000517	[kgm ²]
Moment setrvačnosti brzdy	J_B	0,027	[kgm ²]
Torzní tuhost spojky	k_1	10900	[Nm/rad]
Torzní tuhost výstupního hřídele	k_2	1434891	[Nm/rad]
Součinitel trvání záběru	ε	1,509	[-]
Průměr roztečné kružnice pastorku	d_1	43,5	[mm]
Průměr roztečné kružnice kola	d_2	45	[mm]
Převodový poměr	i_{12}	1,034	[-]

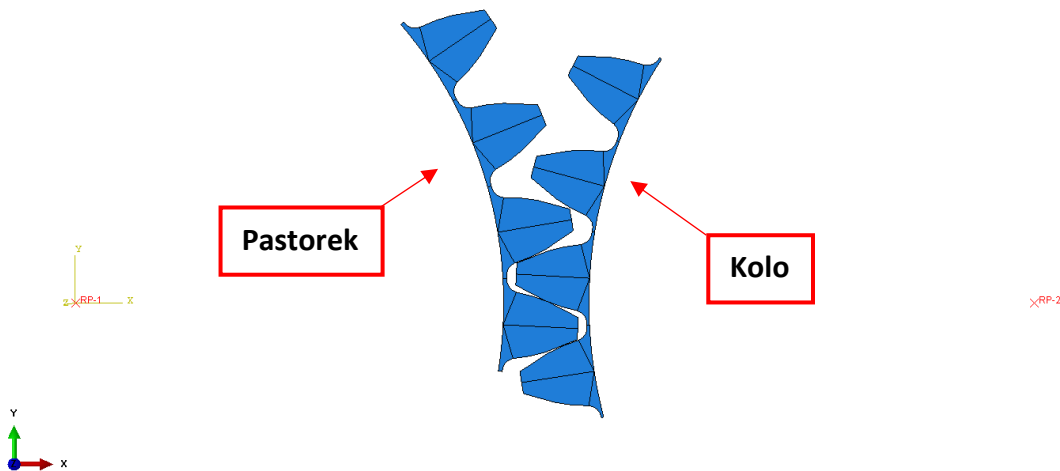
Fourierova řada, určující proměnlivou tuhost ozubení, která vstupuje do výpočtu, vychází ze vztahu (3.5). Hodnoty jednopárové a dvoupárové tuhosti jsou nově dle Tabulky 26 tyto:

Tabulka 26.: Hodnoty tuhosti jednoho a dvou párů zubů ověřovacího kola v záběru

$k' = k_{(1)} \text{ [N/m]}$	$k_\gamma = k_{(2)} \text{ [N/m]}$
408542952,5	564596146,8

Výsledkem dynamické analýzy je opět frekvenční spektrum, které bylo následně porovnáno s dynamickým výpočtem, zahrnující průběh proměnlivé tuhosti, která je výsledkem analýzy MKP.

9.2. Ověření tuhosti ověřovacího kola pomocí MKP



Obr. 51.: Výsledný model s nastavenými vazbami a kontakty

Analýza a identifikace tuhostí nového ověřovacího soukolí (zobrazeném na Obr. 51) pomocí metody konečných prvků proběhla opět dle stejného schématu výpočtu, jak bylo popsáno v kapitole 8. Tentokrát byly modely ozubených kol vytvořeny se čtyřmi dvojicemi zubů pro zřetelnější identifikaci průběhu úhlové deformace.

Výstupem z výpočtu je opět průběh deformačního natočení, které bylo vyčteno z referenčních bodů (RP-1 a RP-2).

V kapitole 8 bylo popsáno získání úhlové deformace kola a následné vypočtení torzní tuhosti ozubení na kole. Teoretická tuhost, představující tuhost tlačných pružin, byla přepočítána na tuhost torzní, vztaženou též ke kolu.

V tomto případě, kdy je pro výpočet použito soukolí s převodovým poměrem $i_{12} \cong 1$ a tvary zubů lze považovat za téměř totožné, lze říci, že deformace zubů na kole je stejná s deformací zubů na pastorku (9.1). Tento předpoklad umožní přepočítat celkovou torzní tuhost na celkovou tuhost tlačných pružin.

$$\varphi_{\delta 1} = \varphi_{\delta 2} \quad (9.1)$$

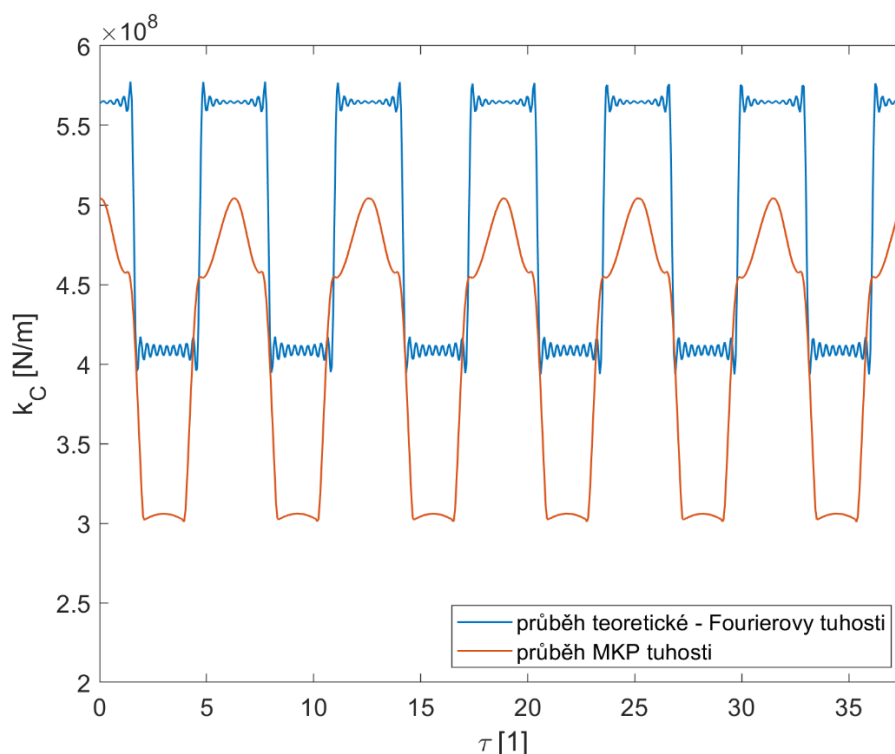
Celková torzní tuhost je dána vztahem (9.2):

$$k_{tC} = \frac{k_{t2} \cdot k_{t1}}{k_{t2} + k_{t1}} \quad (9.2)$$

Po úpravě vztahu (9.2) získáme vztah pro celkovou tuhost o rozměru [N/m] (9.3), se kterou byla porovnána teoretická tuhost zadaná Fourierovou řadou.

$$k_C = \frac{\frac{k_{t2}}{r_{b2}^2} \cdot \frac{k_{t1}}{r_{b1}^2}}{\frac{k_{t2}}{r_{b2}^2} + \frac{k_{t1}}{r_{b1}^2}} = \frac{M_2}{\varphi_{\delta 1} \cdot i_{12} \cdot r_{b1}^2 + \varphi_{\delta 2} \cdot r_{b2}^2} \quad (9.3)$$

Díky přepočtu na celkovou tuhost (9.3), odpovídající tlačným pružinám, byl získán průběh celkové tuhosti ozubení a bylo možné ho porovnat s teoretickým modelem proměnné tuhosti, který je zadán Fourierovou řadou, jak je ukázáno na následujícím Obr.52.



Obr. 52.: Porovnání teoretické tuhosti s průběhem získaným z MKP analýzy

Z Obr.52 je patrné, že tvar průběhu tuhosti ozubení, který byl získán MKP výpočtem (červená křivka), je v souladu s průběhem teoretické tuhosti. Hodnoty obou tuhostí se pohybují ve stejném řádu, tedy 10^8 [N/m]. Rozdílnost v hodnotách jednopárové a dvou párové tuhosti může být způsobena tvarem paty zubů, který má na výsledky značný vliv.

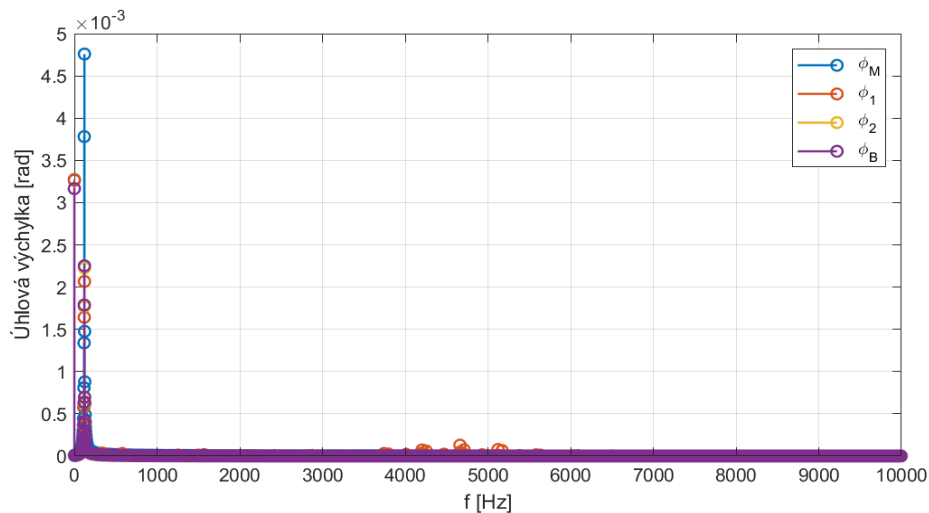
9.3. Výsledky frekvenční analýzy ověřovacího soukolí

Nyní, když jsou známy průběhy tuhostí (teoretický a získaný z MKP výpočtu), je vhodné provést dynamický výpočet s oběma průběhy, využít je pro výsledné porovnání frekvenčních spekter obou výpočtů a sledovat rozdílnosti výsledných grafů.

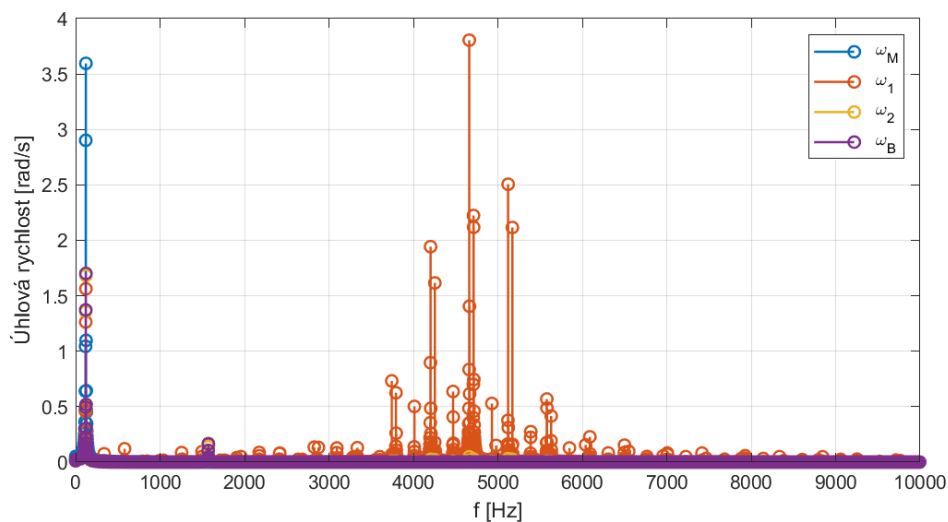
Pro získání frekvenčního spektra bylo využito Fourierovy transformace, která pracuje s časovými průběhy natočení a úhlových rychlostí.

Frekvenční analýza dynamického systému převodovky s použitím teoretického průběhu tuhosti ozubení:

Při využití stejného postupu výpočtu, jako tomu bylo v kapitole 6.3, byly získány grafické závislosti amplitud úhlového natočení a úhlové rychlosti na frekvenci, ze kterých lze vyčíst vlastní frekvence dynamického systému převodovky.



Obr. 53.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – porovnávací model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou



Obr. 54.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z rychlostí) – porovnávací model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou Fourierovou řadou

Na základě Obr.53 a Obr.54 lze určit vlastní frekvence dynamické soustavy, která je tvořena motorem, soukolím a brzdou.

Vlastní frekvence dosahují hodnot **0 Hz** (soustava se chová jako dynamický řetězec), **122 Hz, 1572 Hz** a dále jsou zde patrné frekvence příslušící soukolí, a to **3744, 4204, 4662, 5122 a 5580 Hz**. Jednotlivé frekvence, způsobené záběrem pastorku a kola, mají mezi sebou rozdíl **458 Hz**, což odpovídá zubové frekvenci soukolí, která je dána vztahem (9.4):

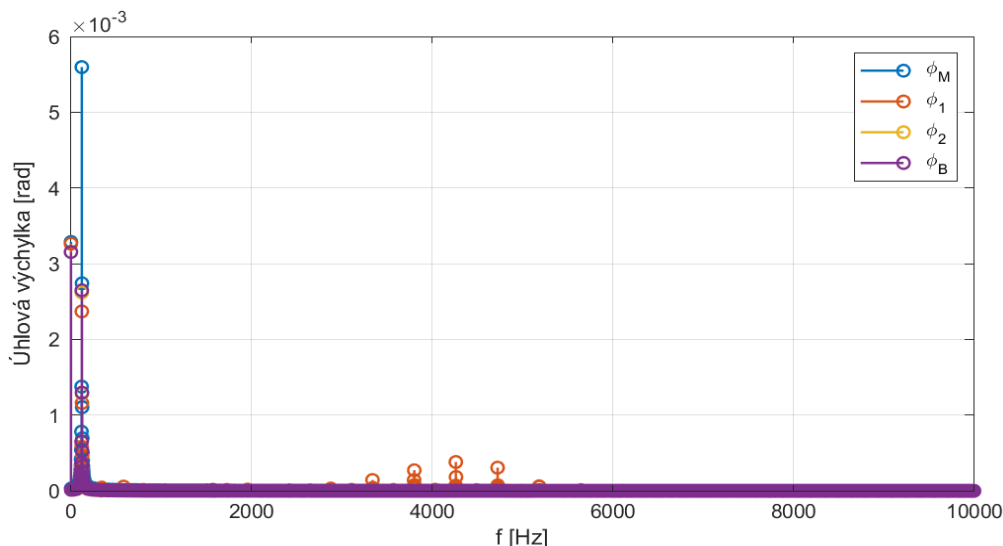
$$f_z = z_1 n_1 = z_2 n_2 \quad (9.4)$$

kde z_1 a z_2 jsou počty zubů pastorku a kola a n_1, n_2 jsou otáčky pastorku a kola v jednotkách [1/s].

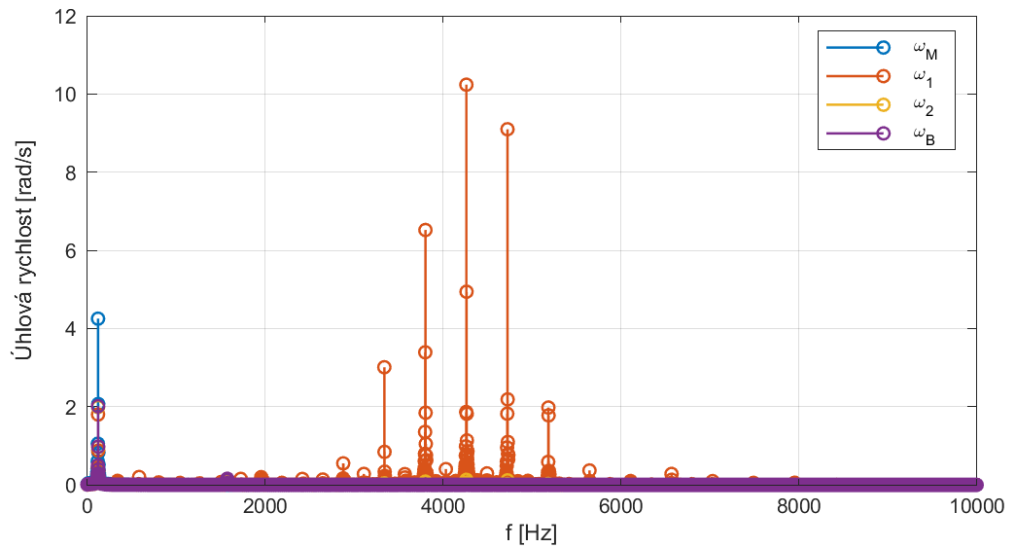
Frekvenční analýza dynamického systému převodovky s použitím průběhu tuhosti ozubení z MKP analýzy:

Výpočet opět sleduje kroky z kapitoly 6.3, nyní ale s tím rozdílem, že za hodnoty tuhosti ozubení byl místo vektoru tuhostí získaného pomocí Fourierovy řady tentokrát dosazen vektor obsahující hodnoty, které vzešly z výpočtu pomocí metody konečných prvků.

Dále byla získána tato frekvenční spektra.



Obr. 55.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – porovnávací model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou vektorem hodnot z MKP analýzy

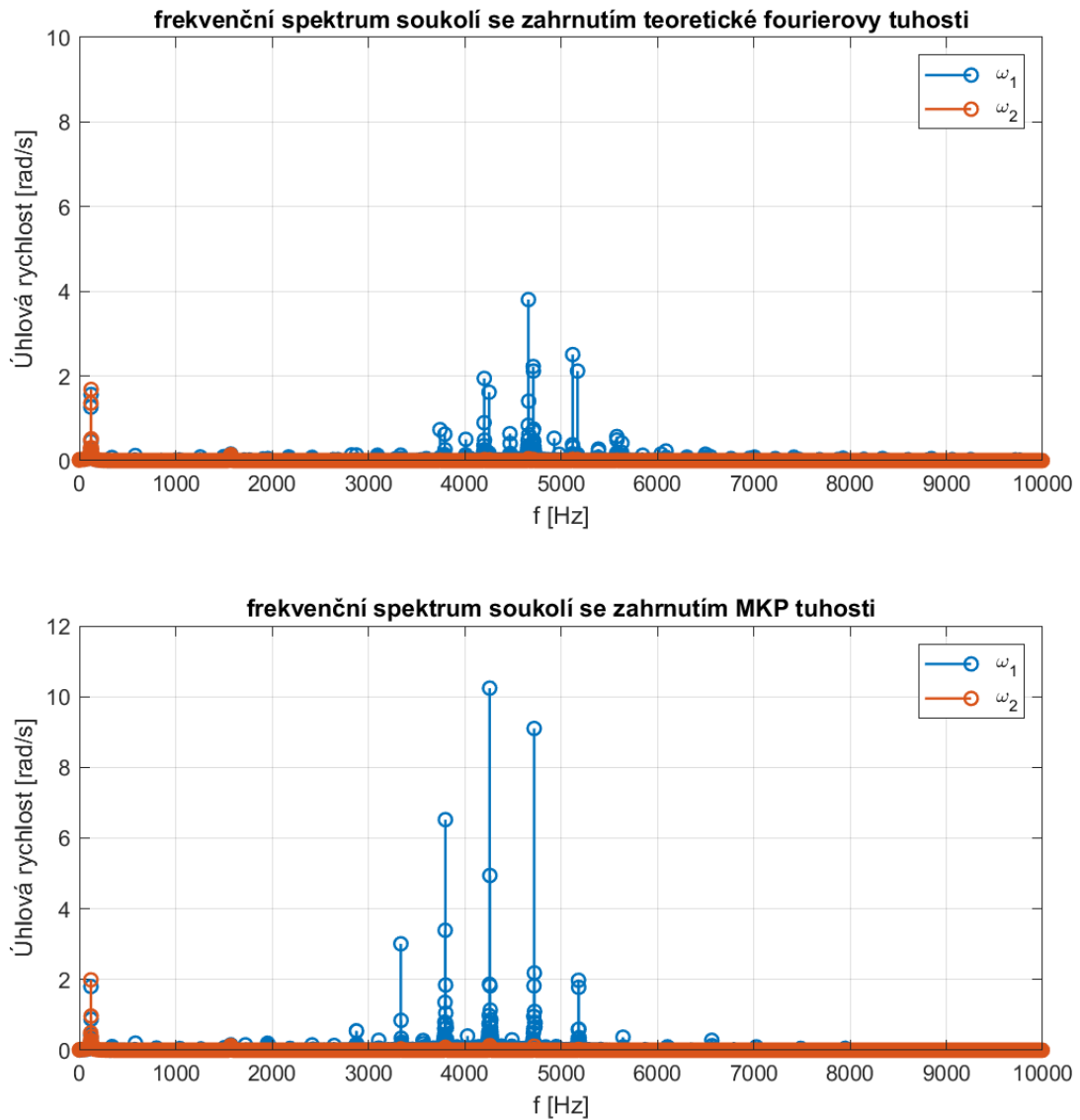


Obr. 56.: Fourierova amplitudo-frekvenční charakteristika (z výchylek) – porovnávací model s uvažováním tuhosti ozubení reprezentovanou vektorem hodnot z MKP analýzy

Z grafů na Obr.55 a Obr.56 jsou opět patrné vlastní frekvence systému, které dosahují hodnot: **0 Hz** (dynamický řetězec), **122 Hz** a **1572 Hz**. Vlastní frekvence soukolí jsou v tomto případě rovny hodnotám **3340, 3800, 4260, 4720, 5180 Hz**. Vlastní frekvence soukolí přibývají s konstantou **460 Hz**, což je hodnota zubové frekvence.

Porovnání obou frekvenčních spekter:

K lepšímu porovnání obou frekvenčních spekter poslouží Obr.57, na kterém jsou zobrazeny pouze vlastní frekvence soukolí. Ty se totiž liší, pokud porovnáme vlastní frekvence z výpočtu s teoretickou tuhostí a frekvence s tuhostí z výpočtu MKP.



Obr. 57.: Porovnání frekvenčních spekter nových dynamických výpočtů

Při porovnání vlastních frekvencí na Obr.57 jsou vidět patrné rozdíly.

- **Frekvence a výchylky**

Na první pohled je vidět, že při **zohlednění teoretické Fourierovy tuhosti** dynamický systém – soukolí dosahuje **vyšších vlastní frekvencí**, než tomu je v případě použití průběhu tuhosti z výpočtu MKP.

Dále je zřejmé, že **soukolí s MKP tuhostí** dosahuje při svých vlastních frekvencích **vyšší amplitudy úhlových rychlostí**, než tomu je v případě výpočtu s teoretickou tuhostí.

Tyto poznatky vyčtené z Obr.57 lze odůvodnit skutečností, že se mezi sebou tuhosti teoretické a simulované pomocí softwaru Abaqus liší, jak je vidět z porovnávacího grafu (Obr.52).

Jelikož je výsledná tuhost získaná z MKP výpočtu hodnotově nižší, než tuhost teoretická – Fourierova, soukolí se chová poddajněji. Méně tuhé ozubení umožní při stejných vstupních podmínkách výpočtu, aby se zuby více deformovaly, tudíž i amplitudy úhlových natočení a úhlových rychlostí budou větší.

Stejnou úvahou lze vyhodnotit i skutečnost, že vlastní frekvence soukolí s MKP tuhostí ozubení jsou nižší. Opět to souvisí s menší tuhostí ozubení v případě zahrnutí MKP tuhosti.

- **Frekvence při výpočtu s Fourierovou tuhostí**

Ve frekvenčním spektru **zahrnujícím teoretickou tuhost** (Obr.57) si lze povšimnout, že okolo výrazných vlastních frekvencí se vyskytují méně výrazné přidružené frekvence, na rozdíl od spektra, které vzniklo dynamickým výpočtem s MKP tuhostí.

Odůvodnění vychází z porovnávacího grafu na Obr.52. Z něj lze odpozorovat, že průběh Fourierovy řady se chová tak, že pomocí goniometrických funkcí sinus a cosinus se přibližuje dvěma konstantním hodnotám, které určují jednopárový a dvoupárový záběr. Typicky „zvlněný“ průběh okolo hodnot jednopárové a dvoupárové tuhosti má za následek to, že do dynamického výpočtu tato proměnná tuhost přináší nové časové průběhy sinů a cosinů, a ty se následně projeví ve frekvenčním spektru právě těmito přidruženými frekvencemi k frekvencím vlastním.

ZÁVĚR

Tato diplomová práce byla vypracována na základě vytyčených cílů, které se týkají problematiky dynamiky ozubených převodů.

V rámci plnění cílů byla zpracována témata, která se týkají dynamických výpočtů – modelování torzní soustavy převodovky se soukolím s přímým ozubením. Zásadním aspektem dynamických modelů bylo zakomponování modelu tuhosti ozubení do výpočtů, který se vyznačuje střídáním jednopárového a dvoupárového záběru v čase, a dále též zohledněním výrobních nepřesností, reprezentovaných kinematickou úchylkou převodového poměru.

Mezi součást rešerše, zahrnující teoretická východiska a poznatky o dynamice převodových systémů, byl zařazen přehled odborných článků a prací, které se týkají tohoto tématu a mohou tak rozšířit povědomí o možnostech modelování těchto soustav.

Ústřední literaturou, která se věnuje této tématice, byly publikace českých autorů uvedené v seznamu použité literatury a celá řada zahraničních odborných článků, které používají totožné nebo podobné modely, popisující tuhost ozubení a výrobní nepřesnosti.

Další částí této diplomové práce byla praktická aplikace sestavených dynamických modelů na navržené soukolí, jejichž výsledkem jsou frekvenční oblasti – amplitudo-frekvenční charakteristiky kmitajícího řetězce (převodovky).

Zásadním cílem byla též identifikace tuhosti soukolí, vycházející z výpočtu metodou konečných prvků a následné porovnání takto získaného průběhu tuhosti ozubení s teoretickým modelem tuhosti, který je zde modelován Fourierovou řadou.

Důležitým poznatkem této práce je fakt, který vedl k nesprávným a neporovnatelným výsledkům tuhosti ozubení. Prvotně navržené soukolí nevyhovovalo podmínkám použitelnosti Fourierovy řady pro získání průběhu teoretické tuhosti během záběru.

Na základě tohoto faktu bylo vytvořeno nové „ověřovací“ soukolí, které bylo vymodelováno tak, aby vyhovovalo předpokladům pro využití teoretického modelu tuhosti. Na něm bylo dokončeno téma, které se zabývá identifikací tuhosti ozubení a konfrontací výsledků z MKP analýzy, s teoretickou tuhostí zadanou Fourierovou řadou.

Teoretický vztah pro tuhost tedy není všeobecně použitelný a pro původní soukolí by bylo zapotřebí vytvoření modelu tuhosti, který by lépe vystihoval geometrii tohoto soukolí.

Výsledné porovnávání Fourierovy tuhosti s tuhostí, která byla určena na základě MKP výpočtu a porovnání frekvenčních spekter, která zahrnují obě tyto tuhosti, je však stále pouze informativní.

Lepším způsobem, jak ověřit dynamiku převodové soustavy, by bylo experimentální měření, díky kterému by bylo porovnání teoretického modelu a reálně měřeného modelu více vypovídající už jen z toho důvodu, že reálný model zahrnuje i složku tlumení, která v teoretickém modelu torzní soustavy není zohledněna.



Tématika dynamického modelování ozubených převodů je velmi komplexní a teoretické modely převodovek lze zpřesňovat a přibližovat realitě právě na základě experimentu s reálným zkušebním soukolím.

Po dokončení inženýrského stupně studia bych se proto nadále chtěl věnovat této problematice a své poznatky o modelování dynamiky převodových soustav nadále rozšiřovat v rámci dalšího studia.

POUŽITÁ LITERATURA

- [1] STEJSKAL, Vladimír a Miroslav OKROUHLÍK. *Kmitání s Matlabem*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-010-2435-0.
- [2] SLAVÍK, Jaromír, Vladimír STEJSKAL a Vladimír ZEMAN. *Základy dynamiky strojů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-010-1622-6.
- [3] HAJŽMAN, Michal, Miroslav BYRTUS a Vladimír ZEMAN. *Dynamická analýza a optimalizace převodových ústrojí*. Katedra mechaniky, Univerzitní 22, 30614, Plzeň, 2004. Závěrečná výzkumná zpráva z řešení projektu FRVŠ 2282/2003/G1. Západočeská univerzita v Plzni.
- [4] ŠALAMOUN, Čestmír, Žofie RYZCOVÁ a Miloš SUCHÝ. *Čelní a šroubová soukolí s evolventním ozubením*. Praha: SNTL, 1990. ISBN 80-030-0532-9.
- [5] MORAVEC, Vladimír. *Konstrukce strojů a zařízení II.: čelní ozubená kola: teorie, výpočet, konstrukce, výroba, kontrola*. Ostrava: Montanex, 2001. ISBN 80-722-5051-5.
- [6] DYNBYL, Vojtěch, Josef KOLÁŘ, Jan KANAVAL a Karel PETR. *Řešení projektu MPO č. FR - TI 1/488: Hnací nápravové převodovky pro tramvaje a příměstské vlaky - dynamika pohonu dvojkolí*. Praha, Hronov, 2011. Dílčí výzkumná zpráva k projektu FR - TI 1/488. ČVUT v Praze, Fakulta strojní.
- [7] TŮMA, Jiří. *Zpracování signálů získaných z mechanických systémů užitím FFT*. Praha: Sdělovací technika, 1997. ISBN 80-901-9361-7.
- [8] YI, Yong, Kang HUANG, Yangshou XIONG a Meng SANG. Nonlinear dynamic modelling and analysis for a spur gear system with time-varying pressure angle and gear backlash. *Mechanical Systems and Signal Processing* [online]. 2019, , 18-34 [cit. 2020-01-26]. DOI: 10.1016/j.ymssp.2019.06.013. ISSN 08883270. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0888327019303966>
- [9] LI, Yongzhuo, Kang DING, Guolin HE a Huibin LIN. *Vibration mechanisms of spur gear pair in healthy and fault states: Mechanical Systems and Signal Processing* [online]. In: . 2016, 183 - 201 [cit. 2020-03-07]. ISSN 0888-3270. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.03.014>
- [10] YI, Yong, Kang HUANG, Yangshou XIONG a Meng SANG. *Nonlinear dynamic modelling and analysis for a spur gear system with time-varying pressure angle and gear backlash: Mechanical Systems and Signal Processing* [online]. 2019, 18-34 [cit. 2020-03-07]. ISSN 0888-3270. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.06.013>
- [11] MOHAMED, Ahmed Saeed, Sadok SASSI a Mohammad Roshun PAUROBALLY. *Model-Based Analysis of Spur Gears' Dynamic Behavior in the Presence of Multiple Cracks: Shock and Vibration* [online]. 2018, 1 - 21 [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1155/2018/1913289>
- [12] MA, Jianfeng, Chao LI a Lingli CU. *Transmission Error Analysis and Disturbance Optimization of Two-Stage Spur Gear Space Driven Mechanism with Large Inertia Load: Shock and Vibration* [online]. 2018, 1-15 [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1155/2018/6863176>

- [13] YUAN, Bing, Shan CHANG, Geng LIU a Li-Yan WU. *Quasi-Static and Dynamic Behaviors of Helical Gear System with Manufacturing Errors: Chin. J. Mech. Eng.* [online]. 2018 [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: <https://doi.org/10.1186/s10033-018-0238-1>
- [14] KOIDE, Katsuya a Kenji ABE. *Precise Calculation of Mesh Stiffness Fluctuation for Predicting Gear Noise* [online]. In: . [cit. 2020-03-07]. Dostupné z: [https://www.3ds.com/fileadmin/PRODUCTS-SERVICES/SIMULIA/Resources-center/PDF/2018-SAoE-Precise Calculation of Mesh Stiffness Fluctuation for Predicting Gear Noise.pdf](https://www.3ds.com/fileadmin/PRODUCTS-SERVICES/SIMULIA/Resources-center/PDF/2018-SAoE-Precise%20Calculation%20of%20Mesh%20Stiffness%20Fluctuation%20for%20Predicting%20Gear%20Noise.pdf)
- [15] LEE, Chun Hung. *Non-Linear Contact Analysis of Meshing Gears*. San Luis Obispo, 2009. Diplomová práce. The Faculty of California Polytechnic State University.
- [16] MEAGHER, Jim, Xi WU, Dewen KONG a Chun Hung LEE. *A Comparison of Gear Mesh Stiffness Modeling Strategies*. Jacksonville, Florida USA, 2010. Výzkumná zpráva. California Polytechnic State University, College of Mechanical Science and Engineering.
- [17] KIEKBUSCH, Timo, Daniel SAPPOK, Bernd SAUER a Ian HOWARD. Calculation of the Combined Torsional Mesh Stiffness of Spur Gears with Two- and Three-Dimensional Parametrical FE Models. *Strojníški vestnik – Journal of Mechanical Engineering* [online]. 2011, **57**(11), 810-818 [cit. 2020-03-07]. DOI: 10.5545/sv-jme.2010.248. ISSN 00392480. Dostupné z: <http://www.sv-jme.eu/article/calculation-of-the-combined-torsional-mesh-stiffness-of-spur-gears-with-two-and-three-dimensional-parametrical-fe-models/>
- [18] FERNANDEZ DEL RINCON, A., F. VIADERO, M. IGLESIAS, P. GARCÍA, A. DE-JUAN a R. SANCIBRIAN. A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions,. *Mechanism and Machine Theory*, [online]. 2013, 2013, **61**, 30-58 [cit. 2020-03-07]. ISSN 0094-114X. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2012.10.008>.
- [19] AMEZKETA, Miguel, Xabier IRIARTE, Javier ROS a Jesús Ma PINTOR. *DYNAMIC MODEL OF A HELICAL GEAR PAIR WITH BACKLASH AND ANGLE-VARYING MESH STIFFNESS: MULTIBODY DYNAMICS 2009*. Varšava, 2009. Článek. Applied and Computational Mechanical Engineering Public University of Navarra, Arrosadía s/n, 31006 Pamplona, Spain.
- [20] PETR, Karel. *Příspěvek k rozvoji metod navrhování vysoce únosných zubů čelního soukolí: disertační práce = Contribution to the development of methods of designing high stringency tooth of spur gear*. 2015.