



**ČESKÉ VYSOKÉ  
UČENÍ TECHNICKÉ  
V PRAZE**

**F3**

**Fakulta elektrotechnická  
Katedra kybernetiky**

**Bakalářská práce**

# **Efektivní výpočty vlastností neorientovaných grafů**

**Jana Zelenková**

**Obor: Informatika a počítačové vědy**

**Studijní program: Otevřená informatika**

**Květen 2020**

**Vedoucí práce: RNDr. Marko Genyk-Berezovskyj**



## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Zelenková** Jméno: **Jana** Osobní číslo: **460536**  
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**  
Zadávající katedra/ústav: **Katedra kybernetiky**  
Studijní program: **Otevřená informatika**  
Studijní obor: **Informatika a počítačové vědy**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Efektivní výpočty vlastností neorientovaných grafů**

Název bakalářské práce anglicky:

**Effective Calculations of Undirected Graph Properties**

Pokyny pro vypracování:

1. Seznamte se s programovými balíky, případně i se samostatnými aplikacemi, které efektivně počítají hodnoty vlastností prostých neorientovaných grafů.
2. Sestavte co možná nejširší přehled o efektivitě jednotlivých SW při výpočtu vlastností grafů. Do přehledu zahrňte co nejvíce grafových vlastností. Při výpočtech vlastností, pokud to bude možné, vyčleňte charakteristické skupiny grafů, na nichž se konkrétní vlastnost počítá buď výrazně snadněji, nebo výrazně obtížněji než v očekávaném (průměrném) případě. Sledujte, jak se efektivita výpočtů mění se vzrůstající velikostí grafů nebo s přítomností či absencí některých dalších důležitých vlastností grafů. Naměřené výsledky porovnejte s teoretickými předpoklady a zhodnoťte, zda si navzájem odpovídají.
3. K výpočtům využijte také superpočítače dostupné v akademickém prostředí ČR a zhodnoťte, nakolik jejich využití zrychlí a případně usnadní nebo zkomplikuje výpočet grafových vlastností. Využijte veřejně přístupné generátory pro tvorbu grafů a skupin grafů, na nichž provedete měření.
4. Přípravu dat a měření ve všech použitých HW/SW prostředích implementujte pomocí programů nebo skriptů, které doprovodíte uživatelskou dokumentací, aby další měření mohla probíhat co nejvíce automatizovaně.

Seznam doporučené literatury:

- [1] Jonathan L. Gross, Jay Yellen: Graph Theory and Its Applications, Chapman and Hall/CRC, 2018
- [2] Jiří Demel: Grafy a jejich aplikace, Academia, 2002
- [3] Robert Sedgwick: Algorithms in C++ Part 5: Graph Algorithms, : Addison-Wesley Professional, 2002
- [4] Reinhard Diestel: Graph Theory, Springer-Verlag, Heidelberg, 2016
- [5] Martin Mareš, Tomáš Valla: Průvodce labyrintem algoritmů, CZ.NIC, z.s.p.o., 2017

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**RNDr. Marko Genyk-Berezovskij, katedra kybernetiky FEL**

Jméno a pracoviště druhého(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **27.05.2019** Termín odevzdání bakalářské práce: **22.05.2020**

Platnost zadání bakalářské práce: **19.02.2021**

RNDr. Marko Genyk-Berezovskij  
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Tomáš Svoboda, Ph.D.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Ing. Pavel Ripka, CSc.  
podpis děkana(ky)

### III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Studentka bere na vědomí, že je povinna vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studentky

## Poděkování / Prohlášení

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu práce, kterým byl pan RNDr. Mar-ko Genyk-Berezovskyj. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu při studiu a pevné nervy.

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne 22. 5. 2020

Jana Zelenková

## Abstrakt / Abstract

Bakalářská práce si klade za cíl porovnat nástroje, které umožňují výpočet hodnot vlastností prostých neorientovaných grafů. Zaměřuje se na programy Mathematica a programový balík SageMath. Práce představuje vybrané vlastnosti grafů a porovnává rychlost výpočtu těchto vlastností na náhodných grafech, které se liší buď velikostí nebo nějakou charakteristickou vlastností. Zároveň porovnává rychlost výpočtu na počítačích s různou hardwarovou konfigurací.

**Klíčová slova:** Graf, vlastnosti grafů, Mathematica, SageMath

The Bachelor's thesis aims to compare two tools used for finding the values of the properties of the simple unoriented graphs. Compared tools are Wolfram Mathematica and SageMath, program bundle for Python. The thesis presents chosen properties of the graphs and compares the tools on the time needed for finding chosen properties in random graphs. Tested graphs differ in size or characteristic attributes. Also the impact of different hardware equipment is tested in computing the chosen properties of the graphs.

**Keywords:** Graph, Properties of the graph, Mathematica, SageMath

**Title translation:** Effective Calculations of Undirected Graph Properties

# Obsah /

<b>1 Úvod</b> .....	1	4.2 SageMath.....	10
1.1 Cíl práce.....	1	<b>5 Diskuze výsledků</b> .....	11
<b>2 Teorie</b> .....	2	5.1 Vliv velikosti grafu.....	11
2.1 Graf .....	2	5.1.1 Souvislý graf .....	11
2.2 Souvislý graf (Connected graph) .....	2	5.1.2 Strom.....	11
2.3 Strom (Tree) .....	3	5.1.3 Průměr .....	12
2.4 Excentricita (Eccentricity) .....	3	5.1.4 Poloměr .....	12
2.5 Průměr (Diameter) .....	4	5.1.5 Eulerovský graf .....	13
2.6 Poloměr (Radius) .....	4	5.1.6 Klikovost grafu.....	13
2.7 Obvod grafu (Girth) .....	5	5.1.7 Počet koster v grafu .....	14
2.8 Eulerovský graf (Eulerian Graph) .....	5	5.1.8 Perfektnost grafu .....	14
2.9 Klikovost grafu (Clique number) .....	5	5.1.9 Rovinný graf .....	15
2.10 Nezávislost grafu (Independence number) .....	5	5.1.10 Regulární graf.....	15
2.10.1 Nezávislá množina (Independent set) .....	6	5.1.11 Hranově tranzitivní graf .	16
2.11 Kostra grafu (Spanning tree)....	6	5.1.12 Distančně regulární graf .	16
2.12 Nezávislost grafu.....	6	5.2 Vliv charakteristických vlastností grafů .....	17
2.13 Chromatické číslo grafu, vrcholová barevnost, barevnost grafu (chromatic number) .....	6	5.3 Vliv hardwarového vybavení ..	19
2.14 Hamiltonovský graf (Hamiltonian).....	7	<b>6 Závěr</b> .....	27
2.15 Perfektnost grafu (Perfect Graph) .....	7	<b>A Grafy zobrazující vliv charakteristických skupin grafů na časovou náročnost výpočtu jejich vlastností</b> .....	29
2.16 Rovinný graf (Planar Graph) ...	7	<b>B Grafy ukazující výpočet vlastností na různém hardwaru</b> .....	64
2.17 Regulární graf (Regular Graph).....	8	<b>C Složky se soubory</b> .....	76
2.18 Hranově tranzitivní graf (Edge-transitive Graph) .....	8	<b>Literatura</b> .....	77
2.19 Distančně regulární graf (Distance-Regular Graph) .....	8		
2.19.1 Vzdálenost v grafu (Distance) .....	8		
2.19.2 Distančně regulární graf ...	8		
<b>3 Časová složitost</b> .....	9		
3.1 Polynomiální úlohy .....	9		
3.2 NP úlohy .....	9		
3.3 NP-úplné úlohy (NP-Complete problems) .....	9		
<b>4 Aplikace pro výpočet vlastností grafů</b> .....	10		
4.1 Wolfram Mathematica.....	10		

## / **Obrázky**

<b>2.1.</b>	Neorientovaný graf .....	2
<b>2.2.</b>	Oorientovaný graf .....	3
<b>2.3.</b>	Souvislý graf.....	3
<b>2.4.</b>	Nesouvislý graf .....	3
<b>2.5.</b>	Kružnice v grafu .....	4
<b>2.6.</b>	Strom .....	4
<b>2.7.</b>	Graf s klikami .....	5
<b>2.8.</b>	Planární graf nakraslený bez křížení .....	7
<b>2.9.</b>	Planární graf zakreslený s křížícími se hranami .....	8
<b>5.1.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, zda je graf spojitý, v Mathematice .	12
<b>5.2.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, zda je graf spojitý, v Sagemath ....	12
<b>5.3.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, jest- li je graf stromem, v Mathe- matice .....	13
<b>5.4.</b>	Graf závislosti času na ve- likosti grafu při zjišťování, jestli je graf stromem, v Sage- math .....	13
<b>5.5.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při výpočtu prům- ěru grafu pro Mathematicu ..	14
<b>5.6.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při výpočtu prům- ěru grafu pro Sagemath.....	14
<b>5.7.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při výpočtu polo- měru grafu pro Mathematicu ..	15
<b>5.8.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při výpočtu polo- měru grafu pro Sagemath.....	15
<b>5.9.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, zda je graf Eulerovský, v Mathe- matice .....	16
<b>5.10.</b>	Graf závislosti času na veli- kosti grafu při zjišťování, zda je graf Eulerovský, v Sage- math .....	16



<b>5.11.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování počtu klik v grafu pro Mathematicu .....	17
<b>5.12.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování počtu klik v grafu pro Sagemath .	17
<b>5.13.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování počtu koster v grafu pro Mathematicu .....	18
<b>5.14.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování počtu koster v grafu pro Sagemath .....	18
<b>5.15.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf perfektní, v Mathematice .....	19
<b>5.16.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf perfektní, v Sagemath ..	19
<b>5.17.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf rovinný, v Mathematice .....	20
<b>5.18.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf rovinný, v Sagemath....	20
<b>5.19.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf regulární, v Mathematice .....	21
<b>5.20.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf regulární, v Sagemath ..	21
<b>5.21.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf hranově tranzitivní, v Mathematice .....	22
<b>5.22.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf distančně regulární, v Sagemath .....	22
<b>5.23.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda	

	je graf distančně regulární, v Mathematice .....	23
<b>5.24.</b>	Graf závislosti času na velikosti grafu při zjišťování, zda je graf distančně regulární, v Sagemath .....	23
<b>5.25.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice ....	24
<b>5.26.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v SageMath .....	24
<b>5.27.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice ....	25
<b>5.28.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath .....	25
<b>5.29.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice ....	26
<b>5.30.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměřů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath .....	26
<b>A.1.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice ....	29
<b>A.2.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu spojitých grafů, na počtu hran v SageMath .....	30
<b>A.3.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice ....	30
<b>A.4.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu spojitých grafů, na počtu hran v SageMath .....	31

- A.5.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice .... 31
- A.6.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v SageMath ..... 32
- A.7.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice .... 32
- A.8.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v SageMath ..... 33
- A.9.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů spojitých, na počtu hran v SageMath ..... 33
- A.10.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů spojitých, na počtu hran v Mathematice .... 34
- A.11.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath ..... 34
- A.12.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů distančně regulárních, na počtu hran v Mathematice ..... 35
- A.13.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath ..... 35
- A.14.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice ..... 36
- A.15.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je

	sto spojitých grafů Eulerovských, na počtu hran v SageMath .....	36
<b>A.16.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů Eulerovských, na počtu hran v Mathematice .....	37
<b>A.17.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů Hamiltonovských, na počtu hran v SageMath .....	37
<b>A.18.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů Hamiltonovských, na počtu hran v Mathematice .....	38
<b>A.19.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů perfektních, na počtu hran v SageMath .....	38
<b>A.20.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů perfektních, na počtu hran v Mathematice .....	39
<b>A.21.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů rovinných, na počtu hran v SageMath .....	39
<b>A.22.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice .....	40
<b>A.23.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů stromem, na počtu hran v SageMath .....	40
<b>A.24.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů stromem, na počtu hran v Mathematice .....	41
<b>A.25.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů regulárních, na počtu hran v SageMath .....	41

- A.26.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice . 42
- A.27.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtu koster ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice . 42
- A.28.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtu koster ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath .... 43
- A.29.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice .... 43
- A.30.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath ..... 44
- A.31.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice .... 44
- A.32.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath ..... 45
- A.33.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů spojitých, na počtu hran v SageMath .... 45
- A.34.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů spojitých, na počtu hran v Mathematice . 46
- A.35.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath ..... 46
- A.36.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů distančně regulárních, na počtu hran v Mathematice ..... 47

- A.37.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath..... 47
- A.38.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice ..... 48
- A.39.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů Eulrovských, na počtu hran v SageMath..... 48
- A.40.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů Eulrovských, na počtu hran v Mathematice ..... 49
- A.41.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů rovinných, na počtu hran v SageMath .... 49
- A.42.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice . 50
- A.43.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů stromem, na počtu hran v SageMath..... 50
- A.44.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů stromem, na počtu hran v Mathematice .... 51
- A.45.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů regulárních, na počtu hran v SageMath .... 51
- A.46.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice . 52
- A.47.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů kos-

- ter ve stu náhodných grafů,  
na počtu hran v Mathematice . 52
- A.48.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, počtů kos-  
ter ve stu náhodných grafů,  
na počtu hran v SageMath .... 53
- A.49.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, počtů klik  
ve stu náhodných grafů, na  
počtu hran v Mathematice .... 53
- A.50.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, počtů klik  
ve stu náhodných grafů, na  
počtu hran v SageMath ..... 54
- A.51.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, průměrů  
ve stu náhodných grafů, na  
počtu hran v Mathematice .... 54
- A.52.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, průměrů  
ve stu náhodných grafů, na  
počtu hran v SageMath ..... 55
- A.53.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, poloměrů  
ve stu náhodných grafů, na  
počtu hran v Mathematice .... 55
- A.54.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, poloměrů  
ve stu náhodných grafů, na  
počtu hran v SageMath ..... 56
- A.55.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, zda je sto  
náhodných grafů spojitých,  
na počtu hran v SageMath .... 56
- A.56.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, zda je sto  
náhodných grafů spojitých,  
na počtu hran v Mathematice . 57
- A.57.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, zda je sto  
náhodných grafů distančně  
regulárních, na počtu hran v  
SageMath ..... 57
- A.58.** Graf závislosti času potřeb-  
ném při zjišťování, zda je sto  
náhodných grafů distančně

	regulárních, na počtu hran v Mathematice .....	58
<b>A.59.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath.....	58
<b>A.60.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice .....	59
<b>A.61.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů Eulrovských, na počtu hran v SageMath.....	59
<b>A.62.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů Eulrovských, na počtu hran v Mathematice .....	60
<b>A.63.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů rovinných, na počtu hran v SageMath ....	60
<b>A.64.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice .	61
<b>A.65.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů stromem, na počtu hran v SageMath ....	61
<b>A.66.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů stromem, na počtu hran v Mathematice .	62
<b>A.67.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů regulárních, na počtu hran v SageMath ....	62
<b>A.68.</b>	Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice .	63



- B.69.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači ..... 64
- B.70.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači ..... 65
- B.71.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači ..... 65
- B.72.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy spojených, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači .. 66
- B.73.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači ..... 66
- B.74.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači ..... 67
- B.75.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinných, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači .. 67
- B.76.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači .. 68
- B.77.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na

- počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5..... 68
- B.78.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5..... 69
- B.79.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5..... 69
- B.80.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy spojitých, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5..... 70
- B.81.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5..... 70
- B.82.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5..... 71
- B.83.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinových, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5..... 71
- B.84.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5 .... 72
- B.85.** Graf ukazuje závislost času potřebného na výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu.. 72

- B.86.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu ..... 73
- B.87.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu ..... 73
- B.88.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu ..... 74
- B.89.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu ..... 74
- B.90.** Graf ukazuje závislost čas potřebný na zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinových, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu ..... 75
- B.91.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu ..... 75



# Kapitola 1

## Úvod

Tato bakalářská práce se zaměřuje na porovnání aplikací pro výpočet vlastností prostých neorientovaných grafů. A to zjištěním, jak rychle jednotlivé programy počítají různé vlastnosti grafů. Taktéž se soustředí na porovnání rychlosti výpočtu na různých sadách grafů. Chce poměřit rychlost výpočtu grafových vlastností u grafů, které se budou lišit velikostí, ale třeba i nějakou charakteristickou vlastností. Nakonec chce zjistit, jaký má vliv změna hardwarového prostředí na výpočet vlastností grafů, a poté chce shrnout zjištěné poznatky.

Nejprve si ujasníme teoretické pojmy a definice grafu a jeho jednotlivých vlastností, kterými se budeme zabývat. Ujasníme, co je časová náročnost a s jakými programy pro výpočet vlastností grafů budeme pracovat. Následně zhodnotíme výsledky, kterých jednotlivé programy dosahovaly a porovnáme, který z nich byl efektivnější. Porovnáme, jaký má vliv na rychlost výpočtu velikost grafu nebo pokud má graf nějakou specifickou vlastnost. Na závěr vyzkoušíme, jestli se výpočet programu urychlí, vyměníme-li hardwarové prostředí osobního počítače za superpočítač.

### 1.1 Cíl práce

Cílem této práce je porovnat vybrané aplikace, které se zabývají výpočtem vlastností prostých neorientovaných grafů. Vytvořit množství náhodných grafů, které se budou lišit velikostí. Taktéž vytvořit skupiny náhodných grafů různých velikostí, které v dané skupině budou sdílet nějakou charakteristickou vlastnost. Poté nechat vybrané aplikace vypočítat různé grafové vlastnosti a změřit jejich čas výpočtu. Nakonec porovnat časy výpočtu, daných vlastností napříč různými velikostmi grafů i různými charakteristickými skupinami, a vhodně je vizualizovat. Cílem je i zkusit vlastnosti spočítat na různých hardwarových konfiguracích a zanalyzovat jejich vliv na rychlost výpočtu.

# Kapitola 2

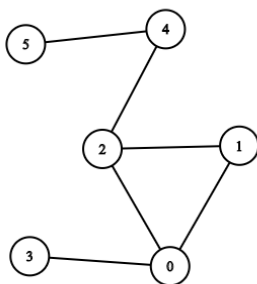
## Teorie

v této kapitole se zaměříme na definice jednotlivých vlastností grafů. Z velké škály různých vlastností grafů jsem byla, kvůli nutnosti porovnání, nucena vybrat jen několik málo vlastností, jejichž výpočet umožňuje jak Mathematica, tak SageMath. Jejich definice si ukážeme níže. Nejdříve se ale zaměříme na to, co je to vlastně graf.

### 2.1 Graf

O grafu můžeme přemýšlet jako o množině bodů, které jsou spojeny čarami, které vedou buď od jednoho bodu k druhému nebo z daného bodu zpět. Tyto body můžeme definovat jako vrcholy grafu a čáry mezi nimi jako hrany. U hran rozlišujeme mezi orientovanými a neorientovanými. Orientovaná hrana je taková, u které záleží, který vrchol je počáteční a který koncový. U neorientovaných hran toto nerozlišujeme a jedná se o symetrické spojení. Příklad orientovaného a neorientovaného grafu nalezneme na obrázcích 2.1 a 2.2.

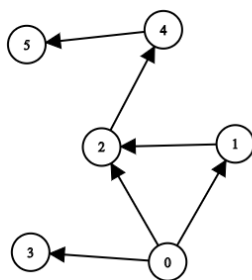
V našem případě se budeme zabývat pouze vlastnostmi neorientovaných grafů. To jsou tedy grafy, kde je orientace hran nepodstatná a nám nezáleží na tom, který vrchol je počáteční. [1–2]



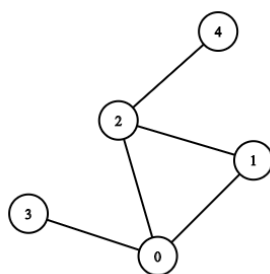
**Obrázek 2.1.** Neorientovaný graf

### 2.2 Souvislý graf (Connected graph)

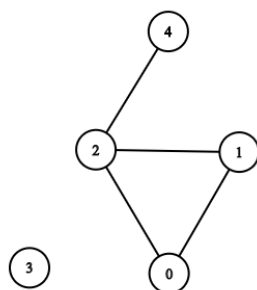
Je takový graf, jehož každé dva vrcholy jsou spojeny cestou. Příklad souvislého grafu můžeme vidět na obrázku 2.3, naopak nespojitého grafu na obrázku 2.4. [1–3]



Obrázek 2.2. Orientovaný graf



Obrázek 2.3. Souvislý graf



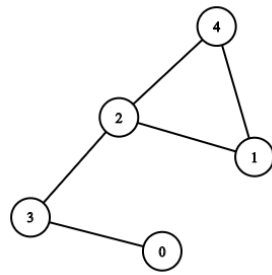
Obrázek 2.4. Nesouvislý graf

## 2.3 Strom (Tree)

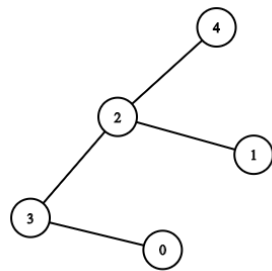
Je takový graf, který je souvislý (2.3) a nemá žádnou neorientovanou uzavřenou cestu (kružnici). Graf s kružnicí je vidět na obrázku 2.5. Příklad stromu vidíme na obrázku 2.6. [1–2, 4]

## 2.4 Excentricita (Eccentricity)

Excentricita vrcholu  $v$  ( $ecc(v)$ ) v grafu  $G$  je vzdálenost z  $v$  k nejvzdálenějšímu vrcholu  $x$  od  $v$ .



Obrázek 2.5. Kružnice v grafu



Obrázek 2.6. Strom

$$ecc(v) = \max_{x \in V_G} \{d(v, x)\}$$

[1–2, 5]

## 2.5 Průměr (Diameter)

Průměr grafu  $G$  je maximální excentricita v grafu  $G$  nebo ekvivalentně maximální vzdálenost mezi dvěma vrcholy v grafu  $G$ . Jinými slovy, lze říct že průměr grafu je nejvyšší počet vrcholů, které musí být navštíveny pokud cestujeme z jednoho vrcholu do jiného, za předpokladu, že jsou vyloučeny cesty, které vedou zpět, jsou objížďkami nebo smyčkami. Proto se to rovná maximu všech hodnot v matici grafové vzdálenosti.

$$diam(G) = \max_{x \in V_G} \{ecc(x)\}$$

Z definice lze usoudit, že graf, který není spojitý má nekonečný průměr.

[1–2, 6]

## 2.6 Poloměr (Radius)

Poloměr grafu  $G$  je minimální excentricita, tedy minimální vzdálenost mezi dvěma vrcholy v  $G$ .

$$rad(G) = \min_{x \in V_G} \{ecc(x)\}$$

Lze tedy usoudit, že poloměr grafu, který není spojitý má nekonečný radius.

[1–2, 7]



## 2.7 Obvod grafu (Girth)

Obvod grafu grafu  $G$  s alespoň jedním cyklem je délka nejkratšího cyklu v  $G$ . Girth je tudíž nedefinovatelný pokud graf  $G$  je acyklický.

[1–2, 8]

## 2.8 Eulerovský graf (Eulerian Graph)

Eulerovský tah obsahuje všechny hrany grafu (podle definice tahu žádnou hranu neobsahuje více jak jednou).

Eulerovský graf je takový spojitý graf, který má Eulerovský tah.

Je překvapivé, že řešení tohoto problému je poměrně rychlé a jedná se o polynomiální nebo i lineární obtížnost.

[1–2, 9]

## 2.9 Klikovost grafu (Clique number)

Maximální podgraf v grafu  $G$ , který je zároveň i úplným grafem, nazýváme klikou. Klika je tudíž maximálním podgrafem, jehož vrcholy vzájemně sousedí.

Klikovost grafu je počet vrcholů v největší klice v grafu.

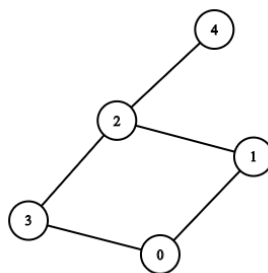
Pro libovolný graf platí

$$\omega(G) \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{m - d_i},$$

kde  $d_i$  je stupeň vrcholu  $i$  a  $m$  je počet vrcholů v grafu  $G$ . Dále můžeme říci, že minimální počet barev, kterými lze graf  $G$  obarvit (tzv. chromatic number) je stejný nebo větší než klikovost grafu  $G$ .

Příklad grafu se třemi klikami je vidět na obrázku 2.7

[1–2, 10]



Obrázek 2.7. Graf se třemi klikami

## 2.10 Nezávislost grafu (Independence number)

Představme si nejdříve nezávislou množinu.

### 2.10.1 Nezávislá množina (Independent set)

Podmnožina  $S$  vrcholů grafu je nezávislou množinou, pokud žádný pár vrcholů v  $S$  není spojen hranou. Maximální nezávislá množina je taková, ke které již nejde přidat další vrchol bez toho, aby nedošlo ke ztrátě nezávislosti. Nejpočetnější nezávislá množina je tedy maximální nezávislá množina, která má největší počet prvků (vrcholů nebo hran, záleží o kterou nezávislou množinu se jedná) porovnááme-li všechny nezávislé množiny v grafu. [1–2, 11]

### 2.11 Kostra grafu (Spanning tree)

Je podmnožina grafu taková, že počet vrcholů v podmnožině se rovná počtu vrcholů grafu a zároveň je tato podmnožina stromem.

[1–2, 12]

### 2.12 Nezávislost grafu

Nezávislost grafu vychází z definice nezávislé množiny a jedná se tedy o počet vrcholů v nejpočetnější nezávislé množině na daném grafu. Kliky a nezávislé množiny spolu úzce souvisí. Vytvoříme-li doplňkový graf ke grafu  $G$  (představme si úplný graf  $U$  se stejným počtem vrcholů jako má graf  $G$ , kde každé dva vrcholy grafu  $U$  jsou spojeny hranou, pak doplňkový graf, ke grafu  $G$  vznikne tak, že z úplného grafu  $U$  odebereme všechny hrany, které má společné s grafem  $G$ ), pak maximální nezávislé množiny v doplňkovém grafu odpovídají klikám v grafu  $G$ .

[1–2, 13]

### 2.13 Chromatické číslo grafu, vrcholová barevnost, barevnost grafu (chromatic number)

Obarvení grafu značí ohodnocení jednotlivých vrcholů grafu hodnotami z množiny (barvami), tak aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou hodnotu (barvu).

Barevnost grafu je minimální počet různých barev potřebných pro správné obarvení vrcholů grafu.

V některých případech můžeme mluvit i o hranové barevnosti, kdy místo toho, abychom ohodnocovali jednotlivými barvami vrcholy ohodnocujeme jednotlivé hrany.

Pokud má graf chromatické číslo jedna nebo dva lze celkem jednoduše ověřit:

- Graf má chromatické číslo jedna, právě tehdy, když je graf diskrétní.
- Graf má chromatické číslo menší nebo rovno dvěma, právě tehdy, když graf neobsahuje kružnici liché délky.
- Graf má chromatické číslo menší nebo rovno dvěma, právě tehdy, když je graf bipartitní.

V ostatních případech, kdy by počet barev byl větší nebo roven třem se ale dostáváme do NP-úplné úlohy. Algoritmus pro obarvení grafu je typickým příkladem backtrackingu.

[1–2, 14]

## 2.14 Hamiltonovský graf (Hamiltonian)

Hamiltonovský graf je takový graf, který má Hamiltonovský cyklus, tedy cyklus procházející přes všechny vrcholy grafu.

Ačkoliv je Hamiltonovský cyklus analogický k Eulerovskému tahu, tak není znám přístup, ve kterém by šlo za jeho pomoci jednoduše zjistit, zda se jedná o Hamiltonovský cyklus, vlastně neexistuje žádný takový rychlý způsob. V případě Hamiltonovského cyklu se jedná o NP-složitý problém. Máme zde ale několik podmínek, které musí Hamiltonovská graf splňovat a lze je aplikovat na velké množství tříd grafů. Stejně tak je tu několik základních pravidel, které nám mohou říct, že se o Hamiltonovský graf nejedná.

Všechny Hamiltonovské grafy jsou spojitě a mají všechny vrcholy se stupněm minimálně dva. Ovšem nelze tvrdit, že každý graf, který toto splňuje by byl hamiltonovským.

Jestliže součet stupňů všech nesousedních vrcholů grafu je větší než počet vrcholů všech podmnožin nesousedních vrcholů, pak se jedná o Hamiltonovský graf.

Všechny planární spojitě grafy se stupněm minimálně čtyři mají Hamiltonovské cykly, ale nemají je všechny polyhedrální grafy.

[1–2, 15]

## 2.15 Prefektnost grafu (Perfect Graph)

Graf je perfektní, jestliže se pro jeho každý podgraf chromatické číslo rovná klikovosti.

[1–2, 16]

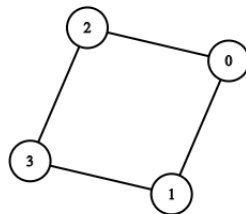
## 2.16 Rovinný graf (Planar Graph)

Graf nazýváme rovinným, jestliže existuje způsob, jak ho nakreslit bez toho, aby se mu křížily hrany.

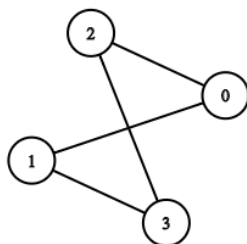
Tentýž planární graf zakreslený s křížícími se hranami i bez nich nalezneme na obrázcích 2.9 a 2.8.

Existuje mnoho efektivních algoritmů na testování, zda je graf rovinný. Většina těchto testů je založena na  $O(n^3)$  algoritmech Auslendera a Partera.

[1–2, 17]



**Obrázek 2.8.** Planární graf nakreslený bez křížení



**Obrázek 2.9.** Planární graf zakreslený s křížícími se hranami

## 2.17 Regulární graf (Regular Graph)

Regulární graf je takový graf, jehož všechny vrcholy mají stejný stupeň. Můžeme mluvit i o  $k$ -regulárním grafu, kde všechny vrcholy mají stupeň o velikosti  $k$ .

[1–2, 18]

## 2.18 Hranově tranzitivní graf (Edge-transitive Graph)

Hranově tranzitivní graf je , pokud pro každý pár hran  $u, v$  v grafu  $G$  existuje automorfismus, který přidělí  $u$  k  $v$ .

[1–2, 19]

## 2.19 Distančně regulární graf (Distance-Regular Graph)

U distančně regulárního grafu si nejdříve musíme uvědomit, co je to vzdálenost v grafu.

### 2.19.1 Vzdálenost v grafu (Distance)

Vzdálenost vrcholu  $u$  od vrcholu  $v$  ( $d(u, v)$ ) je délka nejkratší cesty, pokud existuje. Neexistuje-li, pak je rovna nekonečnu. [1–2, 20]

### 2.19.2 Distančně regulární graf

Distančně regulární graf je graf, ve kterém pro jakékoli dva vrcholy  $u$  a  $v$  a jakékoli indexy  $i, j$ , jejichž hodnoty mohou být v rozsahu od 0 do  $d$ , kde  $d$  je grafová vzdálenost, počet vrcholů ve vzdálenosti  $i$  od  $u$  a ve vzdálenosti  $j$  od  $v$  závisí pouze na  $i, j$  a vzdálenosti mezi  $u$  a  $v$ .

[21]

# Kapitola 3

## Časová složitost

Teď si vysvětleme, co je to časová složitost a jak může ovlivnit rychlost výpočtu jednotlivých vlastností.

Časová složitost se zabývá závislostí času stráveném řešením dané úlohy na její velikosti. V našem případě úloha značí vypočítání vlastnosti daného grafu. Vstupními daty jsou tedy jednotlivé grafy a požadovaným výsledkem úlohy je daná vlastnost tohoto grafu. Velikost úlohy tedy znamená velikost grafu, kterou můžeme určit buď počtem hran nebo počtem vrcholů daného grafu. Doba práce algoritmu závisí na konkrétním typu počítače. V teorii se tedy používá asymptotické vyjádření doby práce algoritmu  $O$ , kde je časová náročnost vyjádřena matematickou funkcí. [2]

### 3.1 Polynomiální úlohy

Existuje-li algoritmus, který danou úlohu řeší za dobu shora omezenou nějakým polynomem, jedná se o řešení v polynomiálním čase, nebo-li o polynomiální úlohu. Takové úlohy jsou považovány za rychlé a snadno řešitelné. I dnes ovšem existuje mnoho úloh, pro které polynomiální řešení dosud nebylo objeveno. Doba práce u takové úlohy je  $O(p(n))$ , kde  $p$  je polynom a  $n$  je velikost vstupu. [2]

### 3.2 NP úlohy

Mluvíme o NP úloze existuje-li algoritmus, který má následující vlastnosti:

- Vstupem jsou data a takzvaný certifikát. Certifikát je nespécifikovaný kus dat se shora omezenou velikostí, jež je dána pevně daným polynomem. Tento polynom závisí na délce vstupních dat.
- Pracuje v polynomiálním čase a dává odpověď **ano** nebo **nevím**.
- Pro část úlohy, pro kterou je očekávána odpověď **ano**, existuje takový certifikát, aby i algoritmus dal odpověď **ano**.
- Pro část úlohy, kde je očekávána odpověď **ne**, dá algoritmus odpověď **nevím**.

Můžeme říci, že každá úloha, která je polynomiální je taktéž NP, ale nelze to tvrdit naopak. [2, 1]

### 3.3 NP-úplné úlohy (NP-Complete problems)

Existuje mnoho problémů (jako hledání chromatického čísla), které nemají řešení v polynomiálním čase nebo alespoň prozatím nebyl nalezen algoritmus, který by to zvládnul. Pokud by se našel algoritmus řešící problém v polynomiálním čase, pak tato úloha přestala být NP-úplným problémem. [2, 1]

## Kapitola 4

### Aplikace pro výpočet vlastností grafů

Nyní si představme aplikace, které budeme porovnávat.

Pro porovnání jsem zvolila dvě nejpoužívanější aplikace pro výpočet vlastností grafů, a to Mathematicu a SageMath.

#### 4.1 Wolfram Mathematica

Mathematica je vlajkovým produktem společnosti Wolfram primárně určena pro technické výpočty a výuku. Je založena na jazyku Wolfram. Jedná se o placený produkt. [22]

Na svém osobním počítači, který mám k dispozici je Mathematica 11, stejně jako na superpočítači ferretgdu. Na superpočítači ČVUT ferret5 je k dispozici verze Mathematici 9.

#### 4.2 SageMath

SageMath je volný open-source matematický softwarový systém. Je postavený na již existujících open-source balíčcích jako NumPy, SciPy a dalších. Používá k přístupu k nim jazyk založený na Pythonu nebo k nim přistupuje přímo skrz interfací nebo wrapery.

Na svém osobním počítači, který mám k dispozici je SageMath ve verzi 7.5.1 Na superpočítačích bohužel k dispozici není.

[23]

# Kapitola 5

## Diskuze výsledků

Poté co jsme si vysvětlili jednotlivé pojmy a ujasnili si s jakými aplikacemi budeme pracovat se můžeme podívat na výsledky jednotlivých měření.

Abych mohla efektivně měřit čas, který daná aplikace stráví výpočtem dané vlastnosti, napsala jsem několik skriptů, které jednotlivé aplikace spouští a měří čas strávený výpočtem. Protože každé aplikaci trvá jiný čas než se spustí a každá pracuje jinak efektivně s načítáním a ukládáním do souboru, rozhodla jsem se měřit čas až od chvíle, kdy jsou grafy načteny do paměti až po okamžik, kdy aplikace určí výsledek. Graf i s výsledkem je následně uložen a do statistiky je zapsán čas, který aplikace strávila výpočtem.

Protože některé vlastnosti jsou počítány velmi rychle pracuji vždy se skupinou sta různých náhodných grafů a uváděný čas je tedy čas, který aplikace stráví výpočtem dané vlastnosti na 100 grafech se stejným počtem vrcholů a hran.

### 5.1 Vliv velikosti grafu

Nejdříve se zaměříme na vliv velikosti grafu na rychlost výpočtu.

Velikost grafu můžeme ovlivňovat počtem uzlů nebo hran. Já jsem se rozhodla vytvořit několik skupin grafů o stejném počtu vrcholů. V rámci těchto skupin jsem vytvořila ještě další tři podskupiny a to tak, abych reprezentovala grafy s malým počtem hran, grafy se středním počtem hran a grafy s nejvyšším možným počtem hran. Nakonec se ukázalo, že kvůli nedostatečné vnitřní paměti počítače nemá význam řešit některé větší grafy, nebo že některé vlastnosti jsou tak výpočetně náročné, že se nedají vyřešit v přijatelně krátkém čase.

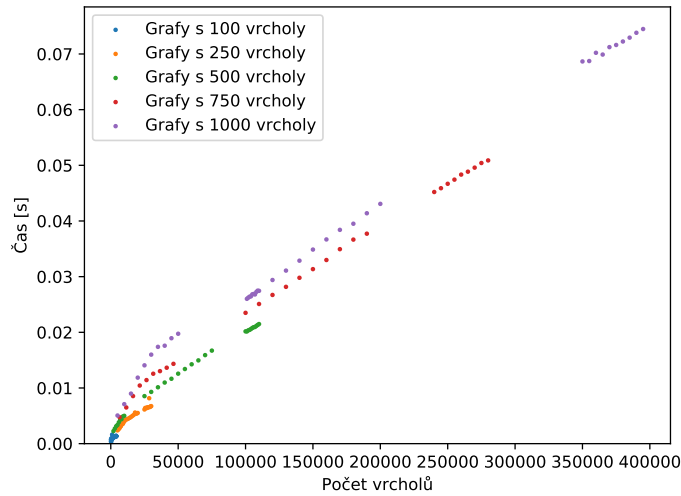
Pro účely jsou použity náhodné spojitě grafy.

#### 5.1.1 Souvislý graf

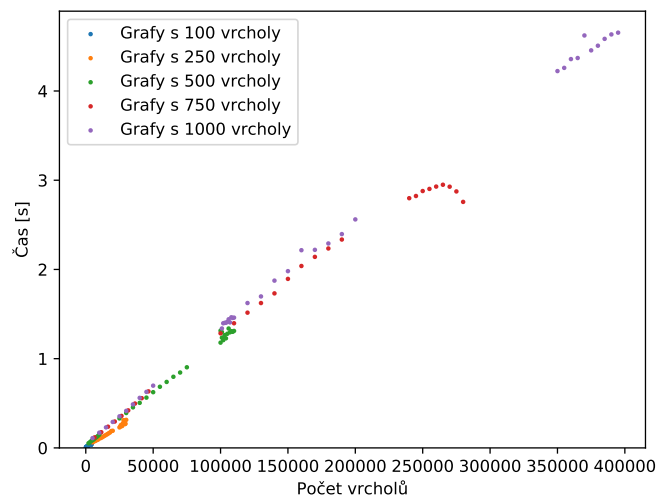
U zjišťování, zda je graf souvislý se výsledky obou aplikací výrazně liší. Zatímco Mathematica (viz 5.1) zvládla výpočet v téměř zanedbatelném čase a při přidávání hran do grafu u ní sledujeme jen nepatrné lineární stoupání u SageMath (viz 5.2) je toto stoupání výrazné. A u největších grafů výpočet trval i několik vteřin. Pro zjišťování, zda je graf souvislý se mi tedy jeví jako lepší volba Mathematica.

#### 5.1.2 Strom

V případě zjišťování, zda je graf stromem se výsledky mezi aplikacemi výrazně liší. Zatímco Mathematica (viz graf 5.3) nezávisle na velikosti grafu, zjišťovala tuto vlastnost v konstantním čase, U SageMath (5.4) se doba výpočtu lineárně zvedala v závislosti na počtu hran v grafu. Je však zajímavé, že ani v jednom případě se na rychlosti výpočtu výrazně nepodílel počet vrcholů grafu.



**Obrázek 5.1.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů spojitých, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



**Obrázek 5.2.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů spojitých, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

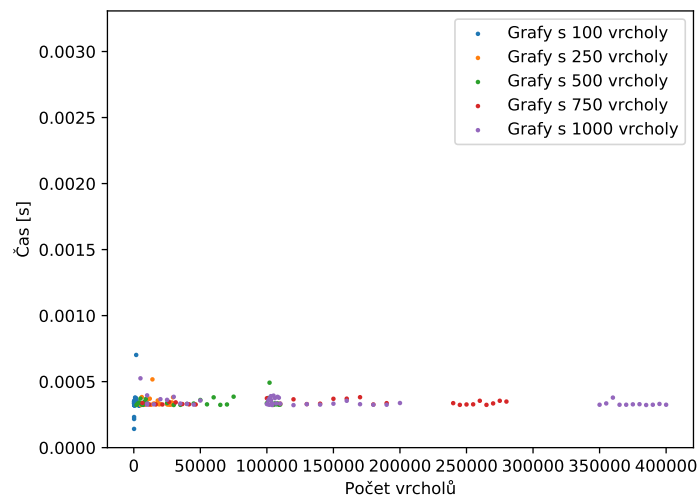
### 5.1.3 Průměr

Z grafů 5.5 a 5.6 je zjevné, že SageMath a Mathematica se různí způsobem výpočtu této vlatnosti grafu. Zatímco u SageMath vidíme, že nejvíce času zabírá výpočet u grafů se středním počtem hran, u programu Mathematica se časová náročnost s přibývajícím počtem hran zvedá.

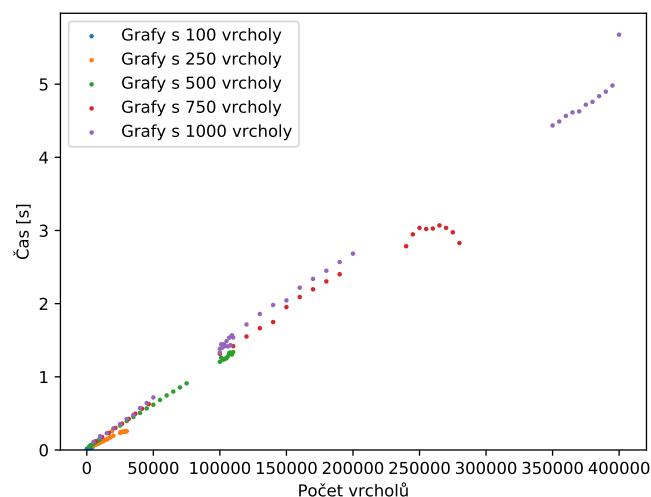
### 5.1.4 Poloměr

Na grafech 5.7 a 5.8 můžeme vidět, že se rychlost výpočtu těchto vlastností v obou aplikacích příliš neliší. Avšak s postupným zvyšováním velikosti grafu a to jak s počtem vrcholů, tak s počtem hran.





**Obrázek 5.3.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, jestli je sto grafů stromem, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



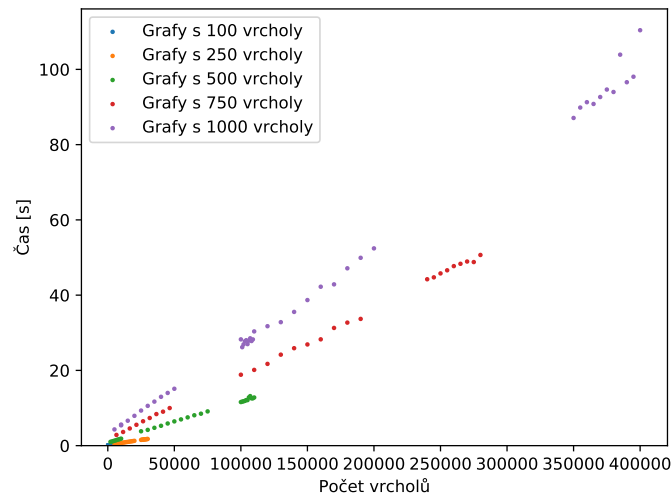
**Obrázek 5.4.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, jestli je sto grafů stromem, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

### 5.1.5 Eulerovský graf

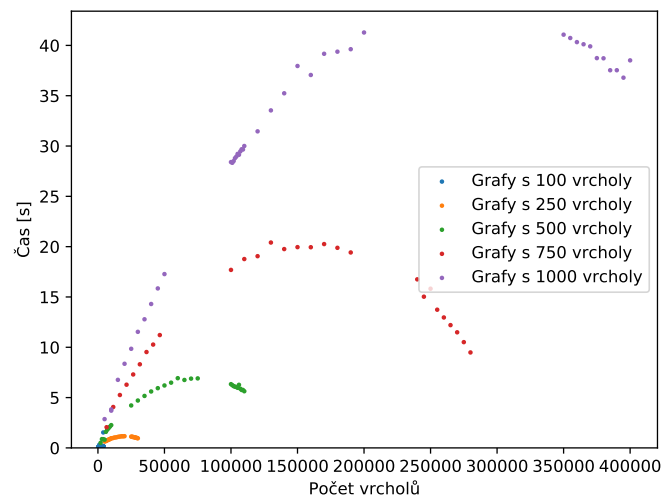
V případě zjištění, zda je graf Eulerovský dochází stejně jako v případě zjišťování, zda je graf stromem, k velkým rozdílům mezi aplikacemi, jak mám ukazují grafy 5.9 a 5.10. Zatímco Mathematica zvládá tuto vlastnost vypočítat v konstantním čase nezávisle na velikosti grafu, u SageMath dochází k lineární stoupání v závislosti na počtu hran. V obou případech nemá vliv počet vrcholů v grafu.

### 5.1.6 Klikovost grafu

Klikovost grafu je časově náročný problém, proto v tomto případě porovnáváme výpočty na daleko menších datech. V gafech u obou aplikací je jasně patrná exponenciální časová náročnost a s přibývajícím množstvím hran. Lze to vidět na grafech 5.11 a 5.12



**Obrázek 5.5.** Graf ukazuje závislost doby potřebné pro výpočet průměrů sto grafů v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



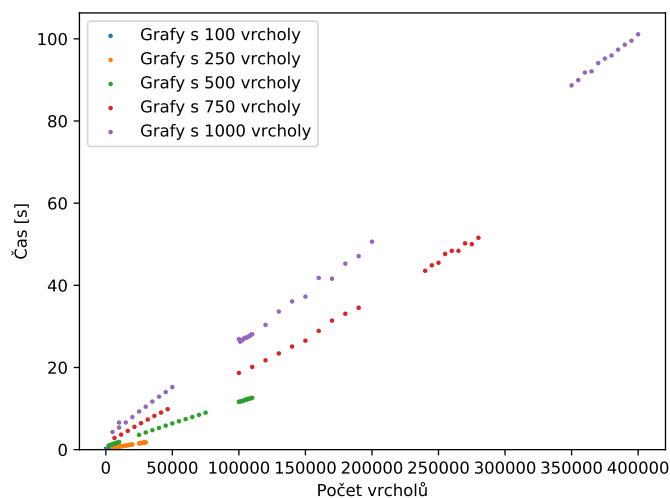
**Obrázek 5.6.** Graf ukazuje závislost doby potřebné pro výpočet průměrů sto grafů v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

### 5.1.7 Počet koster v grafu

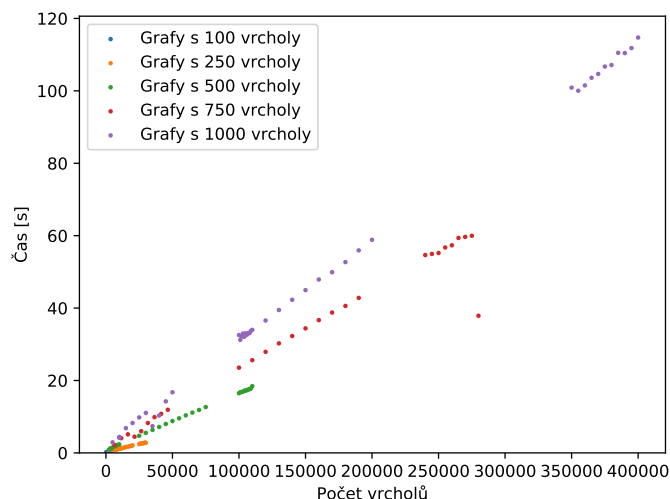
Kvůli náročnosti výpočtu této vlastnosti jsem se musela omezit na menší grafy 5.13 a 5.14. Rychlost výpočtu počtu koster v grafu se v obou aplikacích jeví jako podobná, ačkoli u křivky programu Mathematica je viditelnější tendence se podobat logaritmické křivce.

### 5.1.8 Perfektnost grafu

U zjišťování, zda je graf perfektní 5.15 a 5.16 se znovu dostáváme do oblasti, kde je velká časová náročnost. U obou aplikací se grafy hodně podobají, přesto se zdá, že u Mathematici dochází k mírnému nárůstu doby výpočtu s přibývajícím počtem hran u SageMath se jeví křivka více zploštělá.



**Obrázek 5.7.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění poloměru sto grafů v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



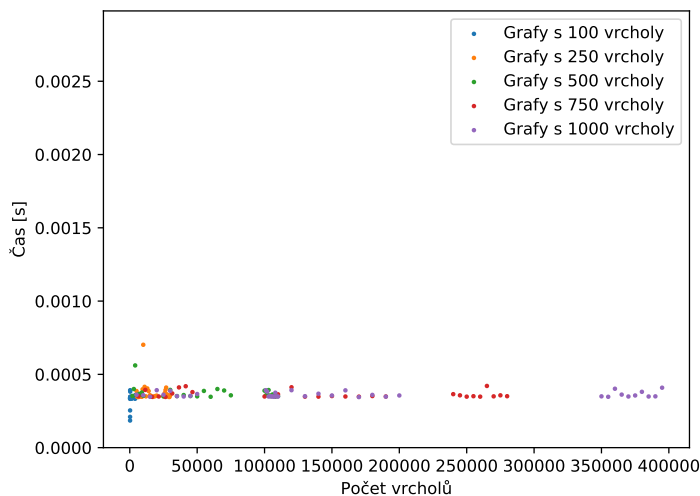
**Obrázek 5.8.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění poloměru sto grafů v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

### 5.1.9 Rovinný graf

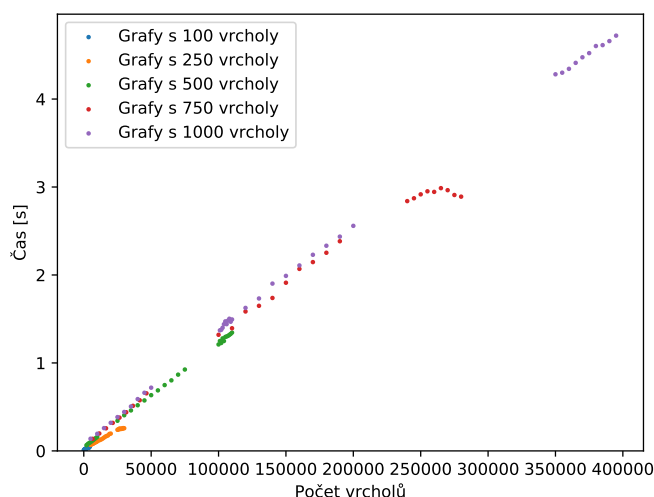
V případě zjišťování, zda je graf rovinný (5.17 a 5.18) se výsledky aplikací výrazně liší. Mathematica vlastnost vypočítá v konstantním čase bez ohledu na velikost grafu, oproti tomu u SageMath při přibývajících hranách dochází k výraznému zvýšení doby výpočtu, ovšem počet vrcholů grafu na výpočet nemá vliv.

### 5.1.10 Regulární graf

U zjišťování, zda je graf regulární se dostáváme na stejné výsledky u obou aplikací. Jak vidíme na grafech 5.19 a 5.20. Čas strávený výpočtem je téměř zanedbatelný a nemá na něj vliv počet vrcholů ani počet hran v grafu.



**Obrázek 5.9.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů hranově Eulerovských, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



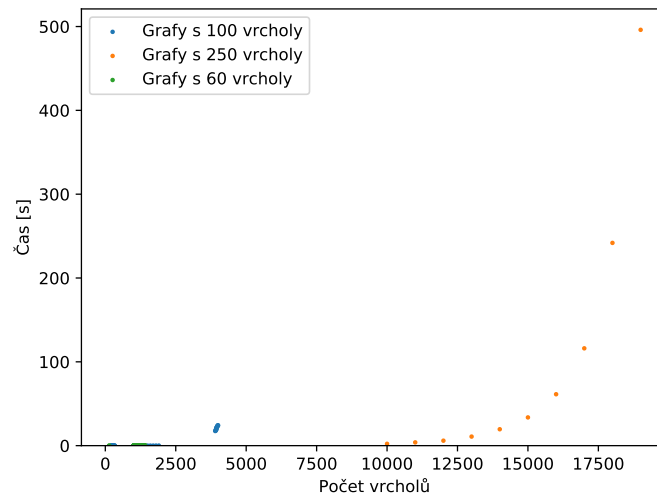
**Obrázek 5.10.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů Eulerovských, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

### 5.1.11 Hranově tranzitivní graf

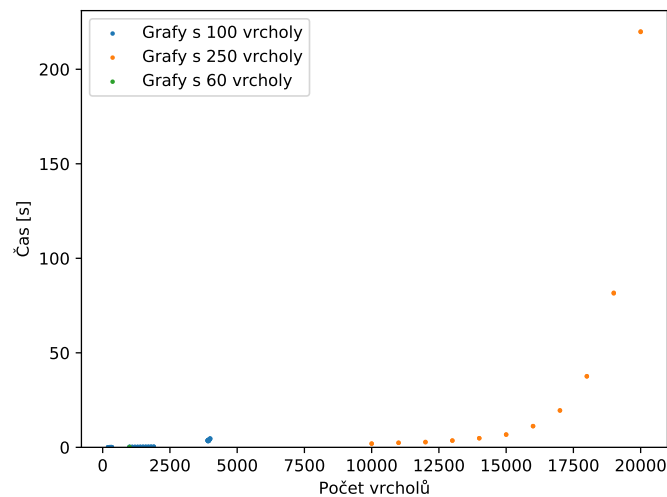
U této vlastnosti je zjevné, že počet vrcholů nemá vliv, avšak počet hran se jeví být rozhodujícím 5.21, 5.22. V obou aplikacích se v případě jednoho grafu se 750 vrcholy a mnoha hranami vyhoupl čas strávený výpočtem do ohromných čísel. U obou aplikací s přibývajícím počtem hran čas až na výjimku mírně roste. Přesto Mathematica obzvláště grafy s více hranami počítala rychleji.

### 5.1.12 Distančně regulární graf

Pokud zjišťujeme, zda je vlastnost distančně regulární 5.23, 5.24 dostáváme výsledky podobné jako v případě, pokud zjišťujeme, zda graf je regulární (5.19, 5.20). Na rych-



**Obrázek 5.11.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění počtu klik ve sto grafech v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



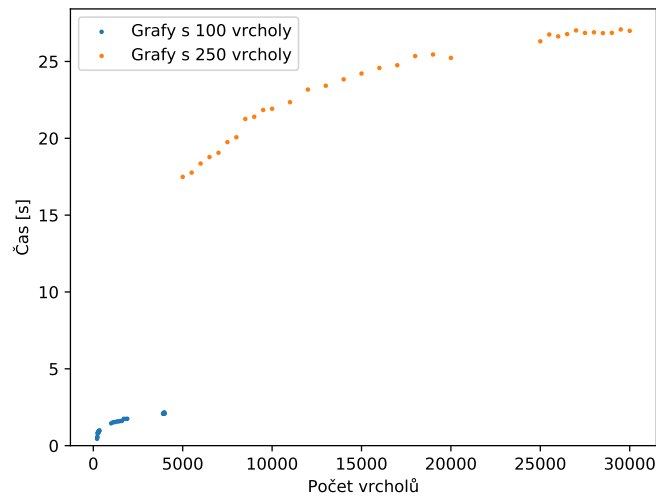
**Obrázek 5.12.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění počtu klik ve sto grafech v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

lost výpočtu nemá velikost grafu vliv a čas, který jsme výpočtem strávili je téměř zanedbatelný.

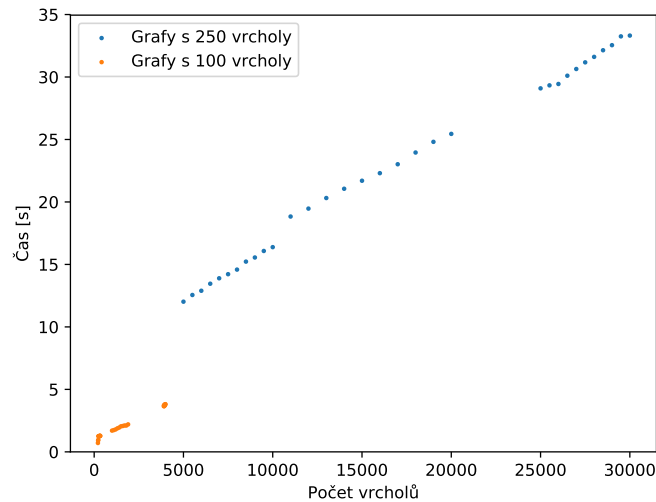
## 5.2 Vliv charakteristických vlastností grafů

Nyní se zaměříme na porovnání rychlosti výpočtu vlastností na grafech s různými charakteristickými vlastnostmi. Porovnáme, jak tyto vlastnosti ovlivňují rychlost výpočtu zkoumaných vlastností.

Porovnávat budeme tři skupiny grafů, kde v každé skupině má každý graf stejnou vlastnost. V první skupině máme grafy, které jsou spojitě, ve druhé grafy cyklické a nakonec grafy zcela náhodné.



**Obrázek 5.13.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění počtů koster ve sto různých grafech v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice

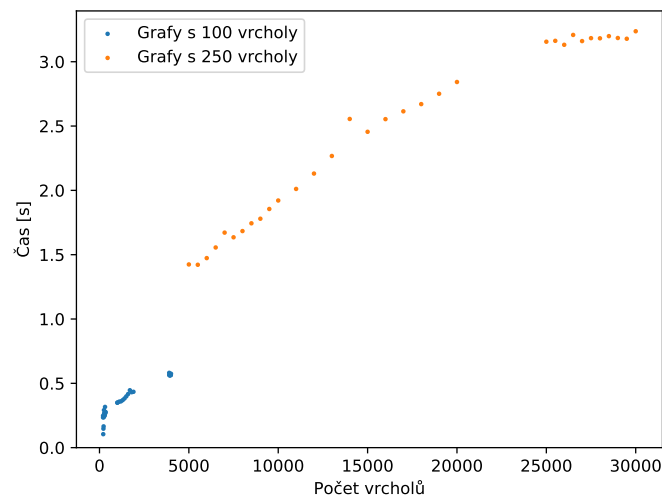


**Obrázek 5.14.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění počtů koster ve sto různých grafech v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

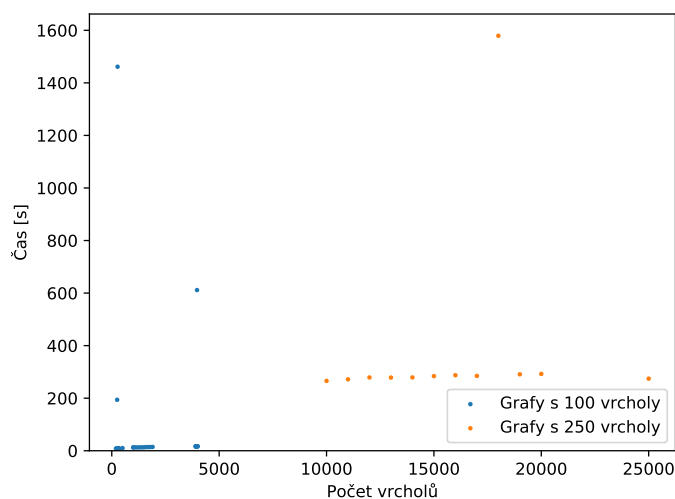
Všechny grafy použité pro testování mají 100 vrcholů. Jsou rozděleny do tří skupin podle počtu hran. Jsou zde grafy, které mají málo hran, tedy od 200 do 350, pak máme skupinu s hranami od 1000 do 2000 a nakonec grafy s nejvíce hranami 3900 do 4000.

Všechny grafy jsou k nalezení v příloze A.

Já pro porovnání vyzdvihnu hledání průměru grafu. ( 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30). Jak je z grafů patrné, tak jednotlivé vlastnosti na rychlost výpočtu neměli velký vliv, což se týká i zbylých grafů a jejich vlastností.



**Obrázek 5.15.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů perfektních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



**Obrázek 5.16.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů perfektních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

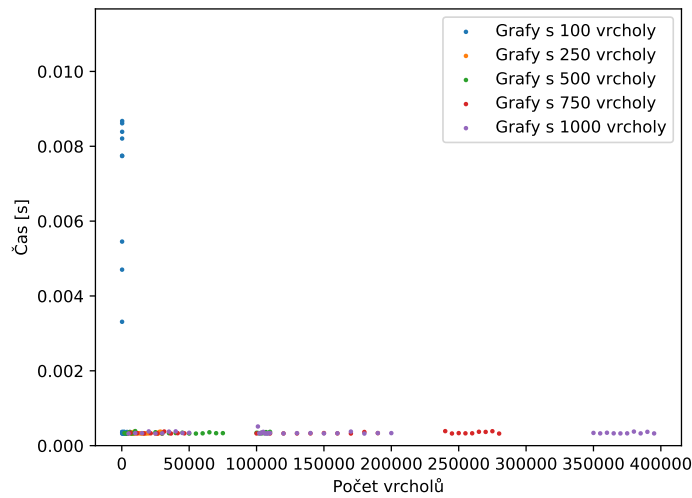
## 5.3 Vliv hardwarového vybavení

Nyní porovnáme jaký má vliv hardware na rychlost výpočtu. Výpočty jsem prováděla na svém osobním počítači a dvou superpočítačích dostupných v akademickém prostředí ČVUT. Porovnáme rychlost výpočtu na těchto třech typech zařízení.

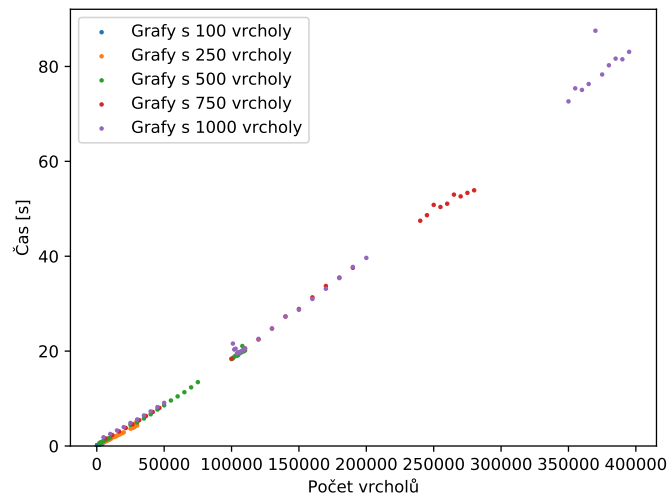
Můj osobní počítač má čtyřjádrový procesor Intel Core i5-4210U 1,7GHz a 8 GB RAM.

První testovaný superpočítač má dva šestijádrové procesory Intel Xeon 2,66 GHz a 775 GB RAM. [24]

Druhý testovaný superpočítač ferretgpu.civ.cvut má dva dvanáctijádrové procesory Intel Xeon Gold 2,6 GHz a 1888 GB RAM. [24]



**Obrázek 5.17.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů rovinných, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice

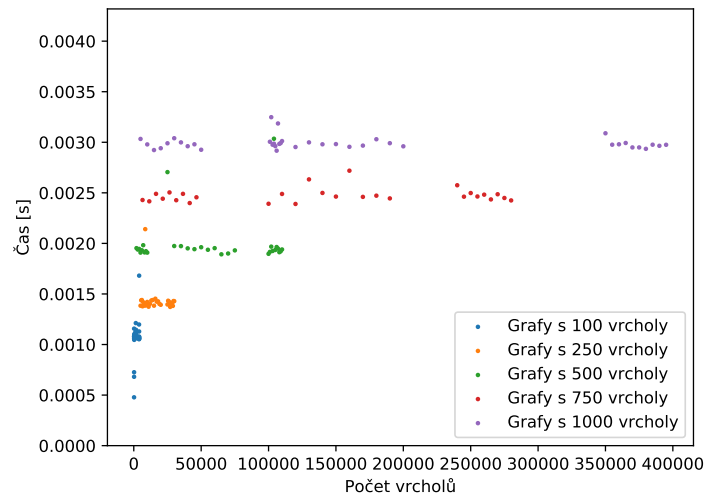


**Obrázek 5.18.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů rovinných, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath

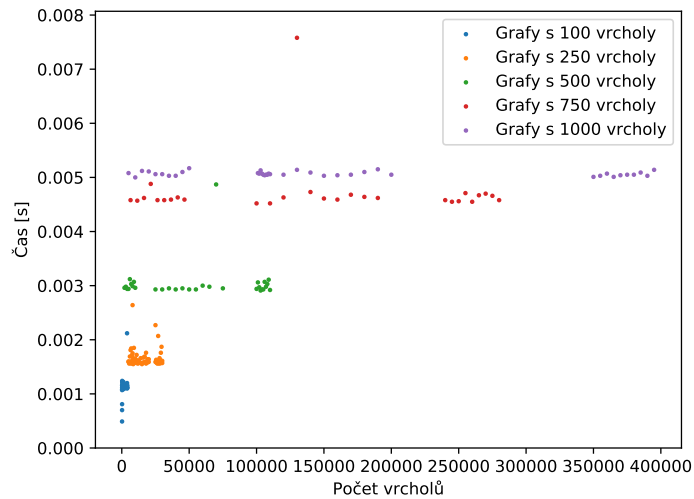
Grafy s jednotlivými výsledky jsou k nahlednutí v příloze , B.

Ačkoliv superpočítač disponuje větším počtem jader v procesoru, na výpočet vlastností v testovaném programu to nemá vliv, protože tato aplikace je pouze jednovláknová. Využití superpočítače by tedy mělo smysl pouze v případě, že by daná aplikace byla schopná využít více jader. Jediné, co lze vyzdvihnout je, že narozdíl od osobního počítače u superpočítače nehrozí, že do výpočtů budou zasahovat jiné procesy.

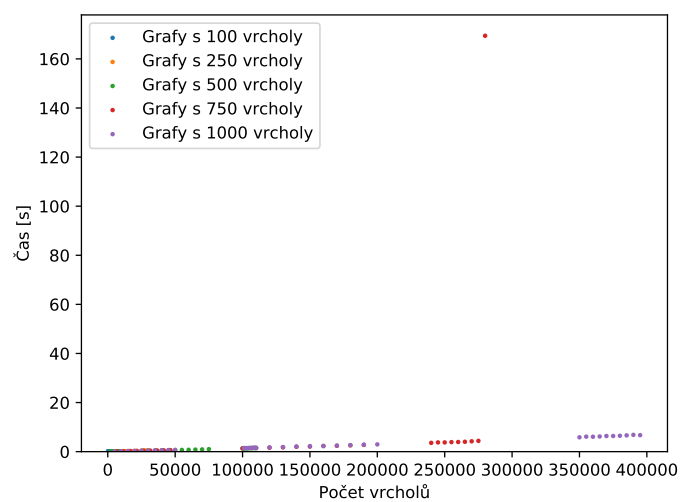




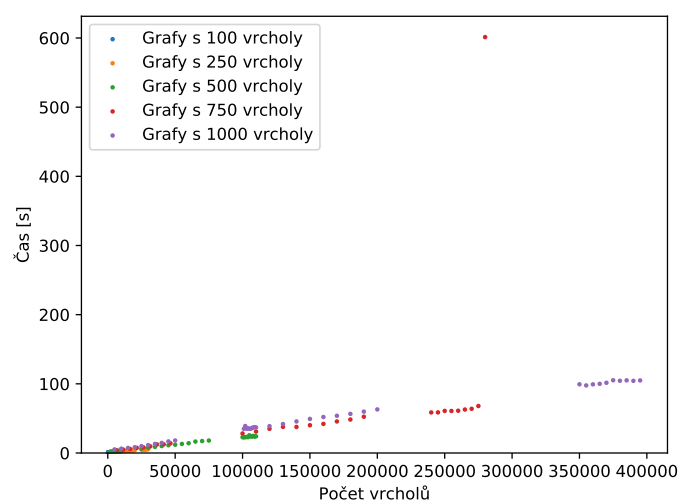
**Obrázek 5.19.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů regulárních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



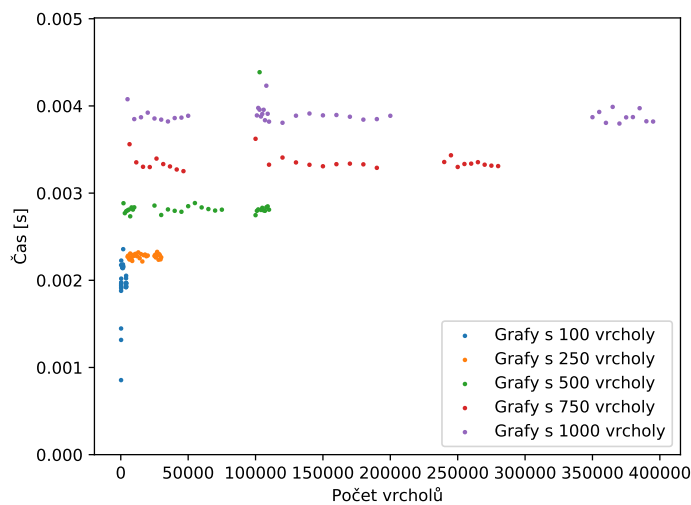
**Obrázek 5.20.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů regulárních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath



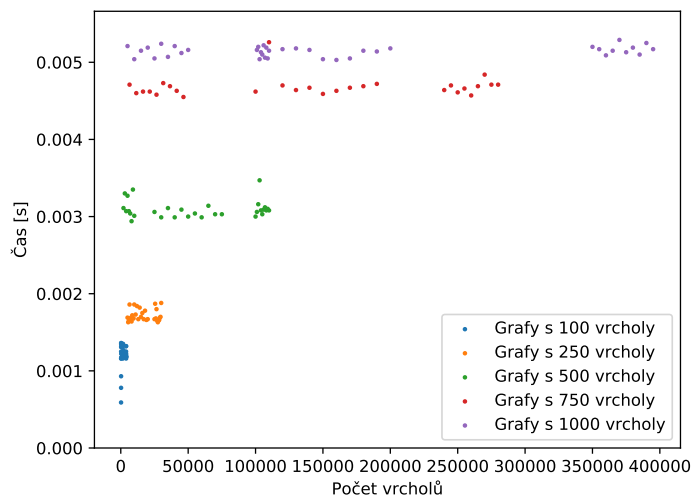
**Obrázek 5.21.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů hranově tranzitivních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



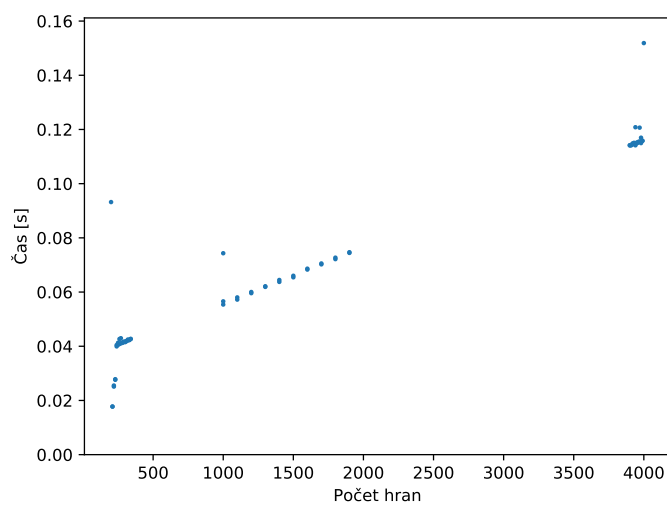
**Obrázek 5.22.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů hranově tranzitivních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath



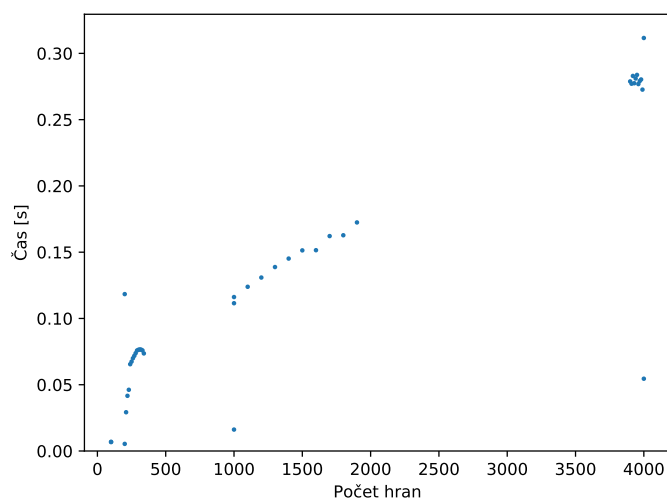
**Obrázek 5.23.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů distančně regulárních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v Mathematice



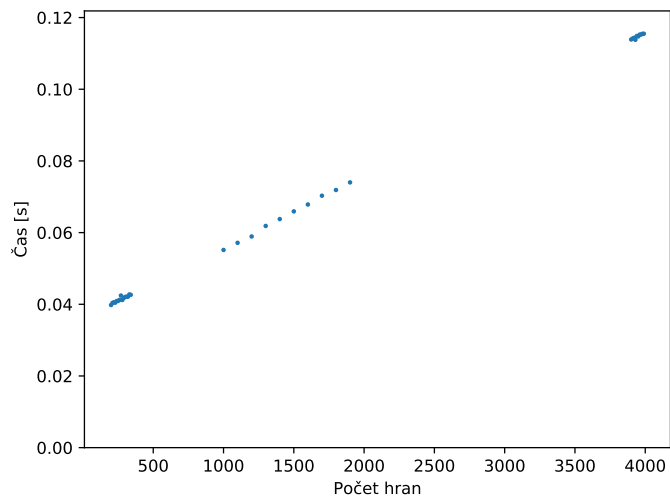
**Obrázek 5.24.** Graf ukazuje závislost doby potřebné na zjištění, zda je sto grafů distančně regulárních, v závislosti na počtu vrcholů a hran počítané v SageMath



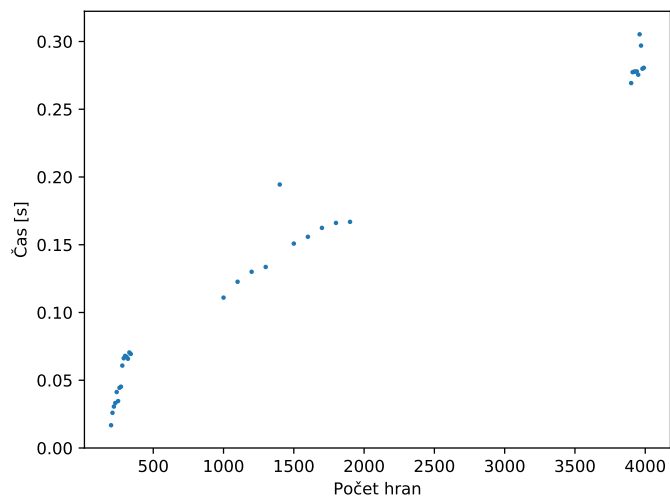
**Obrázek 5.25.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice



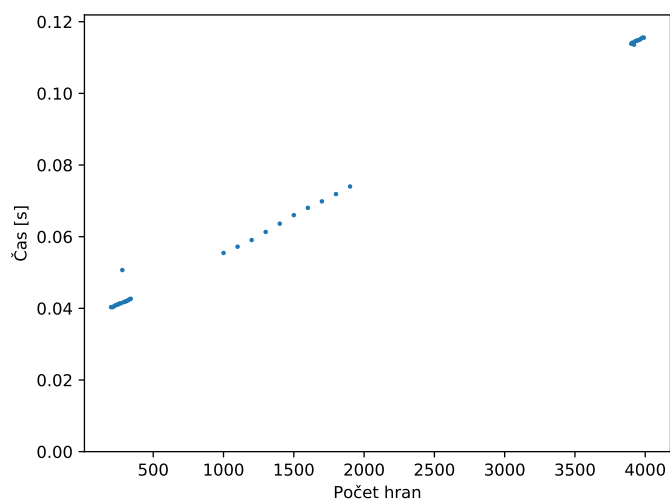
**Obrázek 5.26.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v SageMath



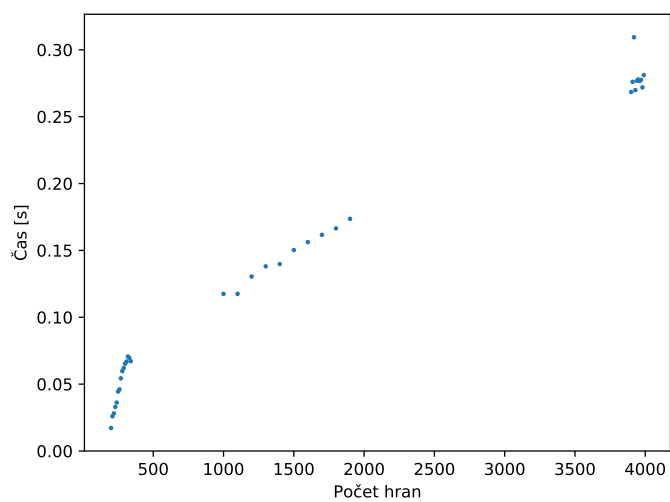
**Obrázek 5.27.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice



**Obrázek 5.28.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath



**Obrázek 5.29.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice



**Obrázek 5.30.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath

# Kapitola 6

## Závěr

Práce představila dva programy na výpočet vlastností grafů, tedy SageMath a Mathematicu. Představila jednotlivé vlastnosti, které můžeme u grafů zjišťovat a pak je otestovala.

Zaměření práce bylo otestování programu Wolfram Mathematica a Pythonovského SageMath a porovnání času, který stráví výpočtem různých vlastností grafů. Ukázalo se, že ve většině případů byla rychlejší aplikace Mathematica.

Dále jsme se soustředily na porovnání, kolik času zabere výpočet nějaké vlastnosti pokud měníme velikost grafu. Ukázalo se, že tato rychlost se mění, jak s různými vlastnostmi, tak i s jednotlivými aplikacemi. Nelze jednoznačně stanovit, že všechny vlastnosti počítají rychleji při nižším počtu hran nebo uzlů. Právě naopak. U každé jednotlivé vlastnosti se to liší. Zatímco, u některých se doba výpočtu zvyšuje se zvyšujícím se počtem vrcholů, u jiných nemá počet vrcholů na rychlost výpočtu vliv.

Dále jsme zvolili tři skupiny grafů a testovali jsme, jestli pokud mají grafy v rámci skupiny nějakou společnou vlastnost, ovlivníme rychlost výpočtu jiných vlastností. Toto se na námi zvolených vlastnostech ovšem neprojevilo.

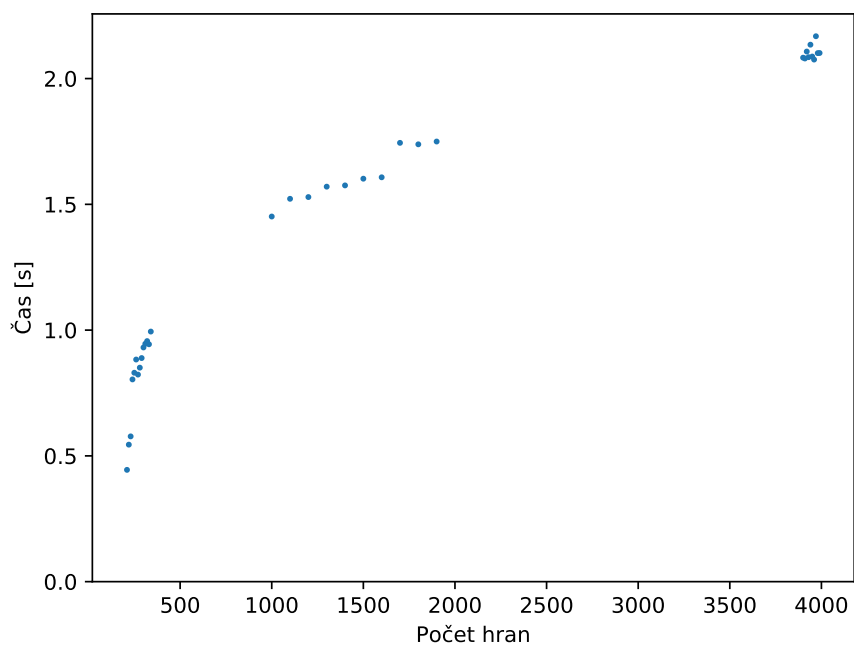
Nakonec jsme spustili program Mathematica na různých hardwarových zařízeních a porovnali výsledky. Ukázalo se, že rozdílný hardware nemá vliv.



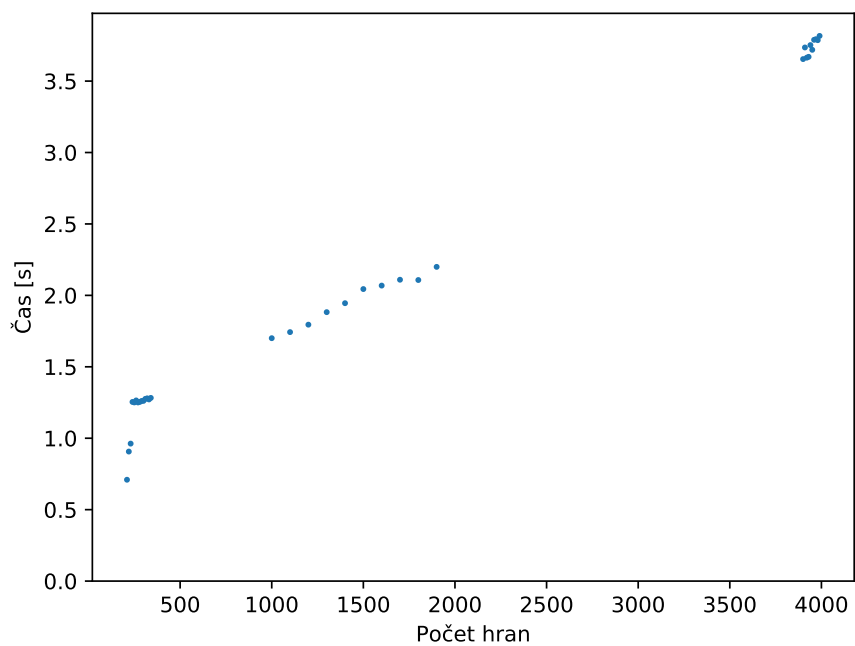


## Příloha A

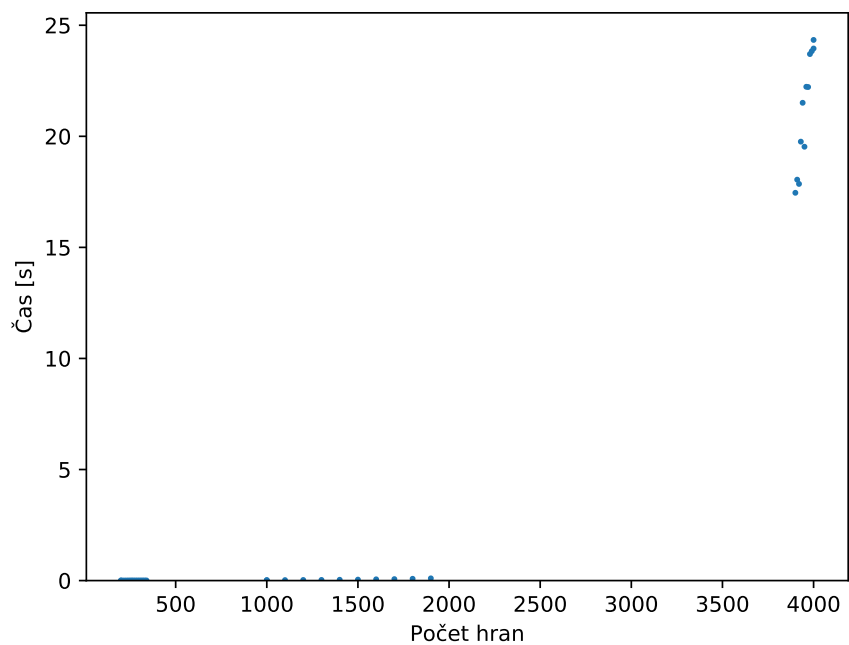
### Grafy zobrazující vliv charakteristických skupin grafů na časovou náročnost výpočtu jejich vlastností



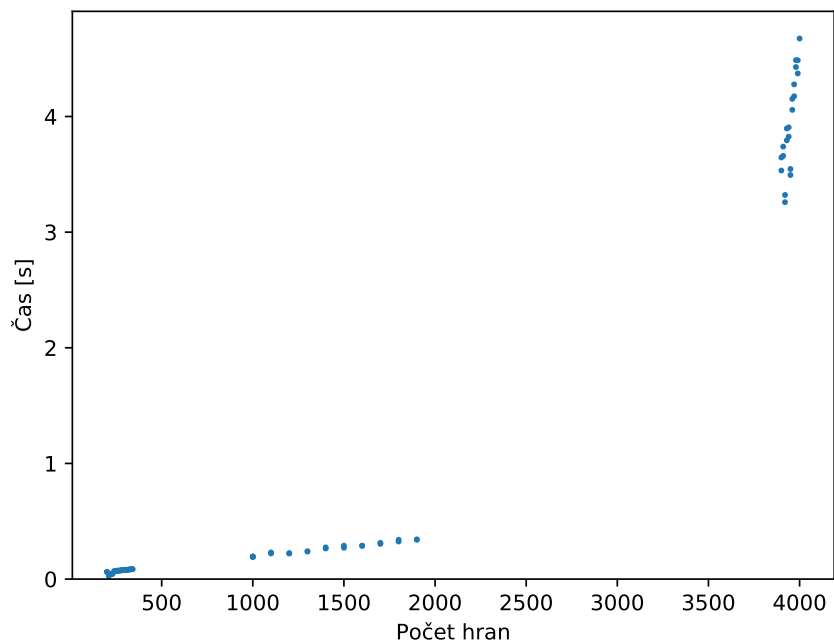
**Obrázek A.1.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice



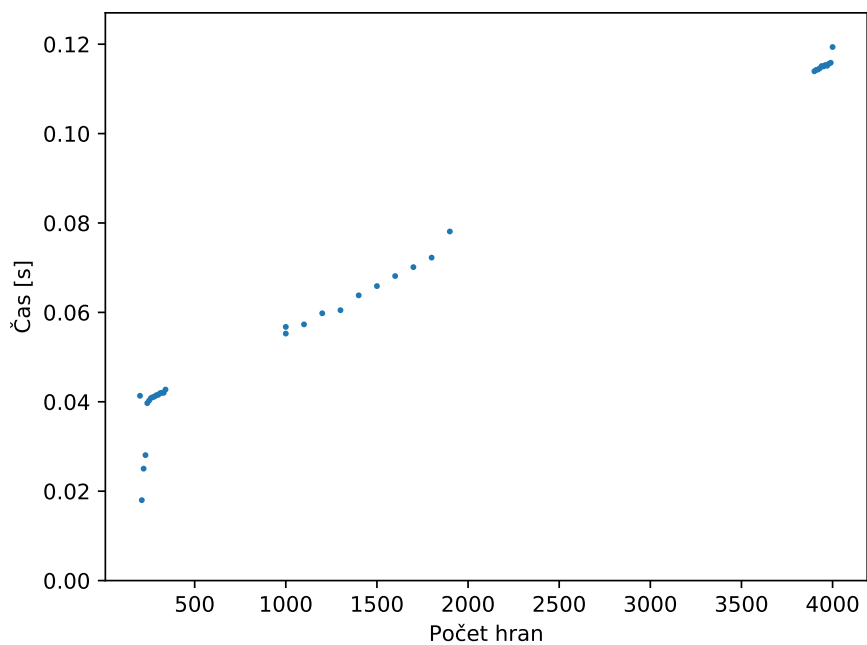
**Obrázek A.2.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu spojitých grafů, na počtu hran v SageMath



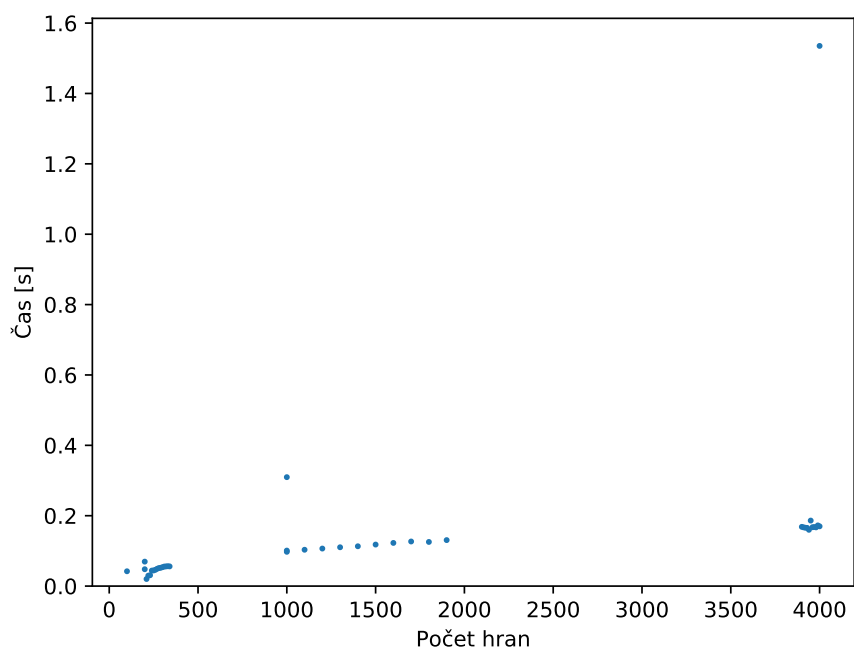
**Obrázek A.3.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice



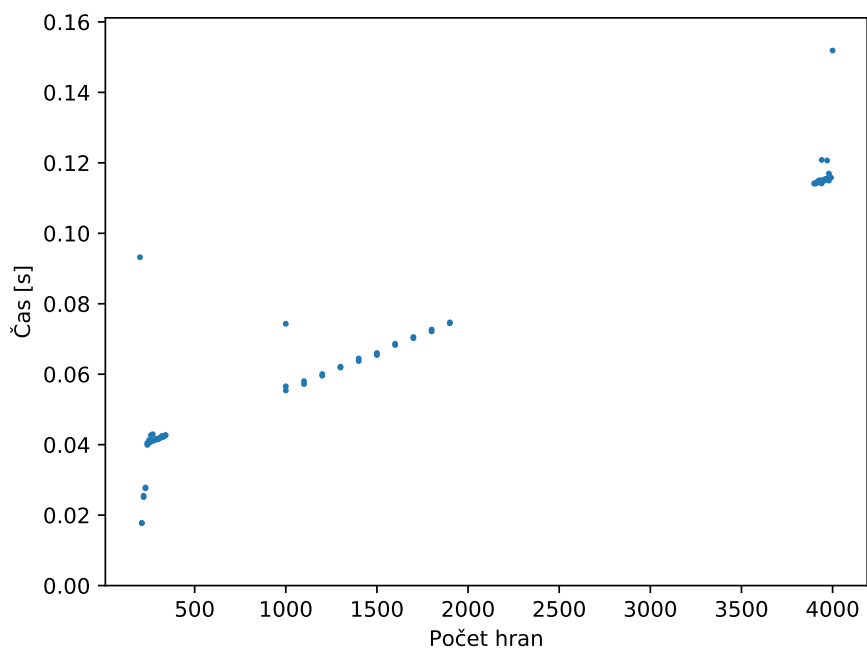
**Obrázek A.4.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu spojitých grafů, na počtu hran v SageMath



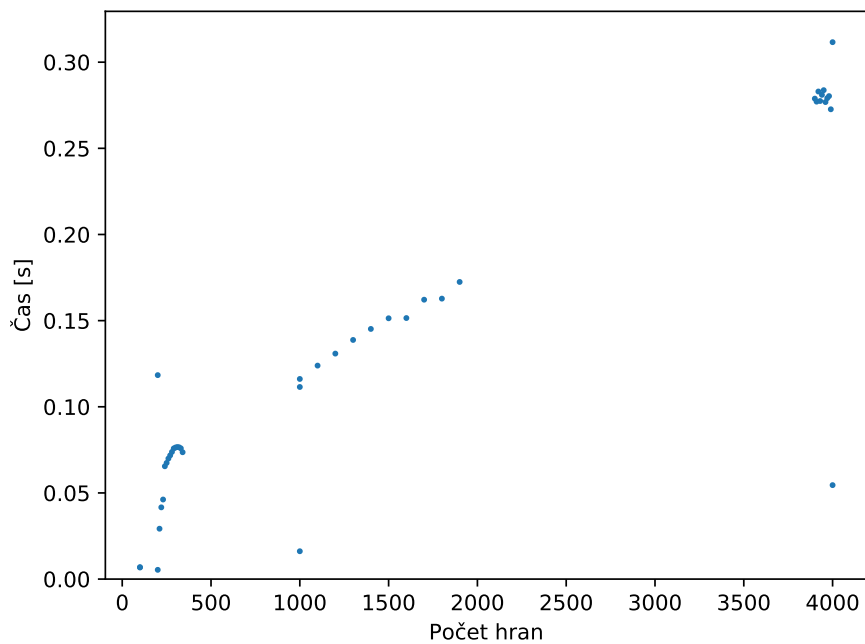
**Obrázek A.5.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu spojitých grafů, na počtu hran v Mathematice



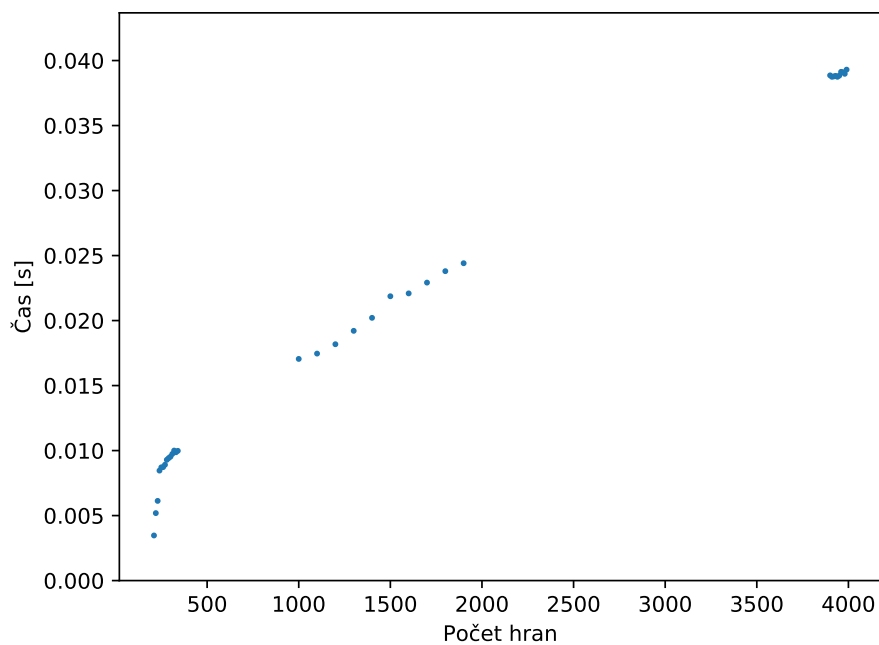
**Obrázek A.6.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu spojených grafů, na počtu hran v SageMath



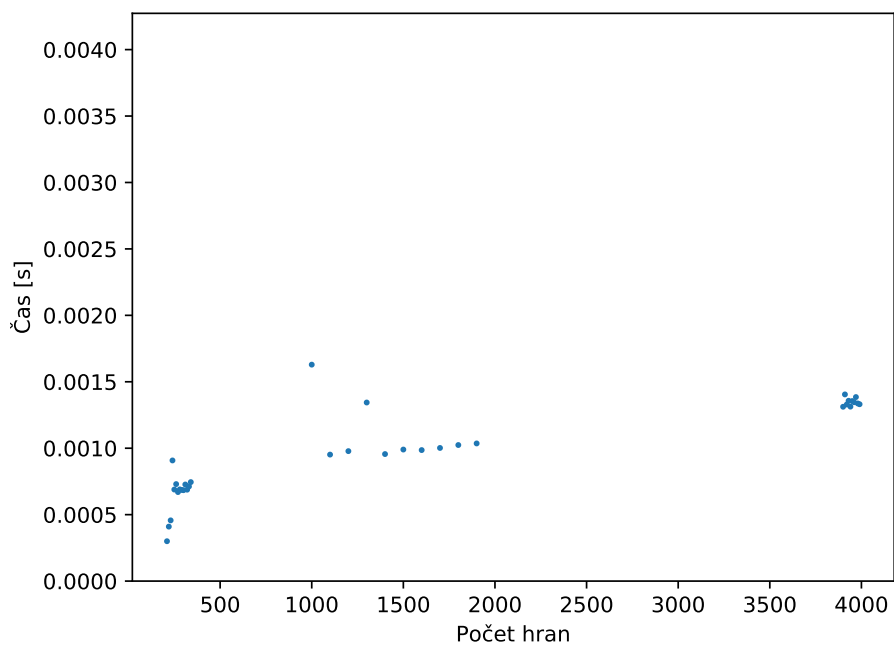
**Obrázek A.7.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu spojených grafů, na počtu hran v Mathematica



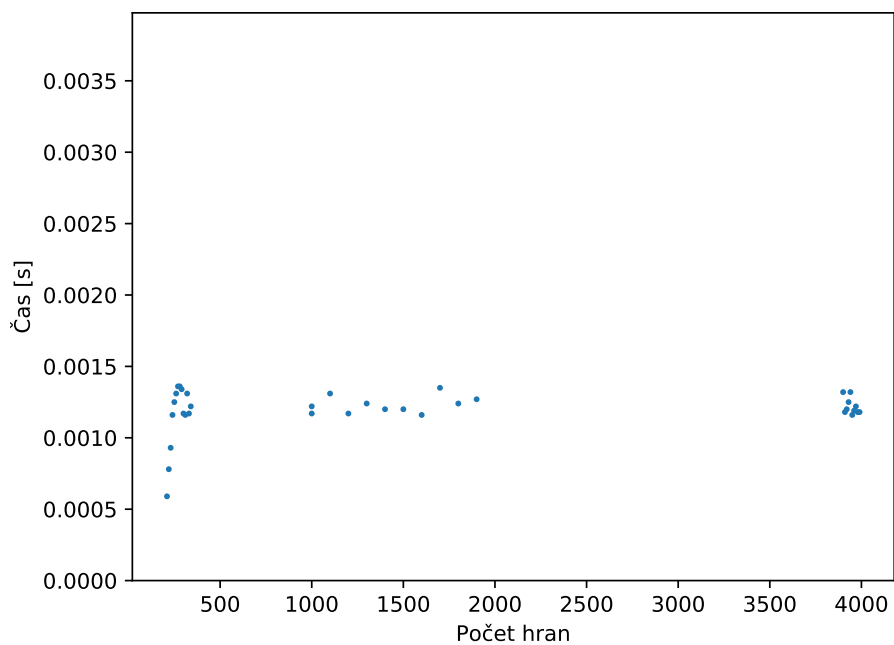
**Obrázek A.8.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu spojitých grafech, na počtu hran v SageMath



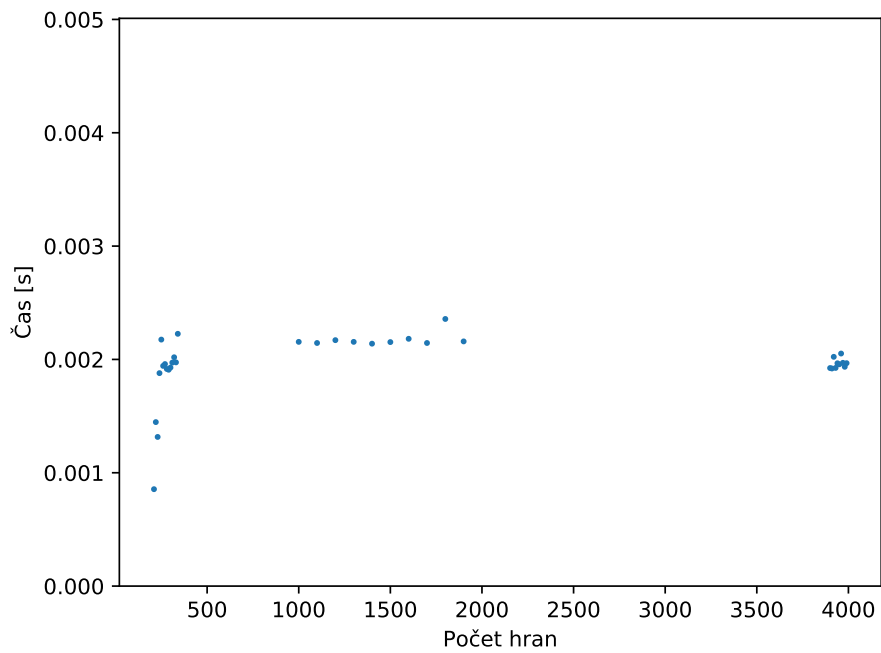
**Obrázek A.9.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafech spojitých, na počtu hran v SageMath



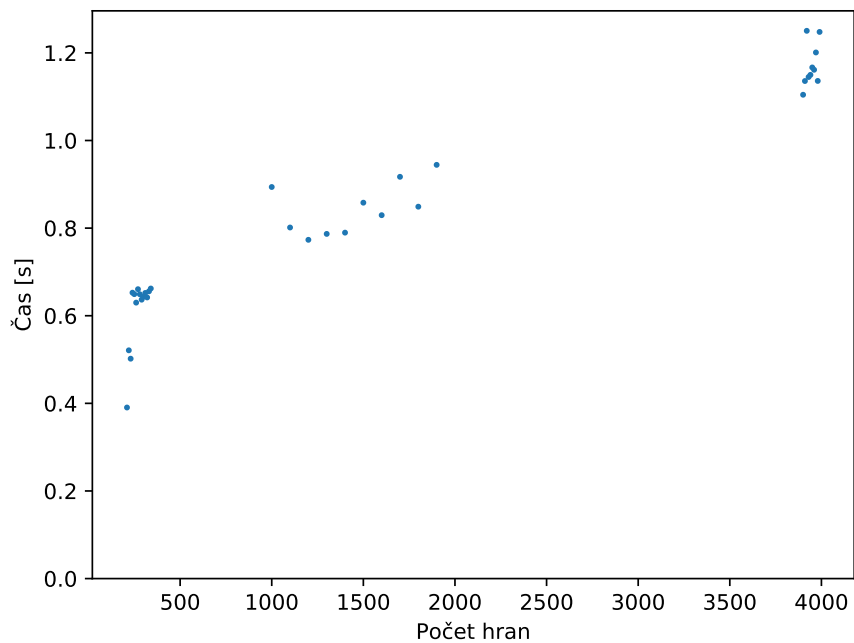
**Obrázek A.10.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů spojitých, na počtu hran v Mathematice



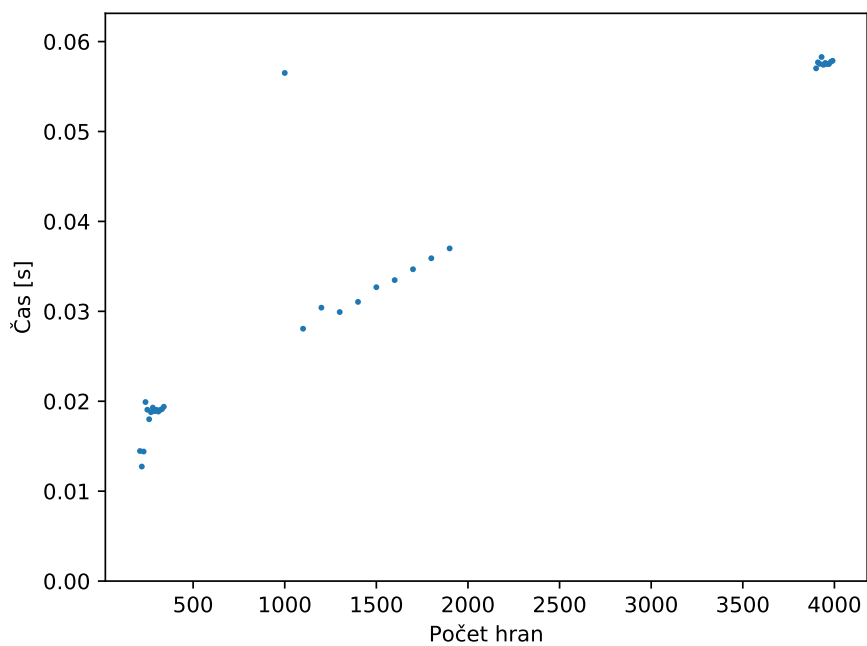
**Obrázek A.11.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath



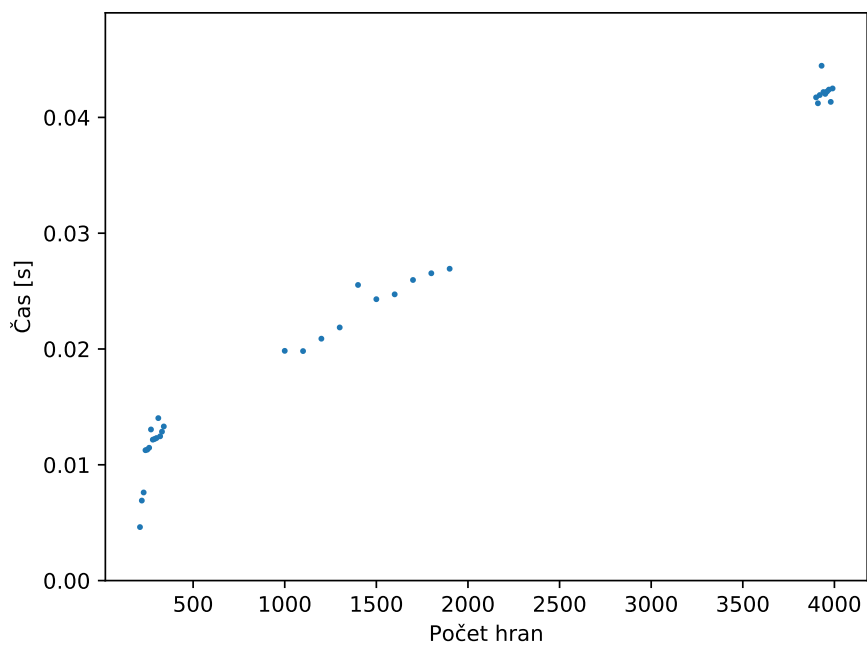
**Obrázek A.12.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů  
distančně regulárních, na počtu hran v Mathematice



**Obrázek A.13.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů  
hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath

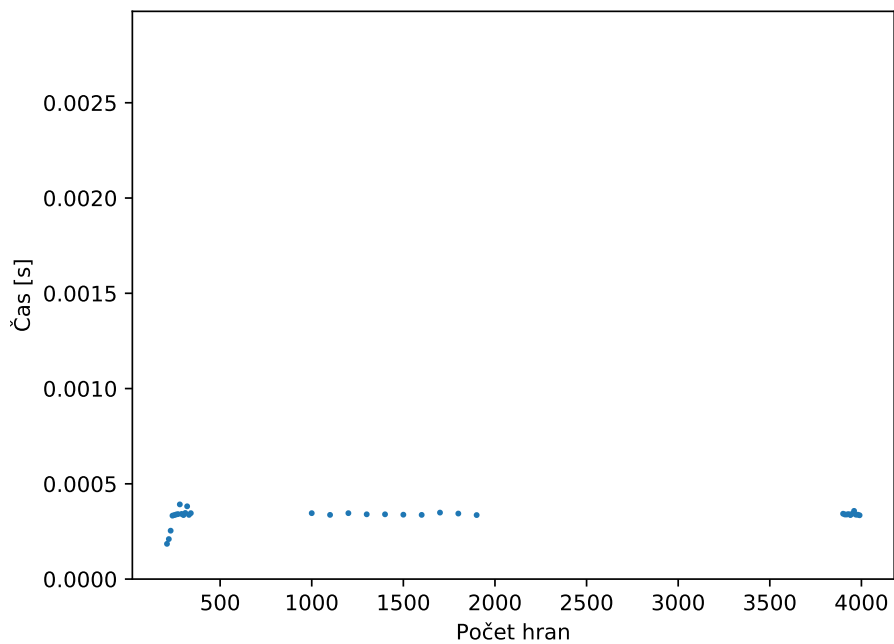


**Obrázek A.14.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematica

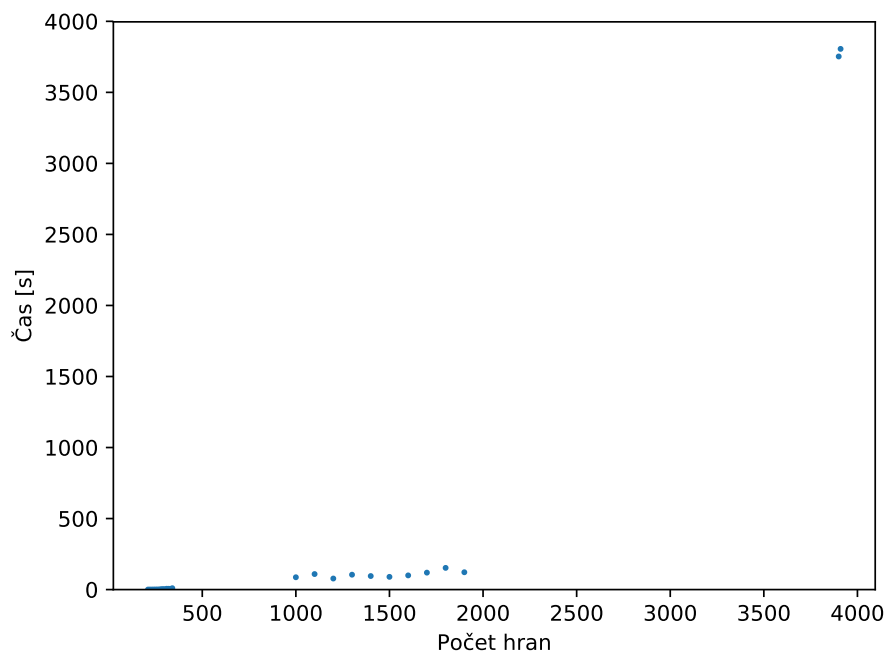


**Obrázek A.15.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů Eulerovských, na počtu hran v SageMath

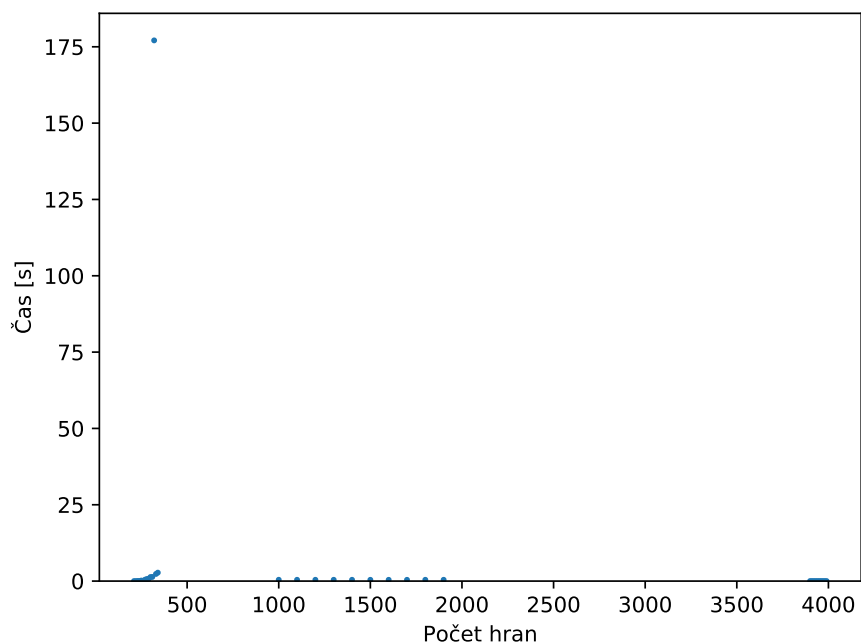




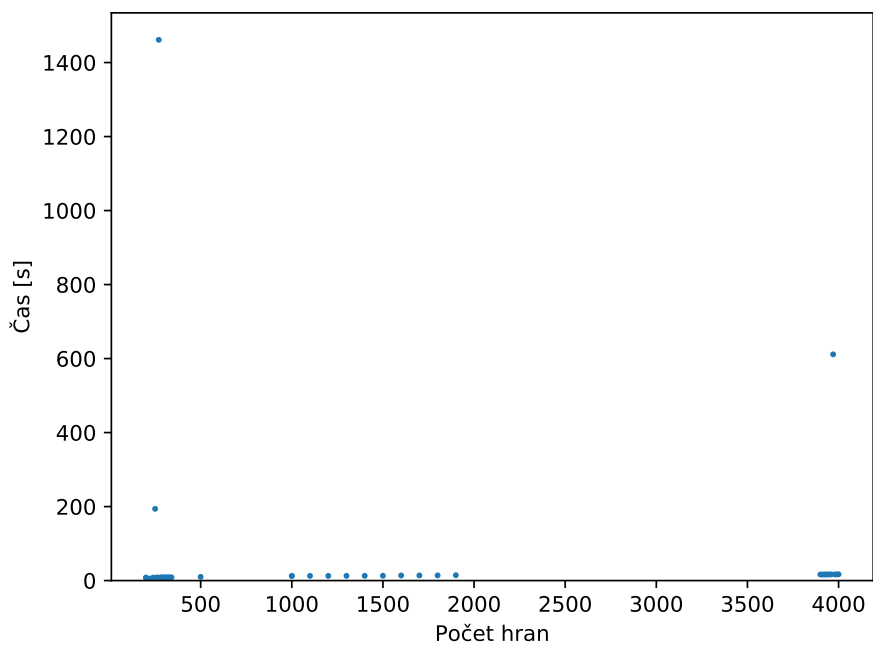
**Obrázek A.16.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů Eulerovských, na počtu hran v Mathematice



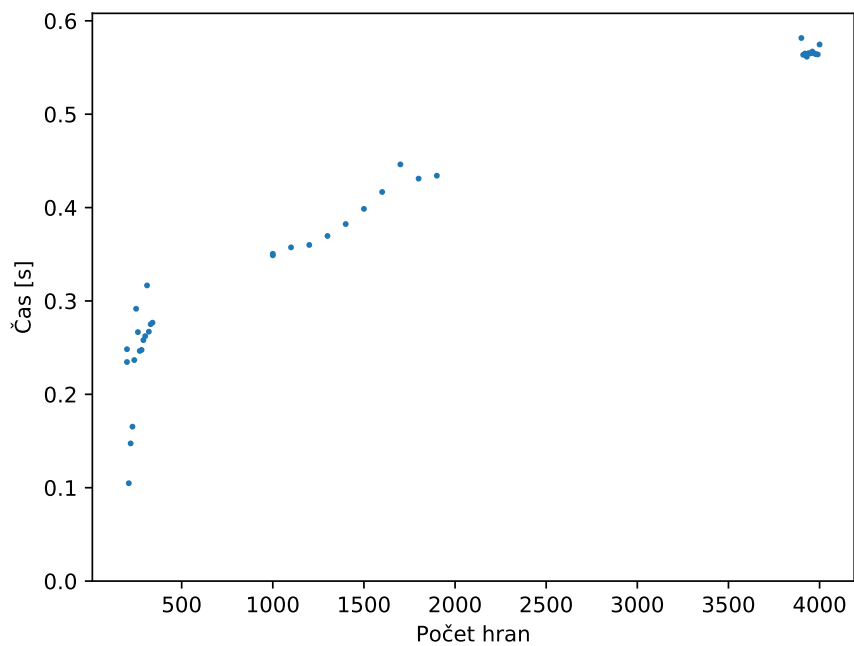
**Obrázek A.17.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů Hamiltonovských, na počtu hran v SageMath



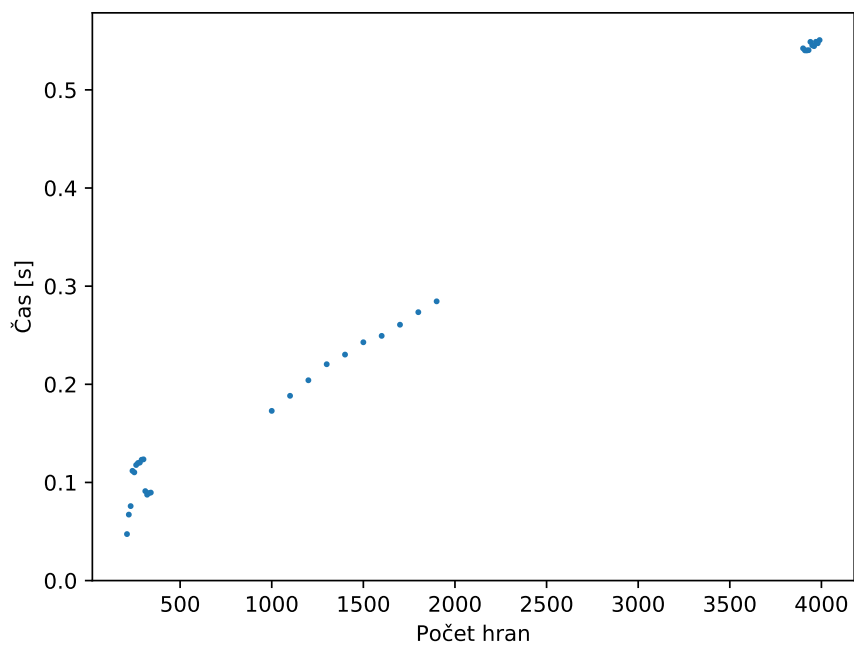
**Obrázek A.18.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojených grafů Hamiltonovských, na počtu hran v Mathematice



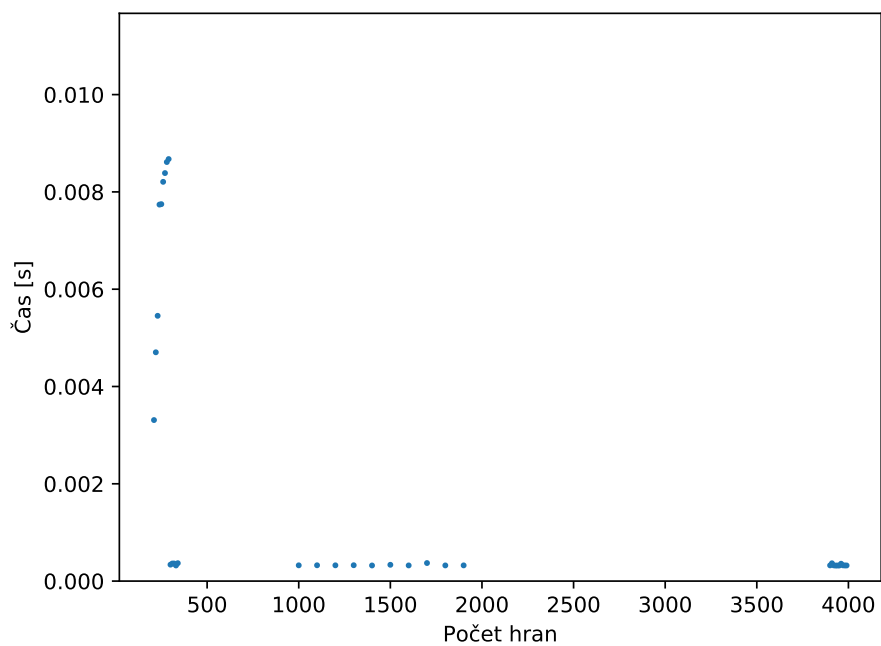
**Obrázek A.19.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojených grafů perfektních, na počtu hran v SageMath



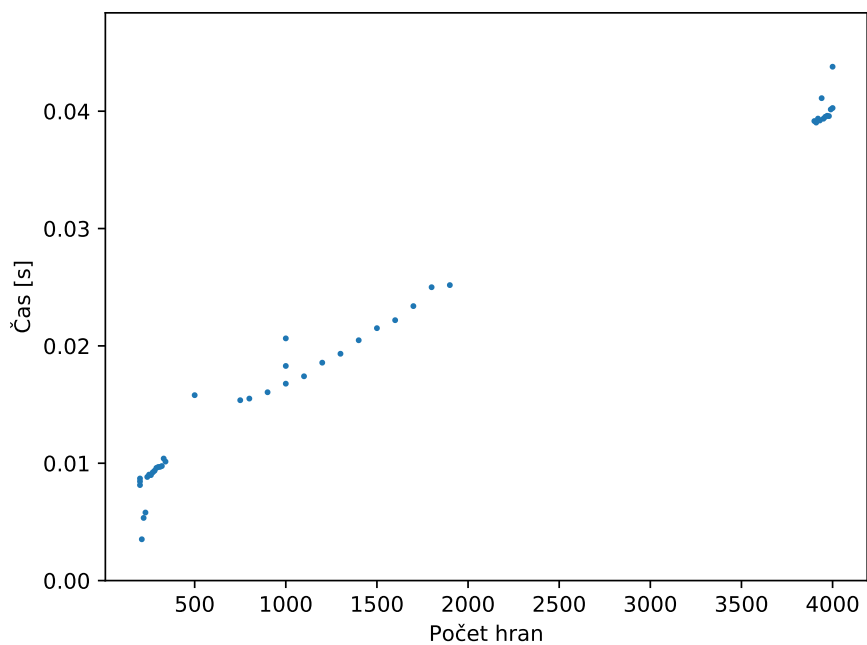
**Obrázek A.20.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů perfektních, na počtu hran v Mathematice



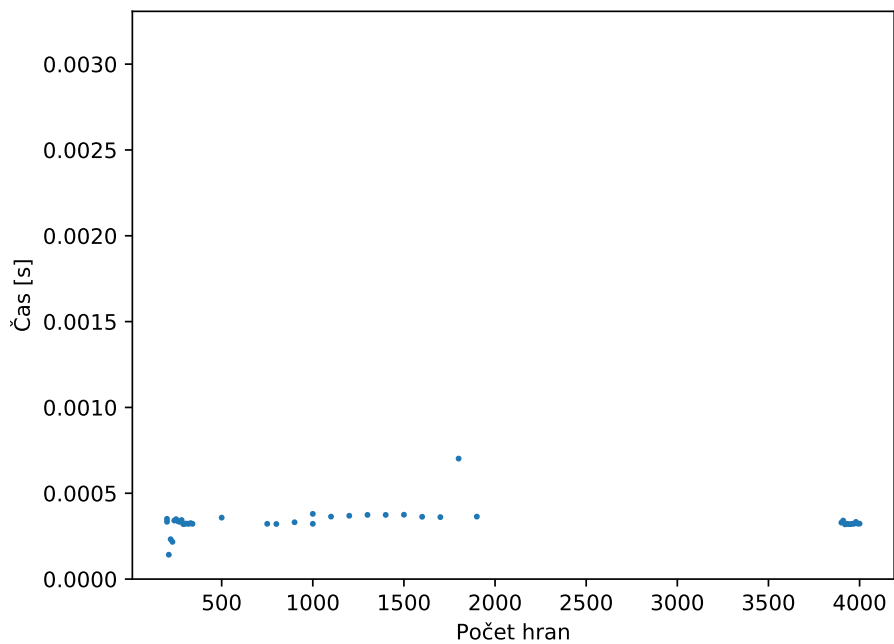
**Obrázek A.21.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů rovinných, na počtu hran v SageMath



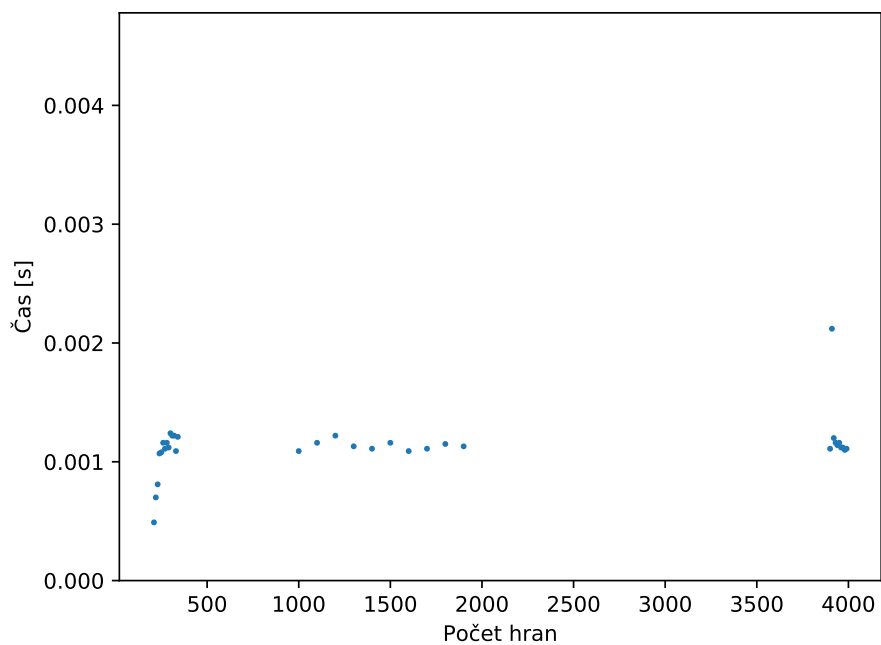
**Obrázek A.22.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice



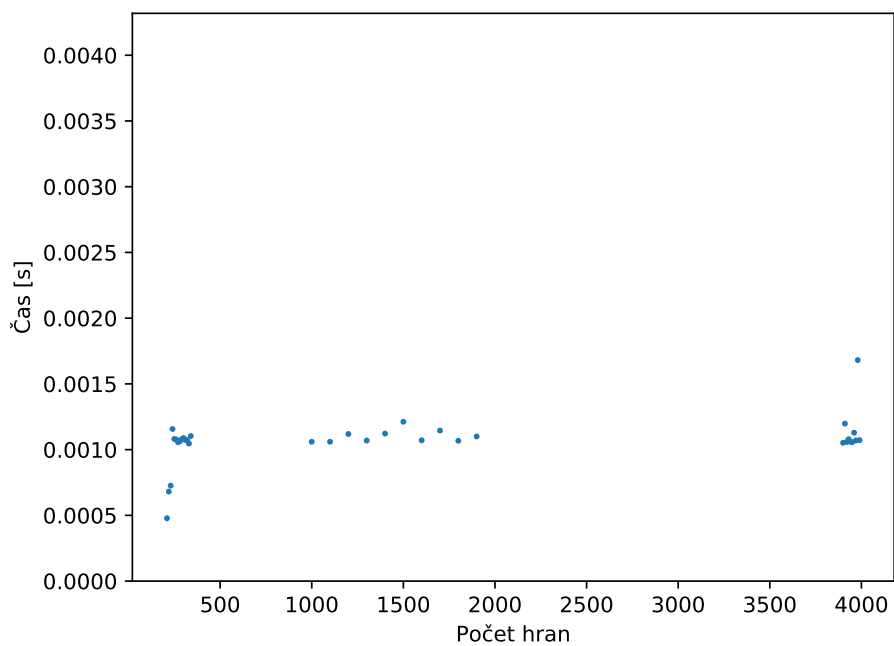
**Obrázek A.23.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů stromem, na počtu hran v SageMath



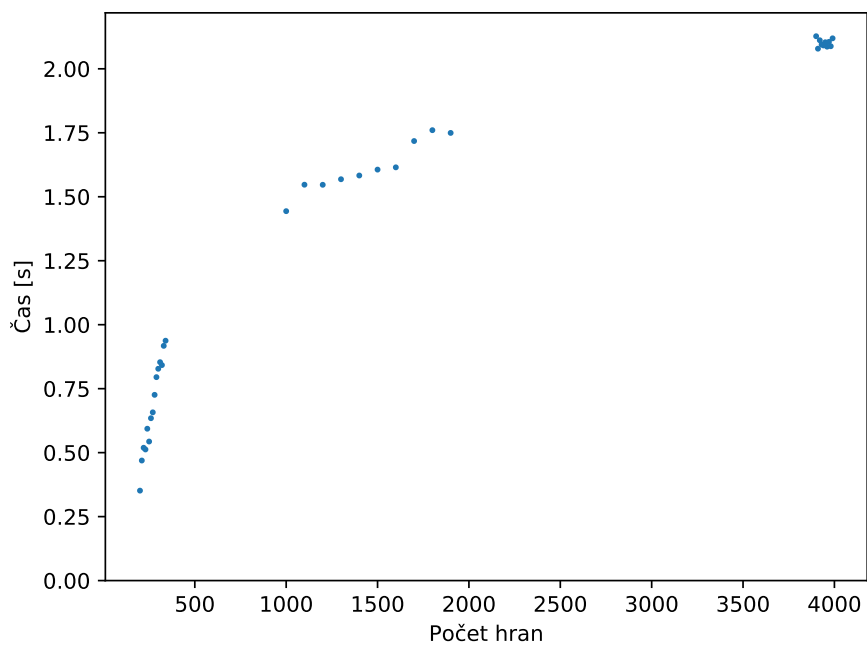
**Obrázek A.24.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů stromem, na počtu hran v Mathematice



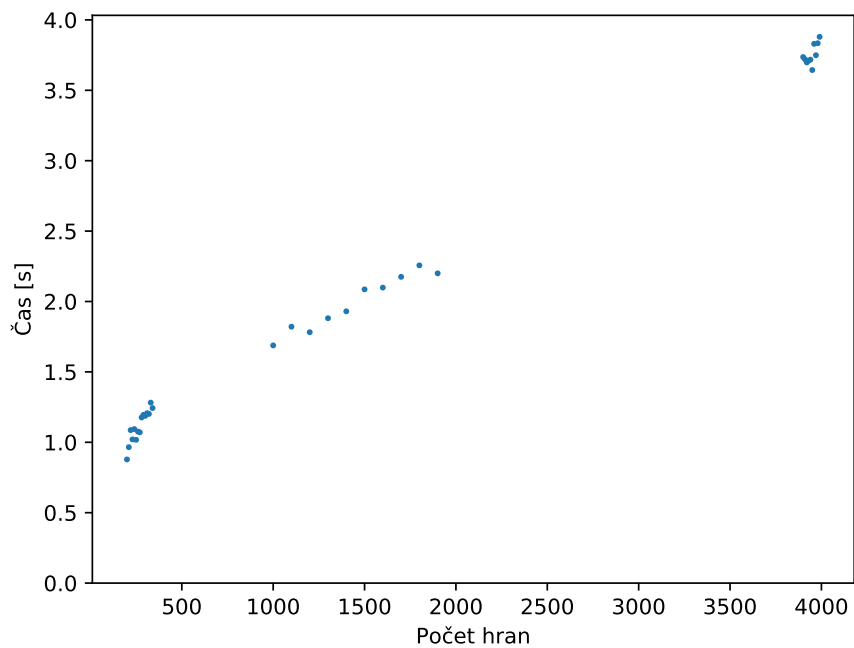
**Obrázek A.25.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojitých grafů regulárních, na počtu hran v SageMath



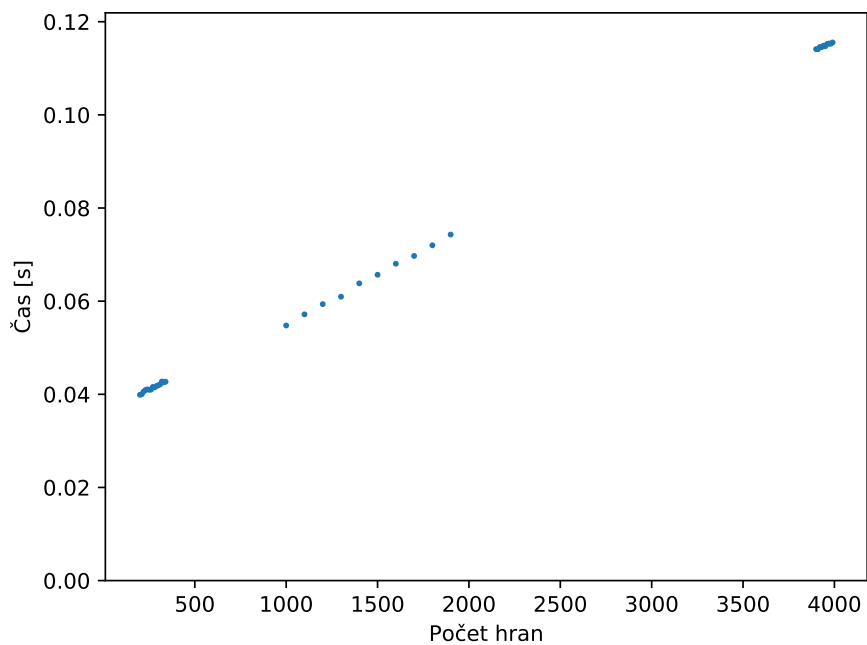
**Obrázek A.26.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto spojených grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice



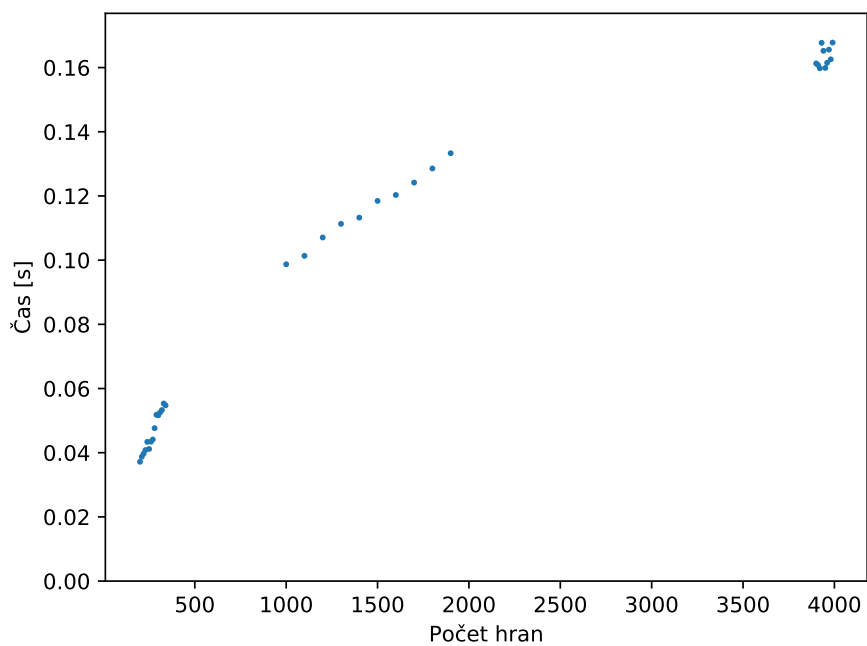
**Obrázek A.27.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice



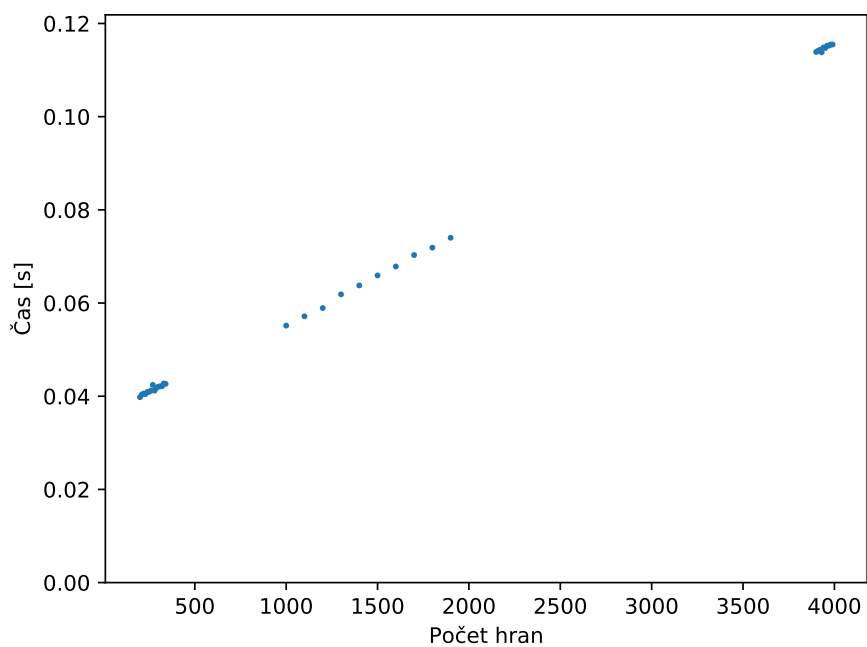
**Obrázek A.28.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath



**Obrázek A.29.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice

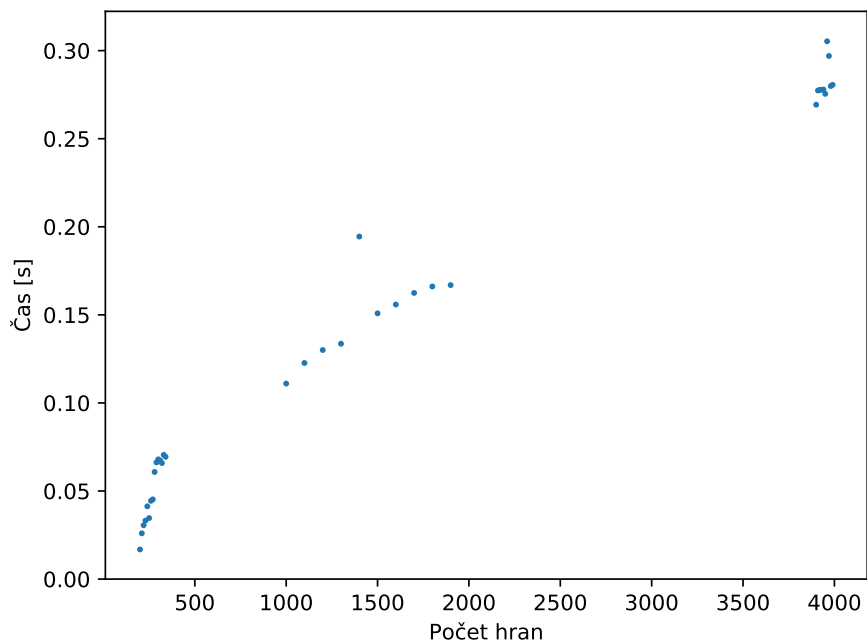


**Obrázek A.30.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath

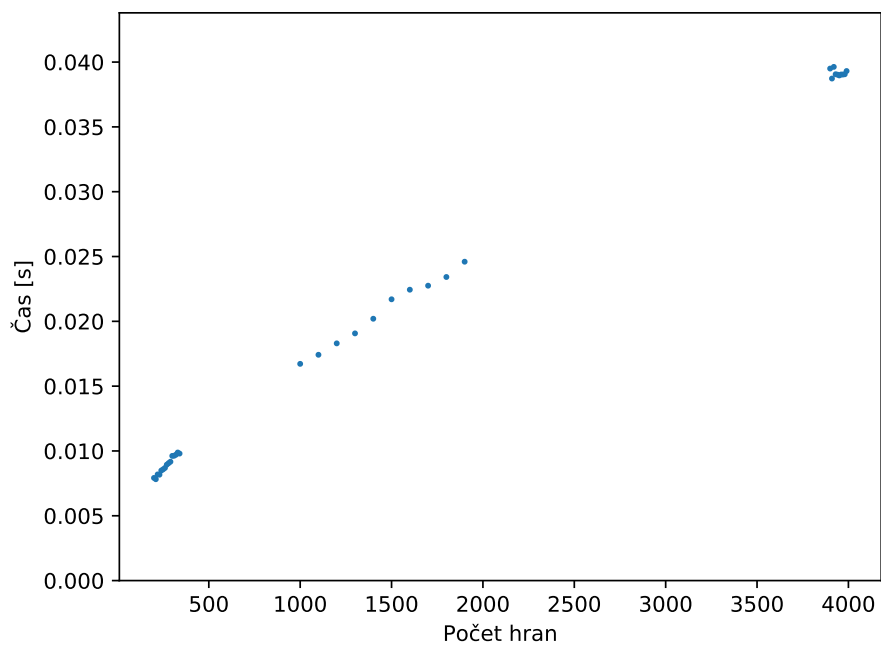


**Obrázek A.31.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v Mathematice

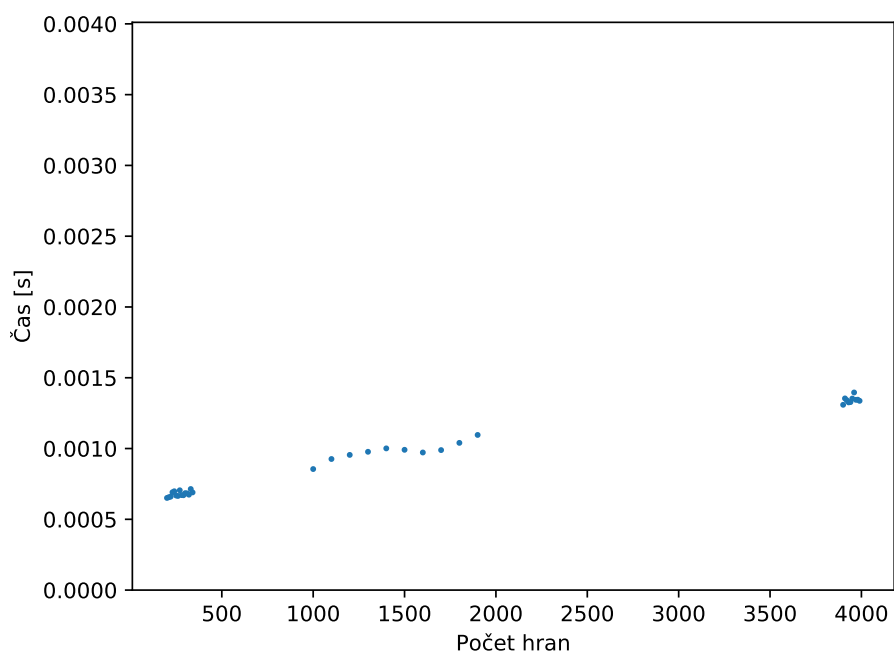




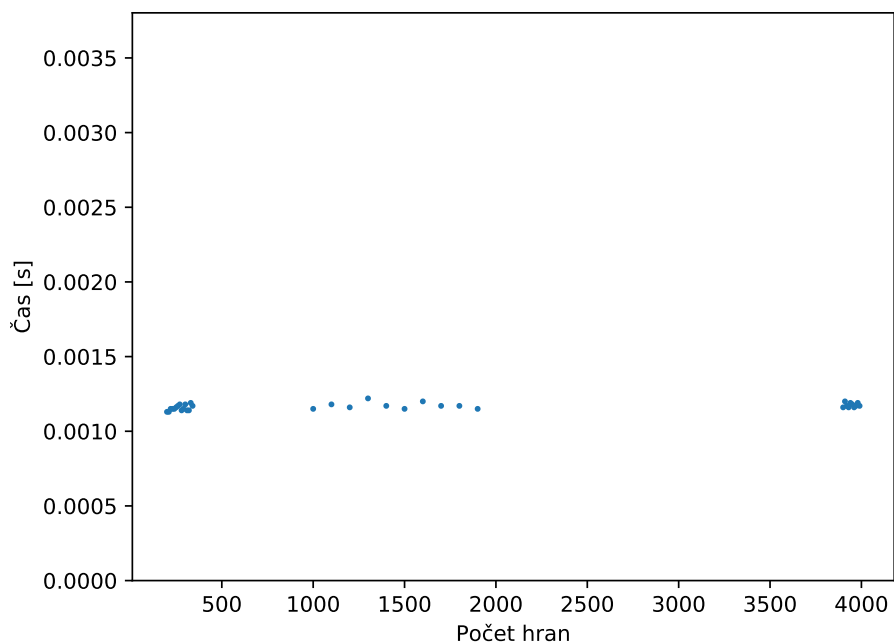
**Obrázek A.32.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu cyklických grafů, na počtu hran v SageMath



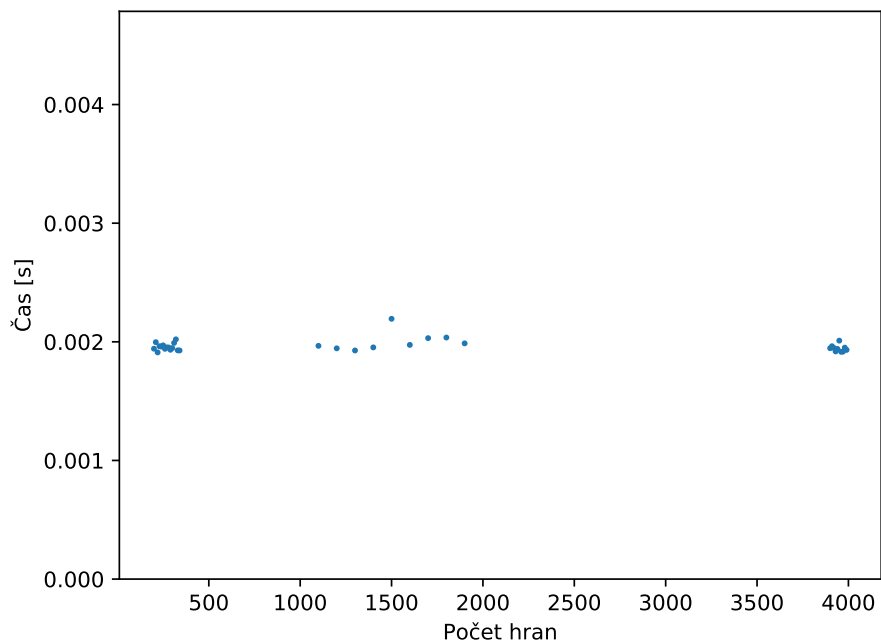
**Obrázek A.33.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů spojitých, na počtu hran v SageMath



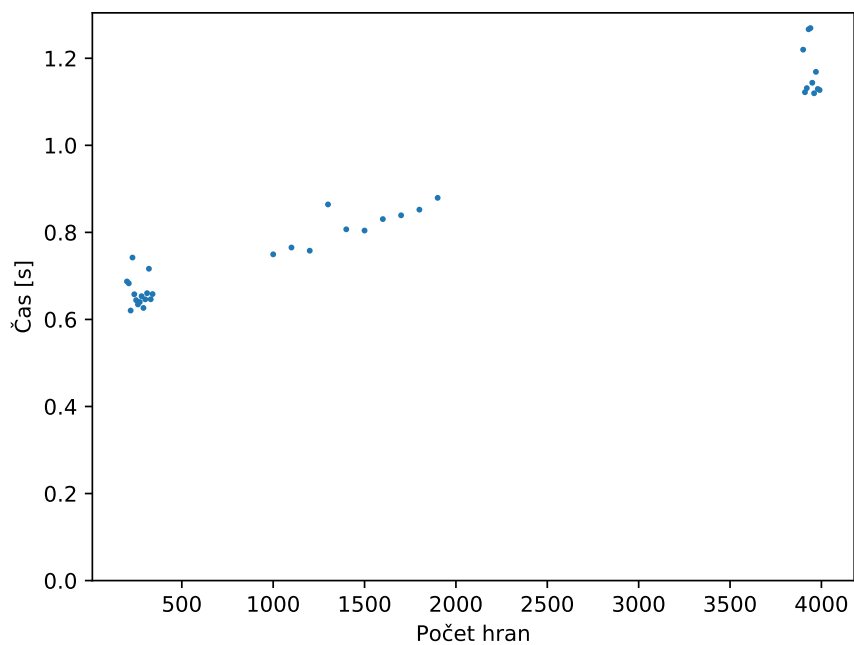
**Obrázek A.34.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů spojitých, na počtu hran v Mathematice



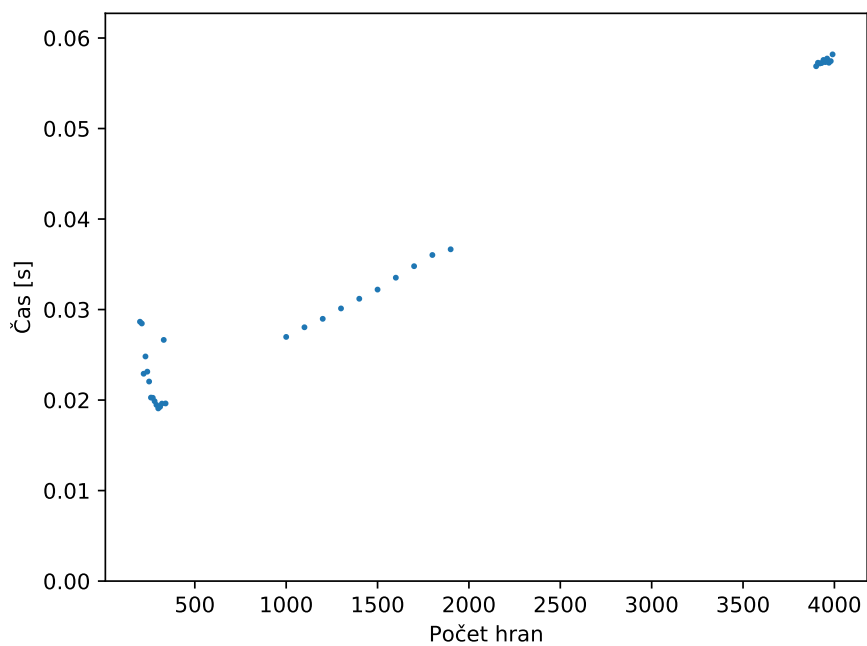
**Obrázek A.35.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath



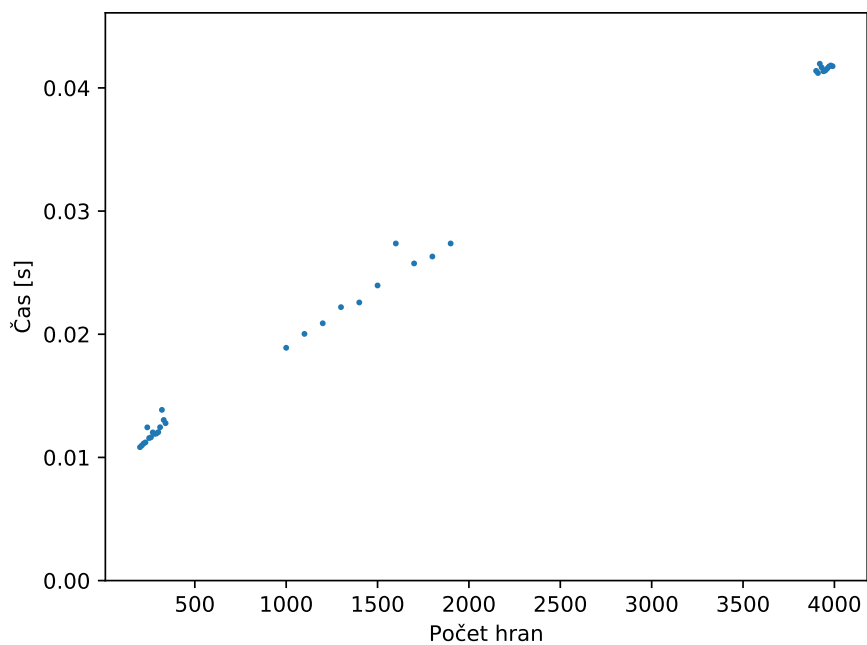
**Obrázek A.36.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů  
distančně regulárních, na počtu hran v Mathematice



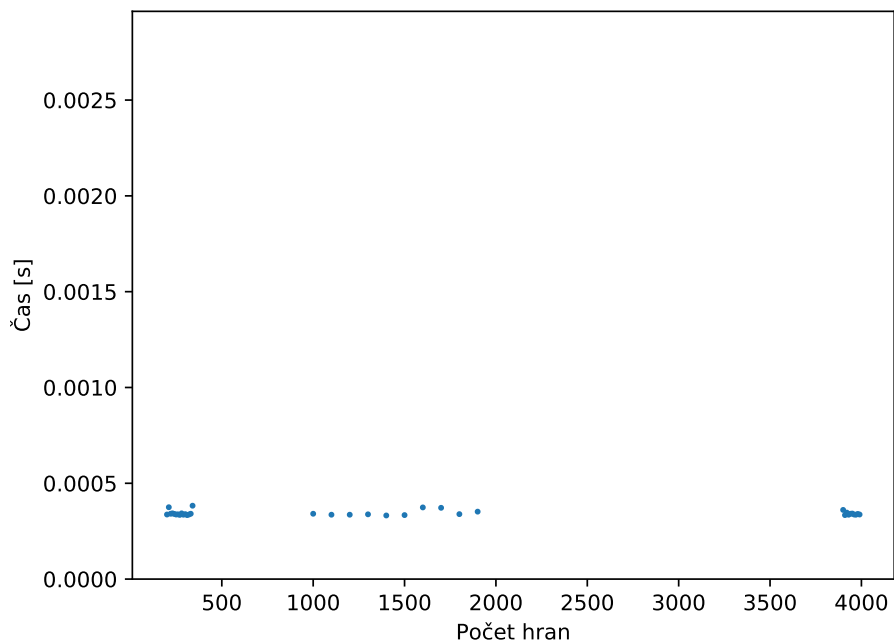
**Obrázek A.37.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů  
hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath



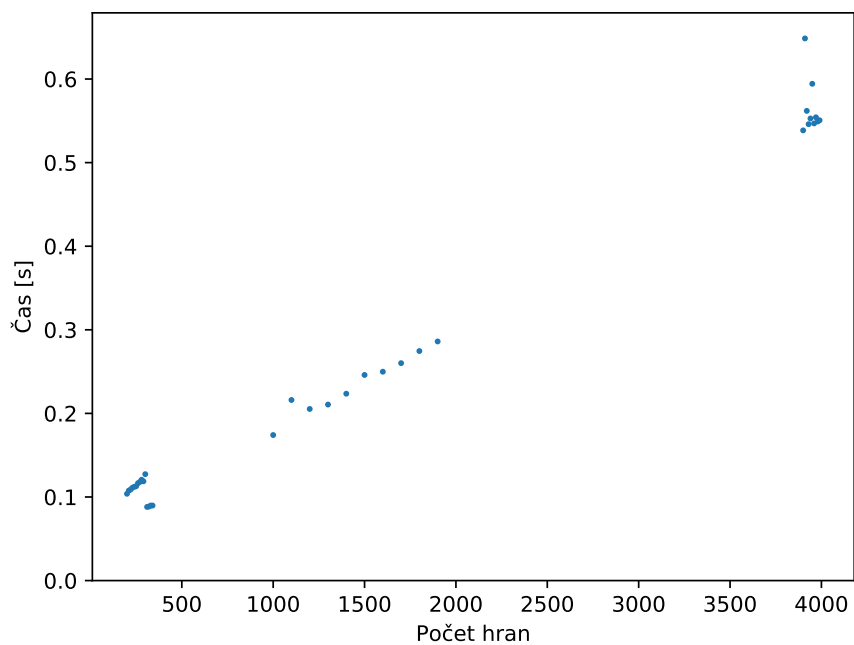
**Obrázek A.38.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice



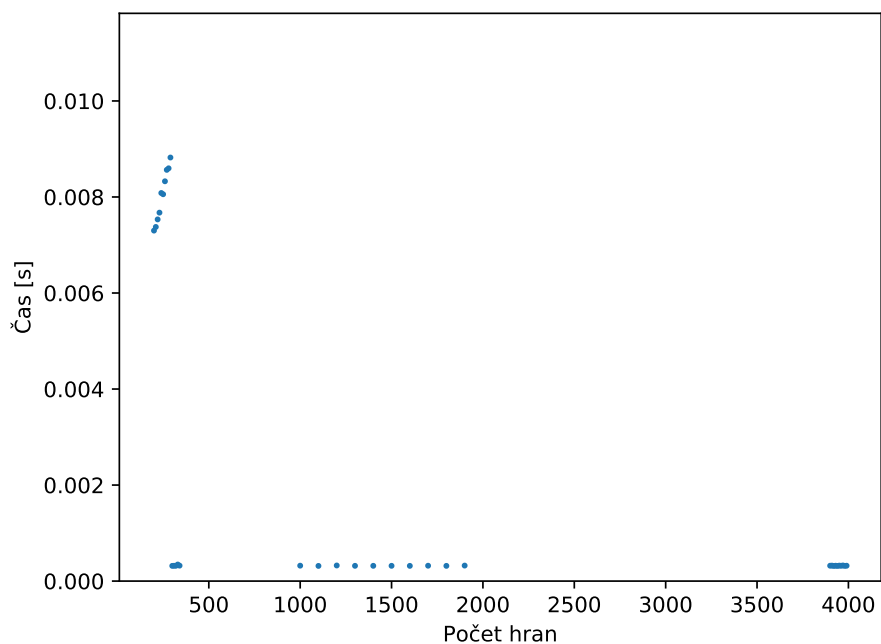
**Obrázek A.39.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů Eulerovských, na počtu hran v SageMath



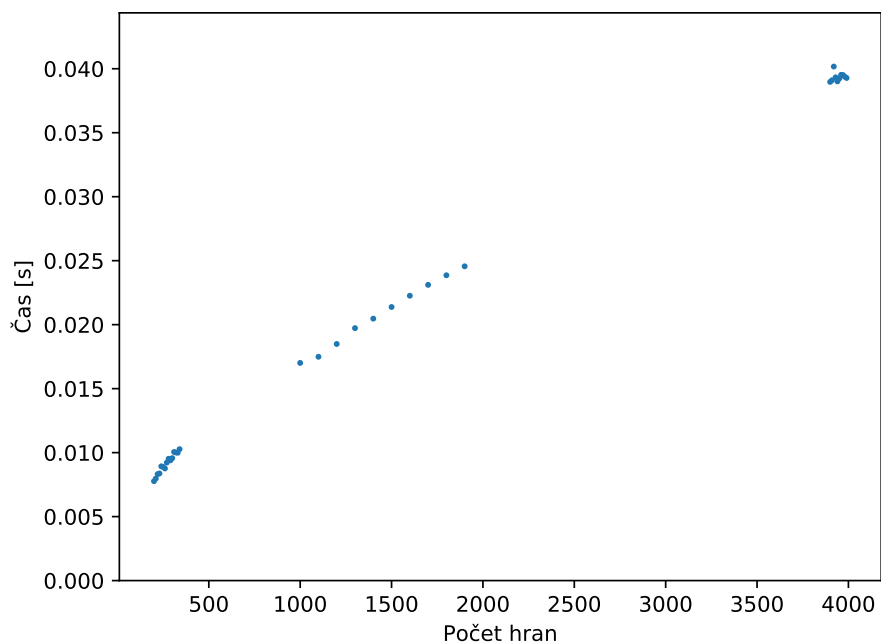
**Obrázek A.40.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů Eulerovských, na počtu hran v Mathematice



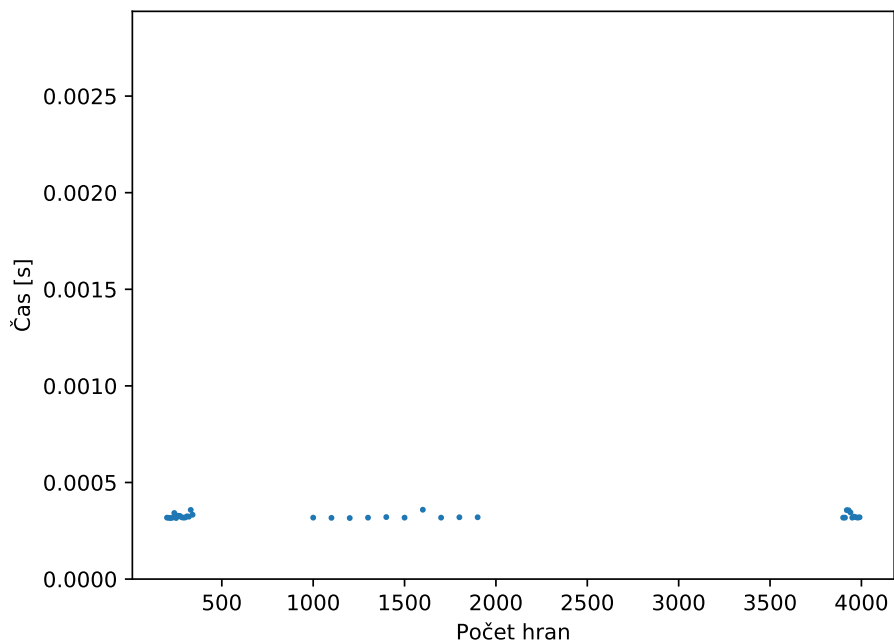
**Obrázek A.41.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů rovinných, na počtu hran v SageMath



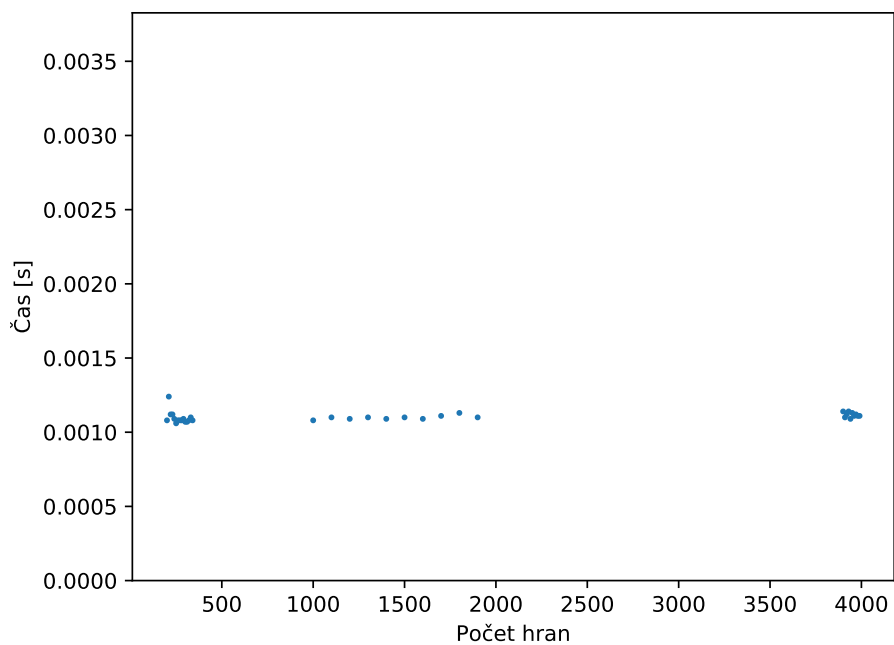
**Obrázek A.42.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice



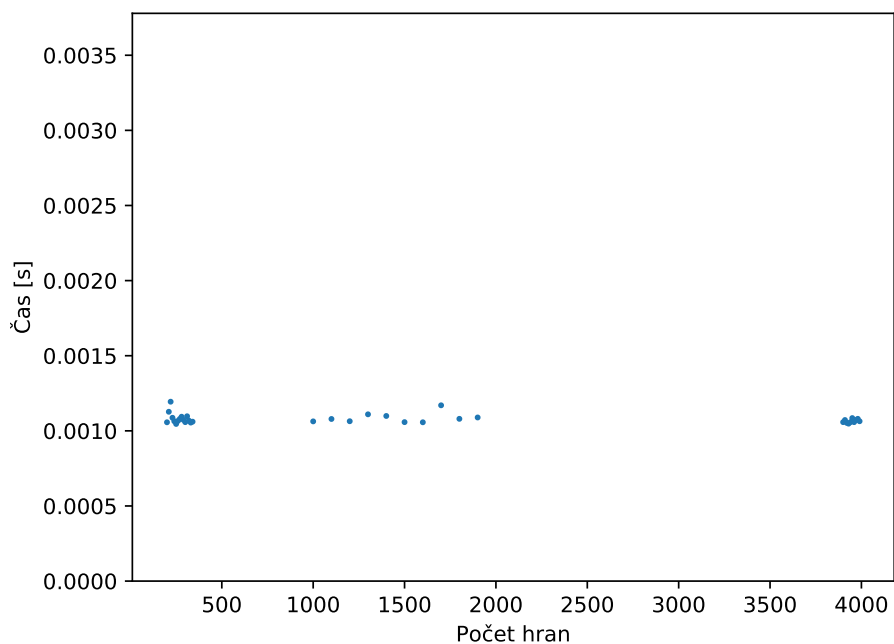
**Obrázek A.43.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů stromem, na počtu hran v SageMath



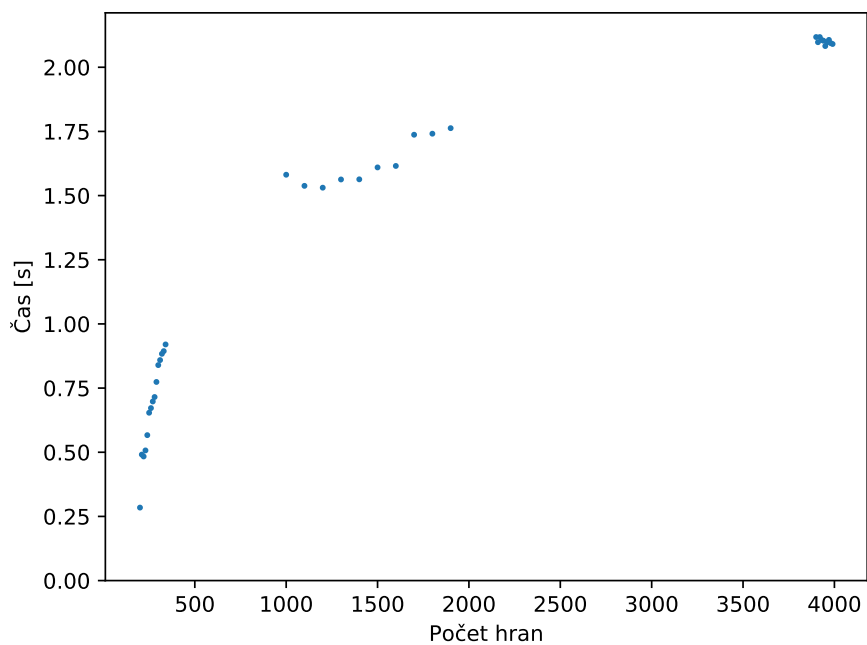
**Obrázek A.44.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů stromem, na počtu hran v Mathematice



**Obrázek A.45.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů regulárních, na počtu hran v SageMath

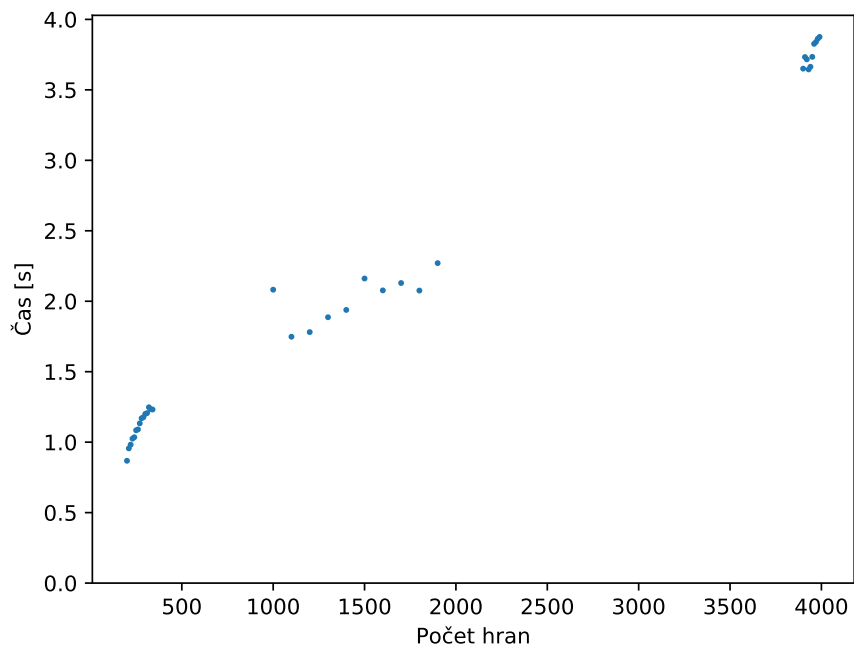


**Obrázek A.46.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto cyklických grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice

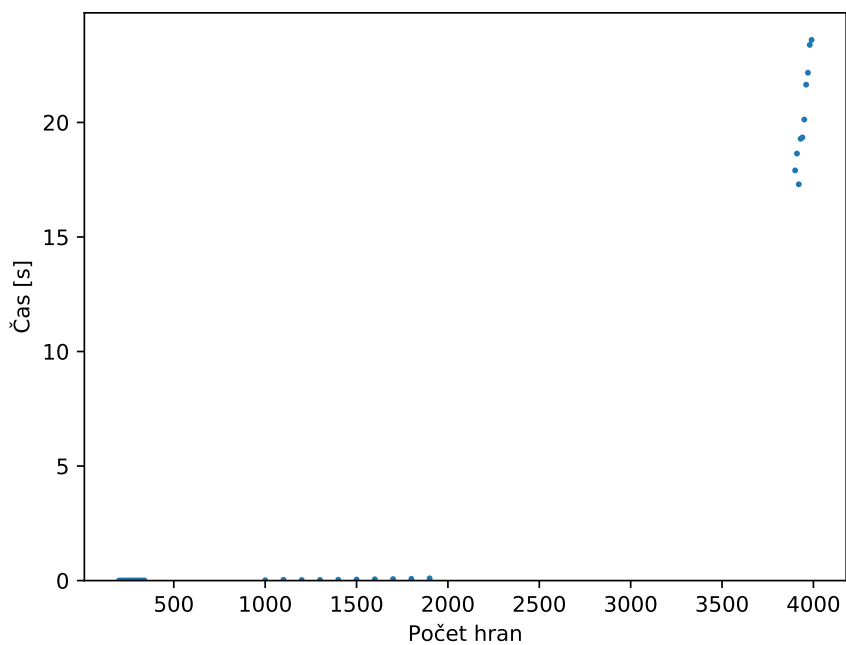


**Obrázek A.47.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice

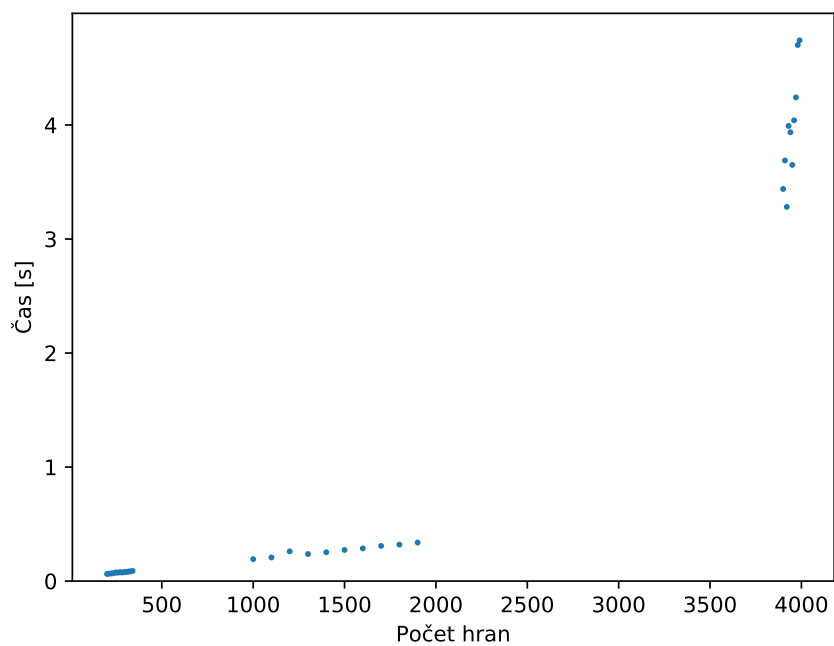




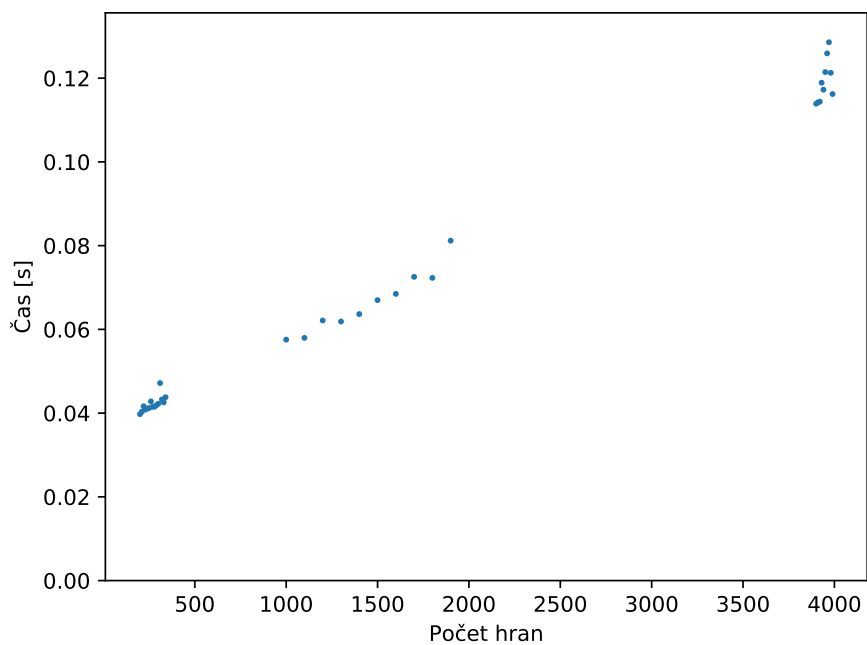
**Obrázek A.48.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů koster ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath



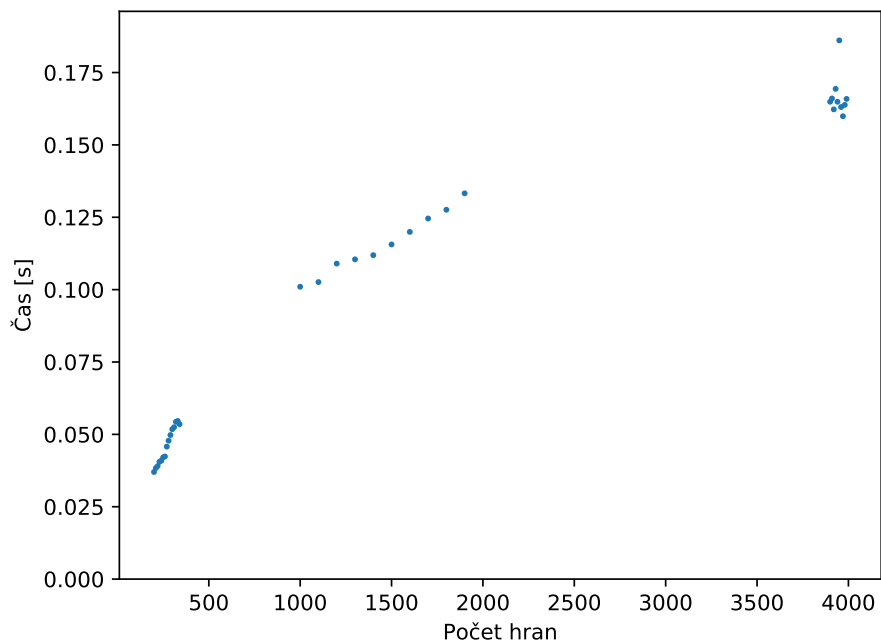
**Obrázek A.49.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice



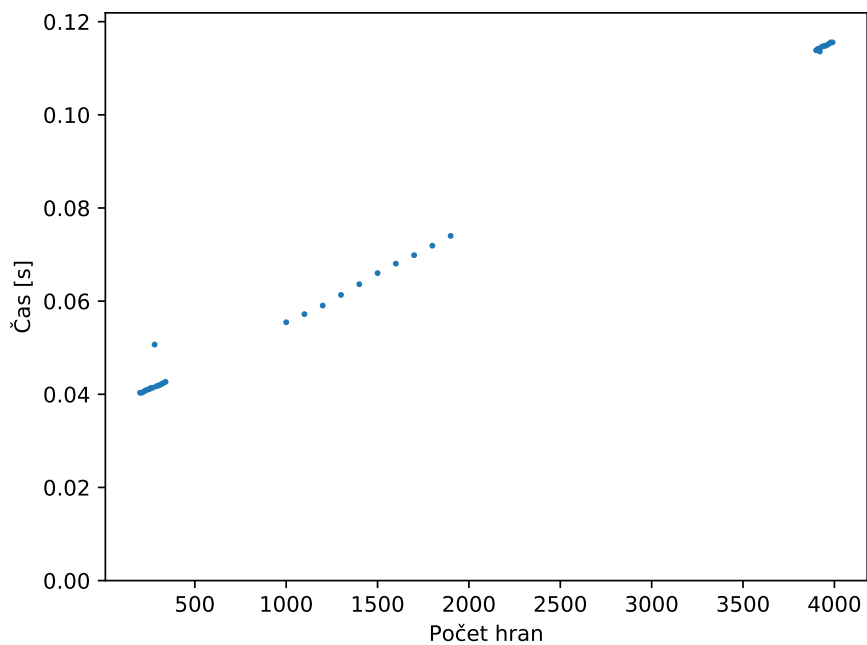
**Obrázek A.50.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, počtů klik ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath



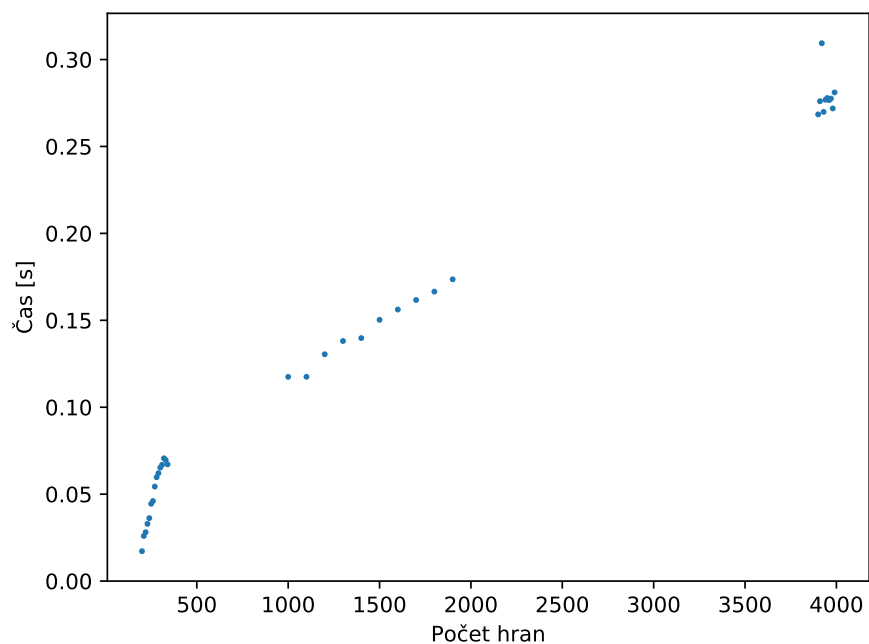
**Obrázek A.51.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice



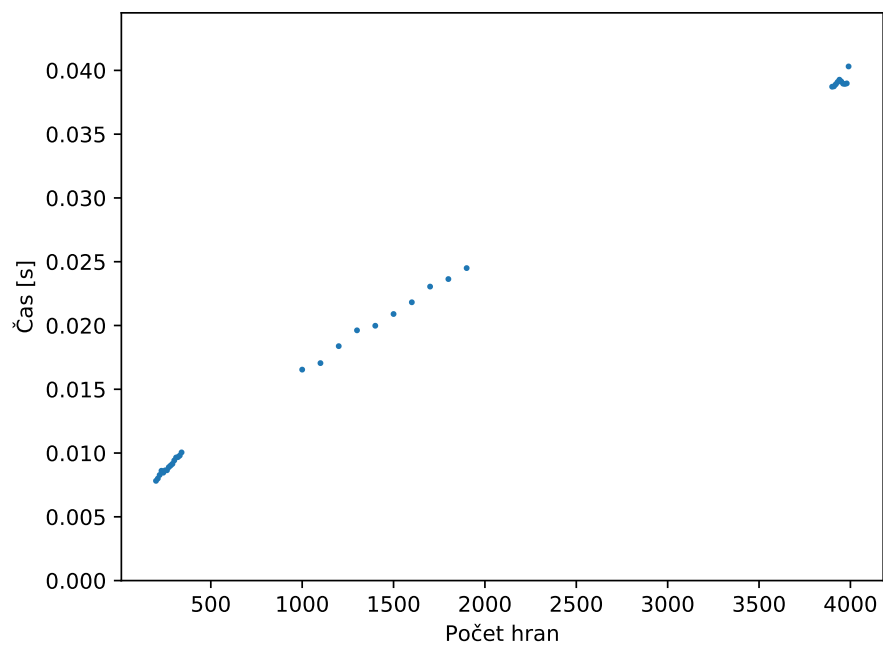
**Obrázek A.52.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, průměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath



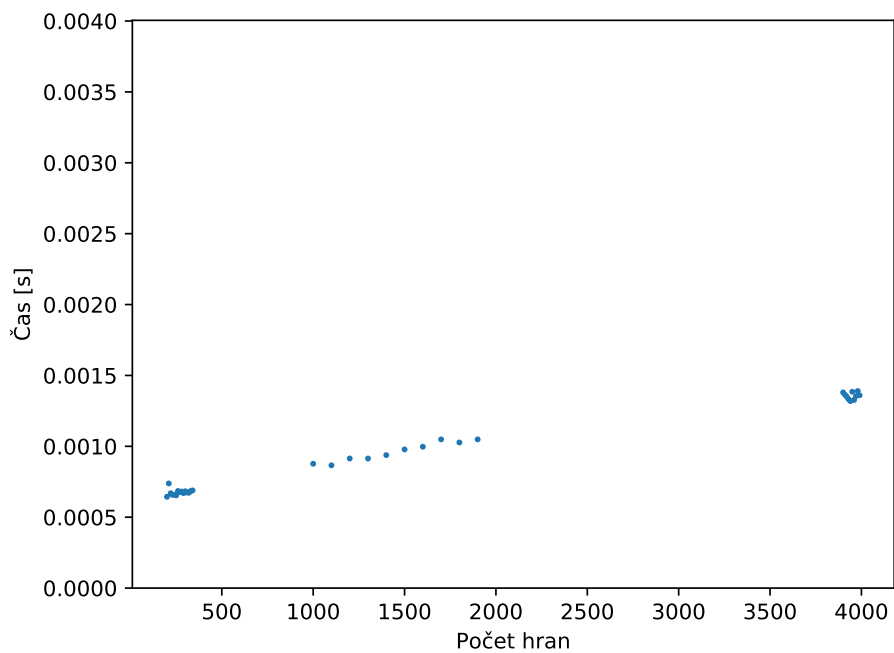
**Obrázek A.53.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v Mathematice



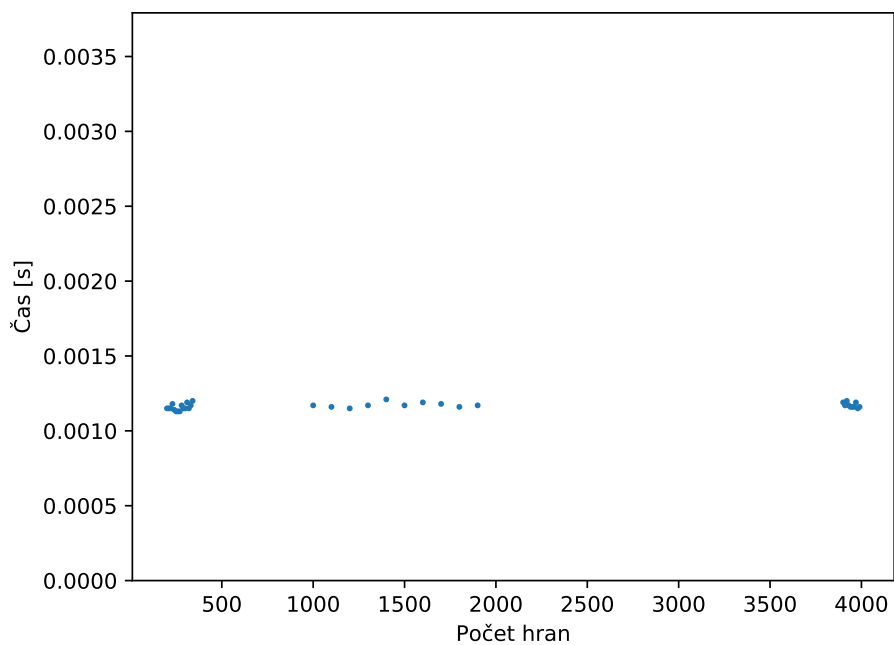
**Obrázek A.54.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, poloměrů ve stu náhodných grafů, na počtu hran v SageMath



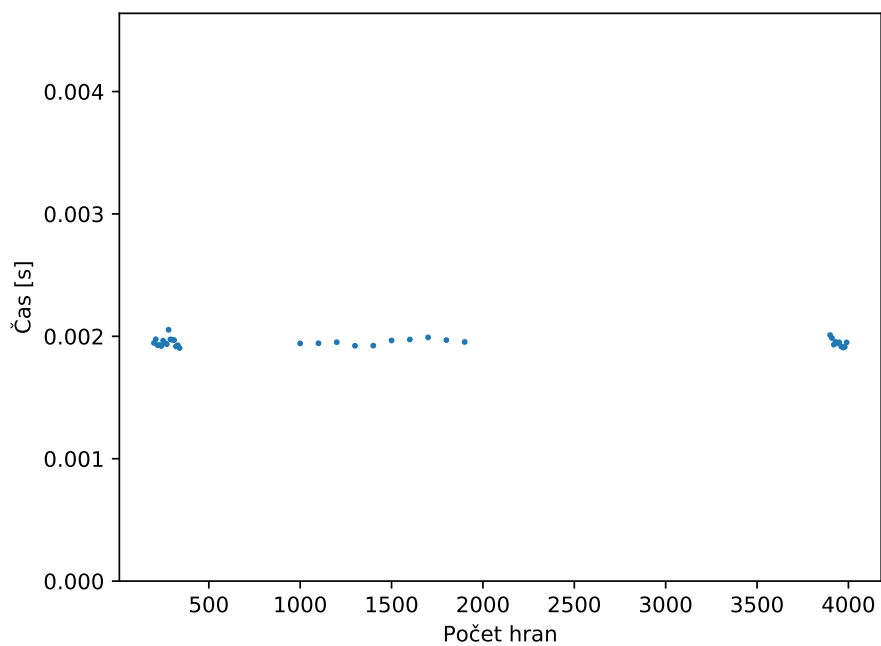
**Obrázek A.55.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů spojených, na počtu hran v SageMath



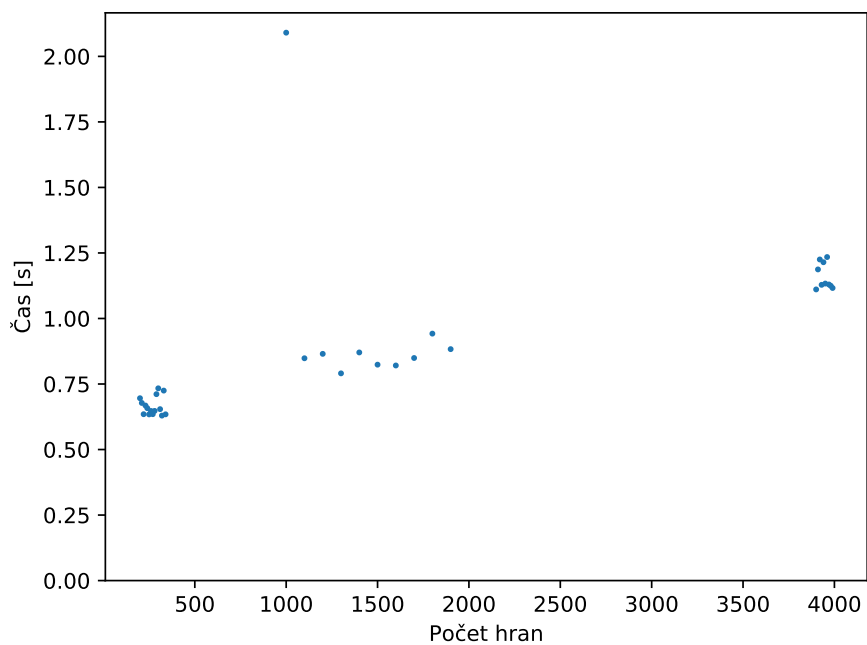
**Obrázek A.56.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů spojitých, na počtu hran v Mathematice



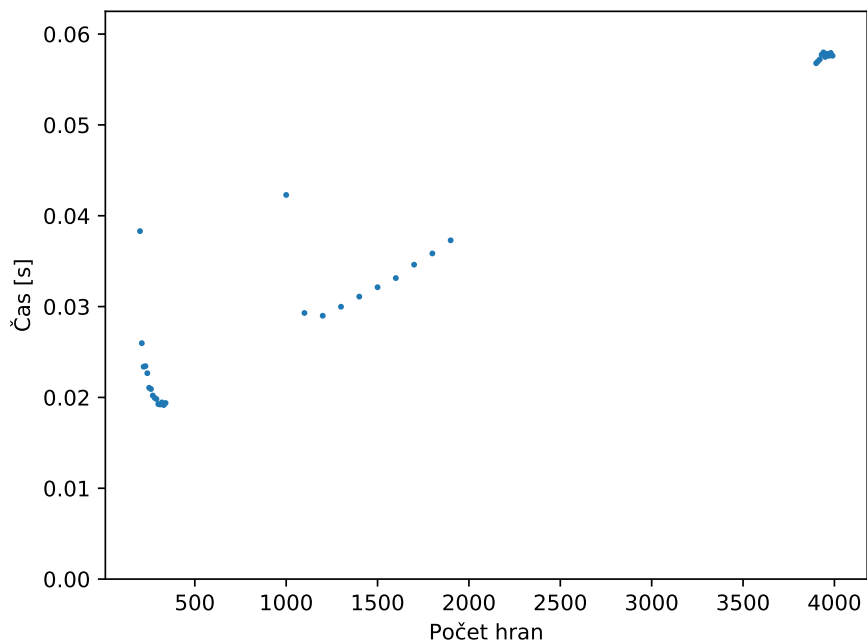
**Obrázek A.57.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů distančně regulárních, na počtu hran v SageMath



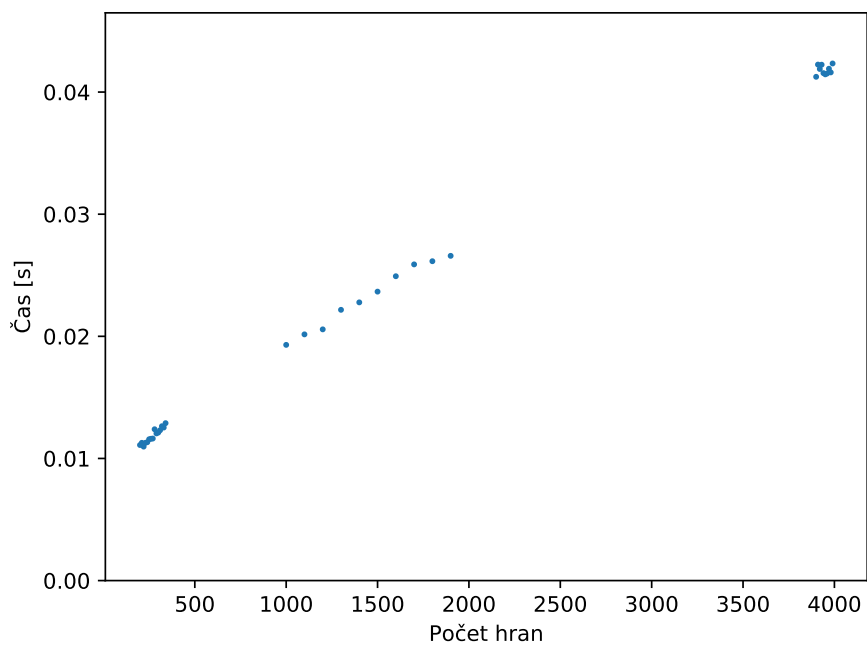
**Obrázek A.58.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů vzdáleně regulárních, na počtu hran v Mathematice



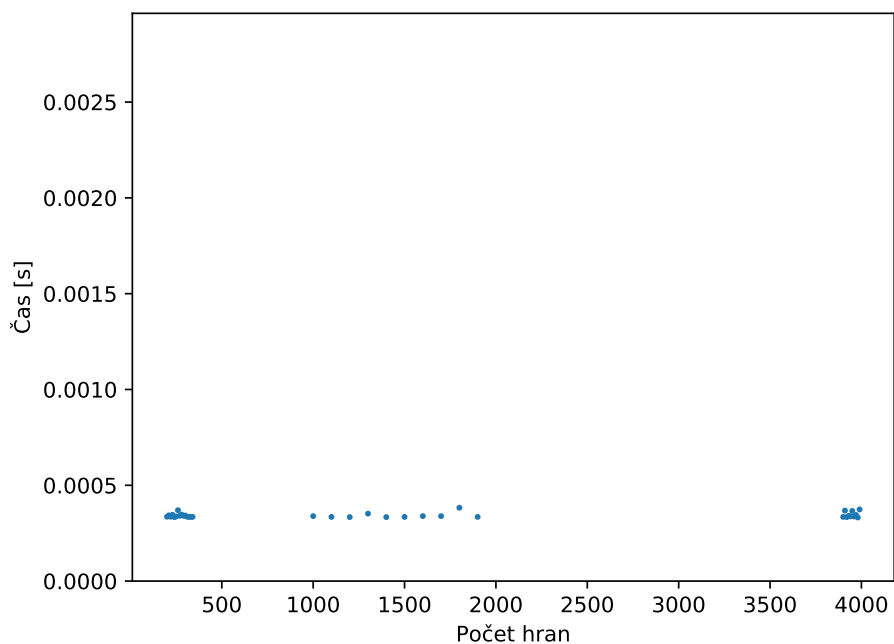
**Obrázek A.59.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v SageMath



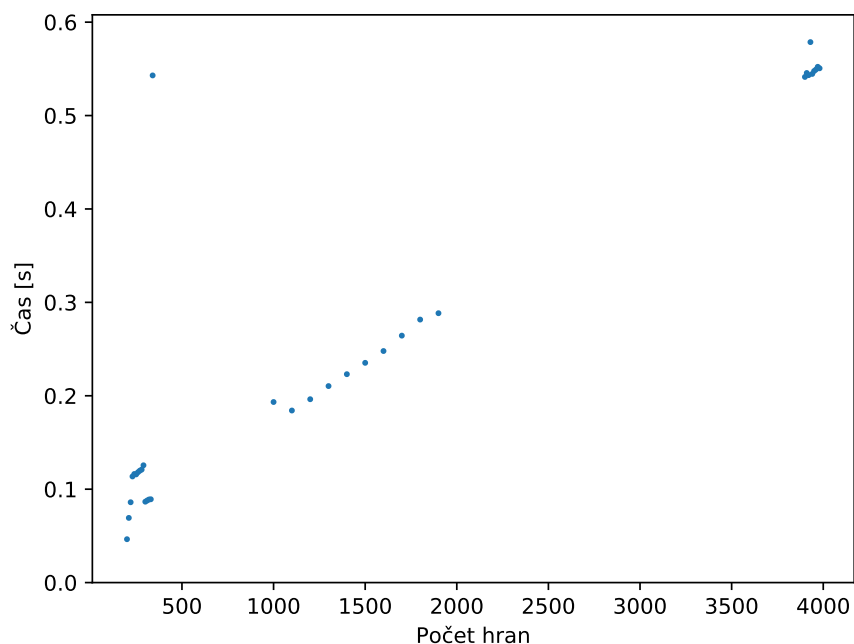
**Obrázek A.60.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů hranově tranzitivních, na počtu hran v Mathematice



**Obrázek A.61.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů Eulerovských, na počtu hran v SageMath

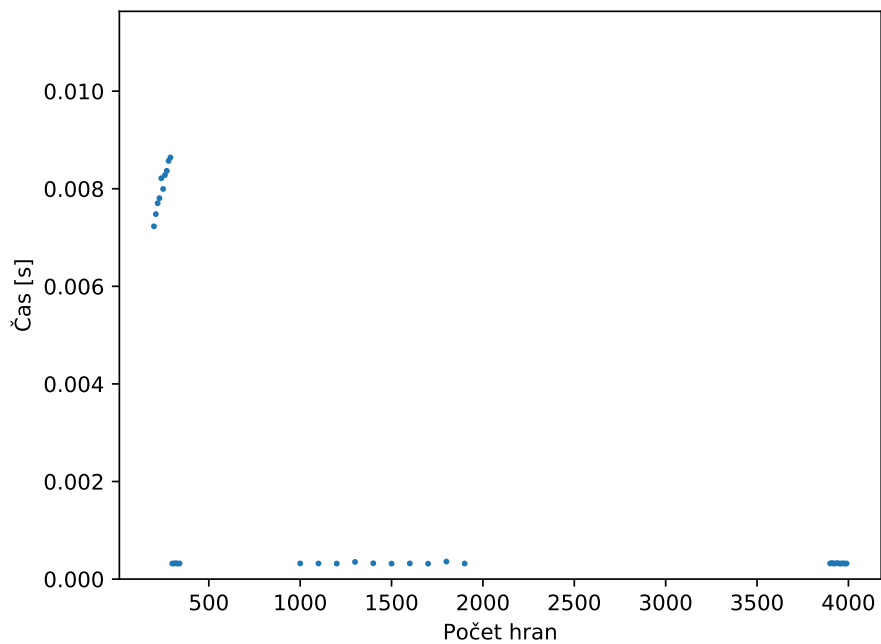


**Obrázek A.62.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů Eulerovských, na počtu hran v Mathematice

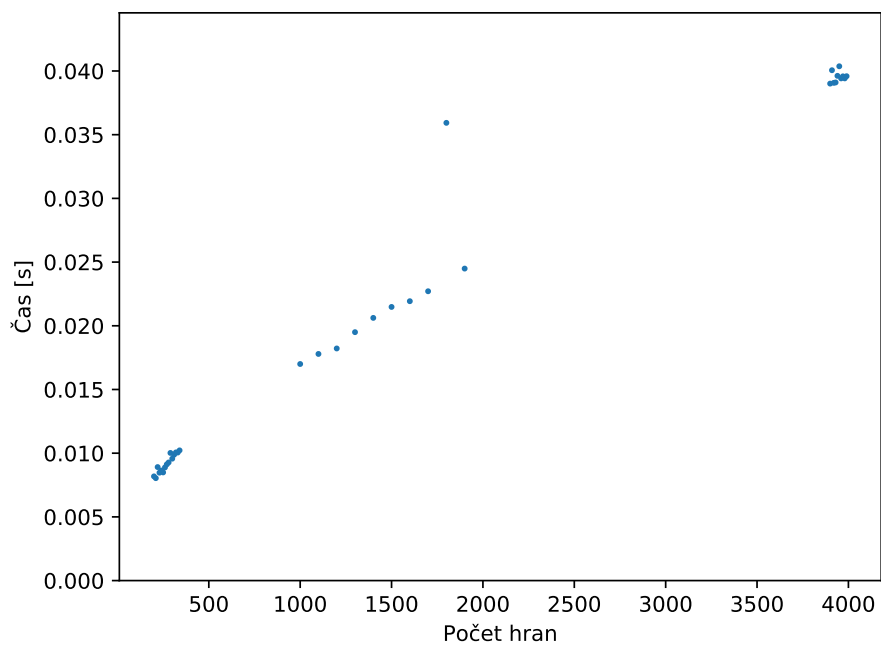


**Obrázek A.63.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů rovinných, na počtu hran v SageMath

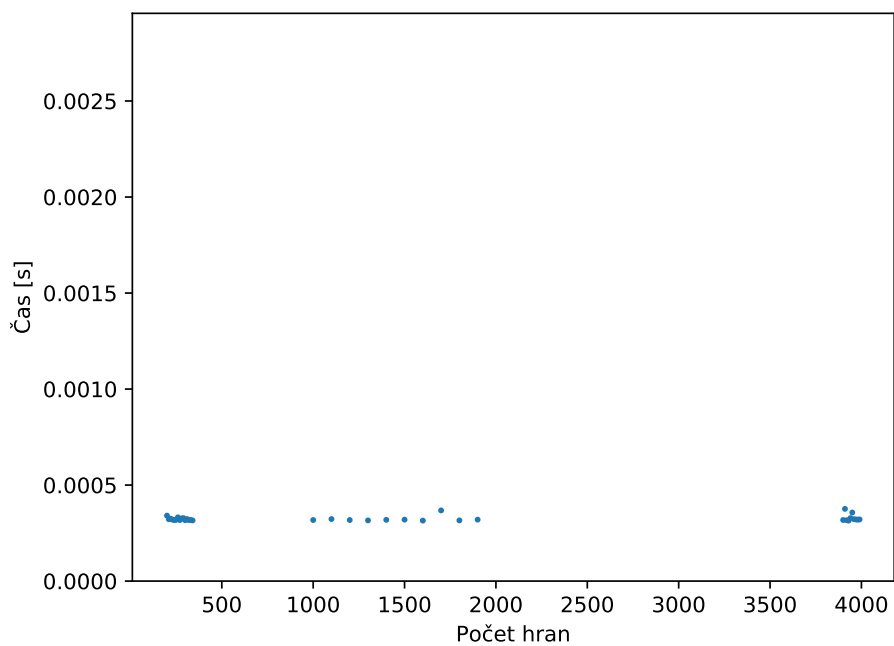




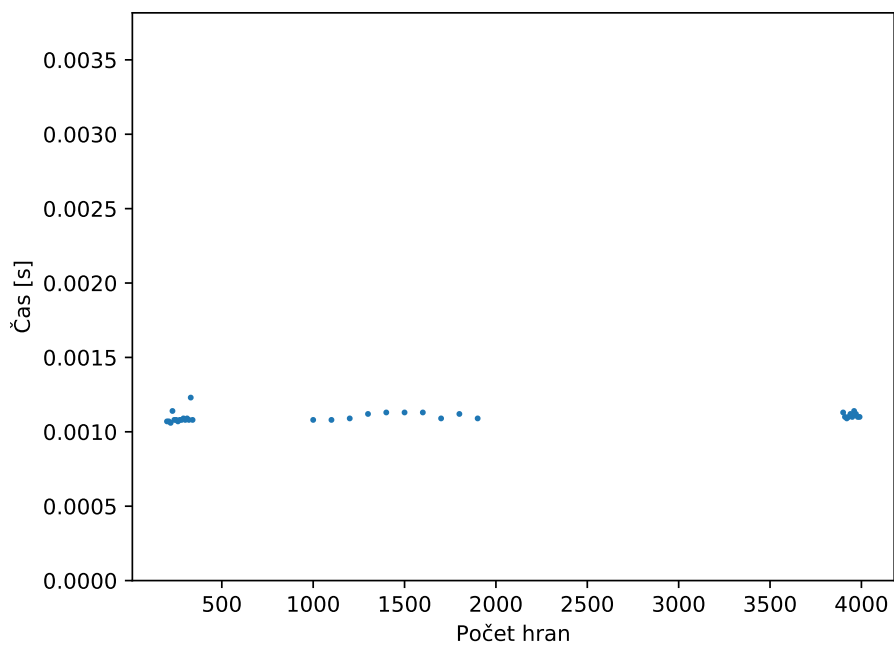
**Obrázek A.64.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů rovinných, na počtu hran v Mathematice



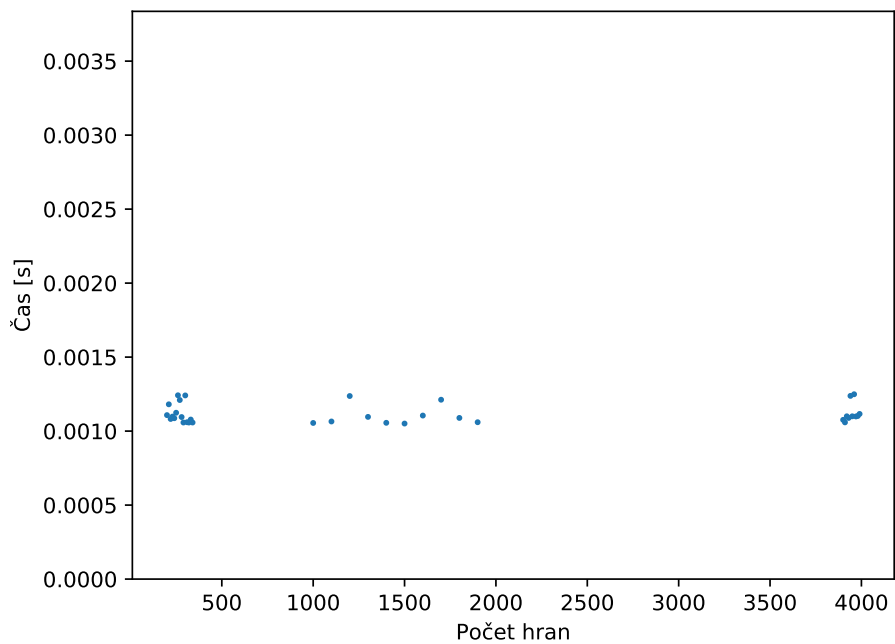
**Obrázek A.65.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů stromem, na počtu hran v SageMath



**Obrázek A.66.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů stromem, na počtu hran v Mathematice



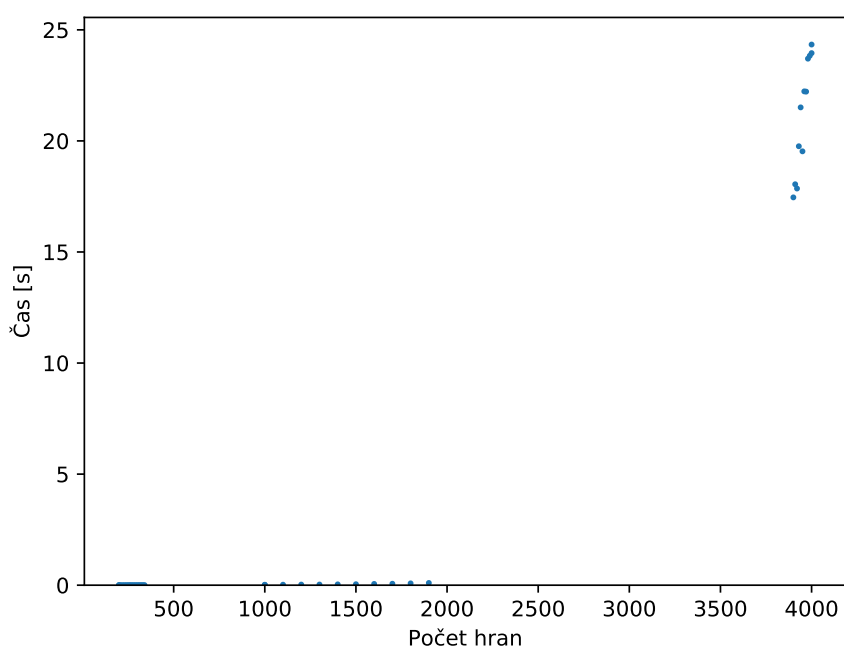
**Obrázek A.67.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů regulárních, na počtu hran v SageMath



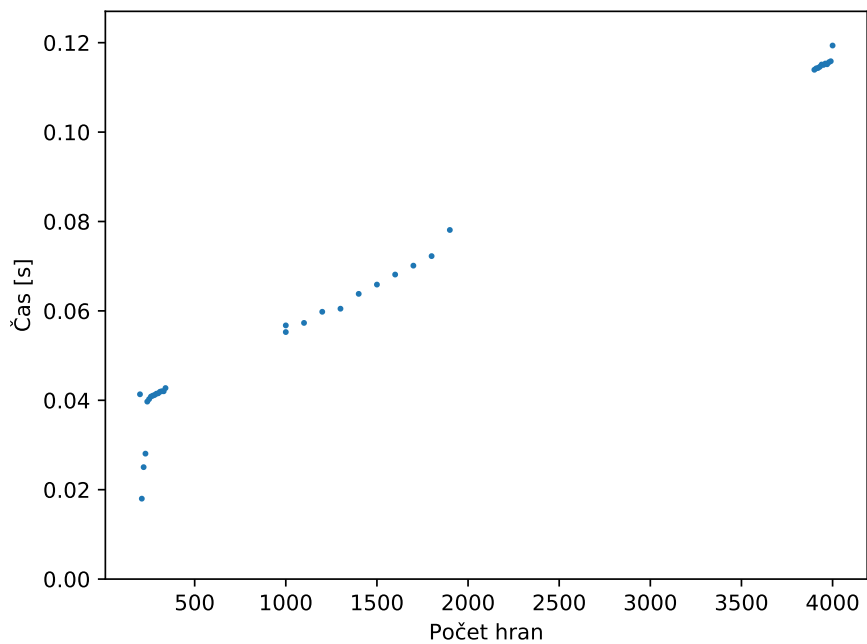
**Obrázek A.68.** Graf závislosti času potřebném při zjišťování, zda je sto náhodných grafů regulárních, na počtu hran v Mathematice

## Příloha B

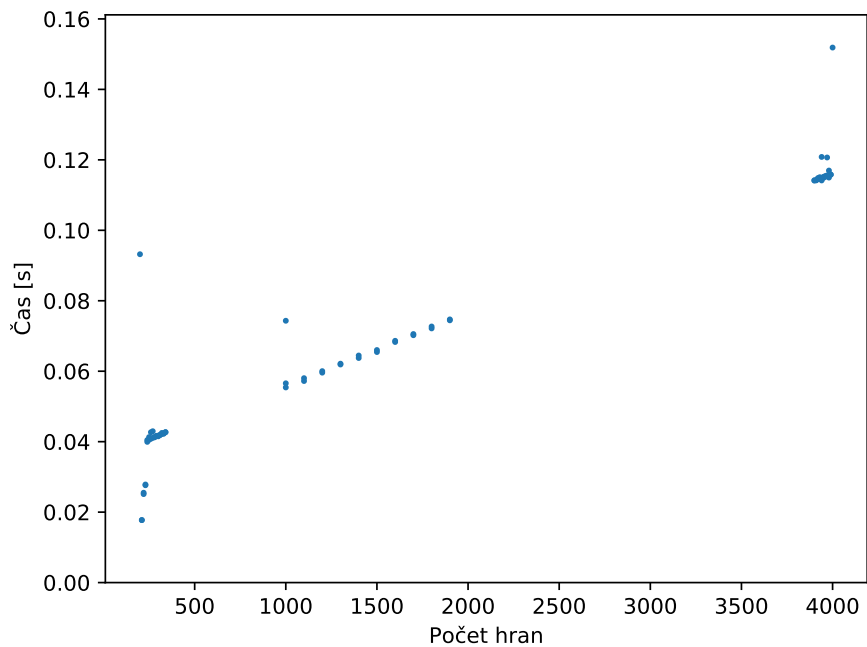
### Grafy ukazující výpočet vlastností na různém hardwaru



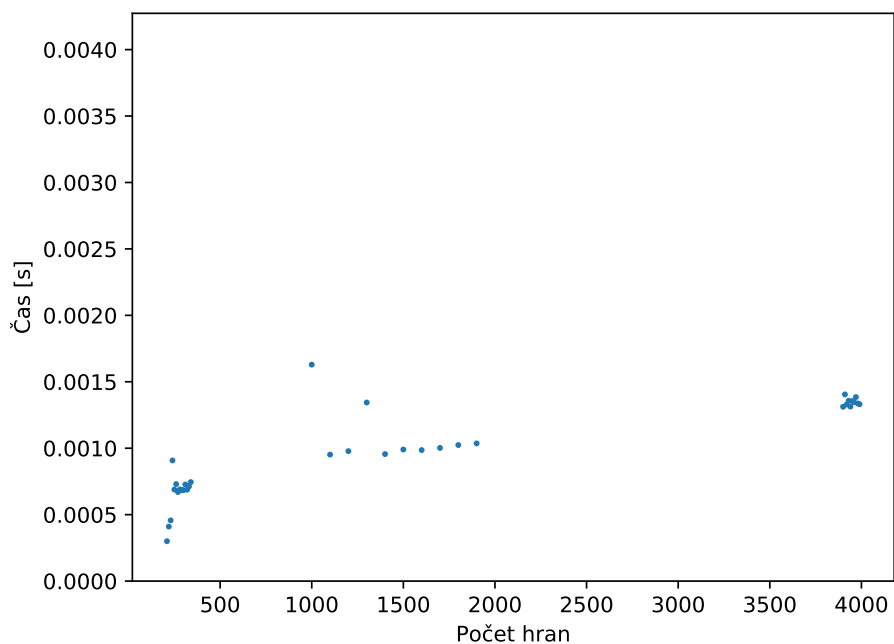
**Obrázek B.69.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



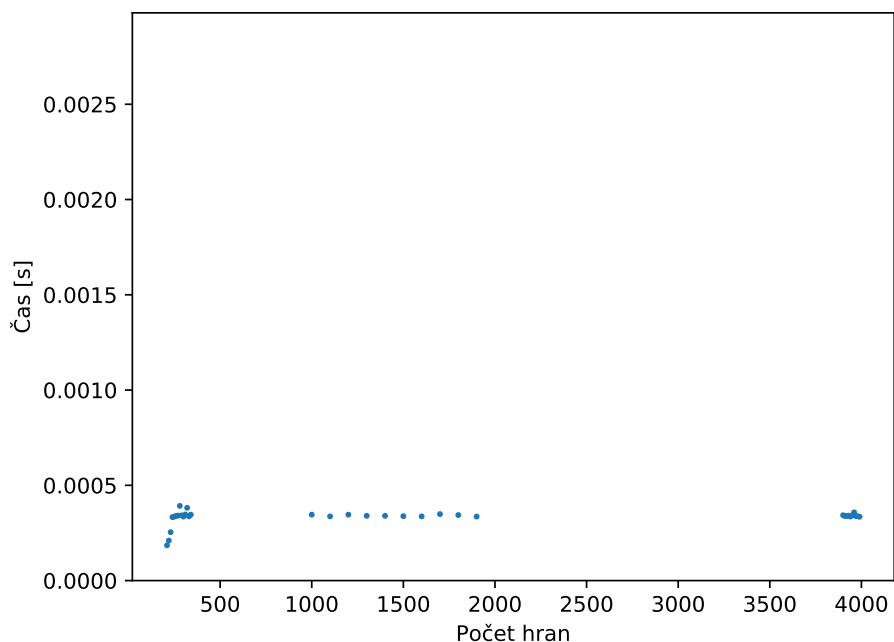
**Obrázek B.70.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



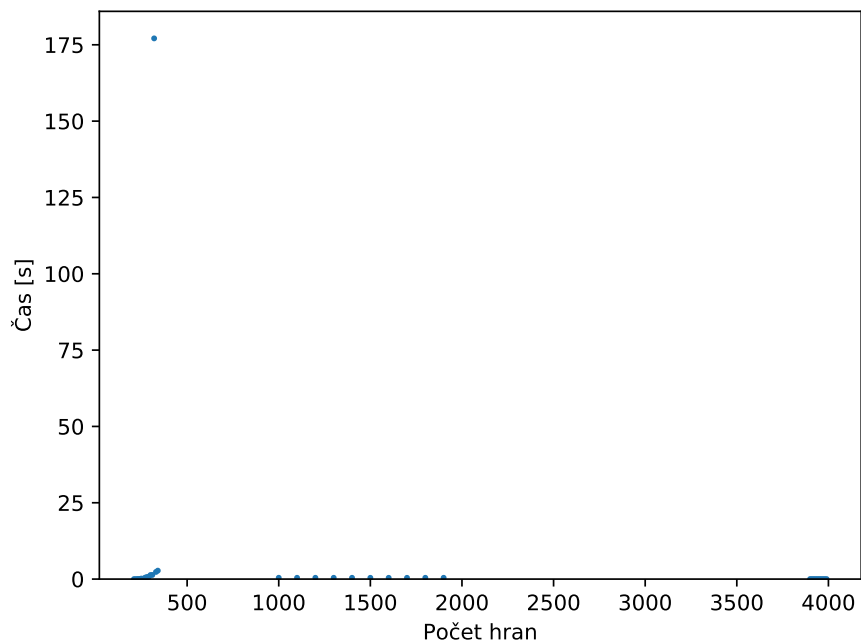
**Obrázek B.71.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



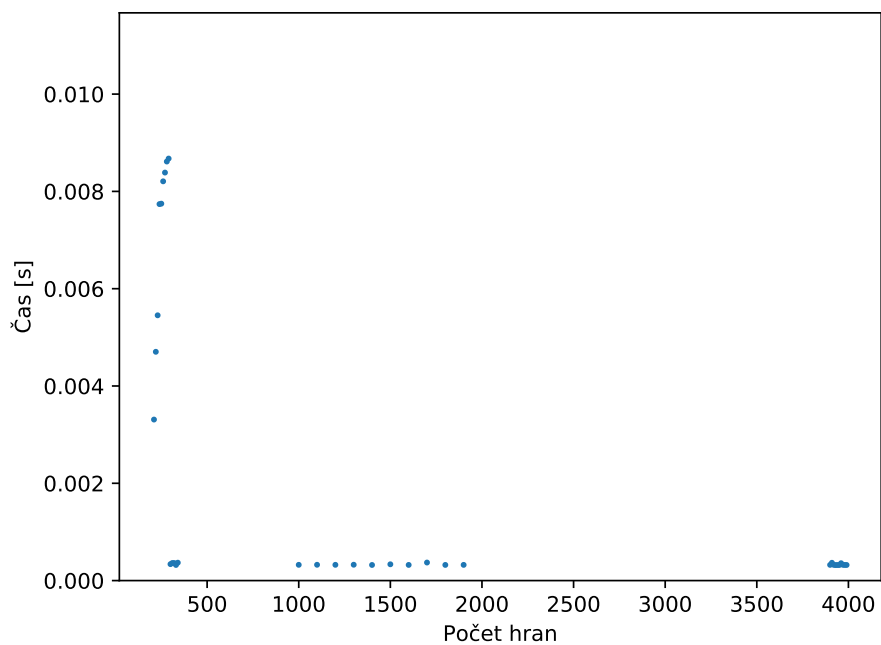
**Obrázek B.72.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy spojených, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



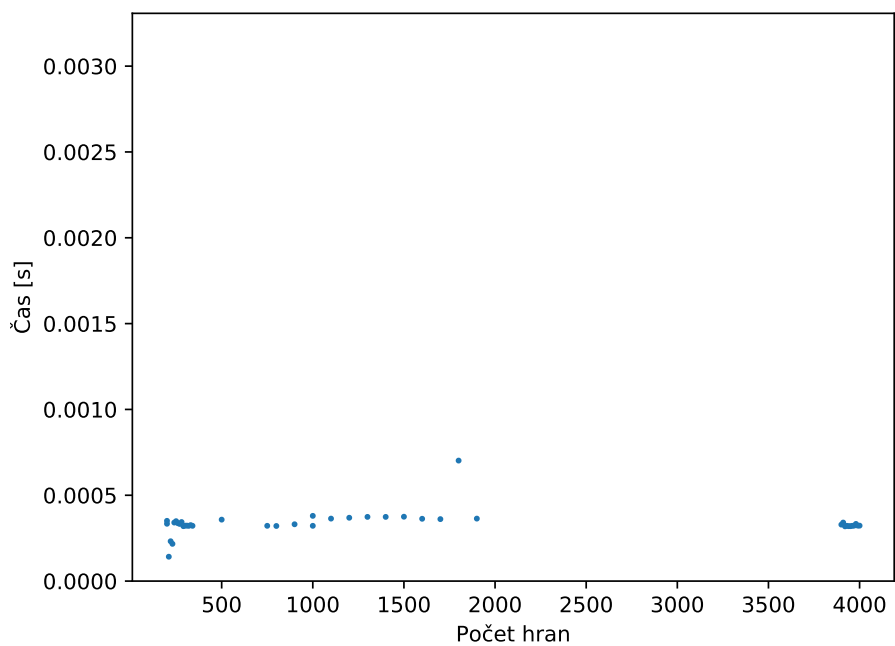
**Obrázek B.73.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



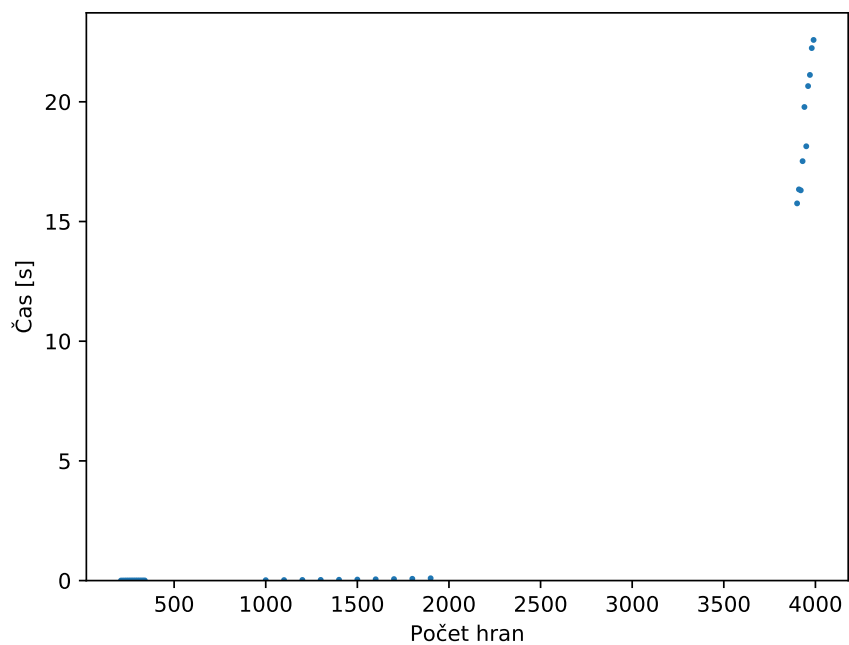
**Obrázek B.74.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači



**Obrázek B.75.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinných, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači

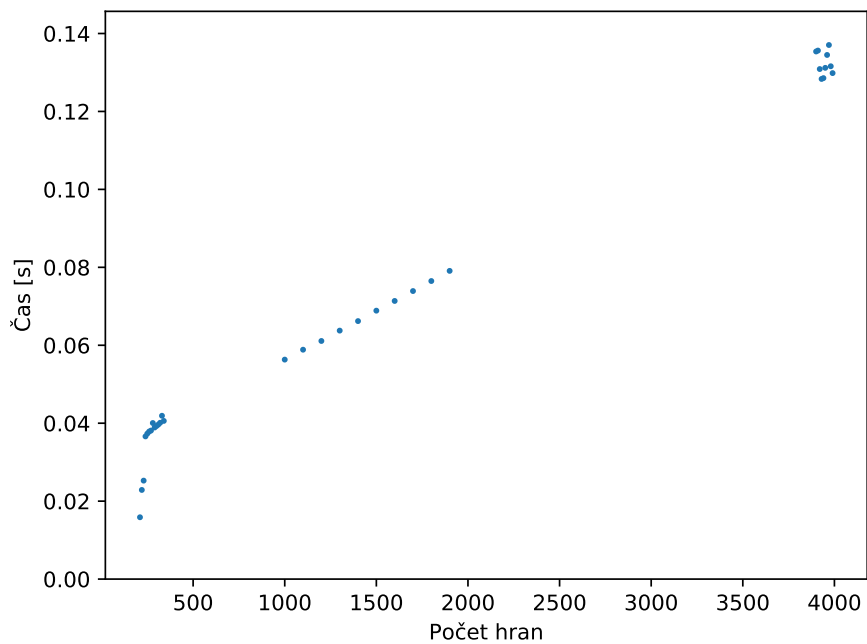


**Obrázek B.76.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na osobním počítači

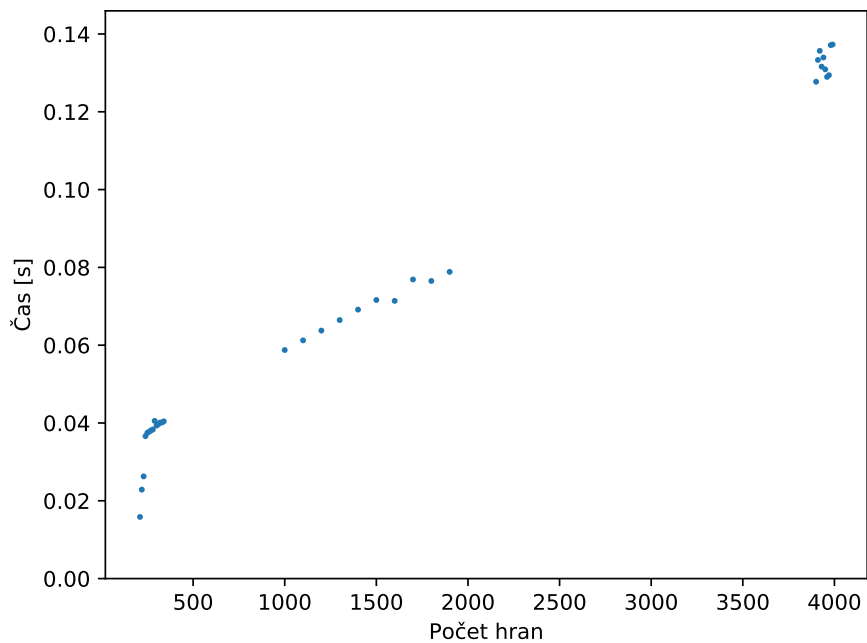


**Obrázek B.77.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5

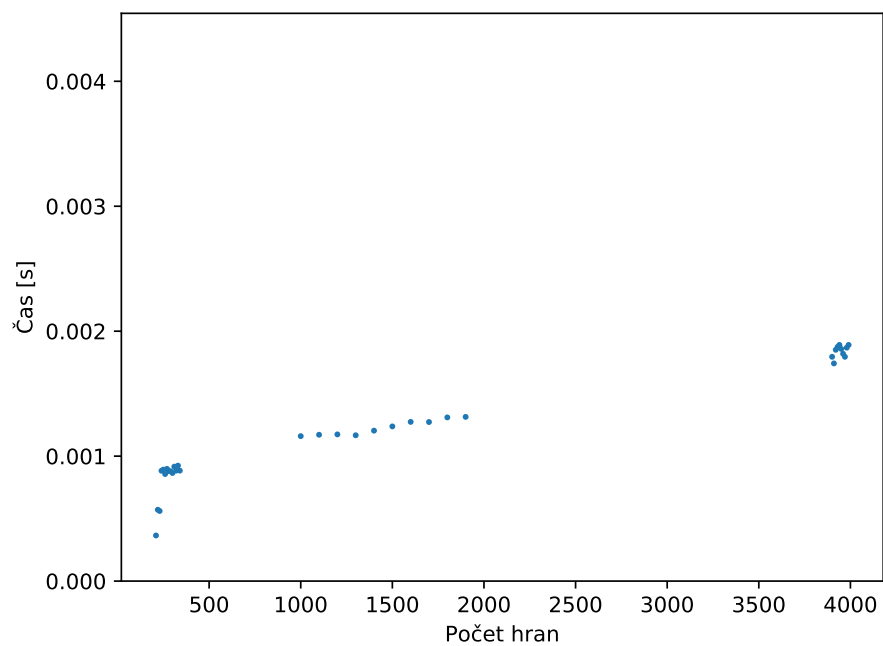




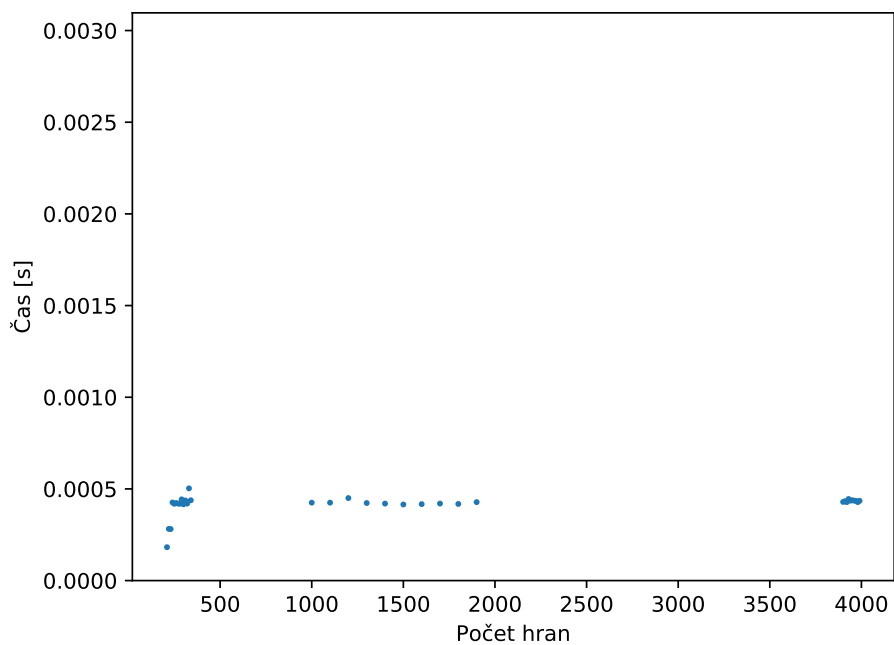
**Obrázek B.78.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



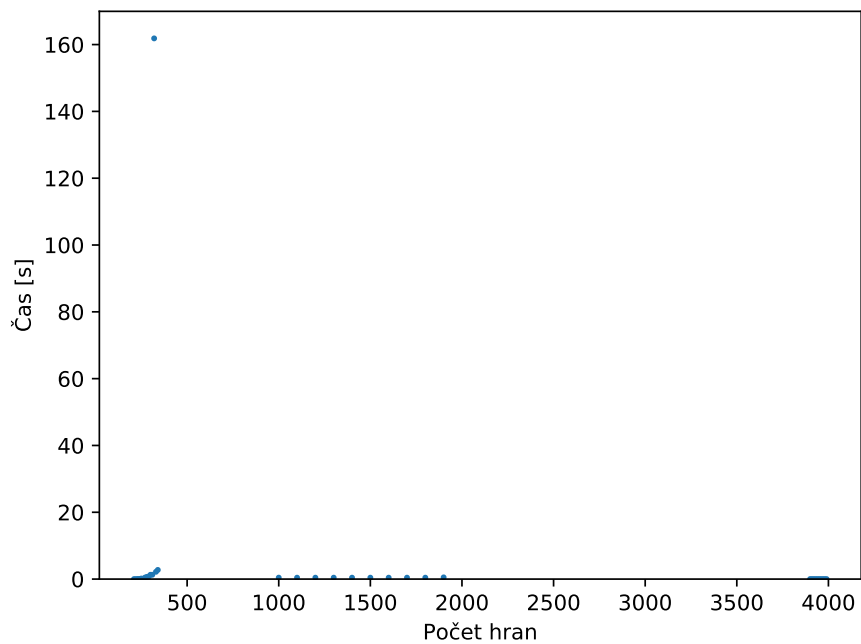
**Obrázek B.79.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



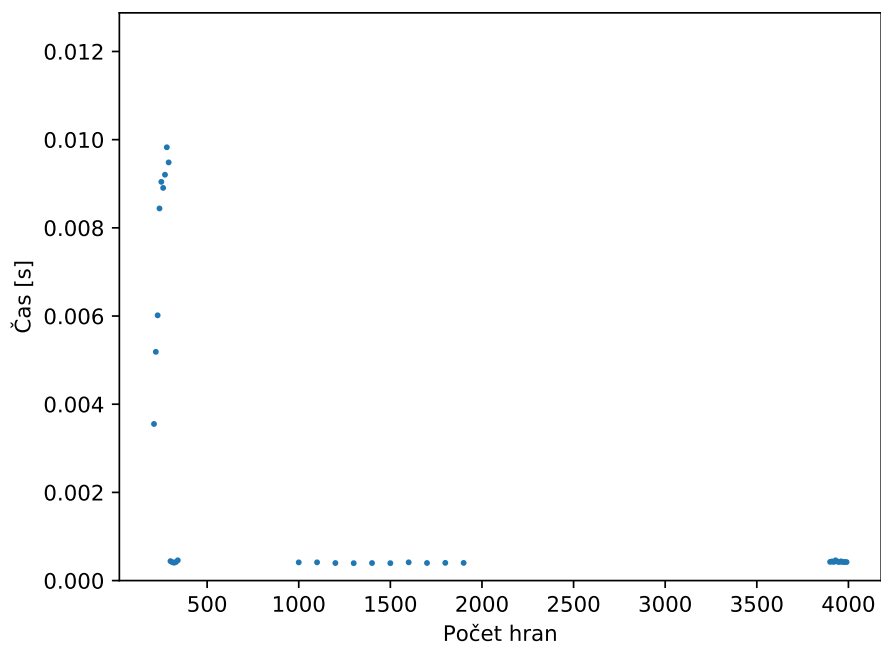
**Obrázek B.80.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy spojených, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



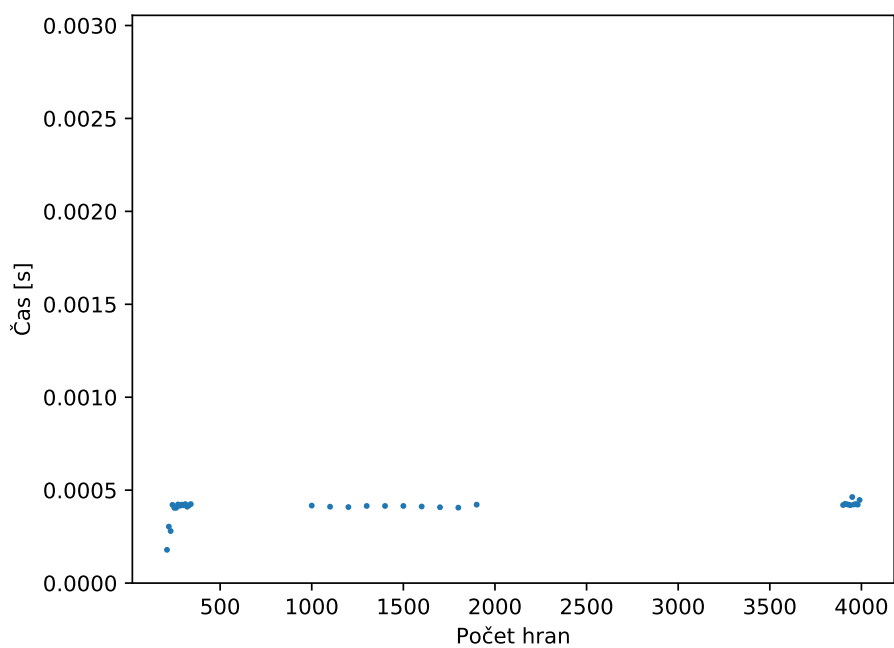
**Obrázek B.81.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



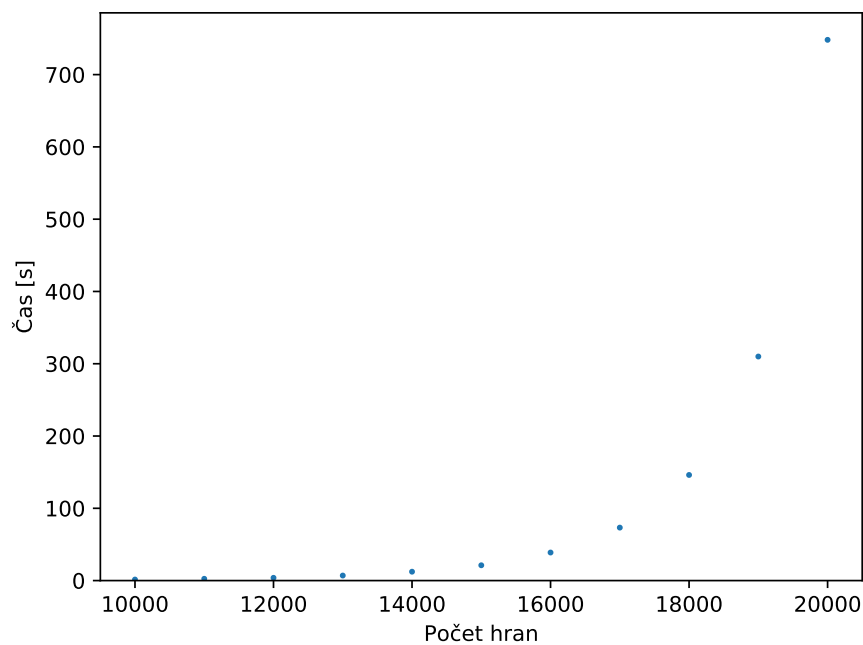
**Obrázek B.82.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



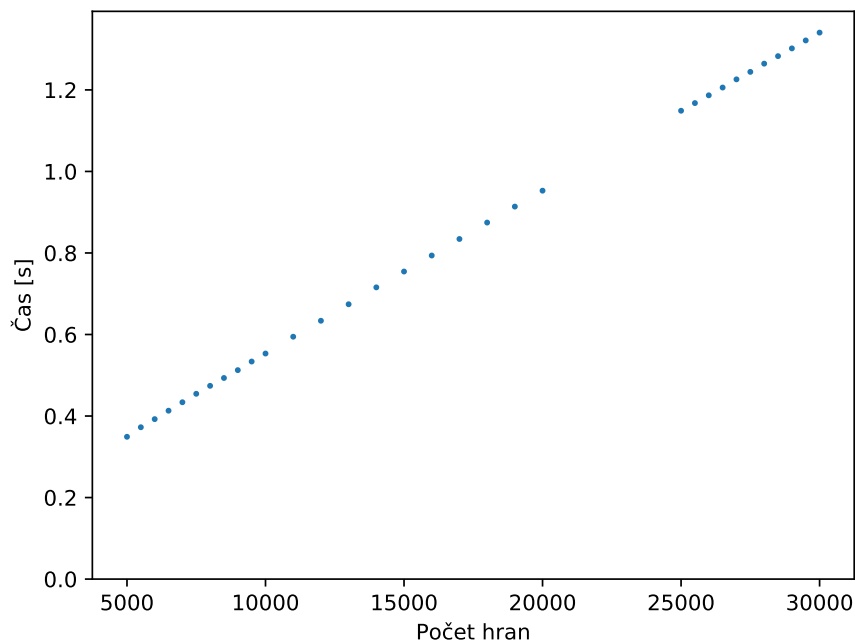
**Obrázek B.83.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinných, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



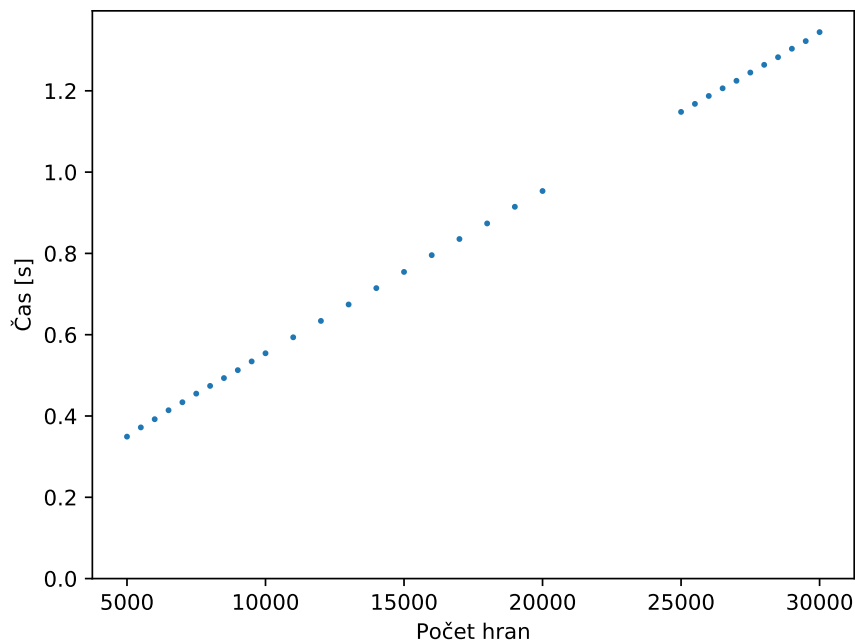
**Obrázek B.84.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferret5



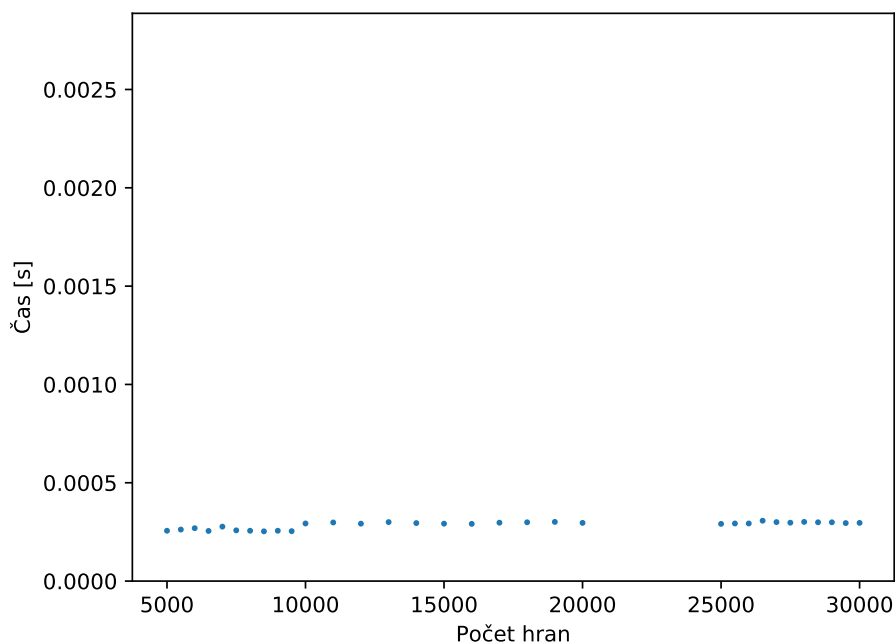
**Obrázek B.85.** Graf ukazuje závislost času potřebného na výpočet klikovosti sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



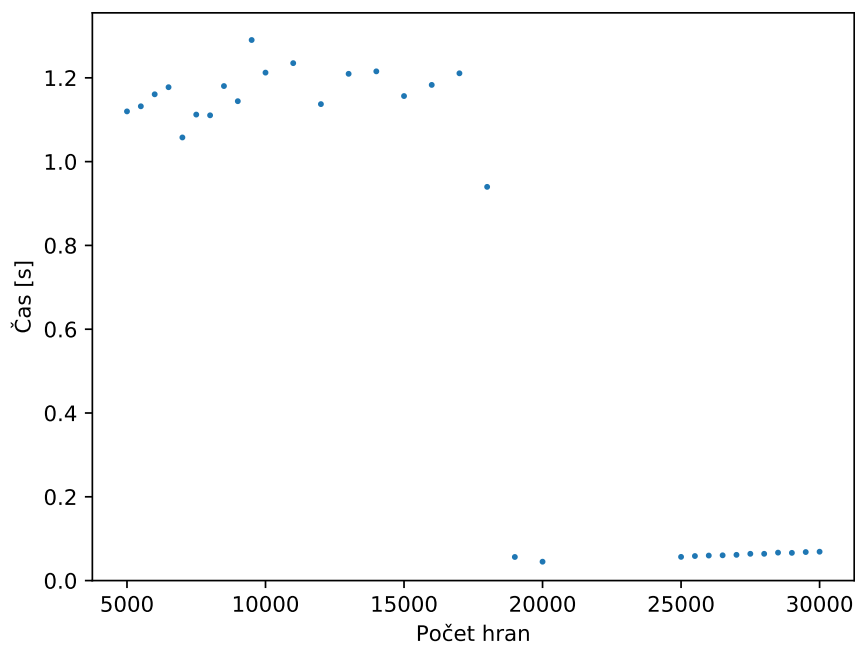
**Obrázek B.86.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění průměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



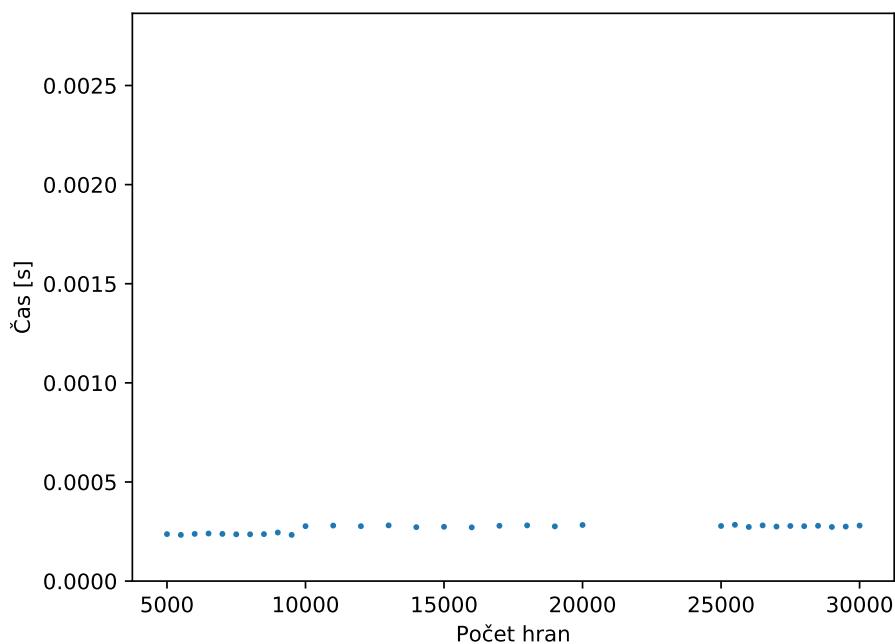
**Obrázek B.87.** Graf ukazuje závislost času potřebného na zjištění poloměru u sta grafů se sto vrcholy na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



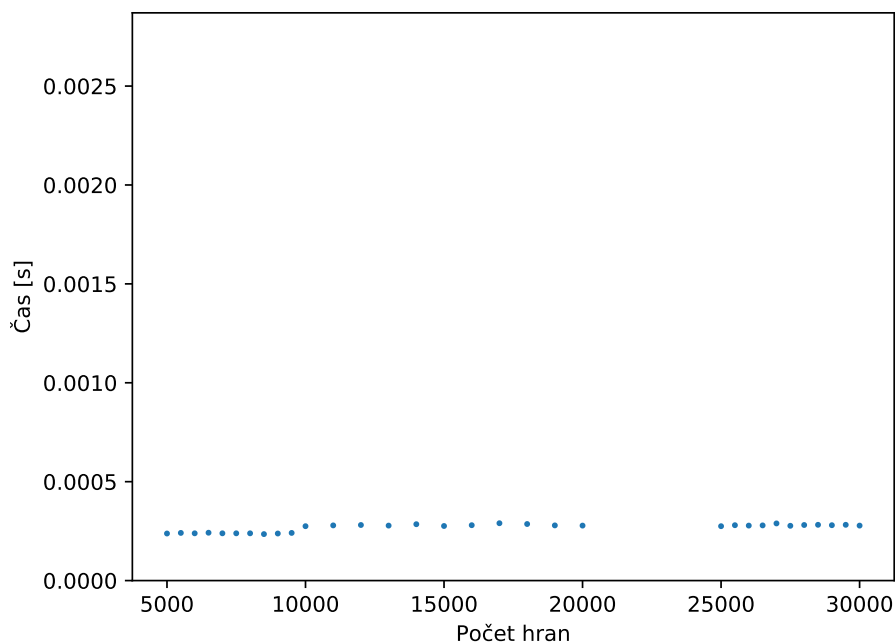
**Obrázek B.88.** Graf ukazuje závislost čas potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Eulerovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



**Obrázek B.89.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy Hamiltonovských, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpu



**Obrázek B.90.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy rovinných, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpc



**Obrázek B.91.** Graf ukazuje závislost času potřebného ke zjištění, zda je sto grafů se sto vrcholy stromem, na počtu jejich hran, počítané na superpočítači ferretgpc

## **Příloha C**

### **Složky se soubory**

- scripts - obsahuje všechny skripty použité k výpočtům, některé vygenerované náhodné grafy a grafy s vypočtenými vlastnostmi
- graphs.zip - obsahuje grafy a statistiky, ze kterých byly grafy sestaveny



## Literatura

- [1] Jonathan L. Gross, Jay Yellen a Mark Anderson. *Graph Theory and Its Applications*. CRC Press, 2019. ISBN 978-1-4822-4948-4. Edition 3.
- [2] Jiří Demel. *Grafy a jejich aplikace*. 2019. Edition 3.
- [3] Eric W. Weisstein. "Connected Graph." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/ConnectedGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [4] Eric W. Weisstein. "Tree." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/Tree.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [5] Eric W. Weisstein. "Graph Eccentricity." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/GraphEccentricity.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [6] Eric W. Weisstein. "Graph Diameter." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/GraphDiameter.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [7] Eric W. Weisstein. "Graph Radius." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/GraphRadius.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [8] Eric W. Weisstein. "Girth." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/Girth.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [9] Eric W. Weisstein. "Eulerian Graph." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/EulerianGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [10] Eric W. Weisstein. "Clique Number." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/CliqueNumber.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [11] Eric W. Weisstein. "Independent Set." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/IndependentSet.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [12] Eric W. Weisstein. "Spanning Tree." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/SpanningTree.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [13] Eric W. Weisstein. "Independence Number." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/IndependenceNumber.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [14] Eric W. Weisstein. "Chromatic Number." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/ChromaticNumber.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [15] Eric W. Weisstein. "Hamiltonian Graph." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/HamiltonianGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [16] Eric W. Weisstein. "Perfect Graph." *From MathWorld—A Wolfram Web Resource*.  
<https://mathworld.wolfram.com/PerfectGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]

- [17] Eric W. Weisstein. "*Planar Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.*  
<https://mathworld.wolfram.com/PlanarGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [18] Eric W. Meringer, Markus and Weisstein. "*Regular Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.*  
<https://mathworld.wolfram.com/RegularGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [19] Eric W. Weisstein. "*Edge-Transitive Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.*  
<https://mathworld.wolfram.com/Edge-TransitiveGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [20] Eric W. Weisstein. "*Distance Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.*  
<https://mathworld.wolfram.com/DistanceGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [21] Eric W. Weisstein. "*Distance-Regular Graph.*" *From MathWorld—A Wolfram Web Resource.*  
<https://mathworld.wolfram.com/Distance-RegularGraph.html>. [Vid. 5. 3. 2020.]
- [22] Wolfram Research. *Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing.*  
<https://www.wolfram.com/mathematica/>. [Vid. 10. 5. 2020.]
- [23] Harald Schilly. *SageMath - Open-Source Mathematical Software System.*  
<https://www.sagemath.org/>. [Vid. 10. 5. 2020.]
- [24] ČVUT. *Technické vybavení superpočítání.*  
<https://ist.cvut.cz/nase-sluzby/superpocitani/superpocitani-technika/>. [Vid. 12. 5. 2020.]