

Diplomová práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
Katedra radioelektroniky

Popis a analýza elastických Loveho vln v nehomogenní izotropní vrstvě

Bc. Antonín Krpenský

Vedoucí: doc. Dr. Ing. Michal Bednařík
Obor: Vysokofrekvenční a digitální technika
Studijní program: Otevřené elektronické systémy
Květen 2020

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Krpenský** Jméno: **Antonín** Osobní číslo: **456899**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra radioelektroniky**
Studijní program: **Otevřené elektronické systémy**
Studijní obor: **Vysokofrekvenční a digitální technika**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Popis a analýza elastických Loveho vln v nehomogenní izotropní vrstvě

Název diplomové práce anglicky:

Description and Analysis of Elastic Love Waves in an Inhomogeneous Isotropic Layer

Pokyny pro vypracování:

Odvodte elastodynamickou rovnici popisující chování Loveho povrchových vln v nehomogenním izotropním prostředí, přičemž předpokládejte, že rychlost šíření v tomto prostředí je konstantní. Uvažujte, že nehomogenní prostředí představuje vrstvu konstantní tloušťky ležící na homogenním izotropním poloprostoru, ve kterém se elastické vlny ve směru tloušťky zatlumí. Dále předpokládejte, že vnější povrch nehomogenní vrstvy není vystaven mechanickému napětí. Mezi nehomogenní vrstvou a homogenním poloprostorem uvažujte klasické podmínky spojitosti. Předpokládejte, že materiálová funkce je vyjádřena superpozicí dvou lineárně nezávislých Heunových funkcí, které změnou jejich vnitřních parametrů mohou simulovat širokou třídu prostorových závislostí modulu ve smyku. Pro takto zvolené materiálové funkce nalezněte přesná analytická řešení. Výsledky ověřte pomocí vhodně zvolené numerické metody nebo pomocí přibližného analytického řešení založeného na WKB metodě. Na základě nalezených řešení analyzujte vliv vhodně zvolených materiálových funkcí na disperzi vln.

Seznam doporučené literatury:

- [1] A. Ronveaux: Heun's Differential Equations, Oxford University Press, 1995.
- [2] O. Novotny: Seismic Surface Waves, Lecture Notes for Post-graduate Studies, Instituto de Fisica, Instituto de Geociencias, Salvador, Bahia, 1999.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Dr. Ing. Michal Bednařík, katedra fyziky FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **31.01.2020** Termín odevzdání diplomové práce: _____

Platnost zadání diplomové práce: **30.09.2021**

doc. Dr. Ing. Michal Bednařík
podpis vedoucí(ho) práce

doc. Ing. Josef Dobeš, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval doc. Dr. Ing. Michalovi Bednaříkovi za jeho cenné rady a připomínky, poskytnutí potřebných odborných publikací a celkové vedení této diplomové práce.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 22. května 2020

Abstrakt

Tato práce se zabývá šířením Loveho vln v nehomogenní izotropní povrchové vrstvě, jejíž průběhy hustoty a modulu pružnosti v torzi jsou určeny materiálovou funkcí. Pomocí vhodné transformace vlnové rovnice lze získat dvě diferenciální rovnice druhého řádu pro vlnovou a materiálovou funkci ve tvaru trikonfluentní Heunovy rovnice, jejíž řešení lze zapsat jakožto lineární kombinaci dvou trikonfluentních Heunových funkcí. To jsou analytické funkce vyjádřené nekonečnou řadou, jejíž koeficienty u příslušných mocnin splňují diferenciální rovnici třetího řádu. Na základě takto získaných řešení zmíněných rovnic jsou pak vypočteny disperzní charakteristiky a vlnové funkce pro různě zvolené profily materiálové funkce. Získané výsledky jsou na závěr porovnány s alternativní, často využívanou Wentzel-Kramers-Brillouin metodou a dále s numerickou metodou Runge-Kutta-Fehlberg 45.

Klíčová slova: Loveho vlny, materiálová funkce, trikonfluentní Heunova rovnice, trikonfluentní Heunova funkce, WKB metoda

Vedoucí: doc. Dr. Ing. Michal Bednařík

Abstract

This work deals with the propagation of Love waves in an inhomogeneous isotropic surface layer, whose shapes of the density and the modulus of elasticity in torsion are determined by the material function. Using the appropriate transformation of the wave equation, two second order differential equations for the wave function and material function can be obtained in the form of the triconfluent Heun equation, whose solution can be written as a linear combination of the triconfluent Heun functions. These are analytic functions given by an infinite series whose coefficients for the respective powers satisfy the third order difference equation. Based on the obtained solutions of the above mentioned equations, the dispersion characteristics and the wave functions are calculated for variously selected material functions. The obtained results are compared with alternative, often used Wentzel-Kramers-Brillouin method and further with the numerical method Runge-Kutta-Fehlberg 45.

Keywords: Love waves, material function, triconfluent Heun equation, triconfluent Heun function, WKB method

Title translation: Description and Analysis of elastic Love Waves in an Inhomogeneous Isotropic Layer

Obsah

Úvod	1	3.2 Přesná analytická řešení modelové rovnice pro zvolenou třídu materiálových funkcí	24
1 Povrchové Loveho vlny a jejich vlnová rovnice	3	3.3 Nalezení materiálové funkce pro předem určený generující polynom	28
1.1 Použité geometrické uspořádání . .	3	3.4 Aproximace generujícího polynomu	31
1.2 Vlnová rovnice	4	3.5 Disperzní relace	35
1.3 Homogenní případ	6	3.6 Aproximace řešení pomocí metody WKB	36
1.4 Geometrické odvození disperzní relace	9	3.7 Disperzní relace WKB	38
1.5 Demonstrační příklad Loveho vln v homogenní izotropní vrstvě	14	4 Řešení modelové rovnice pro Loveho vlny v nehomogenním případě pro vybrané průběhy materiálových funkcí	41
2 Trikonfluentní Heunovy funkce	17	4.1 Aproximace konstantního průběhu materiálové funkce	42
2.1 Klasifikace singulárních bodů . . .	17	4.2 Aproximace lineárního průběhu materiálové funkce	44
2.2 Trikonfluentní Heunova rovnice .	18	4.3 Aproximace exponenciálního nárůstu materiálové funkce	48
2.3 Kompletní řešení trikonfluentní Heunovy rovnice	20	4.4 Aproximace exponenciálního poklesu materiálové funkce	52
2.4 Polynomiální tvar řešení Trikonfluentní Heunovy rovnice . . .	21	4.5 Aproximace gaussovského průběhu materiálové funkce	55
3 Loveho vlny v nehomogenní izotropní povrchové vrstvě	23		
3.1 Materiálová funkce	23		

4.6 Aproximace minima kvadratické materiálové funkce	59
4.7 Využití polynomiálního řešení pro výpočet materiálové funkce	62
Závěr	67
Literatura	69
A Seznam příložených souborů	71
A.1 MAPLE Worksheets	71

Obrázky

1.1 Geometrické uspořádání.	4	3.6 Aproximovaná materiálová funkce 2.	35
1.2 Grafické znázornění řešení rovnice (1.35).	8	4.1 Průběh použité materiálové funkce.	42
1.3 Ilustrační obrázek zachycující Loveho vlnu v uvažované homogenní struktúře.	9	4.2 Funkce $F(\varkappa)$ při aproximaci konstantního průběhu $\eta(s)$	43
1.4 Objemová vlna na rozhraní.	10	4.3 Disperzní relace v případě aproximace konstantního průběhu $\eta(s)$	43
1.5 Geometrická interpretace Loveho vlny.	12	4.4 Průběhy $U(s)$ v případě aproximace konstantního průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$	44
1.6 Disperzní relace pro homogenní případ.	14	4.5 Průběh použité materiálové funkce.	45
1.7 Průběhy $U(s)$ v homogenním případě pro $K_x = 15$	15	4.6 Funkce $F(\varkappa)$ v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$	45
3.1 Profily materiálové funkce pro vybrané kombinace parametrů $\{a_0; a_1; a_2; a_4; C_1; C_2; s_0\}$	29	4.7 Disperzní relace v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$	46
3.2 Profily materiálové funkce pro vybrané kombinace parametrů $\{a_0; a_1; a_2; a_4; C_1; s_0\}$	31	4.8 Průběhy $U(s)$ v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$	46
3.3 Aproximace generujícího polynomu.	33	4.9 Porovnání metod řešení v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 3$ a první mód.	47
3.4 Aproximovaná materiálová funkce.	33	4.10 Porovnání metod řešení v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód.	48
3.5 Aproximace generujícího polynomu.	34		

4.11 Průběh použité materiálové funkce.	49	4.22 Porovnání metod řešení v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód....	55
4.12 Funkce $F(\varkappa)$ při aproximaci exponenciálního nárůstu $\eta(s)$	49	4.23 Průběh použité materiálové funkce.	56
4.13 Disperzní relace v případě aproximace exponenciálního nárůstu $\eta(s)$	50	4.24 Funkce $F(\varkappa)$ v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$	56
4.14 Průběhy $U(s)$ v případě aproximace exponenciálního nárůstu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$	50	4.25 Disperzní relace v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$	57
4.15 Porovnání metod řešení v případě aproximace exponenciálního nárůstu $\eta(s)$ pro $K_x = 3$ a první mód.	51	4.26 Průběhy $U(s)$ v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$	57
4.16 Porovnání metod řešení v případě aproximace exponenciálního nárůstu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód....	51	4.27 Porovnání metod řešení v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 3$ a první mód.	58
4.17 Průběh použité materiálové funkce.	52	4.28 Porovnání metod řešení v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód....	58
4.18 Funkce $F(\varkappa)$ v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$	53	4.29 Průběh použité materiálové funkce.	59
4.19 Disperzní relace v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$	53	4.30 Funkce $F(\varkappa)$ v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$	60
4.20 Průběhy $U(s)$ v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$	54	4.31 Disperzní relace v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$	60
4.21 Porovnání metod řešení v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$ pro $K_x = 4, 5$ a druhý mód. . .	54		

4.32 Průběhy $U(s)$ v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$ pro $K_x = 15$	61
4.33 Porovnání metod řešení v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$ pro $K_x = 4, 5$ a druhý mód. . .	61
4.34 Porovnání metod řešení v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód. . . .	62
4.35 Průběh použité materiálové funkce.	63
4.36 Funkce $F(\varkappa)$ v případě využití polynomiálního řešení pro výpočet $\eta(s)$	63
4.37 Disperzní relace v případě využití polynomiálního řešení pro výpočet $\eta(s)$	64
4.38 Průběhy $U(s)$ v případě využití polynomiálního řešení při výpočtu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$	64
4.39 Porovnání metod řešení v případě využití polynomiálního řešení pro výpočet $\eta(s)$ pro $K_x = 3$ a první mód.	65
4.40 Porovnání metod řešení při využití polynomiálního řešení pro výpočet $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód.	65



Úvod

Problematika šíření vln v nehomogenních strukturách patří dnes k hojně studovaným tématům v mnoha odvětvích fyziky, ať už jde o akustiku, elastodynamiku, optiku, kvantovou fyziku apod. V této práci se budeme zabývat šířením Loveho vln, což jsou příčné elastické povrchové vlny, které se šíří na typicky homogenním elastickém substrátu s odlišnou povrchovou vrstvou konečné tloušťky. Tuto vrstvu budeme považovat za funkčně odstupňovaný materiál (Functionally Graded Material), kde některé z jeho charakteristických vlastností (typicky hustota nebo modul pružnosti v torzi) mají nekonzstantní průběh daný analytickou funkcí η , kterou nazýváme materiálová funkce. Ukážeme, že za určitých podmínek lze příslušné vlnové rovnice transformovat na tvar trikonfluentních Heunových diferenciálních rovnic, kdy jak materiálová funkce, tak vlnové funkce budou dány lineární kombinací dvou trikonfluentních Heunových funkcí, které mohou mít celkem až osm vstupních parametrů, jejichž vhodnou kombinací lze aproximovat mnoho různorodých profilů materiálové funkce. K těm lze posléze snadno dopočítat a vykreslit disperzní charakteristiky, které v našem případě budou představovat závislosti fázových rychlostí Loveho vln na bezrozměrném vlnovém čísle. Uspořádání celého textu je následující. Nejprve ze základních poznatků mechaniky kontinua nastíníme odvození vlnové rovnice pro Loveho vlny, kterou následně převedeme do fourierovské oblasti. Uvidíme, že za jistých předpokladů je tato rovnice zcela izomorfní s Websterovou rovnicí popisující akustické vlny ve vlnovodu s proměnným průřezem. K ní dále pro demonstraci nalezneme řešení a disperzní charakteristiky pro případ homogenní povrchové vrstvy. Dále následuje část věnovaná obecně trikonfluentní Heunově diferenciální rovnici a jejímu řešení, které povede na rozvoj v nekonečnou řadu (Frobeniovo řešení), jejíž koeficienty jsou dány diferenční rovnicí třetího řádu, ve speciálním případě může řešení nabývat tvaru konečného polynomu. V následující kapitole budeme hledat vhodnou transformaci, která z původní modelové rovnice pro uvažované

povrchové vlny vyústí ve dvě trikonfluentní Heunovy diferenciální rovnice, jednak pro vlnovou funkci, a jednak pro materiálovou funkci. Pomocí dříve odvozeného matematického aparátu nalezneme jejich řešení a stejně jako v homogenním případě stanovíme způsob výpočtu disperzních charakteristik. Dále se zaměříme na přibližnou analytickou metodu řešení výchozí modelové rovnice, tzv. Wentzel-Krammers-Brillouin (WKB) metodu, která poskytuje přibližná analytická řešení použitelná pro vyšší hodnoty vlnového čísla. Veškerou získanou teorii poté aplikujeme pro několik reprezentativních profilů materiálové funkce, přičemž námi vypočtená řešení ve tvaru lineární kombinace trikonfluentních Heunových funkcí (označme tento způsob jako THF metodu) graficky porovnáme s řešeními, která poskytuje přibližná WKB metoda a dále s výsledky numerické metody Runge-Kutta-Fehlberg 45 (RKF45). Na závěr textu nejprve stručně shrneme nabyté poznatky, provedeme krátkou diskusi nad získanými výsledky, rozebereme výhody a úskalí THF metody a práci celkově zhodnotíme.

Kapitola 1

Povrchové Loveho vlny a jejich vlnová rovnice

V první kapitole nejprve stanovíme geometrické uspořádání a odvodíme příslušnou vlnovou rovnici. Dále nalezneme její řešení v homogenním případě a výsledné vztahy použijeme na konkrétním příkladu.

1.1 Použité geometrické uspořádání

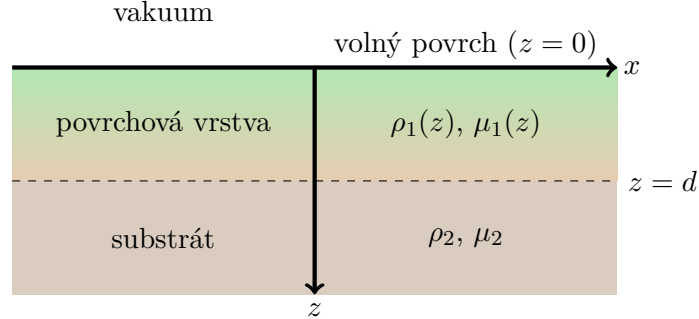
Uvažujme poloprostor definovaný v kartézském souřadnicovém systému jako $z \geq 0$ vyplněný elastickým izotropním kontinuem, které budeme popisovat pomocí dvou charakteristických veličin: hustoty ρ a modulu pružnosti v torzi μ . Veškeré nehomogenity se budou vyskytovat pouze v povrchové vrstvě (viz obrázek 1.1), to znamená pro $z \in \langle 0; d \rangle$, přičemž charakteristické veličiny spojené s touto vrstvou budeme opatřovat indexem 1, a můžeme proto obecně psát, že

$$\rho_1 = \rho_1(z), \quad (1.1)$$

$$\mu_1 = \mu_1(z). \quad (1.2)$$

Ve zbylé části poloprostoru, tj. pro $z \in (d; \infty)$, který nazýváme substrát, budeme považovat jak hustotu, tak modul pružnosti v torzi za konstantní, a budeme je značit ρ_2 a μ_2 . Dále předpokládejme, že opačný poloprostor ($z < 0$) je bezmateriálový (vakuum) a tudíž nijak silově nepůsobí na elastické kontinuum, přičemž i v reálném případě, kdy je přítomen vzduch, lze jeho silové působení zanedbat, hovoříme tedy o tzv. volném povrchu (viz např. [1],

[2]). Souřadnicový systém orientujeme tak, že vlny se budou šířit v kladném směru osy x . Vše je názorně vykresleno na obrázku 1.1. Výše uvedenou geometrii budeme používat v rámci celé práce.



Obrázek 1.1: Geometrické uspořádání.

1.2 Vlnová rovnice

V této kapitole stručně nastíníme odvození modelové rovnice pro horizontálně polarizované příčné elastické vlny, neboli SH vlny (shear horizontal, viz např. [1], [2]). Z hlediska symetrie v námi uvažované geometrii musí pro libovolnou (skalární, nebo vektorovou) veličinu $A(\mathbf{r}, t)$ platit

$$\frac{\partial A(\mathbf{r}, t)}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

jinými slovy, žádná veličina není funkcí prostorové souřadnice y .

Uvažujme příčnou elastickou vlnu, kdy jednotlivé částice kmitají v rovině povrchu $z = 0$. Vektor posunutí tedy bude mít nenulovou pouze y -ovou složku, kterou označíme jako u :

$$\mathbf{u} = (0, u, 0). \quad (1.4)$$

Druhý Newtonův zákon pro element kontinua můžeme zapsat ve tvaru (viz např. [3]):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad (1.5)$$

kde τ_{yx} a τ_{yz} představují složky Cauchyho tenzoru napětí, přičemž jsme využili vztahu (1.3). Podle zobecněného Hookova zákona (zjednodušeného pro náš případ) platí (viz např. [3]):

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Dosazením výrazu (1.6) do rovnice (1.5) dostaneme následující vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.7)$$

kde

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.8)$$

je rychlost šíření objemových příčných elastických vln (viz např. [3]). Díky nehomogennímu prostředí tato rychlost není obecně konstantní, nýbrž platí, že

$$c = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho(z)}} = c(z). \quad (1.9)$$

Zdefinujme Loveho vlnu jako povrchovou SH vlnu, pro kterou platí (viz např. [1], [2]):

$$u(x, z, t) = \tilde{U}(z) e^{jk_x(x - c_f t)}, \quad (1.10)$$

kde c_f je fázová rychlost Loveho vlny šířící se ve směru osy x a k_x jí příslušející vlnové číslo. V našem případě předpokládáme nedisipativní prostředí, proto bude

$$k_x \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

Dosazením vztahu (1.10) do rovnosti (1.7) obdržíme rovnici pro $\tilde{U}(z)$:

$$\frac{d^2 \tilde{U}(z)}{dz^2} + \frac{1}{\mu(z)} \frac{d\mu(z)}{dz} \frac{d\tilde{U}(z)}{dz} + k_x^2 \left(\frac{c_f^2}{c^2} - 1 \right) \tilde{U}(z) = 0. \quad (1.12)$$

Poznamenejme, že pro $c = \text{konst.}$ tato rovnice nabývá stejného tvaru jako Websterova vlnová rovnice pro akustické vlny ve vlnovodu s proměnným průřezem. Zavedeme-li nové bezrozměrné veličiny

$$s = \frac{z}{d}, \quad U = \frac{\tilde{U}}{d}, \quad K_x = k_x d, \quad (1.13)$$

dostaneme výsledný bezrozměrný tvar rovnice (1.12):

$$\frac{d^2 U(s)}{ds^2} + \frac{1}{\mu(s)} \frac{d\mu(s)}{ds} \frac{dU(s)}{ds} + [K(s)^2 - K_x^2] U(s) = 0, \quad (1.14)$$

kde jsme využili substituce

$$K(s) = K_x \frac{c_f}{c(s)}, \quad (1.15)$$

přičemž všechny prostorově závislé veličiny nyní uvažujeme jako funkce bezrozměrné souřadnice s , která představuje bezrozměrnou Lagrangeovskou souřadnici (viz např. [3]).

1.3 Homogenní případ

Uvažujme nyní povrchovou vrstvu jako homogenní s charakteristickými veličinami

$$\rho_1(s) = \rho_1 = \text{konst.}, \quad (1.16)$$

$$\mu_1(s) = \mu_1 = \text{konst.} \quad (1.17)$$

Předpoklad homogenní vrstvy má za následek, že druhý člen rovnice (1.14) je nulový, čímž tato rovnice nabude tvaru Helmholtzovy diferenciální rovnice (viz např. [2]):

$$\frac{d^2 U_1(s)}{ds^2} + (K_1^2 - K_x^2) U(s) = 0, \quad (1.18)$$

kde $c_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ je již konstantní objemovou rychlostí v celé vrstvě a $K_1 = K_x(c_f/c_1)$. Pro substrát, který je homogenní, bude mít rovnice úplně stejný tvar jako (1.18), pouze zaměníme $K_1 \rightarrow K_2 = K_x(c_f/c_2)$:

$$\frac{d^2 U_2(s)}{ds^2} + [K_2^2 - K_x^2] U(s) = 0, \quad (1.19)$$

Řešení rovnic (1.18) a (1.19) lze zapsat jako

$$U_1(s) = A_1 \exp\left(j\sqrt{K_1^2 - K_x^2}s\right) + B_1 \exp\left(-j\sqrt{K_1^2 - K_x^2}s\right), \quad (1.20)$$

$$U_2(s) = A_2 \exp\left(j\sqrt{K_2^2 - K_x^2}s\right) + B_2 \exp\left(-j\sqrt{K_2^2 - K_x^2}s\right). \quad (1.21)$$

Od těchto obecných nalezených řešení budeme dále požadovat, aby splňovala následující podmínky:

1. Předpoklad volného povrchu (viz podkapitola 1.1) má za následek, že

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu_1 \frac{dU_1(s)}{ds} \Big|_{s=0} = 0, \quad (1.22)$$

kde jsme využili symetrie Cauchyho tenzoru napětí (viz např. [3]). Po zkrácení μ_1 dospějeme k podmínce

$$\frac{dU_1(s)}{ds} \Big|_{s=0} = 0. \quad (1.23)$$

2. Spojitost vektoru posunutí a tečného napětí na rozhraní $s = 1$ ($z = d$):

$$U_1(1) = U_2(1), \quad (1.24)$$

$$\mu_1 \frac{dU_1(s)}{ds} \Big|_{s=1} = \mu_2 \frac{dU_2(s)}{ds} \Big|_{s=1}. \quad (1.25)$$

3. Jelikož se jedná o povrchovou vlnu, tak musí platit (viz např. [1]):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} U_2(s) = 0. \quad (1.26)$$

Třetí z těchto podmínek je splněna za předpokladu, že výraz $\sqrt{K_2^2 - K_x^2}$ je ryze imaginární, jinými slovy musí být $K_2 < K_x$. Z definice (1.15) lze toto zajistit pouze tehdy, platí-li, že

$$c_2 > c_f. \quad (1.27)$$

Řešení (1.21) lze pak přepsat do následujícího tvaru:

$$U_2(s) = A_2 \exp\left(-\sqrt{K_x^2 - K_2^2}s\right) + B_2 \exp\left(\sqrt{K_x^2 - K_2^2}s\right), \quad (1.28)$$

z čehož plyne, že

$$B_2 = 0. \quad (1.29)$$

Z první podmínky dostaneme, že

$$A_1 = B_1. \quad (1.30)$$

Definujme novou proměnnou

$$\varkappa \equiv \sqrt{K_1^2 - K_x^2}, \quad (1.31)$$

s jejíž pomocí můžeme uvažovaná řešení přepsat do tvaru

$$U_1(s) = 2A_1 \cos(\varkappa s), \quad (1.32)$$

$$U_2(s) = A_2 \exp\left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}s\right). \quad (1.33)$$

Dosazením vztahů (1.32) a (1.33) do rovnic (1.24) a (1.25) obdržíme soustavu

$$\begin{aligned} 2 \cos(\varkappa)A_1 - \exp\left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}s\right) A_2 &= 0, \\ -2\mu_1 \varkappa \sin(\varkappa)A_1 + \mu_2 \sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2} \exp\left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}s\right) A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Existence netriviálního řešení vyžaduje nulovost příslušného determinantu, což vede na rovnici

$$F(\varkappa) = -\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}, \quad (1.35)$$

kde

$$F(\varkappa) \equiv -\frac{\mu_1}{\mu_2} \varkappa \tan(\varkappa), \quad (1.36)$$

z čehož vidíme, že předmětem našeho zájmu jsou pouze intervaly \varkappa , pro které je $F(\varkappa) \leq 0$ a rovnice tak nabývá řešení v reálném oboru. Zaměřme se nyní na nalezení disperzní relace jakožto závislosti

$$c_f = c_f(K_x). \quad (1.37)$$

Kombinací vztahů (1.15), (1.31) a (1.35) dostáváme

$$K_x(\varkappa) = \sqrt{\frac{c_2^2 F^2(\varkappa) + c_1^2 \varkappa^2}{c_2^2 - c_1^2}}, \quad (1.38)$$

$$c_f[K_x(\varkappa)] = c_1 \sqrt{1 + \frac{\varkappa^2}{K_x^2(\varkappa)}}, \quad (1.39)$$

což je hledaná disperzní relace parametrizovaná pomocí \varkappa . Z průběhu funkce $F(\varkappa)$ můžeme určit nekonečně mnoho intervalů, pro které je splněna podmínka

$$F(\varkappa) \leq 0. \quad (1.40)$$

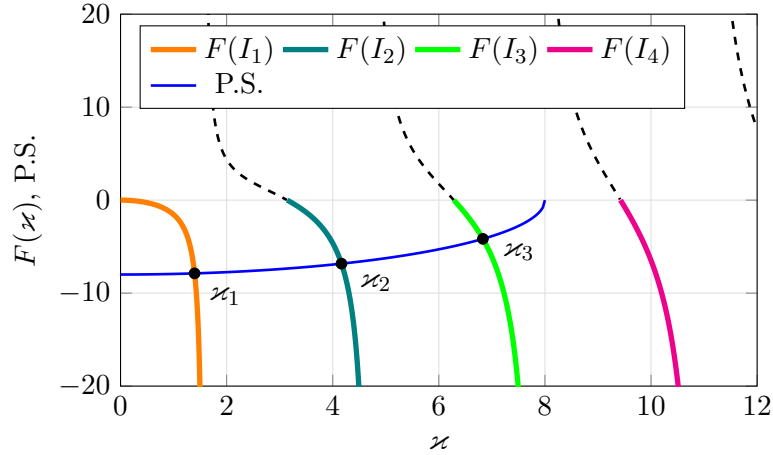
Vzhledem k tomu, že $F(\varkappa) \propto -\varkappa \tan(\varkappa)$, jsou tyto intervaly rovny

$$I_{n+1} = \left\langle n\pi; \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \right\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.41)$$

Pro každý z těchto intervalů lze pak vyjádřit jednu křivku závislosti

$$c_{f,n+1} = c_{f,n+1}[K_x(I_{n+1})]. \quad (1.42)$$

Tyto křivky představují disperzní charakteristiky pro jednotlivé módy vlnění. Ilustrační průběhy funkce $F(\varkappa)$ se zvýrazněnými úseky odpovídajícími intervalům I_n spolu s pravou stranou rovnice (1.35) odpovídající konkrétnímu vlnovému číslu, pro které rovnice (1.35) nabývá tří kořenů (tři módy šíření) jsou vykresleny na obrázku 1.2.



Obrázek 1.2: Grafické znázornění řešení rovnice (1.35).

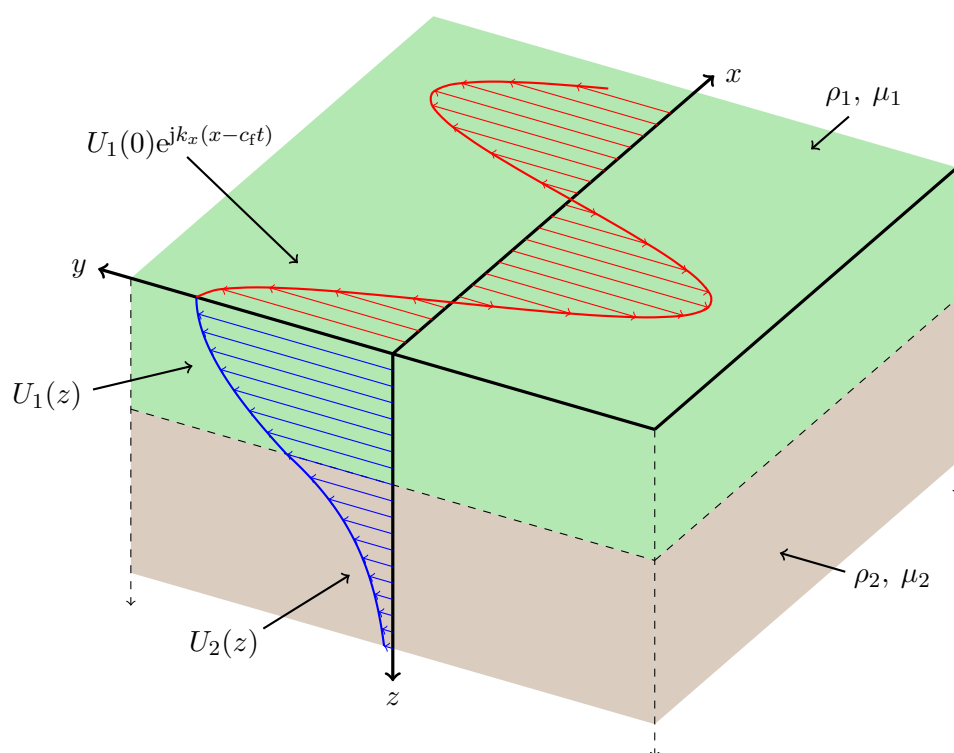
Průsečíky $F(\varkappa)$ a P.S. představují řešení rovnice (1.35). Tato řešení jsou v našem případě tři ($\varkappa_{1,2,3}$), přičemž po dosazení do vztahu (1.32) dostaneme příslušné tři módy.

S rostoucími hodnotami bezrozměrného vlnového čísla bude mít rovnice (1.35) více kořenů a v povrchové vrstvě se tak může šířit více módů vlnění.

Ze vztahu (1.38) vidíme, že pro reálné hodnoty K_x musí být $c_2 > c_1$. Dále dle výrazu (1.39) je $c_f > c_1$. V kombinaci se vztahem (1.27) pak můžeme všechny tyto nerovnosti přepsat do jedné výsledné relace:

$$c_2 > c_f > c_1, \quad (1.43)$$

odkud vidíme, že parametry povrchové vrstvy nemohou být libovolné, nýbrž objemová rychlost šíření příčných vln zde musí nabývat nižších hodnot než v substrátu. Ilustrační náčrt Loveho vlny je zachycen na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Ilustrační obrázek zachycující Loveho vlnu v uvažované homogenní struktuře.

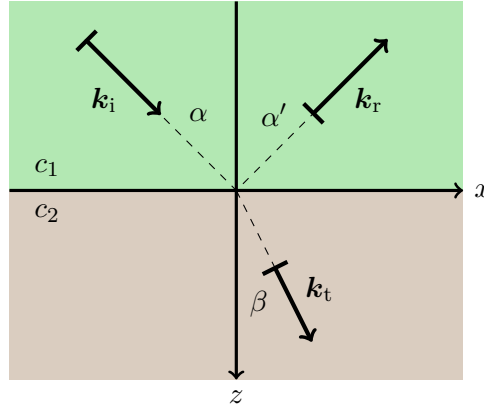
1.4 Geometrické odvození disperzní relace

K disperzní relaci lze také dospět jiným, intuitivnějším způsobem. Nejprve v krátkosti odvodíme zákon odrazu a lomu pro příčné objemové (SH) vlny. Předpokládejme rozhraní dvou materiálů v rovině $z = 0$, k němuž se šíří

rovinná vlna

$$U_i(\mathbf{r}, t) = A_i e^{j[\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t]} , \quad (1.44)$$

kde index i pochází z anglického slova incident. Její vlnový vektor leží v rovině $y = 0$, přičemž vektor posunutí má opět nenulovou pouze složku ve směru osy y . Na tomto rozhraní se dopadající vlna rozdělí na odraženou $U_r(\mathbf{r}, t)$ (r-reflected) a průchozí $U_t(\mathbf{r}, t)$ (t-transmitted), viz obrázek 1.4.



Obrázek 1.4: Objemová vlna na rozhraní.

Složky příslušných vlnových vektorů jsou

$$\mathbf{k}_i = [k_i \sin(\alpha), 0, k_i \cos(\alpha)] , \quad (1.45)$$

$$\mathbf{k}_r = [k_r \sin(\alpha'), 0, -k_r \cos(\alpha')] , \quad (1.46)$$

$$\mathbf{k}_t = [k_t \sin(\beta), 0, k_t \cos(\beta)] . \quad (1.47)$$

V místě rozhraní musí platit podmínka spojitosti vektoru posunutí:

$$U_i(\mathbf{r}, t) + U_r(\mathbf{r}, t) = U_t(\mathbf{r}, t) \text{ pro } z = 0 , \quad (1.48)$$

kterou můžeme rozepsat do tvaru

$$A_i e^{j[\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t]} \Big|_{z=0} + A_r e^{j[\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t]} \Big|_{z=0} = A_t e^{j[\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t]} \Big|_{z=0} . \quad (1.49)$$

Po dosazení $z = 0$ dostaneme

$$A_i e^{j[k_i \sin(\alpha)x - \omega t]} + A_r e^{j[k_r \sin(\alpha')x - \omega t]} = A_t e^{j[k_t \sin(\beta)x - \omega t]} . \quad (1.50)$$

Pakliže má být toto splněno pro každé x a ω , musí platit, že

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega , \quad (1.51)$$

$$k_i \sin(\alpha) = k_r \sin(\alpha') = k_t \sin(\beta) , \quad (1.52)$$

a jelikož

$$k_i = k_r = \frac{\omega}{c_1} , \quad (1.53)$$

dojdeme ke známému zákonu odrazu:

$$\alpha = \alpha', \quad (1.54)$$

a po přeznačení $k_i \rightarrow k_1$, $k_t \rightarrow k_2$ k zákonu lomu (Snellův zákon):

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (1.55)$$

Za předpokladu $c_2 > c_1$ může dojít k totálnímu odrazu, pokud je překročen mezní úhel dopadu, který určíme ze Snellova zákona tak, že položíme $\beta = \pi/2$, z čehož dostáváme vztah pro mezní úhel

$$\alpha_{\text{mez}} = \arcsin\left(\frac{c_1}{c_2}\right). \quad (1.56)$$

Pakliže k podmínce spojitosti vektoru posunutí (1.48) přidáme spojitost tečného napětí na rozhraní:

$$\mu_1 \frac{\partial U_i(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} + \mu_1 \frac{\partial U_r(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \mu_2 \frac{\partial U_t(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (1.57)$$

dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + R &= T, \\ \mu_1 k_1 \cos(\alpha)(1 - R) &= \mu_2 k_2 \cos(\beta)T, \end{aligned} \quad (1.58)$$

kde

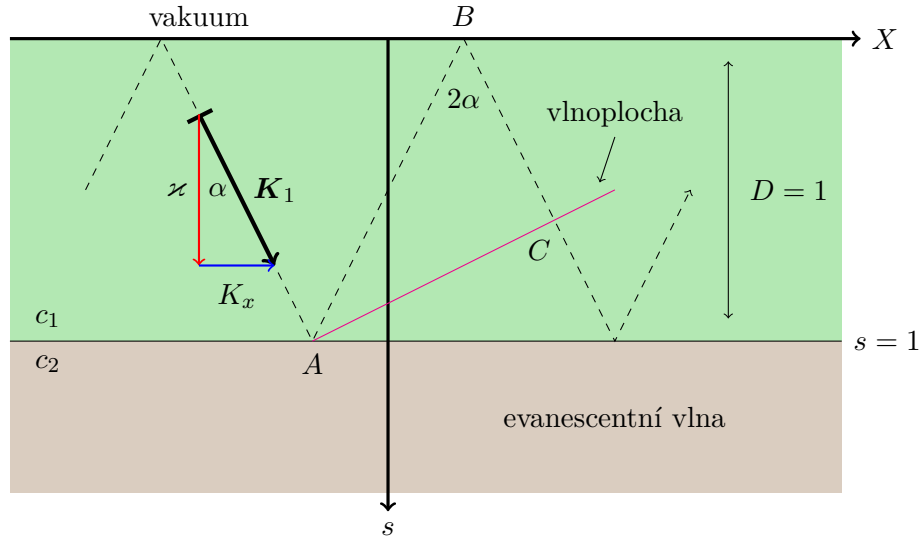
$$R = \frac{A_r}{A_i}, \quad T = \frac{A_t}{A_i} \quad (1.59)$$

jsou koeficienty odrazu (reflexe) a průchodu (transmise). Řešením soustavy (1.58) dostaneme vztah pro koeficient odrazu:

$$R = \frac{\mu_1 k_1 \cos(\alpha) - \mu_2 k_2 \cos(\beta)}{\mu_1 k_1 \cos(\alpha) + \mu_2 k_2 \cos(\beta)}. \quad (1.60)$$

Pokud vlna dopadá na rozhraní elastický materiál-vakuum ($\mu_2 = 0$), potom je koeficient odrazu $R = 1$, jinými slovy dojde vždy k totálnímu odrazu se stejnou fází.

Vraťme se k původnímu geometrickému uspořádání, jak bylo definováno v podkapitole 1.1, a předpokládejme $c_2 > c_1$. Loveho vlnu si potom můžeme představit jako harmonickou rovinnou SH vlnu, která se mechanismem totálního odrazu na obou rozhraních šíří podél povrchové vrstvy podobně jako kupříkladu světlo v optickém vláknu (viz například [1]). Popsaný princip je zachycen na obrázku 1.5, přičemž kromě rychlostí $c_{1,2}$ jsme všechny ostatní veličiny převedli do bezrozměrného tvaru.



Obrázek 1.5: Geometrická interpretace Loveho vlny.

Z obrázku (1.5) vidíme skutečný význam veličin

$$K_x = K_1 \sin(\alpha), \quad (1.61)$$

$$\varkappa = K_1 \cos(\alpha). \quad (1.62)$$

Jedná se o projekce vlnového vektoru \mathbf{K}_1 do příslušných směrů. K_x tedy udává změnu fáze vlnění s bezrozměrnou souřadnicí $X = x/d$, \varkappa pak se souřadnicí s . Aby se takto definovaná Loveho vlna mohla šířit, musí v bodě C dojít ke konstruktivní interferenci přímé a odražené vlny (viz např. [1]), což je splněno za předpokladu, že fázový rozdíl odražené vlny nabývá celistvého násobku 2π :

$$K_1 (|AB| + |BC|) + 2\Delta = 2\pi n \text{ pro } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.63)$$

kde 2Δ je fázový posuv, který nastává při odrazu vlny od spodního rozhraní. Dosazením do vztahu (1.60) dostáváme

$$R = \frac{\mu_1 \varkappa - \mu_2 K_2 \cos(\beta)}{\mu_1 \varkappa + \mu_2 K_2 \cos(\beta)}. \quad (1.64)$$

Ze Snellova zákona (1.48) můžeme vyjádřit

$$K_2 \cos(\beta) = K_2 \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = K_2 \sqrt{1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2(\alpha)}. \quad (1.65)$$

Pokud je splněna podmínka totálního odrazu $\alpha > \alpha_{\text{mez}}$, tak

$$\sin(\alpha) > \frac{c_1}{c_2} \quad (1.66)$$

a výraz (1.65) tak nutně musí být ryze imaginární. Upravme jej proto do tvaru

$$K_2 \cos(\beta) = jK_2 \sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2(\alpha) - 1} = j\sqrt{K_x^2 - K_2^2} = j\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}. \quad (1.67)$$

Díky tomu se v poloprostoru $s > 1$ šíří ve směru osy s pouze tzv. evanescentní vlna (vlna exponenciálně tlumená, viz např. [1], [2]):

$$U_2(s) \propto \exp[jK_2 \cos(\beta)s] = \exp\left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}s\right), \quad (1.68)$$

což je v souladu se vztahem (1.33). Koeficient odrazu lze přepsat do tvaru

$$R = \frac{a - jb}{a + jb}, \quad (1.69)$$

kde

$$\begin{aligned} a &= \mu_1 \varkappa, \\ b &= \mu_2 \sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

přičemž $|R| = 1$ (totální odraz) a způsobený fázový posuv je pak roven

$$\tan(2\Delta) = -\frac{2ab}{a^2 - b^2}. \quad (1.71)$$

Vzhledem k tomu, že platí goniometrická rovnost

$$\tan(2\Delta) = \frac{\sin^2(2\Delta)}{\cos^2(2\Delta)} = \frac{2 \sin(\Delta) \cos(\Delta)}{\cos^2(\Delta) - \sin^2(\Delta)}, \quad (1.72)$$

můžeme při substituci $a = \cos(\Delta)$ a $b = \sin(\Delta)$ psát

$$\tan(-\Delta) = \frac{\sin(-\Delta)}{\cos(-\Delta)} = -\frac{\sin(\Delta)}{\cos(\Delta)} = -\frac{b}{a} = -\frac{\mu_2 \sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}}{\mu_1}. \quad (1.73)$$

Vraťme se zpět k podmínce (1.63). Z obrázku 1.5 můžeme snadno odvodit, že

$$|BC| = |AB| \cos(2\alpha), \quad |AB| = \frac{D}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)}, \quad (1.74)$$

celková vzdálenost je tedy

$$|AB| + |BC| = \frac{1}{\cos(\alpha)} [1 + \cos(2\alpha)] = 2 \cos(\alpha). \quad (1.75)$$

Podmínku konstruktivní interference můžeme zapsat ve tvaru

$$2K_1 \cos(\alpha) + 2\Delta = 2\pi n, \quad (1.76)$$

což lze s využitím vztahu (1.62) upravit na tvar

$$\varkappa = -\Delta + \pi n. \quad (1.77)$$

Aplikujeme-li na obě strany rovnosti funkci tangens, tak s využitím její periodičnosti v kombinaci se vztahem (1.73) dostáváme

$$\tan(\varkappa) = \tan(-\Delta + \pi n) = \tan(-\Delta) = -\frac{\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}}{\varkappa}. \quad (1.78)$$

Po úpravě pak dojdeme k finální podobě podmínky konstruktivní interference:

$$-\frac{\mu_1}{\mu_2} \tan(\varkappa) = -\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}, \quad (1.79)$$

což je shodný tvar s rovnicí (1.35).

1.5 Demonstrační příklad Loveho vln v homogenní izotropní vrstvě

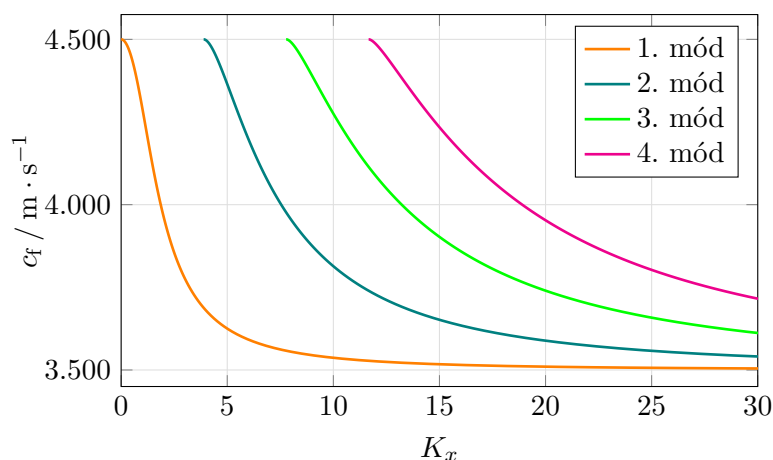
Zaměřme se na vykreslení průběhů disperzních charakteristik a vlnových funkcí pro konkrétně zvolené materiály. Uvažujme následující hodnoty charakteristických veličin (viz např. [1]):

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad \mu_1 = 33,075 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \\ \rho_2 &= 3300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad \mu_2 = 66,825 \cdot 10^9 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Těmto hodnotám odpovídají objemové rychlosti šíření

$$c_1 = 3500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad c_2 = 4500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (1.81)$$

Disperzní charakteristiky pro první čtyři módy jsou vykresleny na obrázku 1.6.



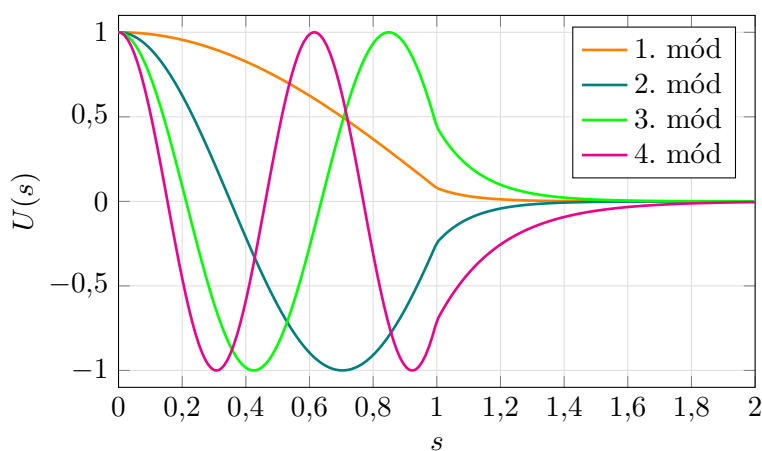
Obrázek 1.6: Disperzní relace pro homogenní případ.

Z obrázku 1.6 vidíme, že je splněna nerovnost (1.43), neboť fázová rychlost se vždy nachází uvnitř intervalu $\langle c_1; c_2 \rangle$.

Zvolme hodnotu bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 15$, pro kterou se v prostředí mohou šířit čtyři módy, viz obrázek 1.6. Nulovost determinantu soustavy (1.34) nám zaručuje lineární závislost obou rovnic. Stanovíme tedy hodnotu první konstanty libovolně:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad (1.82)$$

druhou pak dopočítáme z jedné z rovnic (1.34). Průběhy $U(s)$ pro všechny čtyři módy jsou vykresleny na obrázku 1.7.



Obrázek 1.7: Průběhy $U(s)$ v homogenním případě pro $K_x = 15$.

Na první pohled se může zdát matoucí nespojitost první derivace funkce $U(s)$ v místě rozhraní, avšak spojitost není požadována u vektoru posunutí, nýbrž u tečného napětí, jak bylo popsáno výše v rovnosti (1.25).

Kapitola 2

Trikonfluentní Heunovy funkce

Jak již bylo zmíněno výše v úvodu, hlavním tématem celé práce je nalezení řešení modelové rovnice (1.14) ve formě lineární kombinace trikonfluentních Heunových funkcí. V této kapitole se tedy zaměříme na obecný tvar tzv. trikonfluentní Heunovy diferenciální rovnice a nalezneme její řešení ve formě rozvoje v nekonečnou řadu (Frobeniovo řešení, viz např. [4]).

2.1 Klasifikace singulárních bodů

Nejprve definujeme, co znamená singulární bod diferenciální rovnice. Mějme diferenciální rovnici druhého řádu v obecném tvaru

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + P(x)\frac{dy(x)}{dx} + Q(x)y(x) = 0. \quad (2.1)$$

Singulárním bodem pak nazveme takový bod $x = x_0$, ve kterém funkce $P(x)$ a $Q(x)$ nejsou analytické. Pokud jsou analytické funkce $(x - x_0)P(x)$ a $(x - x_0)^2Q(x)$ v bodě x_0 , pak tento bod nazýváme regulární singulární bod, v opačném případě pak neregulární singulární bod (viz např. [4]). K rovnici obsahující pouze regulární singulární body vždy existuje řešení ve tvaru (viz např. [4]):

$$y(x) = x^\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (2.2)$$

kde ϑ je obecně komplexní a $a_0 \neq 0$.

2.2 Trikonfluentní Heunova rovnice

Na úvod zde uvedeme standardní Heunovu diferenciální rovnici, což je diferenciální rovnice druhého řádu ve tvaru (viz např. [5]):

$$\frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma^2} + \left(\frac{\gamma}{\sigma} + \frac{\delta}{\sigma-1} + \frac{\epsilon}{\sigma-a} \right) \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} + \frac{\alpha\beta\sigma - q}{\sigma(\sigma-1)(\sigma-a)} \varphi(\sigma) = 0, \quad (2.3)$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, a$ a q jsou obecně komplexní parametry, přičemž prvních pět z nich splňuje podmínku (viz např. [5]):

$$1 + \alpha + \beta = \gamma + \delta + \epsilon, \quad (2.4)$$

a dále $a \neq 0, 1$. Vidíme, že tato rovnice má čtyři regulární singulární body

$$\sigma = 0, 1, a, \infty. \quad (2.5)$$

V rámci této práce se omezíme jen na trikonfluentní Heunovu diferenciální rovnici, která představuje speciální případ obecné Heunovy diferenciální rovnice (2.3), u níž došlo ke splynutí (konfluenci) tří regulárních singulárních bodů $0, 1, a$ s regulárním singulárním bodem v ∞ (viz např. [5]), přičemž ∞ se tak stává neregulárním singulárním bodem.

Zapišme kanonickou formu trikonfluentní Heunovy diferenciální rovnice (viz např. [5]):

$$\frac{d^2\phi(\sigma)}{d\sigma^2} - (3\sigma^2 + \gamma) \frac{d\phi(\sigma)}{d\sigma} + [\alpha + (\beta - 3)\sigma] \phi(\sigma) = 0. \quad (2.6)$$

Zavedeme-li novou funkci

$$\Phi(\sigma) = \exp\left(-\frac{\sigma^3 + \gamma\sigma}{2}\right) \phi(\sigma), \quad (2.7)$$

můžeme s její pomocí přepsat rovnici (2.6) do alternativního tvaru

$$\frac{d^2\Phi(\sigma)}{d\sigma^2} + \left(\alpha - \frac{\gamma^2}{4} + \beta\sigma - \frac{3}{2}\gamma\sigma^2 - \frac{9}{4}\sigma^4 \right) \Phi(\sigma) = 0. \quad (2.8)$$

Jedná se o rovnici typu

$$\frac{d^2\Phi(\sigma)}{d\sigma^2} + P_4(\sigma)\Phi(\sigma) = 0, \quad (2.9)$$

kde $P_4(\sigma)$ je tzv. kvartický polynom (polynom 4. stupně), kde koeficient u kubického členu je roven 0. Hledejme řešení rovnice (2.6) metodou rozvoje v nekonečnou řadu (Frobeniovo řešení):

$$\phi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sigma^n; \quad |\sigma| < 1. \quad (2.10)$$

První a druhá derivace výrazu (2.10) podle σ nabývají tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(\sigma)}{d\sigma} &= \sum_{n=0}^{\infty} nC_n\sigma^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)C_{n+1}\sigma^n, \\ \frac{d^2\phi(\sigma)}{d\sigma^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)C_n\sigma^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)C_{n+2}\sigma^n.\end{aligned}\quad (2.11)$$

Dosazením vztahů (2.11) do rovnice (2.6) dostáváme rekurentní předpis

$$(n+3)(n+2)C_{n+3} - \gamma(n+2)C_{n+2} + \alpha C_{n+1} + (\beta - 3n - 3)C_n = 0, \quad (2.12)$$

kde jsme využili lineární nezávislosti jednotlivých mocninných členů σ^n . Vidíme, že se jedná o diferenciální rovnici 3. řádu, pro kterou budeme potřebovat 3 počáteční podmínky. Požadujeme nejprve následující chování hledané funkce $\phi(\sigma)$ v počátku (viz např. [5], [6]):

$$\phi(0) = 1, \quad \left. \frac{d\phi(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = 0. \quad (2.13)$$

Dosazením výrazu (2.13) do rovnice (2.6) dostaneme podmínku pro druhou derivaci funkce $\phi(\sigma)$:

$$\left. \frac{d^2\phi(\sigma)}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = \gamma \left. \frac{d\phi(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} - \alpha\phi(0) = -\alpha. \quad (2.14)$$

Rozepišme výraz (2.10) následovně:

$$\phi(\sigma) = C_0 + C_1\sigma + C_2\sigma^2 + \dots \quad (2.15)$$

Z toho ihned vidíme, že $C_0 = 1$ a $C_1 = 0$. Kombinací vztahů (2.15) a (2.14) pak dostáváme

$$\left. \frac{d^2\phi(\sigma)}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} = 2C_2, \quad (2.16)$$

z čehož plyne, že

$$C_2 = -\frac{\alpha}{2}. \quad (2.17)$$

Tím jsme stanovili tři počáteční podmínky pro diferenciální rovnici (2.12), čímž je řešení trikonfluentní Heunovy diferenciální rovnice (2.6) kompletní. Nalezená funkce se nazývá trikonfluentní Heunova funkce (viz např. [5]), a v tomto textu ji budeme značit $\text{THF}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma)$, kde je explicitně vyjádřeno, že se jedná o funkci tří obecně komplexních parametrů (α, β, γ) a nezávislé proměnné σ . Zapišme pro shrnutí důležité odvozené vztahy:

$$\text{THF}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\sigma^n; \quad |\sigma| < 1, \quad (2.18)$$

kde koeficienty řady počítáme dle následujícího rekurentního vztahu:

$$C_n = \frac{\gamma(n-1) - \alpha C_{n-2} - (\beta + 6 - 3n)C_{n-3}}{n(n-1)}, \quad \text{pro } n \geq 3, \quad (2.19)$$

přičemž

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\alpha}{2}. \quad (2.20)$$

Výraz (2.19) vznikl pouze vyjádřením C_{n+3} ze vztahu (2.12) a následném přeindexování $n \rightarrow n - 3$. Dále platí

$$\text{THF}(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1, \quad \text{THF}'(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 0, \quad (2.21)$$

kde čárkou značíme derivaci podle proměnné σ . K definičnímu vztahu (2.18) je nutné zdůraznit, že jeho oblastí konvergence je pouze množina

$$|\sigma| < 1. \quad (2.22)$$

Pro vyjádření řešení mimo tento interval je nutné použít jiné formy řešení.

2.3 Kompletní řešení trikonfluentní Heunovy rovnice

Řešení diferenciální rovnice druhého řádu nabývá vždy tvaru lineární kombinace dvou lineárně nezávislých funkcí. V případě trikonfluentní Heunovy diferenciální rovnice (2.6) lze obecné řešení zapsat ve tvaru (viz např. [5]):

$$\phi(\sigma) = A_1 \text{THF}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) + B_1 \exp(\sigma^3 + \gamma\sigma) \text{THF}(\alpha, -\beta, \gamma; -\sigma), \quad (2.23)$$

nebo v případě alternativní varianty trikonfluentní Heunovy diferenciální rovnice (2.8) jako

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) = A_1 \exp\left(-\frac{\sigma^3 + \gamma\sigma}{2}\right) \text{THF}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) + \\ + B_1 \exp\left(\frac{\sigma^3 + \gamma\sigma}{2}\right) \text{THF}(\alpha, -\beta, \gamma; -\sigma), \end{aligned} \quad (2.24)$$

Vzhledem k tomu, že platí následující identita (viz např. [5]):

$$\text{THF}(\alpha, \beta, 0; \sigma) = \exp(\sigma^3) \text{THF}(\alpha, -\beta, 0; -\sigma), \quad (2.25)$$

požadujeme

$$\gamma \neq 0, \quad (2.26)$$

aby řešení (2.23) skutečně byla lineárně nezávislá.

2.4 Polynomiální tvar řešení Trikonfluentní Heunovy rovnice

Jelikož jsou trikonfluentní Heunovy funkce (2.18) vyjádřeny pomocí nekonečné řady, jejíž koeficienty jsou dané rekurentním vztahem (2.19), lze tedy jen stěží předpovídat, jak bude funkce vypadat na základě hodnot parametrů α , β a γ . Dá se však ukázat (viz např. [5], [7]), že platí-li současně následující dvě podmínky:

1. Koeficient β je kladným násobkem čísla 3:

$$\beta = 3(N + 1), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

2. Pro determinant matice

$$\mathbf{M}_{N+1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma & 2 \cdot 1 & 0 & \dots & 0 \\ 3N & \alpha & -2\gamma & 3 \cdot 2 & \dots & 0 \\ 0 & 3(N-1) & \alpha & -3\gamma & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3(N-2) & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & \alpha & -(N-1)\gamma & N(N-1) \\ & & & & 3 \cdot 2 & \alpha & -N\gamma \\ 0 & & & & 0 & 3 \cdot 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

platí:

$$\det(\mathbf{M}_{N+1}) = 0, \quad (2.29)$$

potom řešení trikonfluentní Heunovy rovnice nabývá tvaru

$$\phi_1(\sigma) = P_N(\sigma), \quad (2.30)$$

kde $P_N(\sigma)$ je polynom N -tého stupně, jehož koeficienty p_n ($n = 0, 1, \dots, N$) jsou určeny následující soustavou lineárních rovnic:

$$\mathbf{M}_{N+1} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = 0. \quad (2.31)$$

Toto polynomiální řešení však není samo o sobě trikonfluentní Heunova funkce, nemusí tedy kupříkladu splňovat počáteční podmínky (2.21). Druhé lineárně nezávislé řešení lze dopočítat pomocí metody wronskiánu (viz např. [4]):

$$\phi_2(\sigma) = \phi_1(\sigma) \int^{\sigma} \frac{\exp \left[\int^w (3v^2 + \gamma) dv \right]}{\phi_1^2(w)} dw. \quad (2.32)$$

Kapitola 3

Loveho vlny v nehomogenní izotropní povrchové vrstvě

V této kapitole se budeme věnovat popisu Loveho vln v nehomogenní izotropní povrchové vrstvě. Na začátku zadefinujeme materiálovou funkci, s jejíž pomocí dále převedeme modelovou rovnici (1.14) do tvaru trikonfluentní Heunovy diferenciální rovnice, ke které následně nalezneme řešení v podobě trikonfluentních Heunových funkcí a odvodíme vztahy pro výpočet příslušných disperzních charakteristik. V následující kapitole pak vše demonstrujeme na vybraných příkladech.

3.1 Materiálová funkce

Na počátku je nutné vhodným způsobem popsat zmíněnou nehomogenní vrstvu. K tomuto účelu zavedeme materiálovou funkci $\eta(s)$ (viz např. [8]), pro kterou budeme uvažovat následující podmínku:

$$\eta(0) = 1, \quad (3.1)$$

přičemž průběhy hustoty a modulu pružnosti v torzi v povrchové vrstvě budou dány vztahy

$$\begin{aligned} \rho_1(s) &= \rho_0 \eta(s), \\ \mu_1(s) &= \mu_0 \eta(s), \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde ρ_0 a μ_0 jsou hodnoty příslušných veličin na povrchu ($s = 0$). Takto definované prostředí se nazývá funkčně odstupňovaný materiál (Functionally

Graded Material) a teoreticky jej lze syntetizovat seskupením tenkých vrstev tvořených kombinací dvou různých materiálů v poměru funkčně závislém na prostorové souřadnici (viz např. [8]). S ohledem na vztahy (3.2) potom dle výrazu (1.8) bude pro objemovou rychlost SH vln v povrchové vrstvě platit

$$c_1(z) = \sqrt{\frac{\mu_1(s)}{\rho_1(s)}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}} = c_1 = \text{konst.} \quad (3.3)$$

Díky této skutečnosti pak bude i

$$K_1 = K \frac{c_f}{c_1} = \text{konst.} \quad (3.4)$$

Toto je velmi zásadní předpoklad, díky němuž budeme dále schopni transformovat příslušnou modelovou rovnici pro Loveho vlny (1.14) do tvaru trikonfluentní Heunovy rovnice. V analogii s homogenním případem, viz vztah (1.43), rovnou uvažujeme

$$c_2 > c_1. \quad (3.5)$$

3.2 Přesná analytická řešení modelové rovnice pro zvolenou třídu materiálových funkcí

S využitím materiálové funkce $\eta(s)$ a vztahu (1.31) můžeme za předpokladu nehomogenní povrchové vrstvy přepsat modelovou rovnici (1.14) do tvaru

$$\frac{d^2 U_1(s)}{ds^2} + \frac{1}{\eta(s)} \frac{d\eta(s)}{ds} \frac{dU_1(s)}{ds} + \varkappa^2 U_1(s) = 0. \quad (3.6)$$

Pro oblast připadající na substrát platí (stejně jako v již řešeném homogenním případě, viz podkapitola 1.3), že

$$\frac{d^2 U_2(s)}{ds^2} + [K_2^2 - K_x^2] U_2(s) = 0. \quad (3.7)$$

Rovnici (3.6) lze převést do tvaru stacionární Schrödingerovy rovnice (viz např. [6]):

$$\frac{d^2 \psi(s)}{ds^2} + [\mathcal{G}(s) + \varkappa^2] \psi(s) = 0, \quad (3.8)$$

Za tímto účelem využijeme následující substitute:

$$\psi(s) = \Phi(s) U_1(s), \quad (3.9)$$

jejímž dosazením do rovnice (3.8), dospějeme k rovnosti

$$\frac{d^2 U_1(s)}{ds^2} + \frac{2}{\varphi(s)} \frac{d\varphi(s)}{ds} \frac{dU_1(s)}{ds} + [\mathcal{G}(s) + \varkappa^2] U_1(s) = 0. \quad (3.10)$$

Porovnáním s rovnicí (3.6) vidíme, že musí být splněny následující podmínky:

$$\varphi(s) = \sqrt{\eta(s)}, \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2} + \mathcal{G}(s)\varphi(s) = 0. \quad (3.12)$$

Odtud vidíme, že materiálová funkce $\eta(s)$ je určena rovnicí (3.12), přičemž funkce $\mathcal{G}(s)$, kterou nazýváme generující funkce (viz např. [6]), bude v našem případě představovat kvartický generující polynom, pro nějž lze rovnici (3.12) převést právě do tvaru trikonfluentní Heunovy diferenciální rovnice.

Zaměřme se na nalezení řešení rovnice (3.8). Nejprve rozepíšme $\mathcal{G}(s)$ jako

$$\mathcal{G}(s) = a_0 + a_1(s - s_0) + 2a_2(s - s_0)^2 + a_3(s - s_0)^3 - a_4(s - s_0)^4, \quad \text{kde } a_4 \neq 0. \quad (3.13)$$

Dosazením polynomu (3.13) do rovnice (3.8) dostáváme

$$\frac{d^2\psi(s)}{ds^2} + \left[\varkappa^2 + a_0 + a_1(s - s_0) + 2a_2(s - s_0)^2 + a_3(s - s_0)^3 + a_4(s - s_0)^4 \right] \psi(s) = 0, \quad (3.14)$$

Použitím substituce

$$\psi(s) = \exp\left(\frac{1}{2} \int^s H(\xi) d\xi\right) \phi(s) \quad (3.15)$$

přejde rovnice (3.14) do tvaru

$$\frac{d^2\phi(s)}{ds^2} + H(s) \frac{d\phi(s)}{ds} + \left[\frac{H^2(s)}{4} + \frac{1}{2} \frac{dH(s)}{ds} + \left(\varkappa^2 + a_0 + a_1(s - s_0) + 2a_2(s - s_0)^2 + a_3(s - s_0)^3 - a_4(s - s_0)^4 \right) \right] \phi(s) = 0, \quad (3.16)$$

ke které budeme hledat řešení ve formě trikonfluentních Heunových funkcí. Trikonfluentní Heunova diferenciální rovnice (2.6) má u první derivace koeficient ve tvaru polynomu druhého stupně. Vyjádřeme tedy funkci $H(s)$ jako

$$H(s) = h_0 + h_1(s - s_0) + h_2(s - s_0)^2. \quad (3.17)$$

Zároveň koeficient u nederivovaného členu rovnice (2.6) má být polynomem pouze prvního stupně. Splnění tohoto požadavku vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} h_2^2 - 4a_4 &= 0, \\ 2h_1h_2 + 4a_3 &= 0, \\ 2h_0h_2 + h_1^2 + 8a_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

která má řešení

$$h_0 = \frac{8a_2a_4 + a_3^2}{4a_4^{\frac{3}{2}}}, \quad h_1 = \frac{a_3}{\sqrt{a_4}}, \quad h_2 = -2\sqrt{a_4}. \quad (3.19)$$

Doplněním na čtverec můžeme pro funkci $H(s)$ psát

$$H(s) = -2\sqrt{a_4} \left[(s - s_0) - \frac{a_3}{4a_4} \right]^2 + \frac{16a_2a_4 + 3a_3^2}{8a_4^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.20)$$

Rovnice (3.16) tímto přejde do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi(s)}{ds^2} - \left\{ 2\sqrt{a_4} \left[(s - s_0) - \frac{a_3}{4a_4} \right]^2 - \frac{16a_2a_4 + 3a_3^2}{8a_4^{\frac{3}{2}}} \right\} \frac{d\phi(s)}{ds} + \\ + \left[\frac{8a_1a_4^2 + 8a_2a_3a_4 + a_3^3 - 16a_4^{\frac{5}{2}}(s - s_0) +}{8a_4^2} \right. \\ \left. + \frac{64(\varkappa^2 + a_0)a_4^3 + 64a_2^2a_4^2 + 16a_2a_3^2a_4 + 32a_3a_4^{\frac{5}{2}} + a_3^4}{64a_4^3} \right] \phi(s) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zavedením nové proměnné (viz např. [6]):

$$\sigma \equiv Q \left[(s - s_0) - \frac{a_3}{4a_4} \right], \quad (3.22)$$

kde

$$Q = \left(\frac{2\sqrt{a_4}}{3} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.23)$$

dostáváme výsledný tvar rovnice (3.21) přesně ve tvaru kanonické trikonfluentní Heunovy rovnice (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi(\sigma)}{d\sigma^2} - \left(3\sigma^2 - \frac{16a_2a_4 + 3a_3^2}{8Qa_4^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{d\phi(\sigma)}{d\sigma} + \\ + \left[\frac{64(\varkappa^2 + a_0)a_4^3 + 64a_2^2a_4^2 + 32a_2a_3^2a_4 + 16a_1a_3a_4^2 + 3a_3^4}{64Q^2a_4^3} + \right. \\ \left. + \frac{8a_1a_4^2 + 8a_2a_3a_4 + a_3^3 - 16a_4^{\frac{5}{2}}\sigma}{8Q^3a_4^2} \right] \phi(\sigma) = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

přičemž jsme využili pravidla pro derivaci složené funkce, tedy

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = Q \frac{d\phi}{d\sigma}. \quad (3.25)$$

Porovnáním rovnice (3.24) s rovnicí (2.6) dostaneme vztahy pro vnitřní parametry trikonfluentních Heunových funkcí

$$\alpha(\varkappa) = \frac{64(\varkappa^2 + a_0)a_4^3 + 64a_2^2a_4^2 + 32a_2a_3^2a_4 + 16a_1a_3a_4^2 + 3a_3^4}{64Q^2a_4^3},$$

$$\beta = \frac{24a_4(a_1a_4 + a_2a_3) + 3a_3^3}{16a_4^{\frac{5}{2}}}, \quad \gamma = -\frac{16a_2a_4 + 3a_3^2}{8Qa_4^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.26)$$

Podle řešení (2.23) můžeme pro funkci $\phi(\sigma)$ psát

$$\phi(\sigma) = A_1 \text{THF}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) + B_2 \exp(\sigma^2 + \gamma\sigma) \text{THF}(\alpha, -\beta, \gamma; -\sigma), \quad (3.27)$$

kde A_1 a B_1 jsou integrační konstanty. Dle podmínky (2.22) je však toto řešení konvergentní pouze v intervalu

$$|\sigma| = \left| Q \left[(s - s_0) - \frac{a_3}{4a_4} \right] \right| < 1, \quad (3.28)$$

mimo tento interval je nutné použít jiné formy řešení, jak již bylo zmíněno výše (viz podkapitola 2.2). Dosazením řešení (3.27) do vztahu (3.15) dostaneme obecné řešení rovnice (3.8):

$$\psi(s) = A_1 \exp \left[-\frac{Q^3 \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right)^3 + \gamma Q \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right)}{2} \right] \times$$

$$\times \text{THF} \left[\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; Q \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right) \right] +$$

$$+ B_1 \exp \left[\frac{Q^3 \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right)^3 + \gamma Q \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right)}{2} \right] \times$$

$$\times \text{THF} \left[\alpha(\varkappa), -\beta, \gamma; -Q \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right) \right]. \quad (3.29)$$

Řešení původní modelové rovnice (3.6) získáme kombinací vztahů (3.9) a (3.29):

$$U_1(s) = A_1 \frac{\exp \left[-\frac{Q^3}{2} \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right)^3 - \gamma \frac{Q}{2} \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right) \right]}{\sqrt{\eta(s)}} \times$$

$$\times \text{THF} \left[\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; Q \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right) \right] +$$

$$+ B_1 \frac{\exp \left[\frac{Q^3}{2} \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right)^3 + \gamma \frac{Q}{2} \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right) \right]}{\sqrt{\eta(s)}} \times$$

$$\times \text{THF} \left[\alpha(\varkappa), -\beta, \gamma; -Q \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right) \right] =$$

$$= A_1 \Psi_1[\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; s] + B_1 \Psi_2[\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; s]. \quad (3.30)$$

Tím jsme našli řešení pro povrchovou vrstvu. V oblasti substrátu bude s ohledem na vztah (1.33) platit

$$U_2(s) = A_2 \exp\left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2 s}\right), \quad (3.31)$$

viz podkapitola 1.3.

3.3 Nalezení materiálové funkce pro předem určený generující polynom

Jak jsme ukázali na začátku této kapitoly, materiálová funkce je určena rovnicí (3.12) a vztahem (3.11), které zde pro účely této podkapitoly zopakujeme:

$$\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2} + \mathcal{G}(s)\varphi(s) = 0, \quad \varphi(s) = \sqrt{\eta(s)}. \quad (3.32)$$

Poznamenejme, že tato rovnice nabývá úplně stejného tvaru jako rovnice (3.8) pro $\varkappa = 0$, pročež bez dalšího počítání můžeme rovnou s využitím tvaru řešení (3.29) psát, že

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= C_1 \exp\left[-\frac{Q^3}{2}\left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0\right)^3 - \gamma\frac{Q}{2}\left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0\right)\right] \times \\ &\quad \times \text{THF}\left[\alpha(0), \beta, \gamma; Q\left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0\right)\right] + \\ &\quad + C_2 \exp\left[\frac{Q^3}{2}\left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0\right)^3 - \gamma\frac{Q}{2}\left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0\right)\right] \times \\ &\quad \times \text{THF}\left[\alpha(0), -\beta, \gamma; -Q\left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0\right)\right] = \\ &= C_1\Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, s_0; s) + C_2\Phi_2(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, s_0; s), \end{aligned} \quad (3.33)$$

kde materiálová funkce je s ohledem na vztah (3.11) dána následovně:

$$\eta(s) = [C_1\Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, s_0; s) + C_2\Phi_2(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, s_0; s)]^2. \quad (3.34)$$

Záměrně jsme volili jiné značení pro integrační konstanty než v případě řešení (3.30). V některých situacích může být výhodné položit $a_3 = 0$, čímž se zmenší počet vstupních parametrů na pětiici $\{a_0; a_1; a_2; a_4; s_0\}$ a dvě integrační konstanty $C_{1,2}$. Současně pak s ohledem na podmínku (2.26) musí platit, že

$$a_2 \neq 0. \quad (3.35)$$

Z hlediska výpočetní náročnosti je vhodné mít hodnoty σ reálné, což vyžaduje $a_4 > 0$. Na základě zmíněných zjednodušení se vztahy (3.26) redukují na

$$\alpha(\varkappa) = \frac{a_2^2 + (a_0 + \varkappa^2)a_4}{a_4Q^2}, \quad \beta = \frac{3a_1}{2\sqrt{a_4}}, \quad \gamma = -\frac{3Q^2a_2}{a_4}. \quad (3.36)$$

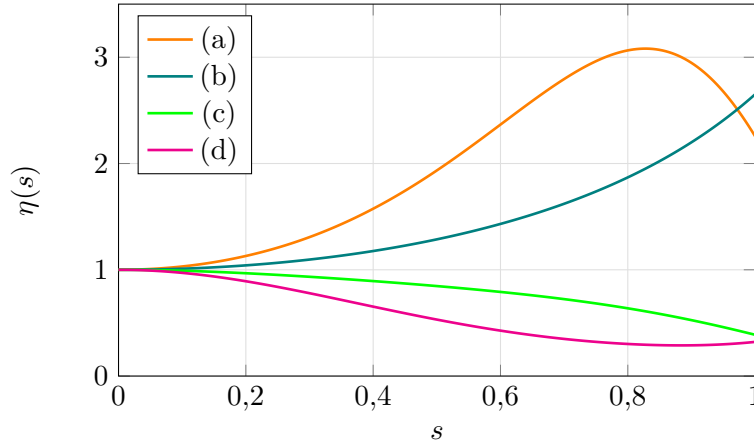
Pro materiálovou funkci můžeme v tomto případě psát

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= C_1 \exp \left[-\frac{3}{2} Q^3 s \left(\frac{s^2}{3} - s s_0 + s_0^2 - \frac{a_2}{a_4} \right) \right] \times \\ &\quad \times \text{THF} \left(\frac{a_2^2 + a_0 a_4}{a_4 Q^2}, \frac{3 a_1}{2 \sqrt{a_4}}, -\frac{3 Q^2 a_2}{a_4}; Q(s - s_0) \right) + \\ &\quad + C_2 \exp \left[\frac{3}{2} Q^3 s \left(\frac{s^2}{3} - s s_0 + s_0^2 - \frac{a_2}{a_4} \right) \right] \times \\ &\quad \times \text{THF} \left(\frac{a_2^2 + a_0 a_4}{a_4 Q^2}, -\frac{3 a_1}{2 \sqrt{a_4}}, -\frac{3 Q^2 a_2}{a_4}; -Q(s - s_0) \right) = \\ &= C_1 \Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_4, s_0; s) + C_2 \Phi_2(a_0, a_1, a_2, a_4, s_0; s), \quad (3.37) \end{aligned}$$

kde

$$\eta(s) = [C_1 \Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_4, s_0; s) + C_2 \Phi_2(a_0, a_1, a_2, a_4, s_0; s)]^2. \quad (3.38)$$

Příklady různých profilů materiálové funkce vyjádřené pomocí vztahu (3.38) jsou zachyceny na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Profily materiálové funkce pro vybrané kombinace parametrů $\{a_0; a_1; a_2; a_4; C_1; C_2; s_0\}$.

Číselné hodnoty parametrů odpovídajících těmto profilům jsou

$$\begin{aligned} (a): & \{-3; -3; 6; -10; 0,5; 0,5; 0\}, \\ (b): & \{-1; -0,5; 0,5; 2; 0,5; 0,5; 0\}, \\ (c): & \{1; -3; 1,5; -5; 0,5; 0,5; 0\}, \\ (d): & \{3; -2, -5; 1; 0,5; 0,5; 0\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Další varianta vyjádření materiálové funkce spočívá ve využití poznatků z podkapitoly 2.4 o polynomiálním tvaru řešení trikonfluentní Heunovy rovnice.

Kombinací vztahů (2.30), (3.11) a (3.15) lze materiálovou funkci zapsat ve tvaru

$$\eta(s) = C_1 \exp^2 \left[-\frac{Q^3}{2} \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right)^3 - \gamma \frac{Q}{2} \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right) \right] \times \\ \times P_N^2 \left[Q \left(s - \frac{a_3}{4a_4} - s_0 \right) \right], \quad (3.40)$$

kde pro polynom $P_N(\sigma)$ můžeme psát (viz např. [6], [7]):

■ $N = 0$ ($\beta = 3$), $\det(M_1) = \alpha = 0$:

$$P_0(\sigma) = p_0 = \text{konst.}; \quad (3.41)$$

■ $N = 1$ ($\beta = 6$), $\det(M_2) = \alpha^2 + 3\gamma = 0$:

$$P_1(\sigma) = \sigma - \frac{\alpha(0)}{3}; \quad (3.42)$$

■ $N = 2$ ($\beta = 9$), $\det(M_3) = \alpha^3 + 12\alpha\gamma + 36 = 0$:

$$P_2(\sigma) = \sigma^2 - \frac{\alpha(0)}{3}\sigma + \frac{\alpha^2(0)}{36} - \frac{1}{\alpha(0)}; \quad (3.43)$$

■ $N = 3$ ($\beta = 12$), $\det(M_4) = \alpha^4 + 30\alpha^2\gamma + 216\alpha + 81\gamma^2 = 0$:

$$P_3(\sigma) = \sigma^3 - \frac{\alpha(0)}{3}\sigma^2 + \left[\frac{\alpha^2(0)}{18} + \frac{\gamma}{2} \right] \sigma - \frac{\alpha^3(0)}{162} - \frac{7}{54}\alpha(0)\gamma - \frac{2}{3}; \quad (3.44)$$

■ $N = 4$ ($\beta = 15$), $\det(M_5) = \alpha^5 + 60\alpha^3\gamma + 756\alpha^2 + 576\alpha\gamma^2 + 5184\gamma = 0$:

$$\sigma^4 - \frac{\alpha(0)}{3}\sigma^3 + \left[\frac{\alpha^2(0)}{18} + \frac{2}{3}\gamma \right] \sigma^2 - \left[\frac{\alpha^3(0)}{162} - \frac{5}{27}\alpha(0)\gamma - \frac{4}{3} \right] \sigma + \\ + \frac{\alpha^4(0)}{1944} + \frac{2}{81}\alpha^2(0)\gamma + \frac{5}{18}\alpha(0) + \frac{\gamma^2}{9}. \quad (3.45)$$

Za zjednodušujícího předpokladu $a_3 = 0$ můžeme pro materiálovou funkci s ohledem na vztah (3.40) a s využitím prvních dvou polynomiálních řešení psát:

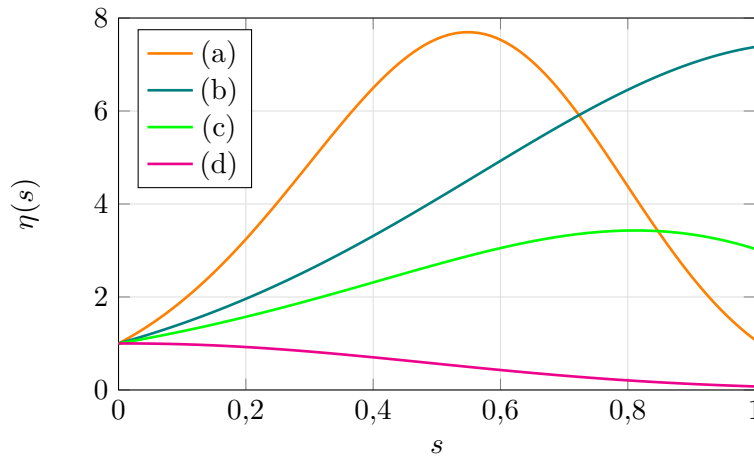
■ $N = 0$ ($\beta = 3$):

$$\eta(s) = C_1 \exp^2 \left[-\frac{3}{2} Q^3 s \left(\frac{s^2}{3} - s s_0 + s_0^2 - \frac{a_2}{a_4} \right) \right], \quad (3.46)$$

- $N = 1$ ($\beta = 6$):

$$\eta(s) = C_1 \exp^2 \left[-\frac{3}{2} Q^3 s \left(\frac{s^2}{3} - s s_0 + s_0^2 - \frac{a_2}{a_4} \right) \right] \left[Q(s - s_0) - \frac{a_2^2 + a_0 a_4}{3 a_4 Q^2} \right]^2. \quad (3.47)$$

Příklady profilů materiálových funkcí vyjádřené pomocí vztahu (3.47) jsou zachyceny na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Profily materiálové funkce pro vybrané kombinace parametrů $\{a_0; a_1; a_2; a_4; C_1; s_0\}$.

Parametry generující příslušné profily nabývají číselných hodnot

$$\begin{aligned} (a): & \{-5; 25; 4,8404337400; 39,0625000000; 3,1166156680; 0\}, \\ (b): & \{-1; 3; 0,2117369652; 0,5625000000; 4,2170864670; 0\}, \\ (c): & \{-1; 3; 1,3710522750; 0,5625000000; 0,6512611583; 0\}, \\ (d): & \{-1; 3; 5; 0,2195199986; 0,7656250000; 0,6075430959; -1\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.4 Aproximace generujícího polynomu

Doposud jsme vždy předpokládali, že předem známe tvar generujícího polynomu $\mathcal{G}(s)$, neboli známe sadu parametrů $\{s_0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$, ze kterých lze podle rovnice (3.12) dopočítat materiálovou funkci. Nicméně v řadě případů je situace opačná, tedy požadujeme nějaký konkrétní profil materiálové funkce a k němu hledáme příslušný generující polynom. Tato úloha je již z principu

poměrně komplikovaná a je možné ji řešit mnoha různými způsoby. Uvedeme zde metodu, která poskytuje dobré výsledky pro monotónní, nebo jen relativně mírně proměnné profily materiálové funkce $\eta(s)$. Předpokládejme, že máme analytickou funkci $\tilde{\eta}(s)$, kterou chceme aproximovat. Ze vztahu (3.12) můžeme vyjádřit

$$\tilde{\mathcal{G}}(s) = -\frac{1}{\tilde{\varphi}(s)} \frac{d^2 \tilde{\varphi}(s)}{ds^2}, \quad (3.49)$$

kde $\tilde{\varphi}(s) = \sqrt{\tilde{\eta}(s)}$. Uvažujme aproximační generující polynom ve tvaru

$$\mathcal{G}_{\text{approx}}(s) = a_0 + a_1 s + 2a_2 s^2 + a_3 s^3 - a_4 s^4. \quad (3.50)$$

Koeficienty a_i budeme hledat takovým způsobem, aby platilo

$$\mathcal{G}_{\text{approx}}(s) \approx \tilde{\mathcal{G}}(s) \quad (3.51)$$

na intervalu $s \in \langle 0, 1 \rangle$. Rozdělíme-li tento interval na pět bodů

$$0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5 \leq 1, \quad (3.52)$$

můžeme sestavit soustavu rovnic

$$a_0 + a_1 b_n + 2a_2 b_n^2 + a_3 b_n^3 - a_4 b_n^4 = \tilde{\mathcal{G}}(b_n), \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}. \quad (3.53)$$

Její řešení získáme sadu hledaných parametrů. Integrační konstanty $C_{1,2}$ poté dopočítáme z následujících dvou rovnic:

$$\begin{aligned} C_1 \Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; 0) + C_2 \Phi_2(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; 0) &= 1, \\ C_1 \Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; 1) + C_2 \Phi_2(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; 1) &= \sqrt{\eta(1)}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Výslednou aproximovanou materiálovou funkci pak s ohledem na vztah (3.34) získáme jako

$$\eta_{\text{approx}}(s) = [C_1 \Phi_1(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; s) + C_2 \Phi_2(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4; s)]^2. \quad (3.55)$$

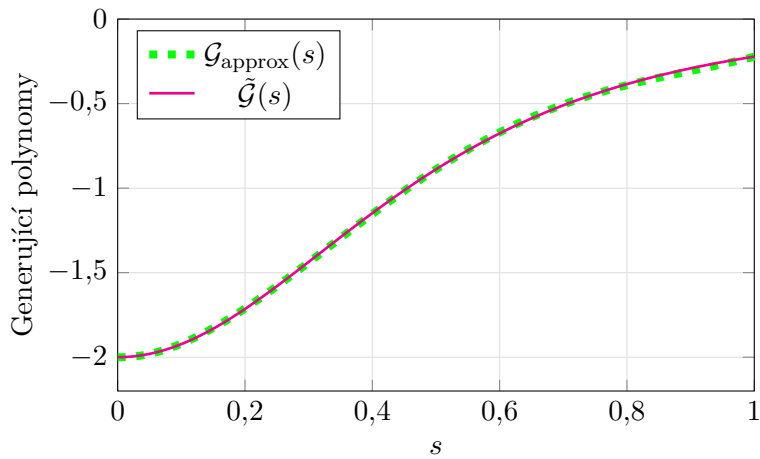
Demonstrujme si tento postup na dvou zvolených příkladech. Nejprve se zaměříme na aproximaci kvadratické materiálové funkce

$$\tilde{\eta}(s) = 1 + 2s^2. \quad (3.56)$$

Řešením soustavy (3.53) dospějeme ke koeficientům

$$\begin{aligned} a_0 &\approx -2,0000000000; & a_1 &\approx -0,09056346753; & a_2 &\approx 5,12355648900; \\ a_3 &\approx -14,10739466000; & a_4 &\approx -5,72862292500. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Generující funkce $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ spolu s aproximačním generujícím polynomem $\mathcal{G}_{\text{approx}}(s)$ jsou zachyceny na obrázku 3.3.



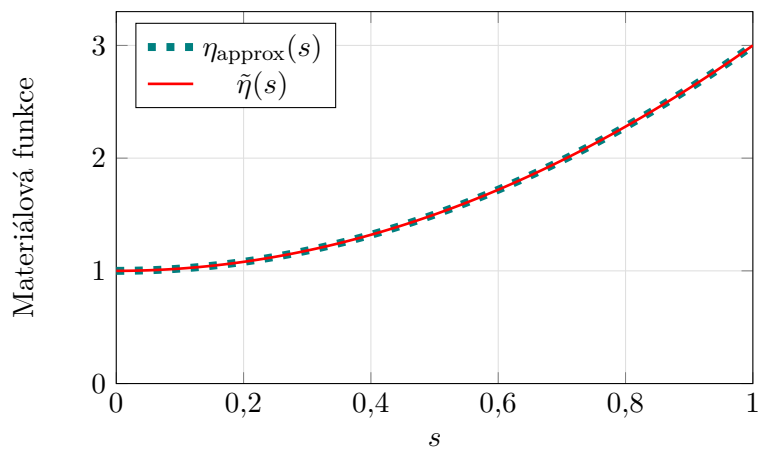
Obrázek 3.3: Aproximace generujícího polynomu.

Oba průběhy jsou na uvažovaném intervalu téměř totožné.

Ze soustavy rovnic (3.54) dostaneme hodnoty integračních konstant:

$$\begin{aligned} C_1 &\approx 0,6629246114 - j0,7991422089 ; \\ C_2 &\approx 0,6629246102 + j0,7991422086 . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Průběhy původní materiálové funkce $\tilde{\eta}(s)$ a příslušné aproximace $\eta_{\text{approx}}(s)$ jsou zachyceny na obrázku 3.4.



Obrázek 3.4: Aproximovaná materiálová funkce.

V tomto případě je nalezená aproximace materiálové funkce graficky téměř nerozlišitelná od původního profilu.

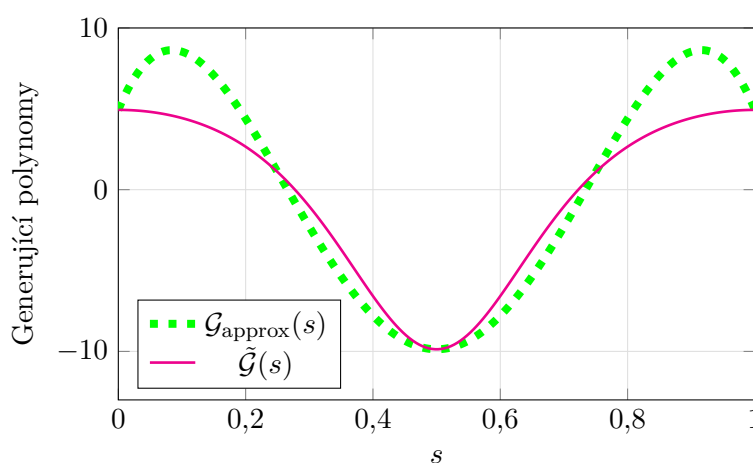
Druhou aproximovanou materiálovou funkcí bude

$$\tilde{\eta}(s) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(\pi s). \quad (3.59)$$

Ze soustavy (3.53) určíme koeficienty:

$$\begin{aligned} a_0 &\approx 4,9348022020; & a_1 &\approx 95,7717168000; & a_2 &\approx -357,8645448000; \\ a_3 &\approx 1239,9147460000; & a_4 &\approx 619,9573729000. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Příslušná generující funkce a aproximační generující polynom jsou vykresleny na obrázku 3.5.



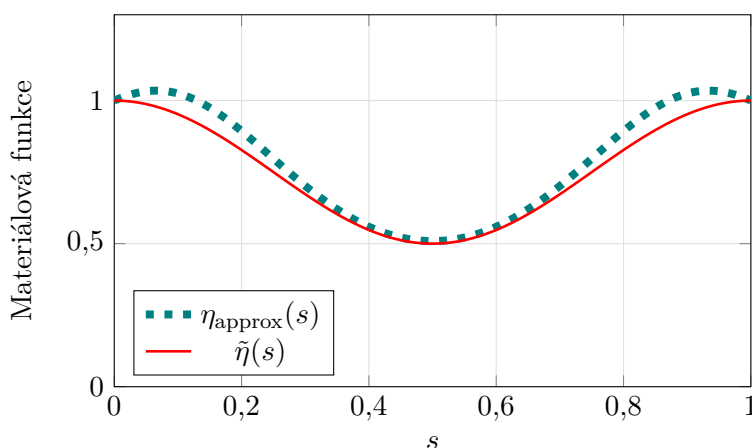
Obrázek 3.5: Aproximace generujícího polynomu.

V tomto případě se již $\tilde{\mathcal{G}}(s)$ a $\mathcal{G}_{\text{approx}}(s)$ oproti předchozímu případu značně odlišují, aproximace by byla lepší při volbě nižší hodnoty koeficientu před funkcí sinus, např. $1/4$.

Řešením soustavy (3.54) dospějeme k následujícím hodnotám integračních konstant:

$$C_1 \approx 0,3566888323; \quad C_2 \approx 0,3566888304. \quad (3.61)$$

Výsledné průběhy původní a aproximované materiálové funkce nalezneme na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Aproximovaná materiálová funkce 2.

Dle očekávání se i tyto dvě funkce vzájemně odlišují, nicméně stále se jedná o relativně dobrou aproximaci.

Jak již bylo zmíněno výše, popsaná metoda nám poskytuje velmi dobré aproximace pro monotónní nebo mírně zvlněné průběhy materiálové funkce, předně je však velmi jednoduchá a výpočetně nenáročná. V obou uvedených příkladech byl uvažovaný interval rozdělen rovnoměrně. K dosažení lepších výsledků by bylo za potření využití vhodné optimalizační metody k nalezení dělicích bodů (3.52).

3.5 Disperzní relace

Odvození disperzní relace provedeme analogicky jako v homogenním případě, viz podkapitola 1.3. Podmínky na rozhraní zůstávají stále stejné, tedy nulové tečné napětí v bodě $s = 0$ (volný povrch):

$$\left. \frac{dU_1(s)}{ds} \right|_{s=0} = 0, \quad (3.62)$$

viz vztah (1.23), a dále spojitost tečného napětí a vektoru posunutí v bodě $s = 1$:

$$U_1(1) = U_2(1), \quad (3.63)$$

$$\mu_0 \eta(1) \left. \frac{dU_1(s)}{ds} \right|_{s=1} = \mu_2 \left. \frac{dU_2(s)}{ds} \right|_{s=1}, \quad (3.64)$$

viz rovnosti (1.24) a (1.25). Požadavek na nulovost řešení v nekonečnu je automaticky splněn díky tvaru řešení v substrátu (3.31). Kombinací rovnic (3.62), (3.63) a (3.64) dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} & A_1 \Psi_1' [\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; 0] + B_1 \Psi_2' [\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; 0] = 0, \\ & A_1 \Psi_1 [\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; 1] + B_1 \Psi_2 [\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; 1] = A_2 \exp \left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2} \right), \\ & A_1 \mu_0 \eta(1) \Psi_1' [\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; 1] + B_1 \mu_0 \eta(1) \Psi_2' [\alpha(\varkappa), \beta, \gamma; 1] = \\ & = -\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2} A_2 \mu_2 \exp \left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2} \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Abychom dospěli k netriviálnímu řešení, budeme požadovat příslušný determinant roven nule. Tím dojdeme k rovnosti

$$F(\varkappa) = -\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}, \quad (3.66)$$

kde

$$F(\varkappa) \equiv \eta(1) \frac{\mu_0 \Psi_1'(\varkappa; 0) \Psi_2'(\varkappa; 1) - \Psi_1'(\varkappa; 1) \Psi_2'(\varkappa; 0)}{\mu_2 \Psi_1'(\varkappa; 0) \Psi_2(\varkappa; 1) - \Psi_1(\varkappa; 1) \Psi_2'(\varkappa; 0)}, \quad (3.67)$$

přičemž pro jednoduchost zápisu jsme explicitně nevypisovali závislosti Ψ_i na vnitřních parametrech α , β a γ . Výslednou disperzní relaci lze vyjádřit ve tvaru

$$K_x(\varkappa) = \sqrt{\frac{c_2^2 F^2(\varkappa) + c_1^2 \varkappa^2}{c_2^2 - c_1^2}}, \quad (3.68)$$

$$c_f[K_x(\varkappa)] = c_1 \sqrt{1 + \frac{\varkappa^2}{K_x^2(\varkappa)}}. \quad (3.69)$$

Tyto vztahy jsou v principu stejné jako v homogenním případě, odlišují se pouze jiným předpisem pro funkci $F(\varkappa)$, nicméně stále lze numericky nebo grafickou metodou najít spojité intervaly \varkappa , pro které tato funkce nabývá záporných hodnot. Z nich pak můžeme dopočítat disperzní charakteristiky pro příslušné módy.

Budeme-li chtít určit průběh kompletního řešení $U(s)$, jednu z integračních konstant zvolíme libovolně a další dvě dopočítáme ze soustavy (3.65), přičemž většinou hledáme takovou kombinaci, kdy

$$U_1(0) = 1. \quad (3.70)$$

3.6 Aproximace řešení pomocí metody WKB

Abychom mohli porovnat řešení vyjádřená pomocí trikonfluentních Heunových funkcí s nějakou standardně používanou metodou, zaměříme se v této části

na takzvanou WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin, viz např. [9]) metodu, což je metoda řešení diferenciálních rovnic typu Websterovy rovnice poskytující přibližná analytická řešení pro vyšší hodnoty vlnového čísla. Vyjdeme z původní bezrozměrné modelové rovnice (3.6) ve tvaru

$$\frac{d^2 U_1(s)}{ds^2} + \frac{1}{\eta(s)} \frac{d\eta(s)}{ds} \frac{dU_1(s)}{ds} + K_x^2 \left(\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1 \right) U_1(s) = 0. \quad (3.71)$$

Řešení Helmholtzovy rovnice (neboli modelové rovnice bez prostředního členu na levé straně) lze vyjádřit jako lineární kombinaci komplexních exponenciál

$$\tilde{f}(s) = \exp \left(\pm j K_x \sqrt{\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1} s \right). \quad (3.72)$$

Hledejme tedy řešení podobného tvaru, kde však vlnové číslo nebude konstantní, pročež můžeme psát (viz např. [9]):

$$f(s) = \exp \left(\pm j \int^s \kappa(\xi) d\xi \right). \quad (3.73)$$

Dosazením vztahu (3.73) do rovnosti (3.71) dostaneme novou rovnici pro $\kappa(s)$:

$$\pm j \kappa'(s) - \kappa^2(s) \pm j \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} \kappa(s) + K_x^2 \left(\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1 \right) = 0. \quad (3.74)$$

Předpokládejme, že $\kappa(s)$ je dáno rozvojem (viz např. [9]):

$$\kappa(s) = K_x \kappa_0(s) + \kappa_1(s) + \frac{1}{K_x} \kappa_2(s) + \frac{1}{K_x^2} \kappa_3(s) + \dots \quad (3.75)$$

Dosazením vztahu (3.75) do rovnice (3.74) dojdeme k následující rovnici:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1 \right) - \kappa_0^2(s) \right] K_x^2 + \left[\pm \kappa_0'(s) - 2\kappa_0(s)\kappa_1(s) \pm j \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} \kappa_0(s) \right] K_x + \\ & + \left[\pm j \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} \kappa_1(s) - 2\kappa_0(s)\kappa_2(s) - \kappa_1^2(s) \right] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Položíme-li koeficienty u jednotlivých mocnin K_x rovny nule, dostaneme soustavu rovnic pro jednotlivé členy $\kappa_i(s)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1 \right) - \kappa_0^2(s) = 0, \\ & \pm \kappa_0'(s) - 2\kappa_0(s)\kappa_1(s) \pm j \frac{\eta'(s)}{\eta(s)} \kappa_0(s) = 0, \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ihned vidíme, že

$$\kappa_0 = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1}, \quad (3.78)$$

$$\kappa_1(s) = \pm j \frac{1}{2} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}, \quad (3.79)$$

přičemž

$$\kappa_0' = (\text{konst.})' = 0. \quad (3.80)$$

Za předpokladu relativně vysokých hodnot vlnového čísla

$$K_x \gg 1 \quad (3.81)$$

můžeme po zanedbání vyšších členů rozvoje (3.75) vyjádřit funkci $\kappa(s)$ následovně:

$$\kappa(s) \approx K_x \kappa_0 + \kappa_1(s) = K_x \sqrt{\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1} \pm j \frac{1}{2} \frac{\eta'(s)}{\eta(s)}. \quad (3.82)$$

Dosazením do vztahu (3.73) dospějeme k následujícímu vyjádření pro funkci $f(s)$:

$$\begin{aligned} f(s) &= \exp \left(\pm j K_x \sqrt{\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1} - \frac{1}{2} \ln(\eta) + \tilde{C} \right) = \\ &= \frac{C}{\sqrt{\eta(s)}} \exp \left(\pm j K_x \sqrt{\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1} \right), \end{aligned} \quad (3.83)$$

pročež můžeme pro funkci $U_1(s)$ psát

$$U_1(s) = \frac{A_1}{\sqrt{\eta(s)}} \exp \left(j K_x \sqrt{\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1} s \right) + \frac{B_1}{\sqrt{\eta(s)}} \exp \left(-j K_x \sqrt{\frac{c_f^2}{c_1^2} + 1} s \right), \quad (3.84)$$

což lze s ohledem na vztah (1.31) přepsat do výsledného tvaru

$$U_1(s) = \frac{A_1}{\sqrt{\eta(s)}} e^{jzs} + \frac{B_1}{\sqrt{\eta(s)}} e^{-jzs}. \quad (3.85)$$

Poznamenejme, že v případě homogenní vrstvy ($\eta = \text{konst.}$) toto řešení odpovídá tvaru řešení v homogenním případě (1.20).

Výhoda výše popsané WKB metody spočívá ve skutečnosti, že materiálová funkce zde rovnou vystupuje v předem zadané analytické formě, a není nutné ji nijak aproximovat, což neplatí u THF metody, jak jsme demonstrovali v podkapitole 3.4. Pokud bychom chtěli dosáhnout vyšší přesnosti nalezených řešení, museli bychom použít více členů rozvoje (3.75). Avšak pro relativně vysoké hodnoty vlnového čísla poskytuje tato metoda uspokojivé výsledky.

3.7 Disperzní relace WKB

Disperzní relace v případě přibližného analytického řešení modelové rovnice (3.6) metodou WKB nalezneme úplně stejně jako v předešlých částech textu.

Označíme-li

$$\text{WKB}_1(\varkappa; s) = \frac{e^{j\varkappa s}}{\sqrt{\eta(s)}}, \quad \text{WKB}_2(\varkappa; s) = \frac{e^{-j\varkappa s}}{\sqrt{\eta(s)}}, \quad (3.86)$$

tak z okrajových podmínek (3.62), (3.63) a (3.64) dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} A_1 \text{WKB}'_1(\varkappa; 0) + B_1 \text{WKB}'_2(\varkappa; 0) &= 0, \\ A_1 \text{WKB}_1(\varkappa; 1) + B_1 \text{WKB}_2(\varkappa; 1) &= A_2 \exp\left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}\right), \\ A_1 \mu_0 \eta(1) \text{WKB}'_1(\varkappa; 1) + B_1 \mu_0 \eta(1) \text{WKB}'_2(\varkappa; 1) &= \\ &= -\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2} A_2 \mu_2 \exp\left(-\sqrt{K_1^2 - K_2^2 - \varkappa^2}\right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Závislost $c_f = c_f(K_x)$ je i v tomto případě určena vztahy (3.68) a (3.69), kde pouze s ohledem na vztah (3.67) zaměníme $F(\varkappa)$ za

$$F(\varkappa) \equiv \eta(1) \frac{\mu_0 \text{WKB}'_1(\varkappa; 0) \text{WKB}'_2(\varkappa; 1) - \text{WKB}'_1(\varkappa; 1) \text{WKB}'_2(\varkappa; 0)}{\mu_2 \text{WKB}_1(\varkappa; 0) \text{WKB}_2(\varkappa; 1) - \text{WKB}_1(\varkappa; 1) \text{WKB}_2(\varkappa; 0)}. \quad (3.88)$$

Poznamenejme však, že takto získané disperzní charakteristiky neposkytují správné výsledky pro malá K_x , viz podmínka (3.81).

Kapitola 4

Řešení modelové rovnice pro Loveho vlny v nehomogenním případě pro vybrané průběhy materiálových funkcí

V této kapitole demonstrujeme použití výsledků z předešlého textu na konkrétních příkladech. Hlavním účelem bude porovnání řešení ve tvaru lineární kombinace trikonfluentních Heunových funkcí (dále jen THF metoda) s přibližnými analytickými řešeními podle WKB metody. V případech, kde se budou řešení THF a WKB více rozcházet použijeme pro možnost komparace ještě řešení získaná pomocí numerické metody RKF45 (Runge-Kutta-Fehlberg 45 je numerická metoda čtvrtého řádu s adaptivním krokem, viz např. [10]). Výpočty jsou realizovány v prostředí MAPLE 2019.

Materiálové konstanty zafixujeme na stejných hodnotách jako v homogením případě (viz podkapitola 1.3), tedy

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \mu_0 = 33,075 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \\ \rho_2 &= 3300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \mu_2 = 66,825 \cdot 10^9 \text{ Pa},\end{aligned}\tag{4.1}$$

příčemž průběhy charakteristických veličin v povrchové vrstvě s ohledem na vztahy (3.2) splňují

$$\begin{aligned}\rho_1(s) &= \rho_0 \eta(s), \\ \mu_1(s) &= \mu_0 \eta(s).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Objemové rychlosti i v tomto případě nabývají hodnot

$$c_1 = 3500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, c_2 = 4500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.\tag{4.3}$$

Zaměříme se na takové profily materiálové funkce, které nám umožní zřetelně demonstrovat použitelnost a správnost nalezených řešení a zmíněných metod.

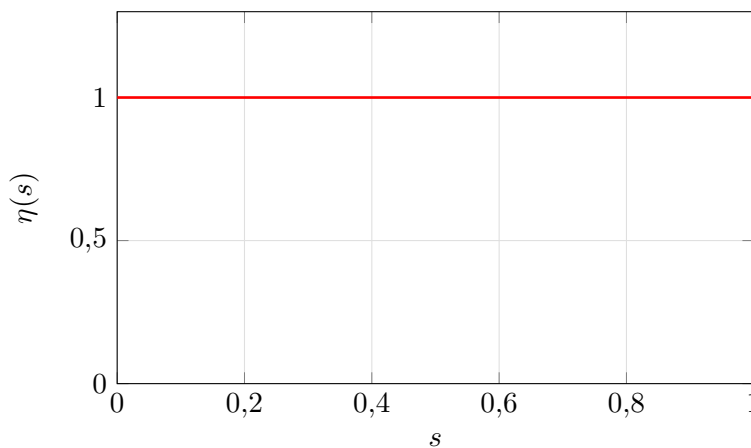
Vyjma prvního a posledního případu jsou použité průběhy materiálových funkcí aproximovány metodou popsanou v podkapitole 3.4.

4.1 Aproximace konstantního průběhu materiálové funkce

Nejprve aproximujeme konstantní průběh materiálové funkce, který pak porovnáme s homogenním případem řešeným dříve. Pakliže se dobereme ke stejným výsledkům, lze tímto ověřit správnost nalezeného řešení (3.30). Volbou vstupních parametrů

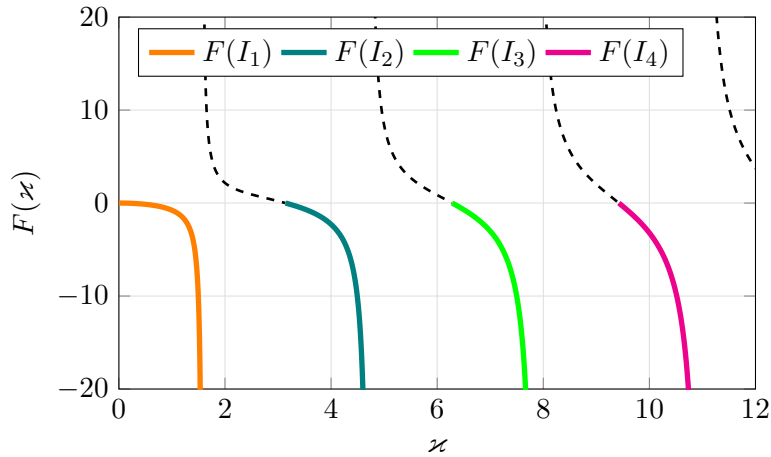
$$s_0 = a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = 10^{-6}; \quad a_3 = 0; \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \quad (4.4)$$

dostaneme téměř konstantní průběh materiálové funkce η na uvažovaném intervalu, viz obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Průběh použité materiálové funkce.

Intervaly I_n příslušící jednotlivým křivkám disperzních charakteristik lze pak numericky dopočítat z relace $F(\varkappa) < 0$, viz obrázek 4.2.



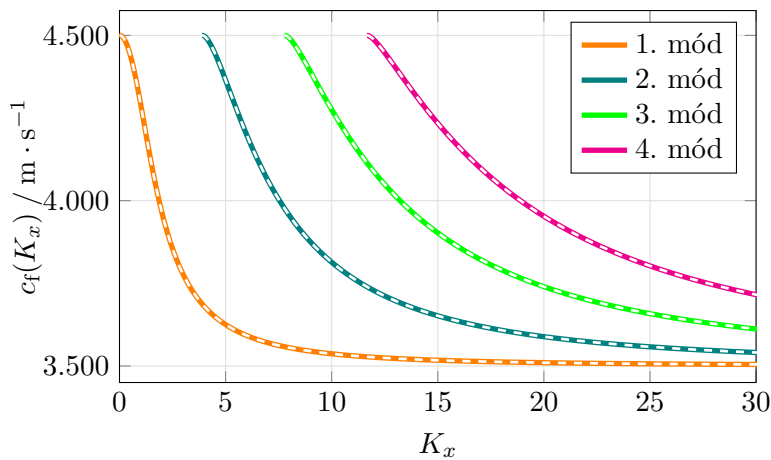
Obrázek 4.2: Funkce $F(x)$ při aproximaci konstantního průběhu $\eta(s)$.

Číselné hodnoty intervalů I_n jsou přibližně rovny

$$\begin{aligned}
 I_1 &\approx \langle 0, 000001000; 1, 570825196 \rangle, \\
 I_2 &\approx \langle 3, 141748047; 4, 712548828 \rangle, \\
 I_3 &\approx \langle 6, 283105469; 7, 854394531 \rangle, \\
 I_4 &\approx \langle 9, 424707031; 10, 995507820 \rangle,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

což je v souladu se vztahem (1.41). Díky problematickému vyčíslování funkce $F(x)$ v bodě $x = 0$ byl levý okraj intervalu I_1 zafixován na hodnotě 10^{-6} bez použití numerické metody (toto platí pro všechny dále uvedené výpočty).

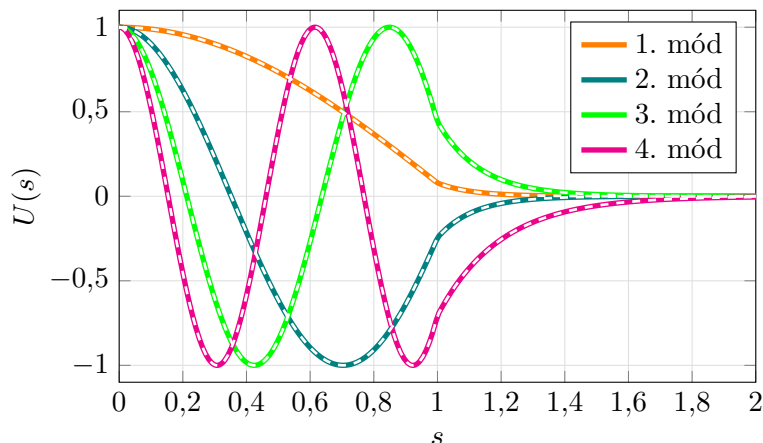
Disperzní charakteristiky pro první čtyři módy nalezneme na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Disperzní relace v případě aproximace konstantního průběhu $\eta(s)$.

Dostáváme stejné výsledky jako v homogenním případě, který představují bílé přerušované křivky na obrázku 4.3.

Jednotlivé módy vlnového řešení $U(s)$ pro bezrozměrné vlnové číslo $K_x = 15$ jsou vykresleny na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Průběhy $U(s)$ v případě aproximace konstantního průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$.

Nalezená řešení jsou opět v souladu s homogenní variantou, přičemž výsledky WKB metody jsou v tuto chvíli bezpředmětné, neboť ty lze v předpokladu $\eta \approx 1$ ztotožnit s homogenním řešením (1.20) již ze vztahu (3.85).

4.2 Aproximace lineárního průběhu materiálové funkce

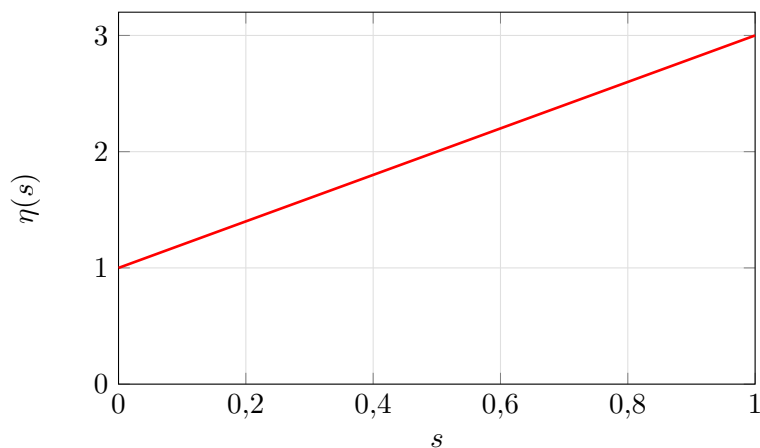
Zabývejme se řešením uvažované modelové rovnice (3.6) v případě, kdy materiálová funkce narůstá přibližně jako

$$\eta(s) \approx 1 + 2s. \quad (4.6)$$

Parametry generující tento průběh jsou

$$\begin{aligned} s_0 &= 0; & a_0 &\approx 1,0000000000; & a_1 &\approx -3,4800000000; \\ a_2 &\approx 3,1800000000; & a_3 &\approx -5,8311111130; & a_4 &\approx -2,0622222240; \\ C_1 &\approx 0,7768209504 + j5,2174657850; & C_2 &\approx 0,7768209504 - j5,2174657850. \end{aligned} \quad (4.7)$$

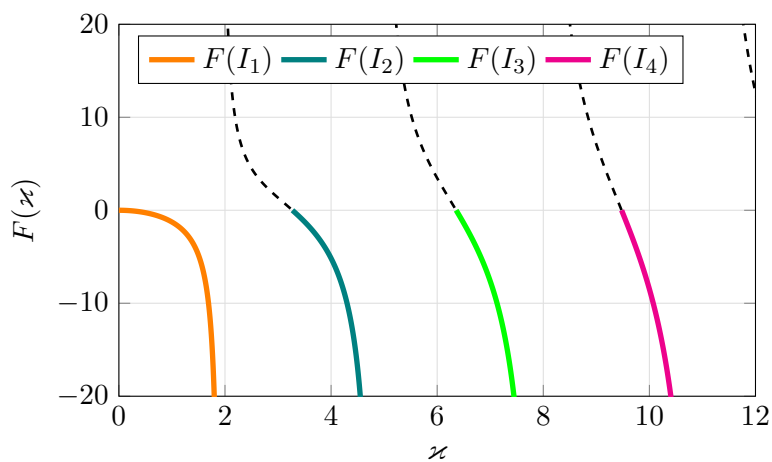
Materiálová funkce $\eta(s)$ příslušící těmto parametrům je vykreslena na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Průběh použité materiálové funkce.

V podkapitole 3.4 věnované aproximaci generujícího polynomu jsme demonstrovali, že pro monotónní průběhy materiálových funkcí jsou aproximace zpravidla velmi přesné, což zde zřejmě platí.

Funkce $F(\varkappa)$ je zachycena na obrázku 4.6.

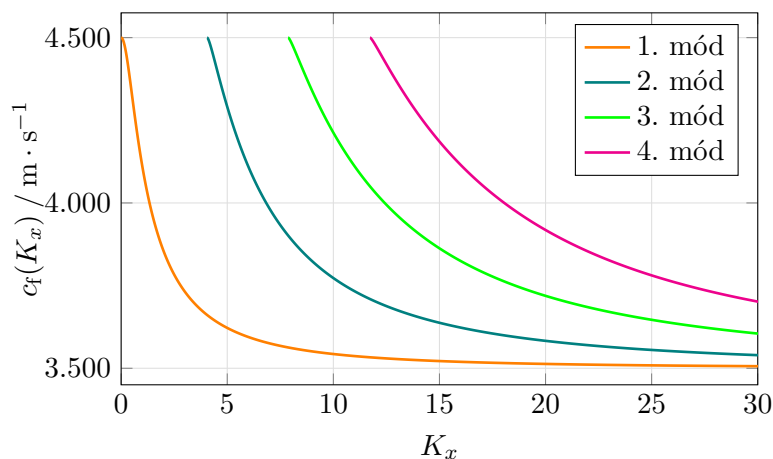


Obrázek 4.6: Funkce $F(\varkappa)$ v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$.

Příslušné intervaly I_n jsou přibližně rovny

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \langle 0,000001000; 1,918969726 \rangle, \\ I_2 &\approx \langle 3,271142579; 4,874169921 \rangle, \\ I_3 &\approx \langle 6,357324219; 7,956933594 \rangle, \\ I_4 &\approx \langle 9,476464843; 11,069726560 \rangle. \end{aligned} \tag{4.8}$$

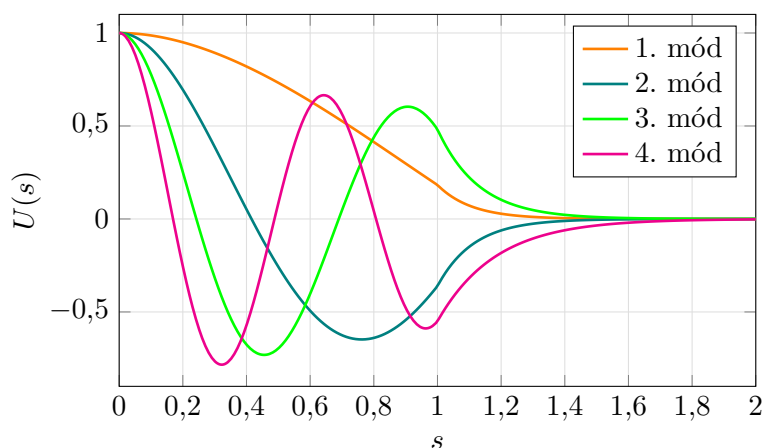
Disperzní charakteristiky nalezneme na obrázku 4.7.



Obrázek 4.7: Disperzní relace v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$.

Jednotlivé křivky jsou mírně strmější, než tomu bylo u homogenního případu.

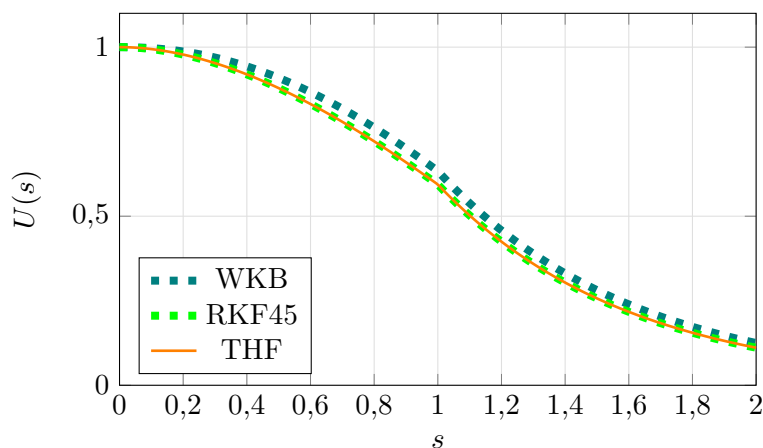
S volbou bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 15$ můžeme vykreslit průběhy jednotlivých módů složky vektoru posunutí $U(s)$, viz obrázek 4.8.



Obrázek 4.8: Průběhy $U(s)$ v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$.

Oproti homogennímu případu zaznamenáváme větší odlišnosti, amplituda vlnového řešení zřejmě klesá se vzdáleností, což lze interpretovat pomocí tvaru přibližného řešení WKB metody (3.85), podle něhož je pokles úměrný $1/\sqrt{\eta}$.

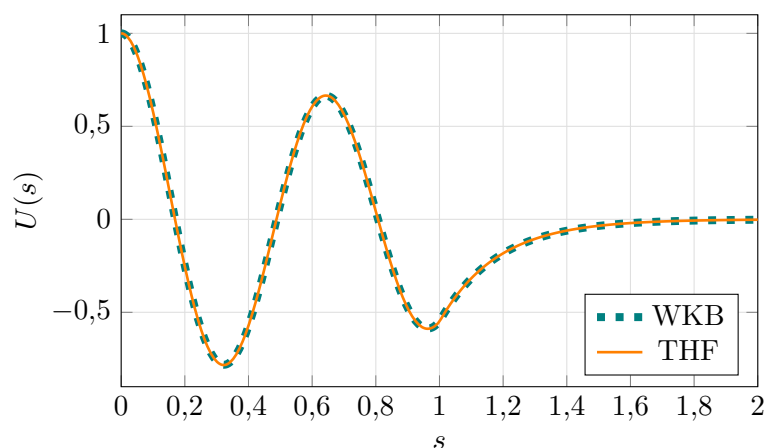
Zvolme relativně nízkou hodnotu bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 3$ a první mód. Na obrázku 4.9 můžeme porovnat vypočtená řešení pomocí metod THF, WKB a RKF45.



Obrázek 4.9: Porovnání metod řešení v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 3$ a první mód.

Řešení THF (jehož správnost je ověřena numerickou metodou RKF45) se mírně odlišuje od řešení WKB, neboť není splněna podmínka (3.81).

Při volbě vyšší hodnoty vlnového čísla $K_x = 15$ a čtvrtého módu obdržíme řešení na obrázku 4.10.



Obrázek 4.10: Porovnání metod řešení v případě aproximace lineárního průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód.

Oba průběhy v tomto případě splývají.

4.3 Aproximace exponenciálního nárůstu materiálové funkce

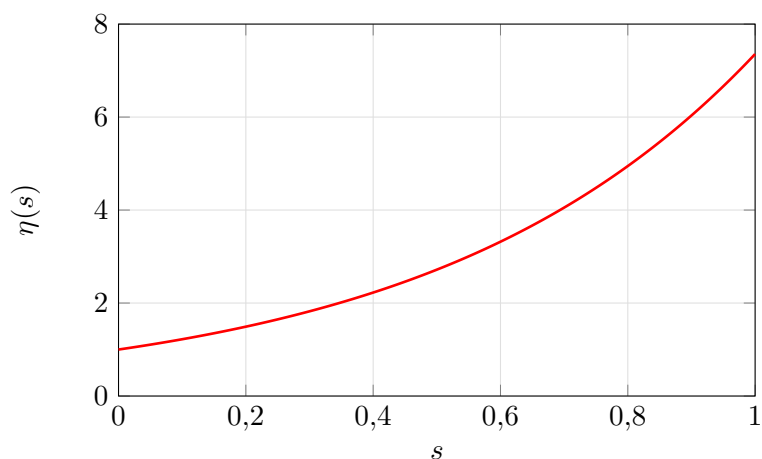
V rámci této podkapitoly budeme volbou koeficientů generujícího polynomu aproximovat exponenciální materiálovou funkci

$$\eta(s) \approx e^{2s}. \quad (4.9)$$

Tomuto průběhu přísluší koeficienty

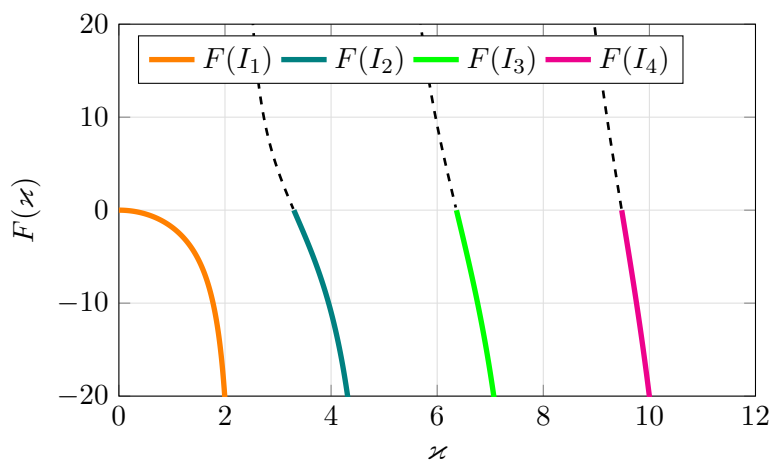
$$\begin{aligned} s_0 = 0; \quad a_0 \approx -1,000000000000; \quad a_1 \approx 0,009634726067; \\ a_2 \approx -0,039401753530; \quad a_3 \approx 0,194427378100; \quad a_4 \approx 0,052605006930; \\ C_1 \approx 4,257376691000; \quad C_2 \approx -1,7417794120000. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Materiálová funkce je zachycena na obrázku 4.11.



Obrázek 4.11: Průběh použité materiálové funkce.

Průběh funkce $F(\varkappa)$ nalezneme na obrázku 4.12.



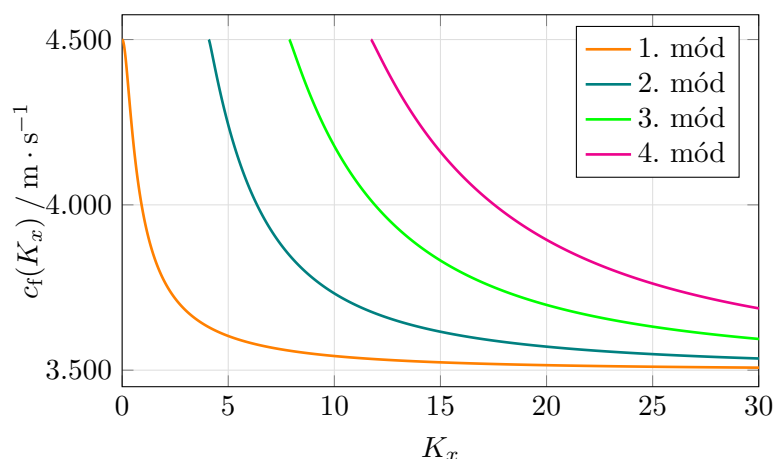
Obrázek 4.12: Funkce $F(\varkappa)$ při aproximaci exponenciálního nárůstu $\eta(s)$.

Intervaly I_n nabývají hodnot

$$\begin{aligned}
 I_1 &\approx \langle 0,000001000; 2,260766602 \rangle, \\
 I_2 &\approx \langle 3,297998047; 5,012597657 \rangle, \\
 I_3 &\approx \langle 6,363183594; 8,039941406 \rangle, \\
 I_4 &\approx \langle 9,478417969; 11,130273440 \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Disperzní křivky jednotlivých módů jsou vykresleny na obrázku 4.13.

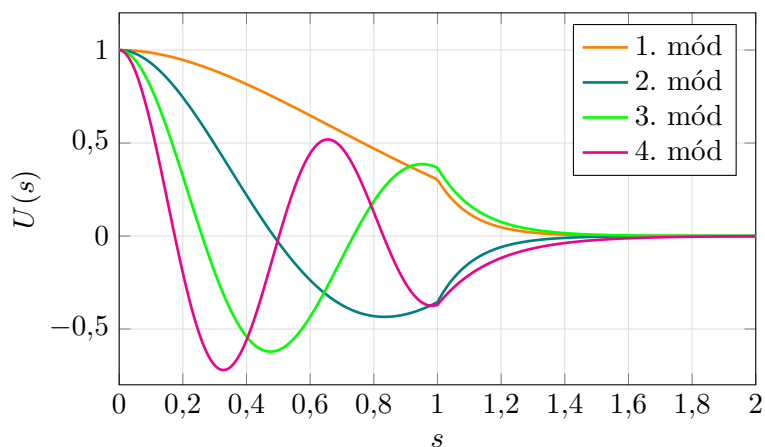
4. Řešení modelové rovnice pro Loveho vlny v nehomogenním případě pro vybrané průběhy materiálové



Obrázek 4.13: Disperzní relace v případě aproximace exponenciálního nárůstu $\eta(s)$.

Křivky disperzní charakteristiky mají s rostoucími průběhy materiálové funkce tendenci se více přimýkat k vertikální ose (jsou strmější, než-li v předchozím případě).

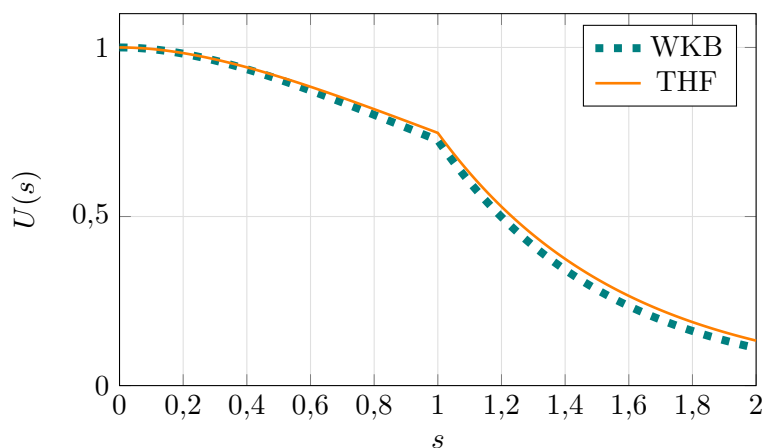
Za předpokladu hodnoty bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 15$ můžeme vykreslit průběhy jednotlivých módů, viz obrázek 4.14.



Obrázek 4.14: Průběhy $U(s)$ v případě aproximace exponenciálního nárůstu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$.

V bodě $s = 1$ u funkce $U(s)$ dochází k poněkud ostřejší nespojitosti v první derivaci, viz okrajová podmínka (3.64).

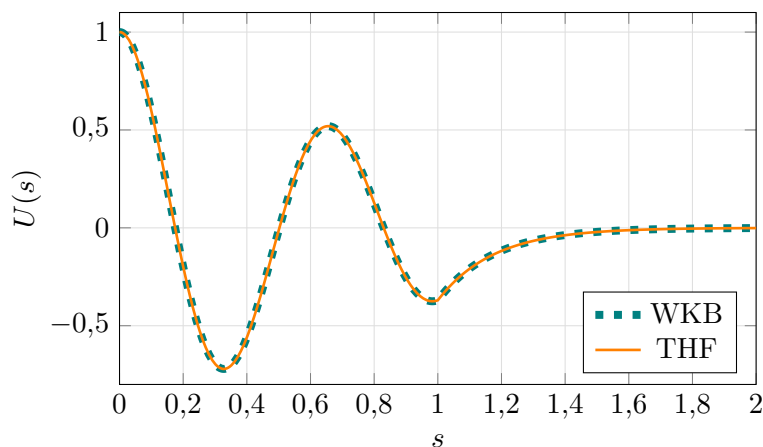
Porovnání řešení nalezených pomocí THF a WKB metod pro bezrozměrné vlnové číslo $K_x = 3$ a první mód nalezneme na obrázku 4.15.



Obrázek 4.15: Porovnání metod řešení v případě aproximace exponenciálního nárůstu $\eta(s)$ pro $K_x = 3$ a první mód.

V tomto případě i při nižším vlnovém čísle poskytuje WKB metoda poměrně dobrý odhad skutečného řešení.

Pro vyšší hodnotu bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 15$ a čtvrtý mód jsou průběhy vlnového řešení $U(s)$ vykresleny na obrázku 4.16.



Obrázek 4.16: Porovnání metod řešení v případě aproximace exponenciálního nárůstu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód.

Obě řešení v tomto případě splývají.

4.4 Aproximace exponenciálního poklesu materiálové funkce

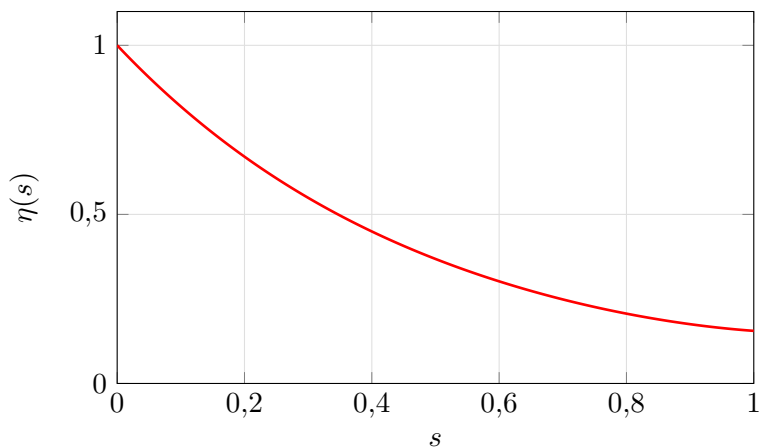
Doposud jsme se zabývali rostoucími průběhy materiálových funkcí. Zaměříme se proto v této podkapitole na klesající exponenciální průběh

$$\eta(s) \approx e^{-2s}. \quad (4.12)$$

Koeficienty generující tento profil nabývají hodnot

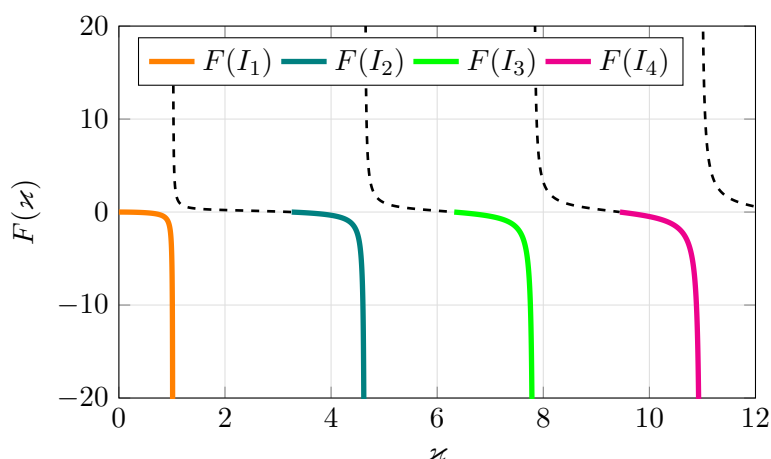
$$\begin{aligned} s_0 &= 0; & a_0 &\approx -1,0000000000; & a_1 &\approx 0,6706312200; \\ a_2 &\approx -2,7014600180; & a_3 &\approx 13,8920819200; & a_4 &\approx 12,2618339200; \\ C_1 &\approx -4,9116639550; & C_2 &\approx 5,6651694000. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Materiálová funkce $\eta(s)$ je zachycena na obrázku 4.17,



Obrázek 4.17: Průběh použité materiálové funkce.

Průběh funkce $F(\varkappa)$ nalezneme na obrázku 4.18.

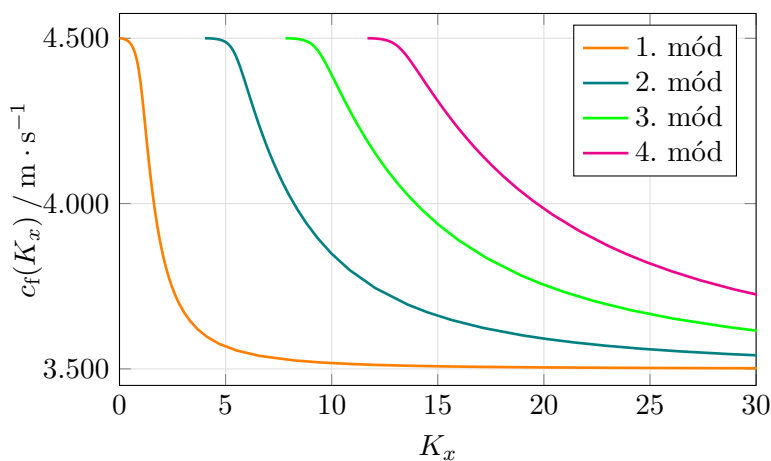


Obrázek 4.18: Funkce $F(x)$ v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$.

Intervaly I_n v tomto případě nabývají číselných hodnot

$$\begin{aligned}
 I_1 &\approx \langle 0, 000001000; 1, 017907715 \rangle, \\
 I_2 &\approx \langle 3, 256982421; 4, 633447265 \rangle, \\
 I_3 &\approx \langle 6, 321191406; 7, 814355469 \rangle, \\
 I_4 &\approx \langle 9, 445214843; 10, 968164060 \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

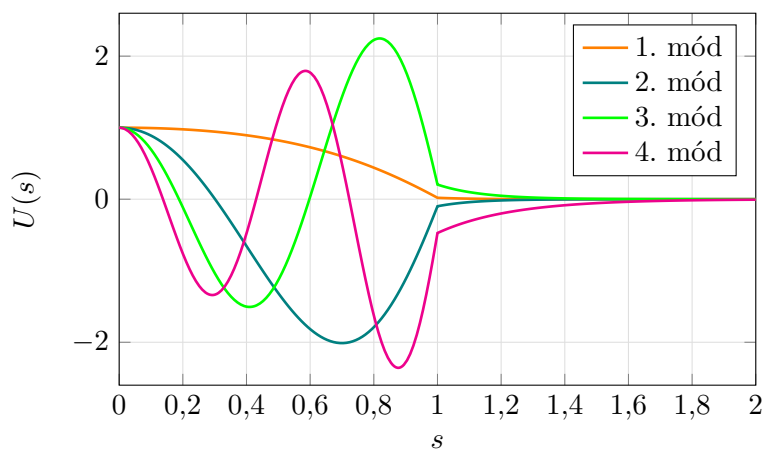
Křivky disperzní charakteristiky jsou zachyceny na obrázku 4.19.



Obrázek 4.19: Disperzní relace v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$.

U tohoto klesajícího průběhu materiálové funkce se u jednotlivých disperzních křivek naopak zmenšuje strmost a na počátku každého módu (vzhledem k bezrozměrnému vlnovému číslu) se objevuje zřetelný inflexní bod.

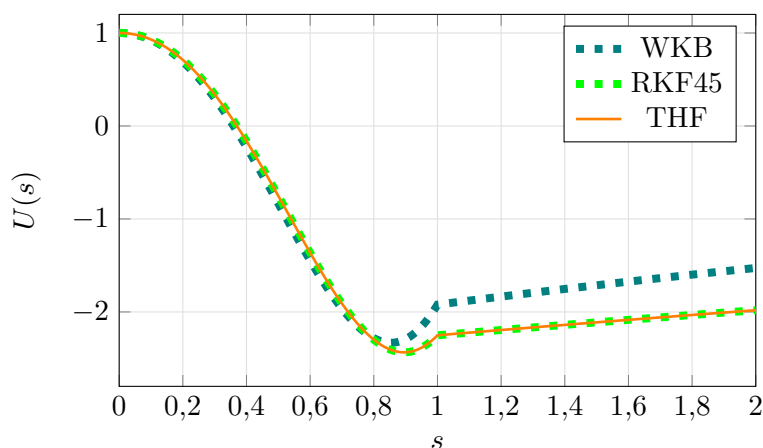
Průběhy módů vlnového řešení $U(s)$ pro bezrozměrné vlnové číslo $K_x = 15$ jsou zachyceny na obrázku 4.20.



Obrázek 4.20: Průběhy $U(s)$ v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$.

Jednotlivá vlnová řešení mají na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ rostoucí charakter, což odpovídá tvaru řešení získaného pomocí WKB metody (3.85) za předpokladu klesající materiálové funkce.

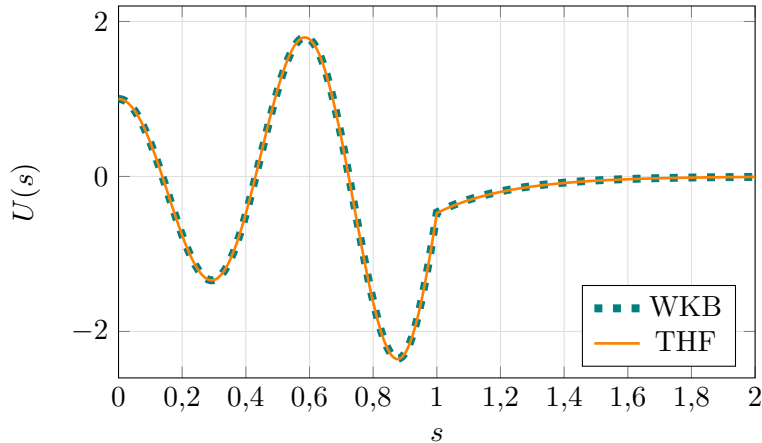
V rámci tohoto profilu materiálové funkce neposkytuje metoda WKB řešení pro $K_x = 3$ a první mód, protože zvolíme hodnotu bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 4, 5$ a druhý mód. Porovnání řešení vypočtených pomocí všech tří metod nalezneme na obrázku 4.21.



Obrázek 4.21: Porovnání metod řešení v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$ pro $K_x = 4, 5$ a druhý mód.

Numerická metoda RKF45 potvrzuje správnost řešení THF, přibližné WKB řešení se od obou průběhů mírně odlišuje.

Při volbě vyšší hodnoty bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 15$ a čtvrtého módu poskytují THF i WKB metoda dle očekávání téměř stejné výsledky, viz obrázek 4.22.



Obrázek 4.22: Porovnání metod řešení v případě aproximace exponenciálního poklesu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód.

4.5 Aproximace gaussovského průběhu materiálové funkce

Zaměříme se na nemonotónní profil materiálové funkce, který svým tvarem připomíná posunutou Gaussovu funkci typu

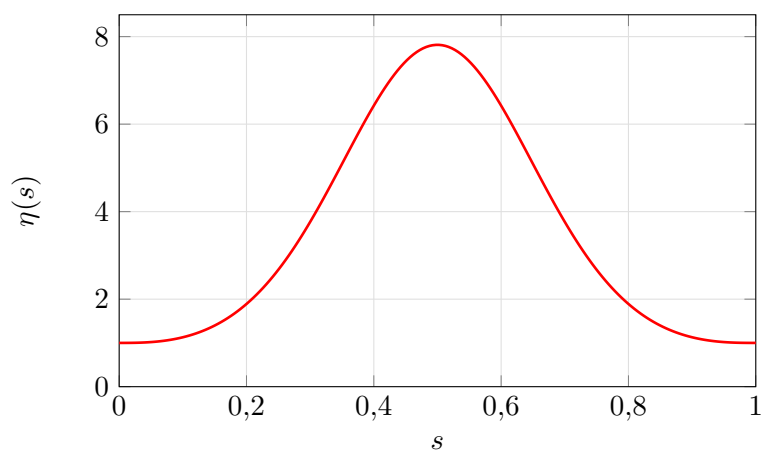
$$\eta(s) \approx Ae^{-\frac{(s-0,5)^2}{x}} + C. \quad (4.15)$$

Lze jej aproximovat následující kombinací parametrů:

$$\begin{aligned} s_0 = 0; \quad a_0 \approx -0,03450312216; \quad a_1 \approx -486,34631860000; \\ a_2 \approx 1376,14545400000; \quad a_3 \approx -4531,88917700000; \quad a_4 \approx -2265,94458900000; \\ C_1 \approx 1,39754083600; \quad C_2 \approx 1,39754083600. \end{aligned} \quad (4.16)$$

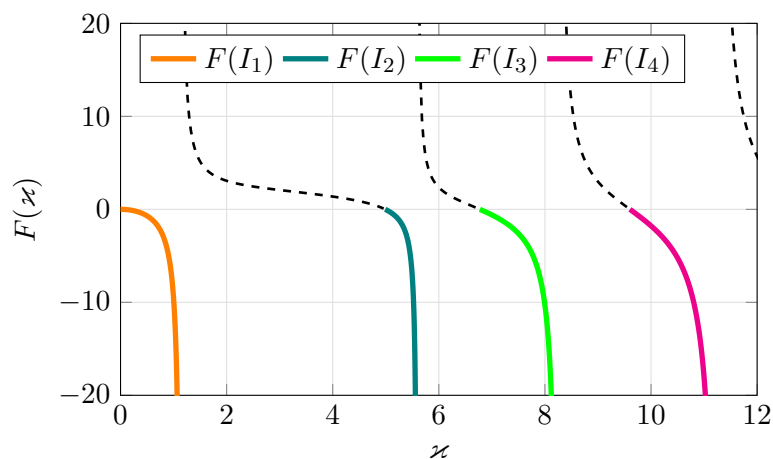
Výsledná materiálová funkce je zachycena na obrázku 4.23.

4. Řešení modelové rovnice pro Loveho vlny v nehomogenním případě pro vybrané průběhy materiálových



Obrázek 4.23: Průběh použité materiálové funkce.

Průběh funkce $F(\varkappa)$ nalezneme na obrázku 4.24.

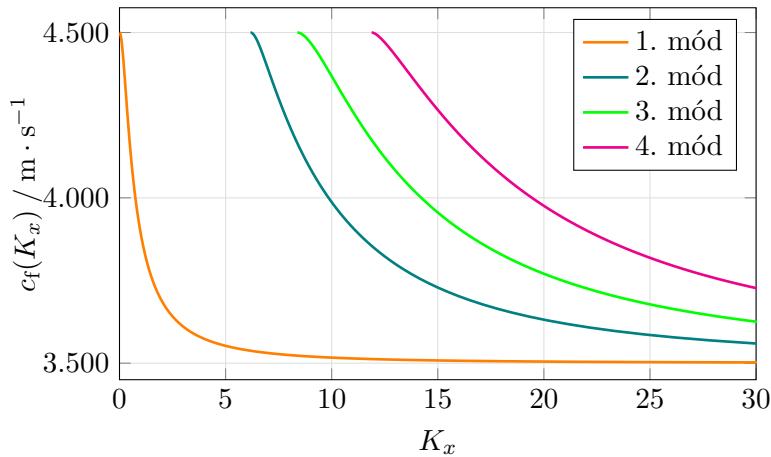


Obrázek 4.24: Funkce $F(\varkappa)$ v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$.

Pro intervaly I_n v tomto případě platí

$$\begin{aligned}
 I_1 &\approx \langle 0, 000001000; 1, 142297363 \rangle, \\
 I_2 &\approx \langle 4, 989160157; 5, 594628906 \rangle, \\
 I_3 &\approx \langle 6, 773339843; 8, 257714843 \rangle, \\
 I_4 &\approx \langle 9, 602441406; 11, 272851560 \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

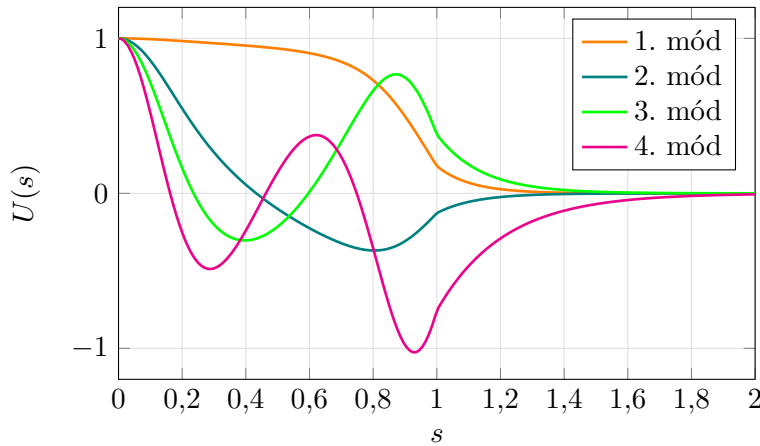
Disperzní relace jsou vykresleny na obrázku 4.25.



Obrázek 4.25: Disperzní relace v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$.

V tomto případě pozorujeme větší odlišnosti pro disperzní křivky oproti předchozím případům. Ukazuje se, že pro materiálovou funkci η podobnou Gaussově křivce s extrémem uvnitř intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ se v disperzní charakteristice posunují vyšší módy (zejména druhý) dále od módu základního. Tato skutečnost by mohla být použitelná pro některé aplikace, ve kterých je snaha zamezit šíření vyšších módů.

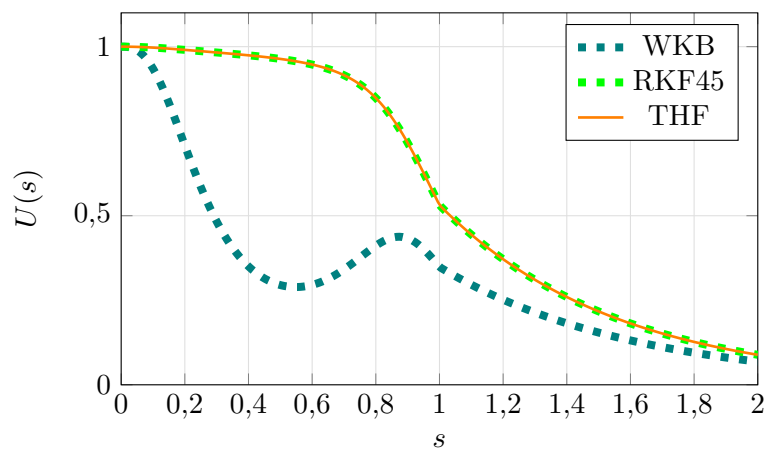
Pro bezrozměrné vlnové číslo $K_x = 15$ jsou jednotlivé módy vlnového řešení zachyceny na obrázku 4.26.



Obrázek 4.26: Průběhy $U(s)$ v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$.

Zaměříme se na porovnání vlnových řešení vypočtených pomocí THF, WKB a RKF45 metod. Příslušné průběhy pro malé bezrozměrné vlnové číslo $K_x = 3$

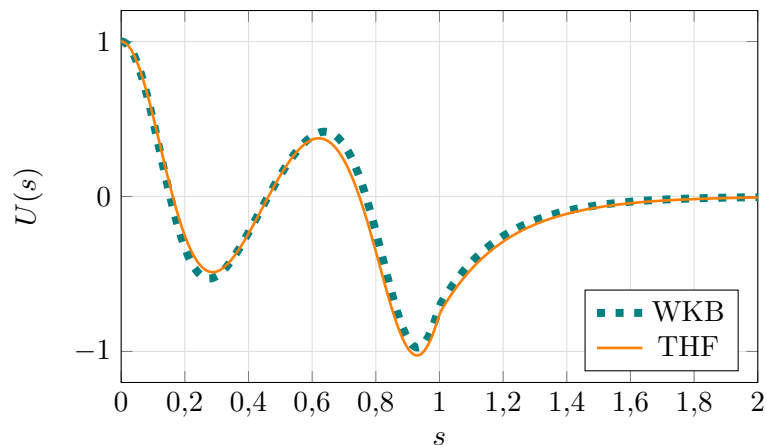
a první mód jsou zachyceny na obrázku 4.27.



Obrázek 4.27: Porovnání metod řešení v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 3$ a první mód.

V tomto případě je pro nižší hodnoty vlnových čísel WKB metoda zřejmě zcela nepoužitelná, naopak numerická metoda RKF45 potvrzuje správnost řešení THF.

Porovnání metod pro bezrozměrné vlnové číslo $K_x = 15$ a čtvrtý mód nalezneme na obrázku 4.28.



Obrázek 4.28: Porovnání metod řešení v případě aproximace gaussovského průběhu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód.

Dle očekávání se v tomto případě oba průběhy jen nepatrně odlišují.

4.6 Aproximace minima kvadratické materiálové funkce

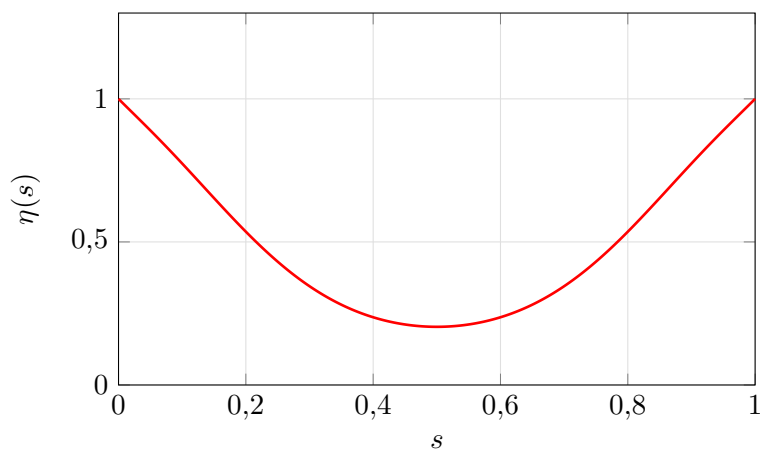
V této podkapitole aproximujeme konvexní kvadratickou funkci, jejíž minimum umístíme do středu intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, tedy

$$\eta(s) \approx A \left[(2s - 1)^2 - 1 \right] + 1. \quad (4.18)$$

K té vede následující množina koeficientů:

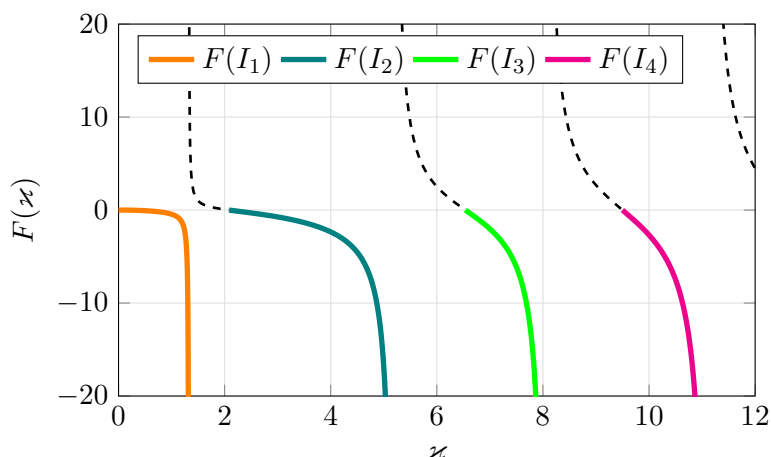
$$\begin{aligned} s_0 = 0; \quad a_0 \approx -0,6400000000; \quad a_1 \approx 112,6400000000; \\ a_2 \approx -404,4800000000; \quad a_3 \approx 1392,6400000000; \quad a_4 \approx 696,3200000000; \\ C_1 \approx 0,2254373195; \quad C_2 \approx 0,2254373195. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Materiálová funkce $\eta(s)$ je zachycena na obrázku 4.29.



Obrázek 4.29: Průběh použité materiálové funkce.

Průběh funkce $F(\varkappa)$ nalezneme na obrázku 4.30.

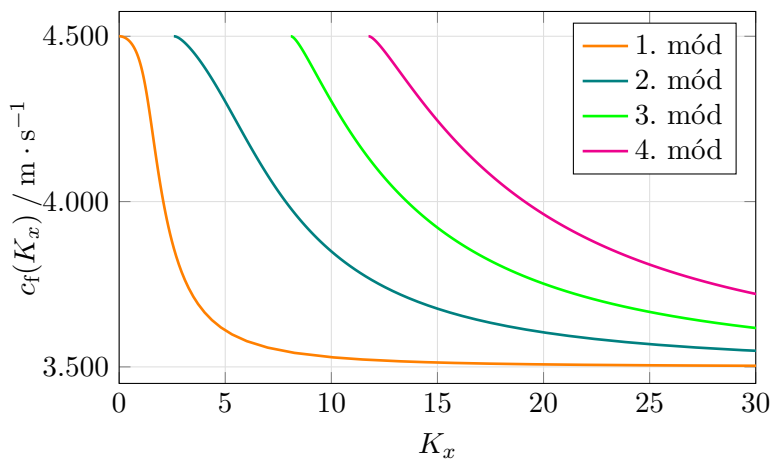


Obrázek 4.30: Funkce $F(x)$ v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$.

Intervaly I_n nabývají číselných hodnot

$$\begin{aligned}
 I_1 &\approx \langle 0, 000001000; 1, 323754882 \rangle, \\
 I_2 &\approx \langle 2, 083276367; 5, 190332031 \rangle, \\
 I_3 &\approx \langle 6, 537011719; 8, 058496094 \rangle, \\
 I_4 &\approx \langle 9, 497949219; 11, 13222656 \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

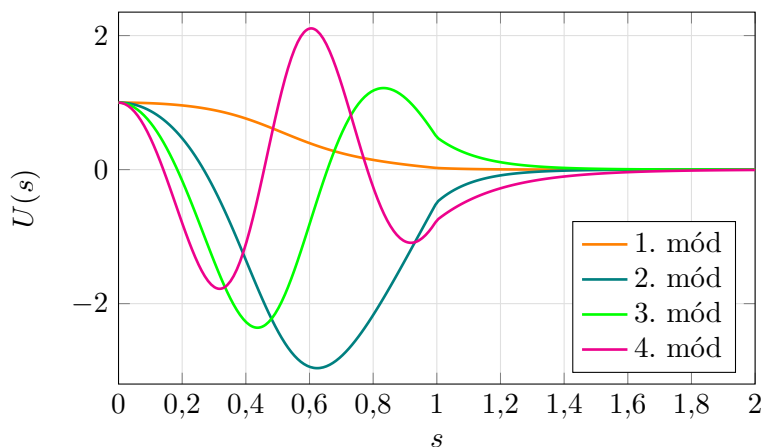
Disperzní relace jsou vykresleny na obrázku 4.31.



Obrázek 4.31: Disperzní relace v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$.

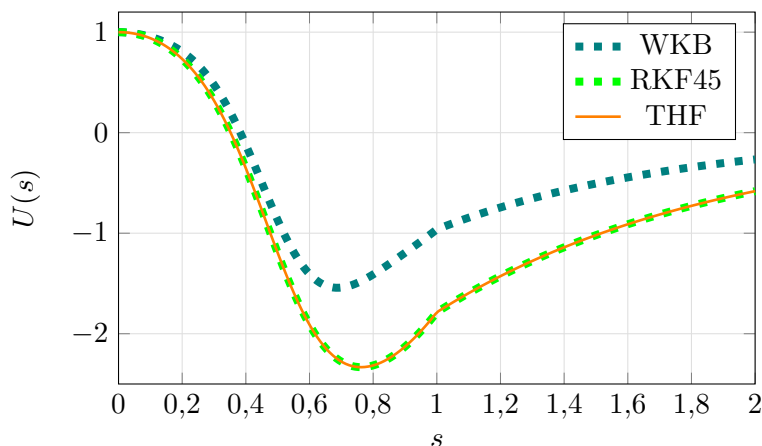
V tomto případě dochází k přisunutí druhého módu k prvnímu, tento profil materiálové funkce má opačný charakter oproti předchozímu případu, namísto lokálního maxima se uprostřed nachází lokální minimum.

Jednotlivé módy pro $K_x = 15$ jsou zachyceny na obrázku 4.32.



Obrázek 4.32: Průběhy $U(s)$ v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$ pro $K_x = 15$.

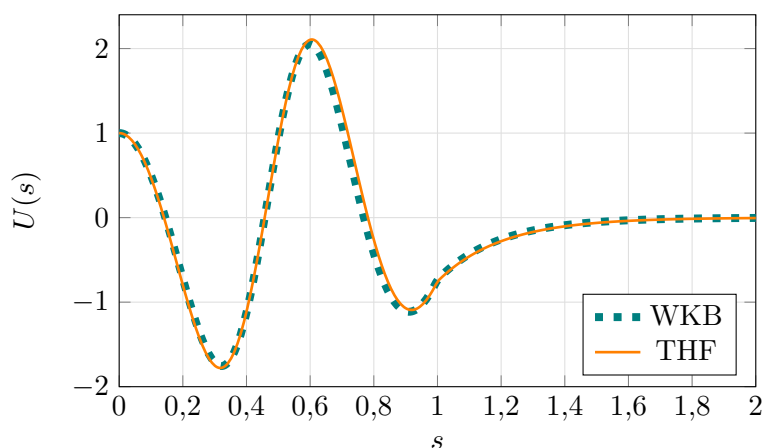
V rámci aktuálně zvoleného profilu materiálové funkce metoda WKB vůbec neposkytuje řešení pro první mód, protože zvolíme hodnotu bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 4,5$ a druhý mód. Průběhy vlnových řešení vypočtených pomocí metod THF, WKB a RKF45 jsou zachyceny na obrázku 4.33.



Obrázek 4.33: Porovnání metod řešení v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$ pro $K_x = 4,5$ a druhý mód.

Řešení metody WKB se značně odlišuje oproti výsledkům THF a RKF45.

Pro vyšší hodnotu bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 15$ a čtvrtý mód dostaneme průběhy na obrázku 4.34.



Obrázek 4.34: Porovnání metod řešení v případě aproximace kvadratického minima v $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód.

Dle očekávání se v tomto případě řešení WKB blíží k řešení THF.

4.7 Využití polynomiálního řešení pro výpočet materiálové funkce

Jako poslední příklad zvolíme hodnoty vstupních parametrů

$$\begin{aligned} s_0 = 0; \quad a_0 = -5; \quad a_1 = 26; \quad a_2 \approx 4,906621589; \\ a_3 = 0; \quad a_4 \approx 42,250000000; \quad C_1 \approx 3,239634998. \end{aligned} \quad (4.21)$$

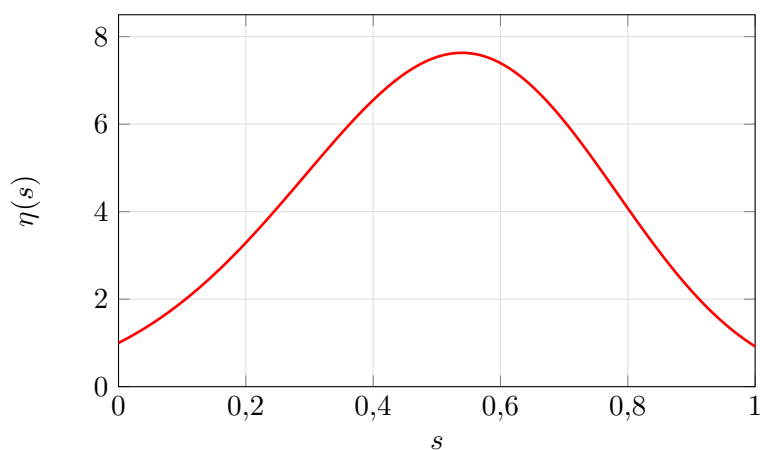
S ohledem na vztahy (3.26) dojdeme ke zjištění, že platí

$$\beta \approx 6,000000000, \quad \det(M_2) = \alpha^2 + 3\gamma \approx 0,000000002. \quad (4.22)$$

Tím jsme splnili podmínky pro polynomiální tvar řešení trikonfluentní Heunovy rovnice (2.27) a (2.29), přičemž $N = 1$, a můžeme tak využít řešení materiálové funkce ve tvaru

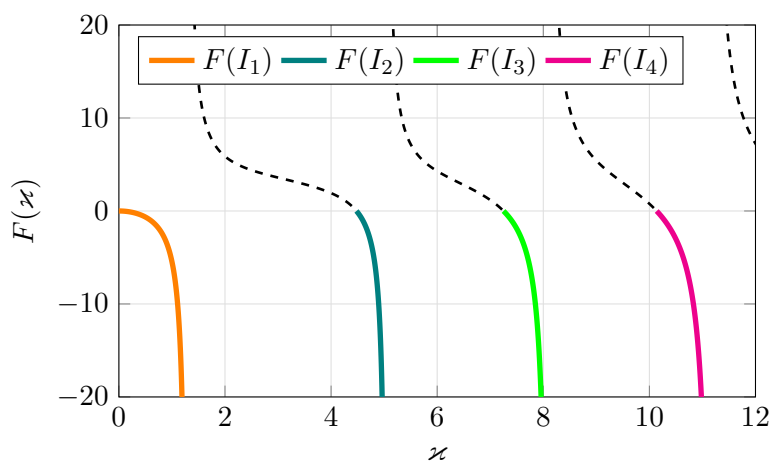
$$\eta(s) = C_1 \exp^2 \left[-\frac{3}{2} Q^3 s \left(\frac{s^2}{3} - s s_0 + s_0^2 - \frac{a_2}{a_4} \right) \right] \left[Q(s - s_0) - \frac{a_2^2 + a_0 a_4}{3 a_4 Q^2} \right]^2, \quad (4.23)$$

viz vztah (3.47), jejíž průběh nalezneme na obrázku 4.35.



Obrázek 4.35: Průběh použité materiálové funkce.

Funkce $F(\varkappa)$ je zachycena na obrázku 4.36.

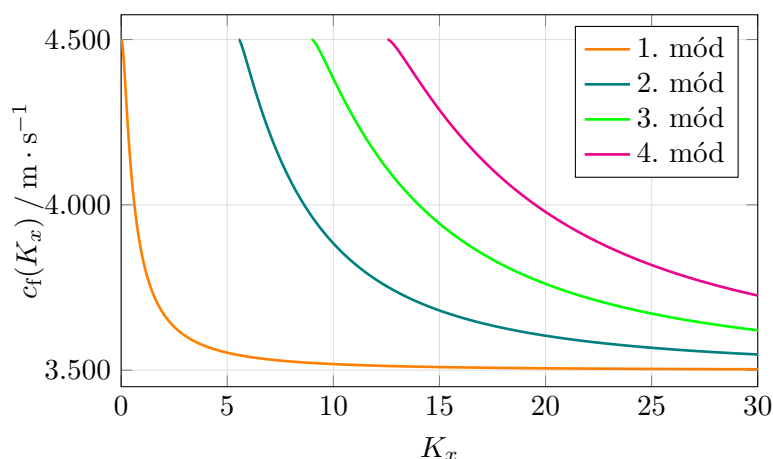


Obrázek 4.36: Funkce $F(\varkappa)$ v případě využití polynomiálního řešení pro výpočet $\eta(s)$.

Intervaly I_n nabývají hodnot

$$\begin{aligned}
 I_1 &\approx \langle 0, 000001000; 1, 292603540 \rangle, \\
 I_2 &\approx \langle 4, 478272484; 5, 049317406 \rangle, \\
 I_3 &\approx \langle 7, 250489281; 8, 104004906 \rangle, \\
 I_4 &\approx \langle 10, 137696320; 11, 18652444 \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

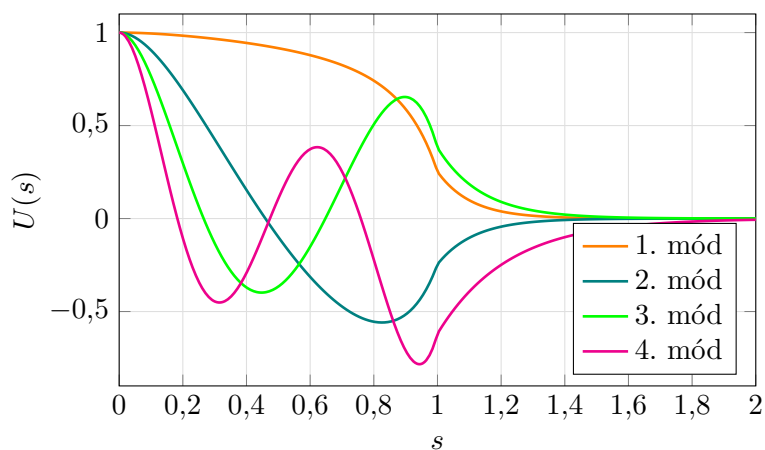
Disperzní charakteristiky jsou vykresleny na obrázku 4.37.



Obrázek 4.37: Disperzní relace v případě využití polynomiálního řešení pro výpočet $\eta(s)$.

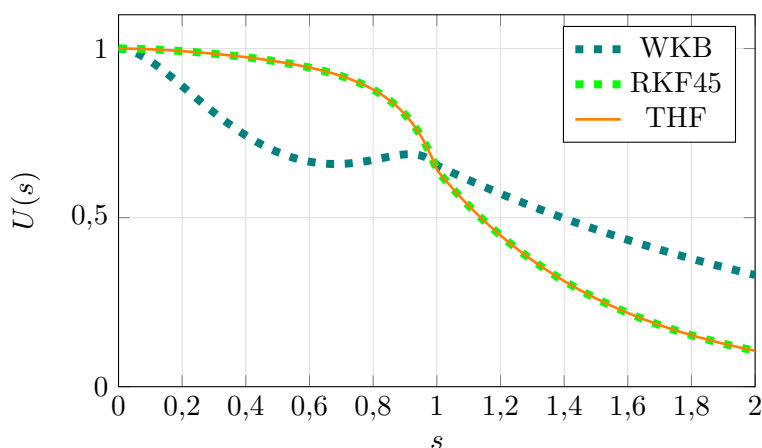
Jednotlivé křivky disperzní relace mají podobnou tendenci jako při aproximaci gaussovského profilu materiálové funkce (viz podkapitola 4.5), což odpovídá vzájemné podobnosti mezi profily těchto materiálových funkcí.

Průběhy jednotlivých módů pro bezrozměrné vlnové číslo $K_x = 15$ nalezneme na obrázku 4.38.



Obrázek 4.38: Průběhy $U(s)$ v případě využití polynomiálního řešení při výpočtu $\eta(s)$ pro $K_x = 15$.

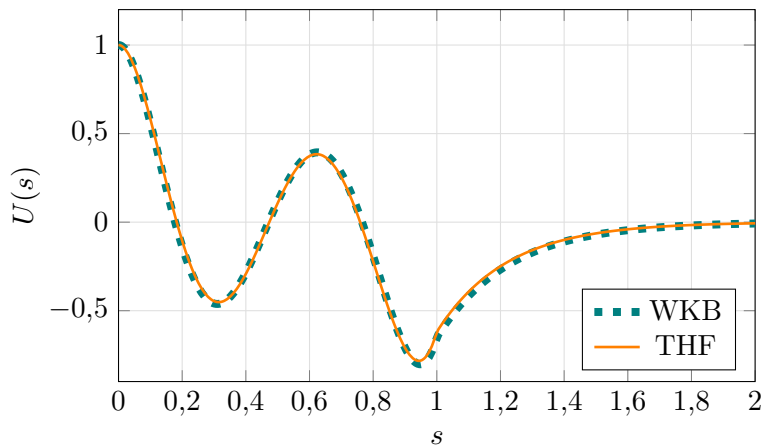
Pro hodnotu bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 3$ jsou průběhy prvního módu počítaného všemi třemi metodami vykresleny na obrázku 4.39.



Obrázek 4.39: Porovnání metod řešení v případě využití polynomiálního řešení pro výpočet $\eta(s)$ pro $K_x = 3$ a první mód.

Metoda WKB dle očekávání selhává, zatímco numerická metoda RKF45 potvrzuje správnost řešení THF.

Při volbě vyšší hodnoty bezrozměrného vlnového čísla $K_x = 15$ a čtvrtého módu dojdeme k průběhům vykresleným na obrázku 4.40.



Obrázek 4.40: Porovnání metod řešení při využití polynomiálního řešení pro výpočet $\eta(s)$ pro $K_x = 15$ a čtvrtý mód.

Závěrem této kapitoly lze konstatovat, že za předpokladu splnění podmínky vyšších hodnot bezrozměrného vlnového čísla (3.81) a monotónních, nebo méně proměnlivých profilů materiálové funkce nám poskytuje WKB metoda velmi dobré odhady řešení, její výhoda navíc tkví ve značné jednoduchosti a rychlosti při konkrétním vyčíslení. Nicméně v žádném případě ji nelze

4. Řešení modelové rovnice pro Loveho vlny v nehomogenním případě pro vybrané průběhy materiálových

používat obecně bez důkladného posouzení zmíněných předpokladů, jak jsme demonstrovali na předchozích příkladech. Naproti tomu řešení založená na použití trikonfluentních Heunových funkcí jsou skutečně přesná, bez ohledu na volbu bezrozměrného vlnového čísla, což jsme ověřili pomocí numerické metody RKF45.



Závěr

V práci jsme se zabývali šířením Loveho vln, což jsou povrchové elastické příčné vlny. Nejprve jsme nastínili odvození příslušné vlnové rovnice pro nehomogenní izotropní vrstvu, jejíž bezčasovou formu jsme převedli do bezrozměrného tvaru, čímž jsme dostali modelovou rovnici, která pro zvolené prostorové závislosti materiálových parametrů odpovídá Websterově vlnové rovnici pro akustický vlnovod s proměnným průřezem. Ukázali jsme, jak lze na základě okrajových podmínek nalézt disperzní charakteristiky a průběhy vlnových funkcí v homogenním případě. Následně jsme se věnovali trikonfluentní Heunově diferenciální rovnici, k níž jsme posléze našli řešení, které se nazývá trikonfluentní Heunova funkce. Za předpokladu nehomogenní izotropní vrstvy, ve které se charakteristické veličiny (hustota a modul pružnosti v torzi) mění dle materiálové funkce η , jsme dále pomocí vhodné transformace převedli uvažovanou modelovou rovnici na dvě jiné, jednu mající tvar stacionární Schrödingerovy rovnice a druhou pro materiálovou funkci. Obě tyto rovnice jsme převedli do tvaru trikonfluentních Heunových diferenciálních rovnic a jejich řešení jsme vyjádřili jako lineární kombinace trikonfluentních Heunových funkcí. Na základě okrajových podmínek byl pak, obdobně jako v homogenním případě, stanoven postup nalezení jednak disperzních charakteristik, jednak samotného vlnového řešení. Zásadní přínos tohoto typu řešení spočívá v úplně nové třídě profilů materiálových funkcí, pro které lze stanovit přesná analytická řešení. Navíc díky množství vstupních parametrů mohou být tyto profily velmi různorodé. Ukázali jsme, že za předpokladu splnění jistých podmínek může řešení nabývat i tvaru typu exponenciální funkce vynásobená polynomem konečného stupně, což může být v některých situacích praktické. Následně jsme demonstrovali jeden ze způsobů, který umožňuje numericky nalézt vstupní parametry k dosažení konkrétních profilů materiálové funkce, přičemž výsledné aproximace jsou velmi dobré pro monotónní, nebo mírně zvlněné profily materiálové funkce. Dále byl popsán

alternativní způsob řešení uvažované modelové rovnice a to sice WKB metoda, která poskytuje přibližná analytická řešení za předpokladu vyšších hodnot vlnového čísla. V další části jsme provedli porovnání obou zmíněných přístupů spolu s numerickou metodou RKF45 na několika vybraných profilech materiálových funkcí. Zvláště zajímavé chování vykazuje gaussovský profil, který má tendenci posouvat vyšší módy disperzní charakteristiky směrem k vyšším vlnovým číslům, což by mohlo mít využití pro některé aplikace. Navázat na tuto práci by šlo kupříkladu optimalizací tvaru tohoto typu materiálové funkce pro posílení popsaného jevu. Demonstrovali jsme, že použití řešení ve formě trikonfluentních Heunových funkcí, jejichž správnost byla ověřena pomocí numerické metody RKF45, představuje jedinou možnost pro popis Loveho vln při nízkých hodnotách vlnového čísla a zejména pak pro nemonotónní a více proměnlivé profily materiálové funkce. Naopak WKB metoda poskytuje velmi dobré aproximace v oblasti vyšších vlnových čísel, přičemž výpočetně je mnohem jednodušší a navíc umožňuje lepší matematický vhled do popisu chování Loveho vln šířících se v daném nehomogenním prostředí. Hlavní výhoda WKB metody navíc spočívá ve skutečnosti, že materiálovou funkci lze v jejím případě zadat analyticky, zatímco u námi zkoumané metody je třeba ji pouze aproximovat, což může být mnohdy pracný úkol. Nicméně nehledě na tyto nevýhody je zcela zásadní, že řešení, která poskytuje metoda založená na řešení trikonfluentní Heunovy rovnice, jsou analyticky přesná, což alternativní WKB neumožňuje. Všechny body zadání diplomové práce byly splněny.



Literatura

- [1] NOVOTNY, O. *Seismic Surface Waves: Lecture notes for post-graduate studies*. Salvador, Bahia: Instituto de Física, Instituto de Geociências, 1999.
- [2] KIEŁCZYŃSKI, P. Properties and Applications of Love Surface Waves in Seismology and Biosensors. In EBRAHIMI, F. (ed.). *Surface Waves: New Trends and Developments*. 2nd printing. London: IntechOpen, 2018. ISBN 978-1-78923-062-8. <https://doi.org/10.5772/intechopen.68840>
- [3] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. 4. vyd. Praha: Academia, 2011. ISBN 978-80-200-2039-0.
- [4] RILEY, K. F., HOBSON, M. P., BENCE, S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. 3rd printing. New York: Cambridge University Press, 2006. ISBN 978-0-511-16842-0.
- [5] RONVEAUX, A. (ed.). *Heun's Differential Equations*. 1st printing. Oxford: Oxford University Press, 1995. ISBN 978-0-19-859695-0.
- [6] BEDNARIK, M., CERVENKA, M. A wide class of analytical solutions of the Webster equation. *Journal of Sound and Vibration*, March 2020, vol. 469. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115169>
- [7] BATIC, D., MILLS-HOWELL, D., NOWAKOWSKI, M. Potentials of the Heun class: The triconfluent case. *Journal of Mathematical Physics*, 2015, vol. 56. <https://doi.org/10.1063/1.4921344>
- [8] BEDNARIK, M., CERVENKA, M., GROBY, J. P., LOTTON, P. One-dimensional propagation of longitudinal elastic waves through functionally graded materials. *International Jour-*

nal of Solids and Structures, August 2018, vol. 146, p. 43-54.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.017>

- [9] QIAN, Z., JIN, F., KISHIMOTO, K., LU, T. J. Propagation behavior of Love waves in a functionally graded half-space with initial stress. *International Journal of Solids and Structures*, March 2009, vol. 46, p. 1354-1361. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.11.003>
- [10] FEHLBERG, E. *Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems*, NASA Technical Report R-315. Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1969. <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19690021375>



Příloha A

Seznam příložených souborů



A.1 MAPLE Worksheets

- `aproximace_generujiciho_polynomu_MAPLE_worksheet.mw`
- `Loveho_vlny_homogenni_MAPLE_worksheet.mw`
- `Loveho_vlny_polynom_MAPLE_worksheet.mw`
- `Loveho_vlny_THF_MAPLE_worksheet.mw`