

Bakalářská práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
Katedra matematiky

Ljapunovská stabilita řešení diferenciálních rovnic

Filip Vodňanský

Školitel: Doc. Martin Bohata
Obor: Kybernetika a robotika
Květen 2020

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Vodňanský** Jméno: **Filip** Osobní číslo: **475397**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra řídicí techniky**
Studijní program: **Kybernetika a robotika**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Ljapunovovská stabilita řešení diferenciálních rovnic

Název bakalářské práce anglicky:

Lyapunov stability of solutions of differential equations

Pokyny pro vypracování:

- 1) Studujte pojmy stability (v Ljapunovovském smyslu) a asymptotické stability řešení obyčejných diferenciálních rovnic.
- 2) Diskutujte Ljapunovovu větu o stabilitě pro autonomní systémy a některé její přímé důsledky.
- 3) Aplikujte Ljapunovovu teorii stability na jednoduché ilustrativní příklady.

Seznam doporučené literatury:

- [1] R. Grimshaw: Nonlinear Ordinary Differential Equations, Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1990.
- [2] D.W. Jordan, P. Smith: Nonlinear Ordinary Differential equations, Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [3] H. Logemann, E.P. Ryan: Ordinary Differential Equations, Springer, London, 2014.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

doc. RNDr. Martin Bohata, Ph.D., katedra matematiky FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **22.01.2020**

Termín odevzdání bakalářské práce: **22.05.2020**

Platnost zadání bakalářské práce: **30.09.2021**

doc. RNDr. Martin Bohata, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

Děkuji mému vedoucímu práce za jeho podporu a veškerou pomoc s vypracováním této práce.

Také děkuji mým rodičům a bratrům za jejich podporu během celé doby mého studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 20. května 2020

Abstrakt

Práce představuje způsob určení stability ekvilibria nelineárních autonomních systémů. Ukazuje se, že pro návrh řízení, nebo stabilizaci nelze vždy využít linearizaci a je třeba zkoumat samotný nelineární systém. Jedna z technik používaných na analýzu stability je Lyapunovova funkce.

Cílem bakalářské práce je představit základy teorie stability a ukázat použití Lyapunovovy funkce na analýzu stability ekvilibria nelineárních systémů. Od definice stability se dostaneme k Lyapunově větě využívající Lyapunovovu funkci k určení stability a nakonec i k aplikaci teorie na hamiltonovské systémy. Vybudovaná teorie je pak využita na příkladu stabilizace inverzního kyvadla. Tento systém je z podstaty nelineární. Pomocí Lyapunovovy funkce se nám ale podaří navrhnout řídicí funkci a stabilizovat ho.

Klíčová slova: Nelineární systémy,
Lyapunovova stabilita,
Lyapunovova funkce,
Hamiltonovské systémy

Školitel: Doc. Martin Bohata

Abstract

This work presents a method used to determine stability of equilibrium of nonlinear autonomous system. For designing a control system or stabilization, linearization cannot always be used and it is necessary to analyze the nonlinear equations. One of the techniques used for determining systems stability is Lyapunov function.

The goal of this bachelor work is to present the basics of stability theory and show the application of Lyapunovs function to nonlinear systems equilibrium stability analysis. From the definition of stability we get to the Lyapunovs theorem, using a Lyapunov function to determine stability and finally application of the theory to hamiltonian systems. Presented theory is then used on the example of stabilizing inverted pendulum. This systems is nonlinear by nature. But by using a Lyapunov function we succeed in designing a control function stabilizing the pendulum.

Keywords: Nonlinear systems,
Lyapunov stability,
Lyapunov function,
Hamiltonian systems

Obsah

1 Úvod	1
2 Základní pojmy a definice	3
3 Stabilita ekvilibria	7
4 Lyapunovova věta a její důsledky	13
5 Inverzní kyvadlo	19
5.1 $a > 0, b = 0$	20
5.2 $a = 0, b > 0$	22
5.3 $a > 0, b > 0$	23
6 Závěr	27
Bibliografie	29

Obrázky

2.1 Okolí ekvilibria Lotka Volterra . .	6
3.1 Stabilní spirála tlumeného kyvadla	9
3.2 Centrum matematického kyvadla	10
3.3 Ekvilibrium tlumeného Duffingova oscilátoru	11
3.4 Ekvilibrium neltumeného Duffingova oscilátoru	11
5.1 Inverzní kyvadlo na vozíku, dostupné na https://upload.wikimedia.org/ wikipedia/commons/thumb/0/00/ Cart-pendulum.svg/ 546px-Cart-pendulum.svg.png . .	20
5.2 Stabilní horní poloha inverzního řízeného kyvadla	21
5.3 Nestabilní horní poloha inverzního řízeného kyvadla	21
5.4 Stabilní horní poloha inverzního řízeného kyvadla	23
5.5 Nestabilní kyvadlo	25
5.6 Stabilní kyvadlo	25

Kapitola 1

Úvod

Studium diferenciálních rovnic a stability řešení je velmi důležité pro pochopení chování různých fyzikálních systémů a pro návrh jejich řízení. Pro ty lineární dokážeme nalézt řešení a určit stabilitu pomocí určení vlastních čísel. Nelineární systémy je možné linearizovat, avšak tato metoda má svá omezení. Ztrácíme při ní informaci a vlastnosti systému původního a linearizovaného se mohou výrazně lišit. Ekvilibrií navíc může být více, můžeme narazit na limitní cykly a stabilita může být pouze lokální. V takovém případě může být užitečné znát maximální oblast stability.

Jsme tedy motivováni k nalezení nějaké lepší, obecnější metody jak stabilitu určit. Ve fyzikálních systémech můžeme často o stabilitě rozhodnout pomocí pojmu energie. Například je dobře známo z fyziky, že klidová poloha částice v konzervativním silovém poli je stabilní, nabývá-li v ní potenciální energie ostrého lokálního minima. Energie je fyzikální pojem, a proto při snaze studovat stabilitu řešení obecných soustav obyčejných diferenciálních rovnic musíme nalézt vhodné zobecnění. Tím je Lyapunovova funkce.

Lyapunov ve své práci navrhl dvě metody pro určení stability [Cun62], v této práci se budeme zabývat tou druhou, tedy vytvořením Lyapunovovy funkce. Na velmi úspěšnou Lyapunovovu teorii navázalo spousta matematiků a podařilo se jim jeho výsledky ještě rozšířit. Například N.G. Chetaev vyslovil velmi užitečnou větu, pomocí které jde dokázat naopak nestabilita ekvilibria [Kel15]. Za zmínku stojí také výsledky J.L. Massera, který studoval podmínky existence Lyapunovovy funkce [Mas49].

Studium Lyapunovovy stability zůstává stále aktivní oblastí výzkumu. Studují se využití vyšších derivací Lyapunovovy funkce, nebo její hledání. Pro určité systémy, lze problém nalezení takové funkce napsat jako problém konvexní optimalizace, který lze pak numericky řešit [Jam15].

Kapitola 2

Základní pojmy a definice

Snaha matematicky modelovat časový vývoj rozličných systémů často vede k obyčejným diferenciálním rovnicím. Tyto rovnice obsahují okamžité časové změny veličin popisujících uvažovaný systém. Nejdříve se přesněji podívejme na to, co budeme v tomto textu rozumět pod pojmem obyčejná diferenciální rovnice.

Definice 2.1. Obyčejná diferenciální rovnice (ODR) je rovnice ve tvaru $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

Rovnice v naší definici je rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci. Takový typ je velmi častý a pro naše účely bude zcela postačovat.

ODR můžeme dělit podle různých kritérií. Například nás může zajímat linearita rovnice vzhledem k neznámé funkci a jejím derivacím. Další důležité dělení je podle toho, zda funkce f obsahuje explicitně proměnnou t . Pokud proměnnou t neobsahuje, tj. $y^{(n)}(t) = f(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, mluvíme o autonomní ODR. Uvedme si pro ilustraci jednoduchý příklad matematického kyvadla. Jeho rovnice je

$$\varphi'' = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

Tato rovnice je nelineární a autonomní (pravá strana nezávisí explicitně na čase).

Věta 2.1. ODR libovolného řádu lze pomocí vhodné substituce převést na systém ODR prvního řádu.

Důkaz. Necht $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$.

Zavedeme substituci $x_i = y^{(i-1)}(t)$, $i = 1, \dots, n$ a napíšeme výsledný systém

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= x_3 \\&\vdots \\x_{n-1}' &= x_n \\x_n' &= f(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

□

V důkazu předchozí věty je uveden postup, jak ODR řádu n převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Ukažme si celý postup ještě na konkrétním příkladu rovnice matematického kyvadla. Položíme-li

$$\begin{aligned}x_1 &= \varphi(t) \\x_2 &= \varphi'(t),\end{aligned}$$

dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -\frac{g}{l} \sin x_1.\end{aligned}$$

Věta 2.2 (Peanova existenční věta). *Jestliže je funkce f spojitá na okolí bodu $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, pak systém $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, má alespoň jedno řešení na okolí bodu t_0 .*

Peanovu větu uvádíme bez důkazu. Její důkaz lze najít v běžné literatuře o diferenciálních rovnicích (např. v [W. Walter: Ordinary Differential Equations, Springer, New York, 1998]). Řešení soustavy n ODR prvního řádu si můžeme znázornit jako křivku v prostoru \mathbb{R}^n . Z tohoto pohledu nám Peanova věta říká, že každým bodem v otevřené množině D , na které je funkce f spojitá, prochází alespoň jedna křivka reprezentující řešení. Konkrétně například v úloze popisu pohybu matematického kyvadla je funkce f všude spojitá, a proto každým bodem v \mathbb{R}^2 prochází nějaké řešení. To není nikterak překvapující, neboť v klasické mechanice nemáme žádné omezení na rychlost kyvadla. Dále po rovnici můžeme požadovat aby řešení byla daná jednoznačně, to nám Peanova věta nezaručuje, jak je vidět na následujícím příkladu.

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0 \tag{2.1}$$

Pravá strana je zřejmě spojitá na okolí bodu $(0,0)$, a proto musí podle Peanovy věty existovat (alespoň lokálně) řešení uvažované úlohy. Řešení ale není jednoznačně určené. První řešení je jasné, triviální $x = 0$. Na další přijdeme například pomocí metody separace. Jestliže je $y(t)$ řešení pak $-y(t)$ je také řešení. Omezme se tedy nejprve na y kladné. Integrací

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt$$

dostaneme

$$2\sqrt{x} = t + C.$$

Položíme-li $C = 0$ dostaneme řešení $x_1(t) = \frac{t^2}{4}$ pro $t > 0$. Podle výše uvedené symetrie dostaneme další řešení $x_2(t) = -\frac{t^2}{4}$ tentokrát pro $t < 0$. Splením těchto řešení dostaneme řešení definované pro všechna t .

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\frac{t^2}{4}, & t < 0 \end{cases}$$

Toto řešení vyhovuje počáteční podmínce $x(0) = 0$. Konstantu C jsme položili rovnu nule abychom vyhověli počáteční podmínce.

Abychom měli zaručenu existenci jediného řešení, budeme muset spojitost funkce f nahradit restriktivnějším požadavkem. Pro naše účely bude postačovat požadavek spojitě diferencovatelnosti funkce f , který je sice relativně omezující, ale na druhou stranu se velmi snadno ověřuje. Dostáváme tak základní větu o existenci a jednoznačnosti pro obecně nelineární systémy, jejíž důkaz lze najít například v například [W. Walter: Ordinary Differential Equations, Springer, New York, 1998].

Věta 2.3. *Jestliže je funkce f spojitě diferencovatelná na okolí bodu $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, pak systém $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, má právě jedno řešení na okolí bodu t_0 .*

Když se teď vrátíme opět k příkladu v (2.1) všimneme si, že ze dvou řešení, mělo jedno všude nulovou derivaci. Tedy řešení zůstávalo stále stejné, bez vnějšího působení už by zůstalo na místě napořád. Takovému řešení se říká ekvilibrium a je z mnoha důvodů důležité a zajímavé. Například fyzikální systémy se přirozeně snaží dostat do rovnovážného stavu (ekvilibria). Pro konkrétnost zde zmiňme, že takovým ekvilibriem je stav kyvadla s nulovou výchylkou a nulovou okamžitou rychlostí, nebo třeba ustálený stav elektrického obvodu po odeznění všech přechodových jevů. Nyní si ekvilibrium formálně zdefinujeme.

Definice 2.2. Bod x_* se nazve ekvilibrium ODR $x' = f(t, x)$, jestliže $f(t, x_*) = 0$ pro všechna t .

Nyní máme všechno připravené na to, abychom mohli definovat Lyapunovovu stabilitu a zkoumat způsoby jak ji ověřit. Na následujícím příkladu si ještě ilustrujeme pojem ekvilibria a větu o existenci a jednoznačnosti.

Následující nelineární ODR představuje interakci dvou nepřátelských živočišných druhů v izolovaném prostředí [Gri93].

$$\begin{aligned}x' &= x(l - kx - py) \\y' &= y(m - ky + qx),\end{aligned}\tag{2.2}$$

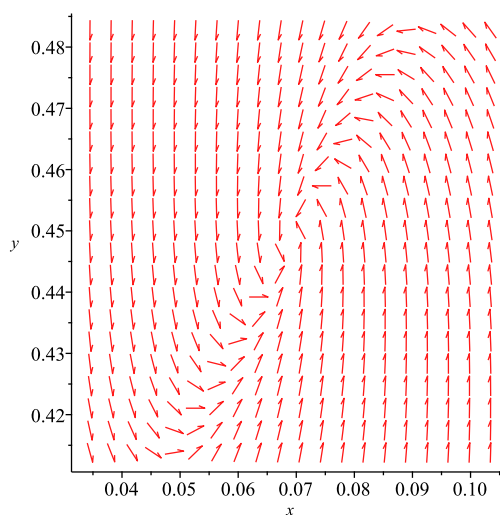
kde l , p , q a k jsou kladné konstanty. Tento systém se také někdy nazývá Lotka-Volterra. Neznámá funkce x popisuje vývoj populace kořisti v čase, zatímco funkce y popisuje vývoj populace predátora. Nejdříve se zaměříme na ověření existence a jednoznačnosti řešení. Obojí platí, protože pravá strana je evidentně všude spojitě diferencovatelná. Tedy každým bodem v rovině prochází právě jedno řešení. Nyní určíme všechna ekvilibria, podle definice (2.2) musíme vyřešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned}0 &= x(l - kx - py) \\0 &= y(m - ky + qx)\end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami dostaneme celkem 4 různá řešení.

- (i) $x = 0, \quad y = 0$
- (ii) $x = 0, \quad y = \frac{m}{k}$
- (iii) $x = \frac{l}{k}, \quad y = 0$
- (iv) $x = \frac{l-py}{k}, \quad y = \frac{mk+ql}{k^2+qp}$

Abychom mohli vykreslit obrázek zvolme si konkrétní hodnoty konstant, například $m = 1, l = 2, k = 3, p = 4, q = 5$. Tyto hodnoty slouží pouze pro ilustraci, v kontextu zkoumané rovnice nemají žádný větší význam. Na obrázku 2.1 je vykresleno tečné vektorové pole ke křivkám popisujícím řešení rovnice v okolí posledního ekvilibria. Z obrázku vidíme, že jednotlivá řešení v tomto okolí se k ekvilibriu přibližují a žádné se od něj nevzdaluje. Mohli bychom tak říci, zatím bez nároku na přesnost, že ekvilibrium je stabilní. Podrobněji si vše rozebereme v pozdější části textu..



Obrázek 2.1: Okolí ekvilibria Lotka Volterra

Kapitola 3

Stabilita ekvilibria

Uvažujme systém

$$x' = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.1)$$

Dále budeme předpokládat, že jsou splněny předpoklady věty (2.3). Nyní definujeme pojem stability ekvilibria.

Definice 3.1. Ekvilibrium x_* systému $x' = f(x, t)$ nazveme:

- (i) Lyapunovovsky stabilní, pokud pro libovolné $U_\epsilon(x_*)$ existuje $U_\delta(x_*)$ takové, že pro každé řešení $x(t)$ s $x(t_0) \in U_\delta(x_*)$ platí $x(t) \in U_\epsilon(x_*)$ pro každé $t \geq t_0$.
- (ii) Asymptoticky stabilní, pokud je Lyapunovovsky stabilní a existuje $U_\eta(x_*)$, $\eta > 0$ takové, že pro každé řešení $x(t)$ s $x(t_0) \in U_\eta(x_*)$ platí $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_*\| = 0$.
- (iii) Stejnoseměrně stabilní, pokud je Lyapunovovsky stabilní a okolí U_δ není závislé na počátečním čase t_0 .

Uveďme několik komentářů k předchozí definici.

Lyapunovova stabilita znamená, že řešení s počáteční podmínkou ležící dostatečně blízko ekvilibriu se nemůže od ekvilibria příliš vzdálit v žádném pozdějším čase.

Asymptotická stabilita znamená, že řešení začínající na nějakém okolí ekvilibria, do něho pro $t \rightarrow \infty$ směřují.

Stabilní řešení neautonomních systémů se mohou v čase stávat "méně stabilními". Uvažme například (viz [JS07]) parametrický systém funkcí

$$x(t) = \frac{c}{t} e^{(c^2-1)t}, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

Pro $|c| \leq 1$ směřuje x k nule. Ale s rostoucím časem je systém stále citlivější na výchyly. Zůstává stabilním, ale okolí U_δ se s časem zmenšuje. Je tedy závislé na čase a ekvilibrium není stejnoseměrně stabilní. Pro autonomní systémy navíc platí: (i) \implies (iii). Ještě zavedme úmluvu, že když napíšeme, že ekvilibrium je stabilní, pak máme na mysli, že je Lyapunovovsky stabilní.

Nechť je x_* ekvilibrium. Funkce $x(t)$ je řešením soustavy $x' = f(x, t)$ právě tehdy, když $y(t) = x(t) - x_*$ je řešením soustavy $y' = F(y, t)$, kde

$F(y, t) = f(y + x_*, t)$. Navíc $F(0, t) = f(x_*, t) = 0$ pro všechna t . Tedy 0 je ekvilibrium systému $y' = F(y, t)$.

Změna souřadnic nám může posloužit k poznání, jakým způsobem se řešení k ekvilibriu blíží. Například může nastat situace, že křivky řešení se sice blíží ekvilibriu, ale po spirále. Také je často pomocí změny souřadnic možné, původně těžko řešitelný systém, převést na jednodušší. Lze pomocí nich také ukázat souvislost nelineárního systému s jeho linearizací pro různé typy ekvilibrií viz [R. Grimshaw, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*].

Vezmeme teď nějaké ekvilibrium x_* systému (3.1), můžeme rovnou předpokládat $x_* = 0$, a nějaké jeho okolí $U_\epsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \epsilon\}$ pro nějaké $\epsilon > 0$. Na použité normě nezáleží, budeme ale dále předpokládat, že je klasická eukleidovská $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Dále zavedme polární, či sférické nebo i hypersférické souřadnice, podle potřeby. Dostaneme poté systém rovnic pro vzdálenost od počátku $r(t)$ a jednotlivé úhly $\theta_i(t)$. Ekvilibrium $x_* = 0$ se změní na $r_* = 0$, protože všechny vyjmenované souřadnice se zavádí jako součin r a goniometrických funkcí jednotlivých úhlů.

Zkoumání asymptotické stability tak v těchto nových souřadnicích převedeme na otázku, zda

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = 0. \quad (3.3)$$

Podívejme se na příklad tlumeného kyvadla a předpokládejme, že po změně souřadnic je systém řešitelný, tedy dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} r' &= f(r, \theta, t) \\ \theta' &= g(r, \theta, t) \end{aligned}$$

Často pak může nastat situace, kdy sice řešení směřují do ekvilibria, tedy r jde k nule, ale zároveň také platí, že

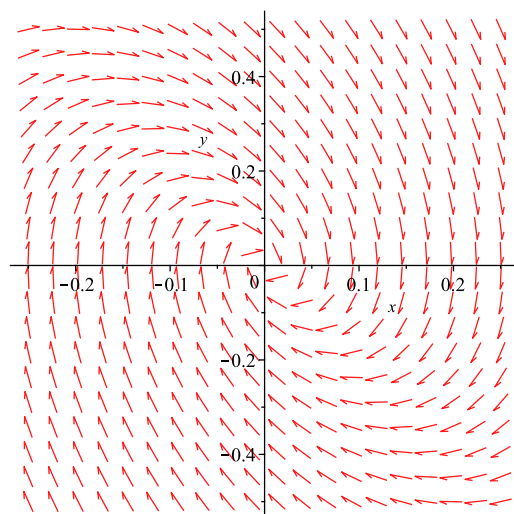
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty, \quad (3.4)$$

ilustrováno na obrázku 3.1, který představuje model tlumeného kyvadla. Tento typ ekvilibria nazveme spirálou.

Samotná podmínka 3.4 bez r směřujícímu k nule, ale omezenému shora znamená, že na libovolném okolí ekvilibria existuje vždy řešení tvořící uzavřenou křivku, to lze opět ukázat pomocí modelu kyvadla, tentokrát netlumeného. Maximální výchylka takového kyvadla je konstantní viz obrázek 3.2, ekvilibrium v tomto případě nazveme centrem (středem).

Podle příkladu tlumeného kyvadla a obrázků 3.1 a 3.2 vidíme, že ekvilibrium tvořící stabilní spirálu, je stabilní i asymptoticky stabilní. Centrum je pak pouze stabilní. Pro asymptoticky stabilní body, spirály, je také zajímavé zkoumat rychlost jejich konvergence k nule, vzdálenost od počátku se může snižovat velmi pomalu. Bylo by tedy užitečné najít hranici, pod kterou rychlost konvergence nikdy nespadne.

$$\|x(t)\| \leq f(t, t_0) \|x(t_0)\| \quad (3.5)$$



Obrázek 3.1: Stabilní spirála tlumeného kyvadla

Důležitá a často používaná je pro toto omezení exponenciální funkce $\beta e^{-\alpha(t-t_0)}$. Odhad s touto konkrétní funkcí vede k pojmu exponenciální stability [Sas99].

Pojmy spirály a centra mají velké využití v planárních systémech (tj. v soustavě dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu). Podle hluboké Poincarého-Bendixonovy věty platí, že každé řešení planárního systému, (přesněji pro všechna $t \geq t_0$) v uzavřené omezené množině splňuje vždy jednu z následujících podmínek:

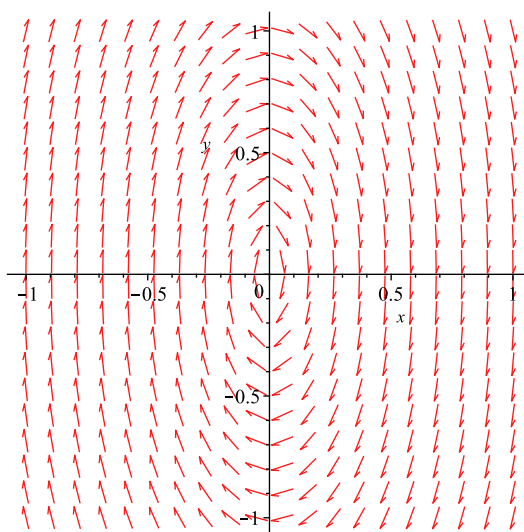
1. tvoří uzavřenou křivku,
2. blíží se k uzavřené křivce,
3. konverguje k ekvilibriu.

Intuitivně je zřejmá. Řešení se totiž nemohou křížit (díky větě o jednoznačnosti). Pokud tedy řešení leží pro všechna $t \geq t_0$ v omezené uzavřené množině, zřejmě se nemůže navždy pohybovat neperiodicky a musí se ustálit na nějaké uzavřené trajektorii. To také znamená, že se řešení nechová chaoticky (pro planární ale neautonomní systémy, to už ale neplatí). Důkaz této věty je ale poměrně obtížný.

Na závěr se ještě podívejme na příklad takzvaného Duffingova oscilátoru [Kan08]. Ten je popsán rovnicí

$$x'' + \delta x' + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos \omega t \quad (3.6)$$

a představuje model periodicky buzeného oscilátoru s nelineární pružností. Nemusí se ale jednat přímo o mechanický systém s oscilující zátěží. Rovnice může popisovat například i oscilaci napětí na nelineárním prvku v elektrickém



Obrázek 3.2: Centrum matematického kyvadla

obvodě apod. Budeme zkoumat případ kdy je nulové buzení, tedy $\gamma = 0$ a $\beta, \alpha > 0$. Pokud je nulové i tlumení $\delta = 0$, dostaneme

$$x'' + \beta x + \alpha x^3 = 0. \quad (3.7)$$

Po vynásobení rovnice členem x'

$$x''x' + \beta xx' + \alpha x^3x' = 0$$

Využitím věty o derivaci složené funkce obdržíme

$$\left(\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4 \right)' = 0.$$

Odtud plyne, že

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4 = H,$$

kde H je konstanta. Vidíme, že se v systému podél řešení zachovává veličina, značíme jí H podle Hamiltonovy funkce, která nám označuje celkovou energii soustavy.

Přepíšeme-li

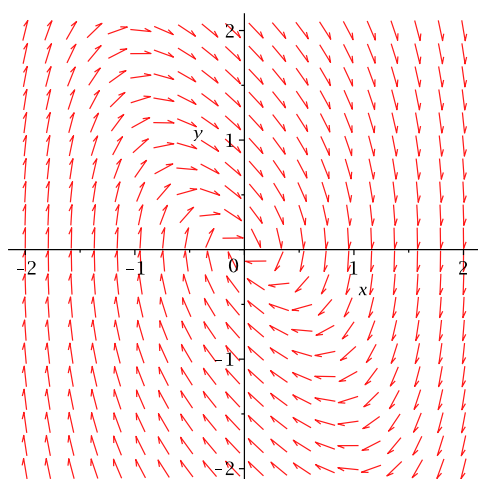
$$x'' + \beta x + \alpha x^3 = 0$$

do soustavy prvního řádu, dostaneme

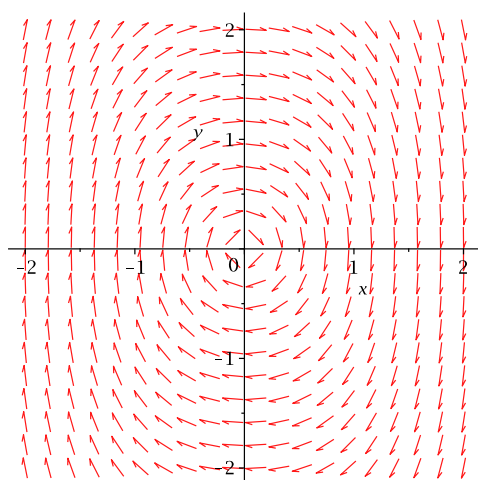
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\beta x - \alpha x^3. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že ekvilibrium je v počátku.

Protože energie H se podél řešení zachovává, musí toto řešení kroužit kolem ekvilibria po uzavřené křivce dané rovnicí $\frac{1}{2}y^2 + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\alpha}{4}x^4 = H$. Ekvilibrium



Obrázek 3.3: Ekvilibríum tlumeného Duffingova oscilátoru



Obrázek 3.4: Ekvilibríum neltumeného Duffingova oscilátoru

tedy tvoří centrum a je (stejněměrně) stabilní viz Obrázek 3.3. Pokud v systému působí tlumení $\delta > 0$, můžeme obdobně dostat

$$\frac{dH}{dt} = -\delta x'^2 \leq 0.$$

Energie v čase klesá, a systém tedy musí mířit do bodu s minimální energií, neboli do stabilního ekvilibrí viz obrázek 3.4.

Myšlenka najít funkci H popisující energii a pomocí ní zkoumat stabilitu je velmi užitečná. V další kapitole proto tuto myšlenku zobecníme, což nás dovede k pojmu Lyapunovovy funkce.

Kapitola 4

Lyapunovova věta a její důsledky

V příkladu v minulé kapitole jsme ukázali, jak lze zkoumat stabilitu pomocí nalezení funkce energie. Nepopisujeme ale vždy pouze fyzikální systémy, energie má tedy v tomto případě trochu jiný význam. Funkci energie zobecníme na funkci $V(x)$. Užitečnost zavedení takové funkce si motivujeme následující úvahou. Představme si planární systém a v něm funkci energie V , jejíž vrstevnice $V(x) = \alpha$ tvoří uzavřené jednoduché křivky (tj. Jordanovy křivky) kolem ekvilibrria. Bude-li derivace $V(x(t))$ nekladná pro každé řešení $x(t)$, pak V nemůže podél žádného řešení narůstat. To ale znamená, že když počáteční podmínka $x(t_0)$ bude ležet uvnitř křivky $V(x) = \alpha$, pak odpovídající řešení nemůže opustit množinu ohraničenou křivkou $V(x) = \alpha$. Odtud vidíme, že ekvilibrium bude stabilní. Sestrojení Lyapunovovy funkce a určení stability podle její definitnosti se nazývá druhá Lyapunovova metoda pro určování stability ekvilibrria [Cun62].

Než přistoupíme k formulaci Lyapunovovy věty, podívejme se ještě na důležitý pojem derivace podél řešení. Mějme spojitě diferencovatelnou funkci $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a systém $x' = f(x)$. Pro řešení $x(t)$ máme

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \langle \nabla V(x), x'(t) \rangle = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle. \quad (4.1)$$

Derivací V podél řešení budeme proto rozumět funkci

$$V'(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle. \quad (4.2)$$

Všimněme si, že k jejímu výpočtu nepotřebujeme znát konkrétní tvar řešení.

Definice 4.1. Spojitě diferencovatelná funkce $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá Lyapunovova funkce systému $x' = f(x)$ s ekvilibrriem $x_* = 0$ pokud na nějakém okolí počátku U platí:

- (i) $V(0) = 0$,
- (ii) $V(x) > 0$ pro všechna nenulová $x \in U$,
- (iii) $V'(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$,

Věta 4.1 (Lyapunovova věta). *Pokud existuje Lyapunovova funkce, pak je ekvilibrium lokálně stabilní.*

Tato věta je pro nás naprosto zásadní, podíváme se tedy na důkaz.

Důkaz. Zvolme $\epsilon > 0$. Uvažme kružnici $K_r \subseteq U$ se středem v počátku a poloměrem $r > 0$. Volme r tak, aby $r < \epsilon$. Protože V je spojitá na neprázdné omezené uzavřené množině K_r , nabývá V na K_r minima díky Weierstrassově větě. Z (i) navíc plyne, že funkce V je kladná na K_r , a proto

$$\min_{x \in K_r} V(x) = m > 0.$$

Ze spojitosti V a předpokladu (i) plyne existence čísla $\delta > 0$ takového, že $V(x) < m$ na $U_\delta(0)$. Toto δ navíc budeme volit tak, aby $\delta < r$. Ať $x(t)$ je řešení systému $x'(t) = f(x)$ vyhovující počáteční podmínce $x(t_0) = x_0 \in U_\delta(0)$. Protože je $V'(x) \leq 0$, je

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^t V'(x(\tau)) d\tau \leq 0.$$

Tedy $V(x(t)) \leq V(x_0) < m$ pro každé $t \geq t_0$.

Odtud plyne, že $\|x(t)\| < r < \epsilon$ pro všechna $t \geq t_0$. \square

Tato věta bohužel neříká nic o tom, jak Lyapunovovu funkci nalézt. Žádný způsob, jak Lyapunovovu funkci obecně nalézt, neznáme. Pouze pro různé speciální případy umíme Lyapunovovu funkci zkonstruovat. Například pro lineární systémy ji lze vždy nalézt pomocí známého postupu. Pro hamiltonovské systémy, jak ukážeme později, je Lyapunovova funkce často přímo hamiltonián. To odpovídá představě Lyapunovovy funkce jako energie. Lze pomocí ní také určit asymptotickou a stejnosměrnou stabilitu, jak ukazuje následující věta.

Věta 4.2. *Pokud existuje spojitě diferencovatelná funkce $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ systému $x' = f(x)$ s ekvilibriem $x_* = 0$ tak, že na nějakém okolí počátku U platí:*

- (i) $V(0) = 0$,
- (ii) $V(x) > 0$ pro všechna nenulová $x \in U$,
- (iii) $V'(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$,

tak je ekvilibrium x_ asymptoticky stabilní.*

$V(x)$ je tedy také Lyapunovova funkce, pouze je zde silnější podmínka na zápornost derivace. Důkaz lze najít například v [Gri93]. Máme zde pouze derivaci všude zápornou, předpokládáme že takové řešení, které z okolí unikne existuje a dostaneme se k sporu.

Pokud na $V(x)$ pohlížíme jako na energii, dává tato věta intuitivně smysl. Podél řešení energie klesá, a proto se s postupujícím časem musí řešení dostávat stále blíže a blíže k řešení s nulovou (minimální) energií. Stejnosměrné stabilitě se nyní věnovat nebudeme, většinou budeme zkoumat autonomní systémy, kde jak jsme dříve ukázali je ekvivalentní s lyapunovovskou stabilitou. V neautonomních případech bychom se pak omezili na klasickou stabilitu. Další důležitá otázka je existence Lyapunovovy funkce. Nejen z pohledu

matematiky jsou důležité věty ve tvaru ekvivalence. Bylo by tedy hezké, kdybychom mohli ukázat, že existence Lyapunovovy funkce není pouze podmínka postačující, ale také podmínka nutná pro stabilitu (či asymptotickou stabilitu) ekvilibrí. Velký pokrok udělal v Lyapunovově stabilitě a funkci J. L. Massera. Ukázal, že pro asymptoticky stabilní ekvilibríum lze vždy nalézt Lyapunovovu funkci. [Mas49]. Existuje mnoho dalších vět ukazující existenci funkce pro různé případy, více v [Kel15].

Na následujícím příkladě si ukážeme aplikaci vět na dokázání stability.

Uvažujme systém [Sas99]

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -g(x_1) - f(x_2).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Tyto rovnice mohou modelovat RLC obvod s nelineárním kondenzátorem, resistorem a lineární cívkou. Kupodivu také modeluje mechanický systém se zátěží na nelineární pružině a nelineárním tlumením. Předpokládejme, že funkce f a g jsou nezáporné a $f(0) = g(0) = 0$, tedy ekvilibríum x_* je v počátku.

Návrh na možnou Lyapunovovu funkci může být

$$V(x) = \int_0^{x_2} f(y)dy \geq 0.$$

Její derivace je pak

$$V'(x) = -f(x_2)(g(x_1) + f(x_2)) \leq 0.$$

$V(x)$ je tedy skutečně Lyapunovova funkce a ekvilibríum x_* je stabilní.

Protože nalezení Lyapunovovy funkce, je často tak složitý problém, je výhodné porozumět tomu, jaký typ funkcí má smysl zkoušet. Například $V(x)^2$ je Lyapunovovy funkce právě tehdy, když je $V(x)$ Lyapunovovy funkce. Pokud tedy existuje Lyapunovovy funkce alespoň jedna, tak jich existuje nekonečně mnoho.

Uvažujme $V_1(x)$ a $V_2(x)$ jako Lyapunovovu funkci obecného autonomního systému $x' = f(x)$. Pokusíme se dokázat, že následující jsou také Lyapunovovy funkce:

- (i) $V(x) = V_1(x)V_2(x)$
- (ii) $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$
- (iii) $V(x) = kV_1(x)$, kde $k > 0$

První dvě podmínky Lyapunovovy funkce přímo vyplývají z toho, že $V_1(x)$ a $V_2(x)$ jsou Lyapunovovy funkce. Derivace jejich součinu je

$$\begin{aligned}V'(x) &= \langle (\langle \nabla V_1(x), V_2(x) \rangle + \langle V_1(x), \nabla V_2(x) \rangle), f(x) \rangle = \\&= \langle \nabla V_1(x), f(x) \rangle \langle V_2(x), \cdot \rangle + \langle V_1(x), \nabla V_2(x) \rangle \langle \cdot, f(x) \rangle \leq 0,\end{aligned}$$

kde jsme opět využili faktu, že se jedná o součin dvou LF. Derivace součtu je podobně

$$V'(x) = \langle \nabla V_1(x), f(x) \rangle + \langle \nabla V_2(x), f(x) \rangle \leq 0\tag{4.4}$$

a derivace násobku

$$k\langle \nabla V_1(x), f(x) \rangle \leq 0. \quad (4.5)$$

Pokud tedy známe už nějaké $V_1(x)$ můžeme toho využít pro sestavení dalších, důležitější je ale většinou opačný postup, tedy když nalezneme funkce, které nemohou být LF. Můžeme tímto postupem rovnou vyřadit mnoho dalších kandidátů, což nám může ušetřit spoustu času při hledání vhodné funkce. Tento postup lze rozšířit na libovolný konečný počet funkcí. Platí tedy také, že libovolná mocnina $V(x)^k$ je LF ale také, že polynom $p(V(x))$ je sám také LF.

Podívejme se teď na další důsledky Lyapunovovy teorie. V případě nestabilního ekvilibria je potřeba mít také nástroj k dokázání nestability. Toho lze docílit pomocí úpravy Lyapunovovy věty. Viděli jsme, že existence Lyapunovovy funkce V zajišťuje stabilitu. V důkazu této postačující podmínky hrál důležitou roli požadavek nekladnosti derivace $V'(x)$. Proto zkusíme požadovat existenci vhodné funkce, která bude mít naopak derivaci (podél řešení) kladnou. Dostaneme tak následující větu.

Věta 4.3. *Mějme systém $x' = f(x)$ s ekvibiem $x_* = 0$. Předpokládejme, že existuje spojitě diferencovatelná funkce $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, která na nějakém okolí U ekvilibria x_* splňuje následující podmínky:*

- (i) $V(0) = 0$,
- (ii) $V'(x) > 0$ pro všechna nenulová $x \in U$,
- (iii) na každém okolí ekvilibria existuje takové x , že $V(x) > 0$,

Ekvilibrium x_ je pak nestabilní.*

Důkaz. Volme $\epsilon > 0$ menší, než je poloměr okolí U . Ať $\delta > 0$ je libovolné. Z předpokladu (iii) existuje $x_0 \in U_\delta(0)$ tak, že $V(x_0) > 0$. Předpokládejme, že $x(t)$ je řešení splňující podmínku $x(t_0) = x_0$. Ukažme sporem, že $x(t)$ nezůstane pro všechna $t \geq t_0$ v $U_\epsilon(0)$. Pro spor předpokládejme, že $x(t) \in U_\epsilon(0)$ pro všechna $t \geq t_0$. Pak $\|x(t)\| \leq \epsilon$. Díky předpokladu (ii) je $V'(x(t))$ neklesající na $[t_0, \infty)$. Odtud $0 \leq V(x_0) \leq V(x(t))$ pro všechna $t \geq t_0$. Ze spojitosti V a podmínky (i) proto existuje konstanta $l > 0$ taková, že $\|x(t)\| \geq l$. Díky Weierstrassově větě existuje minimum m funkce $V'(x)$ na množině $\{x \in U \mid l \leq \|x\| \leq \epsilon\}$. Navíc z (ii) plyne, že $m > 0$. Odtud

$$V(x(t)) - V(x_*) = \int_{t_0}^t V'(x(\tau)) d\tau \geq m(t - t_0).$$

Dostali jsme tak, že $V(x)$ je neomezená na uzávěru okolí $U_\epsilon(0)$. To však není možné díky Weierstrassově větě. \square

Všimněme si podobnosti s Lyapunovovou větou. Rozdíl mezi nimi není jen ve znaménku derivace, ale také v požadavku na definitnost funkce. Pro nestabilitu stačí, aby existoval jediný bod na každém okolí, ve kterém bude funkce kladná. To souvisí s tím, že pro stabilitu ekvilibria musíme zkoumat všechna řešení na jeho okolí, zatímco pro nestabilitu stačí nalézt jediné řešení, které z každého okolí ekvilibria unikne. Obecně bývá dokázat nestabilitu

jednodušší, lze zde lépe využít linearizace než pro stabilitu. Často nás navíc ani nemusí zajímat typ nestabilního ekvilibria, může jít například o nestabilní spirálu, nicméně ve většině aplikací se snažíme řízením zařídit stabilitu, často právě s pomocí Lyapunovovy funkce. Samotná informace o nestabilitě tedy většinou stačí.

Další věta o nestabilitě je Chetaevova věta [Kel15], která vylepšuje předešlou větu. Využívá se v ní Chetaevových funkcí, které jsou podobné Lyapunovově funkci a myšlenka je v zásadě stejná, pouze chceme prokázat nestabilitu.

Definice 4.2. Mějme systém $x' = f(x)$ s ekvibiem $x_* = 0$, otevřenou kouli $U_\delta(x_*)$ a otevřenou množinu $D \subset U_\delta(x_*)$. Spojitě diferencovatelná funkce $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že platí

- (i) $x_* \in \partial D$
- (ii) $V(x) = 0$ pro $x \in \partial D \cap U_\delta(x_*)$
- (iii) pro všechna $x \in D$ je $V(x) > 0$ a $V'(x) > 0$

se nazývá Chetaevova funkce.

Věta 4.4. Pokud existuje Chetaeva funkce, je ekvilibrium nestabilní.

Vylepšení oproti předchozí větě je, že stačí najít jakoukoliv otevřenou množinu, na které bude mít $V(x)$ a $V'(x)$ stejné znaménko.

Vrátíme se nyní k souvislosti Lyapunovovy funkce se zachovávanou veličinou systému. V některých fyzikálních systémech se zachovává celková energie, kterou popisuje Hamiltonova funkce. Příklad takového systému jsme uvedli při diskuzi Duffingova oscilátoru popsaného rovnicemi (3.7). Schválně jsme tam tuto veličinu značili H . Jednalo se o hamiltonovský systém.

Definice 4.3. Funkce $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá první integrál systému $x' = f(x)$, pokud je spojitě diferencovatelná, nekonstantní a její derivace podél trajektorií řešení je $L'(x) = \langle \nabla L(x), f(x) \rangle = 0$.

Definice 4.4. Systém se nazývá hamiltonovský pokud existuje spojitě diferencovatelná funkce H taková, že

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pokud tedy máme obecně soustavu ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y), \end{aligned}$$

a chceme rozhodnout, zda se jedná o hamiltonovský systém, musíme zkoumat existenci řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ g(x, y) &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Lze pak ukázat, že následující podmínka 4.8 je nutná a postačující pro existenci hamiltoniánu [Gri93].

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}. \quad (4.8)$$

Dále ověříme, že funkce H je vždy první integrál. Musíme tedy derivovat podél řešení

$$\frac{\partial H}{\partial x}x' + \frac{\partial H}{\partial y}y' = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Jedná se opravdu o první integrál.

Dokažme si známé tvrzení z mechaniky, které je jednoduchou aplikací Lyapunovovy věty.

Věta 4.5. *Mějme hamiltonovský systém s hamiltoniánem $H(x, y) = \frac{1}{2}\langle y, y \rangle + V(x)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Jestliže V má v 0 ostré lokální minimum, pak $(0, 0)$ je stabilním ekvilibriem.*

Důkaz. Jestliže V má v 0 ostré lokální minimum, pak $\nabla V(0) = 0$. Odtud $(0, 0)$ je ekvilibrium. Položme $L(x, y) = H(x, y) - H(0, 0)$. Protože V má v 0 ostré lokální minimum, $H(x, y)$ je první integrál, $\frac{1}{2}\langle y, y \rangle \geq 0$ a rovnost nastává právě tehdy, když $y = 0$, splňuje funkce L předpoklady Lyapunovovy věty. Proto je $(0, 0)$ stabilní ekvilibrium. \square

Podívejme se na příklad hamiltonovského systému. Mějme rovnice

$$\begin{aligned} x' &= 2y \\ y' &= 6x^2 - 2x - 4x^3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aby se jednalo o hamiltonovský systém, je nutné a stačí aby platilo (4.8). Ověříme, že to tak je

$$\frac{\partial 2y}{\partial x} = 0 = \frac{\partial 6x^2 - 2x - 4x^3}{\partial y}.$$

Pro hamiltonián musí platit (4.7). Zkusíme tedy nejprve zintegrovat první rovnici

$$\int 2y dy = y^2 + C(x).$$

Dosazením do druhé rovnice v (4.7) obdržíme

$$C'(x) = -6x^2 + 2x + 4x^3.$$

Proto

$$C(x) = -2x^3 + x^2 + x^4,$$

kde integrační konstantu jsme zvolili pro jednoduchost nulovou, neboť přičtením libovolné konstanty k hamiltoniánu nezměníme soustavu rovnic (4.6).

V tomto případě, jsme takto opravdu našli hamiltonián

$$\begin{aligned} H &= y^2 - 2x^3 + x^2 + x^4 = y^2 + x^2(-2x + 1 + x^2) = \\ &= y^2 + x^2(x - 1)^2. \end{aligned}$$

Jedno z ekvilibrií je $(x, y) = (0, 0)$, vidíme, že platí $H(0, 0) = 0$, $H > 0$ a z definice prvního integrálu $H' = 0$. H je tedy také Lyapunovova funkce a ekvilibrium v počátku je stabilní.

Kapitola 5

Inverzní kyvadlo

Máme nyní všechnu potřebnou teorii k tomu, abychom mohli ukázat využití Lyapunovovy stability na řízení a stabilizaci složitějších systémů. První příklad na který se podíváme, je inverzní kyvadlo s řídicí silou horizontálně pohybující jeho základnou. Uvažujme kyvadlo, kde na základnu působí řídicí síla

$$F_r = a\theta + b\theta', \quad (5.1)$$

kde konstanty a a b jsou nezáporné [JS17]. Rovnice popisující inverzní kyvadlo se zanedbatelnou hmotností, bez tlumení a pružnosti bude

$$\theta'' = \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\cos \theta}{l} (a\theta + b\theta'), \quad (5.2)$$

kde θ je úhel vychýlení kyvadla z horní polohy. Často se tento systém realizuje například připevněním kyvadla na vozítko, které pak řídíme a tím stabilizujeme kyvadlo viz Obrázek 5.1. Pro naši potřebu teď předpokládejme, že dynamika vozítka nebo jiného zařízení řídicí kyvadlo je zanedbatelná. Převědeme systém na soustavu prvního řádu

$$\begin{aligned} \theta' &= \varphi \\ \varphi' &= \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\cos \theta}{l} (a\theta + b\varphi). \end{aligned} \quad (5.3)$$

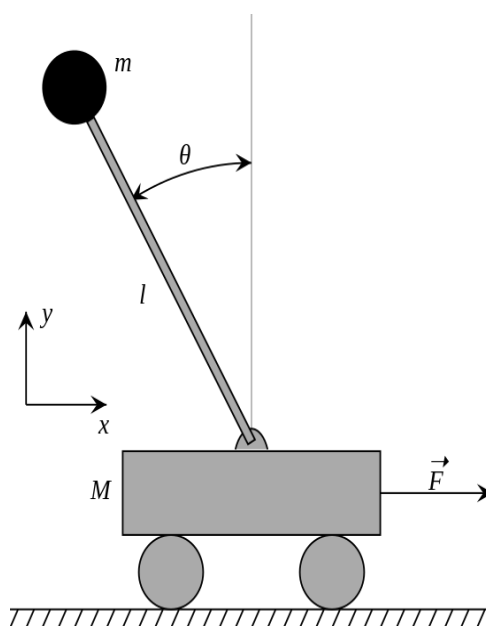
Pro nalezení ekvilibríí položíme derivace rovny nule.

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \\ 0 &= \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\cos \theta}{l} (a\theta + b\varphi) \end{aligned}$$

Budeme zkoumat kyvadlo v horní poloze, ověříme tedy, že $(\theta, \varphi) = (0, 0)$ je ekvilibríum.

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \\ 0 &= \frac{g}{l} 0 - \frac{1}{l} (0 + 0) \end{aligned}$$

Chceme nyní zjistit, pro jaké a a b bude kyvadlo v horní poloze stabilní. Pokusíme se tedy navrhnout Lyapunovu funkci, abychom mohli použít Lyapunovovu větu. Budeme postupně zkoumat jednotlivé případy, kdy je vždy jedna z konstant a a b nulová a nakonec když jsou obě kladné.



Obrázek 5.1: Inverzní kyvadlo na vozíku, dostupné na <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/00/Cart-pendulum.svg/546px-Cart-pendulum.svg.png>

5.1 $a > 0$, $b = 0$

$$\begin{aligned}\theta' &= \varphi \\ \varphi' &= \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\cos \theta}{l} (a\theta).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Protože se jedná o kyvadlo bez tlumení, budeme předpokládat, že pokud je ekvilibrum stabilní, tak se jedná o centrum. Tuto intuici nám pro konkrétní hodnoty konstant podpoří simulace na Obrázku 5.2, kde za konstanty jsme dosadili hodnoty: $g = l = 9.8$, $a = 20$ a na Obrázku 5.3, kde $g = l = 9.8$, $a = 5$. Aby bylo ekvilibrum stabilní musí totiž platit také $\frac{a}{l} > \frac{g}{l} > 1$.

Pro nalezení Lyapunovovy funkce budeme postupovat následovně. Jako její první člen položíme

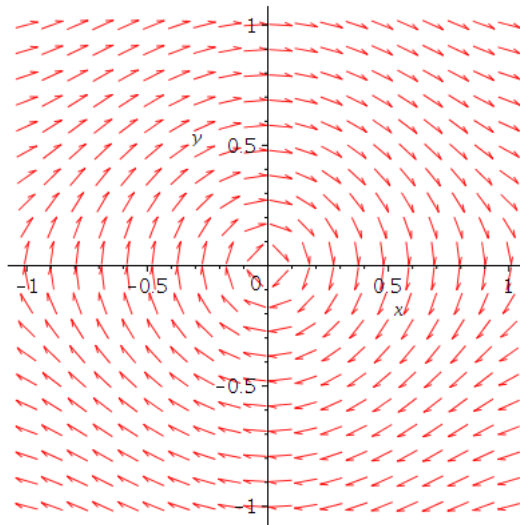
$$V(\theta, \varphi) = \frac{\varphi^2}{2}$$

a napíšeme derivaci

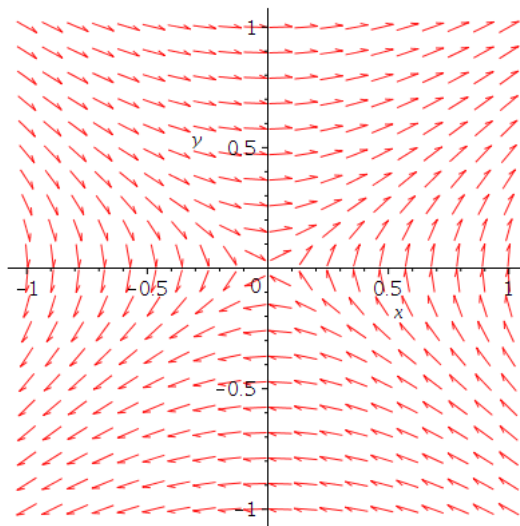
$$V'(\theta, \varphi) = \varphi \left(\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{a}{l} \theta \cos \theta \right)$$

Protože se jedná o centrum nedokážeme najít $V(\theta, \varphi)$ s negativně definitní derivací ale pouze semidefinitní. Budeme postupně přidávat členy do $V(\theta, \varphi)$ aby se odečítali od členů v derivaci. Tímto postupem jsme dokázali najít

$$\begin{aligned}V(\theta, \varphi) &= \frac{\varphi^2}{2} + \frac{g}{l} \cos \theta + \frac{a}{l} \theta \sin \theta + \frac{a}{l} \cos \theta - \frac{g}{l} - \frac{a}{l} = \\ &= \frac{\varphi^2}{2} + \frac{a}{l} \theta \sin \theta + (\cos \theta - 1) \left(\frac{g}{l} + \frac{a}{l} \right).\end{aligned}\tag{5.5}$$



Obrázek 5.2: Stabilní horní poloha inverzního řízeného kyvadla



Obrázek 5.3: Nestabilní horní poloha inverzního řízeného kyvadla

První podmínka Lyapunovovy věty je $V(0,0) = 0$, to je splněno. Druhá podmínka Lyapunovovy věty je nezápornost Lyapunovovy funkce na okolí ekvilibrí, v naší funkci je pro $a > 0$, $\frac{a}{l} > 1$ a $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^2}{2} &> 0 \\ \frac{a}{l} \theta \sin \theta &\geq 0 \\ (\cos \theta - 1) \left(\frac{g}{l} + \frac{a}{l} \right) &\leq 0, \end{aligned}$$

dohromady $V > 0$. Třetí podmínka je pak negativní semidefinitnost derivace.

$$\begin{aligned} V' &= \varphi \left(\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{a}{l} \theta \cos \theta \right) + \frac{a}{l} \varphi \sin \theta + \frac{a}{l} \theta \varphi \cos \theta - \frac{g}{l} \varphi \sin \theta - \frac{a}{l} \varphi \sin \theta = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ekvilibrum je tedy stabilní a Lyapunovova funkce je v tomto případě i první integrál. Alternativní postup je všimnout si, že systém je hamiltonovský. Snadno totiž ověříme nutnou a postačující podmínku (4.8) pro existenci Hamiltoniánu. Hamiltonián pak najdeme intergrací. Z rovnice $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \varphi$ dostaneme

$$H(\theta, \varphi) = \frac{\varphi^2}{2} + C(\theta). \quad (5.6)$$

Dosazením do rovnice $-\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{a\theta}{l} \cos \theta$ obdržíme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci $C(\theta)$ ve tvaru

$$C'(\theta) = -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{a\theta}{l} \cos \theta.$$

Odtud

$$C(\theta) = \frac{g}{l} \cos \theta + \frac{a}{l} (\theta \sin \theta + \cos \theta) + K,$$

kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Hodnotu K budeme volit tak, aby $H(0, 0) = 0$. To znamená, že $K = -\frac{a+g}{l}$. Proto

$$H(\theta, \varphi) = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{a\theta}{l} \sin \theta + \frac{g+a}{l} (\cos \theta - 1) = V(\theta, \varphi). \quad (5.7)$$

Kyvadlo je tedy stabilizovatelné pomocí funkce závisící pouze na úhlové výchylce od ekvilibrria.

5.2 $a = 0, b > 0$

Přesvědčíme se nyní, že pomocí derivace úhlové výchylky to nejde a využijeme k tomu Větu 4.4. Funkci z Věty 4.4 budeme volit ve tvaru

$$V(\theta, \varphi) = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{b}{l} \varphi \sin \theta. \quad (5.8)$$

Chceme najít otevřenou množinu, na které bude tato funkce kladná. Necht

$$D = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < k\} \quad (5.9)$$

Tvrdíme, že funkce V je na této množině kladná.

První člen $\frac{\varphi^2}{2}$ je zjevně kladný. Druhý člen $\frac{b}{l} \varphi \sin \theta > \frac{b}{l} \varphi$ je také kladný za

předpokladu $b > 0$. Dále zřejmě $(0, 0) \in \partial D$ a $V(0, 0) = 0$. Chceme tedy, aby derivace byla na množině D kladná. Derivujeme-li V podél řešení, dostaneme

$$\begin{aligned} V' &= \varphi \left(\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{b}{l} \varphi \cos \theta \right) + \frac{b}{l} \varphi^2 \cos \theta + \frac{b}{l} \sin \theta \left(\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{b}{l} \varphi \cos \theta \right) = \\ &= \varphi \sin \theta \left(\frac{g}{l} - b^2 \cos \theta \right) + b \frac{g}{l} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.10)$$

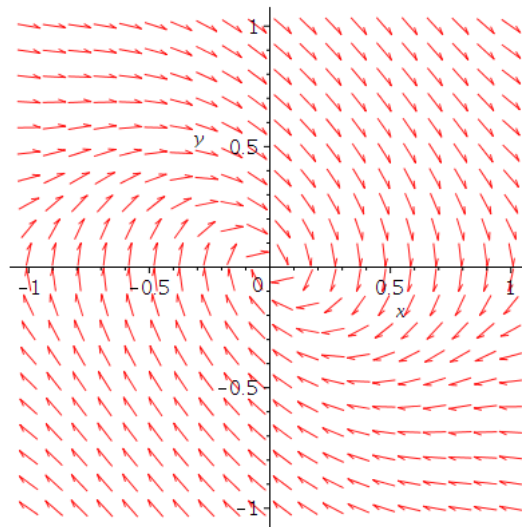
Z podmínek definujících množinu D plyne, že V' je na této množině kladná. Funkce V splňuje podmínky Věty 4.4. Ekvilibrium je tedy nestabilní a systém tímto způsobem není stabilizovatelný.

■ 5.3 $a > 0$, $b > 0$

Pro obě konstanty kladné bude soustava vypadat takto

$$\begin{aligned} \theta' &= \varphi \\ \varphi' &= \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{\cos \theta}{l} (a\theta + b\varphi). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Budeme se snažit dokázat, že je ekvilibrium i v tomto případě stabilní. Ve speciálním případě volby konstant $g = l = 9.8$, $a = 20$ a $b = 8$ nám tuto situaci dokládá simulace na Obrázku 5.4. Dokonce to vypadá, že by se mohlo



Obrázek 5.4: Stabilní horní poloha inverzního řízeného kyvadla

jednat o asymptoticky stabilní ekvilibrium. Přesvědčíme se o tom. Podobným postupem jako v prvním případě s $b = 0$, budeme postupně zkoušet odečítat členy z derivace, abychom zachovali kladnost funkce a pokusili se zajistit zápornost derivace. Napřed tedy zkusíme

$$V(\theta, \varphi) = \frac{\varphi^2}{2}.$$

Derivace je

$$V' = \varphi \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{a}{l} \varphi \theta \cos \theta - \varphi^2 \frac{b}{l} \cos \theta.$$

Všimneme si, že člen $-\varphi^2 \frac{b}{l} \cos \theta$ je na okolí počátku už záporný. Byli bychom tedy úspěšní s hledáním, kdybychom se zbavili dalších dvou členů. Nejprve zkusíme odečíst první tedy budeme chtít k derivaci přičíst $\frac{a}{l} \varphi \theta \cos \theta$. Změníme funkci na

$$V(\theta, \varphi) = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{a}{l} \theta \sin \theta$$

a derivace bude

$$V' = \varphi \frac{g}{l} \sin \theta - \varphi^2 \frac{b}{l} \cos \theta + \frac{a}{l} \varphi \sin \theta = \varphi \sin \theta \left(\frac{g}{l} + \frac{a}{l} \right) - \varphi^2 \frac{b}{l} \cos \theta.$$

Nyní se zbavíme $\varphi \sin \theta \left(\frac{g}{l} + \frac{a}{l} \right)$ a budeme hotovi. Změníme funkci na

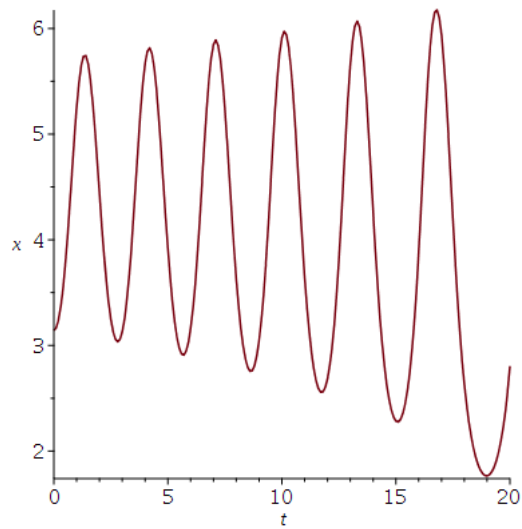
$$V(\theta, \varphi) = \frac{\varphi^2}{2} + \frac{a}{l} \theta \sin \theta + (\cos \theta - 1) \left(\frac{g}{l} + \frac{a}{l} \right). \quad (5.12)$$

Místo $\cos \theta$ píšeme $\cos \theta - 1$ abychom zaručili podmínku (i) Lyapunovovy věty $V(0) = 0$. Derivace bude pak

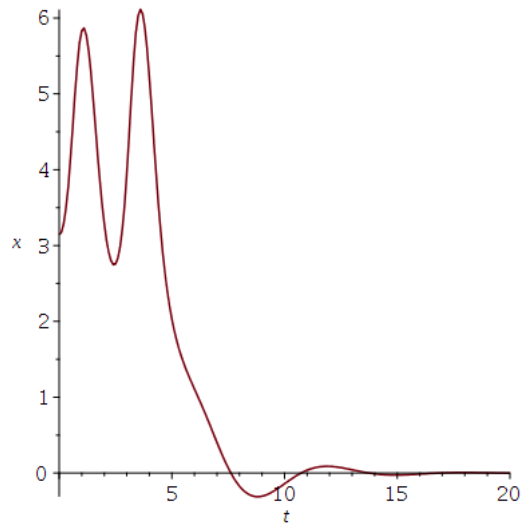
$$V' = \varphi^2 \frac{a}{l} \cos \theta < 0,$$

pro $b > 0$. Funkce je na okolí ekvilibria kladná, derivace záporná a podle Věty 4.2 je tedy ekvilibrium asymptoticky stabilní.

Pozor je třeba ale dát na to, že neznáme okolí ekvilibria, na kterém toto platí. Zkusíme rovnici s řízením vyřešit numericky (použitá numerická metoda Runge–Kutta–Fehlberg). Nastavíme konstanty $g = l = 9.8$, $a = 15$ a $b = 2$ a zkusíme dát počáteční výchylku rovnu π . Kyvadlo bude tedy začínat v dolní poloze a budeme chtít aby se stabilizovalo v horní. Simulace je na obrázku 5.5. Vidíme, že se kyvadlo rozkmitalo, počáteční výchylka byla příliš velká, neboli jsme se dostali mimo okolí, na kterém jsme dokázali stabilitu. Pokud ale nastavíme konstanty řízení jako například $a = 22$ a $b = 8$ tak se kyvadlo opravdu stabilizuje v horní poloze jak je ukázáno simulací na obrázku 5.6.



Obrázek 5.5: Nestabilní kyvadlo



Obrázek 5.6: Stabilní kyvadlo

Předvedli jsme nyní, jedene ze způsobů stabilizace kyvadla v horní poloze, a to řízením horizontální polohy jeho základny. Překvapivý výsledek dokázal v roce 1951 Pyotr Kapitza, když ukázal, že je ekvilibrium v horní poloze stabilizovatelné pomocí vertikální oscilace základny. [But11] Systém pak už ale není autonomní, základna kmitá periodicky s nějakou frekvencí a pro dokázání stability je třeba rozšířit vybudovanou teorii.

Kapitola 6

Závěr

Ukázali jsme použití Lyapunovovy teorie stability na nelineární diferenciální rovnice. Pro analýzu stability ekvilibria bylo využíváno Lyapunovovy věty. Ta říká, že je ekvilibrium stabilní, pokud existuje Lyapunovova funkce. Ta je jakési zobecnění funkce energie. Lze ji dokonce využít i pro dokázání asymptotické stability, či modifikovat pro důkaz nestability ekvilibria. Dále jsme zkoumali hamiltonovské systémy, využili jsme Lyapunovovy věty pro dokázání stability ekvilibria určitých typů systémů. Hamiltonián jsme také v příkladech využívali jako Lyapunovovu funkci.

Využití vybudované teorie jsme ukázali na příkladu stabilizace inverzního kyvadla. Dokázali jsme použít Lyapunovovu funkci pro navržení řídicí funkce. Dokázali jsme pak stabilitu či nestabilitu pro různé hodnoty konstant v řídicí funkci pomocí Lyapunovovy věty. Zároveň jsme výsledky podpořili simulací, která naše výsledky pro konkrétní hodnoty konstant potvrdila.

Další práce by se mohla zabývat rozšířením teorie na neautonomní systémy. Bylo by pak možné využít Lyapunovovy teorie na stabilizaci systémů pomocí vstupu explicitně závisícího na čase. Jedno z využití by například byla stabilizace inverzního kyvadla pomocí vertikální oscilace pivotu, takzvaného Kapitova kyvadla.

Také by bylo užitečné zkoumat vyšší derivace Lyapunovovy funkce, nebo se pokusit pro co nejobecněji zadané problémy nalézt její tvar. Mohli bychom si pak ušetřit spoustu práce při jejím hledání, kde pro některé systémy to může být téměř neřešitelný problém.



Bibliografie

- [But11] Eugene I Butikov. “An improved criterion for Kapitza’s pendulum stability”. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44.29 (červ. 2011), s. 295202. DOI: 10.1088/1751-8113/44/29/295202. URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/29/295202> (cit. 07. 05. 2020).
- [Cun62] W. J. Cunningham. “An introduction to Lyapunov’s second method”. In: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry* 80.6 (1962), s. 325–332. ISSN: 2379-6774. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6371840> (cit. 07. 05. 2020).
- [Gri93] R. Grimshaw. *Nonlinear ordinary differential equations*. Applied Mathematics and Engineering Science Texts. University of New South Wales, Australia: Boca Raton : CRC Press, 1993. ISBN: 0-8493-8607-1.
- [Jam15] Antonis Papachristodoulou James Anderson. *Advances in computational Lyapunov analysis using sum-of-squares programming*. 2015. DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2361. URL: <http://aimsciences.org/article/id/0ef6419f-86f4-45cf-a845-5f79ee590d4b> (cit. 09. 05. 2020).
- [JS07] D. W. Jordan a P. Smith. *Nonlinear ordinary differential equations. An introduction for Scientists and Engineers*. 4. vyd. Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP: Oxford University Press, 2007. ISBN: 978-0-19-920824-1.
- [JS17] Robson Andrade de Jesus a Alan Almeida Santos. “Stability of inverted pendulum under external force acting on the pivot”. In: *Advances in Differential Equations and Control Processes* 18.1 (2017), s. 55–67. ISSN: 0974-3243.
- [Kan08] T. Kanamaru. “Duffing oscillator”. In: *Scholarpedia* 3.3 (2008). revision #91210, s. 6327. DOI: 10.4249/scholarpedia.6327. URL: http://www.scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator (cit. 07. 05. 2020).

- [Kel15] Christopher Kellett. “Classical Converse Theorems in Lyapunov’s Second Method”. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B* 20 (ún. 2015). DOI: 10.3934/dcdsb.2015.20.2333. URL: <https://arxiv.org/pdf/1502.04809.pdf> (cit. 09.05.2020).
- [Mas49] J. L. Massera. “On Liapounoff’s Conditions of Stability”. In: *Annals of Mathematics* 50.3 (1949), s. 705–721. ISSN: 0003486X. URL: www.jstor.org/stable/1969558 (cit. 05.07.2020).
- [Sas99] Shankar Sastry. *Nonlinear Systems. Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. University of California, Berkeley, CA 94720-1770: Springer, 1999. ISBN: 0-387-98513-1.