

Bakalářská práce



České
vysoké
učení technické
v Praze

F3

Fakulta elektrotechnická
Katedra fyziky

Akustické vlny konečné amplitudy - model audioreflektoru

Ondřej Tkadlec

Školitel: Dr. Mgr. Petr Koníček
Květen 2020

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Tkadlec** Jméno: **Ondřej** Osobní číslo: **474419**
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**
Zadávající katedra/ústav: **Katedra fyziky**
Studijní program: **Kybernetika a robotika**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Akustické vlny konečné amplitudy - model audioreflektoru

Název bakalářské práce anglicky:

Finite amplitude acoustical waves - model of audioreflector

Pokyny pro vypracování:

1. Vyberte vhodnou rovnici popisující šíření akustické vlny konečné amplitudy ve vzduchu a ve vodě
2. Vytvořte numerickou metodu pro řešení této rovnice ve frekvenční oblasti
3. Implementujte tuto numerickou metodu pomocí programového prostředku MATLAB
4. Použijte vytvořený program k modelování činnosti audioreflektoru pro přenos jednoduchých signálů

Seznam doporučené literatury:

- [1] S. I. Aanonsen: Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam, J. Acoust. Soc. Am. 75, 749-768 (1984).
[2] D. M. Causon, C. G. Mingham: Introductory Finite Difference Methods for PDEs, Ventus Publishing ApS, 2010
[3] Pompei, F. J.: Use of Airborne Ultrasonics for Generation Audiable Sound Beams, J. Audio Eng. Soc., vol. 47, pp. 726-731, 1999.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Dr. Mgr. Petr Koníček, katedra fyziky FEL

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **16.01.2020**

Termín odevzdání bakalářské práce: **22.05.2020**

Platnost zadání bakalářské práce:

do konce letního semestru 2020/2021

Dr. Mgr. Petr Koníček
podpis vedoucí(ho) práce

podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

Poděkování

Rád bych poděkoval Dr. Mgr. Petru Koničkovi za vedení práce a za čas, ochotu a trpělivost při konzultacích. Dále bych chtěl poděkovat celé mojí rodině, přítelkyni a přátelům za velkou podporu a trpělivost při psaní této práce i po celou dobu studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně, a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze, 20. dubna 2020

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je najít numerické řešení KZK (Khokhlov-Zabololotskaya-Kuznetsov) rovnice ve frekvenční oblasti a následně implementovat toto řešení v programovém prostředí MATLAB. Součástí práce je demonstrovat šíření ultrazvukového svazku různými prostředími. Jsou uvažovány fokusované akustické svazky s příčným rozložením akustické rychlosti na zdroji popsaným Gaussovým i pístovým rozdělení. Nakonec je použito numerické řešení KZK rovnice k modelování činnosti audiorefektoru, pomocí kterého jsou přenášeny jednoduché audiosignály. Výsledky práce jsou ve formě grafické prezentace a rozboru vybraných numerických řešení.

Klíčová slova: KZK rovnice, audiorefektor, autodemodulace, akustika, vlny konečné amplitudy, HDF5, parciální diferenciální rovnice

Školitel: Dr. Mgr. Petr Koníček
Katedra fyziky
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze
Technická 2
160 00 Praha 6
Česká republika

Abstract

The aim of this bachelor thesis is to find a numerical solution of KZK (Khokhlov-Zabololotskaya-Kuznetsov) equation in frequency domain and implement this solution in computing environment MATLAB. Moreover, the propagation of ultrasound beams in different environments is demonstrated. Focused acoustic beams with initial Gaussian and also piston amplitude distribution are considered. Finally, the numerical solution of KZK equation is used to model the functioning of audioreflector that is used to transfer simple audio signals. The results are presented in graphical form and selected numerical solutions are discussed.

Keywords: KZK equation, audioreflector, self-demodulation, acoustics, finite amplitude waves, HDF5, partial differential equations

Title translation: Finite amplitude acoustical waves - model of audioreflector

Obsah

1 Úvod	1	7.3 Čtení dat z HDF5 souboru	43
2 Modelové rovnice	3	8 Závěr	45
2.1 Navier-Stokesovy rovnice	3	Literatura	47
2.2 KZK rovnice	3		
2.3 Projevy nelinearity a disipace . . .	5		
3 Řešení KZK rovnice ve frekvenční oblasti	7		
3.1 Transformace v komplexní oblasti	7		
3.2 Transformace z komplexní do reálné oblasti	9		
3.3 Tvar pro řešení soustavy rovnic .	10		
4 Numerické řešení	11		
4.1 Metoda sítí	11		
4.1.1 Taylorův teorém	11		
4.1.2 Aproximace první derivace a druhé derivace	11		
4.1.3 Diskretizace	12		
4.1.4 Numerická síť	13		
4.2 Převod na diferenční vztahy	14		
4.3 Osová symetrie a okrajové podmínky	15		
4.4 Konečný tvar diferenčních rovnic	17		
4.5 Soustava rovnic v maticové formě	18		
4.6 Řešení soustavy lineárních rovnic	19		
4.6.1 Přímá metoda	19		
4.6.2 Jacobiho iterační metoda . . .	19		
5 Autodemodulace	23		
5.1 Princip autodemodulace	23		
5.2 Modulace signálu	24		
5.3 Buzení zdroje	25		
6 Výsledky	27		
6.1 Formování rázu v blízkém poli . .	27		
6.1.1 Zdroj zvuku s Gaussovým rozdělením akustické rychlosti . . .	27		
6.1.2 Zdroj zvuku s Fermiho rozdělením akustické rychlosti . . .	29		
6.2 Model audiorefektoru	31		
6.2.1 Zdroj zvuku s Gaussovým rozdělením akustické rychlosti . . .	31		
6.2.2 Zdroj zvuku s Fermiho rozdělením akustické rychlosti . . .	36		
7 Ukládání vypočítaných dat	41		
7.1 Hierarchical Data Format - HDF5	41		
7.2 Ukládání dat do HDF5 souboru	42		

Obrázky

2.1	Efekt nelinearity.	5	6.13	Příčné průběhy akustické rychlosti pro první harmonickou. .	32
2.2	Efekt disipace.	5	6.14	Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 30$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$. .	33
4.1	Numerická síť	13	6.15	Průběh w ve vzdálenosti $z = 30$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$	33
4.2	Příklad Gaussova a Fermiho rozdělení	14	6.16	Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 60$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$. .	33
4.3	Oblast výpočtu a okrajové podmínky	16	6.17	Průběh w ve vzdálenosti $z = 60$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$	33
5.1	Audioreflekory v galerii [6] (na stěně nad fotografiemi)	23	6.18	Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 90$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$. .	34
5.2	Srovnání obyčejné 1 kHz sinus vlny a obálky SRAM pro 1 kHz sinus .	24	6.19	Průběh w ve vzdálenosti $z = 90$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$	34
5.3	Numerická integrace - metoda obdélníků [10]	25	6.20	Hladina akustické intenzity v oblasti výpočtu.	35
5.4	Časový průběh w a obálka $g(t)$ pro $n_1 = 40$, $n_2 = 60$	26	6.21	Hladina akustické intenzity zobrazena ve 3D.....	35
5.5	Odpovídající frekvenční spektrum pro $n_1 = 40$, $n_2 = 60$	26	6.22	Hladina akustické intenzity v audiooblasti.	35
5.6	Časový průběh w a obálka $g(t)$ pro $n_1 = 49$, $n_2 = 51$	26	6.23	Hladina akustické intenzity v audiooblasti zobrazena ve 3D. . .	35
5.7	Odpovídající frekvenční spektrum pro $n_1 = 49$, $n_2 = 51$	26	6.24	Průběh w ve vzdálenosti $z = 0$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$	36
6.1	Průběh formování rázu	28	6.25	Odpovídající frekvenční spektrum pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$	36
6.2	Podélný průběh pro první harmonickou.	28	6.26	Podélný průběh akustické rychlosti první harmonické.	36
6.3	Podélný průběh pro třetí harmonickou.	28	6.27	Příčné průběhy akustické rychlosti pro první harmonickou. .	36
6.4	Příčné rozdělení ak. rychlosti v různých vzdálenostech.	29	6.28	Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 20$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$. .	37
6.5	Počáteční (Fermiho) rozdělení pro případ buzení pístem.	30	6.29	Průběh w ve vzdálenosti $z = 20$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$	37
6.6	Průběh formování rázu.	30	6.30	Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 45$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$. .	37
6.7	Podélný průběh pro první harmonickou ($n = 1$)	30	6.31	Průběh w ve vzdálenosti $z = 45$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$	37
6.8	Podélný průběh pro druhou harmonickou ($n = 2$)	30	6.32	Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 70$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$. .	38
6.9	Příčné rozdělení ak. rychlosti v různých vzdálenostech.	31	6.33	Průběh w ve vzdálenosti $z = 70$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$	38
6.10	Průběh w ve vzdálenosti $z = 0$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$	32	6.34	Ovlivnění audiosignálu nežádoucími frekvencemi	38
6.11	Odpovídající frekvenční spektrum pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$	32	6.35	Hladina akustické intenzity v oblasti výpočtu.	39
6.12	Podélný průběh akustické rychlosti první harmonické.	32			

6.36 Hladina akustické intenzity ve 3D.	39
6.37 Hladina akustické intenzity v audiooblasti.	39
6.38 Hladina akustické intenzity v audiooblasti ve 3D.....	39
7.1 Struktura HDF5 [15]	42

Kapitola 1

Úvod

Reálný svět, ve kterém žijeme, je nelineární. Proto jsou také rovnice a fyzikální vztahy mezi teplotou, rychlostí, tlakem atp. v tekutinách i pevných látkách nelineární. Dříve řešení nelineárního problému vyžadovalo pro složitější úkoly výpočetní výkon, který už člověk nezvládal. S příchodem moderní výpočetní techniky bylo najednou možné řešit nelineární problémy velmi přesně a hlavně velmi rychle. To pomohlo prohloubit poznání v mnoha odvětvích fyziky, mimo jiné i nelineární akustiky.

Nelineární akustika je fyzikální obor, který se zabývá akustickými vlnami velmi velké amplitudy. Právě kvůli velkým amplitudám se využívají rovnice mechaniky tekutin, popř. pro pevné látky rovnice pružnosti. Většina rovnic v nelineární akustice bývá odvozena ze základních rovnic mechaniky kontinua - Navier-Stokesových rovnic. Modelové rovnice bývají nelineární a ve většině případů je nelze ani linearizovat. Jelikož se převážně jedná o nelineární parciální diferenciální rovnice, jejichž analytické řešení není známo, je možné je řešit pouze numericky.

Nelineární jevy se projeví např. při průchodu zvukového svazku v plynném prostředí. Zvuk se šíří prostředím jako lokální změna tlaku. Zvýšením tlaku dojde také k lokálnímu zvýšení teploty. Rychlost zvuku se též zvyšuje s rostoucí teplotou. To způsobí, že zvuková vlna se pohybuje nejrychleji ve fázi, kdy je tlaková výchylka největší. To má dopad na tvar vlny. Budeme-li uvažovat sinusový průběh, body s větší výchylkou 'předbíhají' ostatní body a ze sinusového se stává pilovitý průběh. Tím se změní i frekvenční spektrum vlny a jsou generovány nové harmonické složky.

Intenzivní akustická pole, především ultrazvukové svazky, našla využití především v diagnostice a biomedicíně. Za určitých podmínek je ale možné ultrazvukové svazky použít i pro přenos audiosignálu, kde se využívá principu autodemodulace těchto svazků.

Díky modulaci nosné ultrazvukové vlny ($f \geq 20$ kHz) audiosignálem ($f \approx 20$ Hz – 20 kHz) dochází k nelineárním interakcím mezi nosnou vlnou a audiosignálem, což vede k následné demodulaci. Postupně dojde k potlačení nosné vlny především díky tomu, že útlum vlny je úměrný kvadrátu kmitočtu. Vlastnosti nosné vlny např. směrovost pak přejdou na audiosignál.

V praxi se dá setkat s komerčně dostupnými audioreflekory např. od firmy Holosonics. Použití a experimenty s ním jsou demonstrovány např. zde [1].

Tato práce se zabývá především numerickým řešením KZK rovnice. Je prezentována použitá metoda, která vede k nalezení numerického řešení této modelové rovnice. Rovnice je řešena ve frekvenční oblasti, proto bude vždy předpokládán periodický signál. Nakonec je vytvořen model audiorefektoru, který generuje ultrazvukový svazek, jenž po autodemodulaci vytvoří jednoduchý audiosignál.

Kapitola 2

Modelové rovnice

Jak již bylo zmíněno, u šíření fokusovaného ultrazvukového svazku dochází k nelineárním interakcím, které mají za následek demodulaci tohoto svazku na zvuk. Tento děj je tedy třeba popsat vhodnými rovnicemi. V této práci uvedeme několik rovnic, ta hlavní je KZK (Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov) rovnice. Byla zvolena především proto, že bylo dokázáno, že dobře demonstuje celý proces autodemodulace jak v blízkém, tak vzdáleném poli.

2.1 Navier-Stokesovy rovnice

Navier-Stokesovy rovnice popisují proudění nestlačitelné tekutiny. Jsou popsány následujícími rovnicemi a jsou základním kamenem pro ostatní rovnice z nelineární akustiky [2].

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{f} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.2)$$

kde \vec{u} je vektor rychlosti, p je tlak, ρ hustota, ν kinematická viskozita, t čas, \vec{f} je vektor objemových sil a ∇ je operátor nabla.

2.2 KZK rovnice

Tato rovnice popisuje vlny konečné amplitudy. Odvození rovnice není triviální, proto ho zde uvádět nebudeme. Vychází z Navier-Stokesových rovnic a jejím zjednodušením lze dosáhnout např. Burgersovy či Kuznětsovovy rovnice. Jelikož bychom mohli v praxi dostávat velmi vysoké, či velmi malé hodnoty akustického tlaku a rychlosti, používá se bezrozměrný tvar této rovnice [3]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \tau'} = \alpha r_0 \frac{\partial^3 w}{\partial \tau'^3} + \frac{r_0}{2l_d} \frac{\partial^2 w^2}{\partial \tau'^2} + \frac{1}{4G} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w \quad (2.3)$$

kde w je bezrozměrná akustická rychlost, τ' je bezrozměrný retardovaný čas, σ je bezrozměrná souřadnice ve směru šíření vlny, ξ je bezrozměrná souřadnice ve směru kolmém ke směru šíření vlny, α je koeficient útlumu, r_0 je tzv. Rayleighův poloměr, l_d je vzdálenost formování rázu, G je fokusační činitel. Bezrozměrné veličiny mají tyto vztahy

$$w = \frac{v}{v_m}, \quad \tau' = \omega \left(t - \frac{z}{c_0} \right), \quad \sigma = \frac{z}{r_0}, \quad \xi = \frac{r}{a} \quad (2.4)$$

kde v je akustická rychlost ve směru osy z a c_0 je rychlost šíření zvuku daným prostředím.

Abychom spočítali všechny koeficienty, musíme ještě znát následující parametry prostředí. Hustota prostředí ρ_0 , měrná tepelná kapacita prostředí za konstantního tlaku c_p a za konstantního objemu c_v , koeficient příčné viskozity prostředí η' , koeficient objemové viskozity prostředí η'' a součinitel tepelné vodivosti prostředí κ .

Dále musí být zadány tyto parametry - amplituda akustické rychlosti v_m , poloměr zdroje a a frekvence nosné vlny f .

Z výše uvedeného jsme schopni za pomoci dalších veličin spočítat r_0, l_d, α a Goldbergovo číslo G_0 jako

$$\omega = 2\pi f \quad (2.5)$$

$$\beta = \frac{\gamma + 1}{2} \quad (2.6)$$

$$b = \eta'' + \frac{4}{3}\eta' + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \quad (2.7)$$

$$r_0 = \frac{\omega a^2}{2c_0} \quad (2.8)$$

$$G_0 = \frac{2\beta v_m \rho_0 c_0}{b\omega} \quad (2.9)$$

$$l_d = \frac{c_0^2}{\beta v_m \omega} \quad (2.10)$$

$$\alpha = \frac{b\omega^2}{2\rho_0 c_0^3} \quad (2.11)$$

kde γ je Poissonova konstanta prostředí, β je parametr nelinearity prostředí a b je koeficient difuze prostředí.

Pro další potřeby numerického výpočtu sjednotíme členy před jednotlivými parciálními derivacemi na konstanty a_1, a_2, a_3

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \tau'} = a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial \tau'^3} + a_2 \frac{\partial^2 w^2}{\partial \tau'^2} + a_3 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w \quad (2.12)$$

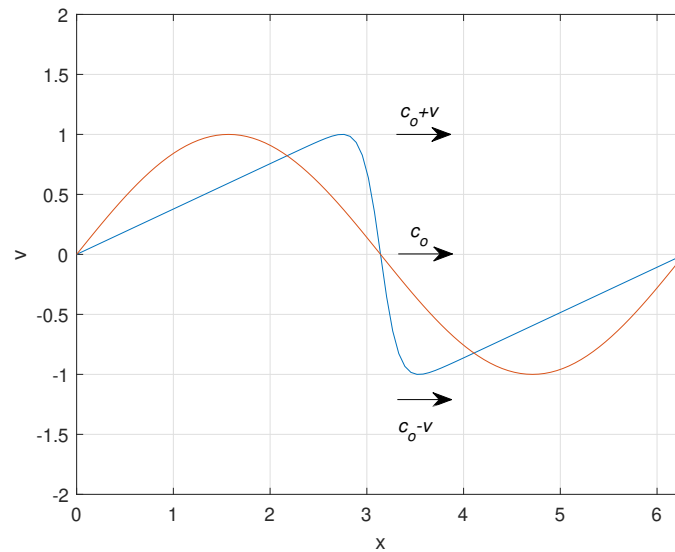
$$a_1 = \alpha r_0 \quad (2.13)$$

$$a_2 = \frac{r_0}{2l_d} \quad (2.14)$$

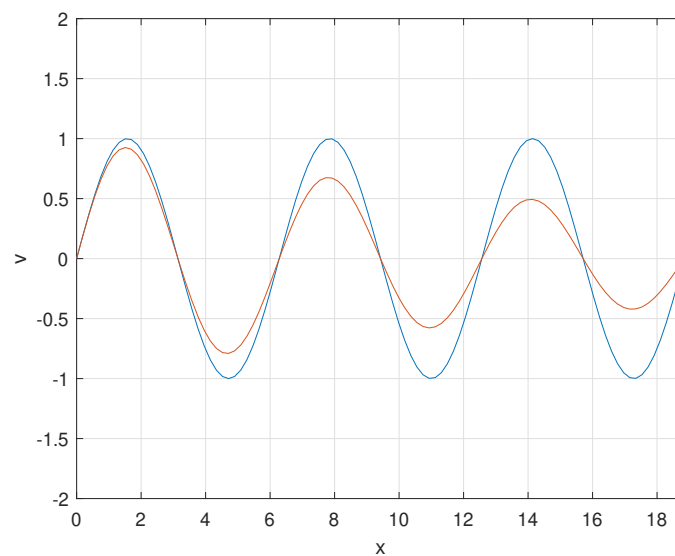
$$a_3 = \frac{1}{4G} \quad (2.15)$$

2.3 Projevy nelinearity a disipace

KZK rovnice na své pravé straně obsahuje tři členy. Nelineární člen, disipativní člen a difrakční člen. Již v úvodu bylo zmíněno, že nelineární člen způsobuje rozdíl akustické rychlosti v místech s různým akustickým tlakem. Na obrázku lze vidět, jak se sinusový průběh mění na pilovitý. Obsahuje tedy vyšší harmonické frekvence - sudé i liché. Disipativní člen způsobuje postupný pokles amplitudy.



Obrázek 2.1: Efekt nelinearity.



Obrázek 2.2: Efekt disipace.

Kapitola 3

Řešení KZK rovnice ve frekvenční oblasti

Periodické řešení rovnice (2.3) můžeme hledat ve tvaru Fourierovy řady. Tím dojde k redukci proměnných ze 3 na 2. Respektive bezrozměrná akustická rychlost již nebude funkcí τ' , σ , ξ ale pouze bezrozměrných prostorových souřadnic σ , ξ (v případě časové periodicity).

V reálné oblasti bude toto řešení $w(\tau', \sigma, \xi)$ v následujícím tvaru

$$w(\tau', \sigma, \xi) = \sum_{n=1}^M \left[g_n(\sigma, \xi) \sin(n\tau') + h_n(\sigma, \xi) \cos(n\tau') \right] \quad (3.1)$$

Tento tvar se nám bude hodit pro výpočet amplitudy bezrozměrné rychlosti. Pro odvození numerického řešení ve frekvenční oblasti ale budeme potřebovat provést transformaci v komplexní oblasti.

3.1 Transformace v komplexní oblasti

Zde budeme hledat řešení, které obsahuje tvar s komplexní exponenciálou.

$$w(\tau', \sigma, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n(\sigma, \xi) e^{jn\tau'} \quad (3.2)$$

Členy rovnice (2.12) si můžeme zjednodušeně napsat jako

$$d_1 = d_2 + d_3 + d_4 \quad (3.3)$$

$$d_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \tau'} \quad (3.4)$$

$$d_2 = a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial \tau'^3} \quad (3.5)$$

$$d_3 = a_2 \frac{\partial^2 w^2}{\partial \tau'^2} \quad (3.6)$$

$$d_4 = a_3 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w \quad (3.7)$$

Výše uvedený tvar w dosadíme do členů KZK rovnice (2.12) a upravíme. Pro člen d_1 dostaneme

$$d_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \tau'} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial W_n}{\partial \sigma} e^{jn\tau'} = \frac{j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \frac{\partial W_n}{\partial \sigma} e^{jn\tau'} \quad (3.8)$$

Pro člen d_2 dostaneme

$$d_2 = a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial \tau'^3} = \frac{a_1}{2} \frac{\partial^3}{\partial \tau'^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n e^{jn\tau'} = \frac{-ja_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^3 W_n e^{jn\tau'} \quad (3.9)$$

Jelikož je třetí člen nelineární, bude vznikat součin dvou sum. Ten upravíme následovně

$$d_3 = a_2 \frac{\partial^2 w^2}{\partial \tau'^2} = \frac{a_2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k e^{jk\tau'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_m e^{jm\tau'} \quad (3.10)$$

$$d_3 = \frac{a_2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_k W_m e^{j(k+m)\tau'} \quad (3.11)$$

Nyní označíme

$$n = k + m \quad (3.12)$$

Tím přejde rovnice (3.11) do tvaru

$$d_3 = \frac{a_2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_k W_{n-k} e^{jn\tau'} \quad (3.13)$$

Po zderivování dostaneme finální tvar nelineárního členu

$$d_3 = \frac{-a_2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 e^{jn\tau'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k W_{n-k} \quad (3.14)$$

Pro člen d_4 dostaneme

$$d_4 = a_3 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w = \frac{a_3}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n e^{jn\tau'} \quad (3.15)$$

$$d_4 = \frac{a_3}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 W_n}{\partial \xi^2} \right) e^{jn\tau'} \quad (3.16)$$

Nyní dosadíme tyto upravené členy do rovnice (3.3), kterou upravíme do tvaru

$$d_1 - d_2 - d_4 = d_3 \quad (3.17)$$

Potom dostáváme

$$\frac{j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \frac{\partial W_n}{\partial \sigma} e^{jn\tau'} + \frac{ja_1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^3 W_n e^{jn\tau'} - \frac{a_3}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 W_n}{\partial \xi^2} \right) e^{jn\tau'} \quad (3.18)$$

$$= \frac{-a_2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 e^{jn\tau'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k W_{n-k} \quad (3.19)$$

Rovnici upravíme do tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{j}{2} n \frac{\partial W_n}{\partial \sigma} + \frac{ja_1}{2} n^3 W_n - \frac{a_3}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 W_n}{\partial \xi^2} \right) \right) e^{jn\tau'} \quad (3.20)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-a_2}{4} n^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k W_{n-k} \right) e^{jn\tau'} \quad (3.21)$$

Z čehož vyplývá, že pro každé $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ platí

$$\frac{j}{2} n \frac{\partial W_n}{\partial \sigma} + \frac{ja_1}{2} n^3 W_n - \frac{a_3}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 W_n}{\partial \xi^2} \right) = \frac{-a_2}{4} n^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k W_{n-k} \quad (3.22)$$

3.2 Transformace z komplexní do reálné oblasti

Na obou stranách rovnice (3.22) dosadíme za člen W_n komplexní číslo

$$W_n = h_n - jg_n \quad (3.23)$$

Levá strana rovnice přejde do tvaru

$$\frac{j}{2} n \frac{\partial (h_n - jg_n)}{\partial \sigma} + \frac{ja_1}{2} n^3 (h_n - jg_n) - \frac{a_3}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial (h_n - jg_n)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 (h_n - jg_n)}{\partial \xi^2} \right) \quad (3.24)$$

Nyní si levou stranu rovnice rozdělíme na reálnou a imaginární část

$$\underbrace{\frac{n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial \sigma} + \frac{a_1 n^3 g_n}{2} - \frac{a_3}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial h_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_n}{\partial \xi^2} \right)}_{\text{reálná}} + j \underbrace{\left(\frac{n}{2} \frac{\partial h_n}{\partial \sigma} + \frac{a_1 n^3 h_n}{2} + \frac{a_3}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial g_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \xi^2} \right) \right)}_{\text{imaginární}} \quad (3.25)$$

U pravé strany rovnice (3.22) je třeba nejprve upravit konvoluční součet. Platí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k W_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} W_k W_{n-k} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} W_k W_{k-n}^* \quad (3.26)$$

kde platí, že

$$W_k W_{n-k} = (h_k - jg_k)(h_{n-k} - jg_{n-k}) = h_k h_{n-k} - g_k g_{n-k} - j(g_k h_{n-k} + h_k g_{n-k}) \quad (3.27)$$

$$W_k W_{k-n}^* = (h_k - jg_k)(h_{n-k} + jg_{n-k}) = h_k h_{k-n} + g_k g_{k-n} + j(h_k g_{k-n} - g_k h_{k-n}) \quad (3.28)$$

Konvoluční součet pak můžeme přepsat do tvaru

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k W_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} (h_k h_{n-k} - g_k g_{n-k}) + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (h_k h_{k-n} + g_k g_{k-n}) \quad (3.29)$$

$$+ j \left[\sum_{k=1}^{n-1} (-g_k h_{n-k} - h_k g_{n-k}) + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (h_k g_{k-n} - g_k h_{k-n}) \right] \quad (3.30)$$

Pro jednoduchost si ještě označíme G_n a H_n

$$G_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (g_k g_{n-k} - h_k h_{n-k}) - \sum_{k=n+1}^{\infty} (h_k h_{k-n} + g_k g_{k-n}) \quad (3.31)$$

$$H_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (g_k h_{n-k} + h_k g_{n-k}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (g_k h_{k-n} - h_k g_{k-n}) \quad (3.32)$$

Pro konvoluční součet lze tedy napsat reálnou a imaginární část

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k W_{n-k} = -2G_n + j(-2H_n) \quad (3.33)$$

Pravá strana rovnice (3.22) je tudíž

$$\underbrace{\frac{a_2 n^2}{2} G_n}_{\text{reálná}} + j \underbrace{\left(\frac{a_2 n^2}{2} H_n \right)}_{\text{imaginární}} \quad (3.34)$$

Pro numerické výpočty bude nutné řešit zvlášť reálnou a imaginární část. Proto z rovnice (3.25) vezmeme reálnou část a srovnáme ji s reálnou částí rovnice (3.34). To samé uděláme pro imaginární část. Omezíme také počet harmonických na M . Výsledné rovnice budou ve tvaru

$$\frac{a_2 n^2}{2} G_n = \frac{n}{2} \frac{\partial g_n}{\partial \sigma} + \frac{a_1 n^3 g_n}{2} - \frac{a_3}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial h_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_n}{\partial \xi^2} \right) \quad (3.35)$$

$$\frac{a_2 n^2}{2} H_n = \frac{n}{2} \frac{\partial h_n}{\partial \sigma} + \frac{a_1 n^3 h_n}{2} + \frac{a_3}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial g_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \xi^2} \right) \quad (3.36)$$

Tyto platí pro všechna $n = 1, 2, 3, \dots, M$

3.3 Tvar pro řešení soustavy rovnic

Pro finální tvar soustavy rovnic, které bude třeba řešit numericky, si upravíme rovnice (3.35) a (3.36) do tvaru, kdy na levé straně bude pouze derivace podle jedné proměnné a sice σ . Vynásobíme rovnice $2/n$ a po drobných úpravách dostáváme

$$\frac{\partial g_n}{\partial \sigma} = -a_1 n^2 g_n + \frac{a_3}{n} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial h_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_n}{\partial \xi^2} \right) + a_2 n G_n \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \sigma} = -a_1 n^2 h_n - \frac{a_3}{n} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial g_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \xi^2} \right) + a_2 n H_n \quad (3.38)$$

kde $n = 1, 2, 3, \dots, M$.

Pro tuto soustavu rovnic analytické řešení není známo, budeme ji řešit numericky.

Kapitola 4

Numerické řešení

Pro numerické řešení bude potřeba provést diskretizaci rovnic (3.37) a (3.38). Je nutné si zvolit numerickou metodu, kterou budeme diferenciální rovnice řešit. Existuje mnoho metod, jak řešit obyčejné či parciální diferenciální rovnice. Mezi nejznámější patří metoda sítí (také jako metoda konečných diferencí), konečných objemů, konečných elementů, spektrální metody, Galerkinova metoda a další. My budeme rovnice řešit pomocí metody sítí kvůli jednoduché implementaci.

4.1 Metoda sítí

4.1.1 Taylorův teorém

Pro obecnou funkci zní Taylorův teorém následovně [4]. Nechť funkce f má n spojitých derivací na intervalu $[a, b]$. Pak pro $a < x_0, x_0 + h < b$ platí

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df(x_0)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1} f(x_0)}{dx^{n-1}} + O(h^n) \quad (4.1)$$

Taylorův teorém nám vlastně říká, že pokud známe hodnotu funkce f a všech jejích derivací v bodě x_0 , jsme schopni odhadnout hodnotu funkce f v bodě $x_0 + h$. Člen $O(h^n)$ na konci nám říká, jaké chyby se při jeho vynechání dopouštíme. Pokud by nám stačili k aproximaci pouze první dva členy, tzn. nultá i první derivace, aproximační chyba bude druhého řádu, tedy $O(h^2)$.

4.1.2 Aproximace první derivace a druhé derivace

Podle Taylorova teorému aproximujeme funkci f s aproximační chybou druhého řádu jako

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df(x_0)}{dx} + O(h^2) \quad (4.2)$$

Úpravou rovnice (4.2) a zanedbáním členu $O(h)$ dostáváme

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (4.3)$$

Tím jsme dostali aproximaci prvního řádu přesnosti. Konkrétně se tomuto tvaru říká dopředná diference (forward difference).

Existuje také zpětná diference (backward difference). Odvodí se obdobně, pouze se za h dosadí $-h$. Její tvar je po zanedbání $O(h)$

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (4.4)$$

Druhý řád přesnosti se spočítá z dopředné a zpětné diference. Jednoduše sečteme levé a pravé strany rovnice (4.3) a (4.4) a upravíme.

$$\frac{df(x_0)}{dx} + \frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (4.5)$$

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (4.6)$$

Poslední aproximací je symetrická. Tato nahrazuje druhou derivaci a je také druhého řádu přesnosti. Rozvedeme Taylorův polynom až do $O(h^4)$ pro h i pro $-h$ a sečteme.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df(x_0)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} + O(h^4) \quad (4.7)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - h \frac{df(x_0)}{dx} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} + O(h^4) \quad (4.8)$$

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + h^2 \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} + O(h^4) \quad (4.9)$$

Po zanedbání $O(h^4)$ dostáváme

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \quad (4.10)$$

4.1.3 Diskretizace

Nyní můžeme vztahy (4.3), (4.4) a (4.6) zdiskretizovat. Mějme n diskrétních hodnot x_1, \dots, x_n , mezi nimiž je vzdálenost Δx . Pro následující diskrétní krok bude platit

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x \quad (4.11)$$

pro $i = 1, \dots, n - 1$. Dopřednou diskrétní derivaci tedy můžeme psát jako

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (4.12)$$

Totéž můžeme psát pro zpětnou, centrální i symetrickou diferenci

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (4.13)$$

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} \quad (4.14)$$

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (4.15)$$

4.1.4 Numerická síť

V našem případě máme numerickou síť se dvěma proměnnými σ a ξ . Délka kroku v podélném směru $\Delta\sigma$ je dána vztahem

$$\Delta\sigma = \frac{z_{max}}{j_{max}} \quad (4.16)$$

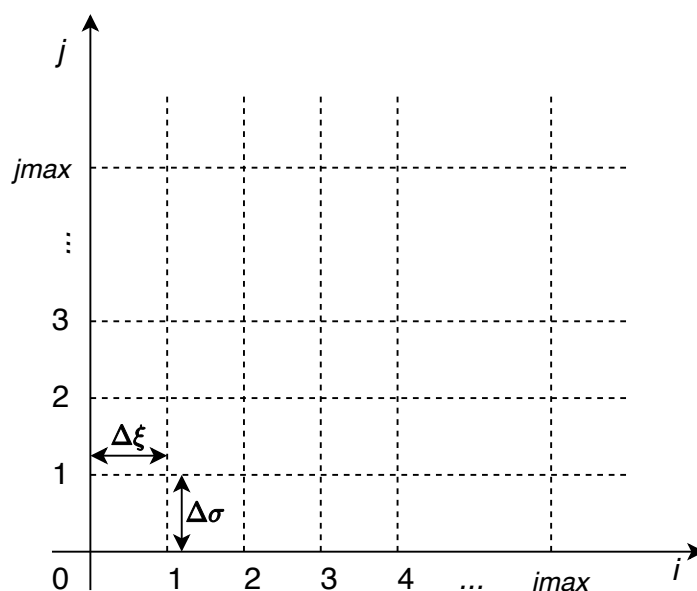
a pro délku kroku v příčném směru platí

$$\Delta\xi = \frac{r_{max}}{i_{max}} \quad (4.17)$$

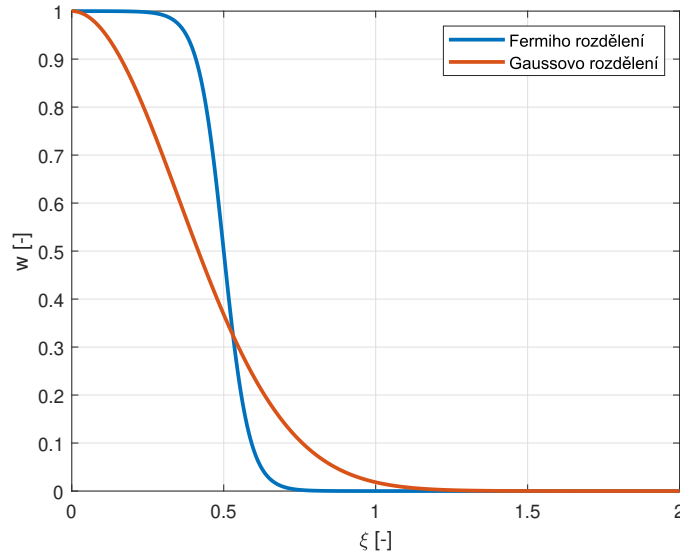
Důležitým parametrem je R , pro nějž platí

$$R = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\xi^2} \quad (4.18)$$

Každý bod sítě je dán souřadnicemi (ξ_i, σ_j) , kde $\xi_i = i \cdot \Delta\xi$ a $\sigma_j = j \cdot \Delta\sigma$. Hodnoty koeficientů g_n a h_n v každém bodě sítě můžeme napsat jako $g_{n,i}^j$ a $h_{n,i}^j$. Na začátku jsou hodnoty $g_{n,i}^j$ a $h_{n,i}^j$ nulové až na $\sigma = 0$, zde koeficienty odpovídají hodnotám podle počátečního příčného rozložení např. Gaussovo či Fermiho.



Obrázek 4.1: Numerická síť



Obrázek 4.2: Příklad Gaussova a Fermiho rozdělení

4.2 Převod na diferenční vztahy

Nyní už umíme převést diferenciální rovnice na diferenční. Ve směru šíření budeme vždy používat aproximaci prvního řádu přesnosti, ve směru kolmém zase druhého řádu přesnosti. Následující vztahy vždy uvedeme jen pro koeficient g_n , pro h_n by to samozřejmě bylo analogické.

Ve směru šíření tedy platí

$$\frac{\partial g_n}{\partial \sigma} = \frac{g_{n,i}^{j+1} - g_{n,i}^j}{\Delta \sigma} \quad (4.19)$$

Ve směru kolmém na směr šíření

$$\frac{\partial g_n}{\partial \xi} = \frac{g_{n,i+1}^{j+1} - g_{n,i-1}^{j+1}}{2\Delta \xi} \quad (4.20)$$

A pro druhou derivaci v kolmém směru

$$\frac{\partial^2 g_n}{\partial \xi^2} = \frac{g_{n,i+1}^{j+1} - 2g_{n,i}^{j+1} + g_{n,i-1}^{j+1}}{\Delta \xi^2} \quad (4.21)$$

Vztahy (4.19), (4.20), (4.21) a obdobné vyjádření pro h_n nyní musíme dosadit do rovnic (3.37) a (3.38). Ještě před dosazením si rozepíšeme diferenční vztah pro difrakční člen

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial h_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_n}{\partial \xi^2} \approx \frac{1}{\Delta \xi^2} \left(\left(1 - \frac{\Delta \xi}{2\xi_i}\right) h_{n,i-1}^{j+1} - 2h_{n,i}^{j+1} + \left(1 + \frac{\Delta \xi}{2\xi_i}\right) h_{n,i+1}^{j+1} \right) \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial g_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \xi^2} \approx \frac{1}{\Delta \xi^2} \left(\left(1 - \frac{\Delta \xi}{2\xi_i}\right) g_{n,i-1}^{j+1} - 2g_{n,i}^{j+1} + \left(1 + \frac{\Delta \xi}{2\xi_i}\right) g_{n,i+1}^{j+1} \right) \quad (4.23)$$

Pro zjednodušení ve výpočtu ještě upravíme rovnice (4.22) a (4.23) tak, aby proměnná již nebyla příčná vzdálenost ξ , ale hodnota i , pro kterou platí již zmíněný vztah $\xi_i = i \cdot \Delta\xi$.

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial h_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_n}{\partial \xi^2} \approx \frac{1}{\Delta\xi^2} \left(\left(1 - \frac{1}{2i}\right) h_{n,i-1}^{j+1} - 2h_{n,i}^{j+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) h_{n,i+1}^{j+1} \right) \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial g_n}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 g_n}{\partial \xi^2} \approx \frac{1}{\Delta\xi^2} \left(\left(1 - \frac{1}{2i}\right) g_{n,i-1}^{j+1} - 2g_{n,i}^{j+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) g_{n,i+1}^{j+1} \right) \quad (4.25)$$

Nyní už můžeme dosadit diferenční vztahy do rovnic (3.37) a (3.38). Pro přehlednost použijeme pomocné koeficienty a_1, a_2, a_3 .

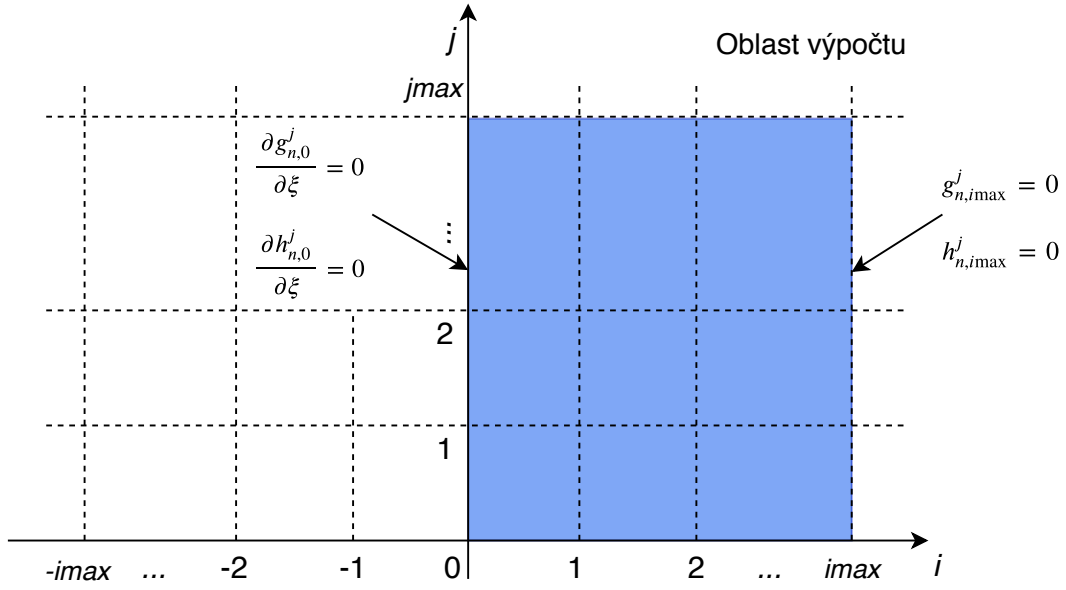
$$\frac{g_{n,i}^{j+1} - g_{n,i}^j}{\Delta\sigma} = -a_1 n^2 g_{n,i}^{j+1} + \frac{a_3}{n\Delta\xi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2i}\right) h_{n,i-1}^{j+1} - 2h_{n,i}^{j+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) h_{n,i+1}^{j+1} \right] + a_2 n G_n \quad (4.26)$$

$$\frac{h_{n,i}^{j+1} - h_{n,i}^j}{\Delta\sigma} = -a_1 n^2 h_{n,i}^{j+1} - \frac{a_3}{n\Delta\xi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2i}\right) g_{n,i-1}^{j+1} - 2g_{n,i}^{j+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) g_{n,i+1}^{j+1} \right] + a_2 n H_n \quad (4.27)$$

4.3 Osová symetrie a okrajové podmínky

U obyčejných či parciálních diferenciálních rovnic se setkáváme s okrajovými podmínkami. Zvláště u numerických výpočtů, u kterých je oblast výpočtu vždy omezená. Numerické i analytické řešení musí splňovat jak počáteční, tak okrajové podmínky. Okrajové podmínky jsou omezení, která udávají hodnotu funkce v krajních bodech nezávislé proměnné v rovnici. Počáteční podmínky jsou dány příčným rozložením akustické rychlosti na zdroji.

Naše výpočty probíhají pro volný prostor. Numerickou síť je možno zvolit tak, že obsahuje pouze polovinu oblasti, tzn. $\xi \in \langle 0, \xi_{max} \rangle$. Tím snížíme počet bodů sítě na polovinu. Pro naši oblast výpočtu ale musíme zavést okrajové podmínky, které zajistí symetrii řešení. Na následující obrázku je tato oblast zaznačena modře.



Obrázek 4.3: Oblast výpočtu a okrajové podmínky

Z obrázku lze vyčíst, jaké okrajové podmínky budeme uvažovat.

První okrajová podmínka vychází z rovnic (4.26) a (4.27). Z těchto rovnic vidíme, že pro příčnou vzdálenost $\xi = 0$ neboli $i = 0$ by docházelo k dělení nulou a navíc bychom nemohli používat index $i - 1$, jelikož by byl záporný. Zde využijeme osové symetrie. Pokud bychom brali i zápornou část i , předpokládáme, že v místě (ξ_i, σ_j) a (ξ_{-i}, σ_j) je bezrozměrná akustická rychlost w stejná. Tedy tam musí být stejné i koeficienty g_n a h_n .

$$g_{n,1}^j = g_{n,-1}^j \quad (4.28)$$

$$h_{n,1}^j = h_{n,-1}^j \quad (4.29)$$

Pomocí derivací to můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial g_{n,0}^j}{\partial \xi} = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial h_{n,0}^j}{\partial \xi} = 0 \quad (4.31)$$

Takže pro $i = 0$ se rovnice (4.26) a (4.27) upraví a zjednoduší do tvaru

$$\frac{g_{n,0}^{j+1} - g_{n,0}^j}{\Delta \sigma} = -a_1 n^2 g_{n,0}^{j+1} + \frac{a_3}{n \Delta \xi^2} [-2h_{n,0}^{j+1} + 2h_{n,1}^{j+1}] + a_2 n G_n \quad (4.32)$$

$$\frac{h_{n,0}^{j+1} - h_{n,0}^j}{\Delta \sigma} = -a_1 n^2 h_{n,0}^{j+1} - \frac{a_3}{n \Delta \xi^2} [-2g_{n,0}^{j+1} + 2g_{n,1}^{j+1}] + a_2 n H_n \quad (4.33)$$

Z obrázku vyplývá i druhá okrajová podmínka, a sice že na 'bočním' okraji oblasti předpokládáme nulovou bezrozměrnou akustickou rychlost, tedy nulové budou i koeficienty g_n a

h_n . Tato podmínka platí jen v okamžiku, kdy je výpočetní oblast natolik široká, že do ní akustický svazek nedojde. Proto si musíme na volbu šířky oblasti dávat pozor. Nesmí být příliš 'úzká', na druhou stranu je zbytečné ji dělat příliš širokou.

$$g_{n,i_{max}}^j = 0 \quad (4.34)$$

$$h_{n,i_{max}}^j = 0 \quad (4.35)$$

Takže pro $i = i_{max} - 1$ budou koeficienty $g_{n,i+1}^j$ a $h_{n,i+1}^j$ nulové. Tím můžeme přepsat rovnice (4.26) a (4.27) pro okrajovou podmínku $i = i_{max} - 1$ takhle

$$\frac{g_{n,i}^{j+1} - g_{n,i}^j}{\Delta\sigma} = -a_1 n^2 g_{n,i}^{j+1} + \frac{a_3}{n\Delta\xi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2i}\right) h_{n,i-1}^{j+1} - 2h_{n,i}^{j+1} \right] + a_2 n G_n \quad (4.36)$$

$$\frac{h_{n,i}^{j+1} - h_{n,i}^j}{\Delta\sigma} = -a_1 n^2 h_{n,i}^{j+1} - \frac{a_3}{n\Delta\xi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2i}\right) g_{n,i-1}^{j+1} - 2g_{n,i}^{j+1} \right] + a_2 n H_n \quad (4.37)$$

Pro $i = 1, 2, \dots, i_{max} - 2$ se rovnice (4.26) a (4.27) nemění.

4.4 Konečný tvar diferenčních rovnic

Výše uvedené rovnice ještě upravíme a prepíšeme do přehlednějšího tvaru pro všechny 3 případy, tzn. $i = 0$, $i = 1, 2, \dots, i_{max} - 2$ a pro $i = i_{max} - 1$.

Pro $i = 0$ dostáváme

$$\left(1 + a_1 \Delta\sigma n^2\right) g_{n,i}^{j+1} = g_{n,i}^j + \frac{R}{4nG} \left[-2h_{n,0}^{j+1} + 2h_{n,1}^{j+1}\right] + a_2 \Delta\sigma n G_n \quad (4.38)$$

$$\left(1 + a_1 \Delta\sigma n^2\right) h_{n,i}^{j+1} = h_{n,i}^j - \frac{R}{4nG} \left[-2g_{n,0}^{j+1} + 2g_{n,1}^{j+1}\right] + a_2 \Delta\sigma n H_n \quad (4.39)$$

Pro neokrajovou podmínku neboli pro $i = 1, 2, \dots, i_{max} - 2$ máme

$$\left(1 + a_1 \Delta\sigma n^2\right) g_{n,i}^{j+1} = g_{n,i}^j + \frac{R}{4nG} \left[\left(1 - \frac{1}{2i}\right) h_{n,i-1}^{j+1} - 2h_{n,i}^{j+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) h_{n,i+1}^{j+1} \right] + a_2 \Delta\sigma n G_n \quad (4.40)$$

$$\left(1 + a_1 \Delta\sigma n^2\right) h_{n,i}^{j+1} = h_{n,i}^j - \frac{R}{4nG} \left[\left(1 - \frac{1}{2i}\right) g_{n,i-1}^{j+1} - 2g_{n,i}^{j+1} + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) g_{n,i+1}^{j+1} \right] + a_2 \Delta\sigma n H_n \quad (4.41)$$

Pro poslední podmínku $i = i_{max} - 1$

$$\left(1 + a_1 \Delta\sigma n^2\right) g_{n,i}^{j+1} = g_{n,i}^j + \frac{R}{4nG} \left[\left(1 - \frac{1}{2i}\right) h_{n,i-1}^{j+1} - 2h_{n,i}^{j+1} \right] + a_2 \Delta\sigma n G_n \quad (4.42)$$

$$\left(1 + a_1 \Delta\sigma n^2\right) h_{n,i}^{j+1} = h_{n,i}^j - \frac{R}{4nG} \left[\left(1 - \frac{1}{2i}\right) g_{n,i-1}^{j+1} - 2g_{n,i}^{j+1} \right] + a_2 \Delta\sigma n H_n \quad (4.43)$$

4.5 Soustava rovnic v maticové formě

Finální tvar diferenční rovnic lze převést do zjednodušeného obecného tvaru

$$\mathbf{D}_n \mathbf{g}_n^{j+1} = \mathbf{g}_n^j + \frac{R}{4nG} \mathbf{A} \mathbf{h}_n^{j+1} + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{G}_n^{j+1} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{D}_n \mathbf{h}_n^{j+1} = \mathbf{h}_n^j - \frac{R}{4nG} \mathbf{A} \mathbf{g}_n^{j+1} + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{H}_n^{j+1} \quad (4.45)$$

Matice \mathbf{D}_n je čtvercová diagonální matice rozměrů $[i_{max}, i_{max}]$, na jejíž diagonále se nachází koeficienty $d_n = 1 + a_1 \Delta \sigma n^2$. Dále matice \mathbf{A} je tridiagonální čtvercová matice o velikosti $[i_{max}, i_{max}]$, která udává koeficienty u difrakčního členu. Její tvar je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 0 & & \\ 0 & \frac{3}{4} & -2 & \frac{5}{4} & & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & -2 & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & -2 & 1 + \frac{1}{2(i_{max}-1)} \\ 0 & \dots & & 1 - \frac{1}{2(i_{max}-1)} & & -2 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Dále jsou v rovnici vektory \mathbf{g}_n^j a \mathbf{h}_n^j , které reprezentují

$$\mathbf{g}_n^j = \begin{bmatrix} g_{n,0}^j \\ g_{n,1}^j \\ \vdots \\ g_{n,i_{max}-1}^j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_n^j = \begin{bmatrix} h_{n,0}^j \\ h_{n,1}^j \\ \vdots \\ h_{n,i_{max}-1}^j \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Jako vektor zde vystupují i konvoluční součty

$$\mathbf{G}_n^{j+1} = \begin{bmatrix} G_{n,0}^{j+1} \\ G_{n,1}^{j+1} \\ \vdots \\ G_{n,i_{max}-1}^{j+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_n^{j+1} = \begin{bmatrix} H_{n,0}^{j+1} \\ H_{n,1}^{j+1} \\ \vdots \\ H_{n,i_{max}-1}^{j+1} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Problém při výpočtu by nastal, pokud bychom chtěli zjistit konvoluční součty pro následující krok. Respektive by se velmi špatně vyjadřovala hodnota koeficientů v příštím kroku $g_{n,i}^{j+1}$ a $h_{n,i}^{j+1}$ a rovnice (4.44) a (4.45) by nešly kvůli konvolučnímu součtu (nelinearita) převést na soustavu lineárních rovnic.

Vzhledem k tomu, že změny koeficientů g_n a h_n způsobené nelineárními členy jsou ve srovnání se změnami způsobených difrakčními členy malé, můžeme použít koeficienty z předchozí vrstvy [5]. Linearizace v tomto případě spočívá v použití konvolučního součtu pro předchozí vrstvu a ne pro tu následující. Tedy $\mathbf{G}_n^{j+1} \approx \mathbf{G}_n^j$ a $\mathbf{H}_n^{j+1} \approx \mathbf{H}_n^j$.

4.6 Řešení soustavy lineárních rovnic

4.6.1 Přímá metoda

Z rovnice (4.44) vyjádříme g_n^{j+1} a dosadíme do rovnice (4.45) a následně provedeme následující úpravy.

$$\mathbf{D}_n \mathbf{g}_n^{j+1} - \frac{R}{4nG} \mathbf{A} \mathbf{D}_n^{-1} \left[-\frac{R}{4nG} \mathbf{A} \mathbf{g}_n^{j+1} + \mathbf{h}_n^j + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{H}_n^j \right] = \mathbf{h}_n^j + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{H}_n^j \quad (4.49)$$

$$\left[\mathbf{D}_n + \frac{R^2}{16n^2 G^2} \mathbf{A} \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{A} \right] \mathbf{g}_n^{j+1} - \frac{R}{4nG} \mathbf{A} \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{h}_n^j + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{H}_n^j) = \mathbf{g}_n^j + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{G}_n^j \quad (4.50)$$

Po menší úpravě dostáváme konečný tvar pro koeficienty na další vrstvě

$$\mathbf{g}_n^{j+1} = \left[\mathbf{D}_n + \frac{R^2}{16d_n n^2 G^2} \mathbf{A}^2 \right]^{-1} \left[\frac{R}{4d_n n G} \mathbf{A} (\mathbf{h}_n^j + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{H}_n^j) + \mathbf{g}_n^j + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{G}_n^j \right] \quad (4.51)$$

$$\mathbf{h}_n^{j+1} = \frac{1}{d_n} \left[-\frac{R}{4nG} \mathbf{A} \mathbf{g}_n^{j+1} + \mathbf{h}_n^j + a_2 \Delta \sigma n \mathbf{H}_n^j \right] \quad (4.52)$$

4.6.2 Jacobiho iterační metoda

Přímá metoda se v numerických výpočtech téměř nepoužívá. Nachází totiž přesné řešení v konečném počtu kroků (např. Gaussova eliminace). Jelikož v počítači dochází v každém kroku k zaokrouhlovacím chybám, je numerické řešení odlišné od toho analytického (přesného). Při řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ může být matice \mathbf{A} příliš velká a zároveň velmi 'řídká', takže hledání řešení přímými metodami může být nevýhodné a nepraktické. Právě kvůli tomuto je hledání řešení iteračními metodami dobrou alternativou k přímým metodám.

V našem případě použijeme pro výpočet koeficientů na další vrstvě Jacobiho iterační metodu. Ta obecně spočívá v rozdělení matice \mathbf{A} na diagonální matici \mathbf{D} a antidiagonální matici \mathbf{N} , pro něž platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N} \quad (4.53)$$

Jacobiho metodu lze pak zapsat jako

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{N}\mathbf{x}^k = \mathbf{b} \quad (4.54)$$

a tudíž

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{D}^{-1} \left[-\mathbf{N}\mathbf{x}^k + \mathbf{b} \right] \quad (4.55)$$

Pro náš případ si rovnice (4.44) a (4.45) napíšeme do tvaru $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_n & -\frac{R}{4nG}\mathbf{A} \\ \frac{R}{4nG}\mathbf{A} & \mathbf{D}_n \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^j \\ \mathbf{h}_n^j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^{j+1} \\ \mathbf{h}_n^{j+1} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{G}_n^j \\ \mathbf{h}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{H}_n^j \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Nyní si naši matici \mathbf{A} rozdělíme na matice

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_n \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{R}{4nG}\mathbf{A} \\ \frac{R}{4nG}\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Podle Jacobiho metody dostáváme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^{j+1} \\ \mathbf{h}_n^{j+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\frac{R}{4nG}\mathbf{A} \\ \frac{R}{4nG}\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^j \\ \mathbf{h}_n^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{G}_n^j \\ \mathbf{h}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{H}_n^j \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^{j+1} \\ \mathbf{h}_n^{j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{d_n} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{R}{4nG}\mathbf{A} \\ -\frac{R}{4nG}\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^j \\ \mathbf{h}_n^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{G}_n^j \\ \mathbf{h}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{H}_n^j \end{bmatrix} \right] \quad (4.62)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_n^{j+1} \\ \mathbf{h}_n^{j+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{d_n} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R}{4nG}\mathbf{A}\mathbf{h}_n^j + \mathbf{g}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{G}_n^j \\ -\frac{R}{4nG}\mathbf{A}\mathbf{g}_n^j + \mathbf{h}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{H}_n^j \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Finální tvar pro \mathbf{g}_n^{j+1} a \mathbf{h}_n^{j+1} , který je přímo použit v hlavním cyklu programu, je

$$\mathbf{g}_n^{j+1} = \frac{1}{d_n} \left[\frac{R}{4nG}\mathbf{A}\mathbf{h}_n^j + \mathbf{g}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{G}_n^j \right] \quad (4.64)$$

$$\mathbf{h}_n^{j+1} = \frac{1}{d_n} \left[-\frac{R}{4nG}\mathbf{A}\mathbf{g}_n^j + \mathbf{h}_n^j + a_2\Delta\sigma n\mathbf{H}_n^j \right] \quad (4.65)$$

■ Ověření konvergence iterací

Vztah (4.55) se dá zjednodušeně napsat jako

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}^k + \mathbf{c} \quad (4.66)$$

kde \mathbf{C} se nazývá iterační matice. Aby metoda konvergovala, musí platit, že norma matice je menší než 1, neboli

$$\|\mathbf{C}\|_\infty < 1 \quad (4.67)$$

V našem případě byla \mathbf{C} rovna

$$\mathbf{C} = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{d_n} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{R}{4nG}\mathbf{A} \\ -\frac{R}{4nG}\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{R}{4d_n nG}\mathbf{A} \\ -\frac{R}{4d_n nG}\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Pro normu matice \mathbf{C} platí

$$\|\mathbf{C}\|_\infty = \max \left(\frac{R}{4d_n nG} \|\mathbf{A}\|_\infty, -\frac{R}{4d_n nG} \|\mathbf{A}\|_\infty \right) \quad (4.71)$$

Nejhorší případ pro podmínku (4.67) je pro $n = 1$. Člen d_n bude jen lehce větší než 1, takže ho můžeme zaokrouhlit na 1 (tím bereme ještě horší případ). Norma $\|\mathbf{A}\|_\infty$ je rovna

$$\max(|\mathbf{a}_1|, \dots, |\mathbf{a}_i|, \dots, |\mathbf{a}_{i_{max}}|) \quad (4.72)$$

kde $|\mathbf{a}_i|$ vyjadřuje

$$|\mathbf{a}_i| = |a_{i,1}| + \dots + |a_{i,i_{max}}| \quad (4.73)$$

Můžeme se přesvědčit, že $|\mathbf{a}_i| = 4$ pro všechna i až na $i = i_{max}$ (zde je přibližně rovno 3), neboť

$$|\mathbf{a}_1| = |-2| + |2| = 4 \quad (4.74)$$

$$\vdots \quad (4.75)$$

$$|\mathbf{a}_i| = \left| 1 - \frac{1}{2i} \right| + |-2| + \left| 1 + \frac{1}{2i} \right| = 4 \quad (4.76)$$

Pro nejhorší případ tedy platí

$$\frac{R}{4d_n nG} \|\mathbf{A}\|_\infty < \frac{\frac{\Delta\sigma}{\Delta\xi^2}}{4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot G} \cdot 4 < 1 \quad (4.77)$$

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\xi^2} < G \quad (4.78)$$

Vztah (4.78) je podmínkou pro konvergenci iterace soustavy lineární rovnic (4.64) a (4.65). Pro všechny naše výpočty bude tato podmínka s přehledem dodržena.

Kapitola 5

Autodemodulace

5.1 Princip autodemodulace

Termín autodemodulace zavedl H. O. Berktaý v 60. letech a následně byl princip experimentálně prokázán v roce 1970 M. B. Moffettem. Jedná se o princip, kdy z vysokofrekvenčního pulsního svazku vznikne v určité vzdálenosti nízkofrekvenční signál. K tomuto jevu dochází díky nelineárním interakcím mezi ultrazvukovou vlnou a modulačním signálem. Aby byl demodulovaný audiosignál dostatečně kvalitní, je nutné, aby nosná vlna byla slabá. Tím zajistíme, že k nelineárním interakcím bude docházet jen v blízkém poli zdroje.

Jak už bylo zmíněno, jednou z aplikací je autodemodulace ultrazvukového svazku na audiosignál, kterého využívají tzv. audioreflektoři. Komerční produkty můžeme nalézt v mnoha muzeích, galeriích, ale i na pražské pobočce České pošty.



Obrázek 5.1: Audioreflektoři v galerii [6] (na stěně nad fotografiemi)

Aby po autodemodulaci vznikl co nejméně zkreslený audiosignál, je nutné zvolit vhodný typ modulace a správně budit zdroj ultrazvukového svazku.

5.2 Modulace signálu

Pro přenos audiosignálu je dobré použít amplitudovou modulaci, kde audiosignál superponujeme na nosnou vlnu. Pokud bychom měli audiosignál daný jako

$$b(t) = A_b \sin(\omega_b t) \quad (5.1)$$

a nosnou funkci danou vztahem

$$c(t) = A_c \sin(\omega_c t) \quad (5.2)$$

pak můžeme psát pro modulovanou vlnu

$$f(t) = A_c \left(1 + \frac{A_b}{A_c} \sin(\omega_b t) \right) \sin(\omega_c t) \quad (5.3)$$

Podíl A_b/A_c se nazývá hloubka modulace a značí se m .

V praxi bychom chtěli zdroj zvuku, který bude vytvářet výchylku

$$f(t) = E(t) \sin(\omega_0 t) \quad (5.4)$$

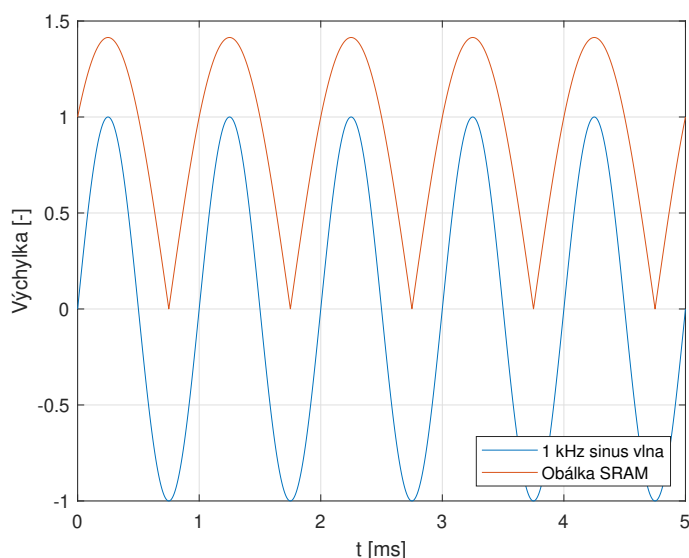
kde $E(t)$ je funkce, která nese informaci o přenášeném audiosignálu (viz vztah (5.3)) a ω_0 je nosný kmitočet. Funkci $E(t)$ se také říká obálka.

Při použití obyčejné amplitudové modulace

$$E = 1 + mg(t) \quad (5.5)$$

kde $g(t)$ je přenášený audiosignál, by docházelo k velkému zkreslení, jak bylo ukázáno např. zde [7]. Proto se místo toho využívá tzv. SRAM (square-root amplitude modulation), kdy se pravá strana (5.5) odmocní.

$$E = \sqrt{1 + mg(t)} \quad (5.6)$$



Obrázek 5.2: Srovnání obyčejné 1 kHz sinus vlny a obálky SRAM pro 1 kHz sinus

5.3 Buzení zdroje

Naším cílem je, aby po autodemodulaci vznikl jednoduchý audiosignál $g(t)$ o základní frekvenci Ω , popřípadě ještě další vyšší harmonické ($2\Omega, 3\Omega, \dots$), který je složen z funkcí sinus a kosinus o těchto frekvencích.

Bereme-li v úvahu SRAM a náš audiosignál $g(t)$, je nutné, aby náš zdroj vytvářel výchylku

$$f(t) = \sqrt{1 + mg(t)} \sin(\omega_0 t) \quad (5.7)$$

Tuto funkci lze také napsat pomocí Fourierovy řady s omezeným počtem budících harmonických

$$f(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) \quad (5.8)$$

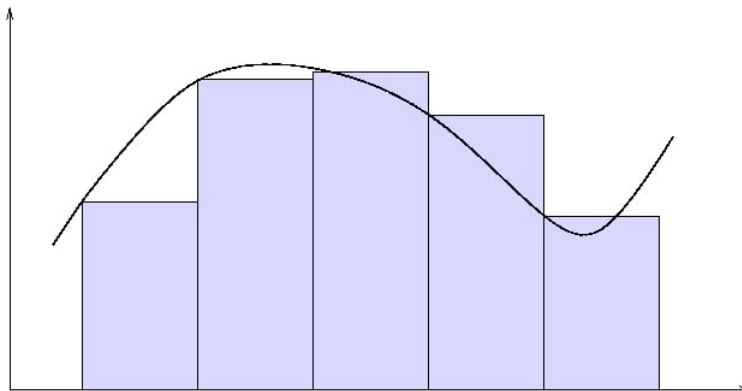
kde n_1 je spodní a n_2 horní budící frekvence.

Pro Fourierovy koeficienty a_n a b_n platí [8]

$$a_n = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \sqrt{1 + mg(t)} \cos(n\Omega t) \sin(\omega_0 t) dt \quad (5.9)$$

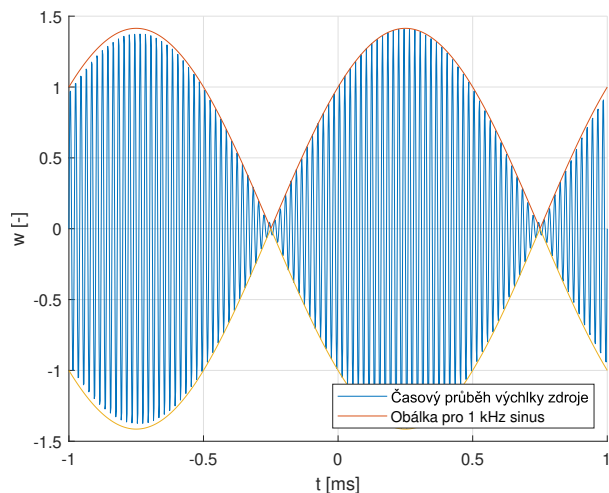
$$b_n = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \sqrt{1 + mg(t)} \sin(n\Omega t) \sin(\omega_0 t) dt \quad (5.10)$$

Tyhle integrály jdou spočítat i analyticky, např. v [9] je ukázáno řešení těchto integrálů pro funkci $g = \cos(\Omega t)$. Při složitějších signálech je ale analytické vyjádření čím dál víc komplikovanější. Proto budeme tyto integrály počítat pomocí numerické integrace, konkrétně metody obdélníků. Při dostatečném množství kroků vychází koeficienty a_n a b_n velmi přesné.

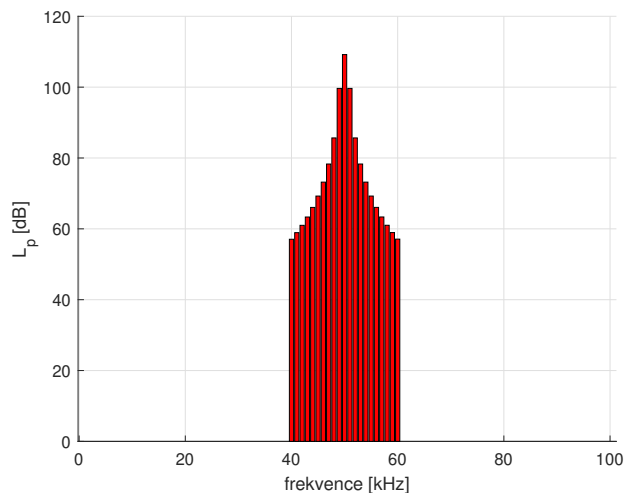


Obrázek 5.3: Numerická integrace - metoda obdélníků [10]

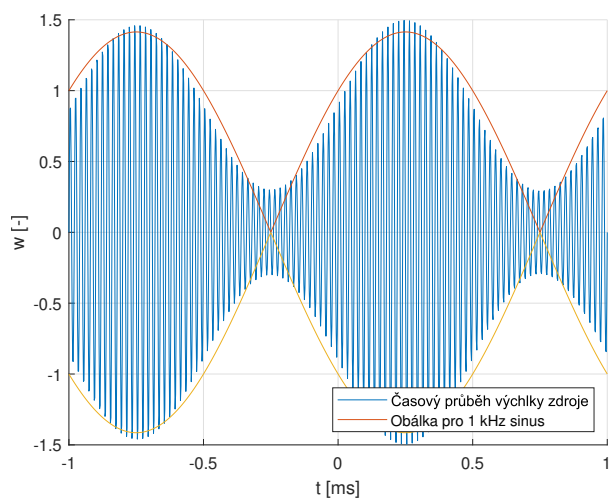
Jako pokus vyzkoušíme budit zdroj tak, aby po autodemodulaci vznikl signál $g(t) = \sin(\Omega t)$. Nejprve to zkusíme pomocí 3 harmonických (symetrické okolo nosné frekvence), poté pomocí 21 harmonických. Hloubka modulace je $m = 1$.



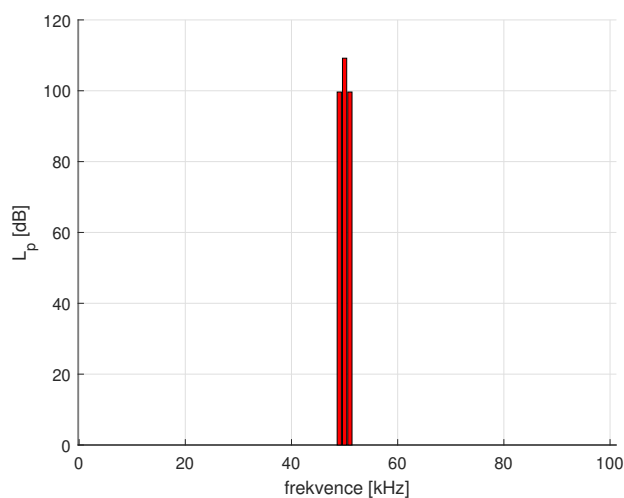
Obrázek 5.4: Časový průběh w a obálka $g(t)$ pro $n_1 = 40$, $n_2 = 60$.



Obrázek 5.5: Odpovídající frekvenční spektrum pro $n_1 = 40$, $n_2 = 60$.



Obrázek 5.6: Časový průběh w a obálka $g(t)$ pro $n_1 = 49$, $n_2 = 51$.



Obrázek 5.7: Odpovídající frekvenční spektrum pro $n_1 = 49$, $n_2 = 51$.

Z obrázku (5.6) je patrné, že při použití 3 budících harmonických je signál značně zkreslen a nepřesně kopíruje obálku. Na druhou stranu již při použití 21 budících harmonických signál kopíruje obálku s velkou přesností, jak lze vidět na obrázku (5.4).

Kapitola 6

Výsledky

6.1 Formování rázu v blízkém poli

Jako první si ověříme korektnost algoritmu na výpočet numerického řešení KZK rovnice. Tedy nejedná se ještě o modelování audiorefektoru.

Přibližná hranice mezi blízkým a vzdáleným polem se nazývá Rayleighův poloměr r_0 . Náš bezrozměrný tvar KZK rovnice (2.3) je normalizovaný právě Rayleighovým poloměrem, takže pokud výpočet probíhá do vzdálenosti $\sigma = 1$, probíhá do vzdálenosti r_0 .

Dalším důležitým parametrem je vzdálenost formování rázu l_d . V této vzdálenosti dojde k vybuzení všech harmonických a průběh by měl být tzv. 'pilovitý' (sawtooth). Proto se této vzdálenosti říká vzdálenost formování rázu.

V našem programu se všechny parametry dopočítávají ze 3 zadaných parametrů v_m, a, f . Dále se dá zvolit prostředí, ve kterém výpočet probíhá - vzduch/voda.

6.1.1 Zdroj zvuku s Gaussovým rozdělením akustické rychlosti

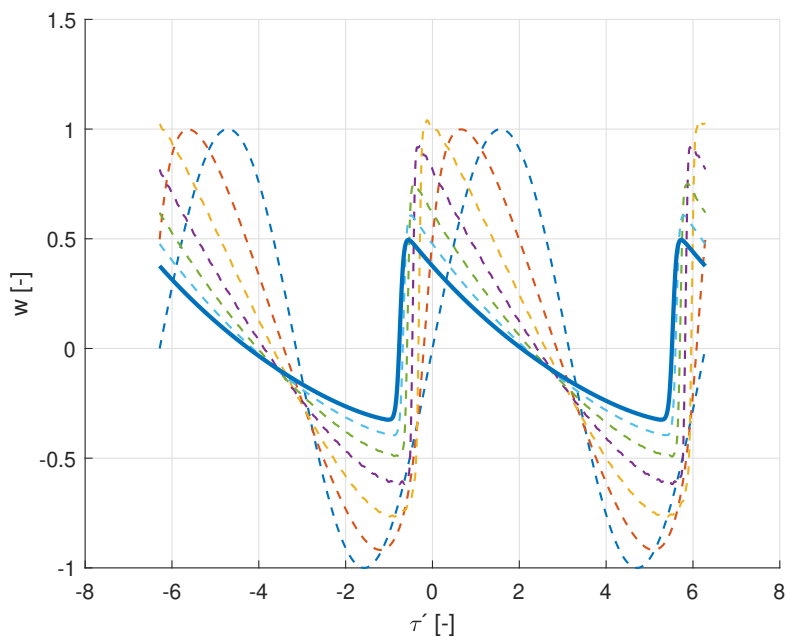
V prvním výpočtu zvolíme jako prostředí vodu, $v_m = 0.5$ m/s, $a = 0.04$ m, $f = 500$ kHz. Nastavíme fokusační činitel $G = 10$. Rayleighův poloměr r_0 a vzdálenost formování rázu l_d jsou dopočítány jako

$$r_0 = 1.68 \text{ m} \quad l_d = 0.42 \text{ m} \quad (6.1)$$

To značí, že k rázu by mělo dojít ještě před dosažením Rayleighova poloměru, tedy můžeme nastavit výpočet do vzdálenosti $\sigma = 1$. V příčném směru necháme výpočet jít do $\xi_{max} = 5$. Počet harmonických je $M = 50$. Dále nastavíme počet kroků v ose šíření na $j_{max} = 4200$, počet kroků v kolmém směru na $i_{max} = 150$. Podmínka pro numerickou síť (4.78) je splněna, neboť $R = 0.09 < G = 10$. Vlna je buzena zdrojem signálu pouze na jedné frekvenci (a sice první harmonické). Příčné rozložení akustické rychlosti je pro $\sigma = 0$ popsáno pomocí Gaussova rozdělení. Navíc využijeme souměrnosti sítě okolo $\xi = 0$ a budeme tedy počítat jen pro kladné ξ .

$$w = \frac{v}{v_m} = e^{-(\xi/k)^2} \quad (6.2)$$

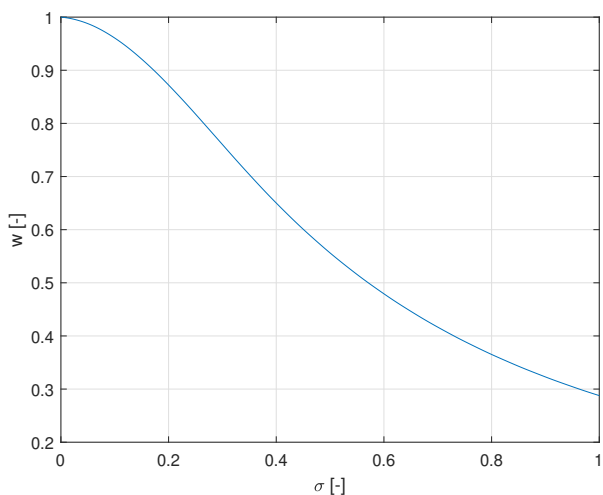
kde k zvolíme $k = 0.5$.



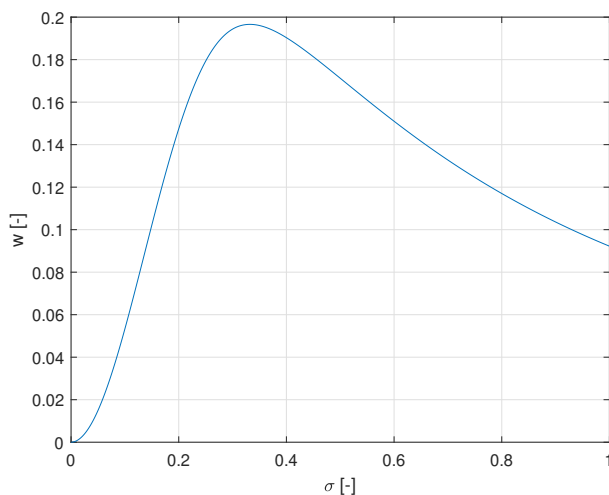
Obrázek 6.1: Průběh formování rázu

Na obrázku jde vidět, jak ze sinusovky postupně vlna přejde v pilovitý průběh - nastal ráz. Tlustá čára je průběh ve vzdálenosti r_0 , ale vidíme, že ráz nastal už dřív. Poté už místo nelineárního jevu převládá disipativní jev.

Na obrázcích níže je zobrazen průběh bezrozměrné akustické rychlosti v závislosti na podélné vzdálenosti σ pro $n = 1$ a pro $n = 3$.



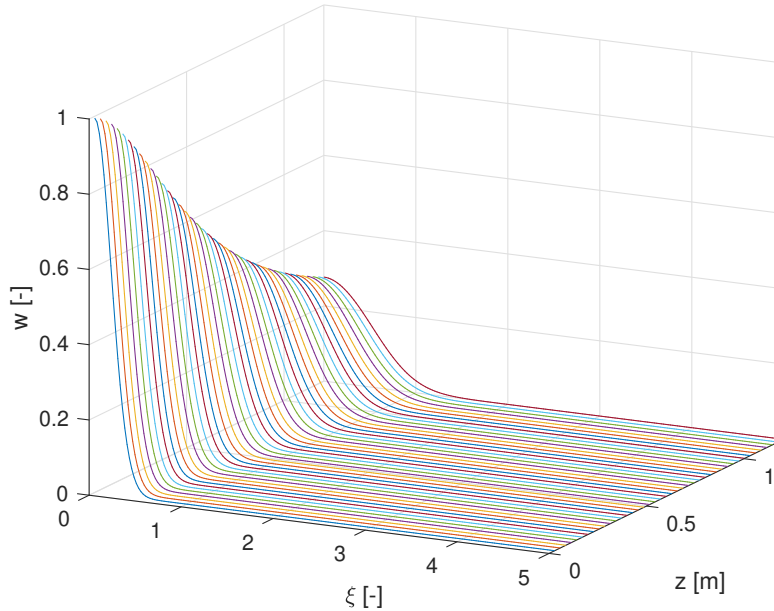
Obrázek 6.2: Podélný průběh pro první harmonickou.



Obrázek 6.3: Podélný průběh pro třetí harmonickou.

Z grafů vidíme, že zatímco u budící první harmonické se amplituda postupně snižuje, u vyšších harmonických (na obrázku např. třetí) se zvyšuje.

Nakonec zkoumáme útlum a difrakci první harmonické ve směru šíření. Každých 50 bodů ve směru šíření je vykresleno příčné rozdělení rychlosti pro první harmonickou.



Obrázek 6.4: Příčné rozdělení ak. rychlosti v různých vzdálenostech.

Z obrázku vidíme jak disipaci, tak difrakci - vlna se postupně šíří do stran. Musí být zajištěno, že oblast je natolik široká, aby se vlna nerozšířila do krajů. To by odporovalo našim okrajovým podmínkám a způsobilo nestabilitu.

6.1.2 Zdroj zvuku s Fermiho rozdělením akustické rychlosti

V druhém výpočtu opět zvolíme jako prostředí vodu, $v_m = 0.15$ m/s, poloměr zdroje $a = 0.024$ m, $f = 1$ MHz. Fokusační činitel je $G = 10$. Rayleighův poloměr r_0 a vzdálenost formování rázu l_d jsou dopočítány jako

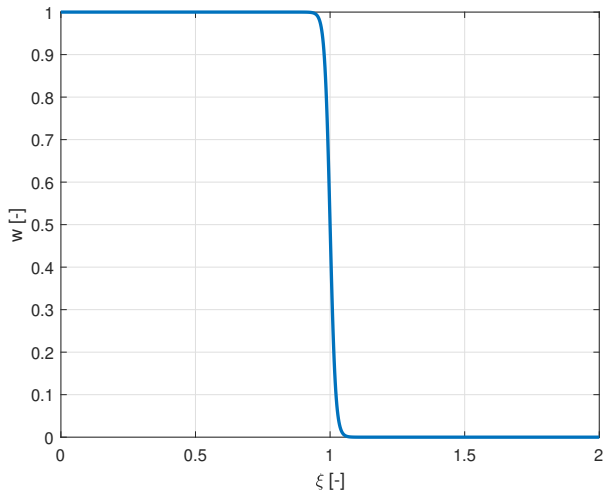
$$r_0 = 1.20 \text{ m} \quad l_d = 0.68 \text{ m} \quad (6.3)$$

Opět tedy očekáváme, že se ráz vytvoří už v blízkém poli. Nastavíme $j_{max} = 4200$, $i_{max} = 300$. Podmínka pro numerickou síť (4.78) je splněna, neboť $R = 1.27 < G = 10$. Budeme opět budít pouze první harmonickou.

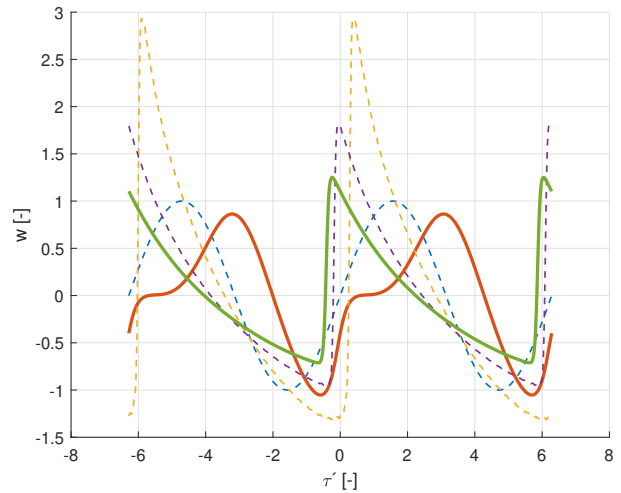
V praxi se spíše než s Gaussovým rozdělením setkáváme s Fermiho rozdělením, jelikož lépe modeluje reálné píсты. Říká se mu také pístové rozdělení. Proto popíšeme příčné rozložení akustické rychlosti pro $\sigma = 0$ pomocí Fermiho rozdělení.

$$w = \frac{v}{v_m} = \frac{1}{1 + e^{k(\xi-1)}} \quad (6.4)$$

kde $k = 50$. Takto velká hodnota nám zajistí, že oproti obrázku (4.1) bude 'pád' funkce strmější a bude tedy lépe aproximovat reálný píst.



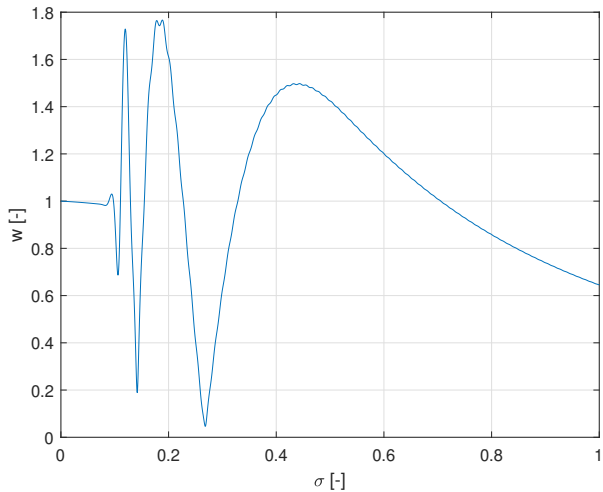
Obrázek 6.5: Počáteční (Fermiho) rozdělení pro případ buzení pístem.



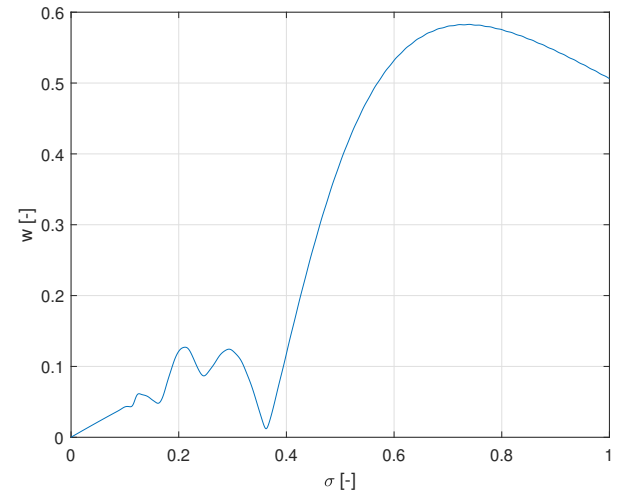
Obrázek 6.6: Průběh formování rázu.

Z obrázku vidíme, že opět nastal ráz (pilovitý průběh). Lze si ale povšimnout, že červený průběh obsahuje dva menší rázy. Tento zajímavý jev je popsán a vysvětlen zde [11]. Dochází také k větší akustické rychlosti než u Gaussova rozdělení.

Na obrázcích níže je zobrazen průběh bezrozměrné akustické rychlosti v závislosti na podélné vzdálenosti σ pro $n = 1$ a pro $n = 2$.



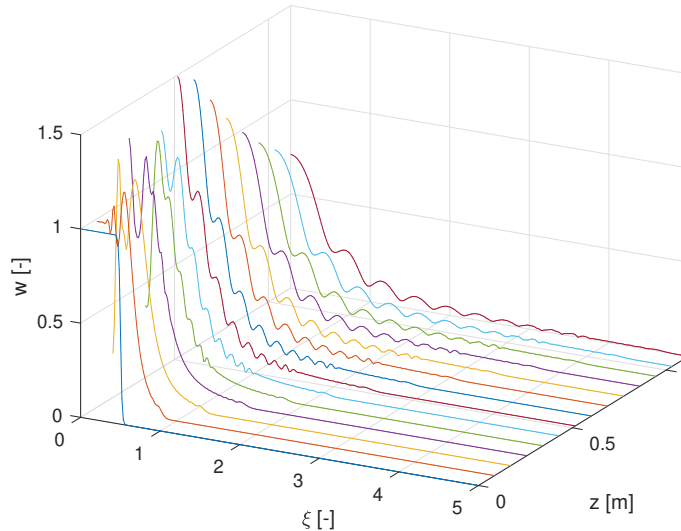
Obrázek 6.7: Podélný průběh pro první harmonickou ($n = 1$)



Obrázek 6.8: Podélný průběh pro druhou harmonickou ($n = 2$)

Z průběhů (6.7) a (6.8) vidíme, že dochází u všech harmonických (na obrázcích pouze dvě) k oscilaci. Tyto oscilace v blízkém poli jsou příčinou difrakce [12]. Ve vzdálenosti $\sigma \approx l_d \approx 0.5$, nastává vybuzení všech harmonických.

Na posledním obrázku vidíme příčné rozložení akustické rychlosti pro první harmonickou v různých vzdálenostech ve směru šíření. Ve vzdálenosti $\sigma = z = 0$ vidíme pístové rozdělení, ve větších vzdálenostech pak nastává difrakce a příčné rozložení je více rozkmitané.



Obrázek 6.9: Příčné rozdělení ak. rychlosti v různých vzdálenostech.

6.2 Model audiorefektoru

V předchozí kapitole jsme otestovali algoritmus pro výpočet KZK rovnice pro různé počáteční podmínky. Nyní se pokusíme vytvořit model audiorefektoru. Rozdíl oproti předchozí podkapitole bude v tom, že použijeme pouze ultrazvukové frekvence k tomu, abychom vytvořili ultrazvukový signál zabalený do obálky audiosignálu. K tomu použijeme modulaci podle sekce (5.3). Očekáváme, že se v určité vzdálenosti začnou tvořit nižší harmonické, které nakonec v audiooblasti vytvoří slyšitelný signál. Například na obrázcích (5.4) a (5.5) je ukázáno buzení pomocí 21 harmonických, resp. $n_1 = 40$ a $n_2 = 60$. V ideálním případě by se tyto frekvence měly postupně tlumit, až by místo průběhu (5.4) zbyla jen obálka.

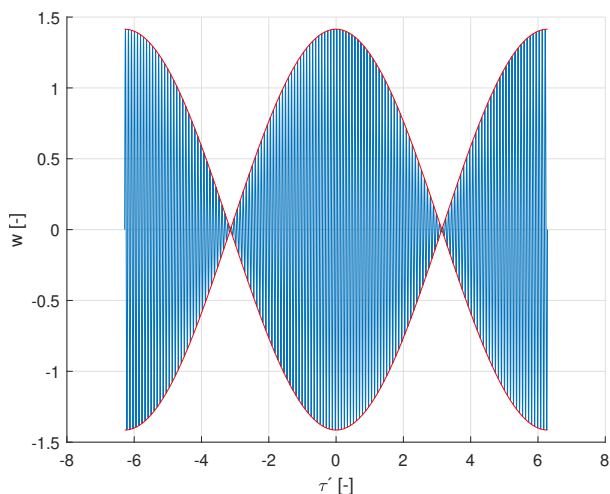
6.2.1 Zdroj zvuku s Gaussovým rozdělením akustické rychlosti

Uvažujeme zdroj, který bude mít příčné rozdělení v $\sigma = 0$ popsáno pomocí vztahu (6.2). Oproti předchozí kapitole však toto rozdělení nebude pro první harmonickou, ale pro všechny budící frekvence od n_1 až n_2 . Hodnota v_m už nebude rovna 1, ale bude odpovídat amplitudě, kterou spočítáme pomocí Fourierových koeficientů a_n a b_n jako $v_m = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

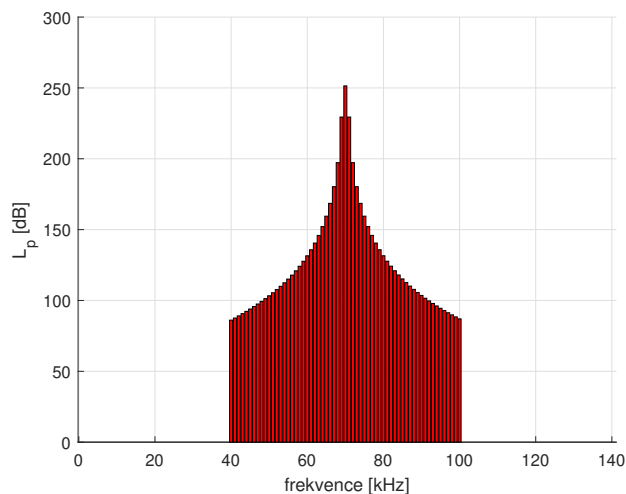
Budeme vysílat signál, který po autodemodulaci vytvoří audiosignál $g(t) = \cos(\Omega t)$ o frekvenci $F = 1$ kHz ($\Omega = 2\pi F$). K tomu použijeme nosnou ultrazvukovou frekvenci $f_o = 70$ kHz ($\omega = 2\pi f_o$). Budeme budit na frekvencích 40 až 100 kHz, tedy $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$, což je symetrické okolo nosné frekvence f_0 . Další parametry zvolíme jako $v_m = 0.03$ m/s, $a = 0.3$ m, fokusační činitel $G = 100$ a hloubka modulace $m = 1$. Rayleighův poloměr je roven $r_0 = 0.819$

m. Výpočet bude probíhat pro $j_{max} = 6000$, $i_{imax} = 200$, $M = 140$. Podmínka (4.78) je tedy splněna, protože $R = 2.37 < G = 100$.

Časový průběh bezrozměrné akustické rychlosti a frekvenční spektrum ve vzdálenosti $\sigma = 0$ jsou na obrázku níže.

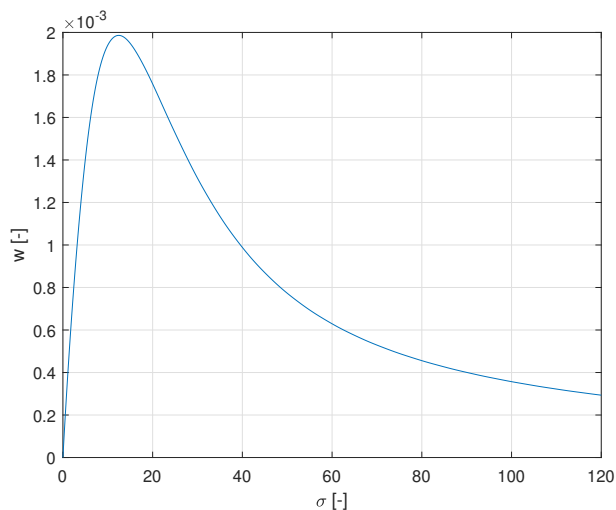


Obrázek 6.10: Průběh w ve vzdálenosti $z = 0$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$.

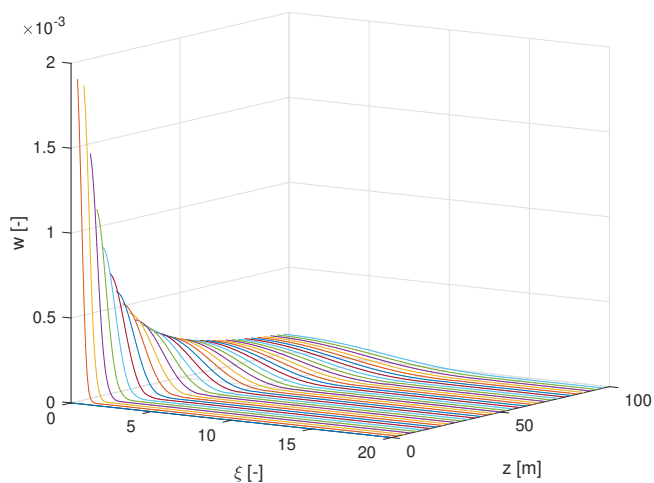


Obrázek 6.11: Odpovídající frekvenční spektrum pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$.

Po uběhnutí výpočtu se podíváme na průběh první harmonické v příčném i podélném směru. V podélném směru sledujeme postupný nárůst amplitudy fundamentální harmonické až k maximu, odkud začne postupně klesat. V příčném směru vykreslujeme rozložení rychlosti každých 150 kroků ve směru šíření. Sledujeme postupnou difrakci, která je ovšem oproti difrakci normálního zvukového svazku velmi malá.

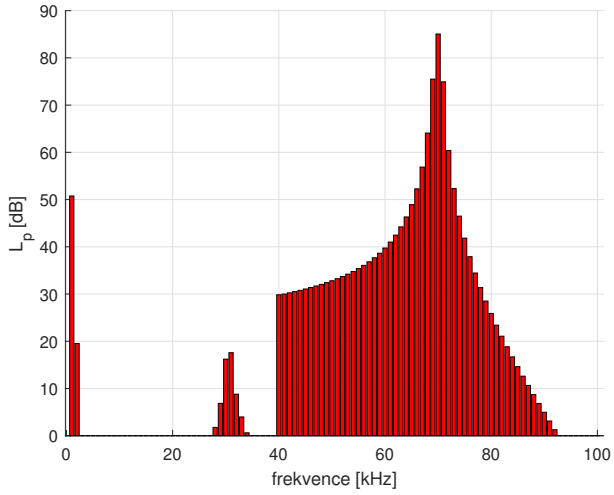


Obrázek 6.12: Podélný průběh akustické rychlosti první harmonické.

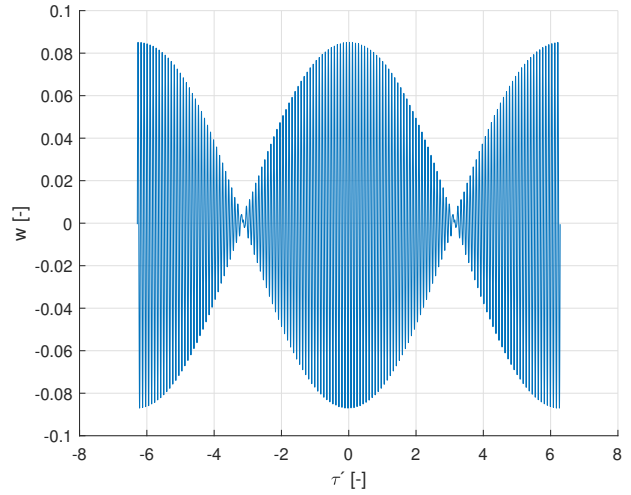


Obrázek 6.13: Příčné průběhy akustické rychlosti pro první harmonickou.

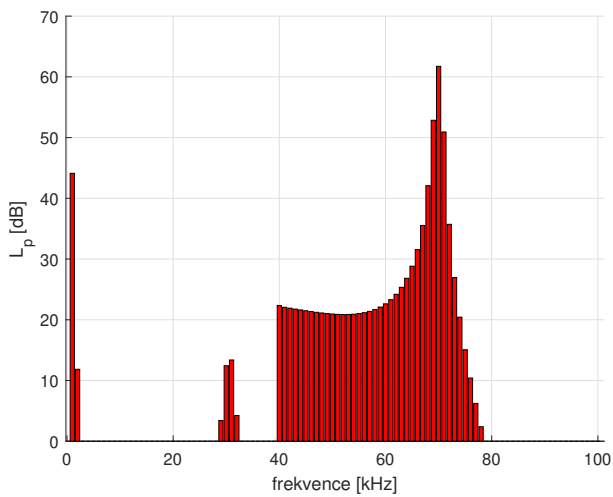
Výpočet probíhá do cca 100 metrů. V následujících grafech budou vždy uvedeny případy pro $z = 30$ m, $z = 60$ m a $z = 90$ m.



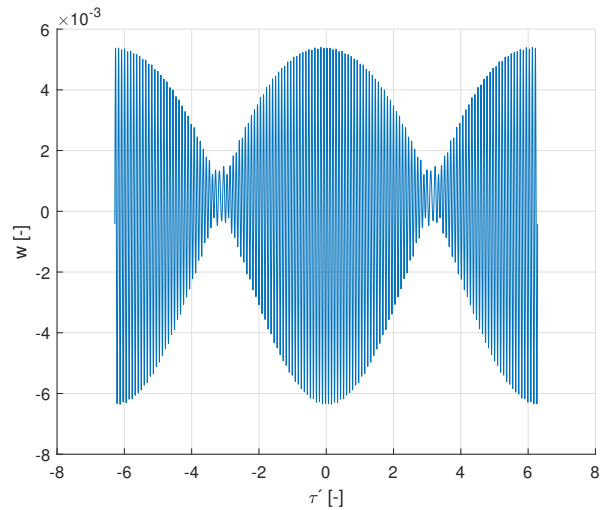
Obrázek 6.14: Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 30$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$.



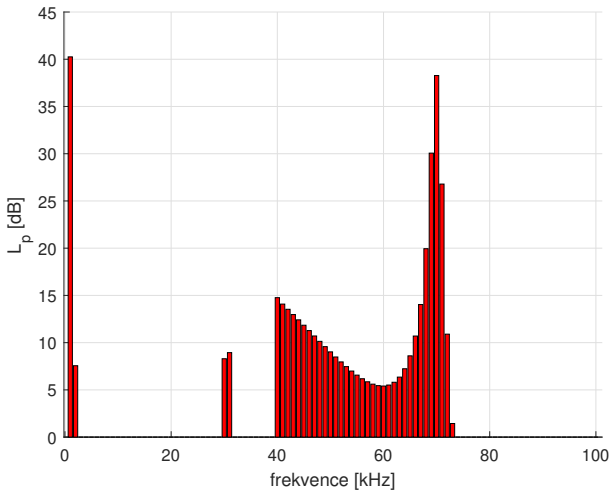
Obrázek 6.15: Průběh w ve vzdálenosti $z = 30$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$.



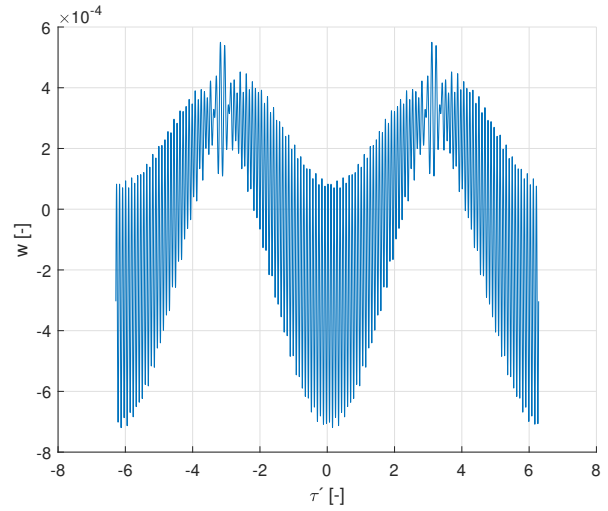
Obrázek 6.16: Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 60$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$.



Obrázek 6.17: Průběh w ve vzdálenosti $z = 60$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$.



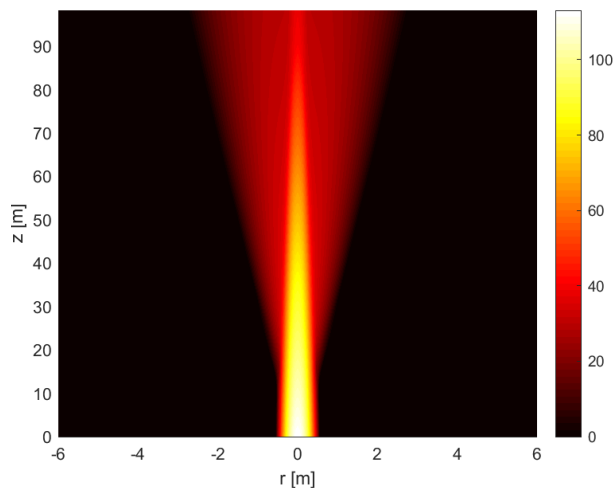
Obrázek 6.18: Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 90$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$.



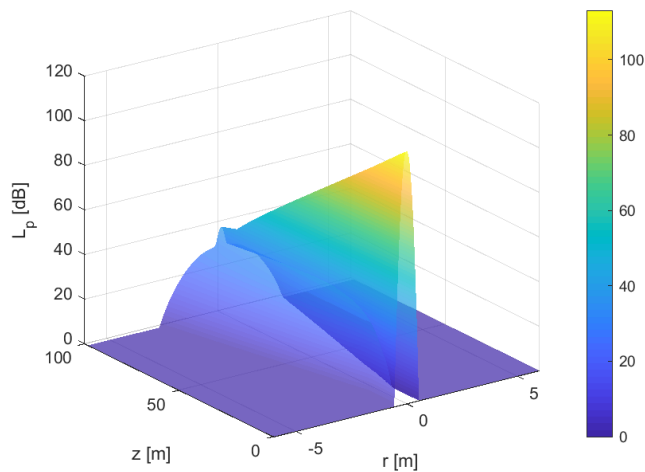
Obrázek 6.19: Průběh w ve vzdálenosti $z = 90$ m pro $n_1 = 40$ a $n_2 = 100$.

Z frekvenčních spekter vidíme, že vznikla požadovaná frekvence $F = 1$ kHz s intenzitou cca 40 až 50 dB. V audiooblasti navíc vznikla nechtěná druhá harmonická, tedy $2F = 2$ kHz. Tato má ovšem velmi malou intenzitu, takže výsledný audiosignál ovlivní jen málo. V audiooblasti již žádné jiné frekvence nevznikají. V ultrazvukové oblasti pak vidíme, že vznikají frekvence okolo 30 kHz, které ovšem mají malou intenzitu. Pozorujeme taktéž velký útlum vyšších frekvencí, což odpovídá tomu, že útlum je úměrný kvadrátu kmitočtu. Kdybychom počítali do větší vzdálenosti, nosné frekvence by se nejspíš ztlumily úplně a zůstaly by pouze zmíněné frekvence F a $2F$.

Dále demonstrujeme směrovost tohoto svazku a také hladinu akustické intenzity v oblasti výpočtu.

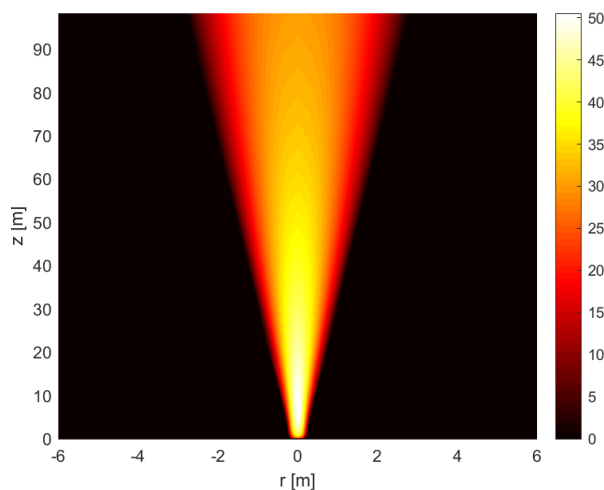


Obrázek 6.20: Hladina akustické intenzity v oblasti výpočtu.

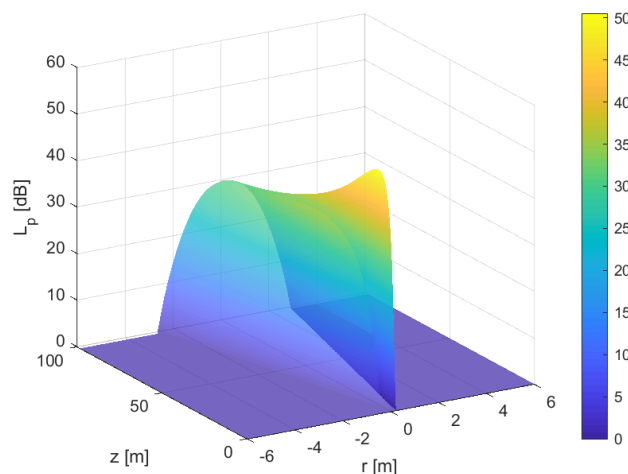


Obrázek 6.21: Hladina akustické intenzity zobrazena ve 3D.

Pokud bychom vykreslili pouze slyšitelnou část, tedy nebrali v úvahu frekvence > 20 kHz, dostaneme propagaci audiosignálu oblastí výpočtu.



Obrázek 6.22: Hladina akustické intenzity v audiooblasti.

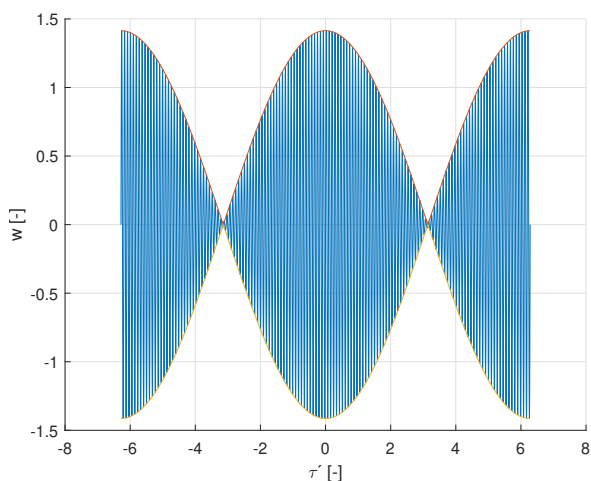


Obrázek 6.23: Hladina akustické intenzity v audiooblasti zobrazena ve 3D.

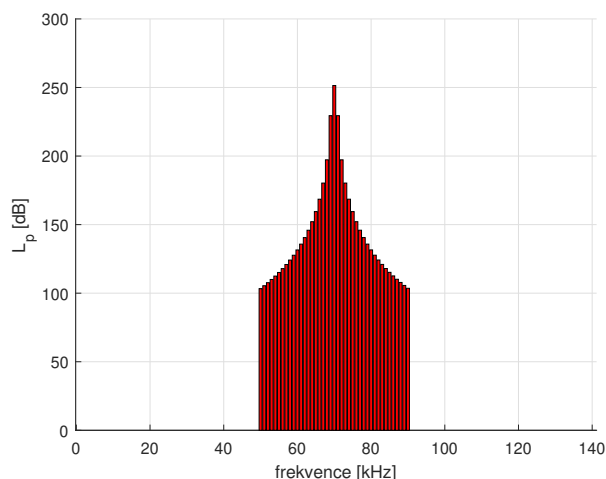
Z obrázků vidíme, že ultrazvuková vlna je velmi směrová a do stran se téměř nešíří. Demodulovaný audiosignál již tak směrový není, ale v porovnání s konvenčními reproduktory je pořád velmi fokusovaný.

6.2.2 Zdroj zvuku s Fermiho rozdělením akustické rychlosti

Reálnější případ je již zmíněný píst. Počáteční rozdělení akustické rychlosti na zdroji bude odpovídat Fermiho rozdělení ze vztahu (6.4). Vysíláme stejný signál $g = \cos(\Omega t)$, kde $\Omega = 2\pi F$ a $F = 1$ kHz. Nosnou frekvenci opět zvolíme $f_0 = 70$ kHz. Budící frekvence jsou 50 až 90 kHz. Písty většinou mají jen několik centimetrů, takže zvolíme poloměr $a = 10$ cm, $v = 0.02$ m/s, fokusační činitel $G = 100$ a hloubka modulace $m = 1$. Rayleighův poloměr je $r_0 = 0.0919$ m. Počet kroků ve směru šíření je $j_{max} = 12000$, v kolmém směru $i_{max} = 300$, počet harmonických $M = 140$. Podmínka (4.78) je splněna, neboť $R = 4.91 < G = 100$.

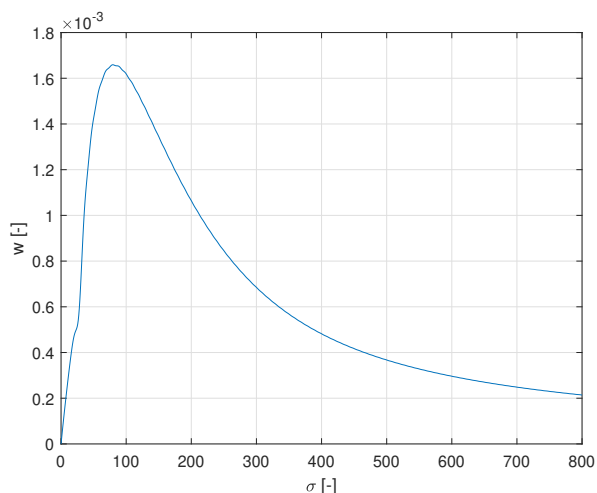


Obrázek 6.24: Průběh w ve vzdálenosti $z = 0$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$.

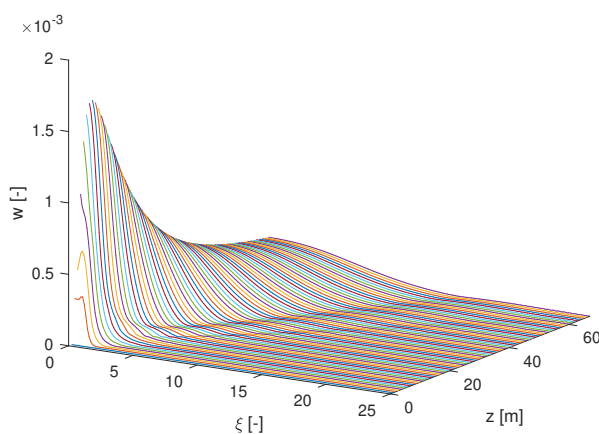


Obrázek 6.25: Odpovídající frekvenční spektrum pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$.

Příčný a podélný průběh první harmonické jsou na obrázcích níže. U příčného průběhu vykresluje příčné rozdělení každých 150 bodů ve směru šíření.

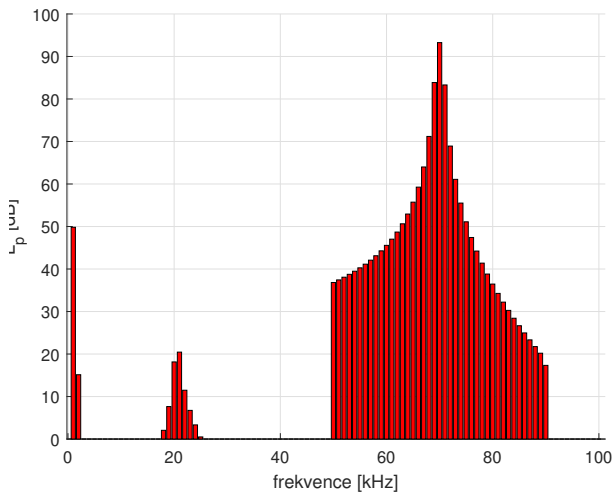


Obrázek 6.26: Podélný průběh akustické rychlosti první harmonické.

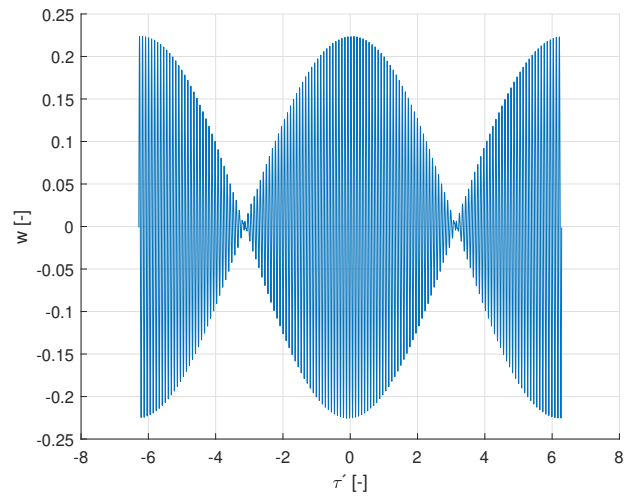


Obrázek 6.27: Příčné průběhy akustické rychlosti pro první harmonickou.

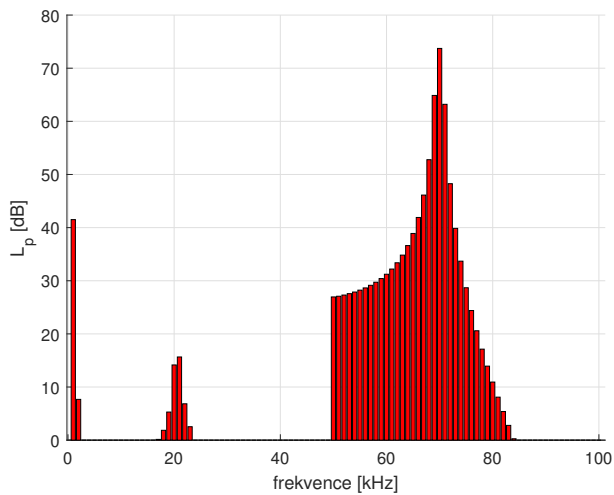
Výpočet probíhá do cca 72 metrů. Budeme sledovat průběh akustické rychlosti a frekvenční spektrum ve vzdálenostech $z = 20$ m, $z = 45$ m a $z = 70$ m.



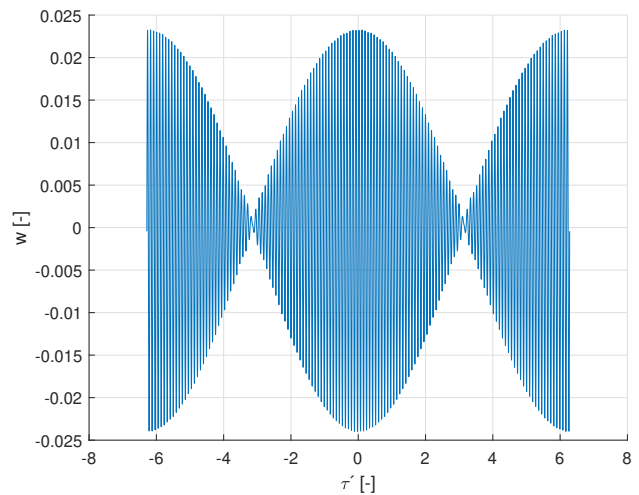
Obrázek 6.28: Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 20$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$.



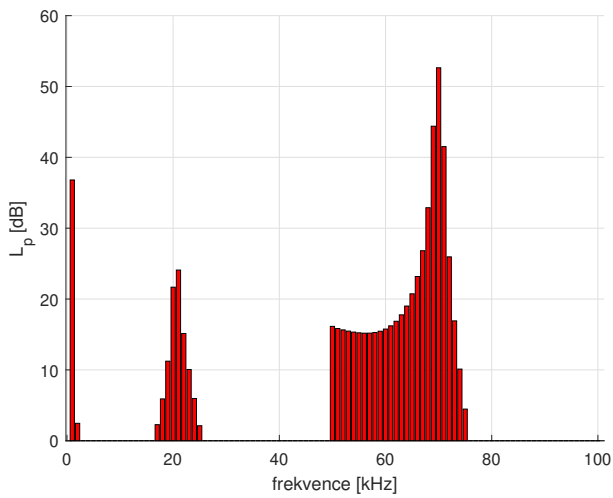
Obrázek 6.29: Průběh w ve vzdálenosti $z = 20$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$.



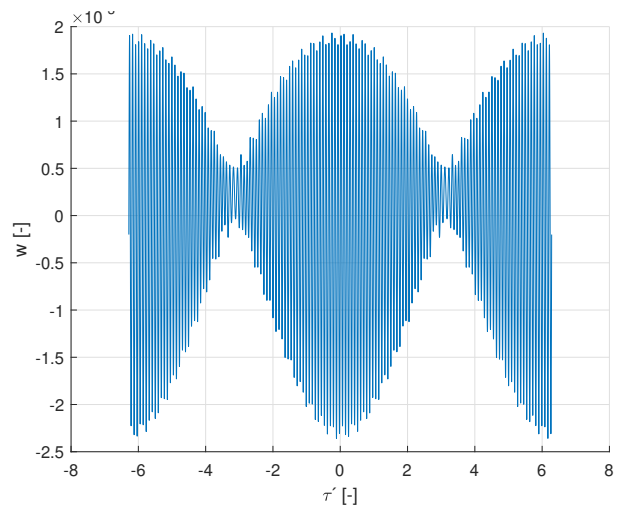
Obrázek 6.30: Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 45$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$.



Obrázek 6.31: Průběh w ve vzdálenosti $z = 45$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$.

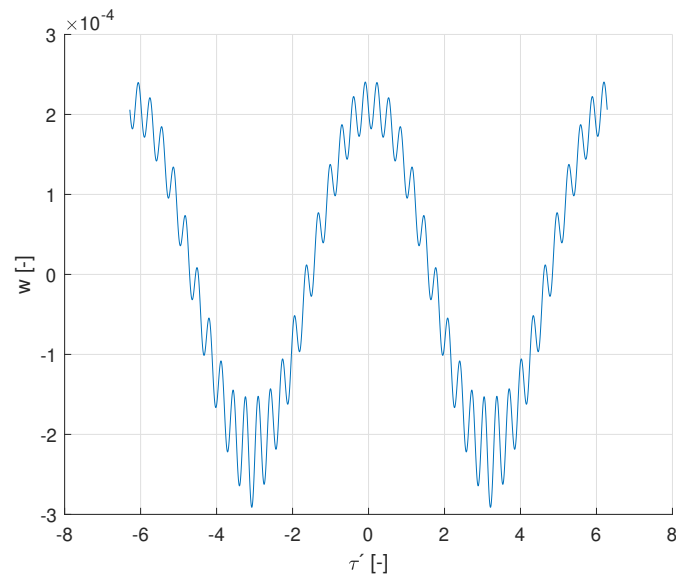


Obrázek 6.32: Frek. spektrum ve vzdálenosti $z = 70$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$.



Obrázek 6.33: Průběh w ve vzdálenosti $z = 70$ m pro $n_1 = 50$ a $n_2 = 90$.

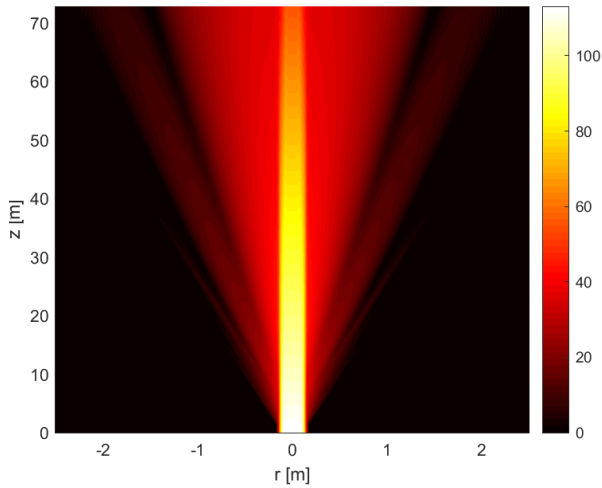
Lze pozorovat, že ve frekvenčních spektrech je více ztlumená nežádoucí druhá harmonická. Na druhou stranu vznikají poměrně silné frekvence okolo rozmezí zvuku a ultrazvuku (15 – 25 kHz). Tyto frekvence pak budou ovlivňovat výsledný demodulovaný audiosignál. Např. pro $z = 70$ m vidíme, že nežádoucí frekvence okolo 20 kHz mají intenzitu okolo 20 dB, což zapříčiní následující průběh v audiooblasti



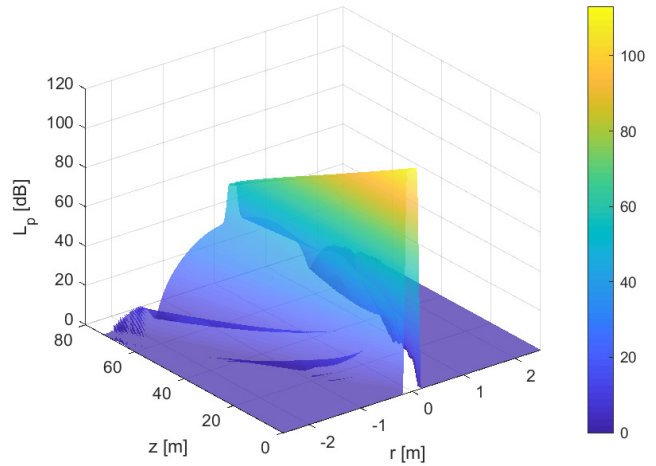
Obrázek 6.34: Ovlivnění audiosignálu nežádoucími frekvencemi

Pokud bychom sledovali průběh akustické rychlosti v menších vzdálenostech, zkreslení by bylo menší, jak je vidět z frekvenčních spekter. Jinak pozorujeme podobná spektra jako u Gaussova rozdělení.

Hladina intenzity zvuku je opět vykreslena jak ve 2D, tak ve 3D. U pístu lze na rozdíl do Gaussovského zdroje pozorovat jakousi diskretizaci zvukového paprsku, kdy vznikají tenké zvukové paprsky a mezi nimi jsou hluchá místa. K tomuto jevu v audiooblasti dochází u první harmonické, u dalších již nikoliv, jak je uvedeno a ukázáno zde [13].

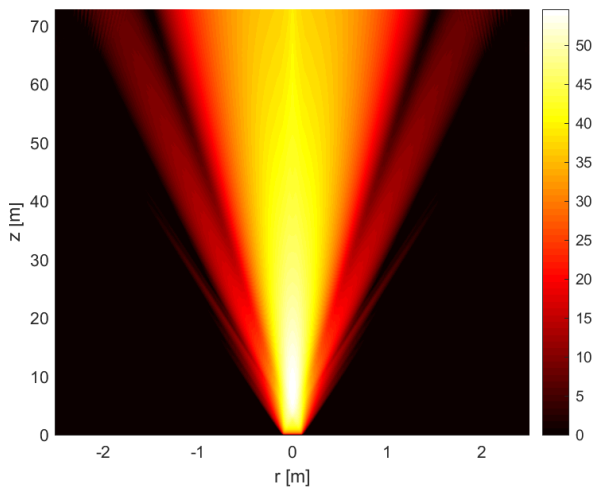


Obrázek 6.35: Hladina akustické intenzity v oblasti výpočtu.

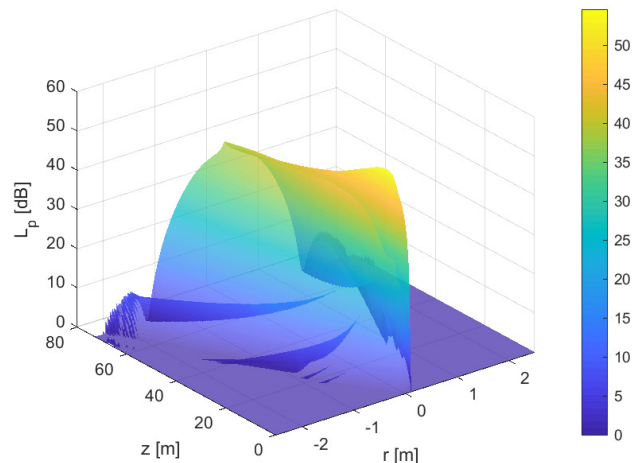


Obrázek 6.36: Hladina akustické intenzity ve 3D.

Při vykreslení pouze slyšitelné oblasti dostaneme tyto obrázky.



Obrázek 6.37: Hladina akustické intenzity v audiooblasti.



Obrázek 6.38: Hladina akustické intenzity v audiooblasti ve 3D.

Kapitola 7

Ukládání vypočítaných dat

Numerický výpočet KZK rovnice a modelu audiorefektoru je poměrně náročný a může trvat od několika minut do pár hodin v závislosti na počtu kroků, přesnosti, počtu harmonických, atd. Chceme-li po skončení výpočtu s vypočítanými daty pracovat, je nutné si je průběžně ukládat. Poté se data dají reprezentovat pomocí grafů aj.

Hlavní data, která je třeba ukládat, jsou koeficienty $g_n(\sigma, \xi)$ a $h_n(\sigma, \xi)$ z rovnice (3.1). Díky nim vlastně získáme celý průběh bezrozměrné akustické rychlosti $w(\tau', \sigma, \xi)$.

Mějme M počet harmonických, i_{max} počet kroků v příčném směru a j_{max} počet kroků v podélném směru. V kroku j musíme spočítat koeficienty g a h pro harmonickou n a příčný krok i . Tedy v každém podélném kroku musíme uložit 2D tabulku o rozměrech $[M, i_{max}]$ pro g i h . V Matlabu se defaultně ukládají číselné proměnné ve formátu *double-precision floating-point number*, který má velikost 64 bitů, neboli 8 bajtů. My budeme data ukládat stejně, protože se ukázalo, že při *single-precision floating-point number* dochází poměrně k výrazným ztrátám v přesnosti. Obecně tedy platí, že velikost ukládaných dat bude

$$velikost = 2 \cdot M \cdot j_{max} \cdot i_{max} \cdot 8B \quad (7.1)$$

Konkrétně, pokud vezmeme parametry např. $M = 150$, $j_{max} = 5000$ a $i_{max} = 150$, dostáváme velikost dat 1.68 GB. Pro větší hodnoty parametrů se dostáváme k desítkám GB.

Jedna z možností uložení je vytvořit j_{max} textových souborů .txt či j_{max} "listů" v souboru .csv. Abychom dokázali efektivně vytvořit a organizovat takto velká data, je zapotřebí použít propracovanější souborový formát.

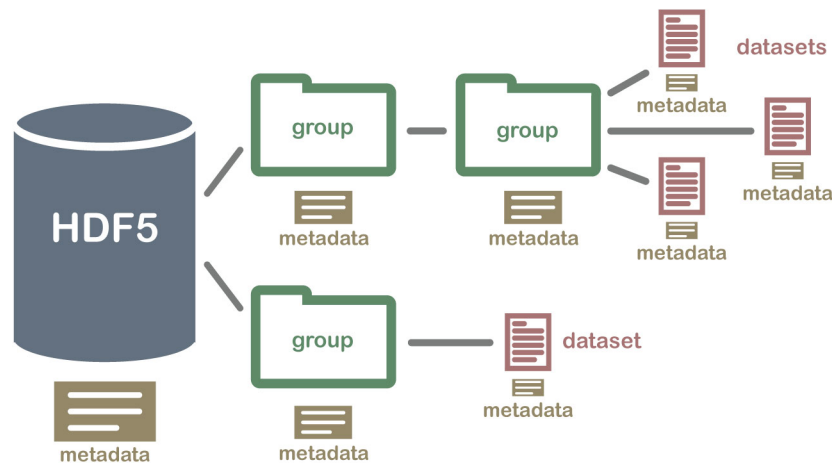
7.1 Hierarchical Data Format - HDF5

Tento souborový formát vznikl na konci 80. let v americkém NCSA (National Center for Supercomputing Applications). Nyní je vývoj spravován skupinou The HDF Group [14].

Nynější verze HDF5 má ve své struktuře pouze dva objekty - skupiny a datasety. Pro indexování tabulek objektů používá HDF5 b-stromy. Výhodou je podpora n-dimenzionálního datasetu a navíc každý prvek v datasetu může být téměř jakýkoliv objekt, ať už je to JPEG obrázek či mnohodimenzionální pole.

HDF5 je podporován komerčními i nekomerčními softwarovými platformami jako je Java, Python, Scilab, GNU Octave, Mathematica, IDL, Python, R,...

Uplatnění HDF5 najdeme od vědy přes průmysl až po biomedicínu, finančníctví a kybernetickou bezpečnost.



Obrázek 7.1: Struktura HDF5 [15]

7.2 Ukládání dat do HDF5 souboru

Soubory, které jsou uloženy ve formátu HDF5, mají příponu `.h5`. Pokud bychom chtěli data ukládat do souboru např. `'example.h5'`, musíme ho v Matlabu vytvořit příkazem

```
fcpl = H5P.create('H5P_FILE_CREATE');
fapl = H5P.create('H5P_FILE_ACCESS');
fid = H5F.create('example.h5', 'H5F_ACC_TRUNC', fcpl, fapl);
```

To vytvoří nový soubor s daným jménem, popřípadě přepíše starý. Pro vytvoření skupin pro parametry a koeficienty g a h použijeme příkaz `H5G.create`

```
Gid = H5G.create(fid, 'G', 0);
Hid = H5G.create(fid, 'H', 0);
Pid = H5G.create(fid, 'Params', 0);
```

Nyní můžeme do skupin přidávat datasety. Zde musíme vědět, jaká data přidáváme a jaké jsou jejich rozměry. Příkazem `H5S.create_simple` vytvoříme místo pro dané rozměry dat. Dále pak pomocí `H5D.create` vytvoříme/alokujeme místo pro daný typ dat (např. `double` nebo `int`). Nakonec příkazem `H5D.write` vepíšeme data na alokované místo. Po každém takovém přidání datasetu musíme použít funkce `H5S.close` a `H5D.close`.

```
global M imax;
plist = H5P.create('H5P_DATASET_CREATE');
if group_name == 'Params'
    space_id = H5S.create_simple(1,1,1);
else
    dims = flip1r([M imax]);
    space_id = H5S.create_simple(2, dims, dims);
end
data_id = H5D.create(group_id, name, 'H5T_NATIVE_DOUBLE', space_id, plist);
num_type = 'H5T_NATIVE_DOUBLE';
```

```
H5D.write(data_id, num_type, 'H5S_ALL', 'H5S_ALL', 'H5P_DEFAULT', data);
H5S.close(space_id);
H5D.close(dataset_id);
```

Po ukončení posledního zápisu datasetu je třeba použít příkaz *H5F.close*. Tím dojde k uzavření zápisu do souboru.

7.3 Čtení dat z HDF5 souboru

Po skončení výpočtu a psaní do souboru je nutné pro možnost vykreslení nebo jiného zpracování zjistit zpátky koeficienty g a h (popřípadě i *Params*) v daném kroku. To se v Matlabu dělá obdobně, jako při zápisu do HDF5 souboru.

Mějme opět soubor s názvem 'example.h5'. Nejdříve tento soubor otevřeme příkazem *H5F.open*.

```
filename = 'example.h5';
fid = H5F.open(filename);
```

Pokud bychom chtěli zjistit tyto koeficienty např. v kroku $j = j_{max} = 5000$, bude absolutní cesta ke koeficientům g a h jako */G/j5000* a */H/j5000*. Výše uvedené cesty uložíme do proměnných

```
g_name = strcat('/G/j', num2str(j_max));
h_name = strcat('/H/j', num2str(j_max));
```

Poté použijeme příkaz *H5D.open*, kterým otevřeme daný dataset. Pro čtení existuje funkce *H5D.read*, která nám již vrátí požadované koeficienty, které budou mít rozměry $[M, imax]$.

```
g_name = strcat('/G/j', num2str(j_number));
h_name = strcat('/H/j', num2str(j_number));
gid = H5D.open(fid, g_name);
hid = H5D.open(fid, h_name);
G = H5D.read(gid);
H = H5D.read(hid);
```


Kapitola 8

Závěr

Cílem práce bylo najít vhodnou rovnici k popisu šíření akustických vln konečné amplitudy, vytvořit numerickou metodu pro řešení ve frekvenční oblasti, toto řešení implementovat v MATLABu a posléze vytvořený program použít k modelování činnosti audiorefektoru.

V první části byla zvolena modelová rovnice, která dobře popisuje vlny konečné amplitudy v tekutinách. Byl vysvětlen bezrozměrný tvar KZK rovnice.

V druhé části bylo ukázáno řešení KZK rovnice ve frekvenční oblasti. Postupně jsme dospěli k soustavě diferenciálních rovnic, které bylo třeba diskretizovat a vyřešit numericky.

Poté jsme hledali numerické řešení této soustavy. Byla řešena metodou sítí, která byla taktéž vysvětlena. Diskutovali jsme všechny okrajové podmínky pro naši numerickou síť. Následně jsme zdiskretizované rovnice převedli na soustavu lineárních rovnic a tuto soustavu řešili iterační metodou. Výpočet num. řešení KZK rovnice jsme implementovali v programovém prostředí MATLAB. Nakonec jsme ukázali, za jakých podmínek iterace konvergují.

V další části byl představen princip autodemodulace. Použili jsme speciální amplitudovou modulaci - SRAM. Takto modulovaný signál byl vysílán zdrojem pomocí M harmonických. Bylo ukázáno, že při malém počtu budících frekvencí byl vysílaný signál příliš zkreslený.

Numerické výsledky byly prezentovány ve formě grafů, kdy jsme nejprve vysílali ultrazvukovou vlnu ve vodě a pozorovali vznik rázu v blízkém poli. Toto bylo provedeno jak pro zdroj s Gaussovým rozdělením, tak zdroj s Fermiho rozdělením, který lépe modeluje reálný zdroj zvuku. U pístu se projeví oscilace, zatímco u Gaussova rozdělení nikoliv. Dále byl algoritmus použit k demonstraci procesu autodemodulace, jenž je využíván audiorefektorem. Vždy jsme přenášeli jednoduchý harmonický audiosignál o frekvenci 1 kHz, který jsme superponovali na ultrazvukovou nosnou vlnu, v našem případě 70 kHz. Ukázalo se, že po audemodulaci ultrazvukového svazku v audiooblasti vzniká námi přenášený signál. Zároveň vznikají i nežádoucí frekvence, které jsou u Gaussova rozložení poměrně slabé, u pístového rozložení už silnější. Z výsledků lze vidět, že po autodemodulaci si audiosignál zachovává směrovost, což je hlavní cíl audiorefektoru.

Na závěr bylo ukázáno, jakým způsobem byla ukládána vypočítaná data. Tento způsob ukládání velkých dat umožnil jejich jednoduchou manipulaci a zpracování. Právě z HDF5 souborů byly vykresleny grafy ve výsledcích. Prezentovaný algoritmus, který řeší KZK rovnici ve frekvenční oblasti, se nazývá *Bergen code*. Pokud bychom chtěli přenášet komplexnější signály, bylo by lepší použít numerické řešení v časové oblasti, kterému se říká *Texas code* [16]. Pomocí řešení v časové oblasti je na rozdíl od frekvenčního možné přenášet libovolné signály, nikoliv jen periodické. Naše řešení sloužilo pro demonstraci principu autodemodulace a overení, že za určitých podmínek je možné použít tento princip k přenosu audiosignálů.



Literatura

- [1] Louis Jackowski-Ashley, Gianluca Memoli, Mihai Caleap, Nicolas Slack, Bruce W Drinkwater, and Sriram Subramanian. Haptics and directional audio using acoustic metasurfaces. In *Proceedings of the 2017 ACM International Conference on Interactive Surfaces and Spaces*, pages 429–433. ACM, 2017.
- [2] Adrien Dekkers, Vladimir Khodygo, and Anna Rozanova-Pierrat. Models of nonlinear acoustics viewed as an approximation of the navier-stokes and euler compressible isentropic systems. 2018.
- [3] Anna Rozanova-Pierrat. Mathematical analysis of khokhlov-zabolotskaya-kuznetsov (kzk) equation. 2006.
- [4] DM Causon and CG Mingham. *Introductory finite difference methods for PDEs*. Bookboon, 2010.
- [5] Sigurd Ivar Aanonsen. Numerical computation of the nearfield of a finite-amplitude sound beam. *Department of Mathematics, University of Bergen*, 1983.
- [6] Holosonics. 'face the music' using audio spotlight directional speakers. <https://www.holosonics.com/press-releases/audio-spotlight-brings-unique-works-photographer-richard-ehrllich-life-morrison-hotel-gallery>. Citováno 20. května 2020.
- [7] Woon-Seng Gan, Peifeng Ji, Ee Leng Tan, and Jun Yang. Distortion analysis and reduction for the parametric array. In *Audio Engineering Society Convention 124*. Audio Engineering Society, 2008.
- [8] Valery Serov. *Fourier series, Fourier transform and their applications to mathematical physics*. Springer, 2017.
- [9] Petr Konicek, Michal Bednarik, and Milan Cervenka. Self-demodulation effects in nonlinear focused beams. In *2011 IEEE International Ultrasonics Symposium*, pages 1687–1688. IEEE, 2011.
- [10] Michael Richmond. Numerical integration: Intermediate. http://spiff.rit.edu/classes/phys317/lectures/num_integ2/num_integ2.html. Citováno 20. května 2020.

- [11] VA Khokhlova, R Souchon, J Tavakkoli, OA Sapozhnikov, and D Cathignol. Numerical modeling of finite-amplitude sound beams: Shock formation in the near field of a cw plane piston source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, pages 95–108, 2001.
- [12] Sigurd Ivar Aanonsen, Tor Barkve, Jacqueline Naze Tjo/tta, and Sigve Tjo/tta. Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam. *The Journal of the Acoustical Society of America*, pages 749–768, 1984.
- [13] Zhi-wu An, Zhuo-chen Wang, Hai-yang Li, and Xiao-ning Jiang. Modeling of harmonic measurement radiated by a plane circular piston in fluids. In *2016 Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications (SPAWDA)*, pages 288–292. IEEE, 2016.
- [14] The HDF Group. About us. <https://www.hdfgroup.org/about-us/>. Citováno 20. května 2020.
- [15] Leah A. Wasser, Elizabeth Webb, and Donal O’Leary. About hierarchical data formats - hdf5. <https://www.neonscience.org/about-hdf5>. Citováno 20. května 2020.
- [16] Yang-Sub Lee. Numerical solution of the kzk equation for pulsed finite amplitude sound beams in thermoviscous fluids. 1993.