



**Fakulta elektrotechnická**  
**Katedra řídicí techniky**

**Bakalářská práce**

# **Dynamický plotr časově optimální kreslicí zařízení**

**Pavel Souček**

**Květen 2020**

**Vedoucí práce: Ing. Martin Gurtner**

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Souček** Jméno: **Pavel** Osobní číslo: **466376**  
Fakulta/ústav: **Fakulta elektrotechnická**  
Zadávací katedra/ústav: **Katedra řídicí techniky**  
Studijní program: **Kybernetika a robotika**

## II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

**Dynamický plotr – časově optimální kreslicí zařízení**

Název bakalářské práce anglicky:

**Dynamic Plotter – time-optimal drawing machine**

Pokyny pro vypracování:

Navrhněte a postavte zařízení, které bude co nejrychleji kreslit zadané obrazce. Zařízení bude svou konstrukcí připomínat kyvadlo na vozíku s proměnnou délkou závěsu, přičemž konec kyvadla bude sloužit jako laserové pero. Cílem je pohybovat s vozíkem tak, aby konec kyvadla (laser) projel zadanou cestu co nejrychleji. Toho nelze dosáhnout jinak než využitím znalosti dynamiky celého zařízení.

1. Navrhněte a postavte mechanickou část zařízení.
2. Odvoďte a identifikujte matematický model zařízení.
3. Formulujte úlohu kreslení zadaného obrazce jako časově optimální řídicí problém a ten vyřešte.
4. Implementujte regulátor sledující předpočítanou trajektorii z předchozího bodu.
5. Experimentálně ověřte funkčnost celého zařízení.

Seznam doporučené literatury:

- [1] R. Verschueren, N. van Duijkeren, J. Swevers, and M. Diehl, "Time-optimal motion planning for n-dof robot manipulators using a path-parametric system reformulation," in 2016 American Control Conference (ACC), 2016, pp. 2092–2097.
- [2] M. Vukov, W. Van Loock, B. Houska, H. J. Ferreau, J. Swevers, and M. Diehl, "Experimental validation of nonlinear MPC on an overhead crane using automatic code generation," in 2012 American Control Conference (ACC), 2012, pp. 6264–6269.
- [3] G. Perantoni and D. J. Limebeer, "Optimal control for a formula one car with variable parameters," Vehicle System Dynamics, vol. 52, no. 5, pp. 653–678, 2014.

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

**Ing. Martin Gurtner, katedra řídicí techniky FEL**

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **03.02.2020**

Termín odevzdání bakalářské práce: \_\_\_\_\_

Platnost zadání bakalářské práce: **30.09.2021**

Ing. Martin Gurtner  
podpis vedoucí(ho) práce

prof. Ing. Michael Šebek, DrSc.  
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry

prof. Mgr. Petr Páta, Ph.D.  
podpis děkana(ky)

## III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

\_\_\_\_\_  
Datum převzetí zadání

\_\_\_\_\_  
Podpis studenta



## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze, 22. května 2020

.....  
Pavel Souček

## **Poděkování**

Rád bych poděkoval vedoucímu své bakalářské práce Ing. Martinovi Gurtnerovi za námět této práce, odborné konzultace a vstřícný přístup. Také děkuji Ing. Křištofu Pučejdlovi za konzultace ohledně mechanických konstrukcí a 3D tisku. V neposlední řadě děkuji své rodině za podporu během dlouhých hodin strávených vypracováváním této práce.

## Abstrakt

Tato práce se věnuje konceptu dynamického plotru - jednoosého jeřábu s proměnnou délkou závěsu a pohyblivým místem zavěšení. Na rozdíl od většiny jeřábů, naším cílem není potlačit dynamiku tohoto systému, a tím eliminovat kmitání kyvadla, ale naopak tuto dynamiku využít pro zkrácení času a snížení akčního zásahu potřebného pro projetí zadané trajektorie. V rámci této práce byl postaven reálný model systému z běžně dostupných komponent a součástek tištěných na 3D tiskárně. Model byl uzpůsoben pro využití prostředí Simulink za účelem vývoje a simulace navržených regulátorů. Pro daný fyzický model byl odvozen matematický model a jeho konstanty jsme identifikovali několika experimenty. Pro takto připravený systém byl formulován problém hledání časově optimální trajektorie jakožto nelineární optimalizační úlohu, která byla vyřešena pomocí nástroje CasADi. Získanou trajektorii byla následně testována na matematickém modelu i experimentálně ověřena na reálném systému. Vzhledem k rozdílům mezi reálným a matematickým modelem, byly testovány LQR a PID regulátory pro sledování předpočítané trajektorie.

**Klíčová slova:** Dynamický plotr, plánování trajektorie, sledování trajektorie, časově optimální řízení, modelování dynamického systému

## Abstract

This thesis investigates the concept of dynamic plotter - single axis crane with variable placement of suspending of the pendulum and a length of the hanger. The main difference is that our goal is not to suppress the dynamics of this system and therefore eliminate the swinging motion of the pendulum. We are trying to make use of the dynamics of the system to decrease the time and required actuator effort to go through predetermined path of the pendulum. As a part of this thesis a real model of such system was built from commonly accessible parts or from printed on 3D printer. Model makes use of Simulink environment for development and testing of proposed regulators. Mathematical model was derived and its constants identified. We formulated problem of searching time optimal trajectory as a non-linear optimization task using the mathematical model. This optimization problem was solved using CasADi tool. Created trajectory was then tested on mathematical model as well as on the physical one. Few regulator types were tested at following of the precalculated trajectory.

**Keywords:** Dynamic plotter, trajectory planning, trajectory following, time-optimal control, dynamic system modeling

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Mechanický model</b>	<b>2</b>
2.1 Mechanický návrh . . . . .	2
2.2 Elektrické zapojení . . . . .	3
2.2.1 Odrive . . . . .	4
2.2.1.1 Komunikace s Odrive . . . . .	4
2.2.1.2 Ascii protokol . . . . .	5
2.2.1.3 Úpravy komunikace s Odrive . . . . .	5
2.2.2 BeagleBone Black . . . . .	5
2.2.2.1 Kvadrurní enkodér . . . . .	6
2.2.3 Deska plošného spoje . . . . .	6
2.3 Problémy mechanického modelu . . . . .	6
2.4 Pozdější úpravy mechanického modelu . . . . .	7
2.5 Kalibrace modelu . . . . .	7
2.6 Díly a ceny . . . . .	8
<b>3 Odvození matematického modelu</b>	<b>9</b>
3.1 Zavedení proměnných a konstant . . . . .	9
3.2 Odvození přes Lagrangeovy rovnice druhého druhu . . . . .	11
<b>4 Identifikace modelu</b>	<b>12</b>
4.1 Identifikace vlastností kyvadla . . . . .	12
4.2 Identifikace převodní konstanty motoru . . . . .	13
4.3 Identifikace hmotností vozíku a motorů . . . . .	14
4.4 Identifikace tlumení vozíku a lanka . . . . .	14
4.5 Hodnocení identifikovaného modelu . . . . .	15
<b>5 Plánování trajektorie</b>	<b>17</b>
5.1 CasADi . . . . .	17
5.2 Formulace problému . . . . .	17
5.2.1 Škálování času . . . . .	18
5.2.2 Převod na prostorové souřadnice . . . . .	18
5.3 Numerická implementace . . . . .	19
5.3.1 Popis trajektorie . . . . .	19
5.3.2 Numerické metody . . . . .	19
5.3.2.1 Dopředná Eulerova metoda . . . . .	20
5.3.2.2 Rungeova–Kuttova metoda čtvrtého řádu . . . . .	20
5.3.2.3 Hermitova-Simpsonova kolokační metoda . . . . .	20
5.4 Hodnocení nalezené trajektorie . . . . .	20
<b>6 Sledování trajektorie</b>	<b>22</b>
6.1 Sledování pomocí PID . . . . .	22
6.1.1 Úprava modelu s PID regulátorem . . . . .	23
6.2 Lineární kvadratický regulátor na nekonečném horizontu pro časově invariantní systém . . . . .	24

6.3	Lineární kvadratický regulátor na konečném horizontu pro časově proměnný systém . . . . .	24
6.4	Porovnání navržených regulátorů . . . . .	25
6.5	Vliv PID regulátorů . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>28</b>
7.1	Budoucí práce . . . . .	28
	<b>Literatura</b>	<b>29</b>

## Seznam obrázků

1	Vizualizace návrhu mechanického modelu - pohled izometrický shora . . . . .	2
2	Vizualizace návrhu mechanického modelu - pohled izometrický zdola . . . . .	3
3	Řídící smyčka Odrive [1] . . . . .	4
4	Elektrické zapojení . . . . .	6
5	Návrh upraveného kyvadla . . . . .	7
6	Kalibrace kyvadla . . . . .	7
7	Náčrt mechanického systému . . . . .	9
8	Naměřené vlastnosti kmitání v závislosti na délce závěsu . . . . .	12
9	Měření převodní konstanty motoru . . . . .	13
10	Průběh zpomalování vozíku . . . . .	14
11	Průběh zpomalování kyvadla . . . . .	15
12	Testování chování samotného kyvadla . . . . .	15
13	Porovnání modelů . . . . .	16
14	Návrh upraveného kyvadla . . . . .	21
15	Porovnání diskretizačních metod podle polohy vozíku a délky lanka . . . . .	21
16	Sledování trajektorie pomocí PID . . . . .	22
17	Schéma řízení s kombinací PID a LQR regulátorů . . . . .	23
18	Odchyšky polohy kyvadla od trajektorie navržené s Eulerovou metodou diskretizace pro jednotlivé způsoby regulace . . . . .	25
19	Odchyšky polohy kyvadla od trajektorie navržené s kolokační metodou diskretizace pro jednotlivé způsoby regulace . . . . .	26
20	Porovnání různých metod řízení motorů v Odrive . . . . .	27

## Seznam tabulek

1	Cena materiálu za dynamický plotr. . . . .	8
2	Zavedené konstanty a proměnné pro systém . . . . .	10
3	Zavedené konstanty a proměnné pro systém . . . . .	16
4	Porovnání diskretizačních metod podle času a přesnosti . . . . .	21

## Seznam zkratek

eQEP	enhanced quadrature encoder interface čítač kvadrurního enkodéru
UART	Universal asynchronous receiver-transmitter sériová linka
CAD	Computer-Aided Design počítačem podporované projektování
LQR	Linear–quadratic regulator lineárně kvadratický regulátor
PID	proportional–integral–derivative controller proporcionálně-integračně-derivační regulátor



# Kapitola 1

## Úvod

Mnoho mechanických systémů má nežádoucí dynamické vlastnosti, někdy se jedná o druhy kmitání, jindy přímo o nestabilitu systému. Nejčastějším přístupem k takovýmto problémům jsou různá opatření k potlačení nežádoucích vlastností. V určitých případech je však možné tuto dynamiku využít pro dosažení zadaného cíle. Typickým cílem je projetí určité trajektorie s minimální potřebovanou energií nebo minimálním časem. Právě využitím vlastností systému je možné snížit potřebný čas a energii. Pro dosažení těchto cílů je zapotřebí pokročile analyzovat vlastnosti systému a na základě těchto pozorování odhadnout způsob ovládání pro dosažení zadaného cíle.

Jako model pro demonstraci těchto principů jsme zvolili dynamický plotr. Jde o zařízení podobné jednoosému jeřábu. V principu se jedná o kyvadlo na vozíku s proměnnou délkou závěsu. Vstupem do systému jsou proudy do dvou BLDC motorů a výstupem jsou data ze tří enkodérů. Jeden z motorů pomocí řemenu přímo ovládá polohu vozíku a jeho otočení je měřeno enkodérem. Druhý motor ovládá délku lanka závěsu, i k tomuto motoru je připevněn enkodér. Třetí enkodér snímá úhel kyvadla.

Tento model byl zvolen především, protože jeho dynamika se dá výhodně použít a navíc jsou všechny veličiny systému dobře pozorovatelné pouhým lidským okem. Výsledkem práce má být především demonstrace principů řízení a tedy možnost vizualizovat trajektorii kyvadla je pro tyto účely ideální.

Cílem projektu je stavba fyzického modelu, jeho zprovoznění a připojení na prostředí Simulink, dále analyzovat fyzikální zákonitosti a vytvořit matematický model, který maximálně věrohodně simuluje fyzický systém.

Pro matematický model je pak možné vypočítat trajektorii, při které kyvadlo nakreslí zadanou křivku v minimálním čase. Matematický model se však nikdy dokonale neshoduje s reálným modelem, proto se využívají různé regulátory, kterými je tato neshoda částečně kompenzována.

## Kapitola 2

# Mechanický model

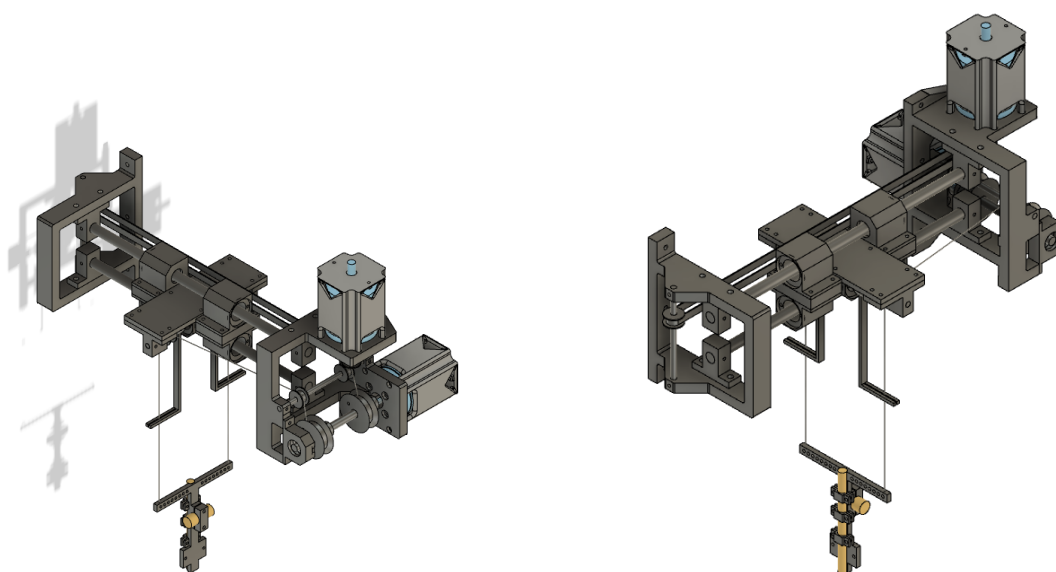
Cílem této práce je vyvinout experimentální platformu pro testování teoretických konceptů plánování trajektorie. Vzhledem k tomu, že se jedná o začátek projektu, bylo nutné tuto platformu od základu postavit. Platforma by měla mít dostatečný výpočetní výkon, aby bylo možné testovat i náročnější regulátory. Model by měl být připojitelný na vývojové prostředí Simulink [2] za účelem optimalizace trajektorie, návrhu a testování regulátorů. Model by měl být dále upravitelný a replikovatelný, především využitím volně dostupných součástek, případně 3D tisku.

První verze mechanického modelu byla postavena v rámci letní stáže ve skupině AA4CC na katedře řídicí techniky Elektrotechnické fakulty ČVUT. V této fázi vývoje se počítalo, že kreslicí mechanismus bude kontaktní, půjde o fix kreslicí na tabuli a tedy celé zařízení bude připevněno na tabuli. Tento koncept byl nakonec opuštěn, jelikož kontakt s tabulí by komplikoval dynamiku systému a činil ji závislou na stavu tabule apod., což by zbytečně komplikovalo hlavní cíl práce, tedy snahu demonstrovat možnosti plánování trajektorie.

Druhá verze byla navržena s myšlenkou kreslení pomocí laseru na plexisklo s luminoformním nátěrem pro lepší vizualizaci trajektorie. Celý mechanismus je postaven na samostatné nosné konstrukci. Bohužel vzhledem ke karanténě způsobené virem COVID-19, nebylo v rámci této práce možné konstrukci plně dostavět. Hlavním nedostatkem je absence zmíněného plexiskla s luminoformem, ale jinak je model plně funkční.

## 2.1 Mechanický návrh

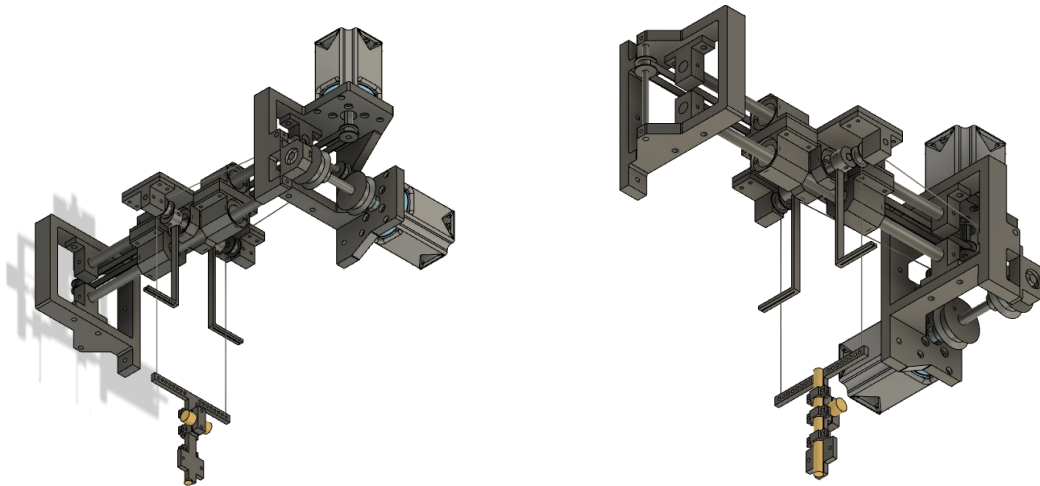
Celá konstrukce byla nejprve modelována v programu Fusion 360 [3] a následně vytištěna na 3D tiskárně [4] pro lepší možnost dále model upravovat. Zmenšený návrh (zkrácením vodících tyčí) je vyobrazen na obrázcích 1 a 2.



Obrázek 1: Vizualizace návrhu mechanického modelu - pohled izometrický shora

Mechanicky byl zvolen koncept vozíku pojíždějícího po dvou vodičích tyčích mezi dvěma stojkami. Tento vozík je zároveň místem zavěšení kyvadla. Poloha vozíku je určována jedním z motorů a jeho otočení a tím i poloha vozíku je měřena inkrementálním enkodérem připevněným přímo na rotor motoru. Délka závěsu je řešena analogicky pomocí druhého motoru. Systém má dvě vstupní veličiny: momenty síly generované dvěma motory.

Jelikož pro stavbu modelu byly vybrány výkonné motory, byly vzhledem k jejich váze oba umístěny mimo vozík. Oproti umístění jednoho z motorů na vozík jsou hlavními výhodami jednodušší kabeláž a zároveň lehčí vozík, tedy s lepší dynamikou. Nevýhodou toho přístupu je zkomplikování modelu, jelikož délka samotného závěsu kyvadla je závislá na poloze obou motorů.



Obrázek 2: Vizualizace návrhu mechanického modelu - pohled izometrický zdola

Samotné kyvadlo je zavěšeno na lanku, které vede od jednoho z motorů přes vozík viz obrázek 1. Kyvadlo je zavěšeno na dvou lanách, pro omezení pohybu mimo manipulační prostor. Použitá lanka jsou velmi tenká, aby při navíjení lanka na buben nedocházelo k výrazným změnám poměru otočení motoru ku délce lanka. Byly testovány i jiné přístupy k tomuto problému, ale při nich docházelo k prokluzu lanka při rychlých změnách rychlosti otáčení motoru.

Pro měření polohy samotného kyvadla byly zvažovány dvě možnosti: mechanická a optická. Optická, neboli získávání polohy kyvadla z kamery, by poskytovala lepší ověření polohy kyvadla a na rozdíl od mechanické by neovlivňovala dynamiku systému, ale naopak by do řízení přidala výrazné zpoždění způsobené zpracováním obrazu. Nakonec byla zvolena mechanická metoda. Lanka závěsu jsou spojena s malými pevnými měřícími kyvadly. Lanka jsou umístěna v drážce těchto malých kyvadel. Úhel výkyvu malých kyvadel je stejný jako hlavního kyvadla. Tato malá kyvadla jsou vzájemně spojena společnou ocelovou osou a na ní je namontovaný inkrementální enkodér, který přes tento mechanismus určuje úhel výkyvu. Poloha kyvadla je určena všemi třemi veličinami: úhlem výkyvu, délkou závěsu a polohou vozíku.

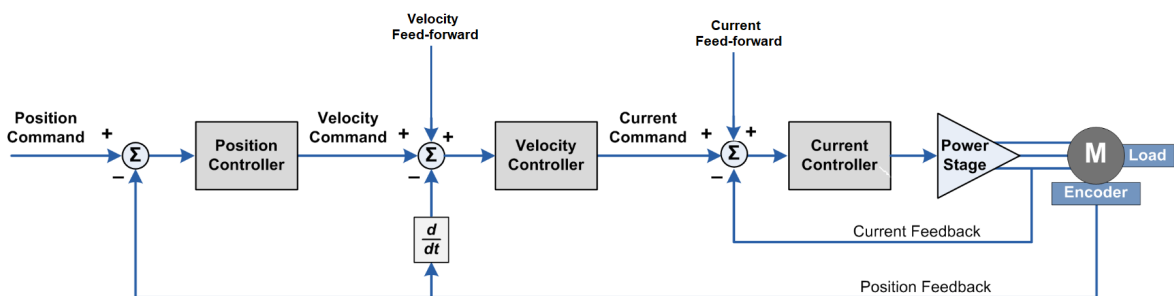
## 2.2 Elektrické zapojení

V prvotní verzi modelu bylo použito Raspberry Pi jako hlavní výpočetní jednotka systému. Pro vyčítání třetího enkodéru umístěného na vozíku se využívalo Arduino Nano. Po zavržení myšlenky snímání polohy kyvadla pomocí kamery došlo také ke změně výpočetní jednotky za BeagleBone Black. Tato změna byla motivována dvěma důvody. Raspberry Pi má pouze jeden vyvedený UART a pro jeho správné fungování na vyšších rychlostech je potřeba výrazných softwarových úprav. Na druhou stranu BeagleBone má možnost připojit až 4 linky UART, které jsou v základu stavěné na vyšší rychlosti přenosu. BeagleBone má navíc zabudované tři jednotky pro snímání kvadrantních enkodérů (eQEP).

### 2.2.1 Odrive

Odrive je open-source platforma vyvinutá Oskarem Weiglem pro řízení BLDC motorů. Platforma je otevřena jak v hardwaru, tak v softwaru, což umožňuje další úpravy pro účely našeho projektu. Odrive využívá enkodéry pro určování přesného otočení motorů. Odrive umožňuje řízení pomocí reference polohy, rychlosti nebo přes zadávání samotného proudu. Odrive také podporuje "feedforward", neboli předávání očekávaných hodnot rychlosti nebo proudu. Smyčka regulátoru (obrázek 3) běží na 8 kHz. Poziční kontrolér je realizován jako čistě proporcionální, rychlostní kontrolér je realizován jako PI (proporcionální, integrační). Dohromady je možné tyto dva popsat jako jeden PID (proporcionální, integrační, derivační) regulátor.

Pokud je zvolen poziční regulátor, tak jsou použity všechny regulátory. Při použití rychlostního řízení je regulátor polohy odpojený a při proudovém řízení je odpojen i regulátor rychlosti.



Obrázek 3: Řídicí smyčka Odrive [1]

#### 2.2.1.1 Komunikace s Odrive

Odrive umožňuje komunikaci přes PWM, USB, UART i CAN. Hlavními kritérii byly rychlost komunikace, spolehlivost a snadnost zprovoznění. Vzhledem k implementaci jednotlivých rozhraní, byl vybrán UART, jelikož dosahoval největší maximální rychlosti.

Odrive umožňuje přes UART dva rozdílné komunikační protokoly - nativní a ascii. Nativní je primárně určen pro komunikaci na principu paketů, obsahuje ochrany proti chybě přenosu a většina zpráv má přibližně stejnou délku. Samotné zprávy jsou pro člověka však nečitelné. Ascii protokol je častěji používán a tedy i lépe zdokumentovaný a pro člověka lépe čitelný. Pro většinu příkazů je pomalejší, ale pro několik nepoužívanějších má zkrácené zprávy a ty jsou již rychlejší než jejich ekvivalent z nativního protokolu. Nevýhodou ascii protokolu je nulová ochrana proti chybě přenosu. Především vzhledem k vyšší přenosové rychlosti je v tomto projektu používán ascii protokol.

### ■ 2.2.1.2 Ascii protokol

Příkazy v ascii protokolu se dají rozdělit na dvě skupiny - obecné a speciální. Obecnými příkazy je možné nastavit nebo přečíst libovolnou hodnotu na Odrive. Příkladem takového příkazu je například vyčtení proudu motorem: `r axis0.controller.cur_setpoint`. Nevýhodou těchto příkazů jsou dlouhé zprávy a tedy snížená rychlost komunikace. Pro zrychlení komunikace jsou implementovány i speciální kratší příkazy pro vybrané instrukce. Příkladem takového příkazu je příkaz na nastavení požadovaného proudu motorem: `c motor current`, který v praxi může vypadat například `c 0 5.12`

### ■ 2.2.1.3 Úpravy komunikace s Odrive

V základním nastavení byl Odrive schopen komunikovat pouze na frekvenci 50 Hz, pokud byly vyčítány všechny důležité hodnoty. Pro vyšší přesnost při následném řízení bylo potřeba tuto frekvenci navýšit. To spočívalo v úpravě firmwaru Odrivu i nastavení BeagleBone.

První možností na zvýšení frekvence bylo zefektivnění komunikačního protokolu přidáním speciálního příkazu pro vyčítání všech důležitých veličin daného motoru, jelikož v době stavby modelu tento příkaz v ODrivu neexistoval. Na základě připomínek vzniklých v souvislosti s touto prací a prací mnoha jiných autorů je nyní takovýto příkaz již součástí oficiálního firmwaru Odrive.

Druhou možností bylo vhodné uspořádání příkazů v jednotlivých cyklech. Pomocí osciloskopu bylo pozorováno, že Odrivu trvá přibližně 0.7 ms než začne odesílat odpověď na dotaz, proto jsou nejprve odesílány dotazy na výstupní veličiny, následně jsou odeslány nové příkazy trajektorie a až potom jsou přečteny odpovědi na dotazy.

Třetí možností je zvýšení přenosové rychlosti sběrnice. V základu je UART Odrive nastavený na rychlost 115200 baud. Tato hodnota byla zvýšena na 460800 baud. Byla testována i možnost 912800 baud, ale zde již často docházelo k různým chybám. Na osciloskopu byla pozorována nezanedbatelná doba náběhu. Při snaze zkrátit tento čas, byl sériový odpor  $3.3\text{ k}\Omega$  v linkách UART na desce Odrive vyměněn za odpor  $1\text{ k}\Omega$ . I po této změně se však při rychlosti 912800 baud objevovaly často chyby v přenosu.

S těmito úpravami bylo dosaženo stabilní komunikace na frekvenci 350 Hz, což by mělo být dostatečné vzhledem k charakteru systému. Snahy o další zrychlení komunikace byly v této fázi ukončeny.

## ■ 2.2.2 BeagleBone Black

BeagleBone je jednodeskový počítač s 1 GHz procesorem, 512 MB DDR3 RAM. Obsahuje také mnoho periférií: 4x UART, 2x SPI, 2x I2C, 2x CAN. Dále má také tři kanály pro vyčítání kvadraturních enkodérů (eQEP) a dva zabudované 32-bitové mikrokontroléry pro časově kritické aplikace.

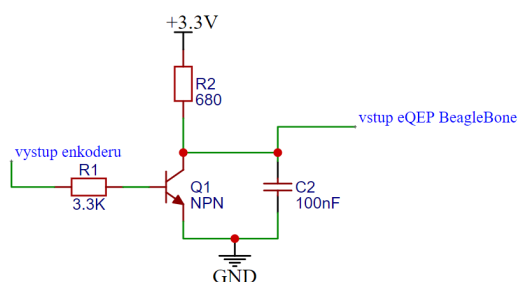
Tato vývojová deska nabízí podporu různých operačních systémů. Pro tento projekt je nejvhodnější Debian, jelikož je spolu s touto deskou podporován prostředím Simulink. Vzhledem k mírné zastaralosti této podpory je nutné použít starší verzi operačního systému Debian pro BeagleBone. V případě potřeby disponuje skupina AA4CC na katedře řídicí techniky potřebnými znalostmi <sup>1</sup> pro úspěšné propojení novější verze tohoto operačního systému k prostředí Simulink. Tato možnost však nebyla zkoumána, jelikož nenabízela žádné zlepšení systému.

<sup>1</sup> [https://github.com/aa4cc/ert\\_linux](https://github.com/aa4cc/ert_linux)

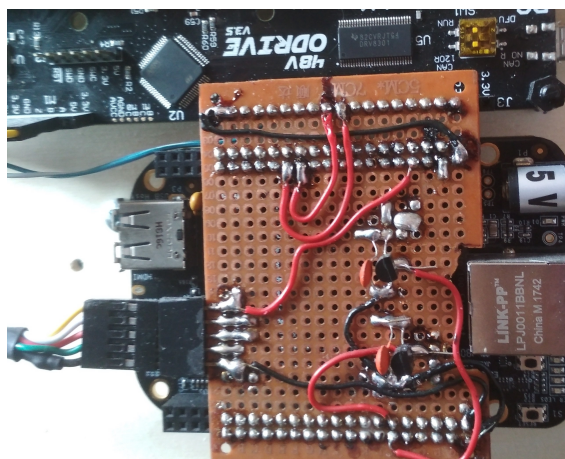
## 2.2 Kvadrurní enkodér

### 2.2.2.1 Kvadrurní enkodér

Dynamický plotr má celkem tři enkodéry pro měření polohy. Ve všech případech se jedná o AMT102-V s rozlišením 2048 pulzů na otáčku, tedy s maximálním rozlišením 8192 jednotek na otáčku. Vyčítání z dvou enkodérů provádí Odrive. Poslední enkodér se vyčítá pomocí čítače kvadrurního enkodéru (eQEP) zabudovaného na BeagleBone. Použitý enkodér pracuje však s napětím 5 V, zatímco BeagleBone používá napětí 3.3 V. Pro vyžití tohoto zabudovaného čítače byl zkonstruován jednoduchý převodník úrovní viz schéma 4a.



(a) Schéma převodníku úrovní



(b) Provizorní deska plošných spojů

Obrázek 4: Elektrické zapojení

### 2.2.3 Deska plošného spoje

Pro BeagleBone Black a Odrive byla navržena deska plošných spojů (DPS), která by přímo spojovala obě desky. Kromě nutných spojů byl prostor na DPS využito pro další možné funkcionality pro případný další vývoj tohoto projektu, či jiné projekty spojené s BeagleBone a Odrive. Připraveny byly převodníky úrovní pro enkodéry, všechny důležité komunikační linky byly vyvedeny na vlastní konektory a případně by byla možnost desku osadit i mikrokontrolérem z řady STM32F100. Vzhledem ke karanténě způsobené COVID-19, nebyl tento návrh využit a místo toho byl potřebný obvod provizorně napájen na univerzální plošný spoj viz obrázek 4b.

## 2.3 Problémy mechanického modelu

V původním konceptu se počítalo s použitím horizontálně položeného válce (laserem) jakožto závažím. Tento koncept se ve spojení s použitou konstrukcí ukázal jako neproveditelný kvůli parazitním oscilačním módům kyvadla. Pro popis těchto módů jsme zavedli souřadný systém, kde osa  $y$  je rovnoběžná s lanem závěsu viz obrázek 5. Translační pohyb ve směru os  $x$  a  $y$  pak odpovídá kývání a změně délky závěsu kyvadla. Pohyb ve zbylých čtyřech stupních volnosti je nežádoucí.

Při použití horizontálního válce jakožto závaží docházelo k výrazným nežádoucím oscilacím, především rotaci kolem osy  $y$  a translaci ve směru osy  $z$ . Rotace kolem osy  $x$  byla znemožněna zavěšením kyvadla na dvě lana.

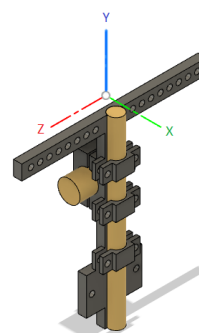


## 2.4 Pozdější úpravy mechanického modelu

Vzhledem k problémům popsaným v kapitole 2.3 bylo nutné vylepšit model, aby byly tyto nežádoucí jevy potlačeny. Translační pohyb ve směru osy  $z$  byl potlačen snížením těžiště závaží pod úroveň spoje s lany a zvýšením rozchodu mezi jednotlivými lankami na vozíku. Lanka mezi vozíkem a závažím již nejsou rovnoběžná, jak s tím počítal původní návrh.

Rotace kolem osy  $y$  byla potlačena snížením momentu setrvačnosti, aby došlo ke zvýšení vlastní frekvence těchto oscilací. Po zavedení této úpravy již nedocházelo k vybudování těchto parazitních oscilací.

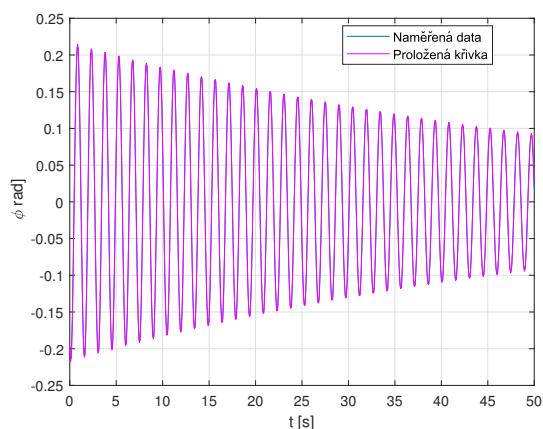
Rotace kolem osy  $z$  nebyla plně potlačena a při pozdějších experimentech se tato parazitní oscilace projevila viz kapitola 6.4.



Obrázek 5: Návrh upraveného kyvadla

## 2.5 Kalibrace modelu

Inkrementálními senzory zjistíme pouze vzdálenost relativní vůči času, kdy byly zapnuty. Po každém zapnutí modelu je nutné zjistit absolutní polohu kyvadla. Pro správné fungování je zapotřebí znát přesnou délku závěsu, přesněji jeho délku k těžišti kyvadla. Jak se ukázalo při identifikaci systému v kapitole 4.1, tak samotná frekvence kmitání velmi přesně odpovídá délce závěsu. Model je tedy kalibrován při umístění vozíku na střed pojezdů a nastavení délky závěsu na  $0.5 \pm 0.2$  m. Následně je provedeno rozpo-  
hybování kyvadla pomocí řízení polohy přes ODrive a je změřeno kmitání kyvadla při konstantní poloze vozíku a délce lanka. Naměřená data úhlu výkyvu jsou proložena křivkou odpovídající slabě tlumenému oscilátoru, z čehož je určena jak délka závěsu, tak případná odchylka úhlu výkyvu od svislé pozice.



Obrázek 6: Kalibrace kyvadla

## ■ 2.6 Díly a ceny

Díl	použité množství	Cena za jednotku [Kč]	Celková cena [Kč]
ODRIVE V3.5 48V	1 ks	3 530	3 530
Motor - D5065 270KV	2 ks	1 530	3 060
Enkodér AMT102-V	3 ks	865	2 595
BeagleBone Black	1 ks	1 430	1 430
Vodící tyč W10	2 m	280	560
SK uchycení vodících tyčí SK10	4 ks	70	280
Kuličkové pouzdro LM10UU	4 ks	60	240
vodící tyč W8	0,2 m	260	52
Ložisko 626	2 ks	10	20
Ložisko 826	2 ks	20	40
Kladka GT2	1 ks	59	59
Řemenice GT2	5 ks	59	295
Řemen GT2	2 m	89	178
Hliníkové profily	4 m	170	680
PLA filament pro 3D tisk	~0.5 kg	1 300	650
Total			13 669

Tabulka 1: Cena materiálu za dynamický plotr.



## Kapitola 3

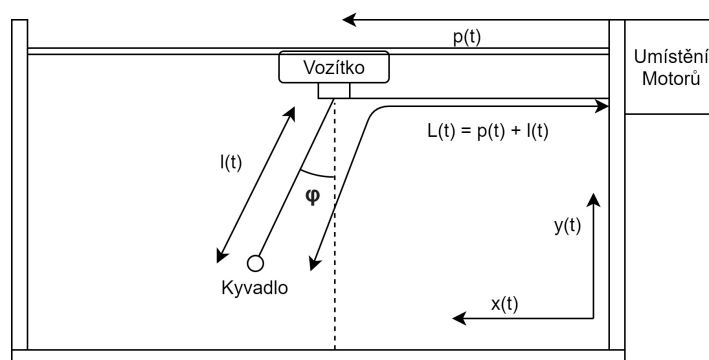
# Odvození matematického modelu

V této kapitole se budeme věnovat aplikaci fyzikálních zákonů na model, abychom pro něj mohli vytvořit jeho matematický popis. Nejprve zavedeme značení a potřebné konstanty, potom pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu odvodíme matematický model. Během celého odvození a při následné práci s rovnicemi budeme používat notaci pro časové derivace (3.0.1).

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = (\dot{\cdot}) \qquad \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} = (\ddot{\cdot}) \qquad (3.0.1)$$

### 3.1 Zavedení proměnných a konstant

Pro popis systému jsme zavedli tři veličiny a čtvrtou pro zvýšení přehlednosti rovnic. Těmito třemi veličinami jsou: délka odvinutého lana  $L$ , poloha vozíku  $p$  a úhel kmitu  $\varphi$  viz obrázek 7. Pozice vozíku  $p$  je brána jakožto vzdálenost od jeho motoru. Úhel kmitu  $\varphi$  měřen vůči svislé ose v záporném smyslu otáčení. Pro zpřehlednění jsme zavedli délku závěsu  $l(t) = L(t) - p(t)$ .



Obrázek 7: Náčrt mechanického systému

Každý z motorů popisujeme jako lineární model druhého řádu [5] definovaný zobecněnou setrvačností, převodní konstantou, tedy poměrem síly ku proudu, a koeficientem tlumení. Předpokládáme tlumení lineárně úměrné rychlosti otáčení. Motory můžeme takto modelovat, jelikož o regulování proudu protékajícím motorem se stará kontrolér BLDC motorů ODrive. Sledování reference proudu považujeme za dokonalé, tedy s nulovou odchylkou. Vozítko modelujeme též pomocí jeho hmotnosti a koeficientu tlumení, analogicky modelujeme i pohyb samotného kyvadla. Všechny konstanty definované pro tento systém jsou sepsány v tabulce 2.

### 3.1 Zavedení proměnných a konstant

---

$L$	celková délka odvinutého lanka
$p$	poloha vozítka
$\varphi$	úhel kyvadla počítán v záporném smyslu otáčení
$l$	délka závěsu ( $L - p$ )
$i_P$	vstupní proudy motoru vozíku
$i_L$	vstupní proudy motoru lanka
$m_k$	hmotnost kyvadla
$m_v$	hmotnost ekvivalentní momentu setrvačnosti motoru a vozíku
$m_m$	hmotnost ekvivalentní momentu setrvačnosti motoru
$b_m$	tlumení motoru lanka
$b_v$	součet tlumení vozítka a jeho motoru
$b_k$	tlumení kyvadla
$t_{mP}$	převodní konstanta pro motor vozík
$t_{mL}$	převodní konstanta pro motor lanka

---

Tabulka 2: Zavedené konstanty a proměnné pro systém

## 3.2 Odvození přes Lagrangeovy rovnice druhého druhu

Za zobecněné souřadnice jsme zvolili pozici vozíku  $p$ , délku lanka  $L$  a úhel kmitu  $\varphi$ . Vektor zobecněných souřadnic je určen  $q = [\varphi, L, p]^T$ . Poloha kyvadla  $x_k, y_k$  se vypočítá dle vzorců (3.2.1) až (3.2.2).

$$x_k(t) = p(t) + \sin(\varphi(t)) (L(t) - p(t)) \quad (3.2.1)$$

$$y_k(t) = -\cos(\varphi(t)) (L(t) - p(t)) \quad (3.2.2)$$

Pouze kyvadlo se pohybuje ve směru kolmém na tíhové zrychlení  $g$ . Polohová energie  $V$  je následně počítána dle vzorce (3.2.3).

$$V = g m_k y_k \quad (3.2.3)$$

Systém modelujeme pomocí tří sdružených hmotností pro jednotlivé pohyby. Hmotnost odpovídající vozíku a jeho motoru  $m_v$  se pohybuje rychlostí  $\dot{p}$ . Hmotnost ekvivalentní momentu setrvačnosti motoru lanka  $m_m$  se pohybuje rychlostí  $\dot{L}$ . Poloha a tím i rychlost kyvadla jsou určeny rovnicemi (3.2.1) až (3.2.2). Výsledná kinetická energie  $T$  je dána dle vzorce (3.2.4).

$$T = \frac{m_k (\dot{x}_k(t)^2 + \dot{y}_k(t)^2)}{2} + \frac{m_m \dot{L}(t)^2}{2} + \frac{m_v \dot{p}(t)^2}{2} \quad (3.2.4)$$

Z rovnic (3.2.3) až (3.2.4) vyjádříme Lagrangeovu funkci  $\mathcal{L} = T - V$  a definujeme vnější síly a Lagrangeovu rovnici (3.2.5).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial D}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial D}{\partial L} + Q_L \\ -\frac{\partial D}{\partial p} + Q_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_k l(t)^2 \dot{\varphi}(t) \\ t_{mL} i_L(t) - b_m \dot{L}(t) \\ t_{mP} i_P(t) - b_v \dot{p}(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

Pro pohyb lanka a vozíku jsou vnější síly přímo úměrné rychlosti a vstupním proudům. Za povšimnutí však stojí disipativní síla pro úhel  $\varphi$ . Derivací disipativní funkce  $D$  podle úhlu je moment síly. Disipativní sílu jsme definovali jako lineárně úměrnou rychlosti pohybu kyvadla. Tato disipativní síla pro úhel  $\varphi$  je tedy přímo úměrná kvadrátu délky závěsu.

Vzhledem ke komplexnosti výsledných rovnic bylo nutné pro zpřehlednění zavést výrazné substituce. Po analýze fyzikální podstaty rovnic byly využity substituce:

$$F_{lanko} = m_k \left( l(t) \dot{\varphi}(t)^2 - \ddot{l}(t) - \sin(\varphi(t)) \ddot{p}(t) + g \cos(\varphi(t)) \right) \quad (3.2.6)$$

$$F_{moment} = m_k \left( \cos(\varphi(t)) \ddot{p}(t) + l(t) \ddot{\varphi}(t) + 2\dot{l}(t) \dot{\varphi}(t) + g \sin(\varphi(t)) \right) \quad (3.2.7)$$

Substituce  $F_{lanko}$  vyjadřuje sílu, kterou kyvadlo napíná závěs. Pokud bychom ji rozebrali po členech, tak  $m_k l(t) \dot{\varphi}(t)^2$  je odstředivá síla,  $m_k \ddot{l}(t) + m_k \sin(\varphi(t)) \ddot{p}(t)$  jsou setrvačné síly a  $m_k g \cos(\varphi(t))$  je působení gravitační síly.

Substituce  $F_{moment}$  vyjadřuje sílu, kterou kyvadlo působí kolmo na závěs, kde  $m_k \cos(\varphi(t)) \ddot{p}(t)$  je setrvačná síla,  $m_k g \sin(\varphi(t))$  je gravitační síla,  $m_k l(t) \ddot{\varphi}(t) + 2m_k \dot{l}(t) \dot{\varphi}(t)$  jsou síly spojené se zákonem zachování momentu hybnosti.

Výsledné rovnice (3.2.8), (3.2.9) a (3.2.10) popisují dynamiku systému.

$$l(t) (F_{moment} + b_k l(t) \dot{\varphi}(t)) = 0 \quad (3.2.8)$$

$$m_v \ddot{p}(t) + F_{lanko} (1 - \sin(\varphi(t))) + F_{moment} \cos(\varphi(t)) = t_{mP} i_P(t) - b_v \dot{p}(t) \quad (3.2.9)$$

$$m_m \ddot{L}(t) - F_{lanko} = t_{mL} i_L(t) - b_m \dot{L}(t) \quad (3.2.10)$$

## Kapitola 4

# Identifikace modelu

V této kapitole se věnujeme především určení jednotlivých konstant matematického modelu, který jsme odvodili v předchozí kapitole. Při odvozování konstant jsme se dopustili několika aproximací, proto jsme nakonec výsledné hodnoty ručně upravili a zhodnotili přesnost našeho modelu.

### 4.1 Identifikace vlastností kyvadla

Hmotnost kyvadla byla změřena pomocí váhy s výsledkem:  $m_k = 0.101$  kg. Pro určení konstanty tlumení kyvadla  $b_k$  bylo měřeno kmitání při různých délkách závěsu a konstantní poloze vozíku. S předpokladem konstantní délky lanka a polohy vozíku jsme upravili rovnici pro dynamiku kyvadla (3.2.8) na rovnici (4.1.1).

$$m_k l(t)^2 \ddot{\varphi}(t) + b_k l(t)^2 \dot{\varphi}(t) + g m_k \sin(\varphi(t)) l(t) = 0 \quad (4.1.1)$$

Zavedením aproximace  $\sin(\varphi) \doteq \varphi$  získáme lineární diferenciální rovnici tlumeného kmitání.

$$m_k l(t)^2 \ddot{\varphi}(t) + b_k l(t)^2 \dot{\varphi}(t) + g m_k \varphi(t) l(t) = 0 \quad (4.1.2)$$

Zavedením substituce (4.1.3) upravíme rovnici (4.1.2) do tvaru (4.1.4).

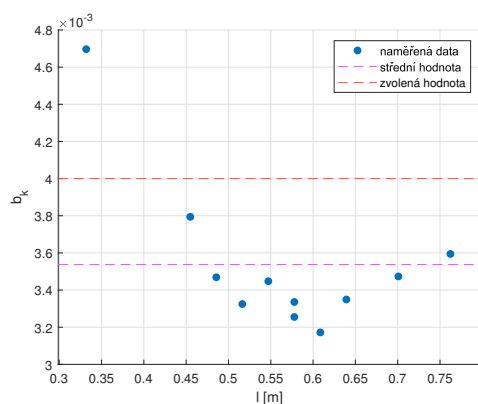
$$\delta = \frac{b_k l(t)^2}{2m_k l(t)^2} = \frac{b_k}{2m_k} \quad \omega_0^2 = \frac{g m_k l(t)}{m_k l(t)^2} = \frac{g}{l(t)} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (4.1.3)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad (4.1.4)$$

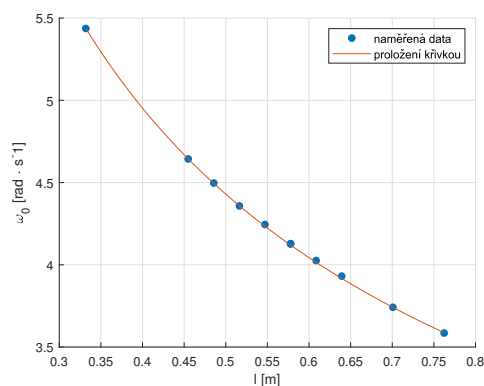
Za předpokladu  $\omega_0^2 > \delta^2$  je řešení této rovnice součin sinu a exponenciály (4.1.5).

$$\varphi = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (4.1.5)$$

Pro každou délku závěsu jsme naměřená data proložili touto křivkou a výsledky zanesli do grafů 8. Jelikož kyvadlo modelujeme jako hmotný bod, což není úplně přesné, upravili jsme výslednou hodnotu na  $b_k = 0.004$ , aby lépe odpovídala i jiným měřením. Dále jsme zkoumali úhlovou frekvenci  $\omega_0$  v porovnání v závislosti na délce závěsu za účelem zjišťování přesné délky závěsu po zapnutí fyzického modelu.



(a) Koeficient tlumení kyvadla v závislosti na délce závěsu



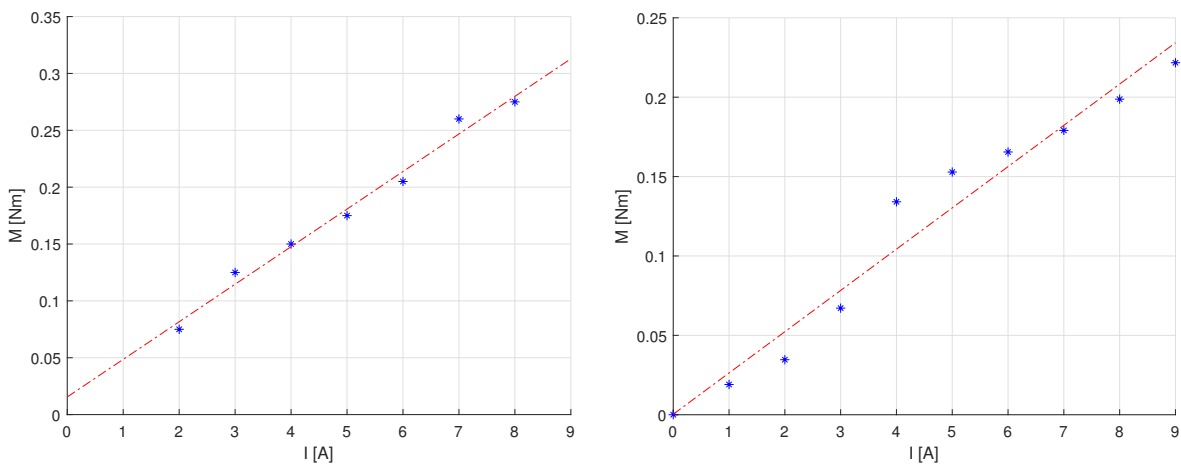
(b) Úhlová rychlost v závislosti na délce závěsu

Obrázek 8: Naměřené vlastnosti kmitání v závislosti na délce závěsu

## 4.2 Identifikace převodní konstanty motoru

Převodní konstanta motoru určuje poměr síly ku proudu protékajícím motorem a je odvozena z momentové konstanty, tedy poměru momentu síly ku proudu. Momentovou konstantu jsme získali třemi způsoby s různými výsledky. První hodnota byla nalezena ve skromné dokumentaci motoru [1]. Tam je uveden moment síly 1.99 Nm při 65 A, tedy momentová konstanta  $K_T = 0.031 \text{ Nm A}^{-1}$ .

Druhé měření probíhalo pomocí pružinového siloměru na rameni délky 50 mm. Problémem tohoto měření bylo zajištění kolmosti mezi siloměrem a ramenem síly. Proud byl měřen do hodnoty 8 A, pro měření vyššího proudu by bylo nutné vylepšit přípravu experimentu. Ze změřených dat v grafu 9a je zřejmý vliv stacionárního tlumení motoru na výsledná data, při tomto měření byla  $K_T = 0.033 \text{ Nm A}^{-1}$



(a) Závislost momentu síly na vstupním proudu při pokusu s ramenem délky 5 cm

(b) Závislost momentu síly na vstupním proudu při měření na modelu

Obrázek 9: Měření převodní konstanty motoru

Třetí měření již probíhalo přímo na modelu. Místo kyvadla bylo připojeno závaží o hmotnosti 2kg a jeho tíha byla měřena. Když se zvyšoval proud protékající motorem, tak docházelo ke snižování této tíhy. Experiment byl zastaven, když doházelo k viditelnému namáhání konstrukce vozíku, aby nedošlo k jeho poškození. Ze změny tíhy jsme vypočítali moment síly, který motor vyvinul při daném proudu. Naměřené hodnoty byly zaneseny do grafu 9b a momentovou konstantu jsme vypočítali  $K_T = 0.026 \text{ Nm A}^{-1}$ .

Kromě měření momentové konstanty sloužilo toto měření také k hodnocení maximální síly, jakou je možné napínat lanko, aby nedošlo k poškození vozíku. Tuto hodnotu jsme odhadli na 15 N, což odpovídá maximálnímu zrychlení lanka přibližně  $15 \text{ m s}^{-2}$  pro kyvadlo o hmotnosti 0.1 kg. Toto zrychlení je však možné dosáhnout pouze ve směru zkracování lanka, prodlužování závěsu je limitováno gravitačním zrychlením.

Sílu získáme z momentu síly vynásobením ramenem síly, tedy poloměrem převodového kola. Tento poloměr je pro motor vozíku  $r_p \doteq 6.4 \text{ mm}$  a pro lanko  $r_L \doteq 16 \text{ mm}$ . Dosazením těchto hodnot získáváme převodní konstanty pro jednotlivé motory v rozsahu:

$$1.66 \text{ N A}^{-1} \leq t_{mL} \leq 2.07 \text{ N A}^{-1}$$

$$4.15 \text{ N A}^{-1} \leq t_{mP} \leq 5.18 \text{ N A}^{-1}$$

### 4.3 Identifikace hmotností vozíku a motorů

Nejprve byla změřena hmotnost samotného vozíku  $m_{\text{vozík}} = 0.41 \text{ kg}$ . Následně bylo potřeba odhadnout hmotnost ekvivalentní momentu setrvačnosti motorů a tedy i samotný moment setrvačnosti. Konfigurace motorů je takzvaně "outrunner", tedy rotorem je jejich plášť. Hmotnost každého z motorů je 425 g a průměr 5 cm, hledaný moment tedy můžeme dle vzorce  $J = \int_M r^2$  odhadnout jakožto  $J \sim 0.5 m \bar{r}^2 \sim 0.5 \cdot 0.425 \cdot 0.020^2 = 8.5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ , kde  $\bar{r}$  je střední kvadratická vzdálenost elementu hmotnosti rotoru od osy otáčení. Uvažujeme, že samotný rotor tvoří polovinu hmotnosti celého motoru  $m$ . Námí spočítaný odhad je v souladu s nalezenou hodnotou momentu setrvačnosti pro podobný motor  $J = 9.2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ .

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J r_p^2 \frac{\omega^2}{r_p^2} = \frac{1}{2} J r_p^2 \dot{p}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{motor vozíku}} \dot{p}^2 \quad (4.3.1)$$

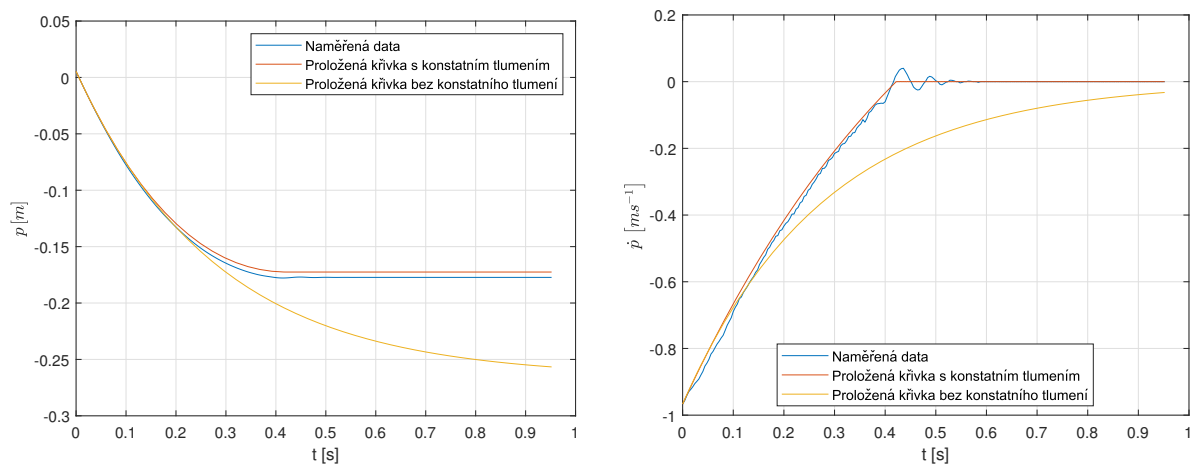
Ve vzorci (4.3.1) je odvozen převod momentu setrvačnosti na ekvivalentní hmotnost pro motor vozíku. Kinetickou energii rotačního pohybu motoru modelujeme tedy jako kinetickou energii transláčního pohybu. Pro motor lanka je odvození analogické. Po dosazení poloměrů převodových kol (pro vozík  $r_p \doteq 6.4 \text{ mm}$  a pro lanko  $r_L \doteq 16 \text{ mm}$ ) do vzorce (4.3.1) získáváme:

$$\begin{aligned} m_{\text{motor vozíku}} &= J r_p^2 = 1.9 \text{ kg} & m_{\text{motor lanka}} &= J r_L^2 = 0.32 \text{ kg} \\ m_v &= m_{\text{vozík}} + m_{\text{motor vozíku}} \doteq 2.3 \text{ kg} & m_m &= m_{\text{motor lanka}} = 0.32 \text{ kg} \end{aligned}$$

### 4.4 Identifikace tlumení vozíku a lanka

Pro měření konstant tlumení jsme navrhli experimenty, ve kterých se neprojevují síly spojené s pohybem kyvadla. Pro vozík se jednalo o pohyb bez zavěšeného kyvadla a s nulovým proudem protékajícím příslušným motorem. Přesněji Odrive byl konfigurován na proudové řízení a referenční hodnotu 0 A. Vozík byl manuálně rozpohybován a měřili jsme průběh zpomalování. Z hlediska rovnic tyto podmínky odpovídají stavu, kdy  $m_k = 0$ ,  $i_p = 0$  a z rovnice (3.2.10) vzniká (4.4.1).

$$m_v \ddot{p}(t) + b_v \dot{p}(t) = 0 \quad (4.4.1)$$

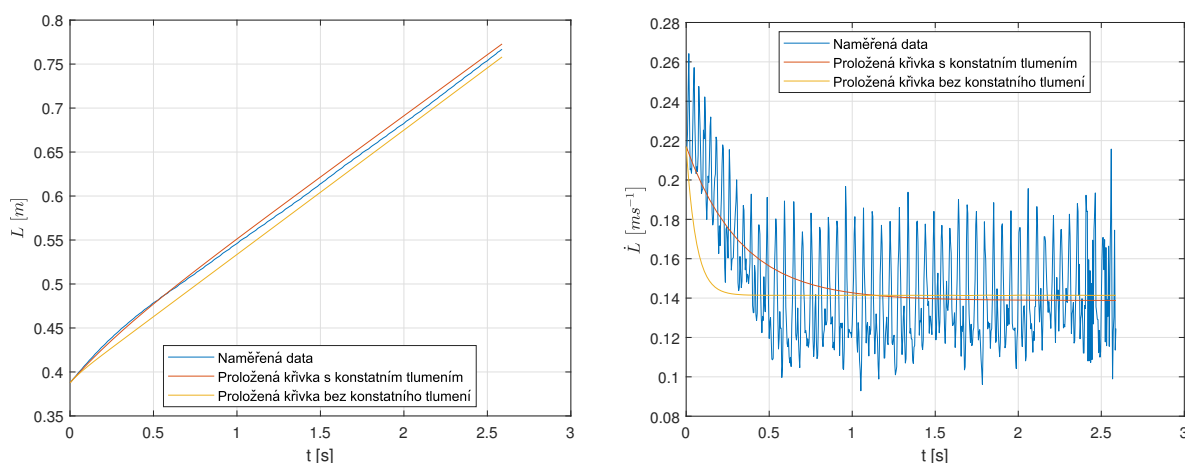


Obrázek 10: Průběh zpomalování vozíku

<sup>2</sup> Odrive motor guide - <https://docs.google.com/spreadsheets/d/12vzz7XVEK6YNIOqH0jAz51F5VUpc-lJEs3mmkWP1H4Y/edit#gid=1296943276>

Při měření konstant lanka jsme postupovali analogicky, avšak tentokrát nebylo možné kyvadlo odpojit. Vozík jsme zafixovali v konstantní poloze a kyvadlo se pohybovalo ve vertikálním směru. Z hlediska matematiky je tyto podmínky možné popsat jakožto  $\dot{p} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . S těmito úpravami se rovnice popisující dynamiku lanka (3.2.9) změni na (4.4.2).

$$m_m \ddot{L}(t) + b_m \dot{L}(t) - g m_k \cos(\varphi(t)) = 0 \quad (4.4.2)$$



Obrázek 11: Průběh zpomalování kyvadla

Charakter zpomalování (viz obrázky 10 a 11) se však nedá vysvětlit pouze pomocí tlumení, které je přímo úměrné rychlosti, proto pro přesné modelování je potřeba přidat i konstantní tlumení, které je závislé pouze na směru. Rovnice (4.4.1) a (4.4.2) jsme tedy upravili na rovnice (4.4.3) a (4.4.4).

$$m_v \ddot{p}(t) + b_v \dot{p}(t) + b_{vs} \text{sign}(\dot{p}(t)) = 0 \quad (4.4.3)$$

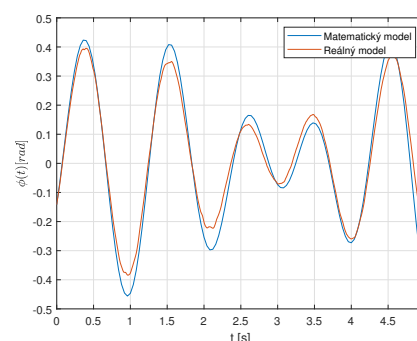
$$m_m \ddot{L}(t) + b_m \dot{L}(t) + b_{ms} \text{sign}(\dot{L}(t)) - g m_k \cos(\varphi(t)) = 0 \quad (4.4.4)$$

Prokládáním naměřených hodnot jsme získali konstanty tlumení:

$$b_m = 2.1 \quad b_v = 4.2 \quad b_{vs} = 4.5 \quad b_{ms} = 0.7$$

## 4.5 Hodnocení identifikovaného modelu

Vzhledem k povaze systému bylo možné testovat různé části dynamiky tohoto systému odděleně. Nejprve jsme testovali chování samotného kyvadla matematického modelu v porovnání s reálným modelem viz obrázek 12. Pro tento účel vnikla druhá verze matematického modelu, v ní se za akční zásah považovala druhá derivace polohy vozíku a délky lanka. S těmito úpravami bylo možné zajistit, že matematický model dokonale sledoval naměřená data polohy vozíku a délky lanka. Při tomto přístupu se matematický s reálným modelem schodují relativně dobře. Největší chyba nastává při změně

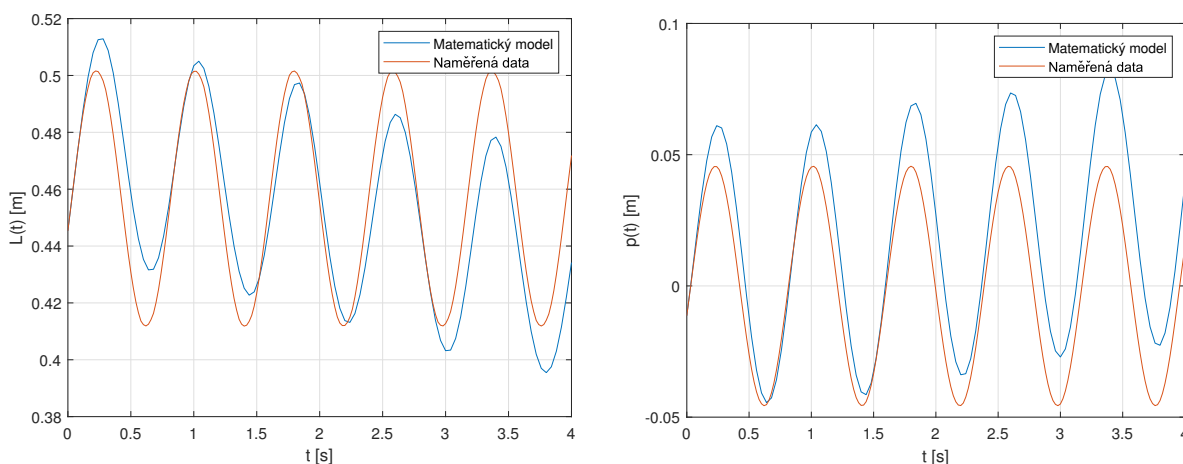


Obrázek 12: Testování chování samotného kyvadla

#### 4.5 Hodnocení identifikovaného modelu

zamínka úhlové rychlosti, což je pravděpodobně způsobeno způsobem měření této veličiny viz obrázek 1.

Druhou částí je testování chování délky lanka  $L$  a pozice vozíku  $p$ . V tomto případě se matematický model výrazně odchyloval od naměřených dat. Tato neshoda je pravděpodobně způsobena samotnými motory. Na grafu na obrázku 11 je vidět výrazné kmitání rychlosti. Toto kmitání je způsobeno magnetickými silami a změnami permeability při otáčením pólů permanentních magnetů rotoru vůči pólům statoru. Vzhledem k tomu, že toto chování není pozorováno, pokud motorem prochází proud, tak se pravděpodobně jedná o důvod neshody matematického a reálného modelu.



Obrázek 13: Porovnání modelů

Z těchto důvodů jsme konstanty tlumení ručně upravili. Vznikly dva sety těchto konstant. Jeden obsahoval konstantní tlumení viz podkapitola 4.4 a druhý tuto část dynamiky zanedbával. Konstantní tlumení přináší drobné zlepšení přesnosti modelu, avšak za cenu výrazného zvýšení náročnosti simulací. Z toho důvodu bylo toto tlumení zanedbáno a budou dále využívány konstanty viz tabulka 3. Porovnání matematického a reálného modelu je vidět v grafech 13.

$m_k$	0.101 kg	hmotnost kyvadla
$m_v$	2.3 kg	hmotnost vozíku a hmotnost ekvivalentní momentu setrvačnosti motoru vozíku
$m_m$	0.32 kg	hmotnost ekvivalentní momentu setrvačnosti motoru lanka
$b_m$	3.1 N s m <sup>-1</sup>	tlumení motoru lana
$b_v$	9 N s m <sup>-1</sup>	součet tlumení vozítka a jeho motoru
$b_k$	0.04 N s m <sup>-1</sup>	tlumení kyvadla
$t_{mP}$	4.25 N A <sup>-1</sup>	převodní konstanta pro motor vozíku
$t_{mL}$	1.92 N A <sup>-1</sup>	převodní konstanta pro motor L

Tabulka 3: Zavedené konstanty a proměnné pro systém



## Kapitola 5

# Plánování trajektorie

Hledání optimální trajektorie je problémem hledání sekvence stavů a vstupů, která minimalizuje ztrátovou funkci. Výsledná trajektorie musí respektovat dynamiku systému a jeho fyzické limity. Akční zásah i jednotlivé stavové proměnné jsou omezené a to často i nelineárními funkcemi. Vzhledem ke všem těmto omezením je tato úloha často analyticky neřešitelná, dokonce i při numerickém řešení se jedná o výpočetně náročný problém.

Existuje mnoho různých přístupů k této problematice. Věnují se jí například autoři [6, 10]. V rámci této kapitoly popíšeme postupy použité na projektu Dynamického plotru.

### 5.1 CasADi

CasADi [7] je open-source nástroj pro numerickou optimalizaci zaměřený mimo jiné i na možnosti hledání optimální trajektorie. Software vznikl na Katolické univerzitě v Lovani. Zadání samotného problému je předáváno ve formě rovnic, nerovnic a prvotního odhadu řešení. CasADi je použitelné pro řešení mnoha nelineárních optimalizačních problémů. CasADi podporuje velké množství rozhraní, pro tento projekt byl využit Matlab, pro samotné řešení problému pak software IPOPS.

### 5.2 Formulace problému

Obecně je problém hledání optimální trajektorie možné zapsat jako hledání optimálních stavů a vstupů  $(x^*(t), u^*(t))$ , které minimalizují ztrátovou funkci při dodržení všech omezujících podmínek. Všechna omezení je možné zapsat pomocí rovnic (5.2.1) až (5.2.5) jako nelineární optimalizační úlohu [8]. Rovnice (5.2.1) je zmíněnou ztrátovou funkcí, (5.2.2) popisuje dynamiku systému, (5.2.3) definuje maximální a minimální akční zásah, (5.2.4) omezuje jednotlivé stavy systému, což je v našem případě například rozsah vozíku nebo maximální délka lanka. Rovnice (5.2.5) popisuje různé další vlastnosti systému. Pro námi navržený systém to například znamená, že lanko musí být neustále napnuté a poloha samotného kyvadla je omezená, jak samotnými mechanickými limity reálného systému, tak nároky na hledanou trajektorii.

$$\min_{\substack{x(\cdot) \in R^6 \\ u(\cdot) \in R^2}} t_f = \int_{t=0}^{t_f} dt \quad (5.2.1)$$

$$\text{kde } \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.2.2)$$

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.2.3)$$

$$x_{min}(t) \leq x(t) \leq x_{max}(t) \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.2.4)$$

$$y_{min}(t) \leq g(x(t)) \leq y_{max}(t) \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.2.5)$$

Tento popis není však možné použít pro přepis na nelineární optimalizační problém řešitelný pomocí IPOPT, jelikož optimalizovaná proměnná není nezávislá na omezeních. Celkový čas  $t_f$  by pak zároveň musela být předem známá konstanta a zároveň proměnný optimalizační parametr, což je nemožné. Z tohoto důvodu je potřeba problém přeformulovat. V následujících podkapitolách představíme dvě možnosti, jak rovnice (5.2.1) až (5.2.5) upravit, aby je bylo možné použít [8].

### 5.2.1 Škálování času

Tato metoda spočívá v substituci  $\theta = t/t_f$ , která oddělí optimalizovaný čas od omezení hledané trajektorie. Zavedením této substituce získáme rovnice (5.2.6) až (5.2.10). Krom samotných stavů systému a akčních zásahů  $(x(t), u(t))$  je navíc přidána další vstupní proměnná pro optimalizaci celkového času trajektorie  $t_f$ .

$$\min_{\substack{x(\cdot) \in R^6 \\ u(\cdot) \in R^2}} t_f = \int_{\theta=0}^1 t_f d\theta \quad t_f > 0 \quad (5.2.6)$$

$$\text{kde } \frac{dx(\theta \cdot t_f)}{d\theta} = t_f f(x(\theta \cdot t_f), u(\theta \cdot t_f)) \quad \forall \theta \in [0, 1] \quad (5.2.7)$$

$$u_{min} \leq u(\theta \cdot t_f) \leq u_{max} \quad \forall \theta \in [0, 1] \quad (5.2.8)$$

$$x_{min}(\theta \cdot t_f) \leq x(\theta \cdot t_f) \leq x_{max}(\theta \cdot t_f) \quad \forall \theta \in [0, 1] \quad (5.2.9)$$

$$y_{min}(\theta \cdot t_f) \leq g(x(\theta \cdot t_f)) \leq y_{max}(\theta \cdot t_f) \quad \forall \theta \in [0, 1] \quad (5.2.10)$$

### 5.2.2 Převod na prostorové souřadnice

Pro tento přístup nehledáme trajektorii v závislosti na čase, ale naopak hledáme závislost času na poloze. Všechny funkce je tedy potřeba přepsat jako funkce polohy, nikoliv času. Pro zpřehlednění tohoto převodu zavedeme substituci

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = (\dot{\cdot}) \quad (5.2.11)$$

Pro převod je potřeba určit derivaci stavů  $x$  podle postupu v trajektorii  $s$ .

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} \rightarrow t(s) = \int_{s=0}^{s_f} \frac{1}{\dot{s}} ds \quad (5.2.12)$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}} \quad (5.2.13)$$

$$(5.2.14)$$

V tomto přístupu je potřeba vhodně definovat funkci  $s(x)$ . Tato funkce musí zároveň vystihovat postup v trajektorii, ale zároveň nesmí příliš omezovat výslednou trajektorii. Tato funkce musí být diferencovatelná a surjektivní. Pokud bychom například vzali pohyb po kružnici, tak je možno za  $s$  použít úhel ve středu kružnice, ale samotný poloměr pouze omezit na vhodný interval. Pro pohyb po přímce je možné použít skalární součin pozice s vektorem cílového směru pohybu, ale vzdálenost od této přímky také omezit pouze na vhodný interval.

$$\min_{\substack{x(\cdot) \in R^6 \\ u(\cdot) \in R^2}} t_f = \int_{s=0}^{s_f} \frac{1}{\dot{s}} ds \quad (5.2.15)$$

$$\text{kde } \frac{dx(t(s))}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} f(x(t(s)), u(t(s))) \quad \forall s \in [0, s_f] \quad (5.2.16)$$

$$u_{min} \leq u(t(s)) \leq u_{max} \quad \forall s \in [0, s_f] \quad (5.2.17)$$

$$x_{min} \leq x(t(s)) \leq x_{max} \quad \forall s \in [0, s_f] \quad (5.2.18)$$

$$y_{min} \leq g(x(t(s))) \leq y_{max} \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.2.19)$$

Problémem této metody je její větší nepřesnost a vyšší výpočetní náročnost pro  $\dot{s} \sim 0$ . Pro některé případy hledání optimální trajektorie však dosahuje rychlejší konvergence [8].

## ■ 5.3 Numerická implementace

Vzhledem k složitosti problému je téměř nemožné problém řešit ve spojitém čase, proto jsme problém řešili v diskrétní podobě. Pro získání časově optimálního řešení jsme použili přístup škálování času a přímou metodu. V této části popíšeme tři testované diskretizační metody a omezení, které klademe na trajektorii.

### ■ 5.3.1 Popis trajektorie

Trajektorii pro kyvadlo jsme definovali jako posloupnost  $M$  bodů spojených úsečkami a tím jsme ji rozdělili na  $M - 1$  úseků. Od těchto úseků jsme dovolili optimalizačnímu programu se vzdálit o maximálně vzdálenost  $\epsilon_{l,max}$ . V rámci popisu trajektorie je možné definovat také maximální vzdálenost trajektorie  $\epsilon_{p,max}$  od  $M$  bodů trajektorie, kterými jsme ji definovali.

Pro každé po sobě jdoucí body  $A, B$  z trajektorie jsme našli ortogonální projektor  $P$  na ortogonální doplněk prostoru definovaného přímkou  $A, B$ . Polohu kyvadla  $K(t)$  každého bodu trajektorie, který náleží úseku mezi  $A$  a  $B$ , jsme omezili dle vzorce (5.3.2).

$$P = I - \frac{(A - B) \cdot (A - B)^T}{\|A - B\|_2^2} \quad (5.3.1)$$

$$\|P \cdot (K - A)\|_2 \leq \epsilon_{l,max} \quad (5.3.2)$$

### ■ 5.3.2 Numerické metody

Pro výpočet v diskrétní doméně je nutné převést i všechny omezující podmínky. Ty spojené s mechanickými limity modelu jsou časově neměnné, tedy je můžeme ponechat i pro diskrétní model. Dynamiku samotného systému jsme simulovali pomocí tří různých diskretizačních metod. Jak bylo zmíněno v části 5.3.1 trajektorie je definována pomocí sekvence bodů. Diskretizace je provedena po částech mezi jednotlivými body trajektorie. Při zadání je nutné určit do kolika kroků má být rozdělen jeden úsek trajektorie, avšak není předem znám čas pro tento úsek. V rámci naší implementace škálování času v diskrétní doméně jsme trajektorii mezi každými dvěma po sobě jdoucími body rozdělili na stejný počet kroků  $N$  a každý tento krok má délku  $T_i$ , kde  $i$  je pořadové číslo dané přímkou. Ztrátová funkce (5.2.6) je tedy pro diskrétní případ přepsána dle vzorce

$$\min_{\substack{x(\cdot) \in R^6 \\ u(\cdot) \in R^2}} t_f = \sum_{i=1}^{M-1} N \cdot T_i \quad \forall i \in [1, M-1] : T_i \geq 0 \quad (5.3.3)$$

$$\text{kde } u_{min} \leq u(n) \leq u_{max} \quad \forall n \in [1, (M-1) \cdot N] \quad (5.3.4)$$

$$x_{min} \leq x(n) \leq x_{max} \quad \forall n \in [1, (M-1) \cdot N] \quad (5.3.5)$$

$$y_{min} \leq g(x(n)) \leq y_{max} \quad \forall n \in [1, (M-1) \cdot N] \quad (5.3.6)$$

### 5.3.2.1 Dopředná Eulerova metoda

Dopředná Eulerova metoda je metodou prvního řádu pro diskretizaci dynamiky systému. Předpokládá konstantní akční zásah  $u(t)$  a derivaci stavů  $\dot{x}$  v rámci každé periody  $T_i$ . Pokud tyto předpoklady nejsou dodrženy, tak je chyba metody v řádu  $O(h^2)$ . Výhodou této metody je především její jednoduchost a rychlost.

$$x(n+1) = x(n) + T_i f(x(n), u(n)) \quad \forall n \in [1, (M-1) \cdot N] \quad (5.3.7)$$

### 5.3.2.2 Rungeova–Kuttova metoda čtvrtého řádu

Rungeova–Kuttova vychází ze stejného základu, jako Eulerova metoda, tedy z Taylorova polynomu. Na rozdíl od Eulerovy metody dosahuje menší chyby řádu  $O(h^5)$ .

$$k_{1,n} = f(x(n), u(n)) \quad (5.3.8)$$

$$k_{2,n} = f(x(n) + T_i/2 \cdot k_{1,n}, u(n)) \quad (5.3.9)$$

$$k_{3,n} = f(x(n) + T_i/2 \cdot k_{2,n}, u(n)) \quad (5.3.10)$$

$$k_{4,n} = f(x(n) + T_i \cdot k_{3,n}, u(n)) \quad (5.3.11)$$

$$x(n+1) = x(n) + T_i/6 \cdot (k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}) \quad \forall n \in [1, (M-1) \cdot N] \quad (5.3.12)$$

### 5.3.2.3 Hermitova-Simpsonova kolokační metoda

V tomto případě se jedná o kolokační metodu diskretizace dynamiky systému. Stavů jsou mezi jednotlivými body aproximovány kubickou rovnicí. Akční zásah je aproximován lichoběžníkovou metodou. Bod uprostřed mezi krajními body musí splňovat tyto aproximace a to jak v hodnotě, tak v derivaci. Přepsáním těchto úvah do rovnic získáváme rovnice:

$$k_{1,n} = f(x(n), u(n)) \quad (5.3.13)$$

$$k_{2,n} = f(x(n+1), u(n+1)) \quad (5.3.14)$$

$$x_{c,n} = (x(n) + x(n+1))/2 + T_i \cdot (k_{1,n} - k_{2,n})/8 \quad (5.3.15)$$

$$k_{c,n} = f(x_{c,n}, (u(n) + u(n+1))/2) \quad (5.3.16)$$

$$T_i \cdot k_{c,n} + 3 \cdot (x(n) - x(n+1))/2 + T_i \cdot (k_{1,n} + k_{2,n})/4 = 0 \quad (5.3.17)$$

## 5.4 Hodnocení nalezené trajektorie

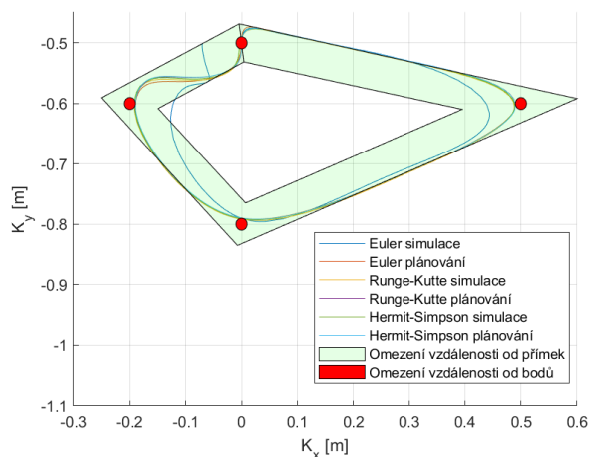
Pro porovnání přesnosti disretizačních metod jsme každou metodou vygenerovali trajektorii. Získané sekvence vstupů jsme proložili příslušnými křivkami a použili jsme je jako vstup pro simulaci na matematickém modelu. Ten přesněji simuluje dynamiku systému, jelikož používá přesnější diskretizační metody a menší délku kroku oproti diskretizacím použitým při plánování optimální trajektorie.

Sekvence vstupů do systému byla pro Eulerovu a Rungeovu-Kuttovu metodu proložena metodou levého odhadu, tedy brána byla vždy nejbližší předchozí hodnota. Pro Hermitovu-Simpsonovu kolokační metodu byly vstupy proloženy lichoběžníkovou metodou.

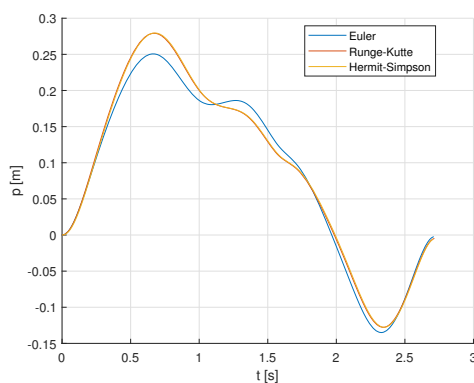
Trajektorii jsme omezili pěti body (začátek a konec jsou identické) a k nim se musí trajektorie přiblížit minimálně na vzdálenost  $\epsilon_{p,max} = 10$  mm. Zároveň se trajektorie nesmí vzdálit od úseček spojující tyto body o více než  $\epsilon_{l,max} = 30$  mm. Každý úsek mezi dvěma po sobě jdoucími body, které definují trajektorii, je úsek rozdělen na sekvenci  $N = 35$  bodů. Omezení trajektorie, trajektorie získané při generování trajektorie a simulace těchto trajektorií na matematickém modelu jsou zakresleny na obrázku 14.

Všechny diskretizační metody našli téměř identickou trajektorii kyvadla, ale trajektorie polohy vozíku a délky lanka se pro Eulerovu metodu výrazně odlišovali viz obrázky 15.

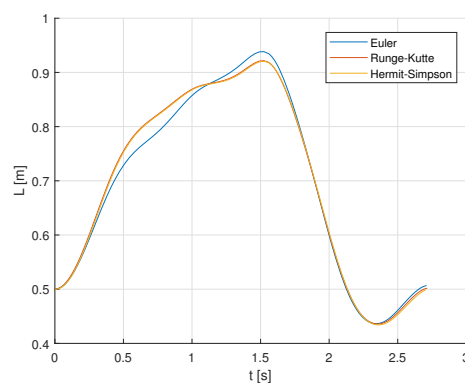
Trajektorie naplánovaná s využitím Hermitovy-Simpsonovy kolokační metody a Rungeovy-Kuttovy metody čtvrtého řádu dosahovali podobné přesnosti i času konvergence viz tabulka 4. Kolokační metoda dosáhla kratšího času i vyšší přesnosti, proto je v tomto případě vhodnější. Eulerova metoda byla výrazně rychlejší, ale polohy kyvadla při následné simulaci se výrazně neshodovaly s vygenerovanou trajektorií.



Obrázek 14: Návrh upraveného kyvadla



(a) Trajektorie při různých metodách řízení v Odrive



(b) Velikost odchylky polohy kyvadla při různých metodách řízení motorů v Odrive

Obrázek 15: Porovnání diskretizačních metod podle polohy vozíku a délky lanka

Diskretizace	čas [s]	max. chyba [m]
Eulerova	4.2	0.073
Rungeova-Kuttova	10.7	0.0063
Kolokační	10.5	0.0050

Tabulka 4: Porovnání diskretizačních metod podle času a přesnosti

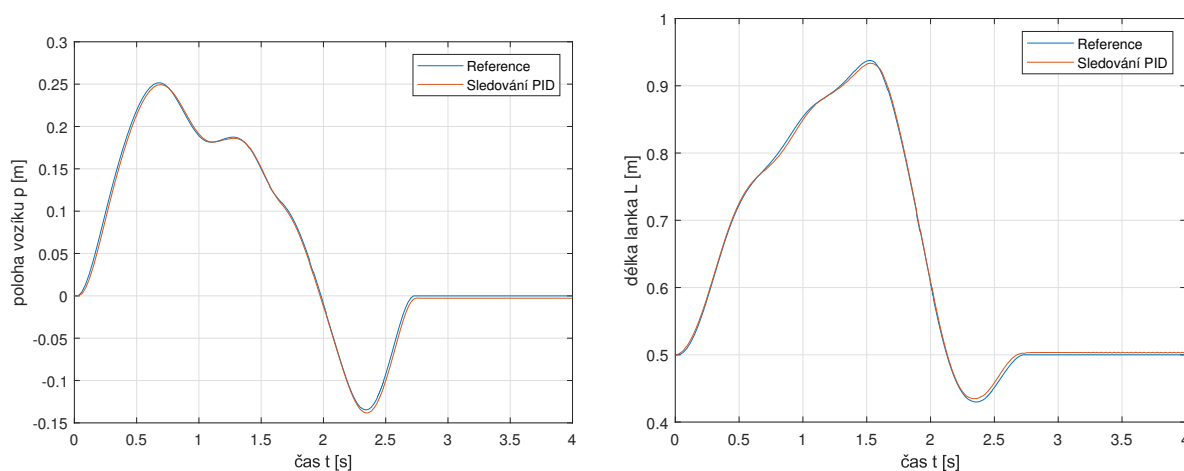
## Kapitola 6

# Sledování trajektorie

Pro sledování trajektorie byly testovány tři přístupy. Prvním je sledování polohy vozíku a délky lanka pomocí PID regulátorů. PID regulátory byly následně použity v kombinaci se stavovou zpětnou vazbou. Jejím účelem je sledovat referenci polohy kyvadla při dodržení předpočítané trajektorie. K této stavové zpětné vazbě jsme přistupovali jako k lineárně kvadratickému regulátoru, tedy minimalizovali jsme součet kvadrik akčního zásahu a odchylky stavů od referencie. Návrh regulátoru jsme provedli na nekonečném horizontu pro časově invariantní systém a na konečném horizontu pro časově proměnný systém.

### 6.1 Sledování pomocí PID

V tomto přístupu jsme sledovali trajektorii vozíku  $p$  a délky závěsu  $L$  pomocí PID regulátorů, které za vstup braly odchylky od referencie polohy a výstupem byl proud procházející motorem. Oba regulátory jsme navrhli pomocí nástroje root locus pro linearizovaný model systému s délkou lanka  $L = 0.5$  m a zbylými veličinami rovnými nule  $p, \dot{p}, \varphi, \dot{\varphi}, \dot{L} = 0$ . Při tomto typu regulace nebyl brán ohled na polohu kyvadla. Při sledování trajektorie lanka a vozíku byla odchylka od referencie maximálně 8 mm viz obrázek 16.



Obrázek 16: Sledování trajektorie pomocí PID

### 6.1.1 Úprava modelu s PID regulátorem

V této fázi projektu bylo zřejmé, že dynamika vozíku a lanka není přesně určená. Problematické je především samotné tlumení, na modelu se projevuje statické tření, které po dosažení určité rychlosti přestává působit. Prvotní pokusy se stavovou zpětnou vazbou ukázaly, že není vhodná při takovýchto změnách tlumení, jelikož často není schopná překonat toto statické tření. Experimenty s PID regulátory ukázaly, že jsou vzhledem k jejich integrační složce schopné problémy s proměnným tlumením překonat. Návrh PID regulátorů je však často pro MIMO (mnoho vstupů, mnoho výstupů) systémy problematický.

Pro přesnější řízení byly PID a stavová zpětná vazba zkombinovány. PID regulátor zajišťuje sledování polohy získané pomocí dvojité integrace zrychlení. Pomocí těchto úprav jsme získali systém, jehož vstupy jsou zrychlení vozíku a délky lanka. Samotné zrychlení získáváme zároveň z předpočítané trajektorie a pomocí stavové zpětné vazby viz schéma na obrázku 17. Touto úpravou jsme řízení víceméně rozdělili na problém regulace polohy vozíku s lankem a řízení samotného kyvadla.

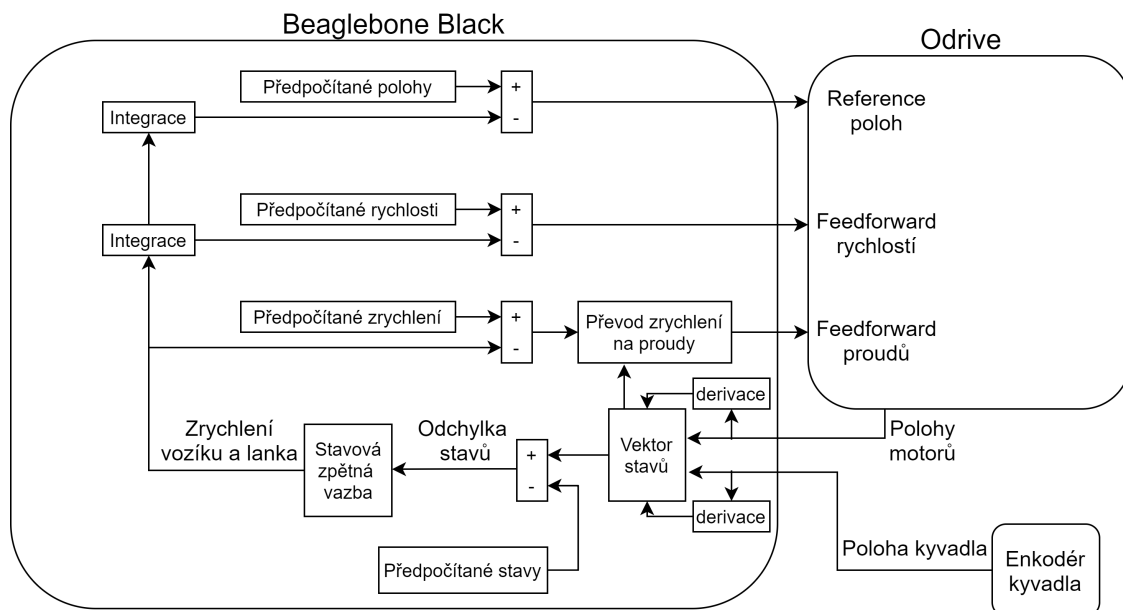
Pro zjednodušení byly použity upravené regulátory polohy přímo v Odrivu, jemuž je předávána cílová poloha, očekávaná rychlost a očekávaný proud procházející motory, viz schéma na obrázku 3. Zisky těchto regulátorů byly upraveny na základě znalostí získaných z PID regulátorů. Proud předpočítané trajektorie je získáván ze zrychlení pomocí nelineární funkce odvozené z rovnic popisujících dynamiku systému (3.2.6) až (3.2.10).

$$i_P(t) = \frac{1}{t_{mP}} (m_v \ddot{p}(t) + F_{lanko} (1 - \sin(\varphi(t))) - b_k l(t) \dot{\varphi}(t) \cos(\varphi(t)) + b_v \dot{p}(t)) \quad (6.1.1)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{t_{mL}} (m_m \ddot{L}(t) - F_{lanko} + b_m \dot{L}(t)) \quad (6.1.2)$$

$$F_{lanko} = m_k (l(t) \dot{\varphi}(t)^2 - \ddot{l}(t) - \sin(\varphi(t)) \ddot{p}(t) + g \cos(\varphi(t))) \quad (6.1.3)$$

Výraznou výhodou tohoto přesunu je vyšší frekvence smyčky regulátorů, která je 8 kHz pro Odrive a zatímco pro řízení z BeagleBone dosahuje pouze 250 Hz. Zvýšením frekvence jsme dosáhli přesnějšího sledování referenční polohy vozíku a délky lanka.



Obrázek 17: Schéma řízení s kombinací PID a LQR regulátorů

## 6.2 Lineární kvadratický regulátor na nekonečném horizontu pro časově invariantní systém

Vzhledem ke změnám popsaným v předchozí podkapitole, budeme navrhovat regulátor pro upravený systém, jehož vstupy jsou zrychlení vozíku a lanka. Pro návrh stavové zpětné vazby jsme jako stavy systému definovali polohy a rychlosti získané pomocí tří enkodérů systému. Tyto enkodéry měří polohu vozíku, délku lanka a úhel kmitu.

Systém jsme linearizovali ve stabilní poloze při svislé poloze kyvadla, s délkou závěsu  $L = 0.5$  m, zbylé stavy rovny nule  $p, \dot{p}, \varphi, \dot{\varphi}, \dot{L} = 0$ . Linearizací jsme zanedbali proměnný stav systému. Regulátor by však měl fungovat pokud výchylky úhlu kyvadla a velikosti závěsu nebudou příliš velké.

Následně jsme navrhli stavovou zpětnou vazbu s cílem minimalizovat ztrátovou funkci (6.2.1) na neomezeném čase. Takovýto tvar ztrátové funkce se používá, protože je schopen dobře popsat požadované chování a zároveň se dobře optimalizuje.

$$J(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{x}^T(n) \mathbf{Q} \mathbf{x}(n) + \mathbf{u}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{u}(n) + 2\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{u}(n) \quad (6.2.1)$$

Jelikož hlavním cílem řízení je sledování polohy kyvadla, byla zvolena matice:

$$\mathbf{Q} = 0.5 \mathbf{I} + \mathbf{K}_{xyLin}^T \cdot \mathbf{K}_{xyLin} + \mathbf{K}_{VxyLin}^T \cdot \mathbf{K}_{VxyLin}$$

kde matice  $\mathbf{K}_{xyLin}$  je jakobiánem funkce  $[x_k(t) \quad y_k(t)]^T$  podle stavů  $\mathbf{x}$  a reprezentuje důraz na minimalizaci odchylky polohy kyvadla od reference. Člen  $\mathbf{K}_{VxyLin}$  je jakobiánem funkce  $[\dot{x}_k(t) \quad \dot{y}_k(t)]^T$  podle stavů  $\mathbf{x}$  a reprezentuje důraz na odchylku rychlosti kyvadla od reference. Člen  $0.5 \mathbf{I}$  reprezentuje snahu sledovat předpočítané stavy trajektorie. Matice  $\mathbf{N}$  byla vzhledem k charakteru systému zvolena nulová. Matice  $\mathbf{R}$  byla iterativně upravována podle chování reálného systému s výsledkem  $\mathbf{R} = 0.05 \mathbf{I}$ . Pokud byl regulátor agresivnější, docházelo k neočekávaným rotacím závaží popsané v části 6.4.

## 6.3 Lineární kvadratický regulátor na konečném horizontu pro časově proměnný systém

Tento přístup je podobný jako výše popsaný, ale započítává proměnný charakter linearizovaného systému. Tomuto tématu se věnují autoři například ve článcích: [11–13]. V tomto případě nelineární model linearizujeme podél trajektorie. Pro proměnný lineární systém minimalizujeme ztrátovou funkci (6.3.1) na konečném časovém horizontu. Výsledkem je časově proměnná zpětná vazba. Matice  $\mathbf{N}$  a  $\mathbf{R}$  byly použity stejné, jako v předchozím případě. Matice  $\mathbf{Q}$  byla použita obdobně, ale její přesná hodnota byla v každém bodě trajektorie vypočítána podle aktuálních hodnot stavů systému.

$$J = \mathbf{x}^T(N) \mathbf{Q} \mathbf{x}(N) + \sum_{n=0}^N (\mathbf{x}^T(n) \mathbf{Q} \mathbf{x}(n) + \mathbf{u}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{u}(n) + 2\mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{u}(n)) \quad (6.3.1)$$



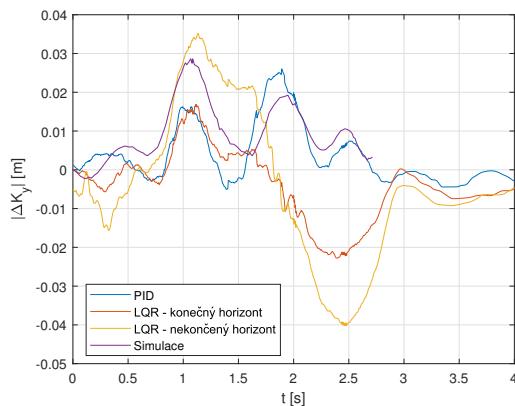
## 6.4 Porovnání navržených regulátorů

Pro testování jednotlivých způsobů sledování trajektorie byla navržena trajektorie pomocí Eulerovy metody. Poloha kyvadla v této trajektorii se však výrazně neshodovala se simulací na matematickém modelu. Tato neshoda vznikla použitím nedostatečně přesné diskretizační metody. Cílem bylo testovat schopnost regulátorů opravit chyby vzniklé při generování trajektorie a zároveň věrohodnost simulace pro budoucí experimenty. Výsledky jsme zaznamenali do obrázků 18.

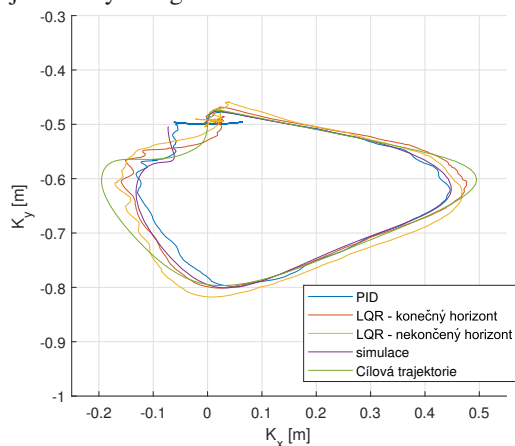
V prvním případě, kdy je řízena poloha vozíku a délka lanka pomocí PID regulátorů a na úhel výkyvu není brán ohled, je pozorovatelná výrazná odchylka polohy kyvadla vůči naplánované trajektorii. Data však odpovídají simulaci, proto se nejedná o chybu regulátorů.

Při zapojení stavové zpětné vazby podle obrázku 17, tak dochází ke snížení odchylky polohy kyvadla od referencie. Při návrhu regulátoru na konečném horizontu pro časově proměnný systém je dosaženo lepších výsledků než při návrhu na nekonečném horizontu pro časově neměnný systém. To je v souladu s teoretickými předpoklady, jelikož druhá zmíněná metoda návrhu lépe modeluje charakter systému při průchodu trajektorií.

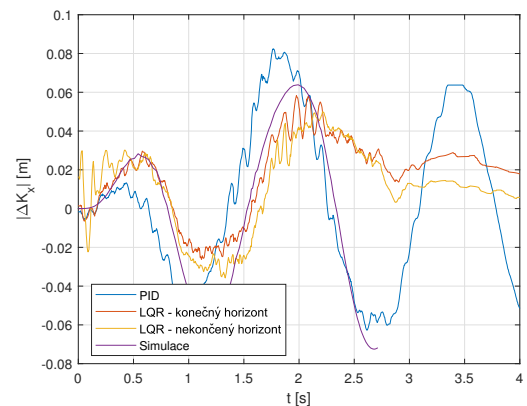
V naměřených datech je viditelná oscilace s vyšší frekvencí než je vlastní frekvence kmitání kyvadla. V tomto případě se však nejedná o kmitání celého kyvadla, ale o kmity samotného závaží kolem osy z, jak bylo popsáno v kapitole 2.4. Tyto kmity se následně projevují v naměřených datech.



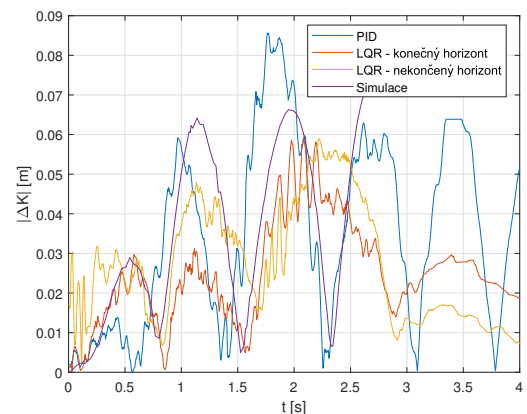
(a) Odchylka polohy kyvadla v ose y při použití jednotlivých regulátorů



(c) Trajektorie při použití jednotlivých regulátorů



(b) Odchylka polohy kyvadla v ose x při použití jednotlivých regulátorů

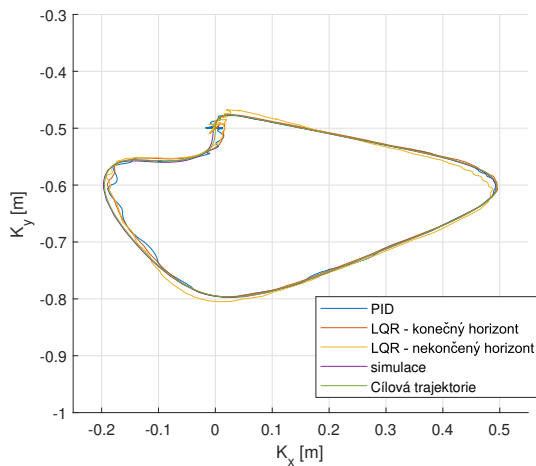


(d) Velikost odchylky polohy kyvadla při použití jednotlivých regulátorů

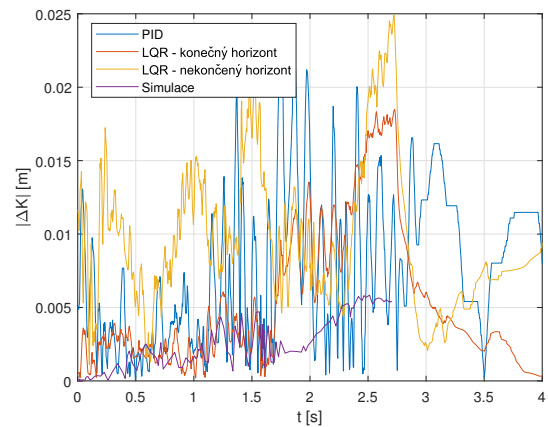
Obrázek 18: Odchylky polohy kyvadla od trajektorie navržené s Eulerovou metodou diskretizace pro jednotlivé způsoby regulace

## 6.4 Porovnání navržených regulátorů

Navržené regulátory dobře fungují pro nedostatečně přesně předpočítanou trajektorii. Dále byla testována trajektorie navržená s využitím Hermitovy-Simpsonovy kolokační metody pro diskretizaci systému. Simulace na matematickém modelu velmi přesně odpovídá předpočítané trajektorii s maximální odchylkou přibližně 6 mm. Výsledky pro jednotlivé způsoby řízení jsou zakresleny v obrázku 19. Pro všechny regulátory byla výsledná přesnost sledování trajektorie podobná. LQR regulátor na nekonečném horizontu měl mírně horší výsledky než samotné PID regulátory. Pravděpodobně hlavním limitujícím faktorem tohoto řízení je nepřesný popis kyvadla a výrazné chyby v měření jeho výkyvu.



(a) Trajektorie při použití jednotlivých regulátorů



(b) Velikost odchylky polohy kyvadla při použití jednotlivých regulátorů

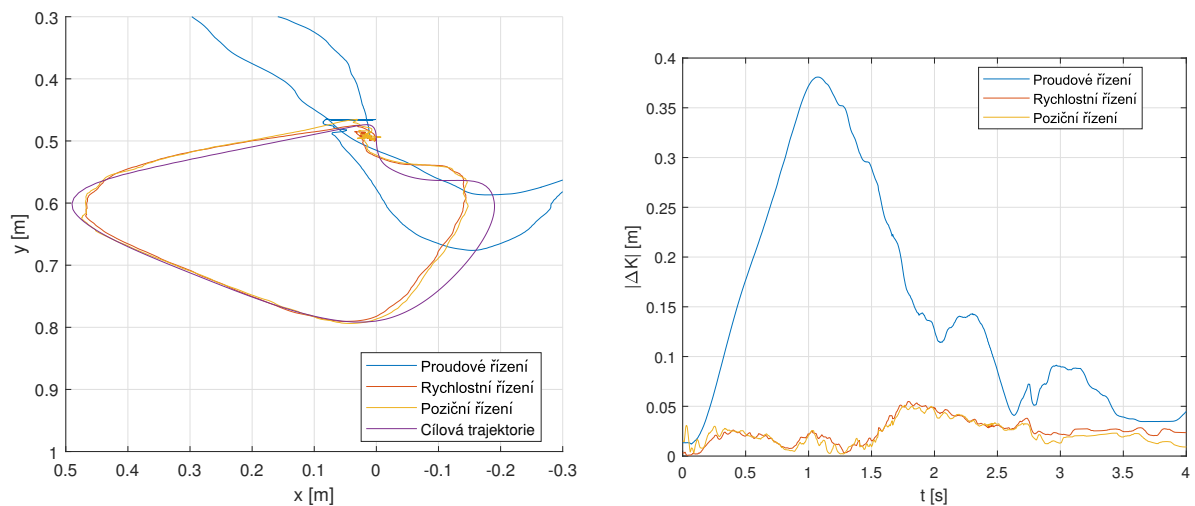
Obrázek 19: Odchyly polohy kyvadla od trajektorie navržené s kolokační metodou diskretizace pro jednotlivé způsoby regulace

## 6.5 Vliv PID regulátorů

V této podkapitole se budeme věnovat vlivu kombinace dvou regulátorů. Především se budeme věnovat vlivu jednotlivých částí PID regulátorů v Odrive. Ten umožňuje poziční, rychlostní a proudové řízení. Prozatím jsme v této kapitole používali vždy poziční řízení s využitím "feedforward", tedy předávání očekávané rychlosti a proudu.

Při testování na matematickém modelu je však možné použít pouze proudové řízení. Proud je totiž vypočítán tak, aby přesně odpovídal cílenému zrychlení polohy vozíku a délky závěsu na matematickém modelu. Regulátory polohy a rychlosti (viz kapitola 2.2.1) mají při použití na matematickém modelu vždy nulový výstup. To však neplatí pro reálný model.

V Odrivu jsme postupně volili způsoby řízení: poziční, rychlostní a proudové. V obrázku 20 jsme zakreslili naměřená data polohy kyvadla. Mezi polohovým a rychlostním řízením nebyl výrazný rozdíl. Při proudovém řízení však docházelo k výrazným odchylkám od trajektorie. Problémem je především silné proměnné tlumení polohy vozíku a délky lanka. Pokud je použito rychlostní řízení, tak je toto tlumení překonáno integrační složkou tohoto regulátoru.



(a) Trajektorie při různých metodách řízení v Odrive

(b) Velikost odchylky polohy kyvadla při různých metodách řízení motorů v Odrive

Obrázek 20: Porovnání různých metod řízení motorů v Odrive

## Kapitola 7

# Závěr

V této práci je popsána stavba a zprovoznění platformy zvané dynamický plotr. Jde o zařízení podobné kyvadlu na vozíku. Jako stavební díly jsme použili běžně dostupné součástky nebo výrobu pomocí 3D tiskárny. Některé zakoupené komponenty jsme upravili pro použití v naší platformě. Hlavní úpravy se týkaly především zrychlování komunikace mezi BeagleBone a Odrive. Platforma splňuje zadané požadavky a umožňuje řízení až na frekvenci 350 Hz z prostředí Simulink.

Postavený model byl analyzován a různými experimenty byly identifikovány jeho konstanty. Chování matematického modelu ve většině aspektů odpovídá reálnému modelu. Hlavním nedostatkem je problematické chování tření při pohybu vozíku a odvíjení lanka, které se nepodařilo přesně modelovat. Kyvadlo jsme modelovali jako hmotný bod, což se pro agresivnější řízení ukázalo nedostatečně přesné.

V prostředí Matlab jsme vytvořili skript, který pro matematický model vypočítá optimální trajektorii jako sekvenci vstupů a stavů. Skript umožňuje upravovat parametry trajektorie a způsob diskretizace systému. Pro sledování této trajektorie jsme navrhli regulátory pro sledování polohy kyvadla. Pro překonání problematického tření jsme využili PID regulátoru v kombinaci se stavovou zpětnou vazbou. PID regulátor řídí polohu vozíku a délku lanka. Stavová zpětná vazba upravuje reference polohy vozíku a délky lanka, za účelem sledování polohy kyvadla.

Výsledný systém je schopen nakreslit kyvadlem křivku zadanou sekvencí bodů. Mezi jednotlivými body kyvadlo sleduje přímkou spojující tyto dva body a nemělo by se od této přímky vzdálit více než o předem definovanou vzdálenost. Fyzický model je schopen tuto předpočítanou trajektorii sledovat s dostatečnou přesností.

### 7.1 Budoucí práce

Vzhledem k časové náročnosti nemohl být v rámci bakalářské práce projekt plně dokončen, ale bude nadále pokračovat<sup>3</sup>. Plánováno je dokončení průsvitné desky s luminoformním nátěrem a ovládání zavěšeného laseru pro lepší vizualizaci nakreslené trajektorie. Samotné kyvadlo při použití agresivních regulátorů vykazuje nežádoucí oscilace, které se prozatím nepodařilo plně potlačit ani modelovat. Jsou zapotřebí další úpravy mechanismu kyvadla, či zpřesnění jeho modelu pro zvýšení rychlosti a přesnosti kyvadla dynamického plotru.

Pro prezentační účely je vhodnější použít komplikovanější trajektorie. S rostoucím počtem bodů trajektorie velmi rychle roste výpočetní náročnost hledání optimální trajektorie. V této oblasti je plánováno zkoumat dvě alternativy. Jednou z možností je implementovat hledání optimální trajektorie pomocí prostorových souřadnic, jak bylo popsáno v této práci. Druhou možností je rozdělit problém plánování celé trajektorie na několik menších úseků a ty následně spojit.

V oblasti sledování trajektorie je plánováno testovat pokročilejší algoritmy, především nelineární na modelu založený prediktivní regulátor, kterými se pro různé systémy věnují například autoři [14, 15].

<sup>3</sup> <https://gitlab.fel.cvut.cz/aa4cc/DynamicPlotter>

## Literatura

- [1] Oskar Weigl. Odrive Robotics. URL: <https://docs.odriverobotics.com/control>. Cited on 2020-05-6.
- [2] James B Dabney and Thomas L Harman. *Mastering simulink*. Pearson, 2004.
- [3] Collective of Authors. Fusion360. URL: <https://www.autodesk.com/products/fusion-360/>. Cited on 2020-04-28.
- [4] J. Průša. Základy 3D tisku. URL: <https://www.prusa3d.cz/kniha-zaklady-3d-tisku-josefa-prusi/>. Cited on 2020-04-25.
- [5] Jiráť Daniel. Modelování a analýza bldc motoru pro pohon sportovního letadla. 2019.
- [6] Matthew Kelly. An introduction to trajectory optimization: How to do your own direct collocation. *SIAM Review*, 59(4):849–904, 2017.
- [7] Joel A E Andersson, Joris Gillis, Greg Horn, James B Rawlings, and Moritz Diehl. CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Mathematical Programming Computation*, 11(1):1–36, 2019.
- [8] Robin Verschueren, Niels van Duijkeren, Jan Swevers, and Moritz Diehl. Time-optimal motion planning for n-dof robot manipulators using a path-parametric system reformulation. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 2092–2097. IEEE, 2016.
- [9] Fariba Fahroo and I Michael Ross. Direct trajectory optimization by a chebyshev pseudospectral method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(1):160–166, 2002.
- [10] John T Betts. Survey of numerical methods for trajectory optimization. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 21(2):193–207, 1998.
- [11] Lucas M Argentim, Willian C Rezende, Paulo E Santos, and Renato A Aguiar. Pid, lqr and lqr-pid on a quadcopter platform. In *2013 International Conference on Informatics, Electronics and Vision (ICIEV)*, pages 1–6. IEEE, 2013.
- [12] Russ Tedrake, Ian R Manchester, Mark Tobenkin, and John W Roberts. Lqr-trees: Feedback motion planning via sums-of-squares verification. *The International Journal of Robotics Research*, 29(8):1038–1052, 2010.
- [13] Wei Zhang, Jianghai Hu, and Alessandro Abate. On the value functions of the discrete-time switched lqr problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(11):2669–2674, 2009.
- [14] Milan Vukov, Wannes Van Loock, Boris Houska, Hans Joachim Ferreau, Jan Swevers, and Moritz Diehl. Experimental validation of nonlinear mpc on an overhead crane using automatic code generation. In *2012 American Control Conference (ACC)*, pages 6264–6269. IEEE, 2012.
- [15] Giacomo Perantoni and David JN Limebeer. Optimal control for a formula one car with variable parameters. *Vehicle System Dynamics*, 52(5):653–678, 2014.