



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

**Fakulta elektrotechnická
Katedra elektroenergetiky**

Perspektivní metody modelování nelineárních indukčních ohřevů

Disertační práce

Doktorský studijní program: P2612 Elektrotechnika a informatika

Studijní obor: 3907V001 Elektroenergetika

Školitel: *prof. Ing. Ivo Doležel, CSc.*

Školitel specialista: *doc. Dr. Ing. Jan Kyncl*

Ing. Zdeněk Novák

Praha srpen 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracoval samostatně a použil jen uvedenou literaturu, prameny a informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o dodržování etických principů při přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

V Praze dne

.....

Ing. Zdeněk Novák

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval školiteli prof. Ing. Ivovi Doleželovi, CSc. za odborné vedení, trpělivost a ochotu a školiteli specialistovi doc. Dr. Ing. Janu Kynclovi za řadu podnětných rad a připomínek. Dále bych rád poděkoval kolektivu KEE na ZČU Plzeň a kolektivu katedry elektroenergetiky ČVUT v Praze za využití jejich laboratoří. Nemalý dík pak patří mé rodině a přátelům za podporu.

Anotace

Veškeré metalurgické postupy vyžadují dodržení přesných časových a teplotních podmínek. Z tohoto hlediska musí být mnoho procesů indukčního ohřevu řízeno v souladu s předepsaným časovým vývojem teploty zahřívaného tělesa. Řízení spočívá ve správném nastavení budících proudů (amplitudy a frekvence) v topných induktorech. Amplitudy a frekvence proudů se mohou měnit buď spojitě, nebo po krocích.

Tato disertační práce představuje nový model indukčního ohřevu válcových odlitků založený na řešení nestacionárních úloh. Klasická řešení nestacionárních úloh jsou časově náročná, proto byly pro použití v online operacích vyvinuty rychlejší modely dopředných dějů, které jsou pro řešení inverzních úloh zásadní. Byly zvažovány různé optimalizační metody a vybrány takové, které nejvíce vyhovovaly v konkrétních případech.

Metodika řeší požadavek konkrétního teplotního průběhu za časový krok, takže je vhodná pro celou řadu technologických požadavků. Nejvhodněji se hodí k metalurgickým dějům jako je žíhání nebo kalení. Výsledky metodiky byly na některých příkladech experimentálně ověřeny.

Klíčová slova: indukční ohřev, optimalizace teplotního pole, žíhání, kalení, matematické modelování, numerická analýza.

Abstract

All metallurgical processes require accurate time and temperature conditions. Numerous processes of induction heating must be controlled in agreement with the prescribed time evolution of temperature of the heated body. The control consists of a suitable setting of field currents (amplitudes and frequencies) in the inductors. The amplitudes and frequencies of the currents can vary either continuously or by steps.

This thesis presents a novel model of induction heating of cylindrical billets with the solution based on solving non-stationary problems. The classic solutions of non-stationary tasks are time consuming, so faster forward-action models have been developed for use in online controlled operations, which are essential for solving inverse problems. Various optimization inverse methods were considered and the most suitable of them for the investigated cases were selected.

The methodology solves the requirement of a specific temperature evolution in one time step, so it is suitable for a wide range of technological requirements. It is best suited for metallurgical processes such as annealing or quenching. Some results are verified experimentally.

Keywords: induction heating, optimization, forward task, backward task, mathematical modeling, numerical analysis.

Obsah

Obsah	6
Seznam zkratk	8
Seznam obrázků	8
Seznam tabulek	9
Seznam symbolů	10
Kapitola 1 Úvod	12
1.1. Indukční ohřev	12
1.2. Současný stav ve světě	13
1.3. Cíle práce	16
Kapitola 2 Teorie pole.....	18
2.1. Elektromagnetické pole	18
2.1.1. Maxwellovy rovnice.....	18
2.1.2. Materiálové vztahy.....	20
2.1.3. Vektorový potenciál	22
2.2. Teplotní pole.....	23
2.2.1. Odvození rovnice popisující teplotní pole	24
2.3. Sdílení tepla	26
2.3.1. Sdílení tepla vedením	27
2.3.2. Sdílení tepla sáláním.....	29
2.3.3. Sdílení tepla konvekcí	31
2.4. Teorie podobnosti.....	33
2.4.1. Přirozené sdílení konvekcí	36
2.4.1. Nucené sdílení konvekcí	38
2.5. Určující podmínky	39
Kapitola 3 Realizace indukčního ohřevu.....	41
3.1. Výkonová elektronika	41
3.2. Řídicí algoritmy	44
3.3. Magnetické komponenty.....	45
3.4. Aplikace indukčních ohřevů	46
3.5. Reálné pracoviště	47
Kapitola 4 Numerické řešení pole.....	49
4.1. Sdružené úlohy	49
4.2. Metoda čar	52
4.3. Diferenční metoda	52

4.4.	Metoda konečných prvků	53
4.5.	Optimalizační metody	55
4.5.1.	Nelineární programování.....	55
4.5.2.	Komparativní metody.....	56
4.5.3.	Gradientní metody	57
4.5.4.	Genetické algoritmy	58
Kapitola 5	Modelování indukčních ohřevů	59
5.1.	Ohřev válce	59
5.1.1.	Řešení elektromagnetického pole válce.....	60
5.1.2.	Řešení teplotního pole	61
5.2.	Lineární problém.....	62
5.2.1.	Řešení pomocí metody čar	63
5.2.2.	Řešení pomocí tepelných odporů.....	64
Kapitola 6	Optimalizace teplotního profilu	66
6.1.	Dopředný děj	66
6.2.	Optimalizace zpětného děje	68
6.2.1.	Porovnání optimalizačních metod.....	68
6.2.2.	Optimalizace ostré křivky	73
6.3.	Algoritmus optimalizace	74
6.4.	Experiment.....	76
6.5.	2D FEM Model	80
Kapitola 7	Závěr	81
7.1.	Přehled výsledků a přínosů disertační práce	81
7.2.	Náměty dalšího rozvoje práce	82
Kapitola 8	Literatura	83
Kapitola 9	Seznam publikací	86
9.1.	Publikace vztahující se k tématu disertační práce	86
9.2.	Ostatní publikace	87
9.3.	Ohlasy	87

Seznam zkratek

ČVUT	České vysoké učení technické v Praze
FEL	Fakulta elektrotechnická
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers (Institut pro elektrotechnické a elektronické inženýrství)
PDR	Parciální diferenciální rovnice
ODE	Ordinary differential equation (Obyčejná diferenciální rovnice)
DAE	Differential-algebraic system of equations (Algebraicko-diferenciální soustava rovnic)
MOL	Method of lines (Metoda čar)
FDM	Finite Difference Method (Metoda konečných diferencí)
FEM	Finite Element Method (Metoda konečných prvků)
BEM	Boundary Element Method (Metoda hraničních prvků)
hp-FEM	Metoda adaptivních konečných prvků vyššího řádu přesnosti
IH	Induction heating (Indukční ohřev)
PDM	Pulse-density modulation (Pulsně hustotní modulace)
PLL	Phase-Locked Loop (Fázový závěs)
GA	Genetické algoritmy
SW	Software
HW	Hardware

Seznam obrázků

Obr. 1.1 Princip zařízení pro indukční ohřev	12
<i>Obr. 1.2 Technologický předpoklad teplotního profilu na poloměru válce.....</i>	16
<i>Obr. 1.3 Technologický předpoklad vývoje teploty na čase.....</i>	16
<i>Obr. 2.1 Magnetizační křivky v závislosti na teplotě T</i>	21
Obr. 2.2 Tepelný tok jednotkovou plochou	23
Obr. 2.3 Odvození Fourierova zákona	23
Obr. 2.4 Složená rovinná stěna	27
Obr. 2.5 Schéma tepelného obvodu reprezentující složenou rovinnou stěnu.....	27
Obr. 2.6 Jednoduchá válcová stěna	28
Obr. 2.7 Složená válcová stěna	28
Obr. 2.8 Schéma rozdělení dopadající sálavé energie.....	29
Obr. 2.9 Sálání v uzavřeném prostoru.....	31
Obr. 2.10 Tvar proudění kapalin při laminárním, vířnatém a turbulentním proudění [8]	32
<i>Obr. 2.11 Volné proudění kapaliny podél vodorovných, ohřátých desek [10]</i>	36
<i>Obr. 2.12 Průběh součinitele přestupu tepla při volném proudění vzduchu podél svislé trubky a jeho závislost na druhu obtékání [10]</i>	36
<i>Obr. 2.13 Průběh rychlosti v průřezu při laminárním (vlevo) a turbulentním (vpravo) proudění kapaliny v trubce [8]</i>	38
<i>Obr. 3.1 Vývojový diagram typické přeměny energie v systému IH</i>	41
<i>Obr. 3.2 Elektrický model zátěže IH.....</i>	42
<i>Obr. 3.3 Konfigurace rezonančního obvodu IH.....</i>	42
<i>Obr. 3.4 Základní topologie napěťového střídače aplikované v IH: (a) plný můstek, (b) půlmůstek, (c) ZVS kvazirezonanční střídač s jedním spínačem [3]</i>	43

Obr. 3.5 Měníče pro víceinduktorové systémy IH: (a) dvojitý plný můstek, (b) dvojitý půlmůstek, (c) půlmůstek s multiplexovým kmitočtem, (d) sériový multiinvertor [3]	43
Obr. 3.6 Řídicí obvod proudu induktoru [31]	44
Obr. 3.7 Detaily několika průmyslových, vodou chlazených induktorů [51]	45
Obr. 3.8 Induktor IH v domácnostech	45
Obr. 3.9 Blokové schéma generátoru dvojfrekvenčního indukčního ohřevu	46
Obr. 3.10 Schéma zapojení reálného IH	47
Obr. 4.1 Algoritmus silně sdružené úlohy	50
Obr. 4.2 Algoritmus kvazi sdružené úlohy	51
Obr. 4.3 Algoritmus slabě sdružené úlohy	51
Obr. 4.4 Jednoduchá síť FDM [7]	52
Obr. 4.5 Triangulace [7]	53
Obr. 4.6 Okrajové podmínky [7]	54
Obr. 5.1 Cylindrická (válcová) soustava s vyznačenými vektory E , H a S	59
Obr. 5.2 Axiální a radiální řez vsázky a induktoru	60
Obr. 5.3 Řez válce s vyznačeným n -tým segmentem r_i a jeho sousedními segmenty r_{i-1} a r_{i+1}	63
Obr. 6.1 Vyčíslení objemové hustoty výkonu w při $I=160$ A a $f=21$ kHz ve válci	66
Obr. 6.2 Porovnání výsledků výpočtu teplotního pole pomocí PDE a soustav rovnic ODE	67
Obr. 6.3 Vývoj teploty v každém kroku pro gradientní metodu	69
Obr. 6.4 Přiblížení prvních 40 kroků z Obr. 6.3	69
Obr. 6.5 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro gradientní metodu	69
Obr. 6.6 Vývoj teploty v každém kroku pro Nelder – Meadovu metodu	70
Obr. 6.7 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro Nelder – Meadovu metodu	70
Obr. 6.8 Vývoj teploty v každém kroku pro Nelder – Meadovu metodu s random seed	70
Obr. 6.9 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro Nelder – Meadovu metodu s random seed	71
Obr. 6.10 Vývoj teploty v každém kroku pro metodu diferenciální evoluce	71
Obr. 6.11 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro metodu diferenciální evoluce	71
Obr. 6.12 Vývoj teploty v každém kroku pro metodu simulovaného žíhání	72
Obr. 6.13 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro metodu simulovaného žíhání	72
Obr. 6.14 Výsledky jednotlivých metod v porovnání s požadovanou křivkou teplotního průběhu	73
Obr. 6.15 Pohled na induktor a vsázku	74
Obr. 6.16 Algoritmus celého procesu optimalizace řízení zdroje	75
Obr. 6.17 Požadovaná teplotní závislost na poloměru válce	76
Obr. 6.18 Termografické měření	76
Obr. 6.19 Výsledky jednotlivých kroků pro gradientní metodu	77
Obr. 6.20 Výsledky jednotlivých kroků pro metodu Nelder-Meadovu	77
Obr. 6.21 Výsledky jednotlivých kroků pro metodu diferenciální evoluce	78
Obr. 6.22 Výsledky jednotlivých kroků pro metodu simulovaného žíhání	79
Obr. 6.23 Geometrie rotačně symetrického tělesa v Agros2D	80
Obr. 6.24 Výsledek 2D FEM modelu v Agros2D	80
Obr. 6.25 Porovnání 1D a 2D řešení válce	80

Seznam tabulek

Tab. 1.1 Orientační hodnoty hloubky vniku u oceli, mědi a hliníku v závislosti na frekvenci	13
Tab. 2.1 Hodnoty c a n do rovnice (2.88)	37
Tab. 3.1 Parametry L_s a R_s pro hliník při různém uložení ingotu	48

Tab. 3.2 Parametry L_s a R_s pro ocel při různém uložení ingotu	48
Tab. 3.3 Parametry L_s a R_s samotného induktoru	48
Tab. 4.1 Časové konstanty jednotlivých procesů	49
Tab. 4.2 Veličiny polí a jejich závislé materiálové vlastnosti	50
Tab. 6.1 Doby výpočtů jednotlivých metod	67
Tab. 6.2 Porovnání jednotlivých metod na počtem kroků, času a chybách	73
Tab. 6.3 Porovnání výsledků jednotlivých metod a jejich chyba.....	73
Tab. 6.4 Proudý a frekvence v každém kroku pro gradientní metodu	77
Tab. 6.5 Proudý a frekvence v každém kroku pro metodu Nelder-Meadovu	78
Tab. 6.6 Proudý a frekvence v každém kroku pro metodu diferenciální evoluce	78
Tab. 6.7 Proudý a frekvence v každém kroku pro metodu simulovaného žíhání.....	79

Seznam symbolů

Velká písmena

Symbol	Jednotka	Veličina
A	$Wb \cdot m^{-1}$	magnetický vektorový potenciál
B	T	vektor indukce magnetického pole
D	$C \cdot m^{-2}$	vektor indukce elektrického pole
E	$V \cdot m^{-1}$	vektor intenzity elektrického pole
H	$A \cdot m^{-1}$	vektor intenzity magnetického pole
J	$A \cdot m^{-2}$	vektor proudové hustoty
S	$W \cdot m^{-2}$	Poyntingův vektor
C	F	elektrická kapacita
D_{char}	m	charakteristický rozměr
\mathcal{F}		funkcionál
I	A	elektrický proud
L	H	elektrická indukčnost
P	W	tepelný výkon
Q	C	celkový volný náboj
R	Ω	elektrická rezistivita
S	m^2	plocha
T	K	absolutní teplota
V	m^3	objem
W	J	tepelná energie
J_n		Besselovy rovnice prvního druhu
Y_n		Besselovy rovnice druhého druhu
Bi	–	Biotovo číslo
Eu	–	Eulerovo číslo
Fo	–	Fourierovo číslo
Fr	–	Froudeho číslo
Gr	–	Grashofovo číslo
Nu	–	Nusseltovo číslo
Pe	–	Pecletovo číslo
Pr	–	Prandtlovo číslo
Re	–	Reynoldsovo číslo
S	–	Strouhalovo číslo

Malá písmena

Symbol	Jednotka	Veličina
a	m	hloubka vniku
a	$m \cdot s^{-2}$	zrychlení vnějších objemových sil
a	$m^2 \cdot s^{-1}$	teplotní vodivost
c	$m \cdot s^{-1}$	rychlost světla
c_p	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku
c_v	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	měrná tepelná kapacita při stálém objemu
d	m	tloušťka
f	Hz	frekvence
g	$m \cdot s^{-2}$	tíhové zrychlení
h	m	výška
l	m	délka
m	kg	hustota
n	m	jednotkový normálový vektor
p	Pa	tlak
q	$W \cdot m^{-2}$	plošná hustota tepelného toku
q_0	$C \cdot m^{-3}$	objemová hustota volného náboje
r	m	polohový vektor
t	s	čas
v	$m \cdot s^{-1}$	rychlost
w	$W \cdot m^{-3}$	objemová hustota tepelného výkonu

Řecká písmena

Symbol	Jednotka	Veličina
α	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$	součinitel přestupu tepla
β	K^{-1}	součinitel objemové roztažnosti
γ	$S \cdot m^{-1}$	konduktivita
ε	$F \cdot m^{-1}$	permitivita
ε	-	emisivita prostředí
η	$Pa \cdot s$	dynamická viskozita
λ	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	měrná tepelná vodivost
λ	m	vlnová délka
μ	$H \cdot m^{-1}$	permeabilita
ν	$m^2 \cdot s^{-1}$	kinematická viskozita
ρ	$kg \cdot m^{-3}$	hustota
σ	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	Stefan-Boltzmannova konstanta
ϕ	Wb	magnetický indukční tok
φ	V	potenciál elektrického pole
Ψ	C	tok elektrického pole
ω	s^{-1}	úhlová rychlost

Fyzikální konstanty

Symbol	Hodnota	Veličina
ε_0	$8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$	permitivita vakua
μ_0	$1,257 \cdot 10^{-6} H \cdot m^{-1}$	permeabilita vakua
σ	$5,67 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	Stefan-Boltzmannova konstanta
c	$2,998 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$	rychlost světla ve vakuu

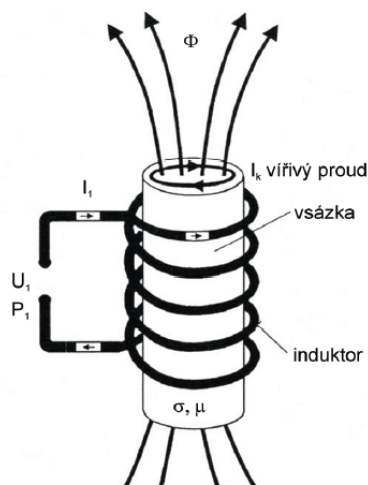
Kapitola 1 Úvod

Základní souvislosti mezi elektrickým proudem a magnetickými jevy se zasloužil dánský fyzik Hans Christian Oersted, které popsal ve své práci „Experimenta circa efficaciam conflictus electrici in acum magneticam“ v Kodani roku 1820. Oersted svým pokusem položil základy ke zkoumání nového okruhu fyzikálních jevů, elektromagnetismu a elektrodynamiky. André Marie Ampère stanovil směr magnetického pole v okolí vodiče známé jako pravidlo pravé ruky, zformuloval svůj základní zákon elektrodynamiky o silovém působení elektrických proudů a formuloval teoretické základy elektrodynamiky ve své práci „Théorie des phénomènes électrodynamiques“ v roce 1830. Michael Faraday zjistil otáčivý účinek permanentního magnetu na proudovou smyčku a naopak, tj. základní principy elektromotorů a dynam. James Clerk Maxwell teoreticky a matematicky zobecnil experimentální poznatky o elektřině a magnetismu a zformuloval soustavu rovnic elektromagnetického pole. Maxwell svou teorii prezentoval v proslulém Traktátu o elektřině a magnetismu „Treatise on Electricity and Magnetism“ roku 1873.

1.1. Indukční ohřev

První průmyslová aplikace indukčního ohřevu (IH) byla v roce 1887 realizována Sebastianem Z. de Ferrantinem, který navrhl IH pro tavení kovů a získal první patent na průmyslové aplikace IH. Později, v roce 1891, představil F. A. Kjellin první plně funkční indukční pec. První velký pokrok přišel, když Edwin F. Northrup realizoval první vysokofrekvenční indukční pec na Princetonu v roce 1916. Vliv druhé světové války zaznamenal velký rozmach jeho dalšího vývoje a využití, jelikož vznikla okamžitá potřeba plnit válečné požadavky.

Proces ohřevu se zakládá na indukování časově proměnného magnetického pole do vsázky. Součástí pro indukční ohřevy jsou cívka, kterou prochází střídavý proud, zdroj a vsázka. Geometrické uspořádání cívky by mělo odpovídat geometrickému tvaru vsázky; ta je převážně tvořena dutou měděnou trubkou, kvůli vnitřnímu protékání chladicí vody. Cívka může mít jeden nebo více závitů. Zde záleží na konkrétní aplikaci indukčního ohřevu; v některých aplikacích se dokonce můžeme setkat i s induktorem sestávajícím z poloviny závitu.



Obr. 1.1 Princip zařízení pro indukční ohřev

Umístíme-li souosu v cívice protékané harmonickým proudem válcovou elektricky vodivou vsázku, pak dopadající elektromagnetické vlnění vstupuje do vsázky povrchem a vyvolává indukované proudy, jejichž účinkem se vsázka zahřívá. Pronikající elektromagnetické vlnění se s rostoucí hloubkou pronikání utlumuje a jeho energie se mění na energii tepelnou. Hloubka vniku záření a se vyjádří vztahem

$$a = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}}, \quad (1.1)$$

ω je úhlová rychlost [s^{-1}]

μ je permeabilita [$H \cdot m^{-1}$]

γ je konduktivita [$S \cdot m^{-1}$]

Tato veličina představuje vzdálenost, na které se v daném materiálu amplituda veličin pole utlumí e -krát. Hloubka vniku záření závisí na kmitočtu a v Tab. 1.1 jsou uvedeny orientační hodnoty této veličiny pro ocel, hliník a měď v závislosti na frekvenci od 50 Hz do 1 MHz.

Tab. 1.1 Orientační hodnoty hloubky vniku u oceli, mědi a hliníku v závislosti na frekvenci

Frekvence [Hz]	Hloubka vniku [mm]					
	Cu		Al		Ocel	
	20 °C	1100 °C	20 °C	660 °C	20 °C	800 °C
50	9,5	31,8	12,2	31,5	8,0	71,2
10^3	2,1	7,1	2,7	7,0	1,8	15,9
10^4	0,67	2,25	0,86	2,2	0,56	5,0
10^6	0,067	0,22	0,086	0,22	0,056	0,5

Velikost a frekvenci časově proměnného pole určuje zdroj. Nízké frekvence (50 Hz – 100 kHz) jsou vhodné pro aplikace ohřívání rozměrově větších materiálů vyžadujících větší hloubku vniku, vyšší frekvence (100 kHz – 400 kHz) jsou vhodné pro aplikace vyžadující malou hloubku vniku, jako jsou menší předměty, nebo při tepelném zušlechťování kovů.

Využití indukčního ohřevu v průmyslu lze aplikovat na tyto tepelné procesy:

- Tavení kovů
- Ohřev
- Svařování
- Tepelné zušlechťování kovů
- Vytváření spojů lisovaných za tepla

1.2. Současný stav ve světě

Popis indukčního ohřevu představuje syntézu informací a zkušeností, které autoři nashromáždili ve své činnosti v akademickém výzkumu a spoluprací s průmyslem. Prvním krokem je prohloubení teoretických znalostí elektromagnetických a tepelných jevů, které určují proces ohřevu, kde vývoj probíhá od počátku dvacátého století. V té době byl návrh topných zařízení založen jen na analytických řešeních Maxwellových rovnic pro jednoduché geometrie a na experimentálních zkouškách. Přestože v technologickém vývoji nedošlo k žádné diskontinuitě, rozhodujícími kroky se stal průmyslový růst,

zejména automobilový, a po válce od šedesátých let zavádění počítačů na univerzitách a výzkumných institucích spolu s vývojem numerických metod pro výpočet elektromagnetických a teplotních polí. Za milník mohou být považovány díla Hegewaldt [28], Holmsdahl a Sundberg [29], Kolbe a Reiss [30], kteří v roce 1963, nezávisle na sobě, ale téměř současně, představili první numerická řešení pro 1D sdružený elektromagnetický a tepelný problém v nelineárních systémech a 2D numerické řešení elektromagnetického problému v lineárním systému. Byla otevřena cesta numerických výpočtů systémů ohřevů, ale trvalo více než 25 let, než se počítačové simulace staly široce používaným projektovým a výzkumným nástrojem. Analytické a experimentální metody nadále převažovaly v průmyslu v období 1960–1990, kdy vývoj a používání počítačových simulací byly omezeny především na akademické a výzkumné instituce pro teoretické studie. Od té doby byly k dispozici stále výkonnější výpočetní prostředky a sofistikovanější numerické postupy, takže analytické metody byly postupně opouštěny, zatímco používání numerických procedur se stalo standardem nejen ve výzkumu, ale i v průmyslovém designu [1], [2], [5], [6].

Dále je uveden přehled příspěvků, jakým směrem se v současné a v nedávné době vyvíjí výzkum ohledně aplikací, modelování a výpočtů indukčního ohřevu. Variabilita aplikací i výkonové náročnosti s sebou nese i potřeby variability na výpočetní a simulační metodiku, přičemž převažuje řešení pomocí metody konečných prvků (FEM) ve 2D a 3D uspořádáních. Požadavky na energetickou efektivitu jsou dnes vnímány s velkou mírou a jejich zastoupení při řešení problémů jsou opodstatněné.

Velká skupina publikací se zabývá modelováním a simulacemi indukčně ohříváných rotačně symetrických těles. Válcový symetrický ohřev může být simulován a popsán konečnými prvky pomocí 2D osově symetrického systému [13], [14], [16], [20], [21]. V případě použití okrajových podmínek či buzení, které porušují takovou symetrii, však není možné takových zjednodušení v modelu použít. S cílem vyhnout se výpočtově náročné 3D simulaci byla vyvinuta metoda kvazi-sdružené 3D simulace konečnými prvky. Tato metoda je založena na využití vektorového součinu tenzorových funkcí v kombinaci s konečnými prvky v řezu s harmonickými funkcemi. Metoda byla ověřena i se svou konvergencí analytickým modelem [14], [21].

Dále byla prováděna analýza vícevrstvého válcového indukčního ohřívacího systému spočívající v rozdělení výpočetní metody ohřevu do jednotlivých vrstev. Cílem publikace byl návrh obecného matematického modelu pro indukční ohřev a použití principu vícevrstvého výpočtu proudových sekcí pro výpočet složek hustoty toku, impedance a elektromagnetických sil. Přesnost metody byla ověřena jak měřením na indukčně ohříváném systému, tak porovnáním klasickými numerickými, popř. analytickými metodami [16].

Speciální aplikace jako je technologie tváření kovů se zabývá výpočetním modelem pro složité konfigurace s cílem snížit celkovou energetickou náročnost procesu [17], [22], [23]. Autoři v příspěvku [17] prezentují nový přístup výpočtu založených na 2D simulacích. Zaměřují se na model s různými uspořádáními cívky a kanálku používaný při technologii tváření. Model je vytvořen v programu 2Delta využívající 2D sdružení elektrického a tepelného pole indukčního ohřevu válcových těles a umožňující simulovat i složitější konfigurace, např. cívky s nerovnoměrným teplotním profilem apod. Složitě geometrie hliníkových profilů při tvorbě odlitků, vyžadující vysoce efektivní technologii tavení kovů řeší autoři [22], [23] rotací polotovaru v DC magnetickém poli. Je zkoumán vliv rotační rychlosti na rozložení teploty v průřezu polotovaru i použití DC supravodivých cívek pro tavení kovů. Teplota hliníku přesáhla 500 °C během 2 minut rotace trubky při otáčkách 800 min⁻¹ a při otáčkách 1200 min⁻¹ došlo k tavení hliníku během 90 s.

Alternativní způsob indukčního ohřevu nemagnetických válcových předlitků známý jako rotační indukční ohřev, kde se válec otáčí ve statickém magnetickém poli generovaném permanentními magnety, je popsán v [24], [25], [26]. Magnety jsou upevněny na dlouhých ramenech z feromagnetické oceli a vzdálenost mezi polotovary a rameny se může měnit v axiálním směru. Matematický model procesu sestává ze dvou parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu popisujících rozložení magnetického a teplotního pole. Jejich řešení je prováděno numericky v kvazi sdružené formulaci, respektující všechny důležité nelinearity. Výpočty jsou prováděny kódem Agros2D, založeným na plně adaptivní metodě konečných prvků vyššího řádu přesnosti. Tato technologie mimo jiné umožňuje dosáhnout požadovaného teplotního profilu vyhřívaného polotovaru podél jeho délky.

Shrnutí hlavních milníků vývoje technologie indukčního ohřevu a analýzu současných systémů v průmyslových, domácích a lékařských aplikacích je popsáno v [27]. Z hlediska konstrukce existují tři hlavní technologie, které je třeba řešit při navrhování systému indukčního ohřevu; jsou jimi výkonový měnič, modulační a řídicí architektura a návrh induktoru. V posledních letech byl proveden rozsáhlý výzkum, který vedl ke zlepšení systémů indukčního ohřevu, což umožnilo rozšíření používání systémů indukčních ohřevů na mnoho průmyslových, domácích a lékařských aplikací.

Rezonanční vysokofrekvenční střídače pro indukční ohřev se řeší v [15]. Autoři se zde zaměřují hlavně na použití speciálního typu vysokofrekvenčního střídače využívajícího IGBT tranzistory a na analýzu jeho energetických ztrát a účinnosti. Z pohledu indukčního ohřevu je v článku diskutována cívka, která ohřívá váleček tiskařského a kopírovacího zařízení přes vysokofrekvenční střídavý zdroj.

Studii inverterového můstku pro dvě frekvence indukčního ohřevu povrchového kalení popisují autoři v [18], [19]. Spínacími prvky měniče jsou v tomto případě Si a SiC MOSFET tranzistory. Povrchové kalení se využívá tam kde je nutno zvýšit odolnost materiálu a dochází k vytvrzení povrchové vrstvy bez ovlivnění vnitřní části obrobku.

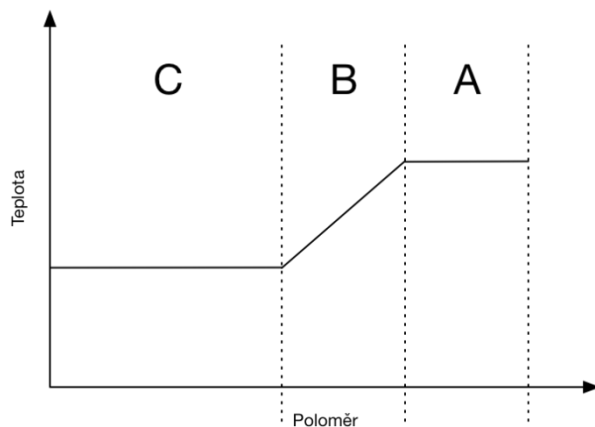
Inverzní problémy zejména identifikují parametry materiálu [32], [33], [34], tvary geometrie [35] a okrajové podmínky [36]. Identifikace materiálových elektromagnetických parametrů, která by vyhodnotila magnetickou permeabilitu jako funkci magnetického pole a teploty řešili autoři v [32]. Identifikace permanentních magnetů v elektrotechnických zařízeních byla řešena v [33]. Metodu pro odhad teplotně závislých tepelných vlastností pomocí řešení přechodných inverzních problémů ve vedení tepla pro odhad tepelné kapacity, tepelné vodivosti a tepelné difuzivity jsou prezentovány v [34]. Autoři publikace [35] zkoumají inverzní problém při určování optimální geometrie tvaru výplně mezi dvěma vodivými tělesy ve 2D s více oblastmi na základě požadovaného poměru tepelné vodivosti a zaplnění. Inverzní neiterační metodu založenou na metodě hraničních prvků (BEM) navrhuje autoři publikace [36] k určení odhadu okrajových podmínek vnitřní stěny pece.

Inverzních problémů pro optimalizaci protékajících proudů a výkonů, popř. optimalizace rezonanční frekvence z daného průběhu teploty jsou řídké. Jedni z prvních jsou autoři v [37], kteří prezentují přístup spočívající v určení optimálního induktivního proudu z dané požadované distribuce teploty. Poté autoři v [38] řeší inverzní problém vedení tepla pro odhad konstantní hodnoty výkonu zdroje během indukčního ohřevu paramagnetického materiálu. Frekvenční přizpůsobení na základě teplotního profilu řeší autoři v [39], aby byl systém udržován v rezonančním provozu i při vysokých teplotách a tím ve vysoké účinnosti. Autoři prezentují dosažené výsledky simulace vyvinutého modelu s ohledem na sledování rezonančního kmitočtu pomocí PLL v prostředí MATLAB/SIMULINK.

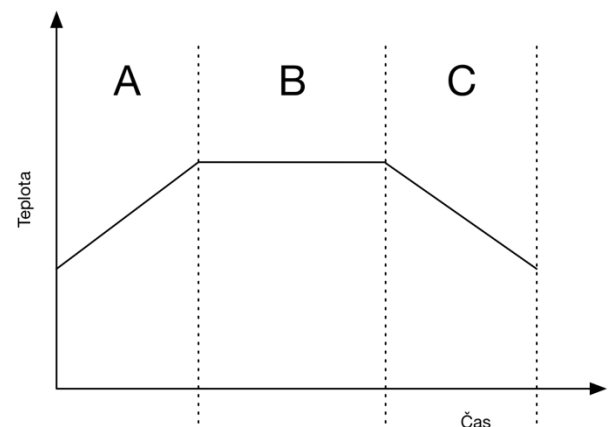
1.3. Cíle práce

Výše bylo shrnuto, že vývoj v oblasti indukčního ohřevu ušel za posledních 130 let velký kus kupředu a za posledních 50 let se zdokonalily numerické metody natolik, že jsme dnes schopni řešit téměř jakýkoliv přímý problém při znalosti potřebných parametrů a okrajových podmínek. Prakticky jsme jen omezeni výpočtovou náročností. Optimalizační problémy a s nimi nutnost řešení inverzních problémů však stále ještě nejsou zcela zvládnuté. Objevují se ovšem již první metody popsané v kapitole 1.2., jež se týkají odhadu okrajové teploty, nastavení výkonu pro danou distribuční teplotu na povrchu nebo nastavení frekvence k dosažení maximální účinnosti při tepelné změně parametrů. Všechny tyto metody mají jedno společné, zaměřily se jen na jeden aspekt celého komplexního problému, jakým je indukční ohřev a odhady mají tu nevýhodu, že vnášejí do systému výpočtu chybu samotným měřením, nebo neznalostí okrajových podmínek.

Tato práce řeší inverzní problém požadavku technologického postupu, kdy je zadán profil $T(r, t_{max})$ na konci procesu. Například v případě žíhání válcových ingotů je hlavním požadavkem rychlé dosažení konstantní teploty v celém jejich objemu. Pro kalení musí být splněny tři typické technologické požadavky, viz Obr. 1.2. Dosažení potřebné konstantní teploty v povrchové vrstvě, která má být kalena, do předepsané hloubky penetrace (oblast A), pak rychlejší pokles teploty (oblast B) a mírně klesající teplota k ose symetrie (oblast C). Druhým technologickým předpokladem je doba celého procesu, jež naznačuje Obr. 1.3, který je pro žíhání a kalení odlišný. Pro žíhání a kalení lze tento předpoklad zobecnit třemi intervaly. Jsou jimi doba dosažení cílové teploty (oblast A), doba setrvání na cílové teplotě (oblast B) a doba chlazení z cílové teploty (oblast C). Práce je zaměřena na indukční ohřev, z toho důvodu se chlazením nezabývá, ač je v technologickém procesu zásadní.



Obr. 1.2 Technologický předpoklad teplotního profilu na poloměru válce



Obr. 1.3 Technologický předpoklad vývoje teploty na čase

K žádanému profilu se přibližují pomocí modelu. Obecně zde lze měnit okrajové podmínky a frekvenci. V této práci chci ukázat, jak se zadanému teplotnímu profilu na konci procesu přiblížit pomocí optimalizačních metod, a to ve dvou základních případech: teplotní pole na konci i -tého intervalu s danými parametry je odhadnuto pomocí termografického měření (a následně i materiálové vlastnosti), a v případě, že měření dostupné není, případně je dostupné jen nepřímo, měřením napětí a proudu na induktoru.

Principem je, že uvažujeme-li n časových intervalů s konkrétní frekvencí a proudem, v i -tém kroku je třeba vyřešit optimalizační úlohu (účelová funkce postihuje shodu žádaného a výsledného teplotního pole po n krocích) s $2 \cdot (n - i)$ proměnnými, tedy s $n - i$ hodnotami frekvence a $n - i$ hodnotami proudu.

Vyčíslení účelové funkce vyžaduje řešení elektromagnetického a teplotního pole, představuje tedy časově nejnáročnější část algoritmu. Ne každé teplotní pole je ovšem reálně dosažitelné a použití vyvinutých algoritmů bude demonstrováno jen na reálně požadovaných průbězích odpovídajících typickým technologickým operacím, jako je kalení, žíhání, řízené ochlazování a podobně.

Cíle práce lze rozdělit do následujících bodů:

- Shrnutí vlastností sdružených úloh elektromagnetického pole, tepelného pole a pole proudění na aplikace indukčního ohřevu
- Vytvoření matematického modelu sdružením polí pro přímý problém
- Optimalizace inverzní úlohy matematického modelu

Porovnání různých optimalizačních algoritmů bude aplikováno na definované křivky průběhu teplot na poloměru válce, a to na tyto případy:

- Použitím výsledků z přímého problému k ověření platnosti algoritmu
- Použitím na ostré požadované křivky potřebné pro rychlé děje jako je kalení
- Použitím na požadované křivce, která není příliš ostrá

Vstupní počáteční podmínka v i -tém kroku bude snímána termograficky. Výsledky budou ověřeny:

- Termograficky porovnáním s požadovanou křivkou
- Pomocí 2D FEM modelu

Kapitola 2 Teorie pole

Z fyzikálního pohledu je indukční ohřev většinou charakterizován vzájemnou interakcí elektromagnetického pole, teplotního pole a pole proudění. Ztráty výkonu v elektricky vodivých částech příslušného indukčního systému vyvolávají jejich oteplení, jež je dále ovlivňováno přirozeným ochlazením vnějšího media, zpravidla okolním vzduchem. V dalším textu budou prezentovány modely těchto polí a posouzeno jejich vzájemné ovlivňování.

2.1. Elektromagnetické pole

Tato kapitola obsahuje fenomenologický popis elektrických a magnetických polí vyjádřených Maxwellovými rovnicemi. Ta budeme považovat za obecně libovolně proměnné v prostoru i čase, tj. za nestacionární. Dále v této kapitole budeme pojednávat o makroskopickém elektromagnetickém poli, které můžeme přímo pozorovat. Základy teorie elektromagnetického pole v roce 1865 položil James Clerk Maxwell. Tato teorie vychází ze spojitého modelu, vyjádřeného soustavou rovnic pro čtyři vektorové veličiny:

- intenzita elektrického pole \mathbf{E} ,
- indukce elektrického pole \mathbf{D} ,
- intenzita magnetického pole \mathbf{H} ,
- indukce magnetického pole \mathbf{B} .

Tyto vektorové veličiny jsou obecně funkcí polohy a času, proto je vyjadřujeme ve tvaru $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, kde \mathbf{r} je polohový vektor a t je čas. Předpokládá se, že uvedené vektory jsou spojitě a spojitě diferencovatelné v celé uvažované oblasti až na určité výjimky. Těmi mohou být rozhraní dvou a více prostředí, ostré hrany či vrcholy, kde výše zmíněné podmínky mohou být neplatné.

2.1.1. Maxwellovy rovnice

Vzhledem k zaměření práce stačí uvést Maxwellovy rovnice pouze v diferenciálním tvaru, jenž je pro popis studovaných dějů vhodnější.

1. Maxwellova rovnice (Ampérův zákon)

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt}. \quad (2.1)$$

Cirkulace vektoru intenzity magnetického pole po libovolné uzavřené křivce l je rovna celkovému proudu procházejícího plochou ohraničenou touto křivkou. Levá strana (3.1) se též nazývá jako oběhové magnetické napětí v orientované smyčce l . Pravá strana (3.1) se skládá ze součtu vodivostního proudu a posuvného proudu, které jsou spřaženy s orientovanou smyčkou l .

2. Maxwellova rovnice (Faradayův indukční zákon)

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.2)$$

Cirkulace vektoru intenzity elektrického pole po libovolné uzavřené smyčce l se rovná záporně vzaté časové změně magnetického toku, který touto smyčkou protéká.

3. Maxwellova rovnice (Gaussova věta)

$$\oiint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = Q. \quad (2.3)$$

Dielektrický indukční tok uzavřenou plochou odpovídá celkovému volnému náboji v objemu touto plochou ohraničeném.

4. Maxwellova rovnice (zákon kontinuity magnetického indukčního toku)

$$\oiint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0. \quad (2.4)$$

Celkový magnetický indukční tok uzavřenou plochou je roven nule. Magnetické pole je nezdířlové, což znamená, že magnetické indukční čáry jsou uzavřené.

V úvodu této kapitoly bylo řečeno, že Maxwellovy rovnice se vyjadřují nejen v integrálním tvaru, ale také ve tvaru diferenciálním. Diferenciální tvar je z matematicko-fyzikálního hlediska vhodnější. Je proto nutné zde uvést základní poznatky z vektorové analýzy. U diferenciálního tvaru se pro 1. a 2. rovnici aplikuje Stokesova věta a pro 3. a 4. rovnici věta Gaussova-Ostrogradského. Stokesova věta „převádí“ křivkový integrál vektoru přes uzavřenou křivku na plošný integrál z rotace daného vektoru

$$\oint_l \mathbf{f} \, d\mathbf{l} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \, d\mathbf{S}, \quad (2.5)$$

kde \mathbf{f} je obecná vektorová veličina například v kartézských souřadnicích.

Gauss-Ostrogradského věta „převádí“ orientovaný plošný integrál vektoru na objemový integrál z divergence daného vektoru.

$$\oiint_S \mathbf{f} \, d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dV. \quad (2.6)$$

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru se přepisují následovně

1. Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Rotace vektoru intenzity magnetického pole v daném bodě se rovná součtu lokálních hustot vodivostního proudu \mathbf{J} a posuvného proudu.

2. Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Tato rovnice nám říká, že prostorovou změnou vektoru elektrické intenzity dochází k časové změně vektoru \mathbf{B} (tedy k časové změně magnetického pole).

3. Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q_0 . \quad (2.9)$$

kde q_0 [$\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$] je objemová hustota volného elektrického náboje. Ze vztahu (2.9) vyplývá, že elektrické pole je zřídlové.

4. Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 . \quad (2.10)$$

Z této rovnice vyplývá, že magnetické pole je nezřídlové. $\operatorname{div} \mathbf{B}$ je rovná nule, což znamená, že neexistuje magnetický náboj.

Mimo těchto základních čtyř rovnic je velice důležitým pojmem i takzvaná rovnice kontinuity vyjadřující zákon zachování náboje, to znamená, že náboj nikde nevzniká ani nezaniká. Aplikací vektorového operátoru divergence na 1. Maxwellovu rovnici lze získat takzvanou rovnici kontinuity pro vodivý proud.

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad (2.11)$$

a tedy

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial q_0}{\partial t} . \quad (2.12)$$

2.1.2. Materiálové vztahy

V předchozí podkapitole byly popsány vektorové funkce \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{E} a \mathbf{J} . V látkovém prostředí existují materiálové vztahy, které lze v určité aproximaci vyjádřit funkčními závislostmi $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{B})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$. Pro mnoho látek lze předpokládat platnost lineárních závislostí

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} . \quad (2.13)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} . \quad (2.14)$$

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} . \quad (2.15)$$

kde μ_0 [$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$] je permeabilita vakua s hodnotou $4\pi \cdot 10^{-7}$,

μ_r [–] je relativní permeabilita,

ε_0 [$\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$] je permitivita vakua s hodnotou $\frac{10^{-9}}{36\pi}$,

ε_r [–] je relativní permitivita,

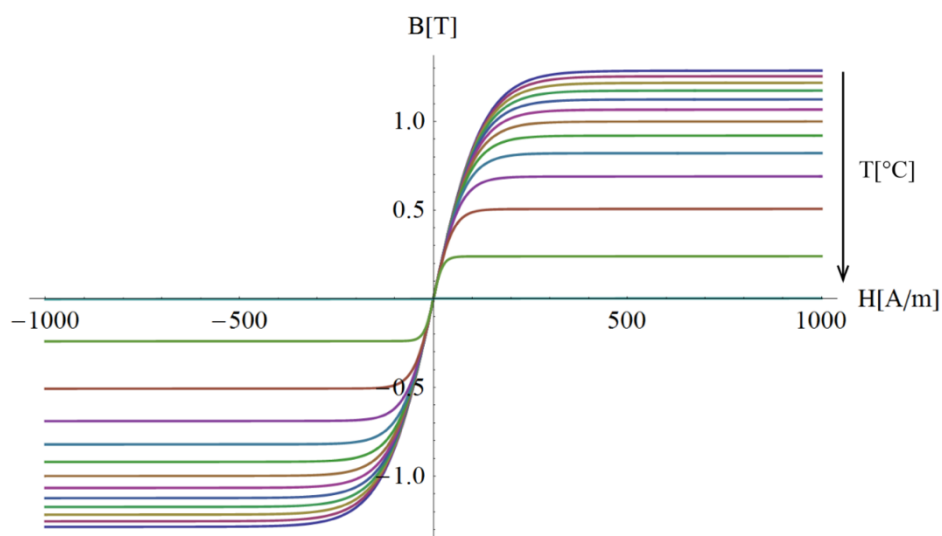
γ [$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$] je elektrická vodivost.

Maxwellova teorie popisuje spojení nejen jevů elektrických a magnetických, ale i optických (světlo je jen část širokého spektra elektromagnetických vln). Důkazem této skutečnosti je konstanta c daná vztahem $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ představující rychlost světla ve vakuu. Permitivita vakua a permeabilita vakua jsou konstanty zavedené uměle, jejich součin však má fyzikální smysl – udává převrácenou hodnotu čtverce rychlosti světla.

Podle vlastností materiálu magnetika rozlišujeme látky na diamagnetické, paramagnetické a feromagnetické. Látky diamagnetické a paramagnetické ovlivňují magnetickou indukci B jen nepatrně, jsou magneticky prakticky lineární. Jejich závislost $B = B(H)$ je přímka, tedy μ_r je konstanta. Feromagnetické materiály představují svými vlastnostmi jistou anomálii. Vnější magnetickým polem o poměrně slabé intenzitě H dokážeme dosáhnout vysokou magnetickou indukci B . Magnetické vlastnosti feromagnetik se určují převážně měřením. Platí o nich tato tvrzení

- Feromagnetika jsou magneticky nelineární.
- Feromagnetika si zachovávají vysokou hodnotu magnetické indukce i při odstranění vnějšího magnetického pole (remanence).
- Magnetická indukce B nezávisí jen na H , ale též na předchozím stavu feromagnetika (magnetická hystereze).
- Se zvyšující se teplotou feromagnetika postupně ztrácí své charakteristické vlastnosti a při Curieově teplotě přechází do stavu paramagnetického. Klesne-li teplota pod Curieovu teplotu, obnoví se opět jejich feromagnetické vlastnosti.
- Magnetizační křivka je závislost $B = B(H)$. Působí-li na feromagnetikum magnetické pole, jehož intenzita je zvyšována od $H = 0$, pohybuje se pracovní bod po magnetizační křivce.
- Hysterezní smyčka.

Při cyklickém přemagnetování se pracovní bod pohybuje po hysterezní smyčce. Provádíme-li přemagnetování pro různé hodnoty vrcholových bodů, dostaneme soustavu hysterezních smyček. V soustavě hysterezních smyček leží jejich vrcholy na tzv. komutační křivce, která je téměř totožná s magnetizační křivkou. Na těchto znalostech feromagnetika jsem schopen postavit řešení elektromagnetického pole. Musím vzít v úvahu to, co je u feromagnetik zásadní a pro zjednodušení zanedbat jen ty části, které by řešení příliš zkomplikovaly, a přesto by nevypovídaly to zásadní o jejich vlastnostech. Hystereze je výkonově zanedbatelná, proto využívám matematického modelu magnetizační křivky, která je téměř totožná s komutační křivkou. Druhým faktorem je zahrnutí do této matematicky vytvořené křivky změny způsobené změnou teploty až po Curieovu teplotu. Výsledný matematický popis $B = B(H, T)$ je poměrně složitý na předpis, a proto zde uvádím jen soustavu křivek vynesných v grafu.



Obr. 2.1 Magnetizační křivky v závislosti na teplotě T

2.1.3. Vektorový potenciál

Uvažujme vztahy získané z (2.7) až (2.10)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (2.16)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.18)$$

Vzhledem k obecné platnosti rovnice (2.18) lze zavést novou vektorovou funkci \mathbf{A} nazvanou magnetický vektorový potenciál, která je definována vztahem

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.19)$$

Tato funkce je opět spojitou a diferencovatelnou funkcí polohy a její rozložení jednoznačně definuje rozložení vektoru magnetické indukce. Opačné tvrzení je však nepravdivé. Vektorový potenciál je funkcí nejednoznačnou, může se lišit o gradient libovolné skalární funkce, a proto jej zužujeme další podmínkou, jež se nazývá Coulombova

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (2.20)$$

Nyní je již jeho velikost dána pevně až na konstantu, kterou lze určit normováním. Rovnici (2.16) lze nyní s ohledem na (2.14) přepsat do tvaru

$$\operatorname{rot} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}. \quad (2.21)$$

Dosazením (2.19) do (2.17) obdržíme

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \quad (2.22)$$

a změnou pořadí operátorů na pravé straně vychází

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (2.23)$$

Tuto identitu lze přepsat do tvaru

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad (2.24)$$

kde φ je jakákoli skalární funkce souřadnic. Zpravidla je však přijímána jako skalární potenciál elektrického pole. Vynásobením (2.24) elektrickou vodivostí γ získáme

$$\gamma \mathbf{E} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} \varphi. \quad (2.25)$$

Podle (2.15) je $\gamma \mathbf{E} = \mathbf{J}$ a dosazením (2.25) do (2.21) obdržíme

$$\operatorname{rot} (\mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}) = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} \varphi, \quad (2.26)$$

kde $-\gamma \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{J}_{\text{ext}}$ je proudová hustota od externích zdrojů. Po dosazení do (2.26) a při přijetí předpokladu, že v dané oblasti je permeabilita prostředí po částech konstantní, můžeme psát

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) + \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mu \mathbf{J}_{\text{ext}}. \quad (2.27)$$

Po použití operátorové identity

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}, \quad (2.28)$$

kde podle (2.20) $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ a dosazením do (2.27) a úpravou znamének získáme

$$\Delta \mathbf{A} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_{\text{ext}}. \quad (2.29)$$

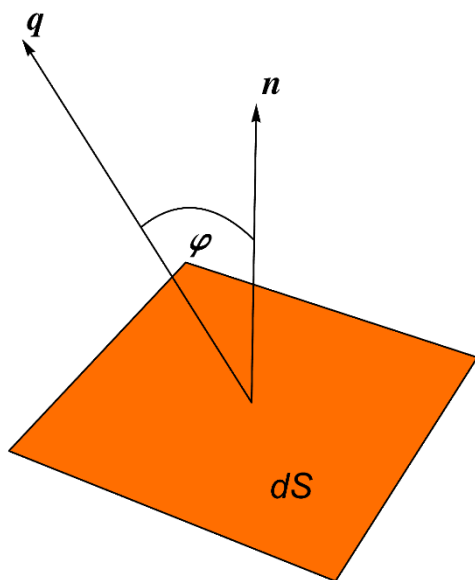
Je-li pole harmonické můžeme tuto rovnici přepsat ve fázorové reprezentaci do tvaru

$$\Delta \underline{\mathbf{A}} - j\omega\gamma\mu \underline{\mathbf{A}} = -\mu \underline{\mathbf{J}}_{\text{ext}}. \quad (2.30)$$

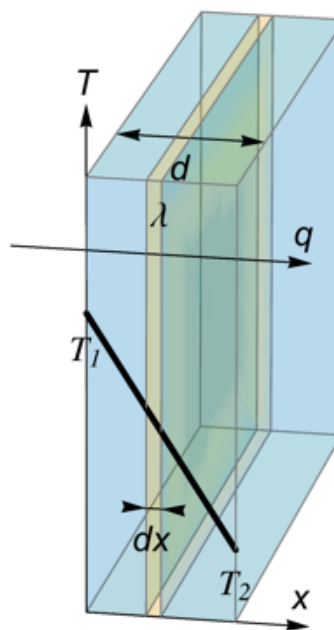
Vektorový potenciál zavedený rovnicí (2.19) je díky své spojitosti a diferencovatelnosti výhodný, ale jedná se o další vektorovou funkci, která je obecně dána třemi složkami (ve 3D). Rovnice obsahující vektorový potenciál se tak rovněž rozpadá na tři rovnice složkové, s výjimkou dvojrozměrných polí, kde vektorový potenciál má jedinou nenulovou složku kolmou k takovému poli.

2.2. Teplotní pole

Teplota T je v systému funkcí polohy a času, $T(\mathbf{r}, t)$, kde \mathbf{r} je polohový vektor a t je čas, přičemž i některé ze souřadnic mohou být funkcí závislé na čase, pokud se systém nějakým způsobem pohybuje.



Obr. 2.2 Tepelný tok jednotkovou plochou



Obr. 2.3 Odvození Fourierova zákona

Všechny body tělesa, které mají v určitém okamžiku stejnou teplotu T tvoří izotermickou plochu. Vzniknou-li v tělese teplotní rozdíly, pak se teplo transportuje podle druhého termodynamického zákona ve smyslu poklesu teploty v kolmém směru na izotermickou plochu – ve smyslu záporného gradientu teploty

$$-\text{grad } T(\mathbf{r}, t) = -\frac{dT(\mathbf{r}, t)}{dn}, \quad (2.31)$$

kde \mathbf{n} značí normálu k izotermické ploše.

Základní veličinou charakterizující teplotní pole je tepelný tok $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$, který popisuje, kolik tepla procházející jednotkovou plochou projde během jedné sekundy. Podle Fourierova zákona je tento tok roven

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \cdot \text{grad } T(\mathbf{r}, t), \quad (2.32)$$

kde λ je tepelná vodivost prostředí v daném bodě o polohovém vektoru \mathbf{r} . Tento parametr určuje, jak je schopné dané prostředí vést teplo, a je obecně závislý na teplotě.

Další velmi důležitou veličinou tepelných výpočtů je měrná tepelná kapacita c , jež nám poskytuje informaci, kolik tepla musí být dodáno do jednoho kilogramu látky, aby jeho teplota vzrostla o 1K. Rozeznáváme měrnou tepelnou kapacitu při stálém tlaku c_p a při stálém objemu c_v .

2.2.1. Odvození rovnice popisující teplotní pole

Pro odvození rovnice popisující teplotní pole je třeba znalost dvou základních teorémů: Leibnizův teorém a rovnici kontinuity. Leibnizovo pravidlo nám určuje, jak se vypočte časová derivace integrálu skalární funkce f přes objem V , který se může měnit v čase. Podle Leibnizova teorému platí, že

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_S (f\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.33)$$

kde \mathbf{v} je okamžitá rychlost pohybu a S je plocha, v níž je uzavřen objem V .

Uvažujeme-li že hmotnost m pohybující se látky je v čase neměnná, má objem V , který však může být v čase proměnný. Pak platí

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad (2.34)$$

dosazením (2.34) do (2.33), kdy $f = \rho$, obdržíme

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iint_S (\rho\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.35)$$

Na druhý člen rovnice (2.35) můžeme aplikovat Gaussovu větu

$$\iint_S (\rho\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{V(t)} \text{div}(\rho\mathbf{v}) dV, \quad (2.36)$$

a dosazením do (2.35) získáme

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (2.37)$$

Jelikož tento výraz platí pro libovolný objem, platí též

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.38)$$

což je rovnice kontinuity.

Nyní můžeme podle (2.33) vypočítat integrál $\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho f dV$, kde f je libovolná skalární funkce. S využitím (2.37) obdržíme

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho f dV = \int_{V(t)} \left(f \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial f}{\partial t} + f \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f \right) dV. \quad (2.39)$$

Po přeskupení členů bude platit

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho f dV = \int_{V(t)} \left(f \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f \right) \right) dV. \quad (2.40)$$

První závorka v integrálu na pravé straně obsahuje rovnici kontinuity a je rovna nule. Druhá závorka představuje substanciální derivaci

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f = \frac{df}{dt}, \quad (2.41)$$

dosazením do (2.40) získáme

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho f dV = \int_{V(t)} \rho \frac{df}{dt} dV. \quad (2.42)$$

Nyní můžeme odvodit rovnici přenosu tepla z toho, co jsme doposud odvodili. Z bilance lze vyvodit, že tepelný výkon v daném objemu je dán součtem tepelného výkonu vyrobeného jinou formou energie a tepelného výkonu, který vstupuje do tohoto objemu přes jeho hranici. Nyní již lze tyto výkony kvantifikovat.

Teplo dodané látce při konstantním tlaku získáme ze vztahu

$$W = \int_{V(t)} \rho \left(\int_{T_0}^T c_p dT \right) dV \quad (2.43)$$

a příslušný tepelný výkon P_T je tedy roven dW/dt , takže

$$P_T = \frac{d}{dt} \left(\int_{V(t)} \rho \left(\int_{T_0}^T c_p dT \right) dV \right). \quad (2.44)$$

Použitím vztahu (2.42), kde $f = \int_{T_0}^T c_p dT$, dostaneme

$$P_T = \int_{V(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(\int_{T_0}^T c_p dT \right) dV. \quad (2.45)$$

dále musíme určit $\frac{d}{dt} \left(\int_{T_0}^T c_p dT \right)$. Použitím pravidla o derivování složené funkce získáme

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{T_0}^T c_p dT \right) = \frac{d}{dT} \left(\int_{T_0}^T c_p dT \right) \frac{dT}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T \right). \quad (2.46)$$

Výsledkem je vztah

$$P_T = \int_{V(t)} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } T \right) dV. \quad (2.47)$$

Tepelný výkon přivedený do objemu je určen z tepelného toku, který prochází jeho povrchem S do objemu V . Tepelný tok \mathbf{q} je dán Fourierovým zákonem (2.32) a celkový výkon do objemu je určen vztahem

$$Q = - \oiint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{V(t)} \text{div } \mathbf{q} dV = \int_{V(t)} \text{div}(\lambda \text{ grad } T) dV. \quad (2.48)$$

Tepelný výkon dodaný přeměnou z jiné formy energie W může být určen jako integrál objemové hustoty w přes celý vyšetřovaný objem

$$W = \int_{V(t)} w dV. \quad (2.49)$$

Ze vztahů (2.47),(2.48) a (2.49) dostaneme

$$\int_{V(t)} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } T \right) dV = \int_{V(t)} \text{div}(\lambda \text{ grad } T) dV + \int_{V(t)} w dV, \quad (2.50)$$

a jelikož musí tento vztah platit pro libovolný objem $V(t)$, musí též platit rovnost příslušných integrandů. Přeskupením členů dostáváme

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } T \right) = \text{div}(\lambda \text{ grad } T) + w, \quad (2.51)$$

což je rovnice, která popisuje vedení tepla v klasickém tvaru včetně uvažování vlivu rychlosti prostředí.

2.3. Sdílení tepla

Prvním způsobem sdílení tepla je sdílení vedením neboli kondukcí. Vyznačuje se tím, že je vázáno na látku, takže se vedení tepla může realizovat jen mezi zcela bezprostředně sousedícími částicemi hmoty.

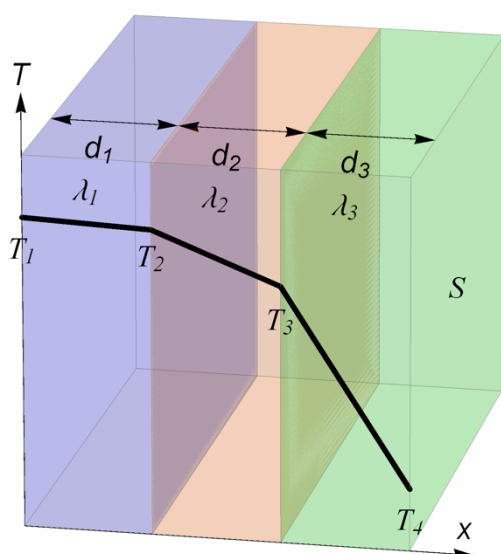
Druhým způsobem sdílení tepla je prouděním neboli konvekcí. Uskutečňuje se tak, že částičky hmoty mění místo v prostoru a přenášejí svoji tepelnou energii. Tento děj se uskutečňuje v proudících tekutinách a je doprovázen též vedením tepla od jedné částičky hmoty k jiné, protože v proudící látce neexistuje teplotní rovnováha.

Třetí způsob je sdílení tepla sáláním. Sálání je v podstatě elektromagnetické vlnění v určitém rozsahu vlnových délek. Sálání mezi dvěma tělesy sestává z řady procesů, jako je vyzařování, pohlcování a propouštění zářivé energie. Část tepelné energie tělesa se mění v zářivou energii, která prochází prostorem a při dopadu na druhé těleso se zcela nebo částečně mění v teplo. Sálání se jako jediný z druhů sdílení tepla uskutečňuje i tehdy, kdy prostor mezi dvěma tělesy není vyplněné žádnou látkou.

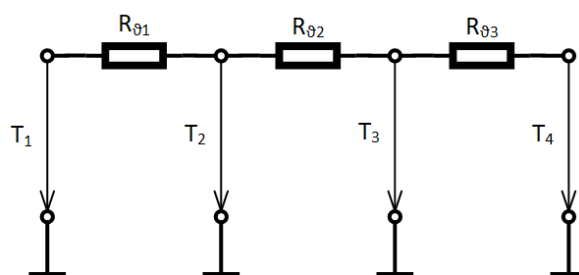
2.3.1. Sdílení tepla vedením

Při sdílení tepla vedením je třeba znát teploty na rozličných místech tělesa (teplotní pole) a tepelné toky, které vznikají vlivem teplotních spádů mezi různými místy tělesa. Teplotním polem se rozumí prostor, v jehož každém místě je definována zcela určitá termodynamická teplota, za stacionárních podmínek konstantní, za nestacionárních podmínek časově proměnná. Teplotní pole je polem skalárním.

Máme-li homogenní rovinnou desku o tloušťce d neohraničenou ve směru y a z , kde její povrchy jsou udržovány na konstantních teplotách T_1 a T_2 , poté protéká kolmo deskou tepelný tok q , ve směru klesající teploty (2.32). Homogenní a izotropní deskou proudí teplo jen kolmo k povrchovým plochám a změna teplotního spádu z teploty T_1 na T_2 je lineární.



Obr. 2.4 Složená rovinná stěna



Obr. 2.5 Schéma tepelného obvodu reprezentující složenou rovinnou stěnu

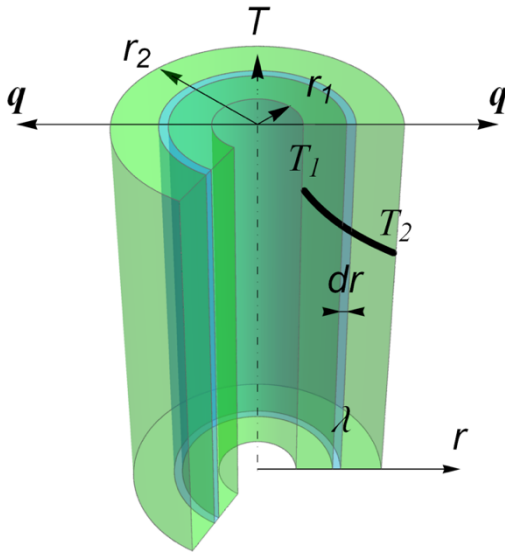
Zaměříme-li se na průtok tepla rovinnou stěnou složenou z několika různých vrstev, na Obr. 2.4 je zobrazen příklad tří vrstev o tepelných vodivostech $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, povrchových teplotách T_1 a T_4 , které jsou známé, zatímco teploty styčných ploch T_2 a T_3 jednotlivých vrstev známy nejsou, ale jsou společné pro stýkající se vrstvy – předpokládáme, že vrstvy těsně přiléhají jedna k druhé. Při stacionárním vedení tepla stěnou je tepelný tok q stálý pro všechny vrstvy a platí rovnost

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{d_1}{\lambda_1}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{d_2}{\lambda_2}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{d_3}{\lambda_3}}. \quad (2.52)$$

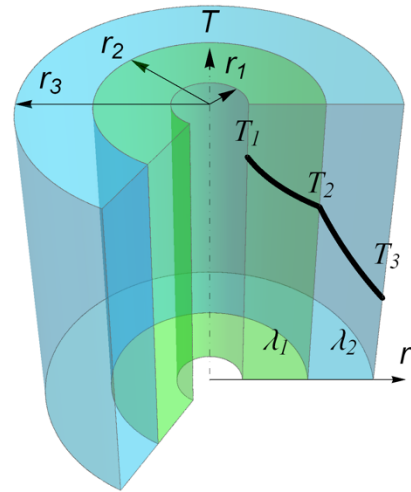
Teplotní spád se seskládá z lineárních spádů jednotlivých vrstev, protože pro každou vrstvu platí totéž, co pro jednoduchou homogenní desku. Tento teplotní spád je patrný i na Obr. 2.4.

Řešit tuto úlohu lze analyticky za pomoci znalosti řešení elektrických obvodu, ale v situaci, kde namísto proudu máme tepelný tok, napětí nahrazuje teplota a elektrický odpor je nahrazen odporem tepelným, jak naznačuje Obr. 2.5.

Uvažujme nekonečnou válcovou trubku s vnitřním poloměrem r_1 , vnějším poloměrem r_2 , a s konstantní tepelnou vodivostí λ . Povrchové teploty T_1 a T_2 jsou konstantní a platí $T_1 > T_2$. Jedná se o pole jednorozměrné, protože se teplota mění jen v radiálním směru.



Obr. 2.6 Jednoduchá válcová stěna



Obr. 2.7 Složená válcová stěna

Teplo se sdílí v radiálním směru a izotermické plochy jsou válcové plochy soustředěné s povrchovými plochami trubky. Ve vzdálenosti r od osy si vytkneme válcovou vrstvu o tloušťce dr . Podle rovnice (2.32), tepelný tok, který proteče touto vrstvou, bude mít velikost

$$q \cdot S = -\lambda \cdot \text{grad } T \cdot S = -\lambda \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{dT}{dr}. \quad (2.53)$$

Separací proměnných a integrací obdržíme

$$dT = -\frac{q}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \frac{dr}{r}, \quad (2.54)$$

$$T = -\frac{q}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln r + C. \quad (2.55)$$

Dosažením za $T = T_1$ a $r = r_1$ (resp. T_2 a r_2) obdržíme rovnice pro T_1 a T_2

$$T_1 = -\frac{q}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln r_1 + C \quad (2.56)$$

a

$$T_2 = -\frac{q}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln r_2 + C.$$

Odečtením rovnic (2.56) získáme

$$\Delta T = T_1 - T_2 = -\frac{q}{2\pi \cdot \lambda} \cdot (\ln r_1 - \ln r_2) = -\frac{q}{2\pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2.57)$$

Výsledný tepelný tok bude

$$q = \frac{2\pi \cdot \lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2) = \frac{2\pi \cdot \lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (T_1 - T_2). \quad (2.58)$$

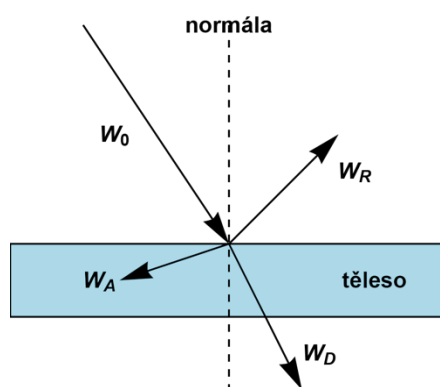
Uvažujme případ vedení tepla válcovou stěnou, která je podle Obr. 2.7 složena z několika různorodých vrstev. Styk jednotlivých vrstev je pokládán za dokonalý, takže jsou povrchové teploty stýkajících se vrstev stejné pro obě sousední vrstvy. Jsou známy teploty T_1 a T_3 na vnitřním a vnějším povrchu trubky, teplota styčné plochy T_2 není známá. Při stacionárním vedení tepla je tepelný tok protékající jednotlivými vrstvami stejný a konstantní. Podle rovnice (2.58) platí

$$q = \frac{2\pi \cdot \lambda_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2) = \frac{2\pi \cdot \lambda_2}{\ln \frac{r_3}{r_2}} (T_2 - T_3). \quad (2.59)$$

2.3.2. Sdílení tepla sáláním

„Každé teplé těleso v důsledku své konečné termodynamické teploty T svým povrchem jednoduše vyzařuje elektromagnetické vlnění a jednoduše toto vlnění vyzařované okolními tělesy v prostoru svým povrchem pohlcuje a mění v teplo. Tato vlnění známe jako paprsky rentgenové, ultrafialové, infračervené, viditelného světla a elektromagnetické vlny. Největší význam mají paprsky světelné a infračervené, které mají vlnovou délku od 0,4 do 40 μm a jsou pohlcovány tělesy, kde se jejich energie mění v energii tepelnou.“ [10]

„Sálání je přirozenou vlastností všech těles a každé těleso nepřetržitě vyzařuje energii, při dopadu na jiná tělesa se tato energie částečně pohlcuje, částečně se odráží a část prochází tělesem. Každé těleso tudíž nejen sálá, ale též nepřetržitě pohlcuje sálavou energii. Výsledkem těchto dvojitých přeměn energie je výměna tepla sáláním. Je-li W_0 množství tepla dopadající na těleso, W_A část tohoto tepla pohlcené tělesem, W_R část tělesem odražená a W_D část co projde tělesem (Obr. 2.8).“ [10]



Obr. 2.8 Schéma rozdělení dopadající sálavé energie

Dokonale černé těleso pohlcuje veškerou dopadající zářivou energii a jeho pohltivost a má hodnotu $a = 1$. Teoreticky představuje dokonale černé těleso plochu otvoru ve stěně, rozdělující neohraničený prostor na dva poloprostory. V důsledku neohraničenosti poloprostoru je veškerá zářivá energie prošlá otvorem pohlcena poloprostorem. Teoretický model dokonale černého tělesa představuje plocha otvoru do dutiny s konečným objemem. Skutečný model se blíží modelu teoretickému tím více, čím má

poměr plochy otvoru a plochy povrchu dutiny menší hodnotu a čím má dutina větší hodnotu povrchové pohltivosti a .

Planckův vyzařovací zákon vyjadřuje závislost spektrální intenzity záření dokonale černého tělesa $I_{\lambda b}$ ($W \cdot m^{-3}$) na vlnové délce λ (m) a termodynamické teplotě T (K).

$$I_{\lambda b} = K_1 \cdot \left[\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{K_2}{\lambda \cdot T}} - 1 \right) \right]^{-1}, \quad (2.60)$$

kde K_1 a K_2 jsou Planckovy konstanty.

Stefan-Boltzmannův zákon vyjadřuje velikost integrálního zářivého toku e_b dokonale černého tělesa

$$e_b = \int_0^{\infty} I_{\lambda b} d\lambda = \sigma \cdot T^4, \quad (2.61)$$

Z rovnice za použití Planckova vyzařovacího zákona vyjádříme vztah pro Stefan-Boltzmannovu konstantu σ jako

$$\sigma = \frac{\pi^4 \cdot K_1}{15 \cdot K_2^4} = 5,67 \cdot 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}. \quad (2.62)$$

Jelikož velšina skutečných tuhých těles září v souvislém emisním spektru v celém rozsahu vlnových délek stejně jako dokonale černé těleso, platí Stefan-Boltzmannův i pro šedé záření skutečných tuhých těles s tím, že spektrální intenzita záření skutečných těles I_{λ} má ve všech vlnových délkách nižší hodnotu. Poměrně snížení hustoty integrálního zářivého toku skutečného tělesa e vůči hodnotě e_b dokonale černého tělesa při stejné termodynamické teplotě T je emisivita skutečného tělesa ε , která se zjišťuje experimentálně ze vztahu

$$\varepsilon = \frac{e}{e_b} > 1 \quad (2.63)$$

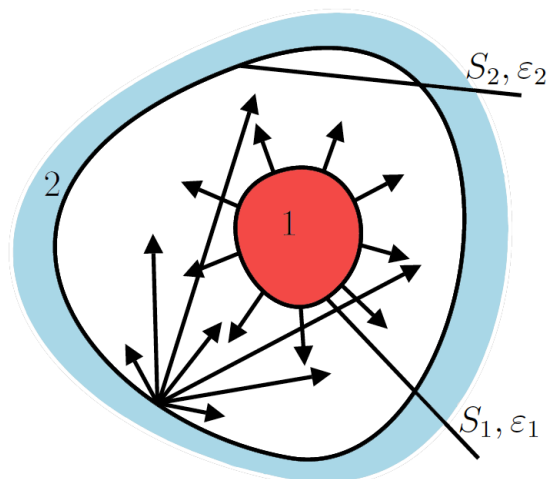
Sdílení tepla mezi dvěma tělesy v uzavřeném prostoru lze simulovat situací, jestliže povrch jednoho tělesa obklopuje povrch druhého tělesa. Tepelný výkon přenesený z tělesa 1 na těleso 2 (Obr. 2.9) je

$$W = \sigma \cdot S_1 \cdot \varepsilon \cdot (T_1^4 - T_2^4), \quad (2.64)$$

kde

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}, \quad (2.65)$$

kde ε_1 je emisivita vypuklého tělesa, ε_2 je emisivita vydutého tělesa, S_1 je sálavá plocha vypuklého tělesa, S_2 je sálavá plocha vydutého tělesa, ilustrace je na Obr. 2.9.



Obr. 2.9 Sálání v uzavřeném prostoru

2.3.3. Sdílení tepla konvekcí

V tekutinách se teplo šíří současně vedením a prouděním. Vedení tepla tekutinou představuje energetickou výměnu mikropohybu molekul tekutiny a realizuje se v klidové vrstvě tekutiny nebo v oblasti laminární podvrstvy proudící tekutiny. Mimo tuto oblast se teplo šíří v důsledku makropohybu molekul a jejich shluků, tj. vzájemným přemísťováním teplejších a chladnějších molekul. Oblast tekutiny v blízkosti výhřevného nebo ochlazovacího povrchu se řídí termokinetikou mezní vrstvy tekutiny, charakterizované konečnou hodnotou gradientu teploty. Bereme v úvahu, že molekuly tekutiny na teplosměnném povrchu mají nulovou rychlost a teplotu povrchu. Problematiku složitého termokinetického děje mezi tekutinou a teplosměnným povrchem zahrnul Isaac Newton do součinitele přestupu tepla α .

Proudění tekutin se řídí dvěma základními zákony: zákonem zachování hmotnosti a zákonem zachování energie. Zákon zachování hmotnosti vyjadřuje rovnice kontinuity (2.38).

„Pro jednorozměrné proudění kapaliny byla odvozena Bernoulliova rovnice v diferenciálním tvaru, která představuje nejjednodušší vyjádření zákona zachování energie při proudění tekutin“ [10]

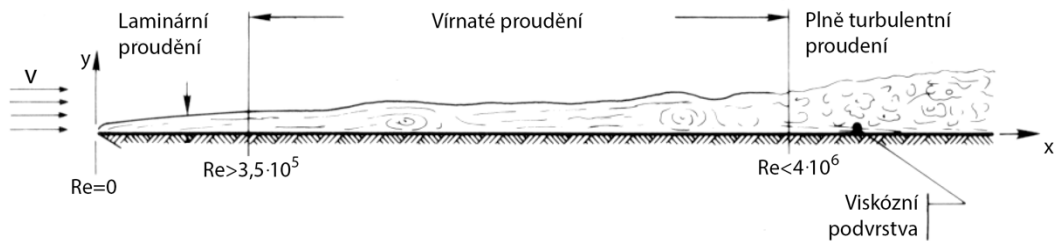
$$g dh + \frac{dp}{\rho} + \frac{dv^2}{2} = 0, \quad (2.66)$$

kde g je tíhové zrychlení, h je potenciální výška, p je tlak, ρ je hustota, a v je relativní rychlost tekutiny.

„Rozlišujeme dva případy vzniku pohybu, a to pohyb volný a pohyb nucený. Pohybem volným nazýváme proudění, které vzniká vlivem rozdílu hustot ohřátých a studených částic tekutiny. Vznik a intenzita volného pohybu závisí jen na tepelných podmínkách, rozdílu teplot a rozsahu prostoru. Nuceným prouděním nazýváme proudění, které vzniká působením vnějších činitelů, například čerpadlem nebo ventilátorem. Nucené proudění závisí na druhu a fyzikálních vlastnostech tekutiny, na teplotě, na rychlosti proudění, a na tvaru a rozměrech kanálu.“ [10]

„V obecném případě může volné proudění a nucené proudění nastat současně. Poměrný vliv volného proudění je tím vyšší, čím menší je rychlost nuceného proudění, přičemž při velkých rychlostech lze vliv nuceného proudění zanedbat.“ [10]

„Z hydrodynamiky jsou známy dva druhy proudění: laminární a turbulentní. Při laminárním proudění se částice kapaliny pohybují rovnoběžně se stěnou kanálu, zato u turbulentního proudění je pohyb chaotický (Obr. 2.10).“ [10]



Obr. 2.10 Tvar proudění kapalin při laminárním, vlnatém a turbulentním proudění [8]

„Laminární proudění se změní v turbulentní ihned, jakmile střední průtočná rychlost překoná kritickou hodnotu. Hodnota kritické hodnoty není konstanta, liší se pro různé kapaliny a pro různá geometrické uspořádání. U turbulentního proudění není pohyb celé kapaliny neuspořádaný. Kolem stěny se vytvoří vždy tenká vrstva kapaliny s pohybem laminárním. Tato mezní vrstva má tloušťku závislou na střední průtočné rychlosti a s vyššími hodnotami rychlostí se tato mezní vrstva ztenčuje.“ [10]

„Přechod tepla má velký vliv na druh proudění, jelikož stanovuje podmínky, za nichž se realizuje sdílení tepla. U laminárního proudění teplo přechází kolmo na směr proudění, v podstatě tedy vedením, a závisí na tepelné vodivosti kapaliny. U turbulentního proudění se omezuje tento způsob přecházení tepla jen na mezní vrstvu, uvnitř turbulentního jádra se transport tepla realizuje intenzivním promícháváním částic kapaliny.“ [10]

K popisu matematického modelu přestupu tepla konvekcí je třeba znalost pole proudění, které je ovšem svázané s přenosem tepla. Na tyto skutečnosti navazuje řešení sdílení tepla konvekcí za pomoci znalosti teorie podobnosti s možností takto svázaná pole numericky řešit.

2.4. Teorie podobnosti

„Numericky lze sdílení tepla konvekcí řešit pouze v jednoduchých případech, proto se řeší sdílení tepla mezi teplosměnným povrchem a tekutinou experimentálně na modelech nebo na skutečných teplosměnných zařízeních a výsledky jsou zobecněny pomocí teorie podobnosti. Tato teorie umožňuje seskupit pro dané případy rozhodující termokinetické, hydrodynamické a geometrické veličiny do bezrozměrných výrazů, které nazýváme kritéria podobnosti. Podobné děje jsou vyjádřeny matematickými rovnicemi stejného tvaru i obsahu a mají číselně stejná kritéria podobnosti.“ [10]

Odvození hydrodynamických kritérií podobnosti provedeme z Navier-Stokesovy rovnice

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + v_j \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \eta \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \rho a_i + F_i, \quad (2.67)$$

kde η je dynamická viskozita, a je zrychlení vnějších objemových sil a F jsou vnitřní objemové síly. Indexy i a j označují dílčí složky souřadnicového systému a rychlosti.

Aplikujeme-li na rovnici (2.67) kritérium kontinuity (2.38) $\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ a zároveň ve stejném kroku roznásobíme $a = g(1 + \beta \cdot \Delta T)$ a $\eta = \rho \nu$ získáme rovnici

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + v_j \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \rho \cdot g(1 + \beta \cdot \Delta T) + F_i, \quad (2.68)$$

kde ν je kinematická viskozita a β je teplotní součinitel objemové roztažnosti.

Členy na levé straně rovnice (2.68) vyjadřují setrvačnou sílu časovou a setrvačné síly prostorové, na pravé straně rovnice (2.68) vyjadřuje první člen tlakové síly, druhý člen třecí síly, třetí člen gravitační síly a poslední člen zahrnuje všechny vnitřní síly jako je například síla odstředivá nebo síla elektromagnetická. První dva členy pravé strany rovnice (2.68) lze nazvat souhrnným názvem síly plošné, poslední dva členy pravé strany jako síly objemové.

Z podobnosti setrvačných sil prostorových a časových plyne číslo Strouhalovo

$$S = \frac{v \cdot t}{D_{\text{char}}}, \quad (2.69)$$

kde D_{char} je charakteristický rozměr a t je čas za který byla dráha l uběhnuta. Toto číslo je kritériem podobnosti časových změn rychlostního pole tekutiny.

Z podobnosti setrvačných sil prostorových a tlakových plyne číslo Eulerovo.

$$Eu = \frac{p}{\rho v^2}. \quad (2.70)$$

Eulerovo číslo je kritériem podobnosti tlakových polí v proudící tekutině.

Z podobnosti setrvačných sil prostorových a tíhových plyne číslo Froudeho

$$Fr = \frac{gl}{v^2}. \quad (2.71)$$

Froudeho číslo je kritériem podobnosti gravitačního proudění izotermického.

Z podobnosti setrvačných sil prostorových a třecích plyne číslo Reynoldsovo

$$Re = \frac{vl}{\nu}. \quad (2.72)$$

Reynoldsovo číslo je kritériem podobnosti nuceného, izotermického proudění vazké tekutiny.

V hydrodynamických soustavách mají kritéria (rovnice (2.69) až (2.72)) ve sdružených bodech stejné hodnoty. V některých uvažovaných případech je vhodné upravit tato čísla do jiného tvaru.

Z podobnosti vztakových a třecích sil plyne po úpravě číslo Grashofovo

$$Gr = \beta \Delta T \frac{gl^3}{\nu^2}, \quad (2.73)$$

kde

$$\beta \Delta T = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_0}, \quad (2.74)$$

přičemž $\rho_1 - \rho_2$ odpovídá rozdílu hustot tekutiny, který odpovídá rozdílu teplot ΔT a ρ_0 přísluší teplotě $T_0 = 273,15 \text{ K}$.

Zobecněný součinitel objemové roztažnosti pro plyny je dán vztahem

$$\beta = \frac{1}{\bar{T}}, \quad (2.75)$$

kde \bar{T} je střední teplota v trubce, vyjádřená vztahem

$$\bar{T} = 0,5 \cdot (T_s - T). \quad (2.76)$$

Odvození termokinetických kritérií podobnosti vychází ze zákona zachování energie. Tepelný tok stěnou je charakterizován součinitelem přestupu tepla α podle rovnice

$$\alpha \Delta T = \lambda_s \frac{dT}{dn}, \quad (2.77)$$

kde λ_s je tepelná vodivost povrchu.

Zákon zachování energie vypovídá, že teplo sdělené jednotkovou plochou v jednotce času vedením stěnou do teplosměnného povrchu přejde konvekcí do termokinetické mezní vrstvy tekutiny s teplotním rozdílem ΔT . Rozložení teploty v tekutině nám charakterizuje rovnice popisující teplotní pole (2.51), též známá jako rovnice přenosu tepla, či Fourier-Kirchhoffova rovnice. Pro naše účely odvození si tuto rovnici upravíme do tvaru bez vnějších zdrojů tepla

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } T \right) = \text{div}(\lambda \text{ grad } T). \quad (2.78)$$

Zavedením teplotní vodivosti a ve tvaru

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad (2.79)$$

můžeme rovnici (2.78) upravit v kartézské souřadnicové soustavě do tvaru

$$\frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y + \frac{\partial T}{\partial z} v_z + \frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (2.80)$$

„Jednotlivé členy levé strany rovnice (2.80) vyjadřují místní změnu teploty prouděním tekutiny ve směrech x , y a z a časovou změnu teploty a členy pravé strany rovnice (2.80) vyjadřují změnu teploty vedením tekutiny ve směrech x , y a z .“ [10]

Z podobnosti změny teploty vedením v tekutině a časové změny teploty plyne Fourierovo číslo

$$Fo = \frac{a\tau}{l^2} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\tau}{l^2}, \quad (2.81)$$

kde c_p je měrná tepelná kapacita při stálém tlaku. Fourierovo číslo je kritériem podobnosti časových změn teplotních polí.

Z podobnosti změny teploty prouděním a vedením tekutiny plyne Pecletovo číslo

$$Pe = \frac{wl}{a} = \frac{\rho c_p}{\lambda} wl = Re \cdot Pr, \quad (2.82)$$

kde Pr je číslo Prandtlovo. Pecletovo číslo je kritériem podobnosti sdílení tepla konvekcí a kondukcí v proudící tekutině.

Z podobnosti hustoty tepelného toku konvekcí a kondukcí tekutiny plyne Nusseltovo číslo

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (2.83)$$

kteřé je kritériem podobnosti sdílení tepla konvekcí a kondukcí v termokinetické mezní vrstvě.

Z podobnosti hustoty tepelného toku konvekcí tekutiny a kondukcí stěny plyne Biotovo číslo

$$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda_s}, \quad (2.84)$$

kteřé je kritériem podobnosti prostorové okrajové podmínky třetího druhu.

Z poměru Pecletova a Reynoldsova čísla (rovnice (2.82) a (2.72)) plyne konečně číslo Prandtlovo

$$Pr = \frac{v}{a} = \frac{v\rho c_p}{\lambda} = \frac{\eta c_p}{\lambda}, \quad (2.85)$$

kteřé je kritériem termokinetické podobnosti tekutin a zahrnuje základní termokinetické veličiny tekutiny.

„Za určující rozměr volíme zpravidla ten rozměr teplosměnné plochy, jehož změna nejvíce ovlivňuje sledovaný děj. Při obtékání těles dosazujeme do podobnostních kritérií za určující rozměr l takový rozměr tělesa, který spadá do vektoru náběhové rychlosti proudění tekutiny. Při průtoku kruhovým potrubím volíme za určující rozměr vnitřní průměr D . Při průtoku nekruhovým potrubím dosazujeme za určující rozměr hydraulický průměr potrubí D_h , jak vyjadřuje rovnice“ [10]

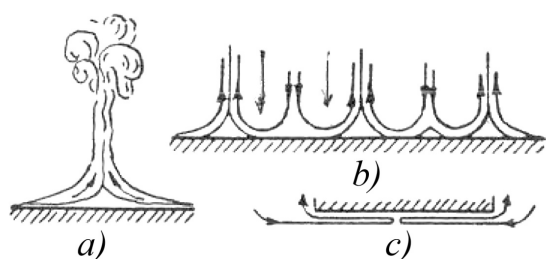
$$D_h = \frac{4S}{L_A}, \quad (2.86)$$

kde S je průtočný průřez a L_A je smočený obvod.

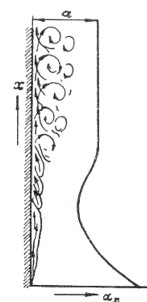
2.4.1. Přirozené sdílení konvekci

„Jestliže je prostor vyplněn tekutinou, například vzduchem, a v celém prostoru je stejná teplota, je tekutina v klidu. Umístíme-li do prostoru ohřáté těleso, nastává výměna tepla mezi tělesem a okolním vzduchem. Při styku s tělesem se vzduch ohřívá a jeho hustota se zmenší, teplý vzduch je lehčí a působením okolního studeného vzduchu vznikne vztlak, kterým jsou ohřáté částice vzduchu unášeny vzhůru. Na jejich místo přitékají další studené částice vzduchu, které se ohřívají a stoupají dále vzhůru. Jestliže je teplota tělesa menší než teplota okolního vzduchu, ochladí se částice vzduchu stykem s tělesem, jejich hustota vzroste a potom částice klesají dolů.“ [10]

„Volné proudění tekutiny nastává v důsledku výměny tepla. Čím více je tepla, které se sdílí, tím intenzivnější je proudění. Množství sdíleného tepla je přímo úměrné povrchu tělesa a rozdílu teplot. Z těchto hodnot a poměru příslušných veličin vznikne proudění různého druhu. Rozlišujeme 3 druhy volného proudění, a to laminární, vířnaté a turbulentní. Rozsah proudu, v němž se vytvoří proudění určitého druhu, závisí na teplotním spádu. Je-li teplotní spád malý, převládá proudění laminární, je-li ovšem teplotní spád větší, převládá pohyb turbulentní.“ [10]



Obr. 2.11 Volné proudění kapaliny podél vodorovných, ohřátých desek [10]



Obr. 2.12 Průběh součinitele přestupu tepla při volném proudění vzduchu podél svislé trubky a jeho závislost na druhu obtékání [10]

„Tvar proudění kolem ohřátých vodorovných rovinných stěn a desek závisí na poloze desky a jejích rozměrech. Jestliže je ohřívací plochou horní povrch desky, probíhá proudění podle Obr. 2.11a. Jestliže je deska velkého rozměru, je střední část izolována v důsledku spojitého okrajového proudu a ventilace této desky probíhá jen na úkor studené tekutiny shora, jak ukazuje Obr. 2.11b. Jestliže je ohřívací plochou dolní povrch desky, pohybuje se jen tenká vrstva tekutiny podél povrchu, zbylá tekutina pod touto vrstvou zůstává v klidu, jak ukazuje Obr. 2.11c.“ [10]

„Popisované volné proudění nastává jen ve velkém (neomezeném) prostoru, v němž probíhá jen jeden děj, například ohřívání tekutiny. Ochlazování se děje někde jinde, kde nemá vliv na průběh uvažovaného děje. V malém (omezeném) prostoru se probíhá ohřívání a ochlazování vedle sebe a nelze je brát a vyšetřovat odděleně; musí být pokládány za jeden děj. Proudění se následkem omezeného prostoru a přítomnosti klesajících a stoupajících proudů komplikuje. Proudění pak závisí na tvaru a geometrických rozměrech prostoru a také na druhu tekutiny a intenzitě výměny tepla.“ [10]

„Velká řada experimentů byla doprovázena vizuálním pozorováním a díky tomu byla stanovena souvislost mezi přestupem tepla a druhem proudění. Jak je vidět na Obr. 2.12, proudění vzduchu podél svislé trubky v její spodní části je laminární, ve střední části je vířnaté a podél horní části je turbulentní. V rozsahu laminárního proudění ubývá hodnoty součinitele přestupu tepla, v rozsahu vířnatého proudění zůstává jeho hodnota konstantní a v rozsahu turbulentního proudění se ustálí součinitel přestupu tepla na vyšší hodnotě.“ [10]

Úpravou rovnice (2.83) obdržíme vztah pro výpočet součinitele přestupu tepla

$$\alpha = Nu \cdot \frac{\lambda}{D_{\text{char}}} \quad (2.87)$$

Díky tomuto vzorci se výzkumníci zaměřili na určování Nusseltova čísla, proto se další výpočty zabývají určováním Nu a součinitel přestupu tepla je poté dán dosazením do rovnice (2.87).

Různými zkouškami látek a případů přestupu tepla při volném proudění byla zobecněna závislost mezi kritérii podobnosti v podobě mocninné funkce

$$Nu = c \cdot (Gr \cdot Pr)^n, \quad (2.88)$$

kde konstanty c a n jsou hodnoty pro jednotlivé úseky součinu $(Gr \cdot Pr)$ a jejich velikosti jsou uvedeny v Tab. 2.1.

Tab. 2.1 Hodnoty c a n do rovnice (2.88)

Číslo	$(Gr \cdot Pr)$	c	n
1	$1 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^3$	1,18	1/8
2	$5 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^7$	0,54	1/4
3	$2 \cdot 10^7 - 1 \cdot 10^{13}$	0,135	1/3

„Základním třem druhům volného proudění odpovídají tři exponenty ve vzorci (2.88). Laminárnímu proudění při malých teplotních spádech přísluší exponent 1/8, intenzivnímu laminárnímu a vířnatému proudění při středních teplotních spádech přísluší exponent 1/4 a turbulentnímu proudění odpovídá exponent 1/3.“ [10]

Při $(Gr \cdot Pr) < 10^{-3}$ je

$$Nu = 0,5 \quad (2.89)$$

a tedy i podle (2.87)

$$\alpha = 0,5 \cdot \frac{\lambda}{D_{\text{char}}}, \quad (2.90)$$

což znamená, že při této podmínce je součinitel přestupu tepla dán tepelnou vodivostí prostředí.

2.4.1. Nucené sdílení konvekce

„Nucené proudění vznikne působením čerpadel nebo ventilátorů a ze začátku této kapitoly již víme, že v tomto případě rozlišujeme dva druhy proudění: laminární a turbulentní. Laminární proudění přísluší malým rychlostem tekutiny, při větších rychlostech nastává proudění turbulentní. Přechod proudění laminárního v turbulentní je náhlý, jakmile rychlost nabude kritické hodnoty. Pro různé kapaliny a různá potrubí má však kritická rychlost různé hodnoty. Reynolds zjistil, že přechod laminárního proudění v turbulentní je podmíněn velikostí hodnoty.“ [10]

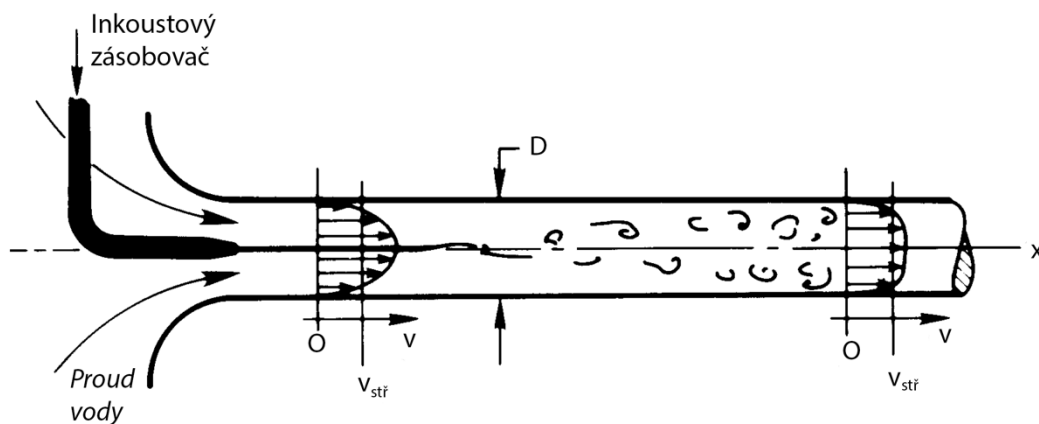
$$\frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} = \frac{w \cdot d}{\nu}, \quad (2.91)$$

kde v je rychlost proudění, d je průměr trubky.

„Tato rovnice se podle rovnice (2.72) označuje jako Re a nazývá se Reynoldsovým číslem. Je-li $Re < 2200$ je proudění laminární a při $Re > 2200$ je turbulentní, potom se $Re_{kr} = 2200$ nazývá kritickým Reynoldsovým číslem. Díky této kritické hodnotě Reynoldsova čísla lze stanovit hodnotu kritické rychlosti jakékoliv tekutiny v potrubí libovolného průměru jako“ [10]

$$v_{kr} = 2200 \cdot \frac{\nu}{d}. \quad (2.92)$$

„Turbulentní proudění se od laminárního proudění liší v rozložení rychlosti v průřezu. V laminárním proudění se mění rychlost proudění v průřezu podle zákona paraboly (Obr. 2.13a). Ve středu je rychlost největší a u stěny je rychlost nulová. U turbulentního proudění má rychlostní křivka tvar zkomolené paraboly (Obr. 2.13b). V blízkosti stěn křivka strmě stoupá a ve střední části průřezu je její průběh plochý. Maximální rychlost je ve středu průřezu.“ [10]



Obr. 2.13 Průběh rychlosti v průřezu při laminárním (vlevo) a turbulentním (vpravo) proudění kapaliny v trubce [8]

Ve výpočtech se vždy udává střední rychlost proudu

$$v_{stř} = \frac{\dot{V}}{S}, \quad (2.93)$$

kde \dot{V} je objemový tok a S je průtočný průřez.

„Střední rychlostí rozumíme podíl vteřinového množství tekutiny podle plochy průřezu. U laminárního proudění, kde Reynoldsovo číslo je menší než kritické, je poměr střední rychlosti k

maximální konstantní. U turbulentního proudění je tento poměr roven číslu c , které je funkcí Reynoldsova čísla“ [10]

$$\frac{v}{v_0} = c = f(Re). \quad (2.94)$$

„Při turbulentním proudění je celý proud prostoupen víry, které neustále vznikají a zanikají. Víry vznikají při náhlém zabrzdění proudící tekutiny na překážce nebo drsností stěn potrubí. Nepřetržitým tvořením a difúzí vírů se tekutina intenzivně promíchává a čím více proud obsahuje vírů tím je intenzivnější promísení tekutiny. Rozlišujeme turbulenci přirozenou a umělou. Přirozená turbulence vzniká bez vnějších umělých zásahů. V hladkém potrubí u stabilizovaného proudění je turbulence určena velikostí Reynoldsova čísla, zato umělá turbulence je vytvořena uměle působením překážek, přepážek nebo jiným způsobem.“ [10]

„Přestup tepla při laminárním proudění lze vyřešit matematicky a závisí na nuceném i na volném proudění. Vliv volného proudění je větší, čím je větší teplotní rozdíl ΔT . Při nuceném proudění není součinitel přestupu tepla α konstantní po celé délce potrubí. U vtoku do potrubí má součinitel přestupu tepla α maximální hodnotu a pak jeho hodnota náhle klesá, až se ustálí na jisté mezní vrstvě, která zůstává konstantní, jak je vidět na grafu“ [10]

Pro výpočety nuceného laminárního proudění vyhovuje

$$Nu = 0,74 \cdot Re^{0,2} \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,1} \cdot Pr^{0,2}. \quad (2.95)$$

„Vzorec (2.95) udává střední hodnotu součinitele přestupu tepla pro délku potrubí $l > 50 \cdot d$ a lze jej použít pro libovolné tekutiny. Za určující teplotu je zvolena střední teplota mezní vrstvy \bar{T} podle rovnice (2.76) a určujícím rozměrem je průměr potrubí d , případně hydraulický průměr potrubí D_h podle rovnice (2.86).“ [10]

„Při turbulentním proudění se šíření tepla uvnitř tekutiny děje promícháváním tekutiny. Ustálené turbulentní neizotermické proudění tekutiny v trubce je omezeno hodnotou Reynoldsova čísla $Re > 10^4$ a přitom se promíchávání děje tak intenzivně, že v průřezu jádra proudu je teplota stejná. Změna teploty nastává až uvnitř mezní vrstvy. Za těchto podmínek nemůže vzniknout volné proudění a přecházení tepla závisí na druhu nuceného proudění tekutiny.“ [10]

Ze zkoušek s různými tekutinami byly odvozeny závislosti, kde nejpřesněji odpovídá vzorec

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4}, \quad (2.96)$$

s platností v mezích $10^4 < Re$ a $0,7 < Pr < 2500$.

„Při turbulentním proudění podobně jako u laminárního proudění není součinitel přestupu tepla α stálý po celé délce potrubí. Pro $l/d > 50$ je rozdíl nepatrný a v technických výpočtech se zanedbává.“ [10]

2.5. Určující podmínky

Pro získání řešení spojitého matematického modelu popsaného rovnicí (2.51) musíme definovat příslušné okrajové podmínky a počáteční podmínku, tzv. určující podmínky. Počáteční podmínka se zadává nejčastěji ve tvaru

$$T(\mathbf{r}, t_{\text{start}}) = T_0(\mathbf{r}), \quad (2.97)$$

kde T_0 představuje hodnotu teploty v daném místě v počátečním okamžiku vyšetřování teplotního pole. V případě řešení rovnice (2.51) je nutno počáteční podmínku (2.97) ještě rozšířit o podmínku

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t_{\text{start}})}{\partial t} = T_1(\mathbf{r}), \quad (2.98)$$

kde T_1 představuje rychlost změny pole při startu vyšetřování zkoumaného děje. Zpravidla se tato podmínka zadává jako homogenní.

Okrajové podmínky se používají na hranicích Γ nejčastěji ve tvaru

- Dirichletovy (někdy též I. druhu)

$$T(\Gamma, t) = T_\Gamma(\Gamma, t). \quad (2.99)$$

Tyto podmínky se aplikují zejména tam, kde je známa teplota povrchu, nebo tam, kde je hranice tvořena izotermou

- Neumannovy (někdy též II. druhu)

Tyto podmínky představují bilanci tepelného toku s příslušnou hranicí

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = q_n, \quad (2.100)$$

Homogenní podmínka tohoto typu se používá např. při geometrické symetrii

- Newtonovy (někdy též III. druhu)

Tyto podmínky reprezentují přestup tepla konvekcí do prostředí o teplotě T_{ext}

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(T - T_{\text{ext}}), \quad (2.101)$$

kde $\alpha(\Gamma, T, t)$ je součinitel přestupu tepla z jednoho prostředí do druhého (kap. 2.4).

- Ostatní

Při uvažování šíření tepla sáláním (radiací) se uplatňuje větší počet zákonů respektujících tento způsob šíření tepla (Snellův, Lambertův, Stefanův–Boltzmannův, Planckův, Wienův či Kirchhoffův) (kap. 2.3.2). Okrajové podmínky tohoto typu se též běžně nazývají podmínkami IV. druhu. Uvádím zde pouze zákon Stefanův–Boltzmannův, s kterým je možné se běžně setkat v praxi a který je reprezentován vztahem

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_{\text{ext}}^4), \quad (2.102)$$

kde je \mathbf{n} jednotkový normálový vektor mající směr z oblasti Ω , λ je měrná tepelná vodivost, ε je emisivita prostředí a σ je Stefan–Boltzmannova konstanta.

Kapitola 3 Realizace indukčního ohřevu

Jak bylo uvedeno v úvodu, typické uspořádání systému IH sestává zejména ze zdroje střídavého proudu k napájení induktorů, které vytvářejí střídavé magnetické pole, v němž je umístěna vsázka. Přestože všechny aplikace IH mají společný hlavní základní princip, mají různé charakteristiky, které je třeba řešit pomocí technologií, které jsou součástí každého návrhu. Průmyslové aplikace vyžadují obvykle vyšší výkony a spolehlivost, což omezuje výběr topologie střídačů. Navíc, protože mají intenzivní průmyslové využití, je zapotřebí použitelnost s montážní linkou, vylepšené rozhraní a komunikaci. Kromě toho se musí konstrukce induktoru přizpůsobit různým tvarům vsázky, tj. hřídele, ozubených kol apod., a zajistit požadovaný teplotní profil. Domácí systémy IH, které se obvykle používají v indukčních sporácích, vyžadují nízké náklady a vysoce efektivní implementaci kvůli omezeným funkcím chlazení. Navíc je z kontrolního hlediska hlavní výzvou široká zátěž v důsledku různých materiálů, geometrie a požadovaných výkonů. Indukční systém musí být navržen tak, aby dosáhl vysoké účinnosti a byl schopen ohřívat i neferomagnetické materiály typické pro některé domácnosti. Lékařské aplikace vyžadují specifické, ale zásadní požadavky na systémy IH. Tyto systémy mají obvykle nízkou spotřebu, ale vyžadují velmi přesnou kontrolu procesu ohřevu, včetně teploty a lokalizace [1], [3], [27].

Tato kapitola shrnuje současný stav hlavních technologií, které se běžně používají v systémech IH: elektronika, řídicí algoritmy a konstrukce magnetických komponent.

3.1. Výkonová elektronika

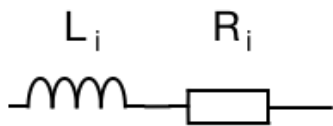
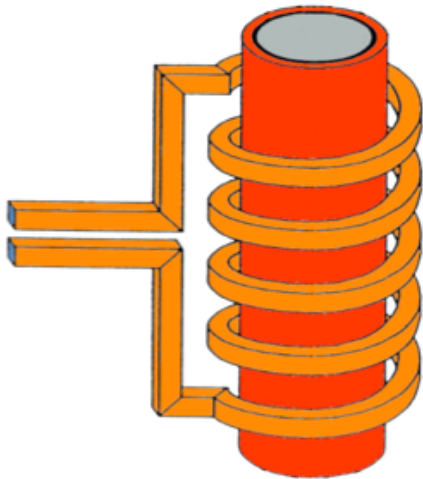
Na Obr. 3.1 je vyznačeno schéma přeměny energie, které je přítomno ve většině systémů IH s jedním induktorem. Zaprvé, filtr elektromagnetické kompatibility (EMC) zajišťuje, aby měnič odpovídal elektromagnetickým normám. Usměrňovač AC-DC obsahuje stejnosměrnou sběrnici, která napájí stejnosměrným napětím blok střídače. Usměrňovač může být buď neřízený (diodový usměrňovač) nebo řízený. Druhá varianta se používá k zajištění dodatečného stupně volnosti řídicího systému a může být implementována buď jako řízený usměrňovač nebo jako diodový usměrňovač s převodníkem stejnosměrného proudu. V závislosti na aplikacích obsahují některé systémy IH také blok korekce účinnosti pro zvýšení napětí a zajištění sinusového vstupního proudu.



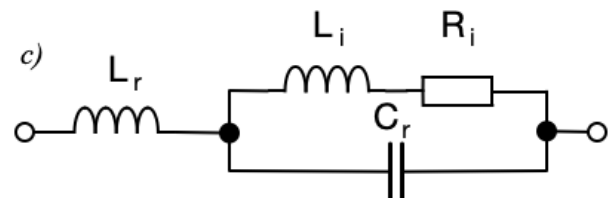
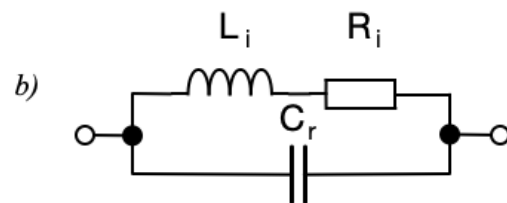
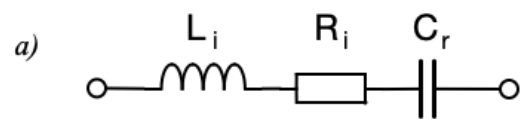
Obr. 3.1 Vývojový diagram typické přeměny energie v systému IH

Napájecí konvertor DC-AC, který je také znám jako střídač, je nejčastějším zdrojem proudů různých frekvencí pro napájení induktoru. Provozní frekvence je obvykle vyšší než 20 kHz, aby se zabránilo akustickému šumu, a stoupá až do 1 MHz v závislosti na aplikaci. Většina systémů IH má v současné době buď napěťové či proudové rezonanční střídače k dosažení vysoké účinnosti a velké hustoty výkonu. Zatížení IH je obvykle modelován odporem a induktorem (Obr. 3.2), které mohou být zapojeny sériově nebo paralelně v závislosti na modelu a případně k doplnění rezonanční zátěže jsou přidány další externí tlumivky anebo kondenzátory. Použitá topologie rezonančního invertoru může být klasifikována buď s ohledem na použitý typ, rezonanci, nebo na počet spínacích zařízení. Nejpoužívanější konfigurací rezonanční zátěže je sériový (Obr. 3.2a) a paralelní (Obr. 3.2b) rezonanční

obvod, který je druhého řádu a sériový rezonanční obvod třetího řádu LLC (Obr. 3.2c). Sériový rezonanční obvod RLC se běžně používá u střídačů napětí, zajišťuje nulovou střední hodnotu proudu na induktoru díky sériovému kondenzátoru a spíná při nulovém napětí (ZVS) nad rezonanční frekvencí, což vede k nulovým ztrátám při spínání. V proudových střídačích se používá paralelní rezonanční RLC obvod, který dosahuje redukováného proudu přes spínací zařízení a spíná při nulovém proudu (ZCS), což opět vede ke snížení ztrát při spínání. Z tohoto důvodu je tato topologie zvolena, když je vyžadován vysoký proud induktorem při nízkém napětí zdroje. Sérioparalelní LLC obvod kombinuje výhody paralelního obvodu s dodatečnou ochranou proti zkratu, což je jedna z nejpoužívanějších topologií v průmyslových aplikacích s vysokým výkonem.

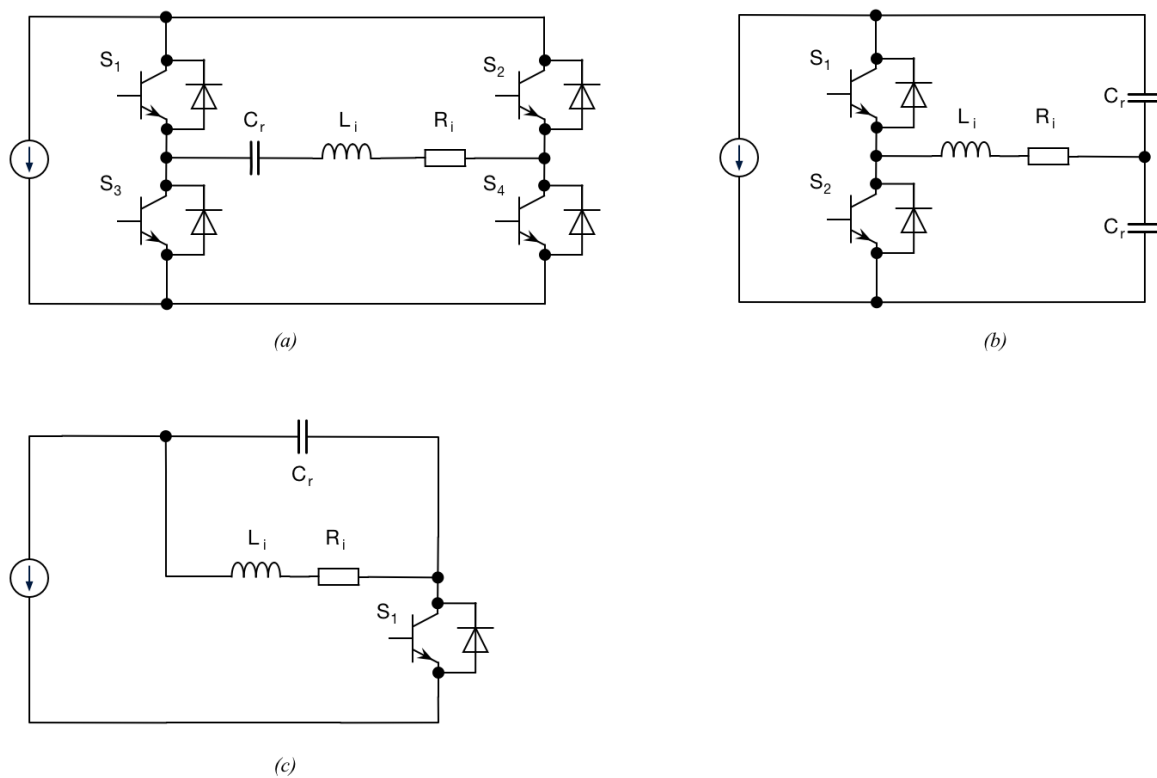


Obr. 3.2 Elektrický model zátěže IH

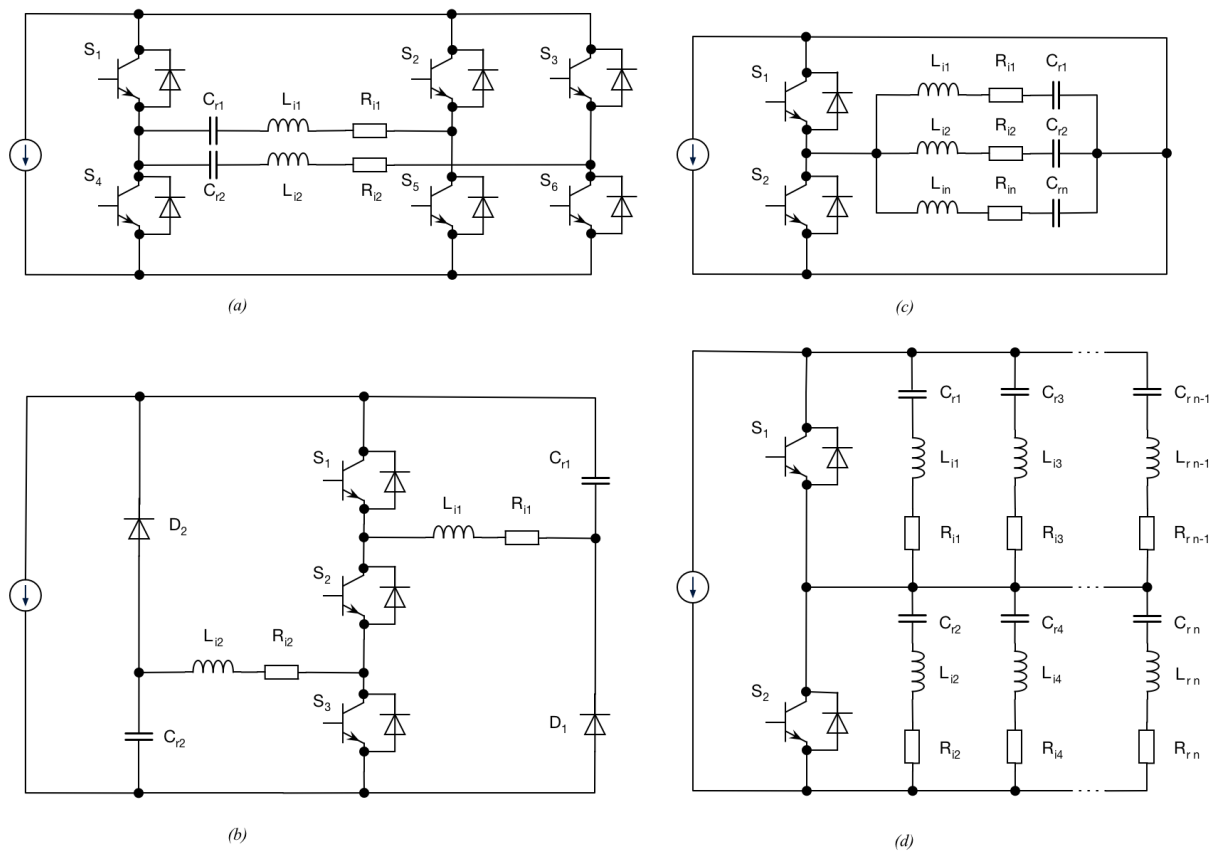


Obr. 3.3 Konfigurace rezonančního obvodu IH

Podle počtu spínacích zařízení jsou topologie střídačů běžně používané v IH rezonanční měniče s plným můstkem, půlmůstkem, nebo s jedním spínačem. Na Obr. 3.4 jsou znázorněny rezonanční zdroje v provedení plného můstku a půlmůstku a střídač ZVS s jedním spínačem. Topologie s plným můstkem se používá s výkonem přes 5 kW a jedná se o standardizované provedení průmyslových aplikací. Půlmůstková topologie je preferována v domácích indukčních systémech do 5 kW. Střídač s jedním spínačem se používá v systémech IH a domácnostech s výkonem do 2 kW.



Obr. 3.4 Základní topologie napětového střídače aplikované v IH: (a) plný můstek, (b) půlmůstek, (c) ZVS kvazirezonanční střídač s jedním spínačem [3]



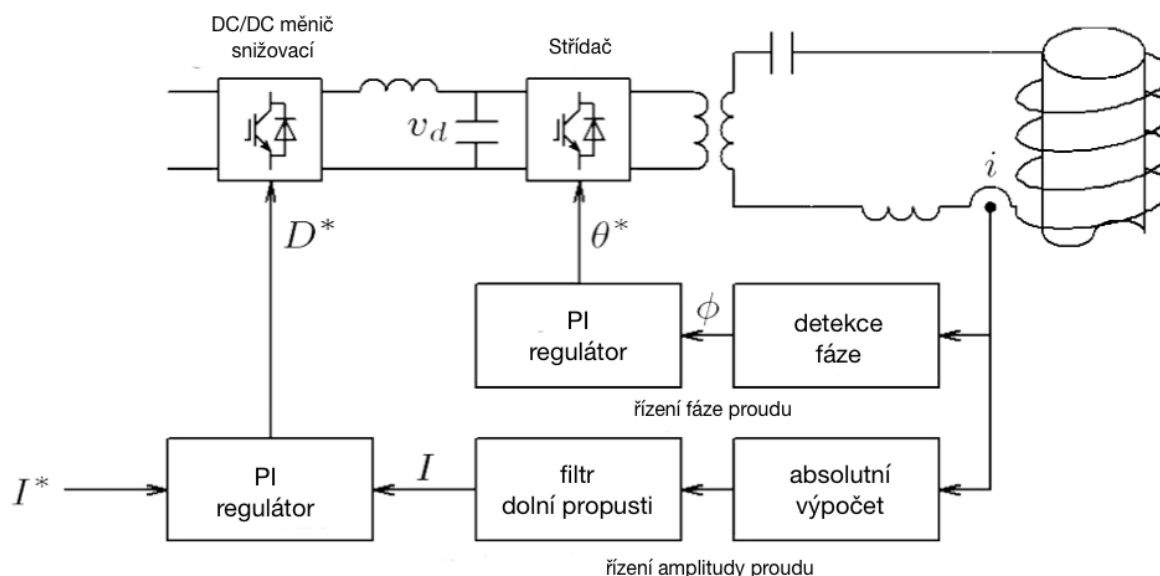
Obr. 3.5 Měníče pro víceinduktorové systémy IH: (a) dvojitý plný můstek, (b) dvojitý půlmůstek, (c) půlmůstek s multiplexovým kmitočtem, (d) sériový multiinvertor [3]

Kromě dříve popsaných topologií zahrnují moderní konstrukce systémy s více induktory, jež mají zlepšit distribuci tepla. Tyto systémy byly aplikovány jak na průmyslové, tak na domácí aplikace a vyžadují vývoj střídavých měničů k získání optimálního řešení. Na Obr. 3.5 jsou shrnuty některé navrhované přístupy. Obr. 3.5 (a) a (b) podrobně popisují schéma měniče dvojitého plného můstku a dvojitého půlmůstku. Tyto topologie mají podobnou funkci jako jejich jedno induktorový protějšek, ale s omezenou regulací výstupního výkonu kvůli dalším omezením ZVS. Na Obr. 3.5 (c) je znázorněna topologie půlmůstku s rezonančními zátěžemi, kde každá rezonanční zátěž je naladěna na jinou rezonanční frekvenci a umožňuje volit mezi sebou frekvenci střídače. Konečně Obr. 3.5 (d) ukazuje sériovou rezonanční multiinvertorovou topologii navrženou pro napájení systémů IH s vysokým počtem zátěží s malým počtem spínačů, poskytující nezávislé řízení výkonu v každé zátěži.

3.2. Řídicí algoritmy

Modulační a řídicí algoritmy musí přesně řídit výkonový střídač, aby bylo dosaženo požadovaného výkonu. Přesnější výstupní výkon (a v důsledku toho i teplota) a řízení proudu jsou vyžadovány s odpovídající dynamikou. Mezi hlavní problémy, které je třeba řešit a které jsou společné pro téměř všechny aplikace IH, patří správa vysoce variabilního výstupního výkonu a zatížení IH a v poslední době i implementace systémů s více zátěžemi.

Pro získání vhodného řízení výkonu byly pro jednofázové systémy navrženy různé typy modulace: čtvercová vlna, asymetrické řízení nebo PDM modulace (pulsně hustotní modulace). Čtvercové vlny a asymetrické ovládací prvky umožňují měnit výstupní výkon v celém provozním rozsahu buď ovládním spínací frekvence, nebo pracovního cyklu řídicích signálů. PDM má výhodu v tom, že ovládá měnič při pevné spínací frekvenci řízením doby zapnutí střídače. Použití fázového závěsu (PLL) je také běžné v řídicích schématech střídačů IH. Rozdělit řízení můžeme na dvě části: přímé řízení fází díky PLL nebo nepřímé řízení amplitudy RMS přes PI regulátor (proporcionálně integrovaný), jak je vidět na Obr. 3.6. Toto řešení je možné v případě jednoho stejnosměrného převodníku na fázi, ale výpočet RMS zpomaluje dynamickou odezvu.

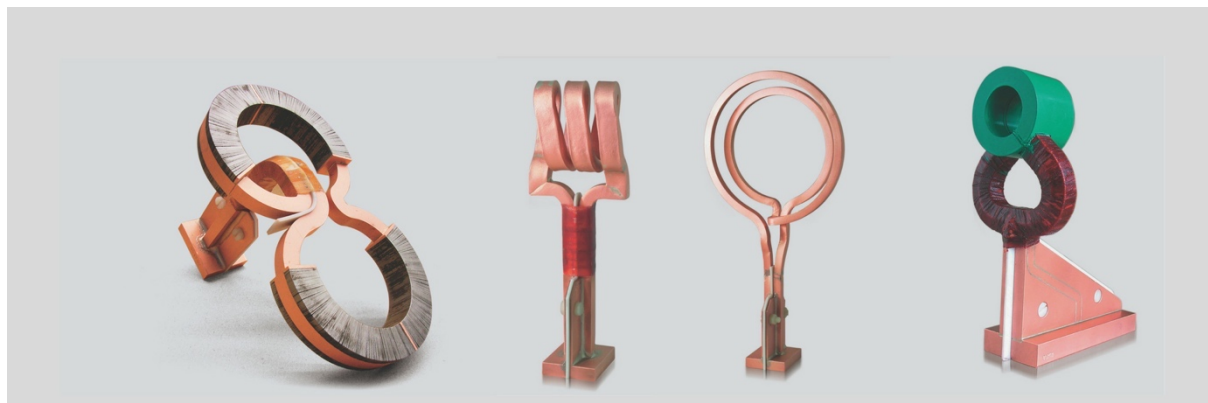


Obr. 3.6 Řídicí obvod proudu induktoru [31]

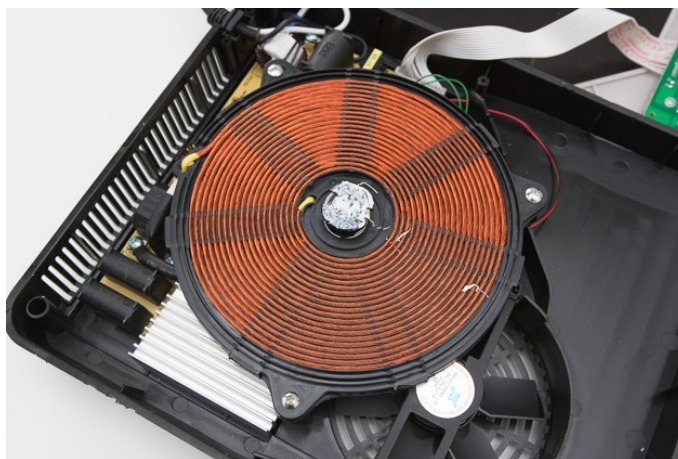
3.3. Magnetické komponenty

Nejdůležitější magnetickou složkou systému IH je systém indukční zátěže. Významné úsilí bylo věnováno modelování návrhu a optimalizaci pomocí analytických metod nebo metody konečných prvků. Z hlediska aplikace jsou nejdůležitější aspekty extrakce elektrických ekvivalentních parametrů, optimalizace účinnosti a optimalizace distribuce tepla. V průmyslových aplikacích IH existují dva typy induktorů v závislosti na uspořádání cívky, zatížení a na směru toku, kde je třeba rozlišovat tok příčný a tok podélný.

Výhody klasických IH systémů mohou být zlepšeny vícecívkovými induktory. Dosažení homogenity teploty kovu u systémů s jediným induktorem ve velkém měřítku je ve skutečnosti nemožné, zejména při ohřevu v příčném toku. Řešení k překonání tohoto omezení spočívá v používání systémů s více cívkami, ale se zvýšenou složitostí technologie výroby. Konvenční řídicí řešení pro průmyslové systémy s více induktory jsou založena na několika induktorech s pohyblivým magnetickým stíněním a pohyblivým koncentrátorem magnetického toku. Tato přídatná zařízení upravují vytvářená magnetická pole, přizpůsobují systém různým formám materiálu a mění polohu tak, aby dosáhly požadovaných teplotních gradientů. Zpracovatelské linky se pak podrobují mechanickému seřízení anebo údržbě tak často, jak je nutné pro výměnu materiálu, který má být ohříván. Je důležité si uvědomit, že bez jakéhokoliv modelu je požadovaný profil výkonu získán postupnými testovacími zkouškami, které jsou časově náročné. Obr. 3.7. ukazuje příklad několika vodou chlazených induktorů pro průmyslové aplikace, zatímco Obr. 3.8. ukazuje příklad plochého induktoru pro domácí IH.



Obr. 3.7 Detaily několika průmyslových, vodou chlazených induktorů [51]



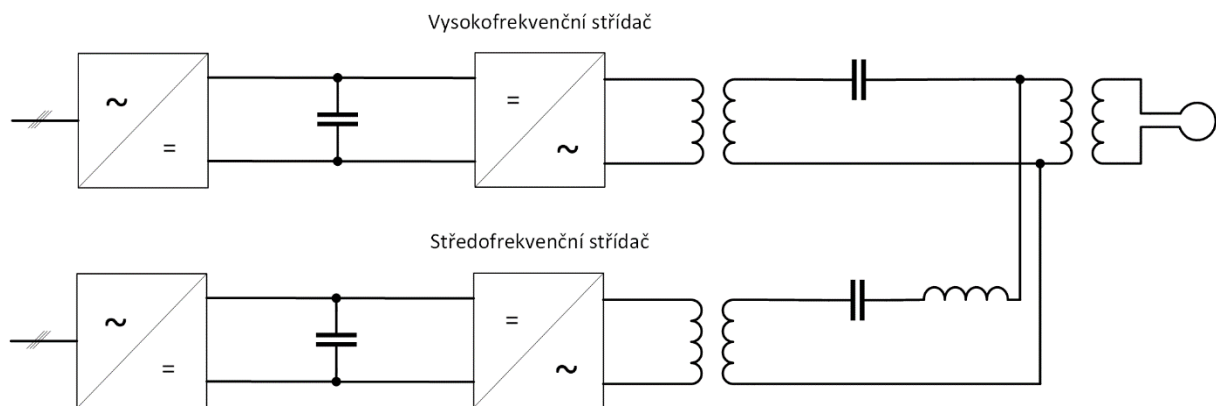
Obr. 3.8 Induktor IH v domácnostech

3.4. Aplikace indukčních ohřevů

Mezi mnoha aplikacemi IH jsou nejvýznamnější z hlediska instalovaného výkonu a ekonomického významu aplikace průmyslové, domácí a lékařské.

Průmyslové aplikace IH začaly na počátku 20. století s tavením kovů a později byly rozšířeny na automobilový a letecký průmysl. Současné aplikace byly rozšířeny na mnoho výrobních procesů, včetně předehřívání a ohřevu, tavení, kování, povrchových úprav, těsnění, lepení, žíhání a svařování. Použití IH zlepšuje rychlost procesů, jejich přesnost, efektivitu a opakovatelnost, což jsou klíčové vlastnosti potřebné pro plnou automatizaci.

V závislosti na konečném použití a materiálu se provozní frekvence měniče výrazně liší, od několika Hz pro vysoce výkonné systémy, typické pro tavení kovů, až po několik stovek kHz pro povrchové tepelné zpracování. V důsledku toho jsou polovodiče používané v průmyslových tepelných měničích tyristory, pracující při frekvencích do 3 kHz, při výkonech několika MW, zatímco normálně se používají IGBT tranzistory, pracující při frekvencích do 150 kHz pro výkony do 3 MW. MOSFETy se používají pro vyšší frekvence, až několik stovek kHz s výstupními výkony nižšími než 500 kW.



Obr. 3.9 Blokové schéma generátoru dvojfrequenčního indukčního ohřevu

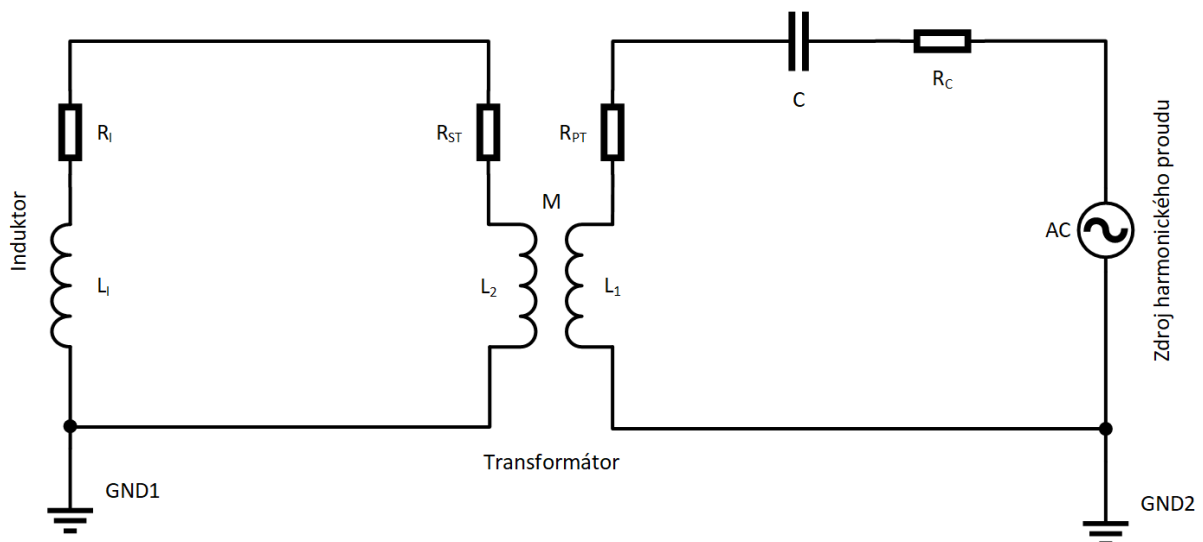
Některé aplikace vyžadují pokročilejší topologie, které mají za cíl zlepšit vlastnosti ohřevu nebo rozšířit své uplatnění na nové oblasti použití. To je případ dvojfrequenčních generátorů používaných pro napájení induktoru postupně nebo současně dvěma různými frekvencemi (Obr. 3.9) pro dosažení různých hloubek vniku. Jedna frekvence je obvykle nastavena ve středním kmitočtovém rozsahu (3 až 10 kHz) a druhá ve vysokém kmitočtovém rozsahu (200 až 400 kHz). Tyto typy generátorů se používají pro kalení obrobků s nepravidelnou povrchovou geometrií, jako jsou ozubená kola. Nutné je poznamenat, že kontrola a interoperabilita průmyslových systémů IH je mimořádně důležitá. Na jedné straně musí být provoz měniče výkonu přesně řízen, aby se dosáhlo požadovaných výsledků v cíli IH. Na straně druhé systém IH musí být propojen s kompletní montážní linkou pomocí průmyslových protokolů.

Hlavními domácími aplikacemi IH jsou spotřebiče IH. Indukční vařiče využívají nejen zlepšení doby ohřevu a účinnosti, ale také nižších povrchových teplot, což znamená lepší bezpečnost a čistotu, jelikož potraviny se nepálí. Hlavní charakteristikou této aplikace je nízko profilový kompaktní design a vysoce variabilním návrhem IH, který se může velmi snadno přizpůsobit tvaru, materiálu a poloze. Účinnost je také klíčovým parametrem návrhu vzhledem k omezeným možnostem chlazení. Z tohoto důvodu bylo vynaloženo velké úsilí na zlepšení měniče výkonu a účinnosti induktoru.

V současné době se v zařízeních IH nacházejí dva technologické trendy. Konstrukce pro Evropu a Ameriku jsou obvykle specifikovány pro výstupní výkony do 4 kW a zvolená topologie výkonového měniče je obvykle sériový rezonanční polovodičový střídač. Naproti tomu spotřebiče pro asijské země jsou obvykle konstruovány s výkonem 2 kW a upřednostňovanou topologií je kvazi-rezonanční měnič ZVS. Kromě toho tato technologie nabízí také schopnost ohřívat materiály s vysokou vodivostí, jako je hliník nebo měď, obvykle používané v těchto zemích. S ohledem na omezení výkonu a nákladů se spínací frekvence obvykle pohybují v rozmezí od 20 kHz do 100 kHz. Dolní mez je nastavena tak, aby nedocházelo k emisím akustického hluku, které nejsou v domácích aplikacích žádoucí, zatímco vyšší mez je dána spínacími ztrátami výkonových zařízení. Tyto přístroje obsahují též pokročilé řízení včetně inteligentního rozpoznávání tvaru varných nádob a strategií adaptivního řízení pro řízení nejen výstupního výkonu, ale také teploty nádoby. To poskytuje uživateli pokročilé funkce, které nelze dosáhnout konvenčními vařiči, což výrazně zlepšuje komfort uživatele.

3.5. Reálné pracoviště

Měření probíhalo na reálném zdroji IH skládající se ze zdroje harmonického proudu tvořeného plným můstkem se sériovým rezonančním obvodem. Stručné schéma je na Obr. 3.10.



Obr. 3.10 Schéma zapojení reálného IH

Rezonanční frekvence a tím parametry sériového obvodu se liší nejen velikostmi rezonanční kapacity, ale i typem a uložením ingotu do induktoru i samotným tvarem induktoru. Následující tabulky obsahují hodnoty sériových parametrů L_s a R_s pro frekvence a typ uložení hliníku a oceli. Poslední tabulka zobrazuje hodnoty pouze pro frekvence bez ingotu.

Tab. 3.1 Parametry L_s a R_s pro hliník při různém uložení ingotu

Hliník	ingot ve středu induktoru				ingot zarovnaný s hranou induktoru			
	17,5 kHz		21,5 kHz		17,5 kHz		21,5 kHz	
s transformátorem	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]
	318,5	1,68	317,32	1,89	319,5	1,69	318,4	1,9
bez transformátoru	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]
	1,37	7,07	1,365	7,687	1,399	7,1	1,394	7,721

Tab. 3.2 Parametry L_s a R_s pro ocel při různém uložení ingotu

Ocel	ingot ve středu induktoru				ingot zarovnaný s hranou induktoru			
	13 kHz		16,5 kHz		13 kHz		16,5 kHz	
s transformátorem	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]
	385,37	5,56	376,8	6,42	386,11	5,32	377,43	6,11
bez transformátoru	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]
	1,815	35,535	1,758	40,895	1,839	39,2	1,785	39,45

Tab. 3.3 Parametry L_s a R_s samotného induktoru

	13 kHz		16,5 kHz		17,5 kHz		21,5 kHz	
s transformátorem	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]	L_s [μH]	R_s [Ω]
	400,86	1,03	400,01	1,17	400	1,2	399,7	1,36
bez transformátoru	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]	L_s [μH]	R_s [$\text{m}\Omega$]
	1,96	3,912	1,96	4,374	1,958	4,46	1,39	7,721

Kapitola 4 Numerické řešení pole

Analytické řešení okrajových problémů lze použít pouze u jednoduchých stacionárních 1D resp. 2D polí. Složitější úlohy a modely je nutno řešit numerickými metodami. Řešení softwarovými nástroji, v tomto případě softwarem Wolfram Mathematica [52] má kouzlo v možnosti řešení stacionárních i nestacionárních polí pomocí implementovaných nástrojů pro řešení obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic, u nichž uživatel nemusí detailně řešit typ numerické metody, kterou výpočtový nástroj použije. Problémem je nejen určitá závislost na výpočetním nástroji, ale též určitá nemožnost zásahu uživatele do výpočetní metody, pokud to nastavení nedovolují.

Software Wolfram Mathematica používá pro výpočty parciálních diferenciálních rovnic funkci s názvem NDSolve. V základu pracuje s lineární metodou čar (Method of lines). Agros2D [53] je software pro numerická řešení 2D spojitých problémů. Procesor je založen na knihovně Hermes, která obsahuje numerické algoritmy pro monolitické a plně adaptivní řešení systémů obecně nelineárních a nestacionárních parciálních diferenciálních rovnic (PDE) založených na hp-FEM (metoda adaptivních konečných prvků vyššího řádu přesnosti).

4.1. Sdružené úlohy

Současným působením elektromagnetického pole a teplotního pole se tato pole ovlivňují. Jelikož jsou materiálové vlastnosti jak elektromagneticky, tak i teplotní závislé, říkáme, že jde o sdružené úlohy.

Obecně rozdělujeme sdružené úlohy podle stupně sdruženosti na silně sdružené, kvazi sdružené a slabě sdružené, podle jednotlivých časových konstant charakterizujících časové změny jednotlivých polí. U indukčních ohřevů jsou řádově rozdílné časové konstanty mezi elektromagnetickým a teplotním polem. Tepelné procesy mají nejpomalejší řád časové konstanty (Tab. 4.1), oproti tomu ostatní děje jsou o poznání rychlejší. Tato fakta je třeba brát v úvahu při výběru správného algoritmu.

Tab. 4.1 Časové konstanty jednotlivých procesů

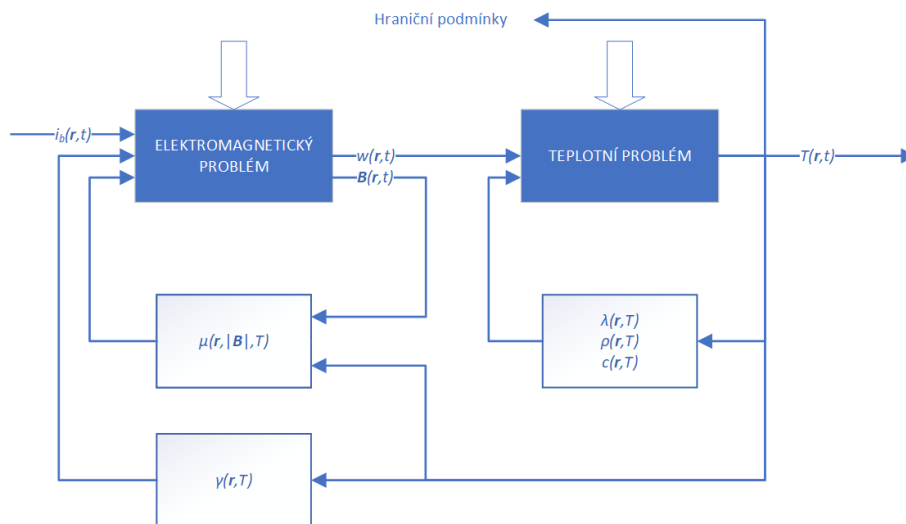
Proces	Řád časové konstanty [s]
Výkonová elektronika – spínací časy	$\times 10^{-8}$
Přechodné děje – elektrické obvody	$\times 10^{-6}$
Elektrické jevy	$\times 10^{-2}$
Přechodné děje – magnetické jevy	$\times 10^0$
Tepelné procesy	$\times 10^3$

V látkovém prostředí jsou charakteristiky jednotlivých polí provázány díky materiálovými vlastnostem, jež předurčují chování materiálu. Chování materiálu je ovlivněno mnoha faktory od chemických a fyzikálních struktur materiálu až po vnější podmínky vyvolané polem, jako je např. teplota, tlak, intenzita elektrického pole, intenzita magnetického pole, frekvence apod. Parametry jednotlivých polí a jejich závislé materiálové vlastnosti jsou obsaženy v Tab. 4.2.

Tab. 4.2 Veličiny polí a jejich závislé materiálové vlastnosti

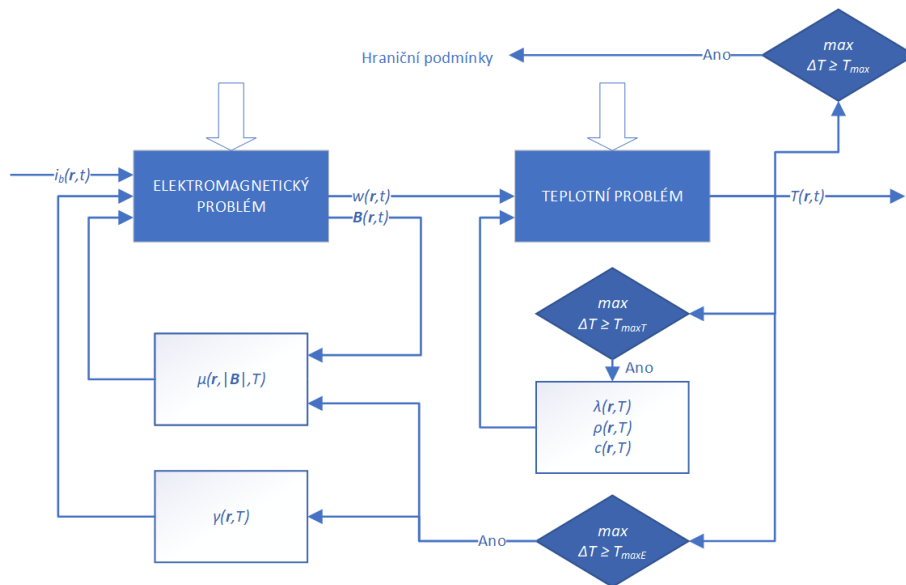
Pole	Veličiny pole	Závislé materiálové vlastnosti
Elektromagnetické	$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, q_j$	$\gamma(T), \mu(B, H, T)$
Teplotní	q_v, T	$\rho(T), c_p(T), \lambda(T), \alpha(T)$

Silně sdružené úlohy charakterizují výpočtové algoritmy zvládající řešení současného působení několika nestacionárních fyzikálních polí. V indukčních ohřevech se jedná o působení nelineárního elektromagnetického a teplotního pole. Dochází zde v každém okamžiku k neustálému silnému vzájemnému ovlivňování sdružených fyzikálních polí. Při výpočtu se v každé časové hladině provede výpočet elektromagnetického pole a určí se rozložení Jouleových ztrát, tvar hysterezní křivky a rozložení teplotního pole. Po tomto kroku následuje výpočet pro další časovou hladinu až do doby dosažení požadovaného času simulace nebo ustáleného stavu, popř. dosažení jiné podmínky. Výpočtově je tento typ úloh nejnáročnější.



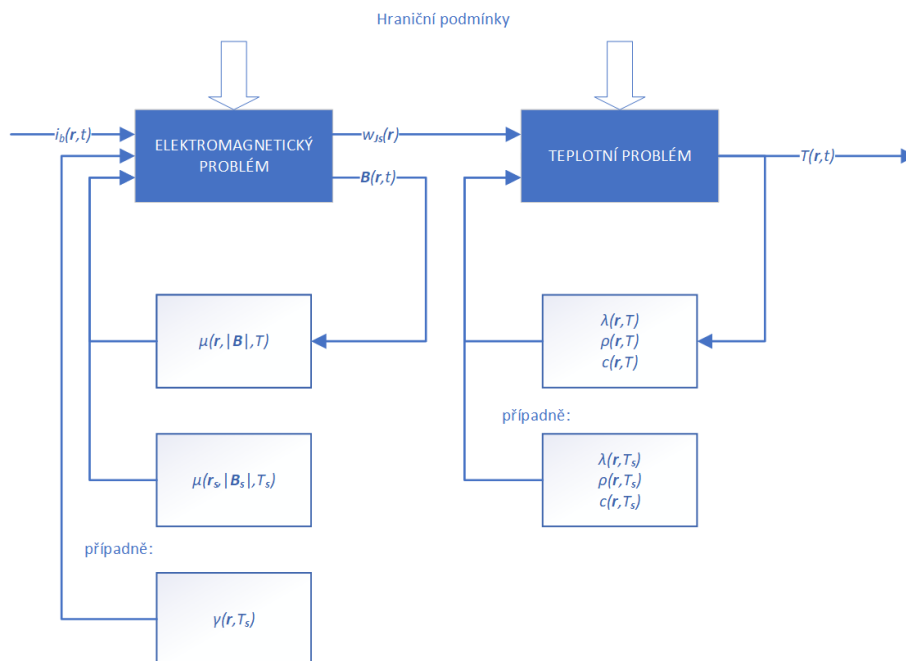
Obr. 4.1 Algoritmus silně sdružené úlohy

Kvazi sdružené úlohy se aplikují v algoritmech, kdy lze v jednotlivých časových hladinách uvažovat, že ustálený stav elektromagnetického pole nastane téměř okamžitě po sepnutí zdroje. V jednotlivých diskretních časových hladinách se řeší nestacionární nelineární teplotní pole a využívá se znalost Jouleových ztrát z rozložení elektromagnetického pole a znalost hystereze. Z vypočtených teplot se ve vhodných časových hladinách koriguje elektromagnetické pole. Výpočet nejprve určí rozložení elektromagnetického pole pro výchozí časovou hladinu, určí se Jouleovy ztráty, tvar hysterezní křivky a rozložení teplotního pole. Z teplotního pole se vypočtou korigované materiálové parametry pro elektromagnetické a teplotní pole. Celý algoritmus se opakuje od začátku až do doby dosažení požadovaného času simulace nebo ustáleného stavu, popř. dosažení jiné podmínky. Tento algoritmus je kompromisem mezi výpočetní náročností (slabé sdružení) a přesnými výsledky (silné sdružení).



Obr. 4.2 Algoritmus kvazi sdružené úlohy

Při řešení slabě sdružené úlohy nejprve určí rozložení elektromagnetického pole za jistých zjednodušených předpokladů a v návaznosti se řeší pole teplotní. Nedochází zde k bezprostřednímu zpětnému ovlivňování obou polí. Závislost mezi těmito poli je relativně slabá. Postup řešení úlohy je jednosměrný. Nejprve se určí elektromagnetické pole, které se předpokládá nezávislé na teplotě, určí se rozložení Jouleových ztrát, tvar hysterezní křivky a rozložení nestacionárního teplotního pole buď lineárním řešením (při konstantních materiálových parametrech) nebo nelineárním řešením (materiálové parametry se uvažují jako teplotně závislé).



Obr. 4.3 Algoritmus slabě sdružené úlohy

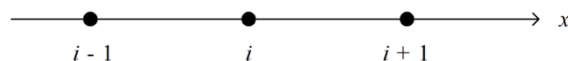
4.2. Metoda čar

Metoda čar (MOL) je lineární numerická metoda řešící parciálních diferenciálních rovnic diskretizací krom jedné dimenze a poté integrací semi-diskrétního problému systému ODE nebo DAE. Významná výhoda metody spočívá v tom, že umožňuje řešení využívat sofistikovaných obecně použitelných metod a softwaru, které byly vyvinuty pro numerickou integraci ODE a DAE. U parciálních diferenciálních rovnic, na které je metoda čar použitelná, se metoda obvykle ukazuje jako poměrně účinná.

Je nutné, aby parciální diferenciální rovnice měla dobře nastavené počáteční podmínky alespoň v jedné dimenzi, neboť integrátory ODE a DAE jsou nástroje pro řešení problémů s počáteční hodnotou. Toto vylučuje čistě eliptické rovnice, jako je Laplaceova rovnice, ale ponechává rozsáhlou škálu evolučních rovnic, které lze vyřešit velmi efektivně.

4.3. Diferenční metoda

Obecný postup diferenční metody řešení okrajové úlohy spočívá v následujících krocích. V prvním kroku oblast Ω , ve které řešíme okrajovou úlohu, pokryjeme sítí, která se zpravidla volí čtvercová, obdélníková, případně polární. Průsečíky sítě jsou uzly a v nich se hledají přibližné hodnoty neznámé veličiny. V dalším kroku každému vnitřnímu uzlu oblasti Ω se nahradí parciální derivace v řešené diferenciální rovnici diferenčními podíly vyjádřenými z přibližných hodnot neznámé veličiny v tomto uzlu a v sousedních uzlech. V případě že dojde k případu uzlů ležících na hranici pak v každém hraničním uzlu, je přiřazena Neumannova hraniční podmínka, již aproximujeme diferenčním podílem. Získáme soustavu algebraických rovnic pro přibližné hodnoty veličiny v uzlech sítě a tuto soustavu řešíme eliminační nebo iterační numerickou metodou. Pro ilustraci uvedeme nejčastěji užívané aproximace derivací veličiny u podle proměnné x . Označíme h krok sítě, i její uzlu a $i-1, i+1$ její sousední uzly (Obr. 4.4).



Obr. 4.4 Jednoduchá síť FDM [7]

Přibližné hodnoty veličiny u v uzlech $i - 1, i, i + 1$ označujeme po řadě u_{i-1}, u_i, u_{i+1} . Z Taylorovy formule lze pak získat tyto diferenční aproximace derivace $\frac{du}{dx}$ resp. $\frac{\partial u}{\partial x}$

1. dopřednou diferencí

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + 0(h), \quad (4.1)$$

2. zpětnou diferencí

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + 0(h), \quad (4.2)$$

3. centrální diferencí

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 0(h). \quad (4.3)$$

4.4. Metoda konečných prvků

Jedná se o v současné době nejvyužívanější metodu řešení okrajových úloh. Metoda konečných prvků (FEM) je uplatněna ve velkém množství aplikací od mechaniky přes hydrodynamiku, aerodynamiku a termomechaniku až po řešení elektromagnetických polí. Její schopností je řešit složitá geometrická uspořádání díky diskretizaci úlohy. V určitých oblastech se stanovenými hranicemi se hledá konečný počet neznámých funkcí, které definují výsledek.

Podstatou metody je možnost řešit vícerozměrné okrajové úlohy např. popsané funkcí $f(x, y)$. Modifikovanou variační metodou lze zjistit funkční hodnoty f na definiční oblasti Ω . Pokud funkce $f(x, y)$ splňuje okrajové podmínky na hranici Γ definované oblasti Ω , pak bude existovat právě jedna funkce f pro níž má následující funkcionál minimální hodnotu.

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = \int_{\Omega} f(x, y) \, dx dy, \quad (4.4)$$

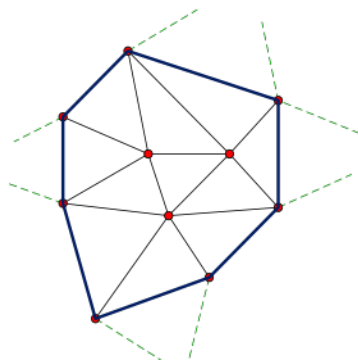
kde označením \mathcal{F} rozumíme onen funkcionál.

Funkcionál přiřazuje každé funkci definičního oboru reálné číslo. Pokud existuje množina funkcí $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)$, nabývá vztah (4.4) hodnot $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ a řešením dané okrajové úlohy $f(x, y)$ je nejmenší hodnota z výsledných funkcionálů. Numerickou realizací FEM je zobecněná Ritzova-Galerkinova variační metoda.

K vyřešení úlohy pomocí FEM lze problém rozdělit do několika kroků. Ve 2D úlohách provedeme nejprve diskretizaci oblasti, nejčastěji triangulací do souboru podoblastí Ω^e ($e = 1, 2, \dots, M$). Pro každé dva trojúhelníky musí platit jedna ze tří vzájemných poloh:

- Jsou disjunktní
- Mají společný jeden vrchol
- Mají společnou jednu stranu

Na hranici oblasti s různými prostředními doplňujeme podmínkou, že žádný z trojúhelníků Ω^e nesmí být protínán rozhraním. Výsledkem výše popsané triangulace je poměrně přesná aproximace oblasti Ω a strany elementů by měly co nejvěrněji kopírovat hranici Γ , neboť lze trojúhelníky pokrýt i geometricky složité rovinné oblasti s dostatečnou přesností. Křivočaré rozhraní prostředí se při triangulaci snadno aproximuje lomenou čarou, tvořenou stranami hraničních trojúhelníků.



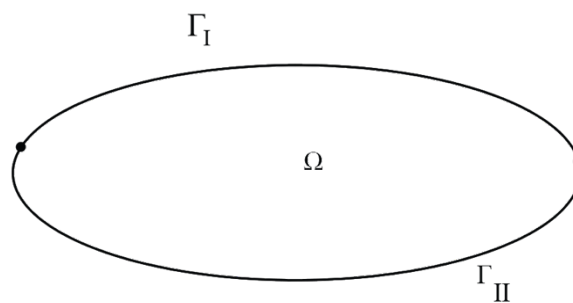
Obr. 4.5 Triangulace [7]

Uzly trojúhelníkové sítě a jednotlivé trojúhelníky bereme jako konečné elementy, kdy pro každý z těchto trojúhelníků je pomocí Lagrangeovy lineární interpolace aproximováno rozložení hledané veličiny.

$$f(x, y) = a + bx + cy \quad (4.5)$$

Konstanty a, b, c ze vztahu (4.5) jsou dalšími dílčími úpravami dopočteny, což ve výsledku přináší znalost hledaných hodnot nejen ve vrcholech ale i uvnitř trojúhelníků. Následujícími kroky jsou konstrukce funkcionálu a jeho následná minimalizace, což sebou přináší využití poměrně složitého matematického aparátu.

Budeme uvažovat okrajový problém na $\Omega \cup \Gamma$, kde regulární oblast Ω spadá do \mathbb{R}^3 a hranice $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_I \cup \Gamma_{II}$ (Obr. 4.6).



Obr. 4.6 Okrajové podmínky [7]

Za funkci f na oblasti Ω považujeme zobecněnou rovnici vedení tepla

$$-\text{div}(p \text{ grad } u) = f \quad (4.6)$$

$$u = g_I \text{ na } \Gamma_I, \quad (4.7)$$

$$-p \frac{\partial u}{\partial n} = g_{II} \text{ na } \Gamma_{II}, \quad (4.8)$$

kde u je neznámá funkce proměnných x, y resp. z , p je zastoupena kladnou konstantou nebo funkcí souřadnic nebo funkcí proměnné $|\text{grad } u|$, f je daná konstanta nebo funkce souřadnic definovaná na Ω , g_I je daná funkce definovaná na Γ_I , a $\frac{\partial u}{\partial n}$ je derivace ve směru vnější normály k Γ_{II} .

Výše bylo zmíněno, že FEM lze považovat za typ variační metody. Vynásobením rovnice (4.6) testovací funkcí v , pro niž platí

$$v = 0 \text{ na } \Gamma_I. \quad (4.9)$$

a integrací součinu přes oblast Ω obdržíme

$$\int_{\Omega} -\text{div}(p \text{ grad } u) \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega \quad (4.10)$$

Užitím Greenovy věty (4.10) upravíme do tvaru

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d\Omega - \int_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\Gamma \quad (4.11)$$

S uvažováním podmínky (4.9) platí

$$\int_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{II}} p \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\Gamma_{II} \quad (4.12)$$

a po dosazení do (4.11) dostaneme

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d\Omega - \int_{\Gamma_{II}} p \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\Omega \quad (4.13)$$

Nechť funkce u splňuje na Γ_I okrajovou podmínku (4.7) a na $\Omega \cup \Gamma_{II}$ pro ni platí integrální podmínka (4.13). Pak se taková funkce u nazývá slabé řešení okrajové úlohy. Slabé řešení nemá tak silné požadavky na hladkost funkcí jako klasické řešení.

4.5. Optimalizační metody

Optimalizačními metodami rozumíme metody, které lze použít k optimalizaci konkrétního záměru při racionalizaci daných možností. Zadání úlohy vede k maximalizaci nebo minimalizaci zvolené cílové (účelové) funkce, která obvykle obsahuje mnoho proměnných.

4.5.1. Nelineární programování

Nelineární programování je matematická metoda pro určení optimálního řešení matematického modelu vytvořeného z nelineárních rovnic nebo nerovnic, přičemž optimalizovaná účelová funkce je též nelineární. Řešením optimalizačního problému je najít vázaný extrém.

$$\text{minimalizuj } f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.14)$$

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.15)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (4.16)$$

Máme tedy

$$\min\{f(\mathbf{x}) : h(\mathbf{x}) = 0; g(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (4.17)$$

Definice: Bod \mathbf{x}^* je bodem splňující omezení a \mathbb{J} je množina indexů j pro která $g_j(\mathbf{x}) = 0$. Bod \mathbf{x}^* je potom regulární bod omezení, jestliže $\nabla h_i(\mathbf{x})$ a $\nabla h_j(\mathbf{x})$, pro $1 \leq i \leq m; j \in \mathbb{J}$ jsou lineárně nezávislé.

Je zřejmé, že pokud \mathbf{x}^* je bod relativního minima, pak neexistuje žádný přípustný směr, že v bodě $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \alpha s$ funkce nabývá menších hodnot. Platí tedy $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$. Aproximací prvního řádu funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{x}^* platí

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (4.18)$$

Odtud plyne nutná podmínka minima.

Definice: Je-li \mathbf{x}^* bodem relativního minima funkce $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^1$ na množině \mathbb{X} , pak pro libovolný vektor \mathbf{s} , který je přípustným směrem v bodě \mathbf{x}^* platí

$$\nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} \geq 0 \quad (4.19)$$

Definice: Pokud \mathbf{x}^* je bod relativního minima funkce $f(\mathbf{x})$ na množině \mathbb{X} a \mathbf{x}^* je vnitřní bod množiny \mathbb{X} , pak

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (4.20)$$

Rovnice (4.20) vyjadřuje nutnou podmínku prvního řádu.

Podmínky druhého řádu dostaneme při aproximaci druhého řádu funkce $f(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{x}^*

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (4.21)$$

Definice: Je-li \mathbf{x}^* bodem relativního minima funkce $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^2$ na množině \mathbb{X} , pak pro libovolný vektor \mathbf{s} , který je přípustným směrem v bodě \mathbf{x}^* platí

$$1. \quad \nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} \geq 0 \quad (4.22)$$

$$2. \quad \nabla f(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} = 0, \text{ pak } \mathbf{s}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*)\mathbf{s} \geq 0. \quad (4.23)$$

4.5.2. Komparativní metody

Komparativní optimalizační metody využívají kvantifikaci hodnot funkcí v daných bodech k nalezení extrému účelové funkce. Výpočty jsou pak porovnány s předchozími hodnotami. Poté jsou stanoveny další body, ve kterých je počítána hodnota účelové funkce. Tento postup se opakuje, dokud není nalezen extrém, tj. minimum nebo maximum.

Jednou z používaných optimalizačních metod je Fibonacciho hledání, pojmenovaná podle stejnojmenného italského matematika. Tuto metodu lze považovat za optimální vyhledávací strategii. Tato strategie zaručuje maximální možné zkrácení původního vyhledávacího intervalu $\langle a, b \rangle$ pro daný počet kvantifikací funkční hodnoty účelové funkce. Fibonacciho hledání doporučuje, ve kterých bodech intervalu $\langle a, b \rangle$ vypočítat hodnotu účelové funkce (počet vyčíslení se bere jako invariantní), abychom co nej přesněji určili polohu minima.

Strategie vyhledávání je založena na Fibonacciho číslech $\{F_i\}$, které můžeme postupně vypočítat podle vztahu

$$F_k = \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (4.24)$$

Pokud musíme vypočítat hodnotu kriteriální funkce N -krát, pak Fibonacciho čísla F_{N-1}, F_{N-2}, \dots definují body, ve kterých musí být vypočteny funkční hodnoty. Pro $N = 2$ transformujeme interval $\langle a, b \rangle$ na interval $\langle 0, F_2 \rangle$, kde $F_2 = 2$ (podle vztahu (4.24)). Hodnotu účelové funkce musíme vypočítat ve

dvou bodech $X_0 \approx x_0 = 1$ a $X_1 \approx x_0 = 1 + d$, kde d je velmi malé číslo, které má vyloučit stav, kdyby se funkční hodnota účelové funkce počítala dvakrát ve stejném bodě. Bez ohledu na hodnoty kritériální funkce v bodech $F(x_1)$ a $F(x_2)$ dojde vždy ke zúžení původního intervalu s minimem na jednu polovinu, v případě výpočtu tří hodnot účelové funkce zúžíme původní interval na jednu třetinu. Lze tedy zobecnit, že při výpočtu N funkčních hodnot je původní interval zkrácen na $1/N$ původní velikosti.

Existuje také řada metod pro vícerozměrnou optimalizaci. Pravděpodobně nejjednodušší je metoda náhrady cyklických parametrů, nazývaná také jako Gauss-Seidlova metoda. Vybereme jednu proměnnou x_k a všechny ostatní proměnné považujeme za konstantní. Poté provedeme jednorozměrnou optimalizaci a zafixujeme proměnnou x_k na zadanou hodnotu. Poté přejdeme na další proměnnou a opakujeme cyklus, abychom určili extrém s požadovanou přesností.

4.5.3. Gradientní metody

Gradientní metoda využívá výpočet nebo odhad derivace funkce. Pro funkce jedné proměnné je nejpoužívanější Newtonova metoda. Jeho princip je založen na konstrukci tečné derivace funkce $f'(x)$ na $(x_k, f'(x_k))$. Následující $k + 1$ iterace optimálního bodu x_{opt} je průsečík této tečny s osou x . Účelovou funkci určíme z Taylorova rozvoje $f(x)$ v okolí bodu x_k (4.25)

$$f(x) = f(x_k) + (x - x_k) \cdot f'(x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 \cdot f''(\xi), \quad (4.25)$$

kde ξ neurčený bod intervalu, jehož krajní body jsou x_k a x .

Vydělením rovnice (4.25) $f'(x_k)$ obdržíme

$$-\frac{1}{2}(x - x_k)^2 \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (x - x_k) = x - \left[x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right] = x - x_{k+1}, \quad (4.26)$$

kde z (4.26) vyplývá, že výsledný vztah pro x_{k+1} je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (4.27)$$

Algoritmus je ukončen, pokud je rozdíl dvou po sobě jdoucích hodnot menší než požadovaná přesnost výpočtu.

Pro funkce s více proměnnými používáme gradient funkce. Změna proměnné je přímo úměrná gradientu funkce účelu. Metodou největšího spádu se snažíme docílit co nejbližší extrému účelové funkce v jednom kroku. Algoritmus popisuje následující vztah

$$\phi(\lambda) = f(\mathbf{x}_k + \lambda \cdot \mathbf{d}_k), \quad (4.28)$$

kde \mathbf{d}_k je spádový vektor určený jako

$$\mathbf{d}_k = \pm \nabla \cdot f(\mathbf{x}_k). \quad (4.29)$$

Přesnost metody a tím ukončení algoritmu se řídí pomocí gradientu funkce. V bodě extrému platí, že gradient i spádový vektor jsou rovny nule. Je-li absolutní hodnota gradientu funkce v bodě \mathbf{x}_{k+1} menší než požadovaná přesnost, je výpočet dokončen.

4.5.4. Genetické algoritmy

Genetické algoritmy (GA) jsou stochastické iterativní metody vyhledávání, které napodobují přirozenou biologickou evoluci. GA pracuje na populaci (generaci) s konstantním počtem jednotlivců (potenciálních řešení) a aplikuje na ni nejlepší principy přežití, aby vytvořila lepší a lepší aproximace řešení.

Jedinec je reprezentován řetězcem 0 a 1 (genotyp), který je ekvivalentní informacím uloženým v chromozomech jednotlivých organismů v biologii. Tento řetězec zakóduje místo v daném vyhledávacím prostoru. Charakteristikou každého jedince je jeho hodnota (fitness funkce). Její velikost nám dává kritérium kvality řetězce ve srovnání s ostatními jedinci. Její hodnota může být například při optimalizaci hodnota funkce v bodě, kdy jedince kódujeme. Každá nová generace pochází z předchozí za použití genetických operátorů, reprodukce (selekce), křížení a mutace.

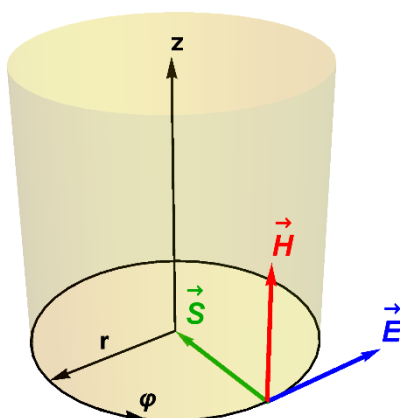
Hlavní síla genetického algoritmu je v jeho paralelismu, tj. že prohledává v celou populaci a vyměňuje si informace mezi prohledávanými body. To má za následek zejména jeho odolnost vůči uvíznutí v některých lokálních extrémech. Genetický algoritmus tak může pracovat bez speciálních požadavků na prohledávaný prostor a může, na rozdíl od jiných metod, najít dobré řešení, i když je vyhledávací prostor velmi "divoký". GA proto může hledat řešení bez znalosti struktury problému.

Kapitola 5 Modelování indukčních ohřevů

Základem zpracování úlohy je vytýčit si její rozdělení do několika fází. Je třeba fyzikální systém znát a dokázat ho popsat k sestavení matematického modelu a docílit zvolenými prostředky jeho vyřešení. Fyzikálním systémem je zde elektrotechnické zařízení k indukčnímu ohřevu kovových materiálů. Uplatněním základních teoretických znalostí o elektromagnetickém a teplotním poli ve zkoumaném objektu matematicky popíšeme vybrané sledované děje. Na základě takto sestrojeného spojitého matematického modelu hledáme řešení. Řešení problému lze nalézt v analytickém tvaru, diskrétně numerickém tvaru a ve spojitém numerickém tvaru.

5.1. Ohřev válce

Reálným zařízením v této práci je indukční ohřev válcových předmětů. Popis úlohy je třeba provádět v cylindrických souřadnicích. Řešení pole je pro potřeby optimalizace třeba upravit z PDE na soustavu rovnic DAE. Následující řádky budou popisovat odvození klasického řešení až k dořešení pro použití v optimalizačních metodách.



Obr. 5.1 Cylindrická (válcová) soustava s vyznačenými vektory \mathbf{E} , \mathbf{H} a \mathbf{S}

Válcová plocha protékaná střídavým proudem a proudová vlákna ležící kolmo k ose válce vyvolá válcové elektromagnetické vlnění. Vyzařující válcovou plochu můžeme realizovat cívkou s nulovou tloušťkou izolace mezi závity, např. vodič obdélníkového průřezu přiléhající těsně k dalšímu závit. Geometrické uspořádání nám zaručuje, že je válcová plocha teoreticky nekonečné délky (vzhledem k hloubce vniku) o poloměru r_1 . Sklon závitů je zanedbatelně malý k velikosti poloměru cívky. Umístíme-li cívku a vsázku tak, aby osa z splývala se souřadnicovým systémem, potom vektory pole jsou pouze funkcí poloměru r kdekoli v uvažovaném systému válce. Hodnoty veličin v určitém bodě jsou totožné se všemi body o stejném poloměru r . Splněním výše popsaným požadavkům má intenzita elektrického pole \mathbf{E} pouze složku E_φ a intenzita magnetického pole \mathbf{H} pouze složku H_z .

$$\mathbf{E}(r, t) = (0, E_\varphi(r, t), 0) \quad (5.1)$$

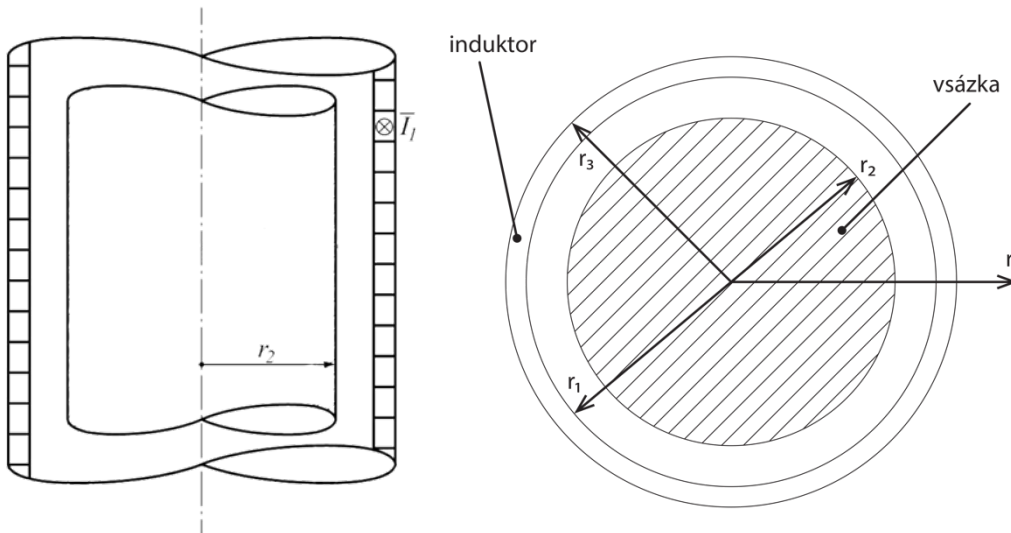
$$\mathbf{H}(r, t) = (0, 0, H_z(r, t)) \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B}(r, t) = (0, 0, B_z(r, t)) \quad (5.3)$$

Vnitřní poloměr cívky je označen r_1 vnější poloměr r_2 . Pokud je na vnitřní ploše induktoru intenzita magnetického pole o velikosti H_1 , je z důvodu homogenního magnetického pole mezi cívkou a vsázkou intenzita magnetického pole na vnějším poloměru vsázky

$$H_1 = H_2 \quad (5.4)$$

K posuzování problému ohřevu válce máme okrajovou podmínku s definovanou velikostí intenzity magnetického pole na povrchu válce, a tudíž nemusíme řešit problematiku vztahující se k dějům v cívce.



Obr. 5.2 Axiální a radiální řez vsázky a induktoru

5.1.1. Řešení elektromagnetického pole válce

Vzhledem k podmínce vodivého prostředí ($\gamma \gg \varepsilon \cdot \omega$) v rovnici (2.7) lze zanedbat člen $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ a Maxwellovy rovnice v cylindrickém uspořádání budou mít tvar

$$-\frac{\partial H_z(r, t)}{\partial r} = \gamma \cdot E_\varphi(r, t) \quad (5.5)$$

a

$$\frac{E_\varphi(r, t)}{r} + \frac{\partial E_\varphi(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial B_z(r, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.6)$$

při okrajových podmínkách

$$H_z(r_2, t) = \frac{N \cdot I}{l}, \quad (5.7)$$

$$E_\varphi(r_0, t) = 0, \quad (5.8)$$

kde $I = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ je harmonický průběh proudu.

Harmonické vyjádření Maxwellových rovnic má své opodstatnění, jelikož se často setkáváme s harmonickým elektrickým polem o kmitočtu ω . Nahrazením příslušných vektorů rotujícími fázory přecházejí rovnice (5.5) a (5.6) do tvaru

$$-\frac{\partial H_z(r)}{\partial r} = \gamma \underline{E}_\varphi(r, t) \quad (5.9)$$

a

$$\frac{E_\varphi(r)}{r} + \frac{\partial E_\varphi(r)}{\partial r} + j\omega\mu H_z(r) = 0, \quad (5.10)$$

kde j je imaginární jednotka

Úpravou rovnic (5.9) a (5.10) získáme vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 H_z(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z(r)}{\partial r} - j\omega\gamma\mu H_z(r) = 0 \quad (5.11)$$

a

$$\frac{\partial^2 E_\varphi(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi(r)}{\partial r} - j\omega\gamma\mu E_\varphi(r) - \frac{E_\varphi(r)}{r^2} = 0. \quad (5.12)$$

5.1.2. Řešení teplotního pole

V rovnici (2.51) se u indukčních ohřevů člen $\mathbf{v} \cdot \text{grad } T$ neuplatňuje, protože v našem případě se těleso vzhledem k induktoru nepohybuje ($\mathbf{v} = 0$) a v substanciální derivaci zůstane pouze člen parciální derivace podle času. Fourier-Kirchhoffova pak nabude tvaru

$$\rho(T)c_p(T) \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T) \text{grad } T) + w \quad (5.13)$$

při okrajové podmínce pro geometrickou symetrii, která zní

$$\frac{\partial T(r_0, t)}{\partial r} = 0. \quad (5.14)$$

Tato podmínka je nulová proto, že neexistuje odvod směrem do středu a okrajová podmínka na hranici řešeného uspořádání reprezentovaná válcovou plochou na vnějším poloměru válce r_2 zní

$$-\lambda(T) \frac{\partial T(r_2, t)}{\partial r} = \alpha(T(r_2, t) - T_0) + \varepsilon\sigma(T(r_2, t)^4 - T_0^4) \quad (5.15)$$

Počáteční podmínka je

$$T(r, t_{\text{start}}) = T_0. \quad (5.16)$$

Energie vznikající z jiných forem energie jsou u indukčního ohřevu převážně Jouleovy ztráty a objemová hustota tepelného výkonu se spočte jako

$$w = \gamma \cdot |E(r)|^2. \quad (5.17)$$

5.2. Lineární problém

Řešením vlnových rovnic (5.11) a (5.12) jsou kombinace Besselových rovnic prvního (J_n) a druhého (Y_n) druhu, nultého a prvního řádu.

$$\underline{H}_z(r) = J_0\left(r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega}\right) \cdot C_1 + Y_0\left(-r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega}\right) \cdot C_2 \quad (5.18)$$

$$\underline{E}_\varphi(r) = -J_1\left(r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega}\right) \cdot C_3 + Y_1\left(-r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega}\right) \cdot C_4 \quad (5.19)$$

Při homogenní okrajové podmínce v ose (5.8) ve fázorovém vyjádření

$$\underline{E}_\varphi(r_0) = 0, \quad (5.20)$$

potom pro (5.19) platí

$$\underline{E}_\varphi(r) = -J_1\left(r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega}\right) \cdot C_3, \quad (5.21)$$

dosažením do (5.10) získáme

$$\begin{aligned} \underline{H}_z(r) = \frac{j}{r \cdot \mu \cdot \omega} & \left(-J_1\left(r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega}\right) - \frac{1}{2} r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega} \cdot \right. \\ & \left. \left(J_2\left(r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega}\right) - J_1\left(r \cdot (\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma \cdot \mu \cdot \omega}\right) \right) \right) \cdot C_3 = \frac{(\sqrt[4]{-1})^3 \cdot \sqrt{\gamma} \cdot C_3}{\sqrt{\mu \cdot \omega}} \cdot \\ & {}_0F_1\left(1; \frac{j \cdot r^2 \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \omega}{4}\right) \cdot C_3. \end{aligned} \quad (5.22)$$

kde ${}_0F_1(a; z)$ je regularizovaná souvislá hypergeometrická funkce.

Pro okrajovou podmínku o známé hodnotě intenzity elektrického pole na poloměru r_2 (5.7) a dosazením do (5.22) získáme velikost konstanty C_3 .

$$C_3 = - \frac{(\sqrt[4]{-1})^3 \cdot I \cdot N \cdot \sqrt{\mu \cdot \omega}}{l \cdot \sqrt{\gamma} \cdot {}_0F_1\left(1; \frac{j \cdot r_2^2 \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \omega}{4}\right)} \quad (5.23)$$

Intenzitu magnetického a elektrického pole můžeme zapsat ve tvaru

$$\underline{H}_z(r) = \frac{I \cdot N}{l} \frac{{}_0F_1\left(1; \frac{j \cdot r^2 \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \omega}{4}\right)}{{}_0F_1\left(1; \frac{j \cdot r_2^2 \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \omega}{4}\right)}, \quad (5.24)$$

a

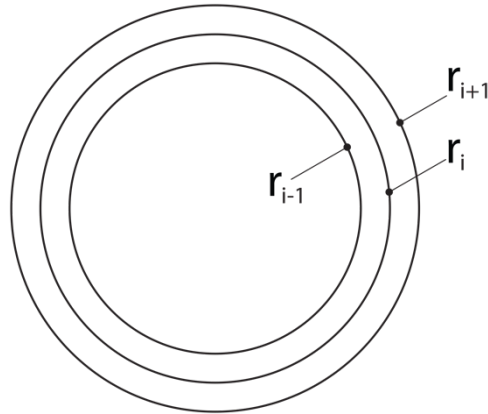
$$\underline{E}_\varphi(r) = - \frac{j \cdot I \cdot N \cdot r \cdot \mu \cdot \omega}{2 \cdot l} \frac{{}_0F_1\left(2; \frac{j \cdot r^2 \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \omega}{4}\right)}{{}_0F_1\left(1; \frac{j \cdot r_2^2 \cdot \gamma \cdot \mu \cdot \omega}{4}\right)}, \quad (5.25)$$

magnetickou indukci můžeme zapsat ve tvaru

$$\underline{B}_z(r) = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \underline{H}_z(r). \quad (5.26)$$

5.2.1. Řešení pomocí metody čar

Pro získání výsledné teplotní křivky je nutno sdružit úlohy podle kap. 4.1. Pro potřeby optimalizace se teplotní pole nebude řešit PDE podle (5.13), ale převodem na soustavu rovnic DAE. Docílíme toho, rozdělíme-li válec po poloměru na n segmentů podle Obr. 5.3, kde každý i -tý segment (r_i) je ovlivněn segmentem zprava (r_{i+1}) a zleva (r_{i-1}).



Obr. 5.3 Řez válce s vyznačeným n -tým segmentem r_i a jeho sousedními segmenty r_{i-1} a r_{i+1}

Zavedením součinitele teplotní vodivosti a

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}, \quad (5.27)$$

můžeme rovnici (5.13) přepsat na soustavu rovnic

$$\frac{\partial T_i(t, r)}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{1}{r_i} \frac{\partial T_i(t, r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_i(t, r)}{\partial r^2} \right) + \frac{w(r_i)}{\rho \cdot c_p}, \quad (5.28)$$

kde jednotlivé parciální derivace vůči r můžeme ze znalostí metody čar přepsat pro pevný krok Δr na

$$\frac{\partial T_i(t, r)}{\partial r} = \frac{T_{i+1}(t) - T_{i-1}(t)}{2 \cdot \Delta r}, \quad (5.29)$$

a

$$\frac{\partial^2 T_i(t, r)}{\partial r^2} = \frac{T_{i+1}(t) + T_{i-1}(t) - 2T_i(t)}{\Delta r^2}. \quad (5.30)$$

Dosazením rovnic (5.29) a (5.30) do (5.28) získáme celý výraz

$$\frac{\partial T_i(t)}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1}(t) - T_{i-1}(t)}{2 \cdot \Delta r} + \frac{T_{i+1}(t) + T_{i-1}(t) - 2T_i(t)}{\Delta r^2} \right) + \frac{w(r_i)}{\rho \cdot c_p} \quad (5.31)$$

Pro variabilní krok je třeba vnést skutečnost odlišné vzdálenosti r_{i+1} a r_{i-1} od r_i . Poté budou jednotlivé parciální derivace podle prostoru vyjádřeny jako

$$\frac{\partial T_i(t, r)}{\partial r} = \frac{T_{i+1}(t) \cdot (r_i - r_{i-1})^2 - T_{i-1}(t) \cdot (r_i - r_{i+1})^2}{(r_i - r_{i-1}) \cdot (r_{i+1} - r_{i-1}) \cdot (r_{i+1} - r_i)} + \frac{T_i(t) \cdot (r_{i+1} - r_{i-1}) \cdot (r_{i+1} + r_{i-1} - 2r_i)}{(r_i - r_{i-1}) \cdot (r_{i+1} - r_{i-1}) \cdot (r_{i+1} - r_i)} \quad (5.32)$$

a

$$\frac{\partial^2 T_i(t, r)}{\partial r^2} = \frac{2 \cdot [T_{i+1}(t) \cdot (r_i - r_{i-1}) + T_{i-1}(t) \cdot (r_{i+1} - r_i) - T_i(t) \cdot (r_{i+1} - r_{i-1})]}{(r_i - r_{i-1}) \cdot (r_{i+1} - r_{i-1}) \cdot (r_{i+1} - r_i)} \quad (5.33)$$

Pro přehlednost zde neuvádím dosazení těchto vyjádření parciálních derivací v rovnici (5.28).

Rovnici (5.28) nelze aplikovat na okrajové segmenty (r_{\min} a r_{\max}), jež je nutno popsat pomocí okrajových podmínek

$$\frac{T_2(t) - T_1(t)}{r_2 - r_1} = 0, \quad (5.34)$$

$$-\lambda \cdot \frac{T_{n-1}(t) - T_n(t)}{r_n - r_{n-1}} = \alpha \cdot (T_n - T_o) + \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_n^4 - T_o^4). \quad (5.35)$$

Objemovou hustotu tepelného výkonu ve fázorovém vyjádření v rovnici (5.28) a (5.31) přepíšeme do tvaru

$$w(r) = \gamma \cdot |E_\varphi(r)|^2. \quad (5.36)$$

kde $E_\varphi(r)$ je vyjádřeno na začátku kap. 5.2.

5.2.2. Řešení pomocí tepelných odporů

Rovnici (5.13) můžeme přepsat na soustavu rovnic

$$m(i) \cdot c_p \cdot \frac{\partial T_i(t)}{\partial t} = \frac{T_{i-1}(t) - T_i(t)}{R_\vartheta(r_i, r_{i-1})} + \frac{T_{i+1}(t) - T_i(t)}{R_\vartheta(r_{i+1}, r_i)} + P(i), \quad (5.37)$$

kde i je pozice segmentu po poloměru válce

Jelikož zde řešíme válcový předmět, tak segmenty jsou válcové tepelné odpory. Využijeme zde jejich popis v kap. 2.3.1 a úpravou rovnice (2.59) získáme

$$R_\vartheta(r_a, r_b) = \frac{1}{2\pi \cdot l \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right). \quad (5.38)$$

Rovnici (5.37) nelze aplikovat na okrajové segmenty. Jsou to segmenty symetrie (r_{\min}) a segment okrajové podmínky na rozhraní (r_{\max}). Tyto dva segmenty popíšeme pomocí rovnic

$$T_1(t) = T_2(t), \quad (5.39)$$

$$\frac{T_{n-1}(t) - T_n(t)}{R_\vartheta(r_n, r_{n-1})} = \pi \cdot l \cdot r_n \cdot [\alpha \cdot (T_n - T_o) + \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_n^4 - T_o^4)]. \quad (5.40)$$

Rovnice (5.37) má jiný rozměr než rovnice (5.13), a proto se v ní vyskytují veličiny $m(i)$ a $P(i)$, které z původní rovnice vycházejí. Jejich úpravou obdržíme

$$m(i) = \varrho \cdot V(i) \quad (5.41)$$

a

$$P(i) = V(i) \cdot w(r_i), \quad (5.42)$$

kde $V(i)$ je

$$V(i) = \frac{l \cdot \pi}{2} (r_{i+1}^2 - r_{i-1}^2). \quad (5.43)$$

Kapitola 6 Optimalizace teplotního profilu

V této kapitole budou řešeny požadavky technologického postupu, kdy máme zadaný profil $T(r, t_{\max})$ na konci procesu. K žádanému profilu se lze přiblížit pomocí modelu. Pomocí optimalizačních metod se lze přiblížit k zadanému teplotnímu profilu na konci procesu, a to pro dva případy. Buď je teplotní pole na konci i -tého intervalu s danými parametry odhadnuto pomocí termografického měření (a následně i látkové vlastnosti) případně je dostupné jen měřením napětí a proudu na induktoru. Vyčíslení účelové funkce vyžaduje řešení elektromagnetického a teplotního pole a představuje časově nejnáročnější část algoritmu.

6.1. Dopředný děj

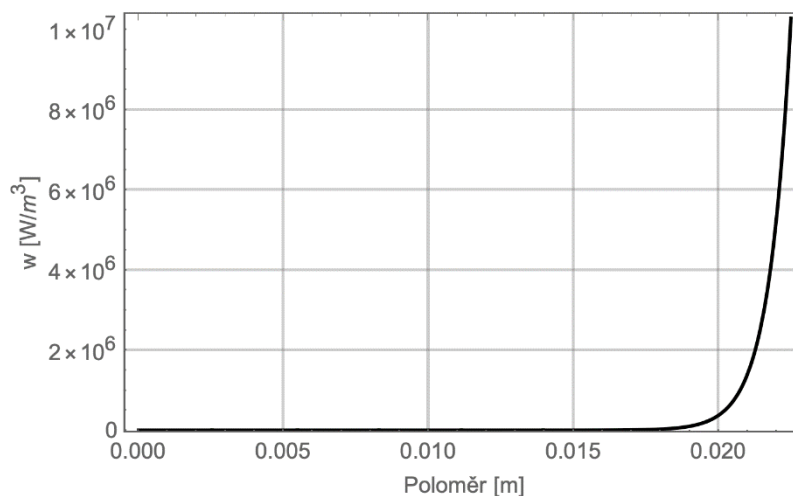
Numerické řešení bylo řešeno pomocí SW Wolfram Mathematica. Cílem této kapitoly je srovnání variant výpočtů indukčního ohřevu řešením PDE podle kap. 5.1.2 s řešením soustav ODE podle kap. 5.2. Výpočetní metodou je metoda čar, jenž je v SW zastoupena funkcí NDSolve. Pro soustavu ODE je nutné zvolit optimální počet segmentů rozdělujících válec, jak je vyznačeno na Obr. 5.3., kdy malý počet vede k větším nepřesnostem při výpočtu a velký počet zvětšuje výpočetní náročnost.

Výpočetní náročnost zobrazuje Tab. 6.1, kde jsou vyznačeny doby pro jednotlivé metody, případně počet rozdělení. Porovnání pro výsledné teplotní průběhy při proudu 160 A, frekvenci 21 kHz a době ohřevu 120 s jsou v grafu na Obr. 6.2 a odchylky od PDE jsou vyneseny v grafu na Obr. 6.2. Prvotním předpokladem bylo zvolení pevného kroku Δr

$$\Delta r = \frac{r}{n - 1} \quad (6.1)$$

kde r je poloměr válce a n je počet rozdělení

Jak je z Obr. 6.2 patrné se zvyšujícím se počtem n se zvyšuje přesnost s PDE ale na úkor výpočetové náročnosti (Tab. 6.1). Pro optimalizaci bylo nutno nalézt řešení takové, aby přesnost výpočetní metody byla srovnatelná s PDE při malých výpočetních náročnostech. Vyčísleme-li si objemovou hustotu výkonu podle (5.17) zjistíme, že s násobkem hloubky vniku nám prudce klesá, proto nás hlavně bude zajímat více u hrany válce než v jeho symetrii.



Obr. 6.1 Vyčíslení objemové hustoty výkonu w při $I=160$ A a $f=21$ kHz ve válci

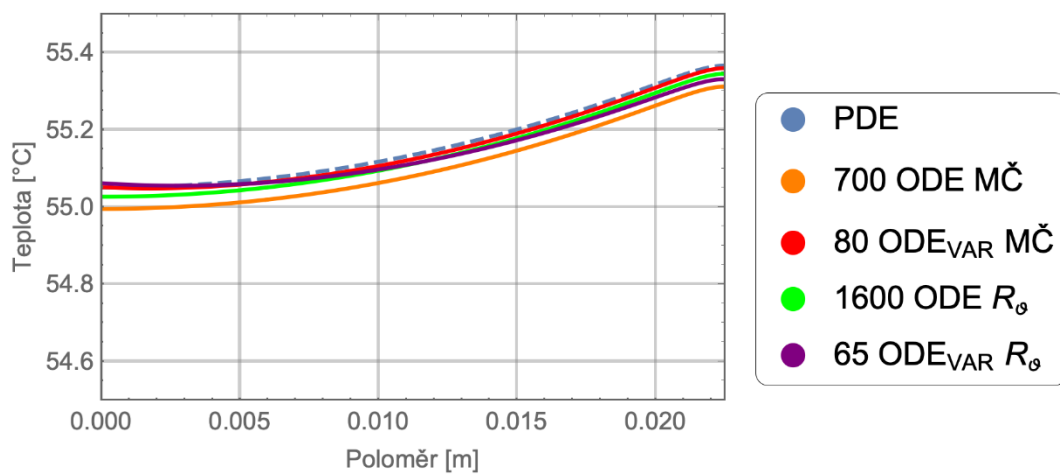
Proto jsem se rozhodl přejít od rovnoměrnému rozdělení k rozdělení variabilnímu, který popisuje rovnice (6.2)

$$r_i = a + \frac{b}{i} + c \cdot \ln i \quad (6.2)$$

kde a, b, c jsou konstanty a $i \in \mathbb{N}$

pro $n = 200$ vycházejí konstanty $a = 5,613 \cdot 10^{-3}$, $b = 5,603 \cdot 10^{-3}$ a $c = 3,192 \cdot 10^{-3}$
 pro $n = 65$ vycházejí konstanty $a = 5,583 \cdot 10^{-3}$, $b = 5,573 \cdot 10^{-3}$ a $c = 4,073 \cdot 10^{-3}$

Jak je patrné z Tab. 6.1 tak z grafu (Obr. 6.2) tak toto rozdělení je nejenom rychlejší, ale zároveň s velkou přesností. Druhé zjištění vyplývající z grafu a tabulky je výběr metody podle kap. 5.2, kde časově úspornější metodou je variabilní metoda tepelných odporů, proto bude tato metoda použita v algoritmu.



Obr. 6.2 Porovnání výsledků výpočtu teplotního pole pomocí PDE a soustav rovnic ODE

Tab. 6.1 Doby výpočtů jednotlivých metod

Typ	Doba výpočtu [s]
PDE	4,52
ODE 1600 R_θ	16,9
ODE 700 MČ	0,51
ODE _{VAR} 80 MČ	0,12
ODE _{VAR} 65 R_θ	0,06

6.2. Optimalizace zpětného děje

Problém byl řešen několika optimalizačními algoritmy jak deterministickými (gradientní metoda a Nelder-Meadova metoda) tak heuristickými (metoda diferenciální evoluce a metoda simulovaného žíhání). Účelová funkce byla vybrána

$$\sum_i \left(T_{\text{zad}}(r_i) - T_{\text{vyp}}(r_i) \right)^2, \quad (6.3)$$

kde $T_{\text{zad}}(r_i)$ je teplotní průběh zadaný podle technologického požadavku a $T_{\text{vyp}}(r_i)$ jsou hodnoty teplot v jednotlivých bodech daných výpočtem podle kap. 5.2.1 nebo kap. 5.2.2.

Gradientní metoda byla popsána v kap. 4.5.3, podrobnosti o této metodě lze nalézt také v [40], [41] a [42].

Nelder – Meadova metoda je metoda přímého vyhledávání. Pro funkci s proměnnými n udržuje algoritmus množinu $n + 1$ bodů tvořících vrcholy polytopu v n rozměrném prostoru. Tato metoda se často nazývá „simplexní“ metoda, která by neměla být zaměňována se známou simplexní metodou pro lineární programování. Podrobnosti lze dočíst v [43] a [44].

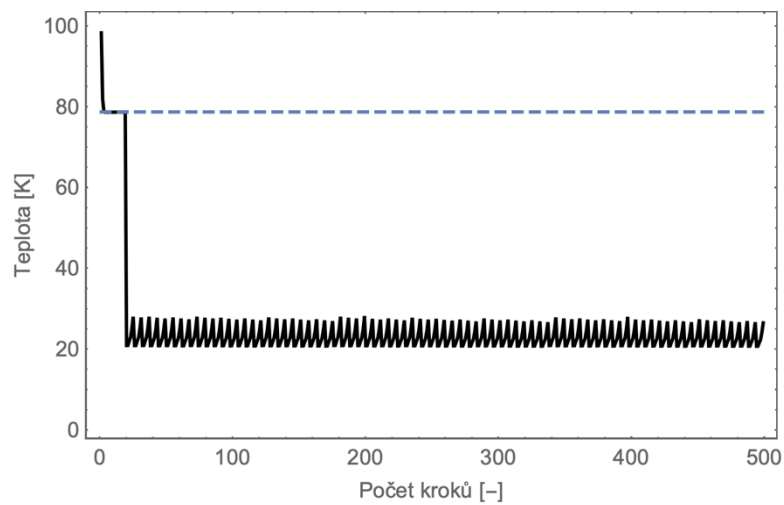
Diferenciální evoluce je jednoduchý stochastický minimalizátor funkcí. Algoritmus udržuje populaci m bodů, $\{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_m\}$, kde obvykle $m \gg n$, n je počet proměnných. Během každé iterace algoritmu generuje novou populaci m bodů. Nový bod j se vygeneruje výběrem tří náhodných bodů, x_u, x_v a x_w ze staré populace a vytvořením $x_s = s_w + s(x_u - x_v)$, kde s je skutečný faktor měřítka. Pak se vytvoří nový bod x_{new} z x_j a x_s převzetím souřadnice i z x_s s pravděpodobností ρ a jinak převzetím souřadnice z x_j . Pokud $f(x_{\text{new}}) < f(x_j)$, pak x_{new} nahradí x_j v populaci. Více podrobností lze najít v [45], [46] a [47].

Simulované žíhání je jednoduchý minimalizátor stochastických funkcí. To je motivováno procesem fyzického žíhání, kde je kovový předmět zahříván na vysokou teplotu a ponechán k pomalému ochlazení. Tento proces umožňuje usazení atomové struktury kovu ve stavu nižší energie, čímž se vytvoří tvrdší kov. Díky optimalizační terminologii umožňuje žíhání strukturu uniknout z místních minim a prozkoumat a usadit se na lepším, možná globálním minimu. Podrobnosti najdete v [48], [49] a [50].

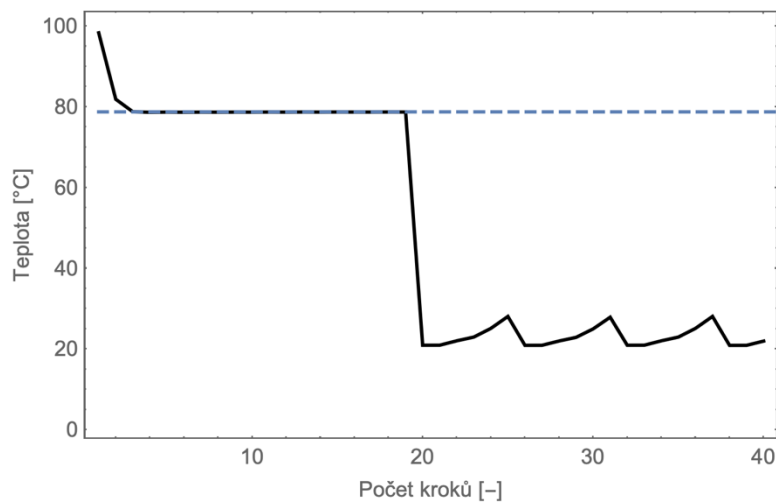
6.2.1. Porovnání optimalizačních metod

Teplotní profil byl vybrán z dopředného řešení pro ověření optimalizačních metod na některých ilustrativních příkladech. Cílem je vybrat a ověřit metodu optimalizace, která poskytne co nejrychlejší možné řešení s dostatečnou přesností. Pro srovnání byly vybrány následující metody: gradientní metoda, Nelder-Meadova metoda, metoda diferenciální evoluce a metoda simulovaného žíhání. Pro každou z testovaných metod je prezentováno grafické znázornění konvergence v závislosti na počtu kroků a grafické znázornění chyby na poloměru válce. V Tab. 6.2 jsou jasně uvedeny všechny metody a jejich minimální doby vyhledávání, počet kroků a nejvyšší chyba. Test pro všechny metody byl podobný, bylo nutné najít n proudů a n frekvencí. Již pro $n = 4$ odpovídá teplotní křivka předem zadané křivce.

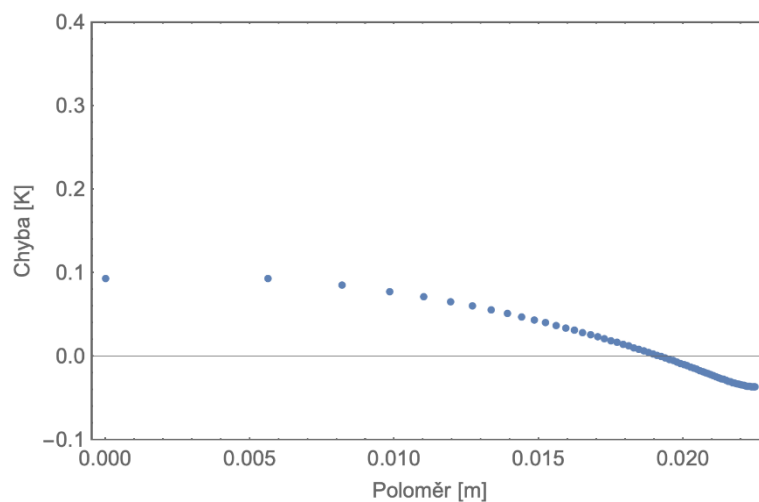
První testovanou metodou byla gradientní metoda. Jak je vidět na Obr. 6.3 a Obr. 6.4, požadovanou hodnotu najde po několika krocích, ale stále se snaží najít správnější hodnotu a po 499 krocích algoritmus skončí a vyhodnotí nejmenší z minim, jež spočítal.



Obr. 6.3 Vývoj teploty v každém kroku pro gradientní metodu

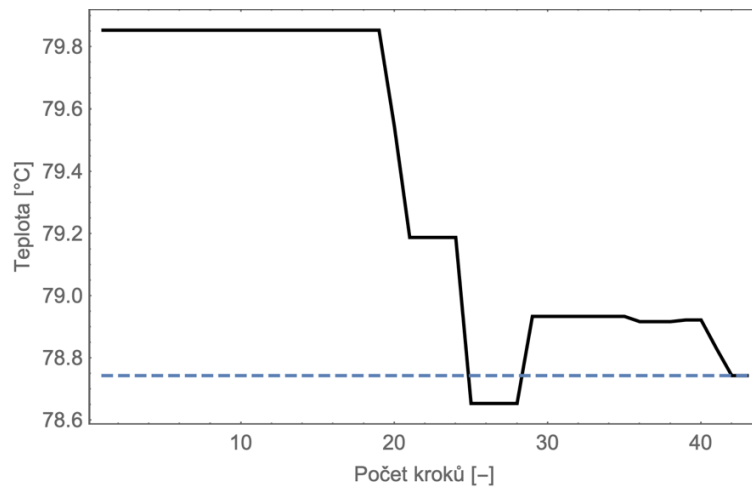


Obr. 6.4 Přiblížení prvních 40 kroků z Obr. 6.3

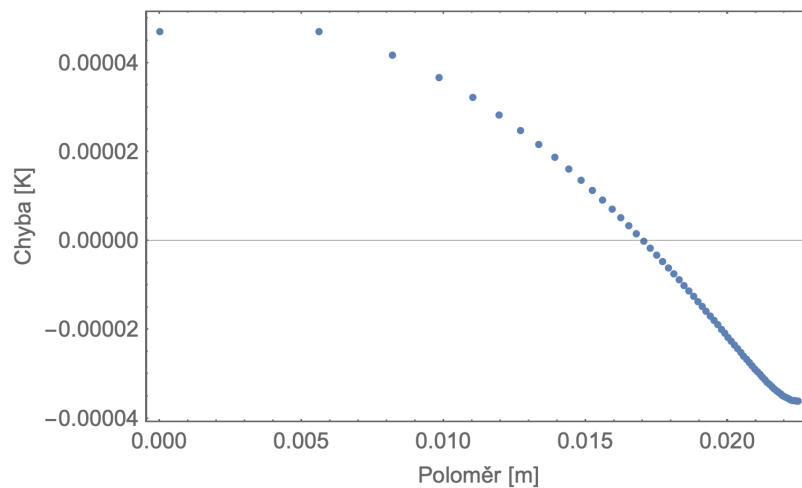


Obr. 6.5 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro gradientní metodu

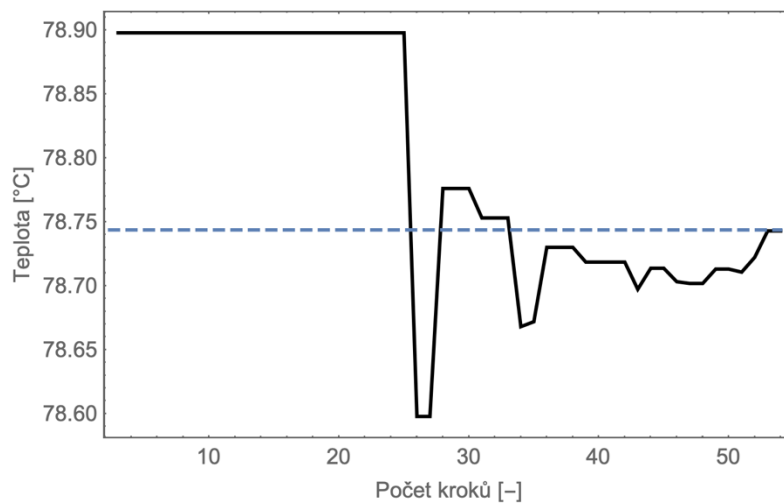
Nelder – Meadova metoda byla testována ve dvou variantách, s random seed (náhodné semínko) a bez něho. Jak je znázorněno na Obr. 6.6, pro tuto metodu stačí provést mnohem méně kroků než u gradientní metody, abychom našli nejpřesnější hodnotu, ale pro variantu s random seed = 100 je počet kroků vyšší (Obr. 6.8).



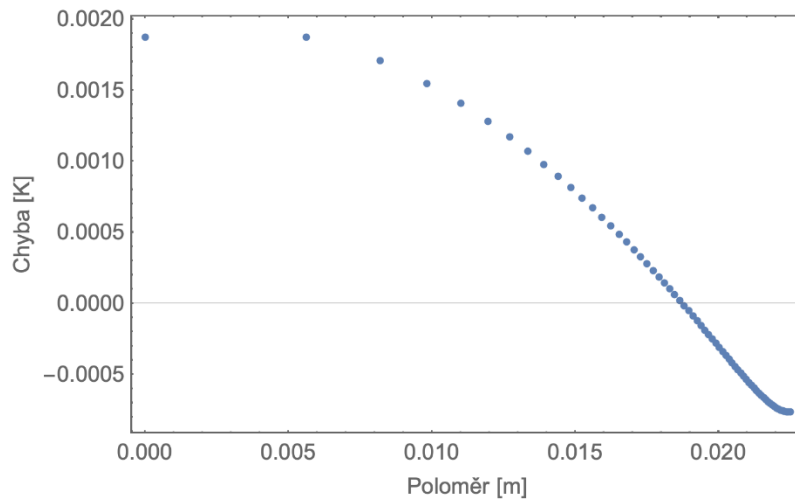
Obr. 6.6 Vývoj teploty v každém kroku pro Nelder – Meadovu metodu



Obr. 6.7 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro Nelder – Meadovu metodu

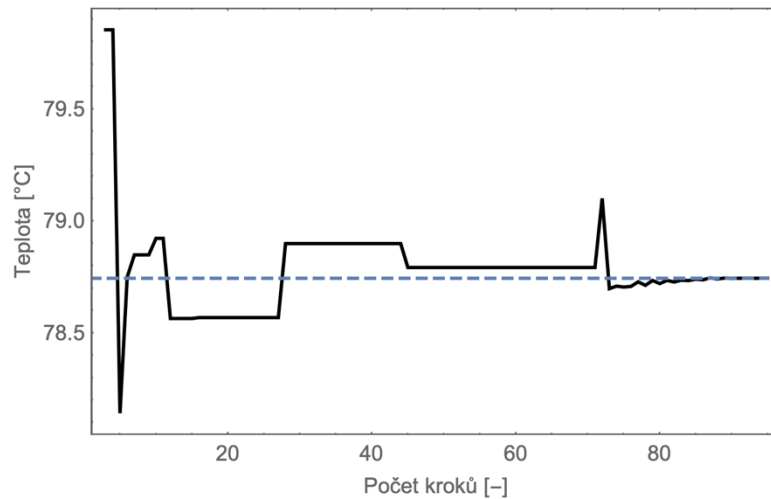


Obr. 6.8 Vývoj teploty v každém kroku pro Nelder – Meadovu metodu s random seed

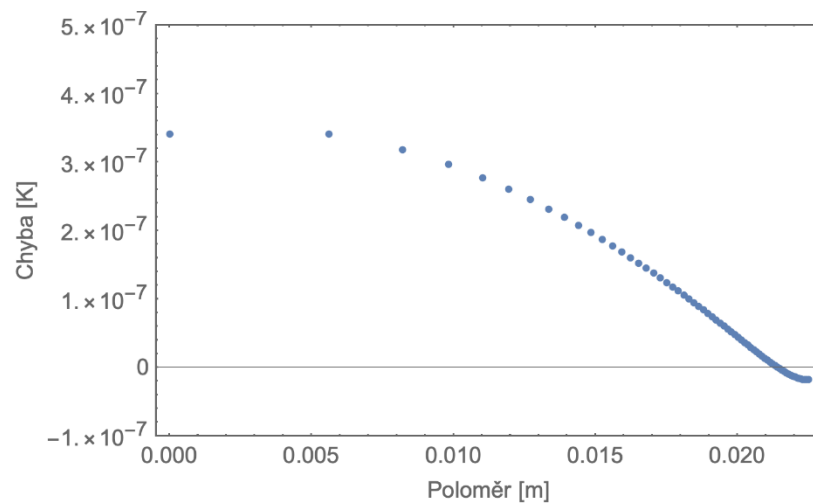


Obr. 6.9 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro Nelder – Meadovu metodu s random seed

Třetí testovanou metodou je diferenciální evoluce. Obr. 6.10 ukazuje, že se jedná o nejpřesnější metodu, která ale vyžaduje velký počet kroků.

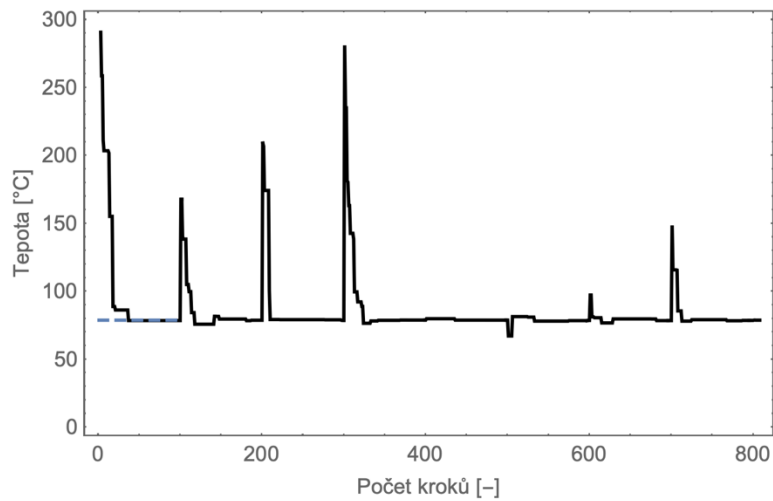


Obr. 6.10 Vývoj teploty v každém kroku pro metodu diferenciální evoluce

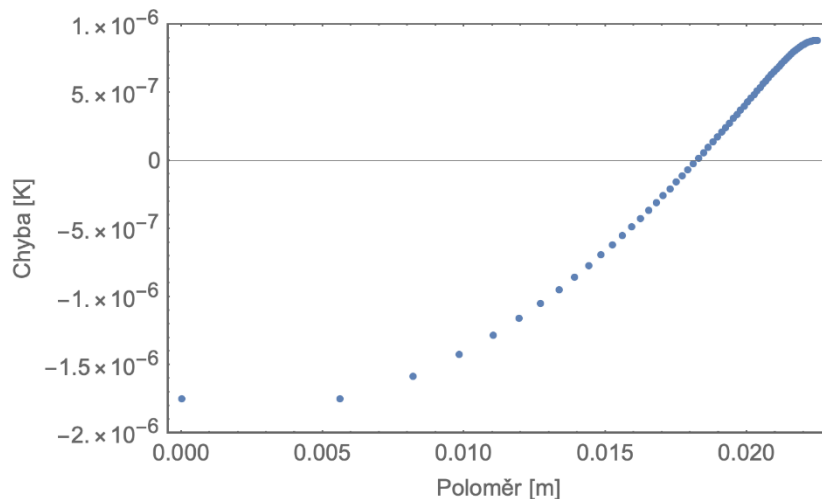


Obr. 6.11 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro metodu diferenciální evoluce

Poslední metoda byla simulované žihání. Je zřejmé, že optimální je hledáno při velkém počtu kroků (Obr. 6.12), ale s velmi malou chybou (Obr. 6.13).



Obr. 6.12 Vývoj teploty v každém kroku pro metodu simulovaného žihání



Obr. 6.13 Chyba teploty v závislosti na poloměru válce pro metodu simulovaného žihání

Testování jednotlivých metod bylo provedeno za účelem vyhodnocení nejrychlejší metody pro optimalizaci zdroje, jak je popsáno v úvodu kapitoly. Metody jsou shrnuty v Tab. 6.2. Je zřejmé, že diferenciální evoluce je nejpomalejší metoda (avšak ne s nejvyšším počtem kroků). Není to překvapivé, tato metoda je nej přesnější, ale nepoužitelná pro optimalizaci zdrojů. Podobně je na tom metoda simulovaného žihání, i když její doba výpočtu není tak dlouhá jako doba diferenciální evoluce, ale stále není zdaleka použitelná. Nelder – Meadovu metodu pro žádnou z možností nelze použít, doba výpočtu přesahuje jednu minutu, což je pro on-line řízení také nepoužitelné. Navzdory velkému počtu kroků je tedy nejrychlejší a pro naše aplikace nejvýhodnější gradientní metoda.

Tab. 6.2 Porovnání jednotlivých metod na počtem kroků, času a chybách

Metoda	Kroky [-]	Doba výpočtu [s]	Max. ΔT [K]
Gradientní	499	29	10^{-1}
Nelder Meadova	43	85	$26 \cdot 10^{-5}$
Nelder Meadova s random seed	54	65	$18 \cdot 10^{-4}$
Diferenciální evoluce	95	1082	$3,4 \cdot 10^{-7}$
Simulované žíhání	808	396	$1,8 \cdot 10^{-6}$

6.2.2. Optimalizace ostré křivky

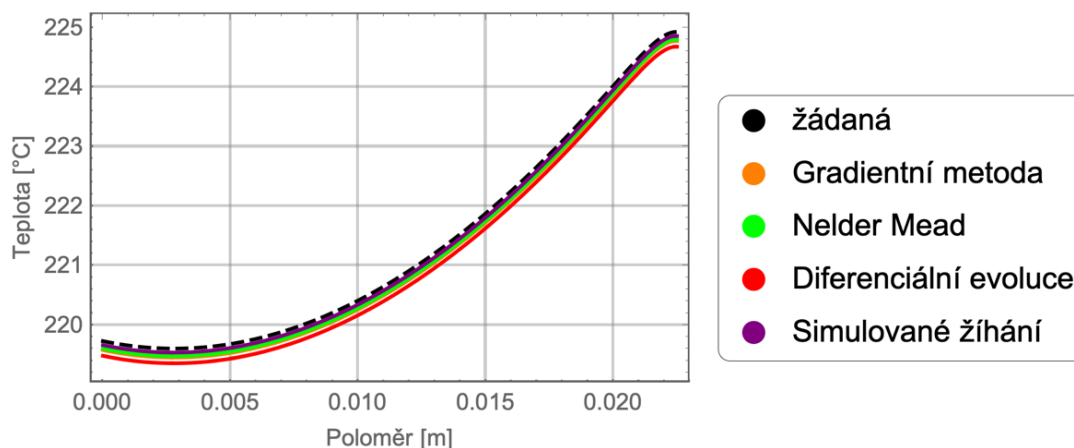
Další ukázkou jednotlivých optimalizačních metod je aplikování na teplotní křivku požadovanou v krátkém čase simulace. Tako křivka je vynesena na Obr. 6.14 (čárkovaná čára) a představuje technologické požadavky s velkou ostrostí teploty na poloměru válce.

Výsledky jsou slibné v Tab. 6.3 jsou uvedeny jednotlivé metody a jejich vyčíslení frekvencí a proudů v každém kroku s celkovou průměrnou chybou.

Tab. 6.3 Porovnání výsledků jednotlivých metod a jejich chyba

Metoda	I_1 [A]	f_1 [Hz]	I_2 [A]	f_2 [Hz]	I_3 [A]	f_3 [Hz]	I_4 [A]	f_4 [Hz]	ΔT [K]
Gradientní	811	21500	834	21500	857	21500	700	21500	$3 \cdot 10^{-5}$
Nelder Meadova	993	21500	750	21500	735	21500	700	21500	$3,5 \cdot 10^{-9}$
Diferenciální evoluce	849	21500	801	21500	851	21500	700	21500	$2,4 \cdot 10^{-9}$
Simulované žíhání	902	21500	786	21500	811	21500	700	21500	$1,2 \cdot 10^{-12}$

Výsledky jsou velice slibné, obzvláště velikosti průměrných chyb. Výsledky a následné porovnání jednotlivých metod s žádanou křivkou jsou vyneseny v grafu na Obr. 6.14.



Obr. 6.14 Výsledky jednotlivých metod v porovnání s požadovanou křivkou teplotního průběhu

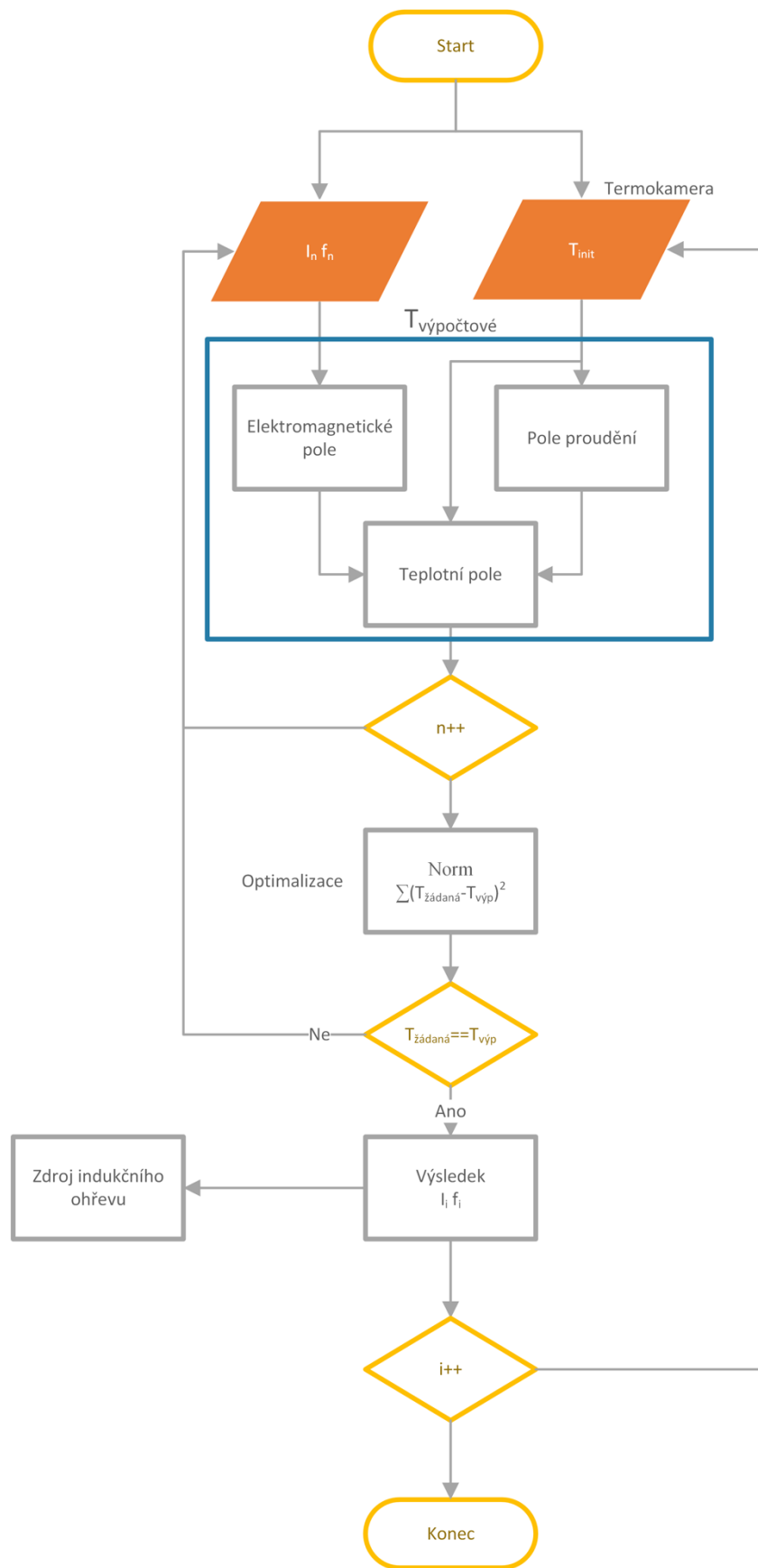
6.3. Algoritmus optimalizace

Hledání optimální křivky je rozděleno na n kroků, ve kterých je hledán proud I a frekvence f . Celý proces pracuje spočtením všech n hodnot I a f v i -tém časovém kroku a nastavením hodnot na zdroji. Každý krok je zdokonalen měřením z termokamery, kde přímé měření v i -tém kroku slouží jako nová mezní podmínka teploty na poloměru válce. V dalším kroku se již počítají pouze zbývající kroky $n - 1$, a protože předchozí hodnoty I jsou již nastaveny, je časová náročnost optimalizace menší. Algoritmus pokračuje až do doby, kdy $n - 1 = 0$. V tom okamžiku algoritmus končí s požadovanou teplotní křivkou. Vývojový diagram je znázorněn na Obr. 6.16.

Celý experiment byl prováděn na válcovém ingotu o průměru $d = 45$ mm a délce $l = 100$ mm, který byl vložen do induktoru napájeného ze zdroje harmonického proudu. Samotný ingot byl obarven speciální termografickou stříkací barvou s vysokou emisivitou LabIR® Paint. Tato emisní barva má přesně definované fyzikální vlastnosti a závislost emisivity na vlnové délce i úhlu pohledu.



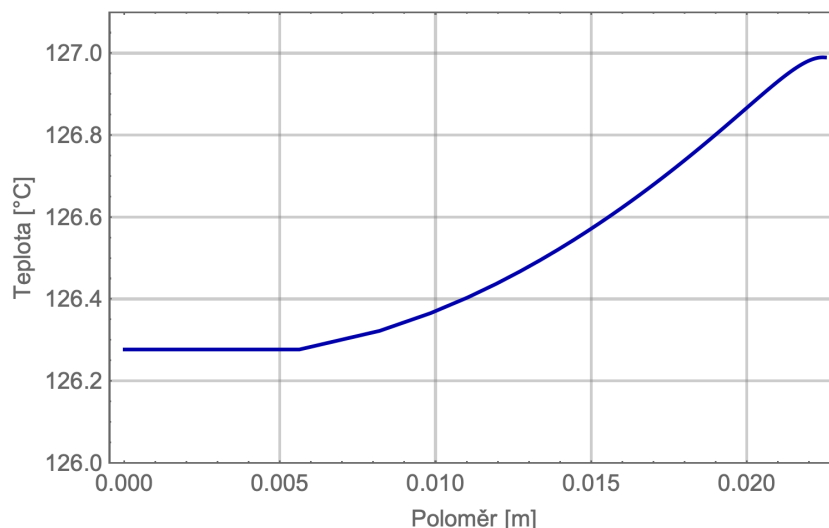
Obr. 6.15 Pohled na induktor a vsázku



Obr. 6.16 Algoritmus celého procesu optimalizace řízení zdroje

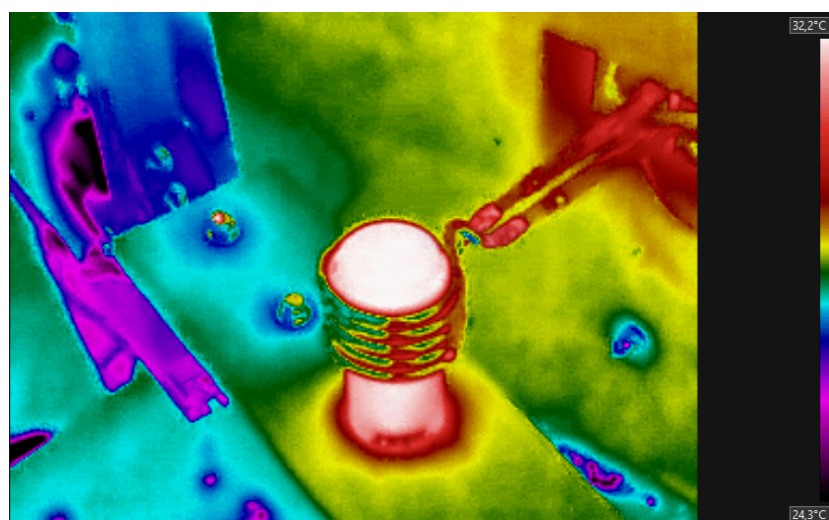
6.4. Experiment

Zadaná vyhledávací křivka na Obr. 6.17 je vhodná pro žihání hliníkového válce. Definovaná křivka v experimentu je vyžadována po 174 s v $n = 4$ krocích. Parametry zdroje napájení umožňují nepřetržité streamování proudu, ale nespojitě nastavení frekvence. Důvodem je rezonanční obvod. Proto optimalizační proces také hledá spojitě hodnoty proudu a nespojitě hodnoty frekvence. Hledají se proudy pro $I_{\max} = 500$ A a frekvence v této sérii: 13 kHz; 16,5 kHz; 17,5 kHz; 21,5 kHz; 25 kHz.



Obr. 6.17 Požadovaná teplotní závislost na poloměru válce

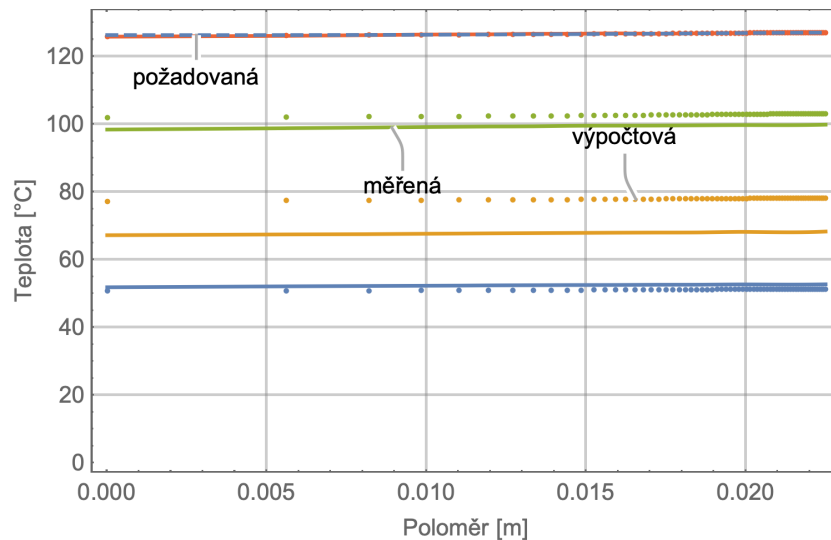
Teplotu ingotu můžeme skenovat pomocí termokamery (Obr. 6.18), kterou použijeme pro nové počáteční teploty ve výpočtu podle vývojového diagramu (Obr. 6.16).



Obr. 6.18 Termografické měření

Přestože dle kap. 6.2 vyšla gradientní optimalizační metoda jako nejvýhodnější, bude zde prezentováno porovnání optimalizace zdroje pro všechny testované metody, tj. gradientní, Nelder Meadovu, diferenciální evoluci a simulované žihání. Cílem tohoto porovnání je ukázat rozdíly v jednotlivých metodách, v případě budoucího zvýšení výpočetního výkonu, kdy si metody budou navzájem časově konkurenceschopné.

Výsledky gradientní metody jsou vyneseny v grafu (Obr. 6.19), kde je znázorněn vývoj vypočtených a změřených teplot v každém kroku. Je zřejmé, že se křivky v posledním kroku sloučí. Výsledky proudů a kmitočtů jsou uvedeny v Tab. 6.4. Pouze tučné hodnoty v tabulce jsou vždy nastaveny na zdroji v i -tém kroku.

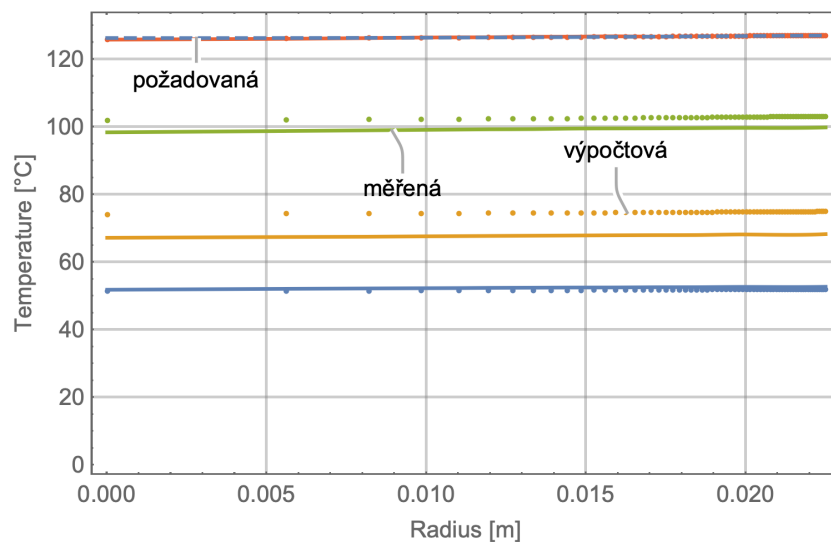


Obr. 6.19 Výsledky jednotlivých kroků pro gradientní metodu

Tab. 6.4 Proudů a frekvence v každém kroku pro gradientní metodu

i	1		2		3		4	
n	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]
1	148,9	21500	148,2	21500	203,4	21500	202,6	21500
2			155,5	21500	208,9	21500	194,4	21500
3					216,9	21500	194,2	21500
4							205,9	21500

Další testovanou metodou je metoda Nelder Meadova.

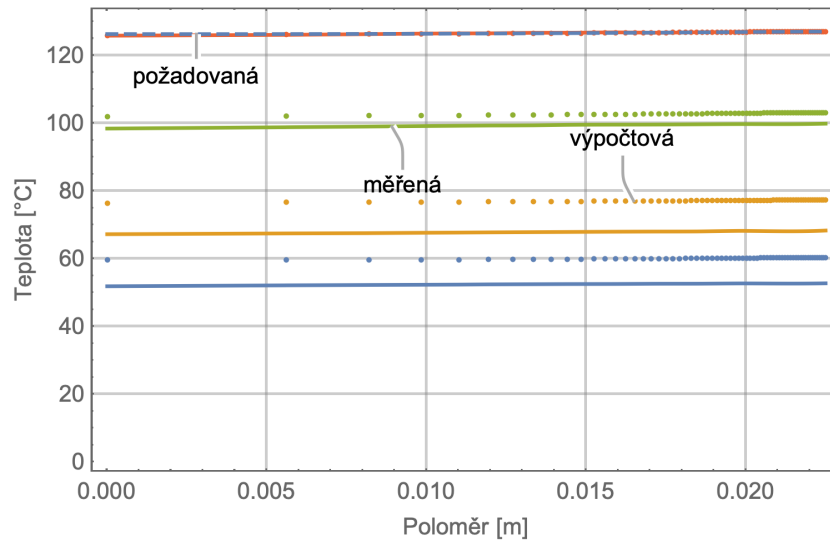


Obr. 6.20 Výsledky jednotlivých kroků pro metodu Nelder-Meadovu

Tab. 6.5 Proudý a frekvence v každém kroku pro metodu Nelder-Meadovu

i	1		2		3		4	
n	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]
1	151,4	21500	141,2	21500	208,3	21500	200,5	21500
2			169,5	21500	199,8	21500	192,9	21500
3					216,8	21500	194,2	21500
4							205,9	21500

Metoda diferenciální evoluce také splňuje podobnost předchozích metod

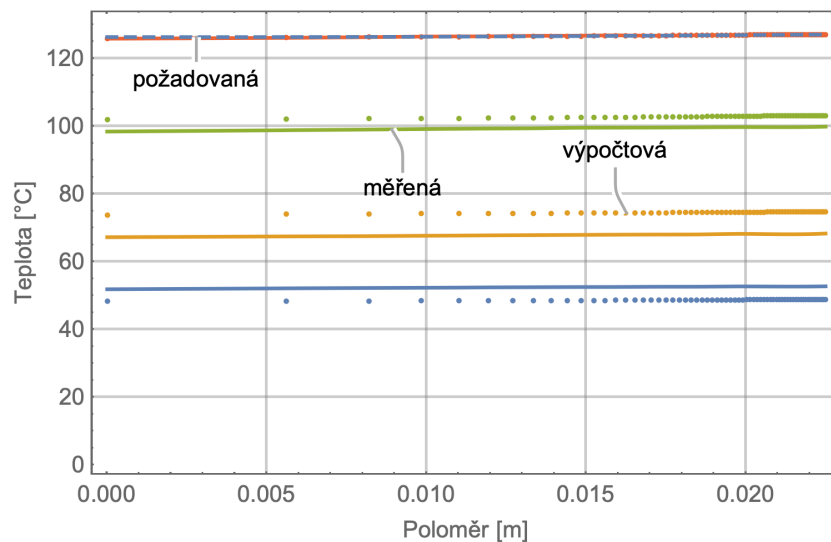


Obr. 6.21 Výsledky jednotlivých kroků pro metodu diferenciální evoluce

Tab. 6.6 Proudý a frekvence v každém kroku pro metodu diferenciální evoluce

i	1		2		3		4	
n	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]
1	180,0	21500	133,8	21500	190,5	21500	200,5	21500
2			177,8	21500	192,7	21500	192,8	21500
3					216,9	21500	194,1	21500
4							205,9	21500

Metoda simulovaného žhání se příliš neliší ode všech předchozích testovacích metod.



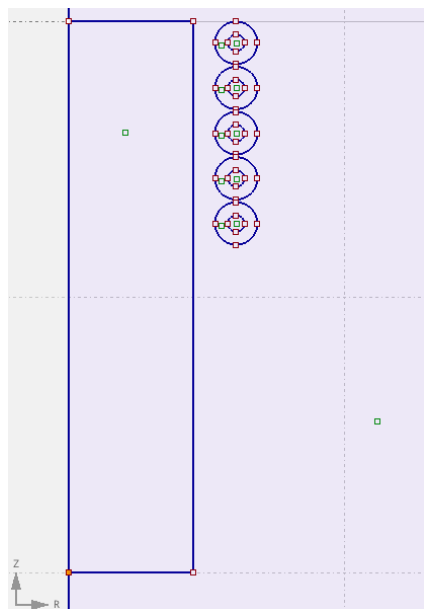
Obr. 6.22 Výsledky jednotlivých kroků pro metodu simulovaného žhání

Tab. 6.7 Proudy a frekvence v každém kroku pro metodu simulovaného žhání

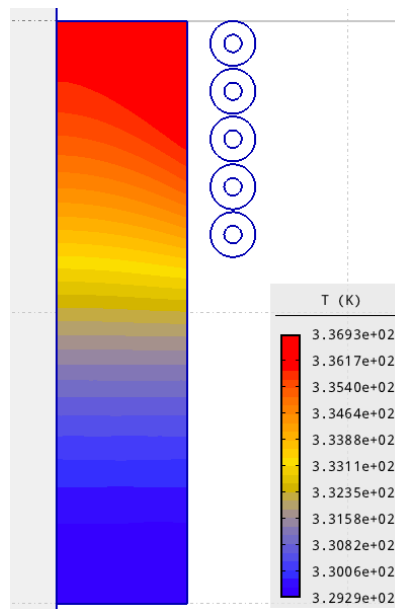
i	1		2		3		4	
n	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]	I_n [A]	f_n [Hz]
1	138,9	21500	135,3	21500	219,5	21500	200,5	21500
2			168,5	21500	200,6	21500	192,8	21500
3					216,9	21500	194,1	21500
4							205,9	21500

6.5. 2D FEM Model

Zjednodušení 1D, které bylo použito k rychlejší optimalizaci je zde ověřeno na 2D modelu, který je výpočtově náročnější. Nejprve bylo třeba vytvořit FEM model v software Agros2D který reprezentuje reálné zařízení IH s válcovým ingotem (Obr. 6.23).

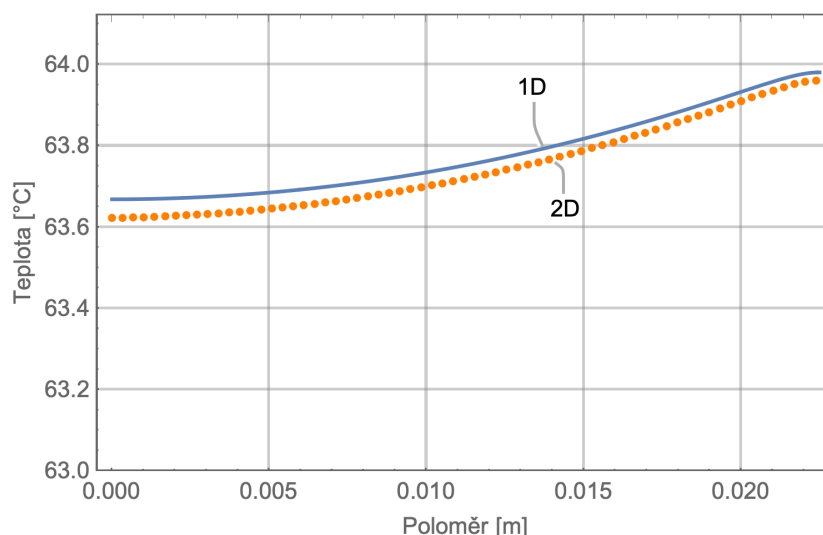


Obr. 6.23 Geometrie rotačně symetrického tělesa v Agros2D



Obr. 6.24 Výsledek 2D FEM modelu v Agros2D

Ve 2D modelu byly nastaveny vstupní hodnoty jak látkových parametrů, tak okrajových podmínek shodné s 1D modelem (kap. 5.2). Řešič software Agros2D byl popsán v Kapitola 4 a výsledné 2D teplotní pole je zobrazeno na Obr. 6.24 a porovnání s 1D je vyneseno v grafu na Obr. 6.25.



Obr. 6.25 Porovnání 1D a 2D řešení válce

Z výše uvedeného vyplývá, že výsledky modelu 2D FEM jsou blízké výsledku modelu 1D. Je tak zřejmé, že řešení uvedeného problému pomocí 2D FEM modelu je zbytečně časově náročné a v tomto ohledu nevhodné pro optimalizaci.

Kapitola 7 Závěr

7.1. Přehled výsledků a přínosů disertační práce

Tato práce řeší inverzní problém technologického požadavku pro metalurgické operace, jakými jsou např. žíhání nebo kalení. Předtím než došlo k řešení optimalizačních metod, bylo zapotřebí se zabývat matematickým modelem dopředným směrem. Variabilita metalurgických aplikací, ale i různorodost materiálových vlastností se odrazila v zaměření a použitelnosti některých známých matematických modelů. Lineární modely nebylo vhodné použít na typicky nelineární materiály jakými je například ocel. Nelineární dopředný model byl mnou publikován v [12], ovšem za cenu velké výpočtové náročnosti. Lineární i nelineární matematické modely se řešili sofistikovanými numerickými řešiči jak pro 1D tak pro 2D problémy. Numerický řešič v SW Wolfram Mathematica využívaný převážně v této práci (popsaný v kap. 4.2) dokáže vyřešit zadanou PDE, jako je rovnice popisující teplotní pole (kap. 2.2.1) nebo rovnice popisující elektromagnetické pole (kap. 2.1) za podmínky delší doby výpočtu. Sdružení polí (zde elektromagnetického a teplotního) sebou nese další výpočtovou náročnost, která je však třeba k určení přesných výsledků při přesných vstupních parametrech.

Zjednodušení modelů bez velkých ztrát přesností byl prvním krokem před možnostmi inverzní optimalizace. Matematickým modelem založený na rozdělení válce do n vrstev, kde každá je popsána ODE podle času bez uvažování prostoru, jsem získal nástroj pro řešení teplotního pole s výpočtovou náročností konkurující dosavadní solvery PDE. Ovšem mít nástroj k řešení soustav ODE nebylo před získáním odpovídající přesnosti efektivní. Jednotlivé vrstvy bylo nutno fyzikálně popsat, první možností bylo využití znalosti metody čar a rovnici popisující teplotní pole (kap. 2.2.1) přepsat na soustavu ODE, druhou možností bylo popsat vrstvy jako diferenciální válcové tepelné odpory. Žádná z těchto metod zprvu nevykazovala zásadní zlepšení výpočtové náročnosti. Optimální přesnost byla vykoupena velkým počtem vrstev, se kterými rostla i náročnost na výpočty. Vzhledem ke znalosti elektromagnetického pole a jeho postupného ubývání po poloměru (odpovídající hloubce vniku) jsem dospěl k závěru, že není vhodné mít po celém poloměru stejně široké vrstvy, a tak došlo k využití variabilního rozdělení jednotlivých vrstev. V této chvíli se výpočtová náročnost změnila výrazně, ač s překvapením, lepší metodou byla která využívala diferenciální válcové tepelné odpory.

Když existoval nástroj, který spolehlivě a rychle zvládal řešení dopředného děje bylo možno zabývat se inverzními optimalizačními postupy. Požadavek technologického postupu, kdy je zadán profil $T(r, t_{\max})$ na konci procesu řeší inverzní problém. K žádanému profilu se lze dostat změnou okrajových podmínek, tj. lze měnit proud a frekvenci. Principem optimalizace je rozdělení časového intervalu (kde na konci intervalu je žádaný profil) do n intervalů a v každém i -tém kroku je třeba vyřešit optimalizační úlohu. Účelovou funkci lze řešit různými optimalizačními metodami. Byly zkoušeny tyto metody: gradientní, Nelder-Mead, diferenciální evoluce a simulované žíhání. Velké naděje jsem sázel na metodu diferenciální evoluce ovšem krom velmi přesného výsledku byla této metoda nejpomalejší (pro online nasazení zcela zásadní nedostatek), překvapivě se slušnou přesností a velmi rychlou byla gradientní metoda.

Tyto cíle práce byly tímto splněny:

- Shrnutí vlastností sdružených úloh elektromagnetického pole, tepelného pole a pole proudění na aplikace indukčního ohřevu
- Vytvoření matematického modelu sdružením polí pro přímý problém
- Optimalizace inverzní úlohy matematického modelu

Porovnání různých optimalizačních algoritmů, jak bylo predikováno v cílech práce, bylo aplikováno na definované křivky průběhu teplot podél poloměru válce pro tyto případy:

- Na předem získané výsledky z přímého problému pro ověření platnosti algoritmu
- Na ostré požadované křivky potřebné pro rychlé děje
- Na požadované křivce, která není příliš ostrá

Vstupní počáteční podmínka v i -tém kroku byla snímána termograficky. Výsledky byly ověřeny termografickým pozorováním a 2D FEM modelem.

7.2. Náměty dalšího rozvoje práce

Následující body charakterizují další možný rozvoj:

- Zefektivnění a celkové zrychlení vytvořeného algoritmu i na velmi rychlé děje. Rychlé děje k použitelnosti v inverzních optimalizacích požadují výsledky ve velmi krátkých intervalech. To lze docílit buď hardwarovým upgradem anebo zdokonalením optimalizačních metodik.
- Nasazení optimalizace i na další fyzikální pole (např. pole termoelastických posuvů). Nasazením algoritmu se sdružením elektromagnetické pole, teplotního pole a pole proudění bylo prvním krokem optimalizace. Ovšem existují další pole, která svým působením ovlivňují celý sledovaný objekt. Přidáním těchto polí se algoritmus též může zaměřit na další podmínky požadované v budoucích zadáních.
- Využití u designů jiných geometrických tvarů. Práce se zabývá použitím algoritmu na válcové objekty, a to z důvodu ověření a použitelnosti vytvořeného algoritmu. Prosazení algoritmu na vyšší úrovně designů se díky tomu docílí celé řady možností využití do této doby nezvládnutých metalurgických zadání.
- Rozšíření a úprava algoritmu pro možnost ohřevu využívající několika frekvencí současně. Do této doby algoritmus počítá s využitím jedné harmonické frekvence proudu v každém okamžiku. Budoucí nasazení inverzní optimalizace i na využívání více frekvencí naráz by podobně jako v předchozím bodě napomohlo v řešení problematických metalurgických aplikací.

Kapitola 8 Literatura

- [1] J. Lucas, *Electromagnetic induction and electric conduction in industry*, Paris: Centre Français de l'Électricité, 1997, Electra, ISBN 2-86995-022-5.
- [2] A. Aliferov, S. Lupi, and M. Forzan, *Induction and direct resistance heating: Theory and numerical modeling*, Switzerland: Springer International Publishing AG, 2014, ISBN 978-3-319-03478-2.
- [3] M. K. Kazimierczuk and D. Czarkowski, *Resonant power converters*, United States: Wiley, John & Sons, 2011, ISBN 978-0-470-90538-8.
- [4] D. MAYER, *Aplikovaný elektromagnetismus: úvod do makroskopické teorie elektromagnetického pole pro elektrotechnické inženýry*, 2, vyd. České Budějovice: Kopp, 2012, ISBN 978-80-7232-436-1.
- [5] J. RADA, *Elektrotepelná technika*, 1. vyd. Praha: SNTL, 1985.
- [6] E. LANGER, *Teorie indukčního a dielektrického tepla*, 2. přep. a dop. vyd. Praha: Academia, 1979.
- [7] M. Kuczmann, A. Iványi, *The Finite Element Method in Magnetics*, Academic Press, 2008, Budapest.
- [8] J. H. Lienhard, *A heat transfer textbook*, United States: Prentice Hall, 1987, ISBN 978-0133850895,
- [9] J. KALČÍK, *Technická termodynamika*, 2. vyd. Praha: Československá akademie věd, 1973.
- [10] Z. Novák, *Sdílení tepla konvekcí*, Praha, 2010, Bakalářská práce, ČVUT v Praze, Vedoucí práce Ing. Ladislav Musil, Ph.D.
- [11] Z. Novák, *Zdroje pro vysokofrekvenční ohřevy* [online], Praha, 2012, Dostupné z: <http://hdl.handle.net/10467/10908>, Diplomová práce, ČVUT v Praze, Vedoucí práce doc. Dr. Ing. Jan Kyncl.
- [12] Z. Novák, Electromagnetic and temperature coupled problems in Wolfram Mathematica. In: POSTER 2014 - 18th International Student Conference on Electrical Engineering. 18th International Student Conference on Electrical Engineering, Praha, 2014-05-15. Prague: Czech Technical University, 2014. ISBN 978-80-01-05499-4.
- [13] L. Musálek, Z. Novák, L. Žák and L. Straka, "Model and optimization of induction heating for annealing rotationally symmetrical bodies," 2016 17th International Scientific Conference on Electric Power Engineering (EPE), Prague, 2016, pp. 1-4.
- [14] L. A. M. D'Angelo and H. De Gerssem, "Quasi-3-D Finite-Element Method for Simulating Cylindrical Induction-Heating Devices," in *IEEE Journal on Multiscale and Multiphysics Computational Techniques*, vol. 2, pp. 134-141, 2017.
- [15] H. Sugimura, H. Omori, H. W. Lee and M. Nakaoka, "PDM Controlled Series Load Resonant Soft Switching High Frequency Inverter for Induction Heated Toner Fixing Outer Roller with Inner Cylindrical Working Coil Stator," 2006 CES/IEEE 5th International Power Electronics and Motion Control Conference, Shanghai, 2006, pp. 1-5.
- [16] L. J. Bunni and K. Altaii, "The layer theory approach applied to induction heating systems with rotational symmetry," *Proceedings 2007 IEEE SoutheastCon*, Richmond, VA, 2007, pp. 413-420.
- [17] A. N. Ivanov, A. E. Zenkov and V. A. Bukanin, "Simulation of induction systems of complex configurations for forging technologies," 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus), Moscow, 2018, pp. 645-650.
- [18] V. Esteve et al., "Comparative Study of a Single Inverter Bridge for Dual-Frequency Induction Heating Using Si and SiC MOSFETs," in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 3, pp. 1440-1450, March 2015.
- [19] V. Esteve, J. Jordan, E. J. Dede, E. Sanchis-Kilders and E. Maset, "Induction heating inverter with simultaneous dual-frequency output," *Twenty-First Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*, 2006, APEC '06, Dallas, TX, 2006, pp. 5.

- [20] C. Chaboudez, S. Clain, R. Glardon, D. Mari, J. Rappaz and M. Swierkosz, "Numerical modeling in induction heating for axisymmetric geometries," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, no. 1, pp. 739-745, Jan. 1997.
- [21] D. Doornaert, C. Glorieux, H. De Gersem, R. Puers, W. Spileers and J. Blanckaert, "Quasi-3-D Finite-Element Method for Cylindrically Symmetric Models With Small Eccentricities," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 52, no. 3, pp. 1-4, March 2016.
- [22] T. Watanabe, S. Nagaya, N. Hirano and S. Fukui, "Elemental Development of Metal Melting by Electromagnetic Induction Heating Using Superconductor Coils," in *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 26, no. 3, pp. 1-4, April 2016.
- [23] M. Zlobina, B. Nacke, A. Nikanorov and S. Galunin, "Numerical modelling of an innovative induction heating technique for aluminium extrusion process," 2008 Third International Forum on Strategic Technologies, Novosibirsk-Tomsk, 2008, pp. 487-491.
- [24] F. Mach, P. Karban, I. Doležel, P. Šíma and Z. Jelínek, "Model of Induction Heating of Rotating Non-Magnetic Billets and its Experimental Verification," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 50, no. 2, pp. 309-312, Feb. 2014.
- [25] F. Mach, V. Štarman, P. Karban, I. Doležel and P. Kůs, "Finite-Element 2-D Model of Induction Heating of Rotating Billets in System of Permanent Magnets and its Experimental Verification," in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 5, pp. 2584-2591, May 2014.
- [26] K. Slobodník, F. Mach, P. Karban and I. Doležel, "Induction heating of rotating cylindrical nonmagnetic billets with prescribed temperature profile," *IECON 2014 - 40th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Dallas, TX, 2014, pp. 3233-3239.
- [27] O. Lucía, P. Maussion, E. J. Dede and J. M. Burdío, "Induction Heating Technology and Its Applications: Past Developments, Current Technology, and Future Challenges," in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, no. 5, pp. 2509-2520, May 2014.
- [28] Hegewaldt, F.: Berechnung der Stromverdrängung nach einem Differenzenverfahren, *Proc. of UIE Congress*, Wiesbaden, 1963.
- [29] Holmsdahl, G., Sundberg, Y.: Berechnung von Induktionserwärmung mit Digitalrechner, *Proc. of UIE Congress*, Wiesbaden, 1963.
- [30] Kolbe, E., Reiss, W.: Eine Methode zur numerischen Bestimmung der Stromdichteverteilung, *Wiss. Z., Hochsch. Elektrot., Ilmenau*, Bd. 9, no. 3, 1963.
- [31] H. Pham, H. Fujita, K. Ozaki, and N. Uchida, "Phase angle control of high-frequency resonant currents in a multiple inverter system for zonecontrol induction heating," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 26, no. 11, pp. 3357–3366, Nov. 2011.
- [32] Y. Favennec, V. Labbe, Y. Tillier and F. Bay, "Identification of magnetic parameters by inverse analysis coupled with finite-element modeling," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, no. 6, pp. 3607-3619, Nov. 2002.
- [33] A. Balaban, Y. Bakhvalov, V. Grechikhin and J. Yufanova, "Identification of Permanent Magnets of Electrical Devices Based on the Solution of Inverse Problems of Magnetostatics and Heat Transfer," 2018 X International Conference on Electrical Power Drive Systems (ICEPDS), Novocherkassk, 2018, pp. 1-4.
- [34] Miao Cui, Xiaowei Gao, Jinbo Zhang, "A new approach for the estimation of temperature-dependent thermal properties by solving transient inverse heat conduction problems", *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 58, 2012, Pages 113-119, ISSN 1290-0729.
- [35] Cheng-Hung Huang, Hsueh-Min Hsu, "An inverse problem in determining the optimal filler shape of composite materials for maximum effective thermal conductivity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 80, 2015, Pages 98-106, ISSN 0017-9310.
- [36] Bo Yu, Weian Yao, Qiang Gao, Huanlin Zhou, Chuang Xu, "A novel non-iterative inverse method for estimating boundary condition of the furnace inner wall", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Volume 87, 2017, Pages 91-97, ISSN 0735-1933.
- [37] Y. M. Li, J. Fouladgar and G. Devey, "Inverse problem methodology in an induction heating system," in *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, no. 5, pp. 3076-3079, Sept. 1994.

- [38] Anna Diligenskaya, Andrey Mandra, "Determination of Internal Heat Power during the Induction Heating Based on Solution of Linear Inverse Heat Conduction Problem", *Applied Mechanics and Materials*, vol. 792, pp. 635, 2015.
- [39] C. Hammouma, H. Zeroug and A. Attab, "A New Approach for Adaptive Frequency in series resonant inverter for Induction hardening," 2018 International Conference on Electrical Sciences and Technologies in Maghreb (CISTEM), Algiers, 2018, pp. 1-6.
- [40] Y. Song and L. Liu, "A Nonmonotone Conjugate Gradient Method for Nonlinear Optimization," 2010 Third International Joint Conference on Computational Science and Optimization, Huangshan, 2010, pp. 132-135.
- [41] M. Cao and Y. Yang, "Two Classes of Conjugate Gradient Methods for Large-Scale Unconstrained Optimization," 2011 Fourth International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization, Yunnan, 2011, pp. 37-40.
- [42] Fujian Duan and Zhongbo Sun, "A modified Liu-Storey conjugate gradient method and its global convergence for unconstrained optimization," 2010 Chinese Control and Decision Conference, Xuzhou, 2010, pp. 1585-1588.
- [43] N. Citroen, M. Ouassaid and M. Maaroufi, "Optimization of the subscribed maximum demand for the high voltage tariff consumers in Morocco using Nelder Mead method," 2015 3rd International Renewable and Sustainable Energy Conference (IRSEC), Marrakech, 2015, pp. 1-6.
- [44] K. Chang and H. Lu, "Solving quantile-based stochastic optimization problems with modified Stochastic Nelder-Mead Simplex Method," *Proceedings of the 2014 IEEE 18th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design (CSCWD)*, Hsinchu, 2014, pp. 374-379.
- [45] D. Ustun and A. Akdagli, "A study on the performance of the hybrid optimization method based on artificial bee colony and differential evolution algorithms," 2017 International Artificial Intelligence and Data Processing Symposium (IDAP), Malatya, 2017, pp. 1-5.
- [46] C. Wu and K. Tseng, "Engineering Optimization Using Modified Binary Differential Evolution Algorithm," 2010 Third International Joint Conference on Computational Science and Optimization, Huangshan, 2010, pp. 501-505.
- [47] L. B. Zhang, X. L. Xu, C. T. Sun and C. G. Zhou, "A Modified Differential Evolution Multi-objective Optimization Method," 2009 International Conference on Computational Intelligence and Natural Computing, Wuhan, 2009, pp. 511-514.
- [48] G. Wang, C. Xu and G. Liu, "The transient electromagnetic inversion based on the simplex-simulated annealing algorithm," 2018 37th Chinese Control Conference (CCC), Wuhan, 2018, pp. 4321-4324.
- [49] M. Gao and J. Tian, "Network Intrusion Detection Method Based on Improved Simulated Annealing Neural Network," 2009 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, Zhangjiajie, Hunan, 2009, pp. 261-264.
- [50] S. Yan, S. Zheng and H. Kun, "An Isolation Niche Hybrid Genetic Algorithm Based on Simulated Annealing Method," 2007 Chinese Control Conference, Hunan, 2006, pp. 776-779.
- [51] <https://www.inductionheatingexperts.com>
- [52] <http://www.wolfram.com>
- [53] <http://www.Agros2d.org>

Kapitola 9 Seznam publikací

9.1. Publikace vztahující se k tématu disertační práce

Podíly všech autorů jsou rovnoměrné

Publikace v impaktovaných časopisech

- [P1] Z. Novák, J. Kyncl, „*Real time optimization of temperature field in induction heating*“, 2019, Journal of Electrical Engineering, ISSN 1335-3632. Status: under review

Publikace v recenzovaných časopisech

Nejsou žádné publikace v recenzovaných časopisech vztahované k práci

Patenty

Nejsou žádné patenty vztahované k práci

Publikace excerpované ISI

- [P2] L. Musálek, Z. Novák, L. Žák and L. Straka, "*Model and Optimization of Induction Heating for Annealing Rotationally Symmetrical Bodies*", 2016 17th International Scientific Conference on Electric Power Engineering (EPE), Prague, 2016, pp. 1-4. ISBN 978-1-5090-0907-7.

Publikace ostatní

- [P3] Z. Novák. „*Electromagnetic and temperature coupled problems in Wolfram Mathematica*“. In: POSTER 2014 - 18th International Student Conference on Electrical Engineering, 18th International Student Conference on Electrical Engineering, Praha, 2014-05-15. Prague: Czech Technical University, 2014. ISBN 978-80-01-05499-4.
- [P4] L. Musálek, Z. Novák. „*Rotation induction heating with external rotor*“. In: HLAVÁČ, V., ed. *Nové metody a postupy v oblasti přístrojové techniky, automatického řízení a informatiky 2018*. Příbram – Podlesí, 2018-05-28/2018-05-30. Praha: ČVUT FS, Ústav přístrojové a řídicí techniky, 2018. s. 69-71. ISBN 978-80-01-06477-1.

9.2. Ostatní publikace

Publikace v impaktovaných časopisech

Nejsou žádné publikace v impaktovaných časopisech

Publikace v recenzovaných časopisech

Nejsou žádné publikace v recenzovaných časopisech

Patenty

Nejsou žádné patenty

Publikace excerptované ISI

- [P5] J. Kyncl, A. Hariram, Z. Novák. „*Equivalent Circuit Model for a Single Phase Transformer*“. In: ISTET 2013. Plzeň, 2013-06-24/2013-06-26. Plzeň: ZČU Plzeň, 2013. ISBN 978-80-261-0246-5.
- [P6] L. Musálek, J. Doubek, J. Kyncl, Z. Novák, L. Straka. „*Static and Dynamic Characteristics of PPMT Electromagnet*“. In: XXXVI MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA Z PODSTAW ELEKTROTECHNIKI I TEORII OBWODÓW. Ustron, 2013-02-22/2013-05-25. Ustron: Instytut Elektrotechniki i Informatyki Politechniki Slaskiej, 2013. s. 75-76. ISBN 978-83-85940-35-7.

Publikace ostatní

- [P7] J. Novák, M. Novák, Z. Novák. Vývoj pohonu elektrobuse. In: HLAVÁČ, V., ed. *Nové metody a postupy v oblasti přístrojové techniky, automatického řízení a informatiky 2018*. Příbram – Podlesí, 2018-05-28/2018-05-30. Praha: ČVUT FS, Ústav přístrojové a řídicí techniky, 2018. s. 72-79. ISBN 978-80-01-06477-1.
- [P8] Z. Novák, A. Hariram. „*Study of Under Floor Hydronic System Heating Pipes*“. In: *POSTER 2013 - 17th International Student Conference on Electrical Engineering*. 17th International Student Conference on Electrical Engineering, Prague, 2013-05-16. Prague: Czech Technical University, 2013. ISBN 978-80-01-05242-6.
- [P9] P. Matyska, L. Musálek, J. Kyncl, R. Najman, M. Zamazalová, Z. Novák, A. Hariram. „*Vývoj matematického modelu pro optimalizaci provozu budov*“. In: ŠIKULA, O. a J. HIRŠ, eds. *Simulace budov a techniky prostředí 2012*. Brno, 2012-11-08/2012-11-09. Praha: IBPSA-CZ, 2012. s. 83-86. ISBN 978-80-260-3392-9.

9.3. Ohlasy

Doposud nejsou žádné mé publikace citovány.